Universidad de Valladolid

Escuela de Doctorado Universidad de Valladolid

PROGRAMA DE DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN TRANSDISCIPLINAR EN EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL:

DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA PROPORCIONALIDAD EN EL PRIMER CICLO DE SECUNDARIA

Presentada por Sergio Martínez Juste para optar al grado de Doctor por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:

José M. Muñoz Escolano

Antonio M. Oller Marcén

Tomás Ortega del Rincón

A mis padres y a mi hermana,

Natividad, José y Susana

Al emprender el viaje para Ítaca

desea que el camino sea largo,

lleno de peripecias, lleno de saberes.

(ÍTACA, Constantino P. Cavafis)

Quizá, cuando se comienza una empresa como la que se describe en esta memoria, se desea que el viaje sea fácil y rápido y, por tanto, los obstáculos e imprevistos que lo alargan y dificultan se convierten en molestias que hacen desear no haberse puesto en ruta. Sin embargo, cuando se acerca el final del viaje y se atisba el destino, la dureza del trayecto, por su extensión y dificultad, se percibe como la verdadera recompensa. Lo enriquecedor no es llegar ni, por supuesto, quedarse quieto, lo importante es el viaje.

Antes de relatar mi trayecto en las siguientes páginas, quiero recordar y agradecer a todos los que me impulsaron a ponerme en marcha y me han acompañado en la travesía.

Para empezar, debo expresar mi más sincero agradecimiento a los tres directores bajo cuya tutela ha sido posible la elaboración de esta tesis doctoral. Al Dr. Tomás Ortega por aceptar la codirección de este trabajo para su defensa en la Universidad de Valladolid y sus expertas y decisivas aportaciones en las diferentes etapas del proceso de investigación. A los Dres. José M. Muñoz y Antonio M. Oller, por convencerme para que me embarcara en este viaje. Participar de las largas discusiones entre José M. y Antonio sobre referentes teóricos, metodología, diseño, análisis e interpretación de los resultados del presente trabajo y de los artículos y comunicaciones que hemos elaborado en coautoría durante este proceso, ha supuesto un enriquecimiento personal y académico mucho mayor del que cabía esperar al comienzo de esta aventura. Es difícil expresar mi enorme gratitud por su entrega y su gestión en la dirección de este trabajo. También quiero agradecer al Dr. José María Marbán que haya aceptado tutelarme como alumno de la escuela de doctorado en estos últimos cursos y que me haya guiado en el proceso administrativo de presentación y depósito.

La parte experimental de la investigación se llevó a cabo a lo largo de cuatro cursos académicos en el IES Leonardo de Chabacier de Calatayud. Quiero dar las gracias a toda la comunidad educativa de este centro en el que consolidé mi carrera como profesor y comencé a dar mis primeros pasos como investigador. A los miembros de los diferentes equipos directivos que facilitaron en todo momento la organización que requería la experimentación. A todos los compañeros del departamento de matemáticas que colaboraron durante las fases de implementación de la propuesta, sin cuya ayuda hubiera sido imposible recopilar una buena parte de la información que enriquece esta memoria. A los alumnos y sus familias, que se mostraron participativos y comprensivos con los eventuales inconvenientes que pudieron provocar las características metodológicas de la investigación.

La desinteresada colaboración de expertos externos que han visualizado las innumerables horas de grabación de mis intervenciones en el aula y han contribuido a la validación de los resultados y a la mejora del diseño e implementación, merece un agradecimiento específico. Gracias a los Dres. Alberto Arnal, Rafael Escolano, Pablo Beltrán y Janeth Cárdenas por invertir su tiempo en esta colaboración.

El viaje se ha dilatado ocho años académicos debido, en parte, a mi intensa actividad profesional como profesor de secundaria, como profesor asociado en la Universidad de Zaragoza y, recientemente, como asesor en el Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón. Por tanto, son muchos los compañeros que me han acompañado en esta travesía y que merecen mi agradecimiento. Mis nuevos compañeros en la Dirección General de Planificación y Equidad con los que he compartido actividad laboral en los últimos meses de elaboración, revisión y depósito. Gracias por el acogimiento y el estupendo ambiente de trabajo. Mis colegas del área de didáctica de la matemática en la Universidad de Zaragoza que siempre se han interesado por la evolución del proyecto tanto en las charlas informales de despacho y café, como en las discusiones profesionales en torno al seminario de didáctica de la matemática. Eva, Patricia, Inés, Óscar, Carmen, Juan, Elena, Nuria, Mónica, José Manuel, Víctor, Alejandra, Antonio, … gracias. Mis compañeros de matemáticas del IES Leonardo de Chabacier, donde realicé la experimentación y comencé la difusión de la propuesta. Daniel, Maribel, Fina, María, Eduardo, Ana C., Ana M., Raúl, gracias. Mis compañeros en el IES Pilar Lorengar, que se han interesado por incluir esta propuesta didáctica en la programación del instituto y en formarse para poderla llevar a cabo en sus clases. Daniel, Fernando, Belén, Alberto, Miryam, Arancha, Teresa, José, gracias. Aurora, que no solo ha querido acompañarme en las nuevas aventuras que han ido llegando y en las que están por llegar, sino que ha leído con calma e interés el relato de la que acaba ahora, muchas, muchas gracias.

El ánimo y el apoyo necesarios para llegar cuerdo al destino debo agradecérselo a todos mis amigos. Ellas y ellos sienten mis modestos logros como propios y se enorgullecen de ver que concluyo este proyecto. Yo me siento orgulloso de tenerlos. Gracias Raúl G., Fernando, Carlos, Ana, Amaya, Kenji, Antonio, Raúl M., …

Para terminar estos agradecimientos, debo mencionar a mi familia, a la que está dedicada esta obra. A mis padres, Natividad y José, y a mi hermana, Susana. Porque todo lo que soy es gracias a ellos y, pese a ello, son las personas a las que menos les muestro mi gratitud en el día a día. Ellos sufren mis momentos de estrés, de mal humor, de cansancio, y saben entenderme y acompañarme. Sufren mi falta de tiempo y los vaivenes de mi agenda, y me ayudan en todo lo que pueden. Ellos conocen todos mis defectos y aun así me quieren. Gracias.

Una de las últimas veces que me trasladé a su casa para pasar unos días cuidándolo antes de que muriese, pude llevarle un borrador de la memoria que incluía estos agradecimientos. Saber que pudo escuchar estas palabras de agradecimiento en voz de mi hermana en esos últimos días compensa en parte la infinita tristeza de aceptar que no pudo ver cómo concluía este proyecto para el que tanto apoyo me brindó. Papá, te quiero, hasta siempre.

Índice general

Índice de tablas xvii

Índice de imágenes xxvii

Índice de figuras xxxiii

Capítulo I: Planteamiento del problema y objetivos de investigación 1

I.1. Introducción 1

I.2. Contextualización del problema de investigación 2

I.2.1. Relevancia de la proporcionalidad 3

I.2.1.1. Relevancia histórica y cultural 3

I.2.1.2. Relevancia instrumental y propedéutica 4

I.2.1.3. Relevancia práctica y pública 5

I.2.1.4. Relevancia formativa 7

I.2.1.5. Relevancia curricular 8

I.2.1.6. Relevancia en la investigación en educación matemática 8

I.2.2. Deficiencias en la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad 9

I.2.3. La necesidad de investigar en el aula 13

I.3. Problema de investigación y objetivos del trabajo 15

I.4. Presentación de los focos de investigación 17

I.5. Resumen de la experimentación 18

I.6. Estructura y plan de la memoria 19

I.6.1. Capítulo II: Marco teórico y antecedentes 21

I.6.2. Capítulo III: Metodología de investigación 23

I.6.3. Capítulo IV: Características de la propuesta didáctica 24

I.6.4. Capítulos V, VI, VII, VIII y IX: Desarrollo de los ciclos de investigación-acción 24

I.6.5. Capítulo X: Conclusiones, difusión y trabajo futuro 26

Capítulo II: Marco teórico y antecedentes 27

II.1. El análisis didáctico 28

II.1.1. El análisis de contenido y el análisis conceptual 29

II.1.2. El análisis cognitivo 31
II.1.3. El análisis de la instrucción 32
II.1.4. El análisis de la actuación o análisis evaluativo 32

II.2. Aspectos conceptuales y del contenido de la proporcionalidad 33

II.2.1. Aproximación histórica y génesis epistemológica de los conceptos asociados a la proporcionalidad 33
II.2.2. Estructura conceptual y sistemas de representación 39
II.2.2.1. El concepto de razón y de proporción 39
II.2.2.2. Situaciones de proporcionalidad directa 45
II.2.2.3. El concepto de porcentaje 51
II.2.2.4. Estructura multiplicativa de las situaciones de proporcionalidad 55
II.2.2.5. Situaciones de proporcionalidad inversa 61
II.2.2.6. Situaciones de proporcionalidad compuesta 64
II.2.3. Fenómenos organizados por la proporcionalidad 70
II.2.4. Tipos de tareas escolares: estructura y estrategias de resolución 73
II.2.4.1. Distintas clasificaciones de problemas escolares 74
II.2.4.2. Problemas de proporcionalidad simple directa 77
II.2.4.3. Estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad simple directa 81
II.2.4.4. Problemas de proporcionalidad inversa y compuesta 84
II.2.4.5. Estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad simple inversa 88
II.2.4.6. Estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad compuesta 90
II.2.4.7. Repartos proporcionales 96
II.2.4.8. Mezclas 102
II.2.4.9. Porcentajes. Aumentos y disminuciones. Interés simple y compuesto 106
II.2.5. La proporcionalidad en la práctica educativa actual 109
II.2.5.1. La proporcionalidad aritmética en el currículo español 109
II.2.5.2. La proporcionalidad aritmética en los libros de texto 114

II.3. Aspectos cognitivos de la proporcionalidad 121

II.3.1. El razonamiento proporcional 122
II.3.2. Actuaciones de los alumnos en tareas de proporcionalidad 125
II.3.2.1. Situaciones de proporcionalidad simple directa y consideraciones generales 125
II.3.2.2. La transición entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo 130
II.3.2.3. Porcentajes 131
II.3.2.4. Situaciones de proporcionalidad inversa y proporcionalidad compuesta 135
II.3.2.5. Repartos proporcionales 138
II.3.3. Factores que influyen en la actuación de los alumnos 139
II.3.3.1. Estructura numérica 140
II.3.3.2. Tipo de magnitudes 143
II.3.3.3. Variables de contorno 147
II.3.3.4. Estructura multiplicativa 147

II.4. Propuestas y experiencias de enseñanza desde la investigación educativa....................148

II.4.1. Dirigidas a alumnos de primaria y secundaria 148

II.4.2. Dirigidas a profesores en formación o en ejercicio 153

II.4.3. Experiencia previa con la propuesta didáctica 154

II.4.3.1. Fase de planificación y diseño 154

II.4.3.2. Fase de acción 155

II.4.3.3. Fase de observación 155

II.4.3.4. Fase de reflexión 156

Capítulo III: Metodología de investigación 161

III.1. La investigación-acción...161

III.1.1. La investigación-acción como metodología de investigación cualitativa en ciencias sociales 161

III.1.2. Fases de la investigación-acción 164

III.1.2.1. Fase de planificación 164

III.1.2.2. Fase de acción 165

III.1.2.3. Fase de observación 166

III.1.2.4. Fase de reflexión 167

III.1.3. La investigación-acción en educación matemática... 168

III.1.4. La investigación-acción y el análisis didáctico 169

III.2. Calidad y ética en investigación cualitativa 171

III.2.1. Aspectos sobre la calidad.. 171

III.2.1.1. Fiabilidad 171

III.2.1.2. Validación... 171

III.2.1.3. Relevancia 172

III.2.2. Aspectos éticos 173

III.2.2.1. Consentimiento... 173

III.2.2.2. Confidencialidad y anonimato.. 174

III.3. Descripción de la experimentación. Método 174

III.3.1. Características generales de la investigación.. 174

III.3.2. Contexto social en el que se actúa.. 175

III.3.3. El profesor-investigador.. 178

III.3.4. Génesis del problema de investigación 179

III.3.5. El equipo de investigación 179

III.3.6. Diseño de los ciclos de investigación-acción.. 180

III.3.6.1. Fases de planificación.. 183

III.3.6.2. Fases de acción.. 184

III.3.6.3. Fases de observación 185

III.3.6.4. Fases de reflexión ... 185

III.3.7. Fuentes de obtención de datos experimentales ... 186

III.3.7.1. Diario de clase ... 187

III.3.7.2. Producciones de los alumnos ... 188

III.3.7.3. Entrevistas semiestructuradas ... 189

III.3.7.4. Grabación de las sesiones y observadores externos ... 192

III.3.8. Categorías de análisis y tratamiento de datos ... 194

III.3.8.1. Categorías de análisis del contenido ... 194

III.3.8.2. Categorías de análisis de la comprensión del contenido ... 195

III.3.8.3. Categorías de análisis de la instrucción ... 205

III.3.8.4. Análisis cuantitativo de datos ... 206

III.3.9. Aspectos sobre la calidad y la ética de esta investigación ... 206

III.3.9.1. Sobre la fiabilidad ... 207

III.3.9.2. Sobre la validación ... 207

III.3.9.3. Sobre la relevancia ... 207

III.3.9.4. Sobre el consentimiento de los participantes ... 208

III.3.9.5. Sobre la confidencialidad y el anonimato ... 209

Capítulo IV: Características de la propuesta didáctica 211

IV.1. Ideas clave que sustentan la propuesta didáctica ... 211

IV.1.1. Ideas sobre aspectos conceptuales, del contenido y cognitivos ... 212

IV.1.2. Focos prioritarios del diseño y de la investigación ... 214

IV.1.2.1. Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad ... 217

IV.1.2.2. Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa ... 218

IV.1.2.3. Foco 3: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa ... 219

IV.1.2.4. Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta ... 220

IV.1.2.5. Foco 5: Repartos proporcionales ... 220

IV.1.2.6. Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados ... 221

IV.1.3. Ideas sobre aspectos instruccionales ... 223

IV.2. Tratamiento de los conceptos y contenidos clave ... 224

IV.2.1. Reconocimiento de magnitudes y vocabulario asociado ... 225

IV.2.2. Razón y situaciones de proporcionalidad simple directa ... 226

IV.2.2.1. Problemas de valor perdido ... 230

IV.2.2.2. Problemas de comparación cuantitativa ... 232

IV.2.2.3. Problemas de comparación cualitativa ... 233

IV.2.3. Situaciones de proporcionalidad simple inversa ... 236

IV.2.3.1. Problemas de valor perdido ... 239

IV.2.3.2. Problemas de comparación cuantitativa ... 240

IV.2.3.3. Problemas de comparación cualitativa ... 242

IV.2.4. Situaciones y problemas de proporcionalidad compuesta ... 243

IV.2.5. Repartos proporcionales 245
IV.2.6. Porcentajes 247
IV.2.6.1. Problemas de cálculo directo e inverso 248
IV.2.6.2. Problemas de aumentos y disminuciones porcentuales 250

IV.3. Distribución de los contenidos por curso 252

IV.4. Metodología de enseñanza 254

IV.4.1. Las situaciones introductorias 255
IV.4.2. Las actividades de clase 256
IV.4.3. Las actividades individuales de refuerzo 257
IV.4.4. Los debates y puestas en común con el grupo clase 258
IV.4.5. Los momentos de institucionalización 259

Capítulo V: Segundo ciclo de investigación-acción en 1º de ESO 261

V.1. Fase de planificación 261

V.1.1. Decisiones tomadas tras la observación del primer ciclo 262
V.1.1.1. Cambios en el diseño 262
V.1.1.2. Cambios sobre aspectos cognitivos 262
V.1.1.3. Cambios en la metodología de aula y de investigación 264
V.1.2. Secuenciación y temporalización 264
V.1.3. Diseño curricular de las sesiones de clase 265
V.1.3.1. Primera sesión: Magnitudes 265
V.1.3.2. Segunda sesión: Razón entre magnitudes 269
V.1.3.3. Tercera sesión: Magnitudes directamente proporcionales 275
V.1.3.4. Cuarta sesión: Comparación de razones I 278
V.1.3.5. Quinta sesión: Comparación de razones II 284
V.1.3.6. Sexta sesión: Problemas de valor perdido I 287
V.1.3.7. Séptima sesión: Problemas de valor perdido II 292
V.1.3.8. Octava sesión: Proporcionalidad compuesta 295
V.1.3.9. Novena sesión: Porcentajes I 305
V.1.3.10. Décima sesión: Porcentajes II 308
V.1.3.11. Undécima sesión: Repaso 312
V.1.4. Diseño de la prueba escrita 315

V.2. Fase de acción 321

V.2.1. Participantes 321
V.2.2. Calendario de actuación 322
V.2.3. Desarrollo de las sesiones 323
V.2.3.1. Primera sesión 323
V.2.3.2. Segunda sesión 324

V.2.3.3. Tercera sesión 325
V.2.3.4. Cuarta sesión 325
V.2.3.5. Quinta sesión 326
V.2.3.6. Sexta sesión 326
V.2.3.7. Séptima sesión 327
V.2.3.8. Octava sesión 327
V.2.3.9. Novena sesión 328
V.2.3.10. Décima sesión 329
V.2.3.11. Undécima sesión 329
V.2.3.12. Prueba escrita 329

V.3. Fase de observación 330

V.3.1. Análisis de las producciones escritas 330
V.3.1.1. Reconocimiento de magnitudes y uso del vocabulario asociado 331
V.3.1.2. Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones 334
V.3.1.3. Problemas de comparación cuantitativa de proporcionalidad simple directa . 349
V.3.1.4. Problemas de comparación cualitativa de proporcionalidad simple directa.... 362
V.3.1.5. Problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa 367
V.3.1.6. Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta 380
V.3.1.7. Porcentajes 391

V.3.2. Comparativa con los resultados del grupo de control 402
V.3.2.1. Análisis comparativo según las categorías generales 403
V.3.2.2. Análisis comparativo según las categorías específicas 405

V.3.3. Entrevistas semiestructuradas 415
V.3.3.1. Análisis de la entrevista a A3.2 416
V.3.3.2. Análisis de la entrevista a A1.1 418
V.3.3.3. Análisis de la entrevista a A4.1 422

V.3.4. Observador externo 426
V.3.4.1. Tratamiento de los contenidos y metodología 426
V.3.4.2. Actuación del profesor-investigador 427
V.3.4.3. Actuación de los alumnos 428
V.3.4.4. Interacciones profesor-alumno 429
V.3.4.5. Otras incidencias y comentarios generales sobre la sesión 430

V.4. Fase de reflexión 431

V.4.1. Sobre el diseño de la propuesta 431

V.4.2. Sobre la comprensión de los alumnos 434
V.4.2.1. Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad 434
V.4.2.2. Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionad simple directa 435
V.4.2.3. Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta 437
V.4.2.4. Foco 6: Interpretación del porcentajes y problemas asociados 438

V.4.3. Sobre la metodología y la labor del profesor-investigador 439
V.4.3.1. Reflexiones sobre la instrucción y la metodología de enseñanza 439

V.4.3.2. Reflexiones sobre la metodología de investigación 441
V.4.4. Sobre el funcionamiento general de la propuesta 442

Capítulo VI: Primer ciclo de investigación-acción en 2º de ESO 445

VI.1. Fase de planificación 445

VI.1.1. Decisiones tomadas tras las observaciones de los ciclos anteriores 446
VI.1.1.1. Sobre el diseño.. 446
VI.1.1.2. Sobre aspectos cognitivos 447
VI.1.1.3. Sobre la metodología de aula y de investigación 448
VI.1.2. Secuenciación y temporalización... 448
VI.1.3. Diseño curricular de las sesiones de clase 450
VI.1.3.1. Primera sesión: Razones y condición de regularidad 450
VI.1.3.2. Segunda sesión: Situaciones de proporcionalidad simple inversa 455
VI.1.3.3. Tercera sesión: Problemas de proporcionalidad simple I.............................. 460
VI.1.3.4. Cuarta sesión: Problemas de proporcionalidad simple II 463
VI.1.3.5. Quinta sesión: Problemas de proporcionalidad simple III............................. 467
VI.1.3.6. Sexta sesión: Problemas de proporcionalidad compuesta I........................... 470
VI.1.3.7. Séptima sesión: Problemas de proporcionalidad compuesta II 475
VI.1.3.8. Octava sesión: Repartos proporcionales... 479
VI.1.3.9. Novena sesión: Porcentajes I 483
VI.1.3.10. Décima sesión: Porcentajes II.. 487
VI.1.3.11. Undécima sesión: Aumentos y disminuciones porcentuales I 489
VI.1.3.12. Duodécima sesión: Aumentos y disminuciones porcentuales II 496
VI.1.3.13. Decimotercera sesión: Repaso.. 500
VI.1.4. Diseño de la prueba escrita 503

VI.2. Fase de acción 509

VI.2.1. Participantes 510
VI.2.2. Calendario de actuación 511
VI.2.3. Desarrollo de las sesiones... 511
VI.2.3.1. Primera sesión.. 512
VI.2.3.2. Segunda sesión 512
VI.2.3.3. Tercera sesión 513
VI.2.3.4. Cuarta sesión.. 513
VI.2.3.5. Quinta sesión 514
VI.2.3.6. Sexta sesión.. 515
VI.2.3.7. Séptima sesión 515
VI.2.3.8. Octava sesión 516
VI.2.3.9. Novena sesión... 516
VI.2.3.10. Décima sesión 517
VI.2.3.11. Undécima sesión.. 517

VI.3. Fase de observación 518

VI.3.1. Análisis de las producciones escritas 518
VI.3.1.1. Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad 518
VI.3.1.2. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa 530
VI.3.1.3. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa.......... 540
VI.3.1.4. Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta.......... 552
VI.3.1.5. Repartos proporcionales 563
VI.3.1.6. Interpretación del porcentaje y problemas asociados 570

VI.3.2. Comparativa con los resultados del grupo de control 581
VI.3.2.1. Análisis comparativo según las categorías generales 581
VI.3.2.2. Análisis comparativo según las categorías específicas 583

VI.3.3. Observador externo 593
VI.3.3.1. Tratamiento de los contenidos y metodología.......... 594
VI.3.3.2. Actuación del profesor-investigador 594
VI.3.3.3. Actuación de los alumnos 596
VI.3.3.4. Interacciones profesor-alumno 597
VI.3.3.5. Otras incidencias y comentarios generales sobre la sesión 597

VI.4. Fase de reflexión 598

VI.4.1. Sobre el diseño de la propuesta 598

VI.4.2. Sobre la comprensión de los alumnos 600
VI.4.2.1. Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad 600
VI.4.2.2. Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa 601
VI.4.2.3. Foco 3: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa 601
VI.4.2.4. Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta 602
VI.4.2.5. Foco 5: Repartos proporcionales 604
VI.4.2.6. Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados.......... 606

VI.4.3. Sobre la metodología y la labor del profesor-investigador 607
VI.4.3.1. Reflexiones sobre la instrucción y la metodología de enseñanza.......... 607
V.4.3.2. Reflexiones sobre la metodología de investigación 609

VI.4.4. Sobre el funcionamiento general de la propuesta 609

Capítulo VII: Tercer ciclo de investigación-acción en 1º de ESO 611

VII.1. Fase de planificación.......... 611

VII.1.1. Decisiones tomadas tras las observaciones de los ciclos anteriores 611
VII.1.1.1. Sobre el diseño.......... 611
VII.1.1.2. Sobre aspectos cognitivos 613
VII.1.1.3 Sobre la metodología de aula y de investigación 613

VII.1.2. Secuenciación y temporalización.......... 613

VII.1.3. Cambios en el diseño curricular de algunas sesiones de clase 614
VII.1.3.1. Novena sesión: El porcentaje como tanto por cien.......... 614

VII.1.3.2. Décima sesión: Cálculo directo con porcentajes 619

VII.2. Fase de acción 623

VII.2.1. Participantes 623

VII.2.2. Calendario de actuación 624

VII.2.3. Desarrollo de las sesiones 625

VII.2.3.1. Primera sesión 625

VII.2.3.2. Segunda sesión 625

VII.2.3.3. Tercera sesión 626

VII.2.3.4. Cuarta sesión 627

VII.2.3.5. Quinta sesión 627

VII.2.3.6. Sexta sesión 628

VII.2.3.7. Séptima sesión 629

VII.2.3.8. Octava sesión 629

VII.2.3.9. Novena sesión 629

VII.2.3.10. Décima sesión 630

VII.2.3.11. Undécima sesión 630

VII.2.3.12. Duodécima sesión 631

VII.2.3.13. Prueba escrita 631

VII.3. Fase de observación 631

VII.3.1. Análisis de las producciones escritas 632

VII.3.1.1. Reconocimiento de magnitudes y uso del vocabulario asociado 632

VII.3.1.2. Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones 635

VII.3.1.3. Problemas de comparación cuantitativa de proporcionalidad simple directa 642

VII.3.1.4. Problemas de comparación cualitativa de proporcionalidad simple directa .. 647

VII.3.1.5. Problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa 649

VII.3.1.6. Problemas de proporcionalidad compuesta 656

VII.3.1.7. Porcentajes 662

VII.3.2. Comparativa con los resultados del grupo de control 670

VII.3.2.1. Análisis comparativo según las categorías generales 671

VII.3.2.2. Análisis comparativo según las categorías específicas. 672

VII.3.3. Entrevistas semiestructuradas 680

VII.3.3.1. Análisis de la entrevista a D5.2 681

VII.3.3.2. Análisis de la entrevista a C6.2 684

VII.3.3.3. Análisis de la entrevista a C4.1 688

VII.3.3.4. Análisis de la entrevista a B5.1 691

VII.3.4. Observador externo 695

VII.3.4.1. Tratamiento de los contenidos y metodología 695

VII.3.4.2. Actuación del profesor-investigador 696

VII.3.4.3. Actuación de los alumnos 696

VII.3.4.4. Interacciones profesor-alumno 698

VII.3.4.5. Otras incidencias y comentarios generales sobre la sesión 698

VII.4. Fase de reflexión ... 699

VII.4.1. Sobre el diseño de la propuesta ... 699

VII.4.2. Sobre la comprensión de los alumnos ... 701

VII.4.2.1. Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad ... 701

VII.4.2.2. Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa ... 702

VII.4.2.3. Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta ... 703

VII.4.2.4. Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados... 703

VII.4.3. Sobre la metodología y la labor del profesor-investigador ... 704

VII.4.3.1. Reflexiones sobre la instrucción y la metodología de enseñanza... 704

VII.4.4. Sobre el funcionamiento general de la propuesta ... 705

Capítulo VIII: Segundo ciclo de investigación-acción en 2º de ESO 707

VIII.1. Fase de planificación... 707

VIII.1.1. Decisiones tomadas tras las observaciones de los ciclos anteriores ... 707

VIII.1.1.1. Sobre el diseño... 707

VIII.1.1.2. Sobre aspectos cognitivos ... 709

VIII.1.1.3 Sobre la metodología de aula y de investigación ... 712

VIII.1.2. Secuenciación y temporalización... 712

VIII.1.3. Cambios en el diseño curricular de algunas sesiones de clase ... 713

VIII.1.3.1. Octava sesión: Repartos proporcionales ... 713

VIII.1.3.2. Novena sesión: El porcentaje como tanto por cien... 716

VIII.1.3.3. Décima sesión: Cálculo directo e inverso con porcentajes... 720

VIII.1.3.4. Undécima sesión: Aumentos y disminuciones porcentuales I... 722

VIII.1.3.5. Duodécima sesión: Aumentos y disminuciones porcentuales II... 727

VIII.2. Fase de acción ... 729

VIII.2.1. Participantes ... 729

VIII.2.2. Calendario de actuación ... 730

VIII.2.3. Desarrollo de las sesiones... 730

VIII.2.3.1. Primera sesión... 731

VIII.2.3.2. Segunda sesión... 731

VIII.2.3.3. Tercera sesión ... 731

VIII.2.3.4. Cuarta sesión... 732

VIII.2.3.5. Quinta sesión... 732

VIII.2.3.6. Sexta sesión... 733

VIII.2.3.7. Séptima sesión ... 733

VIII.2.3.8. Octava sesión ... 733

VIII.2.3.9. Novena sesión ... 734

VIII.2.3.10. Décima sesión ... 734

VIII.2.3.11. Undécima sesión ... 735

VIII.2.3.12. Duodécima sesión ... 735

VIII.2.3.13. Decimotercera sesión 735
VIII.2.3.14. Prueba escrita 736

VIII.3. Fase de observación 736

VIII.3.1. Análisis de las producciones escritas 736
VIII.3.1.1. Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad 737
VIII.3.1.2. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa 743
VIII.3.1.3. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa 747
VIII.3.1.4. Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta 751
VIII.3.1.5. Repartos proporcionales 756
VIII.3.1.6. Interpretación del porcentaje y problemas asociados 763
VIII.3.2. Comparativa con los resultados del grupo de control 768
VIII.3.2.1. Análisis comparativo según las categorías generales 768
VIII.3.2.2. Análisis comparativo según las categorías específicas 770
VIII.3.3. Entrevistas semiestructuradas 780
VIII.3.3.1. Análisis de la entrevista a A10.2 780
VIII.3.3.2. Análisis de la entrevista a A2.2 782
VIII.3.3.3. Análisis de la entrevista a A8.2 784
VIII.3.4. Observador externo 788
VIII.3.4.1. Tratamiento de los contenidos y metodología 788
VIII.3.4.2. Actuación del profesor-investigador 789
VIII.3.4.3. Actuación de los alumnos 789
VIII.3.4.4. Interacciones profesor-alumno 790
VIII.3.4.5. Otras incidencias y comentarios generales sobre la sesión 791

VIII.4. Fase de reflexión 791

VIII.4.1. Sobre el diseño de la propuesta 792
VIII.4.2. Sobre la comprensión de los alumnos 792
VIII.4.2.1. Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad 792
VIII.4.2.2. Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa 792
VIII.4.2.3. Foco 3: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa 793
VIII.4.2.4. Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta 793
VIII.4.2.5. Foco 5: Repartos proporcionales 794
VIII.4.2.6. Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados 795
VIII.4.3. Sobre la metodología y la labor del profesor-investigador 796

Capítulo IX: Tercer ciclo de investigación-acción en 2º de ESO 797

IX.1. Fase de planificación 797

IX.2. Fase de acción 799

IX.2.1. Participantes 799
IX.2.2. Calendario de actuación 799

IX.2.3. Desarrollo de las sesiones 800
IX.2.3.1. Primera sesión 800
IX.2.3.2. Segunda sesión 800
IX.2.3.3. Tercera sesión 800
IX.2.3.4. Cuarta sesión 801
IX.2.3.5. Quinta sesión 801
IX.2.3.6. Sexta sesión 801
IX.2.3.7. Séptima sesión 802
IX.2.3.8. Octava sesión 802
IX.2.3.9. Novena sesión 802
IX.2.3.10. Décima sesión 803
IX.2.3.11. Undécima sesión 803
IX.2.3.12. Duodécima sesión 803
IX.2.3.13. Decimotercera sesión 804
IX.2.3.14. Prueba escrita 804

IX.3. Fase de observación 804

IX.3.1. Análisis de las producciones escritas 804
IX.3.1.1. Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad 805
IX.3.1.2. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa 810
IX.3.1.3. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa 812
IX.3.1.4. Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta 815
IX.3.1.5. Repartos proporcionales 819
IX.3.1.6. Porcentajes y problemas asociados 824

IX.3.2. Comparativa con los resultados del grupo de control 828
IX.3.2.1. Análisis comparativo según las categorías generales 828
IX.3.2.2. Análisis comparativo según las categorías específicas 829

IX.3.3. Entrevistas semiestructuradas 835

IX.3.4. Observador externo 836
IX.3.4.1. Tratamiento de los contenidos y metodología 836
IX.3.4.2. Actuación del profesor-investigador 837
IX.3.4.3. Actuación de los alumnos 838
IX.3.4.4. Interacciones profesor-alumno 839
IX.3.4.5. Otras incidencias y comentarios generales sobre la sesión 840

IX.4. Fase de reflexión 840

IX.4.1. Sobre el diseño de la propuesta 840

IX.4.2. Sobre la comprensión de los alumnos 841
IX.4.2.1. Foco 5: Repartos proporcionales 841
IX.4.2.2. Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados 842

IX.4.3. Sobre la metodología y la labor del profesor-investigador 842

IX.4.4. Sobre el funcionamiento general de la propuesta 842

Capítulo X: Conclusiones, difusión y trabajo futuro 845

X.1. Conclusiones relativas al primer objetivo....846

X.1.1. Modificación de la propuesta de enseñanza 849
X.1.1.1. Reorganización de la secuencia didáctica 849
X.1.1.2. Cambios en el tratamiento de la proporcionalidad simple directa e inversa ... 851
X.1.1.3. Rediseño de la propuesta de enseñanza del porcentaje.... 852
X.1.2. Diseño de una propuesta completa para 1º y 2º de ESO 854
X.1.2.1. Diseño de una propuesta de enseñanza para la proporcionalidad compuesta 855
X.1.2.2. Diseño de una propuesta de enseñanza para los repartos proporcionales...... 856

X.2. Conclusiones relativas al segundo objetivo 858

X.2.1. Adecuación de la propuesta a la secuenciación y temporalización.... 858
X.2.2. Viabilidad de la propuesta en términos cognitivos.... 860
X.2.2.1. Desempeño del alumnado de los grupos experimentales 860
X.2.2.2. Comparación entre los grupos experimentales y los grupos de control 866
X.2.3. Viabilidad de la metodología de aula.... 868

X.3. Limitaciones del trabajo 871

X.4. Difusión, alcance y transferencia 874

X.4.1. Difusión 875
X.4.1.1. Artículos de investigación.... 875
X.4.1.2. Comunicaciones a congresos 876
X.4.2. Transferencia 878
X.4.2.1. Dirección de trabajos académicos que utilizan la propuesta didáctica 878
X.4.2.2. Creación de materiales didácticos.... 879
X.4.2.3. Proyectos de innovación educativa en ESO.... 879
X.4.3. Otras actividades de divulgación 881

X.5. Líneas de trabajo futuro 882

X.5.1. Enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en educación primaria y secundaria 882
X.5.2. Formación inicial de maestros y profesores 883
X.5.3. Análisis de libros de texto 883
X.5.4. Desarrollo profesional y curricular mediante el desarrollo de *lesson studies* 884
X.5.5. Modelos de diagnóstico cognitivos centrados en la proporcionalidad 884
X.5.6. Estudios comparativos internacionales 885

Referencias bibliográficas 887

Anexo I: Fichas de trabajo de los alumnos y pruebas escritas 913

AI.1. Fichas de trabajo 1º de ESO....913

AI.2. Fichas de trabajo de 2º de ESO **913**

AI.3. Prueba escrita de 1º de ESO **913**

AI.4. Prueba escrita de 2º de ESO **914**

Anexo II: Diarios de clase 915

AII.1. Diarios de clase del ciclo II-1 .... **915**

AII.2. Diario de clase del ciclo I-2 .... **915**

AII.3. Diarios de clase del ciclo III-1 .... **915**

AII.4. Diario de clase del ciclo II-2 .... **916**

AII.5. Diario de clase del ciclo III-2 .... **916**

Anexo III: Producciones de los alumnos 917

AIII.1. Producciones del ciclo II-1 .... **917**

AIII.2. Producciones del ciclo I-2 .... **917**

AIII.3. Producciones del ciclo III-1 .... **917**

AIII.4. Producciones del ciclo II-2 .... **918**

AIII.5. Producciones del ciclo III-2 .... **918**

Anexo IV: Entrevistas 919

AIV.1. Entrevistas en el ciclo II-1 .... **919**

AIV.1.1. Entrevista al alumno A3.2 919

AIV.1.2. Entrevista al alumno A1.1 919

AIV.1.3. Entrevista al alumno A4.1 919

AIV.2. Entrevistas en el ciclo III-1 .... **920**

AIV.2.1. Entrevista al alumno D5.2 920

AIV.2.2. Entrevista al alumno C6.2 920

AIV.2.3. Entrevista al alumno C4.1 920

AIV.2.4. Entrevista al alumno B5.1 920

AIV.3. Entrevistas en el ciclo II-2 .... **921**

AIV.3.1. Entrevista al alumno A10.2 921

AIV.3.2. Entrevista al alumno A2.2 921

AIV.3.3. Entrevista al alumno A8.2 921

AIV.4. Entrevistas en el ciclo III-2 .... **921**

AIV.4.1. Entrevista al alumno B7.1 921

AIV.4.2. Entrevista al alumno B4.2 922

Anexo V: Observadores externos 923

AV.1. Protocolo de observación de las sesiones 923

AV.2. Dosieres proporcionados a los observadores externos...923

AV.3. Respuestas de los observadores externos...923

Anexo VI: Circulares informativas y permisos 925

AVI.1. Permisos generales toma de imágenes y uso 925

AVI.2. Circulares y autorizaciones 1º ESO 925

AVI.3. Circulares y autorizaciones 2º ESO 926

Anexo VII: Materiales adicionales 927

AVII.1. Materiales adicionales para 1º de ESO 927

AVII.2. Materiales adicionales para 2º de ESO 927

Ítaca 929

Índice de tablas

Tabla II - 1. Estructuras por productos y cocientes de hasta 4 magnitudes. 59
Tabla II - 2. Tipos de problema de valor perdido según la relación funcional con la variable dependiente. 87
Tabla II - 3. Ejemplo de tabla para resumir las cantidades involucradas en un aumento porcentual. 108
Tabla II - 4. Elementos curriculares referentes a la proporcionalidad aritmética en la LOE en las etapas primaria y secundaria. 111
Tabla II - 5. Elementos curriculares referentes a la proporcionalidad aritmética en la LOMCE en las etapas primaria y secundaria. 112

Tabla III - 1. Etapas del diseño experimental y principales características. 180
Tabla III - 2. Temporalización de las fases de cada ciclo de investigación-acción. 182
Tabla III - 3. Duración de las fases de acción y ubicación de la propuesta dentro de la programación anual. 184
Tabla III - 4. Categorías específicas para el análisis de las caracterizaciones de relaciones de proporcionalidad simple. 196
Tabla III - 5. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa. 196
Tabla III - 6. Categorías específicas para clasificar la respuesta final en un problema de comparación cualitativa. 197
Tabla III - 7. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa. 198
Tabla III - 8. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa. 198
Tabla III - 9. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa. 199
Tabla III - 10. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa. 200
Tabla III - 11. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa. 200
Tabla III - 12. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta. 201
Tabla III - 13. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta. 201
Tabla III - 14. Categorías específicas de análisis de problemas de comparación cualitativa en problemas de proporcionalidad compuesta. 202
Tabla III - 15. Categorías específicas de análisis para determinar el modelo empleado en un problema de reparto. 203
Tabla III - 16. Categorías específicas de análisis de problemas de repartos proporcionales. 203
Tabla III - 17. Categorías específicas de análisis para las interpretaciones del concepto de porcentaje 204
Tabla III - 18. Categorías específicas de análisis de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje. 204
Tabla III - 19. Indicadores del protocolo de observación y su relación con las categorías de análisis de la gestión del aula. 205
Tabla III - 20. Tipo de tabla de contingencia para comparar los resultados de los grupos experimentales y de control. 206

Tabla V - 1. Secuencia temporal de la propuesta para 1º de ESO (Ciclo II-1). 265
Tabla V - 2. Objetivos didácticos y contenidos de la primera sesión (Ciclo II-1). 266
Tabla V - 3. Objetivos didácticos y contenidos de la segunda sesión (Ciclo II-1). 269
Tabla V - 4. Objetivos didácticos y contenidos de la tercera sesión (Ciclo II-1). 275
Tabla V - 5. Objetivos didácticos y contenidos de la cuarta sesión (Ciclo II-1). 278
Tabla V - 6. Objetivos didácticos y contenidos de la quinta sesión (Ciclo II-1). 284
Tabla V - 7. Objetivos didácticos y contenidos de la sexta sesión (Ciclo II-1). 287
Tabla V - 8. Objetivos didácticos y contenidos de la séptima sesión (Ciclo II-1). 292
Tabla V - 9. Objetivos didácticos y contenidos de la octava sesión (Ciclo II-1). 296
Tabla V - 10. Objetivos didácticos y contenidos de la novena sesión (Ciclo II-1). 305
Tabla V - 11. Objetivos didácticos y contenidos de la décima sesión (Ciclo II-1). 309
Tabla V - 12. Objetivos didácticos y contenidos de la undécima sesión (Ciclo II-1). 312
Tabla V - 13. Número de participantes y de equipos de trabajo (Ciclo II-1). 322

Tabla V - 14. Calendario de actuación (Ciclo II-1). 323
Tabla V - 15. Resultados generales en los problemas F1.2.1 y F1.2.2 (Ciclo II-1). 332
Tabla V - 16. Resultados generales en los problemas de identificación de magnitudes (Ciclo II-1). 333
Tabla V - 17. Resultados generales en la situación introductoria de análisis de situaciones de proporcionalidad y cálculo de razones (Ciclo II-1). 335
Tabla V - 18. Resultados generales en los problemas de detección de relaciones de proporcionalidad (Ciclo II-1). 337
Tabla V - 19. Categorías específicas para el análisis de las caracterizaciones de relaciones de proporcionalidad simple. 338
Tabla V - 20. Argumentos empleados por los alumnos en el análisis de relaciones de proporcionalidad (Ciclo II-1). 339
Tabla V - 21. Resultados generales para los problemas en los que se solicitaba calcular las razones asociadas a una situación de proporcionalidad directa (Ciclo II-1). 344
Tabla V - 22. Resultados generales para los problemas en los que solicitaba identificar o calcular una razón concreta en una situación de proporcionalidad directa (Ciclo II-1). 346
Tabla V - 23. Desglose de respuestas para los problemas de opción múltiple PE.2.2 y PE.2.3 (Ciclo II-1). 346
Tabla V - 24. Resultados generales en la detección de falsos problemas de proporcionalidad (Ciclo II-1). 347
Tabla V - 25. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa. 349
Tabla V - 26. Información proporcionada a los alumnos para responder a la situación introductoria F4.1.1 (Ciclo II-1). 349
Tabla V - 27. Información proporcionada a los alumnos para responder a la situación introductoria F4.1.2 (Ciclo II-1). 350
Tabla V - 28. Resultados generales en la situación introductoria de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-1). 350
Tabla V - 29. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-1). 352
Tabla V - 30. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-1). 354
Tabla V - 31. Distintas producciones para el ejercicio F4.2.1 (de izquierda a derecha y de arriba a abajo, equipos B3, A4, B9 y D1) 358
Tabla V - 32. Distintas producciones para el ejercicio F4.2.3 (de izquierda a derecha y de arriba a abajo, equipos B3, A6, A4 y B9). 359
Tabla V - 33. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa. 362
Tabla V - 34. Resultados generales en los problemas comparación cualitativa (Ciclo II-1). 363
Tabla V - 35. Respuesta a los problemas de comparación cualitativa (Ciclo II-1). 364
Tabla V - 36. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa (Ciclo II-1). 364
Tabla V - 37. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa. 367
Tabla V - 38. Resultados generales en la situación introductoria de problemas de proporcionalidad simple de valor perdido (Ciclo II-1). 368
Tabla V - 39. Estrategias empleadas en la situación introductoria de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-1). 370
Tabla V - 40. Resultados generales en los problemas de proporcionalidad simple de valor perdido (Ciclo II-1). 372
Tabla V - 41. Estrategias empleadas en la resolución de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-1). 373
Tabla V - 42. Códigos asignados a las estrategias de resolución de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta. 381
Tabla V - 43. Códigos asignados a las estrategias de resolución de los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta. 381
Tabla V - 44. Resultados generales en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1). 382
Tabla V - 45. Estrategias incorrectas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1). 383
Tabla V - 46. Estrategias potencialmente correctas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1). 383
Tabla V - 47. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1). 385
Tabla V - 48. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1). 385
Tabla V - 49. Estrategias incorrectas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1). 386
Tabla V - 50. Estrategias potencialmente correctas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1). 386

Tabla V - 51. Estrategias de resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1). 386
Tabla V - 52. Categorías específicas de análisis para las interpretaciones del concepto de porcentaje. 391
Tabla V - 53. Categorías específicas de análisis de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje. 391
Tabla V - 54. Resultados generales en los problemas F9.1.1, F9.1.2 y F10.1.1 (Ciclo II-1). 393
Tabla V - 55. Resultados sobre la interpretación del porcentaje en las situaciones introductorias (Ciclo II-1). 395
Tabla V - 56. Estrategia empleada por los alumnos en la resolución de las situaciones introductorias de porcentajes (Ciclo II-1). 396
Tabla V - 57. Resultados generales en los problemas de porcentajes (Ciclo II-1). 398
Tabla V - 58. Estrategias utilizadas en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo II-1). 400
Tabla V - 59. Comparativa del grado de éxito entre el grupo experimental ($N = 65$) y el grupo de control ($N = 21$) en el ciclo II-1. 404
Tabla V - 60. Comparativa de los tipos de argumentos empleados para justificar las relaciones de proporcionalidad entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema PE.1 (Ciclo II-1). 406
Tabla V - 61. Comparativa de las respuestas para los problemas de respuesta cerrada PE.2.2 y PE.2.3 entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo II-1). 407
Tabla V - 62. Comparativa de las estrategias de resolución empleadas en el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo II-1). 409
Tabla V - 63. Comparativa de respuestas entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cualitativa PE.2.1 (Ciclo II-1). 410
Tabla V - 64. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido PE.4 (Ciclo II-1). 410
Tabla V - 65. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo II-1). 412
Tabla V - 66. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para problemas de Tipo I, II y III de porcentajes (Ciclo II-1). 413
Tabla V - 67. Respuestas del observador externo en el primer bloque de preguntas (Ciclo II-1). 427
Tabla V - 68. Respuestas del observador externo en el segundo bloque de preguntas (Ciclo II-1). 428
Tabla V - 69. Respuestas del observador externo en el tercer bloque de preguntas (Ciclo II-1). 429
Tabla V - 70. Respuestas del observador externo en el cuarto bloque de preguntas (Ciclo II-1). 430

Tabla VI - 1. Secuencia temporal de la propuesta inicialmente planificada para 2º de ESO (Ciclo I-2). 449
Tabla VI - 2. Secuencia temporal de la propuesta efectivamente implementada para 2º de ESO (Ciclo I-2). 450
Tabla VI - 3. Objetivos didácticos y contenidos de la primera sesión (Ciclo I-2). 451
Tabla VI - 4. Objetivos didácticos y contenidos de la segunda sesión (Ciclo I-2). 455
Tabla VI - 5. Objetivos didácticos y contenidos de la tercera sesión (Ciclo I-2). 460
Tabla VI - 6. Objetivos didácticos y contenidos de la cuarta sesión (Ciclo I-2). 463
Tabla VI - 7. Objetivos didácticos y contenidos de la quinta sesión (Ciclo I-2). 468
Tabla VI - 8. Objetivos didácticos y contenidos de la sexta sesión (Ciclo I-2). 471
Tabla VI - 9. Objetivos didácticos y contenidos de la séptima sesión (Ciclo I-2). 475
Tabla VI - 10. Objetivos didácticos y contenidos de la octava sesión (Ciclo I-2). 479
Tabla VI - 11. Objetivos didácticos y contenidos de la novena sesión (Ciclo I-2). 484
Tabla VI - 12. Objetivos didácticos y contenidos de la décima sesión (Ciclo I-2). 487
Tabla VI - 13. Objetivos didácticos y contenidos de la undécima sesión (Ciclo I-2). 490
Tabla VI - 14. Objetivos didácticos y contenidos de la duodécima sesión (Ciclo I-2). 497
Tabla VI - 15. Objetivos didácticos y contenidos de la decimotercera sesión (Ciclo I-2). 500
Tabla VI - 16. Número de participantes y de equipos de trabajo (Ciclo I-2). 510
Tabla VI - 17. Calendario de actuación (Ciclo I-2). 511
Tabla VI - 18. Resultados generales en la situación introductoria de análisis de situaciones de proporcionalidad inversa y cálculo de la constante de proporcionalidad (Ciclo I-2). 519
Tabla VI - 19. Resultados generales en los problemas de detección de relaciones de proporcionalidad (Ciclo I-2). 521
Tabla VI - 20. Categorías específicas para el análisis de las caracterizaciones de relaciones de proporcionalidad. 523
Tabla VI - 21. Argumentos empleados por los alumnos en el análisis de relaciones de proporcionalidad (Ciclo I-2). 523
Tabla VI - 22. Resultados generales para los problemas en los que se solicitaba calcular las razones o la constante de proporcionalidad asociadas a una situación de proporcionalidad simple (Ciclo I-2). 525
Tabla VI - 23. Resultados generales para los problemas en los que solicitaba identificar o calcular una razón concreta o la constante de proporcionalidad en una situación de proporcionalidad (Ciclo I-2). 527
Tabla VI - 24. Desglose de respuestas para los problemas de opción múltiple PE.2.2 y PE.2.3 (Ciclo I-2). 528
Tabla VI - 25. Resultados generales en la detección de falsos problemas de proporcionalidad (Ciclo I-2). 528
Tabla VI - 26. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa. 530

Tabla VI - 27 . Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa. 530
Tabla VI - 28. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa........ 530
Tabla VI - 29. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2)........ 531
Tabla VI - 30. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2). 531
Tabla VI - 31. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2)........ 532
Tabla VI - 32. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2)........ 533
Tabla VI - 33. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2). 533
Tabla VI - 34. Respuesta a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2). 533
Tabla VI - 35. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2). 533
Tabla VI - 36. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2)........ 538
Tabla VI - 37. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2)........ 538
Tabla VI - 38. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa. 540
Tabla VI - 39. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa........ 541
Tabla VI - 40. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa. 541
Tabla VI - 41. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2). 542
Tabla VI - 42. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2)........ 542
Tabla VI - 43. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2). 543
Tabla VI - 44. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2). 544
Tabla VI - 45. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2)........ 545
Tabla VI - 46. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2)........ 545
Tabla VI - 47. Respuesta a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2). 551
Tabla VI - 48. Códigos asignados a las estrategias de resolución de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta. 552
Tabla VI - 49. Códigos asignados a las estrategias de resolución de los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta. 553
Tabla VI - 50. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa. 553
Tabla VI - 51. Resultados generales en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2)........ 553
Tabla VI - 52. Estrategias incorrectas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2). 554
Tabla VI - 53. Estrategias potencialmente correctas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2)........ 554
Tabla VI - 54. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2). 555
Tabla VI - 55. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2)........ 556
Tabla VI - 56. Resultados generales en el problema de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2)........ 556
Tabla VI - 57. Estrategias incorrectas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2)........ 557

Tabla VI - 58. Estrategias potencialmente correctas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2). 557
Tabla VI - 59. Estrategias de resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2). 558
Tabla VI - 60. Respuesta al problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2). 562
Tabla VI - 61. Tipo de argumento utilizado para responder al problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2). 562
Tabla VI - 62. Categorías específicas de análisis para determinar el modelo empleado en un problema de reparto. 563
Tabla VI - 63. Categorías específicas de análisis de problemas de repartos proporcionales. 563
Tabla VI - 64. Resultados generales en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2). 564
Tabla VI - 65. Modelo de reparto empleado en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2). 564
Tabla VI - 66. Estrategia proporcional utilizada en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2). 565
Tabla VI - 67. Resultados generales en los problemas de repartos proporcionales (Ciclo I-2). 568
Tabla VI - 68. Modelo de reparto empleado (Ciclo I-2). 568
Tabla VI - 69. Estrategias proporcionales empleadas en los problemas de reparto (Ciclo I-2). 569
Tabla VI - 70. Categorías específicas de análisis de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje. 570
Tabla VI - 71. Resultados generales en la situación introductoria de porcentajes (Ciclo I-2). 572
Tabla VI - 72. Resultados generales en la situación introductoria de aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo I-2). 573
Tabla VI - 73. Resultados generales en los problemas de porcentajes (Ciclo I-2). 575
Tabla VI - 74. Estrategias utilizadas en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo I-2). 576
Tabla VI - 75. Comparativa del grado de éxito entre el grupo experimental (N=20) y el grupo de control (N=19) en el ciclo I-2. 582
Tabla VI - 76. Comparativa de los tipos de argumentos empleados para justificar las relaciones de proporcionalidad entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema PE.1 (Ciclo I-2). 584
Tabla VI - 77. Comparativa de las respuestas para los problemas de respuesta cerrada PE.2.2 y PE.2.3 entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo I-2). 585
Tabla VI - 78. Comparativa de respuestas entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cualitativa PE.2.1 (Ciclo I-2). 586
Tabla VI - 79. Comparativa de las estrategias de resolución empleadas en el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo I-2). 587
Tabla VI - 80. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido PE.4 (Ciclo I-2). 588
Tabla VI - 81. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo I-2). 589
Tabla VI - 82. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de comparación cuantitativa de proporcionalidad compuesta PE.7 (Ciclo I-2). 590
Tabla VI - 83. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de reparto directamente proporcional PE.8 (Ciclo I-2). 591
Tabla VI - 84. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para problemas aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo I-2). 592
Tabla VI - 85. Respuestas del observador externo en el primer bloque de preguntas (Ciclo I-2). 594
Tabla VI - 86. Respuestas del observador externo en el segundo bloque de preguntas (Ciclo I-2). 595
Tabla VI - 87. Respuestas del observador externo en el tercer bloque de preguntas (Ciclo I-2). 596
Tabla VI - 88. Respuestas del observador externo en el cuarto bloque de preguntas (Ciclo I-2). 597

Tabla VII - 1. Secuencia temporal de la propuesta para 1º de ESO (Ciclo III-1). 614
Tabla VII - 2. Objetivos didácticos y contenidos de la novena sesión (Ciclo III-1). 615
Tabla VII - 3. Objetivos didácticos y contenidos de la décima sesión (Ciclo III-1). 619
Tabla VII - 4. Número de participantes y de equipos de trabajo (Ciclo III-1). 624
Tabla VII - 5. Calendario de actuación (Ciclo III-1). 624
Tabla VII - 6. Resultados generales en los problemas F1.2.1 y F1.2.2 (Ciclo III-1). 634
Tabla VII - 7. Resultados generales en los problemas de identificación de magnitudes (Ciclo III-1). 635
Tabla VII - 8. Resultados generales en la situación introductoria de análisis de situaciones de proporcionalidad y cálculo de razones (Ciclo III-1). 636
Tabla VII - 9. Resultados generales en los problemas de detección de relaciones de proporcionalidad (Ciclo III-1). 637
Tabla VII - 10. Argumentos empleados por los alumnos en el análisis de relaciones de proporcionalidad (Ciclo III-1). 638
Tabla VII - 11. Resultados generales para los problemas en los que se solicitaba calcular las razones asociadas a una situación de proporcionalidad directa (Ciclo III-1). 639

Tabla VII - 12. Resultados generales para los problemas en los que solicitaba identificar o calcular una razón concreta en una situación de proporcionalidad directa (Ciclo III-1). 641
Tabla VII - 13. Resultados generales en la detección de falsos problemas de proporcionalidad (Ciclo III-1). 642
Tabla VII - 14. Resultados generales en la situación introductoria de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1). 643
Tabla VII - 15. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1). 644
Tabla VII - 16. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1). 645
Tabla VII - 17. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1). 646
Tabla VII - 18. Resultados generales en los problemas comparación cualitativa (Ciclo III-1). 647
Tabla VII - 19. Respuesta a los problemas de comparación cualitativa (Ciclo III-1). 648
Tabla VII - 20. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa (Ciclo III-1). 648
Tabla VII - 21. Resultados generales en la situación introductoria de problemas de proporcionalidad simple de valor perdido (Ciclo III-1). 649
Tabla VII - 22. Estrategias empleadas en la situación introductoria de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1). 650
Tabla VII - 23. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1). 652
Tabla VII - 24. Estrategias empleadas en la resolución de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1). 653
Tabla VII - 25. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1). 655
Tabla VII - 26. Resultados generales en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1). 656
Tabla VII - 27. Estrategias incorrectas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1). 657
Tabla VII - 28. Estrategias potencialmente correctas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1). 657
Tabla VII - 29. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1). 657
Tabla VII - 30. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1). 658
Tabla VII - 31. Estrategias incorrectas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1). 659
Tabla VII - 32. Estrategias potencialmente correctas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1). 659
Tabla VII - 33. Estrategias de resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1). 659
Tabla VII - 34. Resultados generales en la situación introductoria de interpretación del porcentaje (Ciclo III-1). 664
Tabla VII - 35. Resultados generales en la situación introductoria de cálculo directo con porcentajes (Ciclo III-1). 665
Tabla VII - 36. Resultados generales en la situación introductoria de cálculo inverso con porcentajes (Ciclo III-1). 667
Tabla VII - 37. Resultados generales en los problemas de porcentajes (Ciclo III-1). 668
Tabla VII - 38. Estrategias utilizadas en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo III-1). 670
Tabla VII - 39. Comparativa del grado de éxito entre los GE y el GC (Ciclo III-1). 671
Tabla VII - 40. Comparativa de los tipos de justificaciones empleadas para argumentar las relaciones de proporcionalidad entre los GE y el GC en la PE (Ciclo III-1). 673
Tabla VII - 41. Comparativa de las estrategias de resolución empleadas en los GE y el GC en el problema de comparación cuantitativa de la PE (Ciclo III-1). 674
Tabla VII - 42. Comparativa de respuestas entre los GE y el GC en el problema de comparación cualitativa de la PE (Ciclo III-1). 675
Tabla VII - 43. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos de los GE y el GC para el problema de valor perdido de proporcionalidad simple en la PE (Ciclo III-1). 676
Tabla VII - 44. Comparativa de estrategias erróneas empleadas por los alumnos de los GE y el GC para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta en la PE (Ciclo III-1). 677
Tabla VII - 45. Comparativa de estrategias potencialmente correctas empleadas por los alumnos de los GE y el GC para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta en la PE (Ciclo III-1). 678
Tabla VII - 46. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para problemas de Tipo I, II y III de porcentajes (Ciclo III-1). 679
Tabla VII - 47. Respuestas del observador externo en el primer bloque de preguntas (Ciclo III-1). 695
Tabla VII - 48. Respuestas del observador externo en el segundo bloque de preguntas (Ciclo III-1). 696
Tabla VII - 49. Respuestas del observador externo en el tercer bloque de preguntas (Ciclo III-1). 697

Tabla VII - 50. Respuestas del observador externo en el cuarto bloque de preguntas (Ciclo III-1). 698

Tabla VIII - 1. Secuencia temporal de la propuesta para 2º ESO (Ciclo II-2). 713
Tabla VIII - 2. Objetivos didácticos y contenidos de la octava sesión (Ciclo II-2). 713
Tabla VIII - 3. Objetivos didácticos y contenidos de la novena sesión (Ciclo II-2). 716
Tabla VIII - 4. Objetivos didácticos y contenidos de la décima sesión (Ciclo II-2). 721
Tabla VIII - 5. Objetivos didácticos y contenidos de la undécima sesión (Ciclo II-2). 723
Tabla VIII - 6. Objetivos didácticos y contenidos de la duodécima sesión (Ciclo II-2). 727
Tabla VIII - 7. Número de participantes y de equipos de trabajo (Ciclo II-2). 730
Tabla VIII - 8. Calendario de actuación (Ciclo II-2). 730
Tabla VIII - 9. Resultados generales en la situación introductoria de análisis de situaciones de proporcionalidad inversa y cálculo de la constante de proporcionalidad (Ciclo II-2). 737
Tabla VIII - 10. Resultados generales en los problemas de detección de relaciones de proporcionalidad (Ciclo II-2). 739
Tabla VIII - 11. Argumentos empleados por los alumnos en el análisis de relaciones de proporcionalidad (Ciclo II-2). .. 740
Tabla VIII - 12. Resultados generales para los problemas en los que se solicitaba calcular las razones o la constante de proporcionalidad asociadas a una situación de proporcionalidad simple (Ciclo II-2). 741
Tabla VIII - 13. Resultados generales para los problemas en los que solicitaba identificar o calcular una razón concreta o la constante de proporcionalidad en una situación de proporcionalidad (Ciclo II-2). 742
Tabla VIII - 14. Resultados generales en la detección de falsos problemas de proporcionalidad (Ciclo II-2). 743
Tabla VIII - 15. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2). 744
Tabla VIII - 16. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2). 744
Tabla VIII - 17. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2). 744
Tabla VIII - 18. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2). 745
Tabla VIII - 19. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2). 745
Tabla VIII - 20. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2). 745
Tabla VIII - 21. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2). 747
Tabla VIII - 22. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2). 747
Tabla VIII - 23. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2). 748
Tabla VIII - 24. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2). 748
Tabla VIII - 25. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2). 748
Tabla VIII - 26. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2). 749
Tabla VIII - 27. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2). 750
Tabla VIII - 28. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2). 750
Tabla VIII - 29. Resultados generales en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2). 752
Tabla VIII - 30. Estrategias incorrectas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2). 752
Tabla VIII - 31. Estrategias potencialmente correctas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2). 752
Tabla VIII - 32. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2). 753
Tabla VIII - 33. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2). 754
Tabla VIII - 34. Resultados generales en el problema de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2). 754
Tabla VIII - 35. Estrategias incorrectas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2). 755
Tabla VIII - 36. Estrategias potencialmente correctas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2). 756

Tabla VIII - 37. Estrategias de resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2).. 756
Tabla VIII - 38. Resultados generales en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo II-2). 757
Tabla VIII - 39. Modelo de reparto empleado en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo II-2)....... 757
Tabla VIII - 40. Resultados generales en los problemas de repartos proporcionales (Ciclo II-2). 760
Tabla VIII - 41. Modelo de reparto empleado (Ciclo II-2). 763
Tabla VIII - 42. Resultados generales en la situación introductoria de porcentajes (Ciclo II-2). 764
Tabla VIII - 43. Resultados generales en la situación introductoria de aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo II-2). 764
Tabla VIII - 44. Resultados generales en los problemas de porcentajes (Ciclo II-2).. 766
Tabla VIII - 45. Estrategias utilizadas en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo II-2). 767
Tabla VIII - 46. Comparativa del grado de éxito entre el grupo experimental (N=20) y el grupo de control (N=20) en el ciclo II-2. 769
Tabla VIII - 47. Comparativa de los tipos de argumentos empleados para justificar las relaciones de proporcionalidad entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema PE.1 (Ciclo II-2). 771
Tabla VIII - 48. Comparativa de las respuestas para los problemas de respuesta cerrada PE.2.2 y PE.2.3 entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo II-2). 773
Tabla VIII - 49. Comparativa de respuestas entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cualitativa PE.2.1 (Ciclo II-2). 773
Tabla VIII - 50. Comparativa de las estrategias de resolución empleadas en el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo II-2).. 774
Tabla VIII - 51. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido PE.4 (Ciclo II-2).. 774
Tabla VIII - 52. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo II-2).. 775
Tabla VIII - 53. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de comparación cuantitativa de proporcionalidad compuesta PE.7 (Ciclo II-2). 777
Tabla VIII - 54. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de reparto directamente proporcional PE.8 (Ciclo II-2). 777
Tabla VIII - 55. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para problemas aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo II-2).. 779
Tabla VIII - 56. Respuestas del observador externo en el primer bloque de preguntas (Ciclo II-2). 788
Tabla VIII - 57. Respuestas del observador externo en el segundo bloque de preguntas (Ciclo II-2). 789
Tabla VIII - 58. Respuestas del observador externo en el tercer bloque de preguntas (Ciclo II-2). 790
Tabla VIII - 59. Respuestas del observador externo en el cuarto bloque de preguntas (Ciclo II-2). 791

Tabla IX - 1. Número de participantes y de equipos de trabajo (Ciclo III-2). 799
Tabla IX - 2. Calendario de actuación (Ciclo III-2). 800
Tabla IX - 3. Resultados generales en la situación introductoria de análisis de situaciones de proporcionalidad inversa y cálculo de la constante de proporcionalidad (Ciclo III-2). 805
Tabla IX - 4. Resultados generales en los problemas de detección de relaciones de proporcionalidad (Ciclo III-2). 806
Tabla IX - 5. Argumentos empleados por los alumnos en el análisis de relaciones de proporcionalidad (Ciclo III-2). 807
Tabla IX - 6. Resultados generales para los problemas en los que se solicitaba calcular las razones o la constante de proporcionalidad asociadas a una situación de proporcionalidad simple (Ciclo III-2).. 808
Tabla IX - 7. Resultados generales para los problemas en los que solicitaba identificar o calcular una razón concreta o la constante de proporcionalidad en una situación de proporcionalidad (Ciclo III-2).. 808
Tabla IX - 8. Resultados generales en la detección de falsos problemas de proporcionalidad (Ciclo III-2). 809
Tabla IX - 9. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2).. 810
Tabla IX - 10. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2). 810
Tabla IX - 11. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2).. 810
Tabla IX - 12. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2).. 811
Tabla IX - 13. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2). 811
Tabla IX - 14. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2). 811
Tabla IX - 15. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2)... 812

Tabla IX - 16. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2). 812
Tabla IX - 17. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo III-2). 813
Tabla IX - 18. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2). 813
Tabla IX - 19. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo III-2). 813
Tabla IX - 20. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo III-2). 814
Tabla IX - 21. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo III-2). 814
Tabla IX - 22. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo III-2). 815
Tabla IX - 23. Resultados generales en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2). 815
Tabla IX - 24. Estrategias incorrectas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2). 816
Tabla IX - 25. Estrategias potencialmente correctas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2). 816
Tabla IX - 26. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2). 816
Tabla IX - 27. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2). 817
Tabla IX - 28. Estrategias incorrectas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2). 817
Tabla IX - 29. Estrategias potencialmente correctas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2). 818
Tabla IX - 30. Estrategias de resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2). 818
Tabla IX - 31. Resultados generales en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo III-2). 819
Tabla IX - 32. Modelo de reparto empleado en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo III-2). 820
Tabla IX - 33. Resultados generales en los problemas de repartos proporcionales (Ciclo III-2). 822
Tabla IX - 34. Modelo de reparto empleado (Ciclo III-2). 823
Tabla IX - 35. Resultados generales en la situación introductoria de porcentajes (Ciclo III-2). 824
Tabla IX - 36. Resultados generales en la situación introductoria de aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo III-2). 825
Tabla IX - 37. Resultados generales en los problemas de porcentajes (Ciclo III-2). 826
Tabla IX - 38. Estrategias utilizadas en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo III-2). 827
Tabla IX - 39. Comparativa del grado de éxito entre el grupo experimental (N=18) y el grupo de control (N=20) en el ciclo III-2. 828
Tabla IX - 40. Comparativa de los tipos de argumentos empleados para justificar las relaciones de proporcionalidad entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema PE.1 (Ciclo III-2). 830
Tabla IX - 41. Comparativa de las respuestas para los problemas de respuesta cerrada PE.2.2 y PE.2.3 entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo III-2). 831
Tabla IX - 42. Comparativa de respuestas entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cualitativa PE.2.1 (Ciclo III-2). 832
Tabla IX - 43. Comparativa de las estrategias de resolución empleadas en el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo III-2). 832
Tabla IX - 44. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido PE.4 (Ciclo III-2). 832
Tabla IX - 45. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo III-2). 833
Tabla IX - 46. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de comparación cuantitativa de proporcionalidad compuesta PE.7 (Ciclo III-2). 833
Tabla IX - 47. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de reparto directamente proporcional PE.8 (Ciclo III-2). 834
Tabla IX - 48. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para problemas aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo III-2). 835
Tabla IX - 49. Respuestas del observador externo en el primer bloque de preguntas (Ciclo III-2). 837
Tabla IX - 50. Respuestas del observador externo en el segundo bloque de preguntas (Ciclo III-2). 838
Tabla IX - 51. Respuestas del observador externo en el tercer bloque de preguntas (Ciclo III-2). 839
Tabla IX - 52. Respuestas del observador externo en el cuarto bloque de preguntas (Ciclo III-2). 839

Tabla X - 1. Variables de las tareas en cada foco de contenido. 847
Tabla X - 2. Comparativa del grado de éxito entre el total de grupos experimentales (N=123) y el total de grupos de control (N=38) en 1º de ESO. 867
Tabla X - 3. Comparativa del grado de éxito entre el total de grupos experimentales (N=58) y el total de grupos de control (N=39) en 2º de ESO. 867

Índice de imágenes

Imagen I - 1. Fórmula empleada por Madden (2018, p. 112) para ejemplificar el 'álgebra de magnitudes'. 5
Imagen I - 2. Extracto de la guía terapéutica veterinaria de Rojas López (2012). 7
Imagen I - 3. Extracto de un ítem liberado de proporcionalidad en TIMSS 2011, utilizado por Fraile Rey (2018). 9
Imagen I - 4. Ítem liberado de proporcionalidad en TIMSS 2019 (MEFP, 2020).. 10
Imagen I - 5. Problema de proporcionalidad liberado del estudio PISA 2012 (OCDE, 2013)... 11

Imagen II - 1. Representaciones icónicas de la razón. Izquierda, problema de la mezcla de zumo de Noelting (1980a, p. 219). Derecha, representación icónica extraída del trabajo de Howe, Nunes y Bryant (2011, p. 398)............................. 44
Imagen II - 2. Representación de una relación de proporcionalidad simple directa de un profesor en ejercicio. Imagen extraída del trabajo de (Hino & Kato, 2019). 51
Imagen II - 3. Representación pictórica, diagrama de sectores y modelo de barra como representación gráfica de un porcentaje. Imagen extraída del trabajo de Van Den Huevel-Panhuizen (2003, p. 20). 55
Imagen II - 4. Representación por doble línea numérica realizada por un profesor en formación para una relación de proporcionalidad inversa. Imagen extraída del trabajo de Arican (2018)... 64

Imagen III - 1. Detalle de la maquetación de los problemas en la prueba escrita... 189
Imagen III - 2. Extracto de la autorización genérica del centro escolar para poder realizar y difundir imágenes de los alumnos. 208
Imagen III - 3. Información contenida en la circular enviada a las familias de los alumnos participantes en la investigación. 209

Imagen IV - 1. Extractos del texto de apoyo para 1º de ESO sobre características generales de las magnitudes............ 225
Imagen IV - 2. Parte de la proyección de apoyo a la institucionalización del concepto de magnitudes directamente proporcionales. 227
Imagen IV - 3. Extracto del texto de apoyo de 1º de ESO que incide en la importancia del contexto para caracterizar una relación de proporcionalidad. 228
Imagen IV - 4. Extracto del texto de apoyo de 2º de ESO en donde se caracteriza la proporcionalidad inversa. 237
Imagen IV - 5. Extracto del texto de apoyo de 1º de ESO donde se presentan las situaciones de proporcionalidad compuesta. 244
Imagen IV - 6. Extracto del texto de apoyo de 1º de ESO en el que se presenta la interpretación del porcentaje.......... 248
Imagen IV - 7. Extracto del texto de apoyo de 2º de ESO sobre aumentos y disminuciones porcentuales. 251

Imagen V - 1. Materiales para la actividad de aula F1.1.. 267
Imagen V - 2. Factura telefónica modificada para la actividad de aula F1.2. 268
Imagen V - 3. Producción del alumno B1.1 para el problema TC4.6. 334
Imagen V - 4. Producción del equipo A3 (arriba) y del equipo D7 (abajo) para el problema F2.1.1 (Ciclo II-1). 336
Imagen V - 5. Producción del equipo B9 para el problema F2.1.1 (Ciclo II-1). 336
Imagen V - 6. De arriba abajo, producciones de los alumnos B11.1, B9.1, D3.1 y D7.2 para el problema PE.1.3........... 340
Imagen V - 7. Producciones del alumno B7.2 a los problemas PE.1.1, PE.1.2, PE.1.3 y PE.1.4....................................... 340
Imagen V - 8. Producciones del alumno A4.1 a los problemas PE.1.1, PE.1.2, PE.1.3 y PE.1.4. 341
Imagen V - 9. Producción del alumno A7.2 para el problema PE.1.3. 341
Imagen V - 10. Producción del alumno A6.2 para el problema PE.1.3. 342
Imagen V - 11. Caracterización implícitamente funcional mediante argumentos multiplicativos presentada por el alumno D10.1 en el problema TC3.1.. 342
Imagen V - 12. Caracterización por aumentos y disminuciones dada por el alumno A2.1 (arriba) y caracterización por dobles dada por el alumno A7.2 (abajo) pare el problema TC3.2. 343
Imagen V - 13. De arriba a abajo, producciones de los alumnos A4-3, D7-1 y A3-2 para los problemas TC2.5, TC3.2 y TC3.1, respectivamente (Ciclo II-1). 345
Imagen V - 14. Producción del alumno B6.2 para el problema TC8.6 (Ciclo II-1)... 348
Imagen V - 15. Producción del alumno A7.1 (arriba) y del alumno A4.2 (abajo) para el problema PE.6 (Ciclo II-1). 348
Imagen V - 16. Producción del equipo A1 en el problema F4.2.1. 353
Imagen V - 17. Producción del equipo B8 en el problema F4.2.5. 354

Imagen V - 18. Producción del alumno B9.1 en el problema PE.3. 355
Imagen V - 19. Producción del equipo D8 en el problema F5.1.2. 356
Imagen V - 20. Producción del alumno B3.2 en el problema PE.3. 356
Imagen V - 21. Producción del alumno B5.2 en el problema PE.3. 357
Imagen V - 22. Producción del alumno D2.2 en el problema PE.3. 357
Imagen V - 23. Producción del equipo A3 en el problema F5.1.1. 359
Imagen V - 24. Producción del equipo A9 en el problema F4.2.3. 360
Imagen V - 25. Producción del equipo A8 en el problema F4.2.5. 361
Imagen V - 26. Producción del equipo A9 al problema F5.1.2. 361
Imagen V - 27. Producción del alumno A1.1 al problema PE.3. 362
Imagen V - 28. De arriba a abajo, producciones de los equipos B3, A10, A3 y A8 para el problema F5.1.3. 365
Imagen V - 29. De arriba a abajo, producciones de los equipos B5, A10, A2 y A8 para el problema F5.1.4. 365
Imagen V - 30. Producción del equipo B7 para el problema F5.1.4. 366
Imagen V - 31. Producción del equipo D8 para el problema F5.1.4. 366
Imagen V - 32. Producción del equipo A6 (izquierda) y del equipo B11 (derecha) para el problema F5.1.4. 366
Imagen V - 33. Producción del equipo B8 para el problema F6.1 (Ciclo II-1). 369
Imagen V - 34. Producción del equipo D8 para el problema F6.1 (Ciclo II-1). 370
Imagen V - 35. Producción del equipo D1 para el problema F6.1 (Ciclo II-1). 371
Imagen V - 36. Producción no clasificada del alumno D5.1 para el problema TC6.1. 374
Imagen V - 37. Producción del alumno B9.2 para el problema TC6.1. 374
Imagen V - 38. Alumnos que emplean argumentos aditivos en la resolución de problemas de valor perdido. 375
Imagen V - 39. Producción del alumno D10.1 para el problema PE.4. 375
Imagen V - 40. Producción del alumno D1.1 para el problema TC6.3. 376
Imagen V - 41. Producción del equipo A6 para el problema F7.1.4. 376
Imagen V - 42. Producción del equipo D5 para el problema F7.1.4. 376
Imagen V - 43. Producciones de los equipos A6 (izquierda) y A7 (derecha) para el problema F6.2.2. 377
Imagen V - 44. Producción del alumno D2.2 para el problema PE.4. 377
Imagen V - 45. Producción del equipo D9 para el problema F6.2.2. 378
Imagen V - 46. Producciones de los alumnos A4.2 (arriba), A4.1 (centro) y A8.1 (abajo) para el problema T6.1. 378
Imagen V - 47. Producciones de los alumnos B10.1 (arriba izquierda), A3.2 (arriba derecha), A7.2 (abajo izquierda) y D5.1 (abajo derecha) para el problema PE.4. 380
Imagen V - 48. Producciones de los equipos B10 (izquierda) y A7 (derecha) para la situación introductoria de situaciones de proporcionalidad compuesta. 383
Imagen V - 49. Producción del equipo D2 para la situación introductoria de situaciones de proporcionalidad compuesta. 384
Imagen V - 50. Producción del equipo A8 para la situación introductoria de situaciones de proporcionalidad compuesta. 384
Imagen V - 51. Producción del equipo B8 para el problema F8.2.1. 386
Imagen V - 52. Producción del alumno D2.2 para el problema PE.5 (arriba) y del equipo A9 para el problema F8.2.2 (abajo). 387
Imagen V - 53. Producción del equipo D9 para el problema F8.2.1. 388
Imagen V - 54. Producción del alumno D10.1 para el problema PE.5. 388
Imagen V - 55. Producción del equipo B5 para el problema F11.1.3. 389
Imagen V - 56. Producción del equipo A3 para el problema F8.2.2. 389
Imagen V - 57. Producción del equipo B3 para el problema F8.2.1. 390
Imagen V - 58. Producción del equipo D9 para el problema F11.1.3. 391
Imagen V - 59. Producción del equipo B10 para el problema introductorio F9.1.1 (Ciclo II-1). 394
Imagen V - 60. Producción del equipo B6 para el problema F9.1.1 (Ciclo II-1). 394
Imagen V - 61. De arriba a abajo, producciones de los equipos B6, B5, D1 y A5 para el problema F9.1.2.1 (Ciclo II-1). 395
Imagen V - 62. Producción del equipo B8 para el problema F9.1.2.1 (Ciclo II-1). 397
Imagen V - 63. Producción del equipo A4 para el problema F10.1.1 (Ciclo II-1). 397
Imagen V - 64. Producción del equipo B10 para el problema F10.1.1 (Ciclo II-1). 398
Imagen V - 65. Producción del alumno D9-1 para el problema PE.8.1 (Ciclo II-1). 400
Imagen V - 66. Producción del alumno D1.1 para el problema PE.8.2 (Ciclo II-1). 401
Imagen V - 67. Producción de un alumno del grupo de control para PE.6 (Ciclo II-1). 408
Imagen V - 68. Producción del alumno A4.2 y de un alumno del grupo de control para PE.3 (Ciclo II-1). 409
Imagen V - 69. Producción correcta (izquierda) y producción incorrecta (derecha) de alumnos del grupo de control para PE.4 (Ciclo II-1). 411
Imagen V - 70. Producción de un alumno del grupo de control para PE.5 usando la estrategia VPC10 (Ciclo II-1). 412
Imagen V - 71. Producciones correctas de alumnos del grupo de control para PE.5 usando la estrategia VPC2 (izquierda) y VPC3 (derecha) respectivamente (Ciclo II-1). 413

Imagen V - 72. Diferentes estrategias de resolución empleando una fórmula de alumnos del grupo de control para el problema PE.8.1 (Ciclo II-1). 415
Imagen V - 76. Producción del alumno A3.2 en el problema TC6.5. 417
Imagen V - 73. Producción del alumno A1.1 en el problema TC2.2. 418
Imagen V - 74. Producción del alumno A1.1 en el problema TC4.1. 419
Imagen V - 75. Ejemplos propuestos por el alumno A1.1 durante la entrevista. 421
Imagen V - 77. Respuesta del alumno A4.1 al problema TC2.6 (Ciclo II-1). 423
Imagen V - 78. Ejemplos propuestos por el alumno A4.1 durante la entrevista 425
Imagen V - 79. Producciones para TC6.3 (izquierda) y F7.1.4 (derecha) del alumno A4.1. 425

Imagen VI - 1. Producción del equipo B8 para el problema F2.1.1 (Ciclo I-2). 520
Imagen VI - 2. Producción del alumno B2.1 para los problemas TC1.2 (arriba) y TC1.4 (abajo) en el Ciclo I-2. 521
Imagen VI - 3. Producción del alumno B5.2 para el problema PE.1 (Ciclo I-2). 524
Imagen VI - 4. Producción del alumno B7.2 para el problema TC1.2 (Ciclo I-2). 526
Imagen VI - 5. Producciones de los alumnos B2.1 (izquierda), B6.1 (centro) y B5.2 (derecha) para el problema TC4.2 (Ciclo I-2). 529
Imagen VI - 6. Producciones de los alumnos B5.1 (arriba) y B3.2 (abajo) para el problema TC4.4 (Ciclo I-2). 534
Imagen VI - 7. Producción del alumno B6.2 para el problema TC4.4 (Ciclo I-2). 534
Imagen VI - 8. Producción del alumno B1.2 para el problema TC3.1 (Ciclo I-2). 535
Imagen VI - 9. Producción del alumno B4.1 para el problema TC3.1 (Ciclo I-2). 535
Imagen VI - 10. Producciones de los equipos B9 (arriba), B1 (centro) y B5 (abajo) para el problema F3.1.1 (Ciclo I-2). . 536
Imagen VI - 11. Producción del alumno B5.1 para el problema TC4.4 (Ciclo I-2). 539
Imagen VI - 12. Producción del alumno B6.1 para el problema TC4.4 (Ciclo I-2). 539
Imagen VI - 13. Producción del alumno B3.2 para el problema TC4.4 (Ciclo I-2). 540
Imagen VI - 14. Producción del equipo B8 para el problema F4.1.1 (arriba) y del alumno B1.2 para el problema PE.4 (abajo) (Ciclo I-2). 544
Imagen VI - 15. Producciones del alumno B7.1 para los problemas PE.3 (arriba) y PE.4 (abajo) respectivamente (Ciclo I-2). 546
Imagen VI - 16. Producción del equipo B2 para el problema F5.1.1 (Ciclo I-2). 548
Imagen VI - 17. Producción del alumno B9.1 para el problema PE.4 (Ciclo I-2). 548
Imagen VI - 18. Producción del equipo B6 para el problema F4.1.5 (Ciclo I-2). 549
Imagen VI - 19. Producción del equipo B2 para el problema F4.1.1 (Ciclo I-2). 550
Imagen VI - 20. Producción del equipo B1 para el problema F4.1.1 (Ciclo I-2). 550
Imagen VI - 21. Producción del alumno B8.2 para el problema TC3.3 (Ciclo I-2). 551
Imagen VI - 22. Producción del equipo B6 para el problema F4.1.3 (Ciclo I-2). 552
Imagen VI - 23. Producción del equipo B9 para el problema F6.1.1 (Ciclo I-2). 554
Imagen VI - 24. Producción del equipo B3 para el problema F6.1.1 (Ciclo I-2). 555
Imagen VI - 25. Producción del alumno B1.2 para el problema PE.5 (Ciclo I-2). 558
Imagen VI - 26. Producción del alumno B1.2 para los problemas TC6.1.1 y TC6.1.2 (Ciclo I-2). 559
Imagen VI - 27. Producción del alumno B2.1 para los problemas TC6.1.1 y TC6.1.2 (Ciclo I-2). 560
Imagen VI - 28. Detalle de las producciones de los alumnos B2.1 (izquierda), B6.2 (centro) y B3.2 (derecha) para el problema PE.7 (Ciclo I-2). 561
Imagen VI - 29. Producción del alumno B6.1 al problema PE.7 (Ciclo I-2). 561
Imagen VI - 30. Producción del equipo B9 para el problema F7.1.1 (Ciclo I-2). 562
Imagen VI - 31. Producciones de los equipos B6 (izquierda) y B1 (derecha) para el problema F8.1.2 de la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2). 565
Imagen VI - 32. Producción del equipo B1 para el problema F8.1.1 de la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2). 566
Imagen VI - 33. Producción del equipo B5 para el problema F8.1.1 de la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2). 566
Imagen VI - 34. Producción del equipo B5 para el problema F8.1.1 de la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2). 566
Imagen VI - 35. Producciones de los equipos B9 (izquierda) y B2 (derecha) para el problema F8.1.2 de la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2). 567
Imagen VI - 36. Producciones de los alumnos B1.1 (izquierda) y B3.2 (derecha) para el problema PE.8 (Ciclo I-2). 569
Imagen VI - 37. Producción del alumno B9.1 para el problema PE.8 (Ciclo I-2). 570
Imagen VI - 38. Producciones de los equipos B3 (arriba) y B9 (abajo) para el problema F10.1.2.1 (Ciclo I-2). 575
Imagen VI - 39. Producción del alumno B2.1 para el problema PE.9.2 (Ciclo I-2). 577
Imagen VI - 40. Producción del alumno B8.1 para el problema PE.9.1 (Ciclo I-2). 578
Imagen VI - 41. Producciones del alumno B1.2 para los problemas de la ficha de trabajo TC9 (Ciclo I-2). 579
Imagen VI - 42. Producción del alumno B8.1 para el problema TC9.2 (Ciclo I-2). 579

Imagen VI - 43. Producciones del equipo B4 para los problemas F11.2.1.1, F11.2.1.2 (izquierda) y F11.2.2.1, F11.2.2.2 (derecha) (Ciclo I-2). 580
Imagen VI - 44. Producción del alumno B2.1 para el problema PE9.1 (Ciclo I-2). 580
Imagen VI - 45. Producción de un alumno del grupo de control (D1.2 del ciclo II-1) para el problema PE.3 (Ciclo I-2). .. 587
Imagen VI - 46. Ejemplo de producción prototípica de los alumnos del grupo de control para el problema PE.3 (Ciclo I-2). 588
Imagen VI - 47. Ejemplo de aplicación del método de proporciones (VPC6) en un alumno del grupo de control (Ciclo II-2). 589
Imagen VI - 48. Algunas producciones de alumnos del grupo de control en el problema de reparto directamente proporcional PE.8 (Ciclo I-2). 592
Imagen VI - 49. Producción del alumno B1.2 para el problema PE7 (Ciclo II-2). 603

Imagen VII - 1. Producción del equipo D9 para el problema F1.1.6 (Ciclo III-1). 633
Imagen VII - 2. Producción del alumno B1.1 para el problema PE.3 (Ciclo III-1). 645
Imagen VII - 3. Producción del alumno C1.2 para el problema TC6.3 (Ciclo III-1). 653
Imagen VII - 4. Producción del alumno C1.1 para el problema TC6.1 (Ciclo III-1). 655
Imagen VII - 5. Producción del alumno D7.2 para el problema TC8.7 (Ciclo III-1). 656
Imagen VII - 6. Producción del alumno B8.1 para el problema PE.5 (Ciclo III-1). 660
Imagen VII - 7. Producción del alumno C10.2 para el problema TC8.8 (Ciclo III-1). 660
Imagen VII - 8. Producción del alumno C1.2 para el problema TC8.9 (Ciclo III-1). 661
Imagen VII - 9. Producción del alumno D2.2 para el problema TC8.8 (Ciclo III-1). 661
Imagen VII - 10. Producciones del equipo B8 para F9.1.1.10, arriba, y para F9.1.2.5, abajo (Ciclo III-1). 665
Imagen VII - 11. Producción del equipo B2 para el problema F10.1.1.2 (Ciclo III-1). 666
Imagen VII - 12. Producción del equipo C1 para el problema F10.1.1.2 (Ciclo III-1). 666
Imagen VII - 13. Producción del equipo C9 para el problema F10.1.1.2 (Ciclo III-1). 666
Imagen VII - 14. Producción de un alumno del grupo de control en el problema PE.4 (Ciclo III-1). 677
Imagen VII - 15. Producción del alumno B5.1 para el problema PE.4 (Ciclo III-1). 677
Imagen VII - 16. Producción de un alumno del grupo de control para el problema PE.5 (Ciclo III-1). 678
Imagen VII - 17. Producciones del alumno D5.2 para los problemas TC9.1, izquierda, y TC9.2, derecha (Ciclo III-1). 683
Imagen VII - 18. Problema propuesto a C6.2 durante la entrevista y resolución. 686
Imagen VII - 19. Producciones del equipo C6 para F8.2.1 (izquierda) y F8.2.2 (derecha, respectivamente (Ciclo III-1)... 686
Imagen VII - 20. Primera producción del alumno C4.1 durante la entrevista. 689
Imagen VII - 21. Segunda producción del alumno C4.1 durante la entrevista. 691
Imagen VII - 22. Producción de B5.2 para el problema TC2.2 (Ciclo III-1). 692
Imagen VII - 23. Producción del equipo B5 para el problema F6.2.2 (Ciclo III-1). 692
Imagen VII - 24. Producciones de B5.1 para el problema TC9.2 (arriba), el problema TC10.1 (centro) y F11.2.1.1 (abajo) (Ciclo III-1). 694

Imagen VIII - 1. Producción del equipo A10 para el problema F2.1.1 de la situación introductoria (Ciclo II-2). 738
Imagen VIII - 2. Producción del alumno A3.1 para el problema TC4.3 (Ciclo II-2). 746
Imagen VIII - 3. Producción del alumno A3.1 para el problema TC4.2 (Ciclo II-2). 751
Imagen VIII - 4. Producción del equipo A8 para el problema F6.1.1 (Ciclo II-2). 752
Imagen VIII - 5. Producción del equipo A3 para el problema F6.1.1 (Ciclo II-2). 753
Imagen VIII - 6. Producción del alumno A5.2 (Ciclo II-2). 755
Imagen VIII - 7. Producción del equipo A3 para el problema F8.1.1 (Ciclo II-2). 758
Imagen VIII - 8. Producción del equipo A5 para el problema F8.1.1 (Ciclo II-2). 758
Imagen VIII - 9. Detalle de las producciones del equipo A5 (izquierda), A6 (Centro) y A3 (derecha) para el problema F8.1.2 (Ciclo II-2). 759
Imagen VIII - 10. Detalle de las producciones de los equipos A10 (arriba izquierda), A9 (abajo izquierda), A4 (arriba derecha) y A1 (abajo derecha) para el problema F8.1.2 (Ciclo II-1). 759
Imagen VIII - 11. Detalle de las producciones de los equipos A7 (izquierda) y A10 (derecha) para el problema F8.1.2 (Ciclo II-2). 760
Imagen VIII - 12. Producciones de los alumnos A6.2 (arriba), A9.1 (centro) y A10.2 (abajo) para el problema TC8.2 (Ciclo II-2). 761
Imagen VIII - 13. Producción del alumno A1.2 para el problema TC8.2 (Ciclo II-2). 762
Imagen VIII - 14. Producción del alumno A3.1 para el problema TC8.2 (Ciclo II-2). 763
Imagen VIII - 15. Producción del equipo A4 para el problema F11.1.3 (Ciclo II-2). 765
Imagen VIII - 16. Producción del alumno A4.2 (ciclo II-2) para el problema de la prueba escrita de 2º de ESO PE.9 (izquierda) y el problema de la prueba escrita de 1º de ESO PE.8 (derecha). 768
Imagen VIII - 17. Producciones de diferentes alumnos del grupo de control para el problema PE.5 (Ciclo II-2). 776
Imagen VIII - 18. Producciones de los alumnos A2.2 (arriba) y A8.2 (abajo) para el problema PE.5 (Ciclo II-2). 777

Imagen VIII - 19. Algunas producciones de los alumnos del grupo de control para el problema PE.8 (Ciclo II-2). 778
Imagen VIII - 20. Producción del alumno A10.2 para el problema PE.4 (Ciclo II-2). 781
Imagen VIII - 21. Producción de A2.2 para el problema PE.4 (Ciclo II-2). 783
Imagen VIII - 22. Producción del equipo A2 para el problema F8.1.2 (Ciclo II-2). 783
Imagen VIII - 23. Producción de A8.2 para el problema PE.4 (Ciclo II-2). 785
Imagen VIII - 24. Producción del equipo A8 para el problema F8.1.2 (Ciclo II-2). 786
Imagen VIII - 25. Producción de A8.2 para el problema PE.9 (Ciclo II-2). 787

Imagen IX - 1. Producción del equipo B5 para el problema F7.1.3 (Ciclo III-2). 819
Imagen IX - 2. Producción del equipo B8 para el problema F8.1.1 (Ciclo III-2). 820
Imagen IX - 3. Producción del equipo B1 (arriba) y del equipo B5 (abajo) para el problema F8.1.2 (Ciclo III-2). 821
Imagen IX - 4. Producción del equipo B7 para el problema F8.1.2 (Ciclo III-2). 822
Imagen IX - 5. Producción del alumno B8.1 para el problema TC8.2 (Ciclo III-2). 823

Índice de figuras

Figura I - 1. Estructura de la memoria y relación con las fases de la investigación-acción y las componentes del análisis didáctico. 20

Figura II - 1. Diferentes representaciones tabulares del concepto de proporción. 45
Figura II - 2. Representación tabular de una relación de proporcionalidad directa. 50
Figura II - 3. Representación gráfica de una función lineal, característica de las relaciones de proporcionalidad simple directa. 51
Figura II - 4. Modelo de barras para la representación gráfica de problemas de porcentajes. 54
Figura II - 5. Representación tabular del producto de magnitudes utilizada por Vergnaud (1983, 1988, 1990) 57
Figura II - 6. Representación tabular de una relación de proporcionalidad inversa. 63
Figura II - 7. Representación gráfica de una función hiperbólica asociada a una relación de proporcionalidad simple inversa. 64
Figura II - 8. Representación tabular de una relación de proporcionalidad compuesta entre tres magnitudes. 69

Figura III - 1. Proceso en espiral de la investigación-acción. 165
Figura III - 2. Articulación entre los subanálisis del análisis didáctico y las fases de la investigación-acción. 170
Figura III - 3. Esquema del diseño experimental e influencia entre ciclos. 181
Figura III - 4. Ejemplo de guion para una entrevista semiestructurada. 191
Figura III - 5. Indicadores del protocolo de observación cumplimentado por los expertos externos. 193

Figura IV - 1. Esquema de conceptos y contenidos utilizados en la propuesta didáctica. 216
Figura IV - 2. Resumen de los focos prioritarios de la propuesta didáctica. 222
Figura IV - 3. Esquemas de resolución funcional de un problema de valor perdido de proporcionalidad simple. 230
Figura IV - 4. Esquemas de resolución funcional para problemas de comparación cuantitativa. 232
Figura IV - 5. Esquema de la estructura (izquierda) y etapas de resolución funcional (derecha) de un problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad simple inversa. 239
Figura IV - 6. Esquema de la estructura (izquierda) y estrategia de resolución funcional (derecha) de un problema de comparación cuantitativa en una situación de proporcionalidad simple inversa. 241
Figura IV - 7. Contenidos estructurados por focos que se abordan durante la propuesta en 1º de ESO. 254
Figura IV - 8. Esquema de las estructuras habituales de las sesiones de clase. 255

Figura V - 1. Esquema de posibles amalgamaciones en una estructura compuesta $\mathbb{p} = (-1, -1, 1)$. 263
Figura V - 2. Gráfico comparativo con los porcentajes de respuestas correctas en la prueba escrita en entre los grupos experimentales y el grupo de control (Ciclo II-1). 404
Figura V - 3. Distribución de los diferentes argumentos empleados por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la detección de relaciones proporcionales en PE.1 (Ciclo II-1) 407
Figura V - 4. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución del problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo II-1). 409
Figura V - 5. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos de los grupos experimental y de control en la resolución del problema de valor perdido PE.4 (Ciclo II-1). 411
Figura V - 6. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos de los grupos experimental y de control en la resolución del problema de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo II-1). 412
Figura V - 7. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo II-1). 414

Figura VI - 1. Gráfico comparativo con los porcentajes de respuestas correctas en la prueba escrita en entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo I-2). 582
Figura VI - 2. Distribución de los diferentes argumentos empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la detección de relaciones proporcionales en PE.1 (Ciclo I-2) 585
Figura VI - 3. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa PE.3 y PE.4 (Ciclo I-2). 588

Figura VI - 4. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta PE.5 y PE.7 (Ciclo I-2). ... 590
Figura VI - 5. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución del problema de repartos proporcionales PE.8 (Ciclo I-2). ... 591
Figura VI - 6. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas de porcentajes PE.9.1 y PE.9.2 (Ciclo I-2). ... 593

Figura VII - 1. Gráfico comparativo con los porcentajes de respuestas correctas en la prueba escrita entre los grupos experimentales y el grupo de control (Ciclo III-1). ... 672
Figura VII - 2. Distribución de los diferentes argumentos empleados por los alumnos de los grupos experimentales y del grupo de control en la detección de relaciones proporcionales en PE.1 (Ciclo III-1). ... 674
Figura VII - 3. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución del problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo III-1). ... 675
Figura VII - 4. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos de los grupos experimental y de control en la resolución del problema de valor perdido PE.4 (Ciclo III-1). ... 676
Figura VII - 5. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos de los grupos experimental y de control en la resolución del problema de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo III-1). ... 678
Figura VII - 6. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo III-1). ... 680

Figura VIII - 1. Gráfico comparativo con los porcentajes de respuestas correctas en la prueba escrita en entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo II-2). ... 770
Figura VIII - 2. Distribución de los diferentes argumentos empleados por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la detección de relaciones proporcionales en PE.1 (Ciclo II-2). ... 772
Figura VIII - 3. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa PE.3 y PE.4 (Ciclo II-2). ... 774
Figura VIII - 4. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta PE.5 y PE.7 (Ciclo II-2). .. 775
Figura VIII - 5. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución del problema de repartos proporcionales PE.8 (Ciclo II-2). ... 778
Figura VIII - 6. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas de porcentajes PE.9.1 y PE.9.2 (Ciclo II-2). ... 779

Figura IX - 1. Gráfico comparativo con los porcentajes de respuestas correctas en la prueba escrita en entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo III-2). ... 829
Figura IX - 2. Distribución de los diferentes argumentos empleados por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la detección de relaciones proporcionales en PE.1 (Ciclo III-2). ... 831
Figura IX - 3. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa PE.3 y PE.4 (Ciclo III-2). ... 833
Figura IX - 4. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta PE.5 y PE.7 (Ciclo III-2). . 834
Figura IX - 5. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución del problema de repartos proporcionales PE.8 (Ciclo III-2). ... 834
Figura IX - 6. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas de porcentajes PE.9.1 y PE.9.2 (Ciclo III-2). ... 835

Capítulo I:
Planteamiento del problema y objetivos de investigación

Desea que el camino sea largo.
Que sean muchas las mañanas de verano
en las que, con qué regocijo, con qué gozo,
llegues a puertos vistos por primera vez.

En este capítulo se presenta una panorámica general del trabajo realizado durante este proyecto de tesis doctoral y que se desarrollará a lo largo de la memoria. Para ello, contextualizaremos la investigación dentro del ámbito de la educación matemática, relacionándola concretamente con otras investigaciones del grupo de trabajo al que pertenece el autor. Tras este apunte, contextualizaremos el problema de investigación al que intenta dar respuesta este trabajo para, después, definirlo en detalle y desarrollar los objetivos de la investigación. A continuación, presentaremos los focos prioritarios de contenido que guían el diseño y el análisis de la propuesta, resumiremos la experimentación realizada y justificaremos la organización en capítulos y secciones que estructuran la memoria. Esta organización está íntimamente ligada con el problema de investigación y con la metodología utilizada. Por último, se incluye un resumen del contenido de cada uno de los capítulos.

I.1. Introducción

El 'razonamiento proporcional' junto con la comprensión de los contenidos matemáticos asociados a la proporcionalidad y la competencia para aplicarlos en contextos reales, conforman uno de los tópicos más importantes en la formación matemática de los estudiantes, tanto en la etapa de Educación Primaria (EP) como en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Históricamente ha supuesto la culminación de la formación aritmética y su cotidianidad, junto con sus innumerables aplicaciones prácticas, justifican la amplia atención recibida tanto desde un punto de vista curricular como desde la investigación.

No obstante, pese a esta atención, estudios recientes muestran las graves dificultades que encuentran los alumnos al afrontar situaciones de proporcionalidad (incluso las más sencillas). En principio, los problemas y dificultades de comprensión por parte de los alumnos pueden tener distintos orígenes, uno de ellos se sitúa en la práctica educativa. En este sentido, cabe destacar que las dificultades a la hora de aplicar correctamente este tipo de razonamientos, la tipología de problemas escolares utilizados e incluso las técnicas utilizadas para resolverlos, se han mantenido como una constante a través del tiempo.

La enseñanza actual de la proporcionalidad aritmética se basa, principalmente, en la adquisición de una serie de destrezas y técnicas de resolución de problemas. Un ejemplo paradigmático de este hecho lo encontramos en la enseñanza, todavía vigente, de la llamada 'regla de tres'. Esta técnica supone en cierto modo el punto álgido de la aritmética escolar y será una de las ideas-fuerza que los alumnos, futuros ciudadanos, asimilarán tras su formación matemática. Sin embargo, existen multitud de estudios que demuestran que esta enseñanza basada en destrezas y técnicas aplicadas acríticamente conduce a resultados poco deseables, como el uso indiscriminado de estos conocimientos adquiridos en situaciones no proporcionales.

El planteamiento del problema de investigación que abordamos en este proyecto se sitúa en la mejora de estos procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares y más concretamente, en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad aritmética para los cursos 1º y 2º de la ESO.

La investigación que presentamos continúa la línea de investigación sobre la enseñanza de las estructuras multiplicativas y del número racional iniciada en los trabajos de Gairín (1998, 2001), Gairín y Sancho (2002), Escolano (2007) y Escolano y Gairín (2005) y, en especial, por los trabajos sobre proporcionalidad aritmética de Gairín (2010), Gairín y Escolano (2009), Gairín y Oller-Marcén (2011, 2012), Oller-Marcén y Gairín (2013, 2016) y Oller-Marcén (2012). En su tesis doctoral, Oller-Marcén (2012) diseñó, a partir de un análisis histórico y epistemológico, una propuesta didáctica para trabajar la proporcionalidad aritmética en la ESO. En ese mismo trabajo, de manera limitada, se implementó una parte de dicha propuesta y en las conclusiones se señalaron diferentes ideas para su mejora. El trabajo que pretendemos iniciar ahora consiste, principalmente, en mejorar, concretar y completar el diseño e implementar una propuesta integral de enseñanza de la proporcionalidad aritmética a lo largo de los dos primeros cursos de ESO, recogiendo y refinando las ideas de los anteriores trabajos del grupo de investigación.

I.2. Contextualización del problema de investigación

En esta sección contextualizamos el problema de investigación que da lugar a este trabajo. Para ello, en primer lugar, destacaremos la importancia del contenido matemático trabajado enfatizando su papel central en la formación matemática de los alumnos de ESO. Sin embargo, a pesar de su importancia y de la atención recibida en la investigación en educación matemática, constataremos algunas de las deficiencias en los procesos de enseñanza y aprendizaje de este contenido que todavía siguen vigentes y justificaremos la pertinencia de la investigación desarrollada por profesores en ejercicio para aportar conocimiento en la búsqueda de soluciones a estas deficiencias observadas.

I.2.1. Relevancia de la proporcionalidad

Como indica Rico (2016, p. 32), educar es una actividad intencional y, como tal, tanto el profesor como el investigador en educación deben reflexionar sobre las finalidades que se persiguen con dicha actividad. Si nos restringimos al ámbito de la educación matemática, esta reflexión nos debe llevar a interrogarnos "acerca de por qué las matemáticas forman parte de la educación obligatoria" y a "buscar y encontrar respuestas al interrogante de por qué forman parte de la herencia cultural compartida, del patrimonio social y formativo que reciben todos los ciudadanos en cualquier país del mundo". En los siguientes apartados intentaremos responder a estos interrogantes de forma no exhaustiva centrándonos en el contenido matemático sobre el que gira esta memoria, la proporcionalidad.

I.2.1.1. Relevancia histórica y cultural

Desde un punto de vista histórico, los problemas relacionados con la proporcionalidad aritmética aparecen en algunos de los textos más antiguos de contenido matemático que se conservan como el *Papiro de Rhind* (datado hacia el siglo XVII a.n.e.). El concepto clave asociado a la proporcionalidad, la razón, aparece reflejado en la tradición matemática de diferentes civilizaciones como la Grecia Clásica o la China Imperial Temprana, y se recoge en obras como los *Elementos* de Euclides (s. III a.n.e) o el libro chino los *Nueve Capítulos* o *Jiuzhang Suanshu* (siglo III). Como veremos en el Capítulo II, la génesis epistemológica del concepto de razón es sustancialmente diferente en ambas culturas. En la cultura occidental ha prevalecido la tradición matemática griega en la que, en un principio, la razón no constituía un número en sí mismo, sino que estaba formada por dos cantidades de magnitud homogéneas y estaba ligada a procesos de medida generalmente en contextos de carácter geométrico. La preocupación por el estudio de las razones y la semejanza ha tenido históricamente una importante influencia en la arquitectura y el arte. Sin embargo, en la tradición matemática china, más cercana a las aplicaciones prácticas comerciales, la razón posee un carácter más aritmético.

Sus innumerables aplicaciones prácticas hicieron que el foco de atención se centrase en las técnicas de resolución de problemas, surgiendo técnicas como la regla de tres, que se han convertido en una constante en la aplicación de la proporcionalidad en todas las culturas y a lo largo de los siglos (Gómez, 2006). Esta estrecha relación con las aplicaciones prácticas, particularmente con las comerciales, originó también otra representación simbólica de la razón, omnipresente en la actualidad, que economizaba lenguaje y cálculos (cuando se usan sistemas de numeración decimal y sistemas monetarios con céntimos de una moneda principal), hablamos del porcentaje. Aunque el primer uso registrado de la palabra '*per ceto'* data del siglo XV y el símbolo actual '%' comienza a aparecer en el siglo XVII (*per ceto, pceto*, pc^{o}, $p\frac{o}{o}$, *%)*, los orígenes del uso de la cantidad 100 como referente para establecer una razón se encuentran de nuevo en la tradición oriental de China e India (Parker & Leinhardt, 1995).

I.2.1.2. Relevancia instrumental y propedéutica

Los contenidos asociados a la proporcionalidad están relacionados con multitud de contenidos matemáticos escolares que se abordan desde los primeros años de escolarización, abarcan toda la etapa secundaria (Fiol & Fortuny, 1990) e incluso conectan con contenidos propios de las enseñanzas postobligatorias:

- En primer lugar, las estructuras de proporcionalidad (tanto simple directa o inversa, como compuestas) se sitúan dentro de las estructuras multiplicativas. Por tanto, resultan imprescindibles para una completa y adecuada comprensión de los fenómenos alrededor de las operaciones de multiplicación y división.
- El concepto de razón es central en el aprendizaje del número racional positivo y aparece como uno de los subconstructos o significados del concepto de fracción y del número decimal positivo asociados al problema de la medida.
- El razonamiento proporcional en general, y el de razón en particular, pueden influir en la construcción de significados de los parámetros estadísticos y en la resolución de tareas de probabilidad.
- Los conceptos de homotecia, semejanza o teoremas como el de Thales, se construyen a partir de la aplicación de la proporcionalidad en un ámbito geométrico. Además, estos conceptos están detrás de conceptos más sofisticados como la trigonometría. En este ámbito geométrico también el número áureo aparece como razón de longitudes o áreas de determinadas figuras. Por supuesto, el número π también se define como una razón.
- Las funciones lineales e hiperbólicas modelizan las relaciones de proporcionalidad simple e inversa. Además, la interpretación de la pendiente de una recta en términos de razón o tasa de crecimiento es fundamental para construir el concepto de derivada e interpretar dicho concepto tanto física como geométricamente.
- Las propiedades implícitas de la función lineal que pueden surgir de forma natural al trabajar problemas de proporcionalidad simple directa son la clave para la construcción del álgebra lineal.
- Muchos campos de problemas "clásicos" se articulan alrededor de la proporcionalidad: cambios de unidades, repartos proporcionales, aumentos y disminuciones porcentuales, mezclas y aleaciones, …

Además de la importancia de la proporcionalidad para avanzar dentro de la disciplina de las matemáticas, muchos fenómenos físicos y naturales se modelizan a partir de relaciones de proporcionalidad entre magnitudes, por lo que un adecuado razonamiento proporcional es imprescindible para adquirir conocimientos químicos, físicos, biológicos, … La aparición de relaciones de proporcionalidad simple directa e inversa es amplísima: primera Ley de Newton, Ley de Ohm, definición de velocidad media e instantánea, densidad en sustancias o mezclas homogéneas, … Pero también lo es la de las relaciones compuestas como en la Ley de los Gases

Ideales a partir de la cual se obtienen, como casos particulares fijando el valor de algunas de las magnitudes, relaciones de proporcionalidad simple directa e inversa como: Ley de Boyle-Mariotte, Ley de Gay Lussac, Ley de Charles o el principio de Avogadro.

En general, en el ámbito científico los estudiantes deben manejarse con productos y cocientes de diferentes magnitudes y realizar cambios de unidades. En este sentido, los conceptos relacionados con la proporcionalidad, no solo los puramente instrumentales, juegan un papel determinante. Madden (2018, p. 112) ejemplifica las técnicas de 'álgebra de magnitudes' que se llevan a cabo en ocasionas en la resolución de problemas científicos y reflexiona sobre ellas:

> Sugiero que razonar con razones y proporciones influye más sobre la capacidad de comprender el proceso de medición de lo que generalmente se reconoce. La historia de la razón y la proporción lo confirma. Por supuesto, la capacidad de tomar mediciones, calcular tasas, poner números de medidas en fórmulas y "cancelar unidades" en los momentos apropiados es importante. Pero tenemos que atender a algo más que a los mecanicismos. ¿Cuál es la explicación de una cancelación como la siguiente? [Imagen I - 1] Quizás usted piense que las palabras son solo decoraciones para recordarnos que $10{,}000$ se refiere a pies y 0.3048 se refiere a metros. O tal vez prefiera pensar en las palabras como símbolos de magnitudes que se multiplican por números. En cualquier caso, ¿por qué este procedimiento de cancelación? ¿Qué de lo que sabemos previamente para números, se puede trasladar a este contexto no numérico?

$$\boxed{10{,}000\,\cancel{\text{feet}} \times \frac{0.3048\,\text{m}}{1\,\cancel{\text{foot}}} = 3048\,\text{m}}$$

Imagen I - 1. Fórmula empleada por Madden (2018, p. 112) para ejemplificar el 'álgebra de magnitudes'.

Además del carácter instrumental dentro de las disciplinas científicas, los conceptos relacionados con la proporcionalidad son ampliamente usados en otras disciplinas escolares, especialmente en aquellas relacionadas con las ciencias sociales. En las materias de geografía e historia los escolares deberán utilizar escalas para elaborar mapas, hablarán de tasas de nacimientos y de mortalidad, de densidades de población, de aumentos y disminuciones porcentuales de parámetros sociológicos. En las asignaturas de economía los estudiantes necesitan desenvolverse con los aumentos y disminuciones porcentuales, el cálculo de intereses simples y compuestos, interpolación lineal de datos, números índice, …

I.2.1.3. Relevancia práctica y pública

Al margen de su carácter propedéutico e instrumental, una gran cantidad de situaciones cotidianas y domésticas se modelizan a partir de los conceptos relacionados con la proporcionalidad. Muchas de ellas tienen que ver con contextos económicos o de compraventa: precios unitarios, descuentos, ofertas, intereses bancarios, facturas de consumo. Pero también juega un papel principal en otros ámbitos como la cocina, en donde aparecen muchas cantidades intensivas como la acidez, el sabor de las mezclas o el dulzor. En este contexto obtener unos resultados similares al realizar una preparación con diferentes cantidades absolutas depende en buena parte de la medida relativa del volumen o masa de los alimentos empleados.

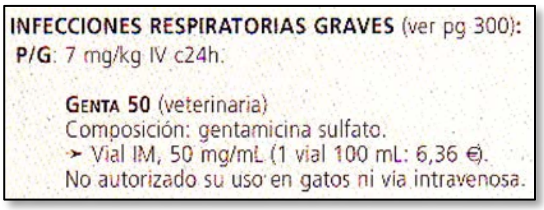
Aunque han podido perder cercanía con el ámbito doméstico de los alumnos en las últimas décadas, históricamente los contextos relacionados con la agricultura, jardinería y ganadería han generado múltiples situaciones de proporcionalidad. Sin embargo, las oportunidades de aprendizaje que presentan estos entornos pueden aprovecharse para crear propuestas de enseñanza alrededor de, por ejemplo, el huerto escolar, que permitan construir los conocimientos relativos a la proporcionalidad, no solamente aplicarlos de forma instrumental (Balda, 2018, p. 164). Balda caracteriza en su investigación tres usos fundamentales en los que aparece el razonamiento proporcional en el contexto del huerto escolar:

> Se infirió que en las tareas llevadas a cabo en la huerta escolar lo proporcional […] se empleaba con ciertas intencionalidades […]: 1) Para establecer comparaciones entre variables de igual o distinta naturaleza, lo cual está en la base subyacente del pensamiento proporcional y conlleva al establecimiento de relaciones de dependencia. 2) Para el establecimiento de unidades de medida y uso de patrones de medida. Los patrones son empleados como herramientas para determinar la cantidad de veces que determinado objeto cabe exactamente en otro. […] 3) Para expresar generalizaciones, las cuales se manifiestan de forma evolutiva iniciando con expresiones retóricas que dan paso a expresiones sincopadas en donde generalizaciones como: el doble, el triple o la mitad, aparecen en el léxico de los estudiantes.

Fuera del ámbito personal y escolar, la proporcionalidad también aparece en la actividad profesional cotidiana. En particular, es relevante mencionar la necesidad de uso del razonamiento proporcional que debe ponerse en práctica en profesiones del ámbito sanitario (Aviña González, Vargas Alejo, Alvarado Monroy, & Cristóbal Escalante, 2019; García, Granados, & Pinillos, 2009). Por ejemplo, en la Imagen I - 2 se observa un extracto de una guía terapéutica veterinaria[1]. La guía ofrece la información necesaria para poder suministrar la cantidad de un determinado medicamento a un animal en función de su peso. Se pueden ver razones de diferentes tipos y diferentes representaciones. Aparece una razón homogénea entre la masa de medicamento y masa del animal "$7\ mg/kg$", que da cuenta de la dosis que debe suministrársele cada día, "$c24h$". Por lo que puede considerarse una relación de proporcionalidad compuesta entre la masa total de medicamento, la masa del animal y el tiempo que dura el tratamiento, en la que la anterior cantidad numérica sería la constante de proporcionalidad compuesta. Como el medicamento viene disuelto se presenta la razón heterogénea masa de medicamento por unidad de volumen de disolución "$50\ mg/ml$". La razón entre el volumen de la disolución y la cantidad de viales "1 vial $100\ ml$" y la razón bien compactada que expresa coste unitario de los viales "1 vial […] 6,36 €". Un problema real al que debe enfrentarse un veterinario es determinar la cantidad de disolución que debe poner

[1] Imagen extraída de: Rojas López, J. (2012). *Guía terapéutica del animal de compañía*. Castellón: Consulta de Difusión, SL.

a un animal en cada dosis según su peso. En las condiciones anteriores dicho veterinario debería resolver un problema de proporcionalidad simple encadenada.



INFECCIONES RESPIRATORIAS GRAVES (ver pg 300):
P/G: 7 mg/kg IV c24h.

GENTA 50 (veterinaria)
Composición: gentamicina sulfato.
➤ Vial IM, 50 mg/mL (1 vial 100 mL: 6,36 €).
No autorizado su uso en gatos ni via intravenosa.

Imagen I - 2. Extracto de la guía terapéutica veterinaria de Rojas López (2012).

Los contenidos asociados a la proporcionalidad están también detrás de diferentes actividades de la vida pública y política por lo que son esenciales para la formación matemática de los ciudadanos. Por ejemplo, los diferentes sistemas electorales se generan mediante la asignación de escaños de “forma proporcional” al número de votos bajo ciertas restricciones. También, mucha de la información suministrada a los ciudadanos, tanto por parte del Estado como por los medios de comunicación, se presenta utilizando la noción de porcentaje u otras razones en las que se normaliza la cantidad referente a otras potencias de diez.

I.2.1.4. Relevancia formativa

Más allá de sus innumerables aplicaciones prácticas, la proporcionalidad juega un papel determinante en el desarrollo cognitivo de los estudiantes que en sí mismo le confiere una gran relevancia dentro de la educación matemática. Como expresa Lamon (2007, pp. 646-647), el desarrollo del razonamiento proporcional debería considerarse un fin en sí mismo y no una mera sucesión de técnicas para resolver determinados problemas prácticos:

> ¿Enseñamos para llegar a un objetivo concreto o buscamos un conocimiento fundamental que pueda crecer para sostener otros contenidos más grandes y complejos? […] los profesores equiparan la comprensión de la razón y la proporción con la capacidad de resolver problemas […] o para encontrar los números que faltan en una proporción. Sin embargo, enseñar definiciones, algoritmos y aplicaciones […] no ha facilitado […] la capacidad de razonar proporcionalmente. En lugar de enseñar para llegar a un objetivo concreto, la búsqueda de ideas y procesos iniciales puede ser más importante.

Según múltiples autores, el razonamiento proporcional se relaciona con la transición entre el pensamiento aditivo y el pensamiento multiplicativo en el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Esta etapa coincide en el sistema educativo español con la transición entre la Educación Primaria y la Educación Secundaria Obligatoria. Un adecuado desarrollo del razonamiento proporcional es la base para que los estudiantes empleen adecuadamente comparaciones relativas, se acerquen a la noción de covariación entre magnitudes o variables y adquieran las bases para la modelización funcional de los fenómenos asociados a la proporcionalidad.

I.2.1.5. Relevancia curricular

La importancia destacada de este tópico matemático hace que los diferentes conceptos relacionados con la proporcionalidad tengan un papel destacado en los currículos de matemáticas internacionales. Por ejemplo, el número racional como razón y la proporcionalidad aritmética es uno de los trece estándares propuestos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos, NCTM, (National Council of Teachers of Mathematics, 1989) para los cursos correspondientes a 6º de EP y 1º y 2º de ESO (*6th – 8th grade*). Esta presencia en los contenidos matemáticos escolares a nivel internacional se hace patente en el análisis del *Center for Curriculum Redesign* (CCR[2]) en el que se realizan recomendaciones para el diseño de la prueba PISA[3] de 2021[4] centrada en la competencia matemática (Mahajan, Marciniak, Schmidt, & Fadel, 2016). En dicho análisis aparecen hasta 36 veces los términos 'proporcionalidad' o 'razonamiento proporcional'. De hecho, aparece como un elemento central en dos de las cuatro áreas en las que descomponen la alfabetización matemática: forma y espacio, cambio y relaciones.

Centrándonos en España, estos contenidos han estado presentes en los distintos currículos de las leyes educativas. Por ejemplo, en el actual desarrollo curricular español se afirma que los estudiantes de entre trece y catorce años deben ser competentes en resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales.

Esta presencia en los actuales currículos no es novedosa ya que, históricamente, la proporcionalidad ha recibido una atención constante en los textos didácticos. De hecho, el análisis de libros de texto puede resultar de mayor utilidad que el análisis curricular para analizar la práctica educativa ya que la presencia de un tópico en libros de texto y su tratamiento determinan en gran medida los procesos de enseñanza (Schubring, 1987).

I.2.1.6. Relevancia en la investigación en educación matemática

La atención que los investigadores en educación matemática le dedican a la proporcionalidad es otro de los indicadores de su relevancia. Como indican Gómez y García (2014), desde los primeros trabajos de Inhelder y Piaget (1958) que sitúan al razonamiento proporcional como un elemento clave en el desarrollo cognitivo, la investigación ha asignado un papel central a su estudio y es considerado un concepto fundamental para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares (Lesh, Post, & Behr, 1988).

---

[2] https://curriculumredesign.org/

[3] Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE (PISA, por sus siglas en inglés) http://www.oecd.org/pisa/pisaenespaol.htm

[4] A causa de la pandemia generada por la COVID-19 las pruebas PISA para evaluar la competencia matemática se han pospuesto a 2022.

En el ámbito español de la investigación en educación matemática, la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad ha recibido una atención constante. Esta atención se hace patente, por ejemplo, en las abundantes tesis doctorales sobre este tema leídas en España en los últimos años (Buforn, 2017; Burgos, 2020; Fernández, 2010; Fuentes, 2020; Oller-Marcén, 2012; Rivas, 2013; Rojas, 2021; Torres, 2015; Valverde, 2012). La mayor parte de estos trabajos se han enfocado en el ejercicio o en la formación inicial de maestros de primaria y profesores de secundaria y han estudiado fundamentalmente conceptos relacionados con las situaciones de proporcionalidad simple directa.

En el Capítulo II de la presente memoria se realiza una revisión amplia de antecedentes de trabajos de investigación, tanto nacionales como internacionales, centrados en la proporcionalidad.

I.2.2. Deficiencias en la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad

Gracias a la atención recibida en la investigación se han puesto de manifiesto multitud de obstáculos, dificultades y deficiencias en el aprendizaje de la proporcionalidad, no solo en estudiantes de EP y ESO, sino también en maestros y profesores en formación. En el Capítulo II de esta memoria, dedicaremos una sección a los aspectos cognitivos relacionados con la proporcionalidad en la que expondremos estas deficiencias en el aprendizaje de la proporcionalidad. En particular, es reseñable indicar que la instrucción que tradicionalmente reciben los estudiantes puede estar tras la presencia de alguna de estas dificultades como el abuso de métodos proporcionales en situaciones que no lo son.

Exponemos ahora algunos ejemplos concretos extraídos de pruebas de diagnóstico internacionales que ponen de manifiesto las dificultades de los alumnos españoles en las tareas relacionadas con la proporcionalidad.

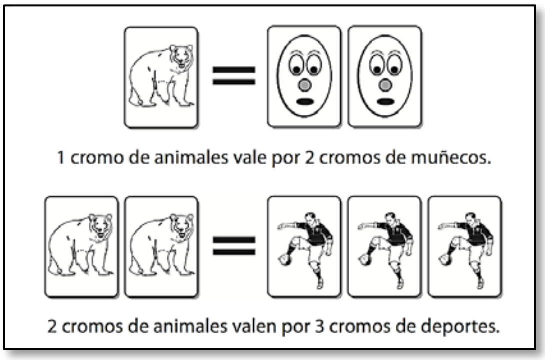
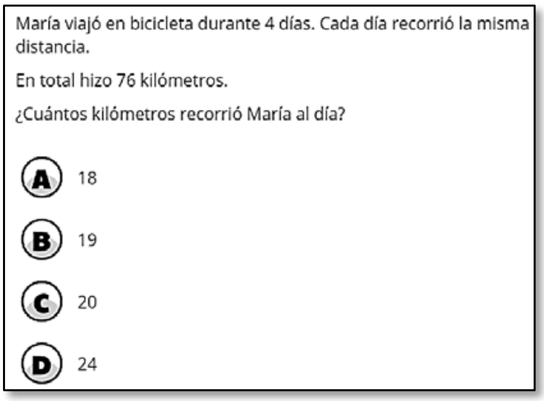


Imagen I - 3. Extracto de un ítem liberado de proporcionalidad en TIMSS 2011, utilizado por Fraile Rey (2018).

Entre los alumnos de primaria, podemos rastrear los resultados de los ítems liberados en las pruebas TIMSS[5] realizadas a alumnos de 4º de EP. En la Imagen I - 3 vemos la información gráfica que se suministraba a los estudiantes en el estudio TIMSS 2011 y a partir de la cual se formulaban tres preguntas. En la primera se pedía a los estudiantes que calculasen la cantidad de muñecos equivalentes a cinco cromos de animales, en la segunda que calculasen los cromos de deporte equivalentes a ocho cromos de animales y en la tercera los cromos de animales equivalentes a quince cromos de deporte. Aunque en la primera pregunta, en la que se da la información sobre la razón directamente vinculada al tanto por uno, los alumnos españoles obtuvieron unos resultados ligeramente superiores a los del conjunto de estudiantes a nivel internacional (62 % de acierto a nivel internacional frente a un 63 % en España), en los siguientes apartados en los que tenían que resolver un problema de valor perdido con dos etapas, los resultados fueron muy pobres e inferiores a los resultados a nivel internacional, solo un 20 % y 14 % de éxito respectivamente, siendo del 31 % y 25 % las tasas de éxito a nivel internacional para dichos aparatados (Fraile Rey, 2018; Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012).


María viajó en bicicleta durante 4 días. Cada día recorrió la misma distancia.

En total hizo 76 kilómetros.

¿Cuántos kilómetros recorrió María al día?

A 18

B 19

C 20

D 24

Imagen I - 4. Ítem liberado de proporcionalidad en TIMSS 2019 (MEFP, 2020).

Más recientemente, en el estudio TIMSS de 2019 (MEFP, 2020) se pedía calcular la razón entre los kilómetros recorridos en bicicleta y el número de jornadas empleadas para recorrerlos (Imagen I - 4). Los alumnos españoles también obtuvieron unos pobres resultados, con una tasa de éxito del 54 %, significativamente inferior a la tasa de éxito a nivel internacional del 58 %.

En el nivel de educación secundaria, los resultados de las pruebas PISA 2012 (OCDE, 2013) también parecen indicar un pobre dominio del razonamiento proporcional entre los alumnos de dieciséis años. Ante la aparentemente sencilla tarea que puede verse en la Imagen I - 5, solo el 62,1 % de los alumnos españoles supo resolverla con éxito.

[5] TIMSS es el acrónimo que se corresponde con las siglas en inglés para *Trends In International Mathematics And Science Study* de la IEA. https://timssandpirls.bc.edu/about.html

SALSAS

Estás preparando tu propio aliño para la ensalada.

He aquí una receta para 100 mililitros (ml) de aliño.

Aceite para ensalada:	60 ml
Vinagre:	30 ml
Salsa de soja:	10 ml

Pregunta 1

¿Cuántos mililitros (ml) de aceite para ensalada necesitas para preparar 150 ml de este aliño?

Respuesta: ………………. ml

Imagen I - 5. Problema de proporcionalidad liberado del estudio PISA 2012 (OCDE, 2013).

Estas dificultades se detectan también en alumnos de niveles universitarios. Una de las principales conclusiones de Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (2016) en su análisis sobre el conocimiento matemático puesto en juego por los estudiantes de magisterio en el estudio TEDS-M[6] 2008 pone de manifiesto que, aunque los alumnos podían resolver con cierto éxito (alrededor del 80 %) problemas sencillos de valor perdido mostraban deficiencias en el trabajo con ciertos conceptos centrales de la proporcionalidad:

> Encontramos que los futuros maestros mostraron tener un conocimiento suficiente de los contenidos previstos para primaria y los primeros cursos de secundaria con excepción del trabajo con los conceptos razón/proporción/porcentaje. (Gutiérrez-Gutiérrez *et al*., 2016, p. 135)

Otros trabajos llevados a cabo con maestros en formación corroboran que las dificultades observadas en los niveles obligatorios de la enseñanza se prolongan en el tiempo. Valga como ejemplo la tasa de éxito del 43,8 % obtenida en el estudio de Nortes, Huedo, López y Martínez (2003, p. 72) al plantear el siguiente problema a 240 estudiantes de las distintas diplomaturas de maestro:

> *En una oficina el Sr. Pérez va a trabajar 2 días a la semana, el Sr. Fuentes va a trabajar 4 días a la semana y el Sr. Espinosa va a trabajar 6 días a la semana. El coste total de iluminación de la oficina (los tres despachos), por semana, asciende a 2400 ptas. ¿Cuánto debe pagar cada uno de los tres señores?*

Los problemas detectados en la comprensión de los alumnos sobre la proporcionalidad pueden deberse a múltiples causas según pongamos el foco en el contenido, en el aprendizaje o en la enseñanza. Es decir, pueden deberse a la propia naturaleza y dificultad de los objetos involucrados, a problemas cognitivos asociados a los propios alumnos o pueden provenir de la práctica educativa. En este último sentido, se posicionan, por ejemplo, autores como Van Dooren,

[6] Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros de la IEA (TEDS-M, por sus siglas en inglés).

De Bock, Janssens y Verschaffel (2008) al estudiar los abusos del uso de lo proporcional en situaciones no proporcionales.

En un primer acercamiento a la práctica educativa española, debemos constatar la existencia de elementos curriculares que pueden derivar en tratamientos poco deseables de la proporcionalidad. Así, en el Real Decreto por el que se desarrolla el actual currículo[7] de matemáticas de Educación Primaria aparece como contenido y como estándar de aprendizaje el empleo de la regla de tres (p. 19390): "La Regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad", "Usa la regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad, para resolver problemas de la vida diaria".

Pero dado que "el libro de texto […] en muchas ocasiones […] determina el currículo real" (Monterrubio & Ortega, 2009, p. 38), para analizar la práctica educativa debemos también prestar atención al tratamiento que se le da a la proporcionalidad aritmética en los libros de texto. De forma breve señalamos algunas de las características de los libros de texto detectadas desde la investigación y que pueden influir negativamente en la práctica educativa:

- Existe un desequilibrio entre los conocimientos de tipo conceptual y los de tipo procedimental, a favor de estos últimos.
- Se considera prioritariamente la razón entre números concebida como su cociente e identificada con una fracción. No se define la razón entre cantidades de magnitud entendida como la cantidad de una nueva magnitud.
- La caracterización de los distintos tipos de proporcionalidad favorece la implantación de ideas y razonamientos incorrectos que identifican una relación proporcional con una relación creciente ("a más … más", "a menos … menos", etc.) e incluso, en muchas ocasiones, se explicitan este tipo de razonamientos incorrectos.
- Existe un predominio absoluto de los problemas de valor perdido.
- Hay una marcada tendencia a presentar técnicas de resolución orientadas a la aplicación acrítica y automática de algoritmos.
- La proporcionalidad directa e inversa son tratadas simultáneamente en el primer curso de ESO, pese a las orientaciones curriculares y pese a que ambos fenómenos están muy alejados tanto desde un punto de vista matemático como cognitivo.

Estas características de los libros de texto promueven un modelo de enseñanza enfocado en destrezas[8] (López & Alsina, 2015; Baroody & Coslick, 1998) ya que "describen un enfoque de contempla el aprendizaje matemático como la memorización de destrezas básicas a través de la repetición, y el objetivo principal es adquirir un conjunto de reglas, fórmulas y procedimientos"

---

[7] Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, nº 52, 1 de marzo de 2014, pp. 19349-19420.

[8] El enfoque de destrezas se presenta como una de las categorías de métodos de enseñanza que surge al poner el foco de atención en la actividad matemática que se desarrolla. Además de este enfoque se distinguen el enfoque conceptual, el enfoque de resolución de problemas y el enfoque investigativo (López & Alsina, 2015; Baroody & Coslick, 1998).

(López & Alsina, 2015, p. 2). Aunque los estudiantes puedan adquirir un nivel alto de destreza a través de la repetición acrítica de técnicas y procedimientos, bajo este enfoque, se les considera seres en su mayoría en su mayoría comprender muchos de los conocimientos matemáticos.

Cabe destacar que este enfoque no deseable de la enseñanza de la proporcionalidad aritmética se ha mantenido como una constante a lo largo de la Historia (Gómez, 2006).

Debido a la influencia de los libros de texto en la práctica educativa que hemos argumentado anteriormente y a la inercia histórica en el tratamiento de la proporcionalidad que estos presentan, nos referiremos a este modelo enfocado en destrezas como 'enseñanza tradicional' en el resto de la memoria. En el Capítulo II abordaremos con mayor detalle el análisis de la práctica educativa actual alrededor de la proporcionalidad.

El fenómeno de inercia en el que "la forma de enseñar" permanece invariante durante el tiempo pese a los posibles cambios sociales y legislativos no es exclusivo de la proporcionalidad. Los maestros y profesores tendemos a replicar aquellos modelos de enseñanza que hemos recibido en nuestra etapa como estudiantes estableciendo una relación causal falaz entre ese modelo de enseñanza y nuestro propio éxito (Wright, 2017). En esta misma línea, pero elevando el debate sobre el inmovilismo educativo a la estructura curricular, Madden (2018, p. 113) argumenta:

> La cultura del currículo […] es tradicional y sincrética. […] Dicha cultura preserva los patrones de expresión y los hábitos de pensamiento, enfrentando la presión al cambo absorbiendo y transformando lo que se le impone recientemente, forzando a que las novedades encajen en los espacios entre estructuras antiguas.

I.2.3. La necesidad de investigar en el aula

English y Kirshner (2016) destacan dos líneas prioritarias que deben dar forma a las agendas de futuro en la investigación en educación matemática. Por un lado, incrementar la atención en la educación STEM[9], por otro, el reto pendiente de conectar la investigación y la práctica educativa. Los autores destacan varios hechos que, tradicionalmente, han desconectado la investigación y la práctica educativa y que se recogen en el trabajo de Vanderlinde y van Braak (2010), uno de ellos es la escasa practicidad de los resultados de la investigación en educación. La consecuencia de esta desconexión produce una separación entre investigadores en educación matemática y profesores de matemáticas poco deseable. Es necesario, por tanto, que la investigación se acerque a la realidad de la práctica de los profesores y los incluya en experimentaciones de aula para tratar de acercar estos dos ámbitos profesionales.

[9] El término STEM, por sus siglas en inglés para *Sciences, Techonology, Engeenering and Mathematics*, hace referencia a la enseñanza y el aprendizaje transversal de estas disciplinas científicas y técnicas.

También dentro del marco legislativo español, basado en la LOE[10] y que ha convivido a lo largo del desarrollo de esta memoria con las modificaciones introducidas por la LOMCE[11] y por la LOMLOE[12], se destaca la importancia y necesidad de que los docentes realicen acciones de investigación, experimentación e innovación educativa en el aula. De este modo, la innovación y la investigación educativa deberían jugar un papel importante en el desarrollo profesional de los profesionales de la enseñanza. Ambos términos, investigación e innovación, si bien no pueden tratarse como sinónimos, tienen muchos puntos en común cuando se abordan como acciones llevadas a cabo por los docentes para intentar mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, Carbonell (2002, p. 11) define la innovación educativa como “[un] conjunto de ideas, procesos y estrategias, más o menos sistematizados, mediante los cuales se trata de introducir y provocar cambios en las prácticas educativas vigentes”. Otros autores amplían o matizan la anterior definición:

> La innovación educativa es el proceso realizado de forma deliberada, por un docente o varios, con el objetivo de mejorar la praxis educativa, a través de un cambio positivo originado como respuesta a un problema, a la revisión de la propia praxis inducida interna o externamente y en un contexto concreto como es el centro educativo y/o el aula. (Sánchez Ramón, 2005, p. 646)

Además, Sánchez Ramón (2005) aborda las conexiones entre la investigación e innovación educativas destacando la investigación-acción[13] como paradigma de investigación que relaciona estos dos conceptos. Es decir, las experiencias llevadas a cabo por docentes mediante una metodología de investigación-acción en sus propias aulas resultan muy interesantes para el desarrollo y la innovación curriculares (Elliot, 2000), así como para la mejora de la instrucción ya que acercan teoría y práctica educativas (McNiff, 1992). Esta metodología es reflexiva, activa y se basa en la generación de grupos colaborativos de expertos en investigación y prácticos (Appelbaum & Stathopoulou, 2016; Fried & Amit, 2016; Ruthven & Goodchild, 2016). La creación de estas relaciones de trabajo entre profesores e investigadores basadas en las recientes formas de pensar en la didáctica de las matemáticas es uno de los principales motivos por los que esta metodología cobra relevancia. Además, “mediante ella se posibilita la innovación docente, al idear nuevas formas que conllevan una comprensión más adecuada del sentido y de la utilidad de las Matemáticas en la formación de los alumnos” (Romera, 2012, p. 70).

---

[10] Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, nº 106, 4 de mayo de 2006, Madrid, pp. 17158-17207.

[11] Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre para la Mejora de la Calidad Educativa. *Boletín Oficial del Estado*, nº 295, 10 de diciembre de 2013, Madrid, pp. 97858-97921.

[12] Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, nº 340, 30 de diciembre de 2020, Madrid, pp. 122868-122953.

[13] En el Capítulo III de esta memoria se desarrollan los fundamentos de la metodología de investigación-acción.

I.3. Problema de investigación y objetivos del trabajo

En las secciones anteriores hemos destacado el papel relevante que juega la proporcionalidad en la formación matemática de los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. Pese a dicha importancia y la amplia atención otorgada por la investigación, se detectan deficiencias tanto en el aprendizaje como en los procesos de enseñanza e, incluso, en las directrices curriculares. Además, hemos puesto de manifiesto que uno de los objetivos pendientes de la investigación en educación matemática es conseguir trasladar los resultados teóricos a la práctica educativa. Para conseguir aproximar teoría y práctica, no basta con hacer llegar a los prácticos los resultados de la investigación, sino que además hay que conseguir involucrar a esos mismos prácticos en la investigación. La investigación reflexiva sobre la propia práctica puede conseguir introducir el conocimiento teórico de forma aplicada a la realidad de los centros educativos para generar desarrollo e innovación de carácter curricular.

Por tanto, el **problema de investigación** que motiva este estudio y que abordamos en nuestra investigación es la mejora de los procesos de enseñanza de la proporcionalidad aritmética en los primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria a partir del desarrollo de una secuencia de enseñanza para este tópico.

Este problema, no se aborda de forma exclusivamente teórica ya que su propia naturaleza hace indispensable que el diseño sea contrastado con su implementación reflexiva y crítica en grupos naturales de alumnos.

Para abordar dicho problema, el trabajo de investigación se centra, en primer lugar, en el diseño de una secuencia didáctica. Es decir, en la selección de contenidos, su temporalización y el diseño curricular de las sesiones de clase y de las actividades mediante las que se pretende construir el conocimiento de los alumnos. Nuestra propuesta se basa en el tratamiento aritmético de la proporcionalidad a partir de los conceptos fundamentales de razón y de producto de medidas, entendidos como magnitudes derivadas de una relación multiplicativa entre otras magnitudes. A partir de estos conceptos básicos, se pretende diseñar una propuesta de enseñanza que abarque los contenidos asociados habitualmente a la proporcionalidad en la etapa secundaria. Esta tarea se inició en la tesis doctoral de Oller-Marcén (2012), por lo que el presente trabajo se apoya en los resultados obtenidos de esta propuesta parcial para 1º de ESO.

Para validar este diseño curricular, la propuesta debe experimentarse en el ámbito para el cual se ha creado, es decir, debe experimentarse sobre grupos naturales de alumnos de 1º y 2º de ESO. Por tanto, nuestro siguiente objetivo de investigación supondrá analizar las fortalezas y las debilidades de nuestra propuesta cuando esta se lleva a cabo en aulas de secundaria. Este objetivo y la doble condición del autor como docente de secundaria e investigador guiarán el diseño de la metodología de investigación.

La presentación anterior de los objetivos que persigue esta investigación no da cuenta de su carácter cíclico. Al diseño curricular de la propuesta le seguirá una puesta en práctica y los resultados de esta puesta en práctica supondrán cambios en el diseño en los siguientes ciclos de experimentación. Por tanto, a lo largo de la propuesta evaluaremos la consecución parcial de los objetivos en diferentes momentos.

Concretamos las anteriores ideas en los siguientes objetivos generales y objetivos parciales de esta investigación:

Objetivo I: Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética para todo el primer ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria, modificando la realizada para 1º ESO en (Oller-Marcén, 2012) y completando la propuesta para todo el primer ciclo constituyendo una alternativa a la enseñanza tradicional.

Este primer objetivo de investigación se descompone de forma natural en dos objetivos parciales según nos centremos en la modificación de la propuesta ya experimentada o en el diseño de la propuesta para los contenidos que no se trabajaron en la tesis de Oller-Marcén (2012). Dichos objetivos parciales pueden concretarse en un siguiente nivel atendiendo al contenido matemático que se trabaja.

Objetivo I.1: Modificar la propuesta de enseñanza experimentada por Oller-Marcén (2012) a partir de las conclusiones obtenidas en su tesis doctoral.

Objetivo I.1.1: Modificar la secuenciación de contenidos contemplando la elaboración de una propuesta para 2º y reorganizando los contenidos impartidos en 1º de ESO.

Objetivo I.1.2: Adaptar y ampliar el diseño de la propuesta en lo relativo a la proporcionalidad simple directa y simple inversa, ampliando la tipología de los problemas que se proponen a los alumnos.

Objetivo I.1.3: Rediseñar la propuesta en lo relativo al porcentaje para paliar las deficiencias encontradas en la experimentación anterior.

Objetivo I.2: Diseñar una propuesta completa para los contenidos no incluidos en la experimentación de Oller-Marcén (2012).

Objetivo I.2.1: Diseñar una propuesta de enseñanza para la proporcionalidad compuesta que incluya una actividad introductoria que promueva la aparición de estrategias espontáneas.

Objetivo I.2.2: Diseñar una propuesta de enseñanza para los repartos directa e inversamente proporcionales que incluya una actividad introductoria que promueva la aparición de estrategias espontáneas.

Objetivo II: Explorar las potencialidades y limitaciones de la propuesta didáctica cuando se implementa con grupos naturales de primero y segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria.

Este segundo objetivo general puede concretarse en los siguientes objetivos parciales poniendo el foco de atención de la investigación en el contenido de la propuesta, en el aprendizaje de los alumnos y en los procesos de enseñanza respectivamente, para dar respuesta a las diferentes relaciones generadas en el triángulo didáctico Profesor-Alumno-Contenido (Chevallard & Joshua, 1982) y que se pueden relacionar con los tres primeros subanálisis del análisis didáctico (Rico, 2013), análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de la instrucción.

Objetivo II.1: Estudiar la adecuación de la propuesta a la secuenciación y temporalización previstas en el diseño.

Objetivo II.2: Estudiar la viabilidad de la propuesta en términos cognitivos, analizando el desempeño de los alumnos y la comparación con los grupos de control.

Objetivo II.3: Explorar las potencialidades y limitaciones de la metodología de aula.

I.4. Presentación de los focos de investigación

Tras el análisis de antecedentes que realizaremos en el Capítulo II, y su síntesis en el establecimiento de los referentes para este trabajo que realizaremos en el Capítulo IV, se detallarán los seis focos prioritarios de investigación que articulan nuestro trabajo, tanto para realizar el diseño al que hace referencia nuestro **Objetivo I** de investigación, como para guiar la instrucción y realizar una valoración de su implementación, es decir, desarrollar el **Objetivo II** de investigación.

Debido al carácter no lineal de cualquier trabajo de investigación, dichos focos se han utilizado también para organizar la revisión de la literatura que comenzaremos en el siguiente capítulo. Por tanto, estimamos conveniente presentarlos en este momento, para facilitar la lectura de la memoria.

- **Foco 1. Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad:** Los alumnos de 1º y 2º de ESO están en la etapa de transición entre el pensamiento aditivo y el pensamiento multiplicativo. En ese momento, los estudiantes pueden tener dificultades en el aprendizaje de la proporcionalidad, bien por aferrarse a modelos aditivos incluso en problemas proporcionales, bien por aplicar indiscriminadamente modelos multiplicativos en cualquier tipo de problemas. Para facilitar la superación de estas dificultades introducimos en la propuesta situaciones proporcionales y no proporcionales en las que los alumnos deben analizar la conveniencia o no de aplicar un modelo proporcional y justificar sus decisiones.
- **Foco 2. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa:** Una de las ideas principales en nuestro diseño es aumentar la tipología de situaciones problemáticas a las que se enfrentan los alumnos que, tradicionalmente, solo se ven expuestos a problemas de valor perdido o valor faltante (también conocidos informalmente como problemas de regla de tres por la identificación del tipo de problema con la estrategia habitual de resolución). Utilizaremos para este propósito los tres tipos de problemas distinguidos por Cramer y Post (1993): problemas de comparación cualitativa, problemas de comparación cuantitativa y problemas de valor perdido.

- **Foco 3. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa:** Al igual que en el foco anterior, consideraremos diferentes tipos de problemas de proporcionalidad inversa en la propuesta, análogos a los considerados en las situaciones de proporcionalidad simple directa. Sin embargo, en este foco, hay que tener en cuenta la especificidad de las relaciones inversas y la mayor dificultad que plantean en los estudiantes.
- **Foco 4. Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta:** Diseñaremos, por analogía a los tipos de problemas en situaciones de proporcionalidad simple, problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta. Este es un contenido poco desarrollado en la investigación. Nuestro trabajo resulta una innovación en este sentido al investigar sobre la enseñanza y aprendizaje de estas situaciones.
- **Foco 5. Repartos proporcionales**: En este foco destacamos un tipo concreto de problemas en los que se aplican los conceptos de la proporcionalidad simple, tanto directa como inversa. A pesar de que los repartos proporcionales podrían considerarse como un caso particular de problemas de proporcionalidad simple, lo destacamos fuera de los focos 2 y 3 por varias razones. Son un tipo de problemas introducidos explícitamente en la última reforma educativa en el currículo español. Existe poca literatura de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de los repartos directamente proporcionales y no hemos encontrado trabajos que aborden estos procesos de forma experimental en el caso de los repartos inversamente proporcionales.
- **Foco 6. Interpretación del porcentaje y problemas asociados:** Al igual que el foco 5, los contenidos relacionados con este foco podrían considerarse dentro del foco 2, como caso particular de situaciones de proporcionalidad simple directa. Sin embargo, hemos estimado conveniente generar un foco de atención específico a las situaciones relacionadas con porcentajes debido a los resultados poco satisfactorios alrededor de este concepto relatados por Oller-Marcén (2012) con nuestra propuesta didáctica y las dificultades generalizadas que presentan los alumnos que se detectan en la literatura científica.

I.5. Resumen de la experimentación

Como detallaremos en los siguientes capítulos, la experimentación llevada a cabo en este proyecto se sitúa dentro de un paradigma de investigación-acción en el que el investigador principal actúa también como profesor. En concreto, se ha planificado y experimentado con una propuesta didáctica que aborda la enseñanza de la proporcionalidad desde un punto de vista aritmético y que cubre los contenidos de este tópico para los dos primeros cursos de ESO. Así, se han completado tres ciclos de investigación-acción, tanto para 1º de ESO como para 2º de ESO, con la propuesta didáctica.

La planificación de la investigación se llevó a cabo utilizando una metodología de análisis didáctico (Rico, 2013) mediante la cual se realizó una revisión de antecedentes que sirvió para establecer referentes para el diseño y, sobre todo, para el análisis de la propuesta. Se definieron así los focos de investigación prioritarios que hemos presentado en la sección anterior y las variables didácticas que podían influir en la dificultad y la forma de proceder de los alumnos en los problemas asociados a cada uno de los focos. También se definieron las diferentes categorías para el análisis de las producciones de los alumnos durante la propuesta. Ante la escasez de referentes para ciertos aspectos de la proporcionalidad que querían trabajarse, especialmente los referidos al foco 4 (problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta) se realizaron una serie de investigaciones adyacentes que permitieron completar algunos aspectos del marco conceptual (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2014, 2015a, 2015b; Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén, & Ortega, 2017).

El diseño de la propuesta didáctica, que se basa en las ideas del grupo de investigación al que pertenece el autor (Gairín & Escolano, 2009; Oller-Marcén, 2012), consta de dos secuencias, una para cada curso, de unas[14] doce sesiones cada una. El diseño curricular de las sesiones de clase se realiza bajo un planteamiento de enseñanza a través de la resolución de problemas (Beltrán-Pellicer & Martínez-Juste, 2021, En prensa). Así, para cada concepto principal que desea introducirse se diseña una situación introductoria a la que los alumnos deben enfrentarse sin haber recibido instrucción previa sobre ella. Tras ella se diseñan situaciones problemáticas realistas que se presentarán a los alumnos después de realizar y poner en común las situaciones introductorias. Cada secuencia concluye con el diseño de una prueba escrita para evaluar el conocimiento adquirido por los alumnos.

La implementación de la propuesta se llevó a cabo entre los cursos 2013-2014 y 2016-2017 en el IES Leonardo de Chabacier, centro de titularidad pública en la localidad de Calatayud (Zaragoza). En total se experimentó con seis grupos naturales de primero de ESO (123 alumnos) y con tres grupos naturales de segundo de ESO (58 alumnos). Otros cuatro grupos (77 alumnos) del centro se incluyeron como grupos de control en diferentes ciclos de la investigación.

Para poder reflexionar sobre los resultados de la propuesta se concretaron diferentes mecanismos de recogida y análisis de datos. Destacamos entre ellos, el diario de clase del profesor-investigador, la grabación en vídeo de las sesiones de clase, la utilización de observadores externos, la realización de entrevistas semiestructuradas y la comparación de los resultados de la prueba escrita entre los grupos experimentales y grupos de control para cada ciclo de investigación-acción.

I.6. Estructura y plan de la memoria

En esta sección presentamos la estructura de la obra resumiendo el contenido y el propósito de los diferentes capítulos que la componen. En total, se ha estructurado la memoria en diez capítulos. Tras estos capítulos se encuentra la sección de referencias bibliográficas citadas a lo largo de la memoria. Por último, se presentan diferentes anexos que enlazan a los materiales elaborados

[14] El número de sesiones para cada curso, como detallaremos posteriormente, ha sufrido ligeras modificaciones en el proceso cíclico y reflexivo que supone la investigación-acción.

para los alumnos, las circulares de información que firmaron las familias de los alumnos, los guiones elaborados para las entrevistas semiestructuradas y los archivos que contienen la información recogida a partir de los diferentes instrumentos de observación.

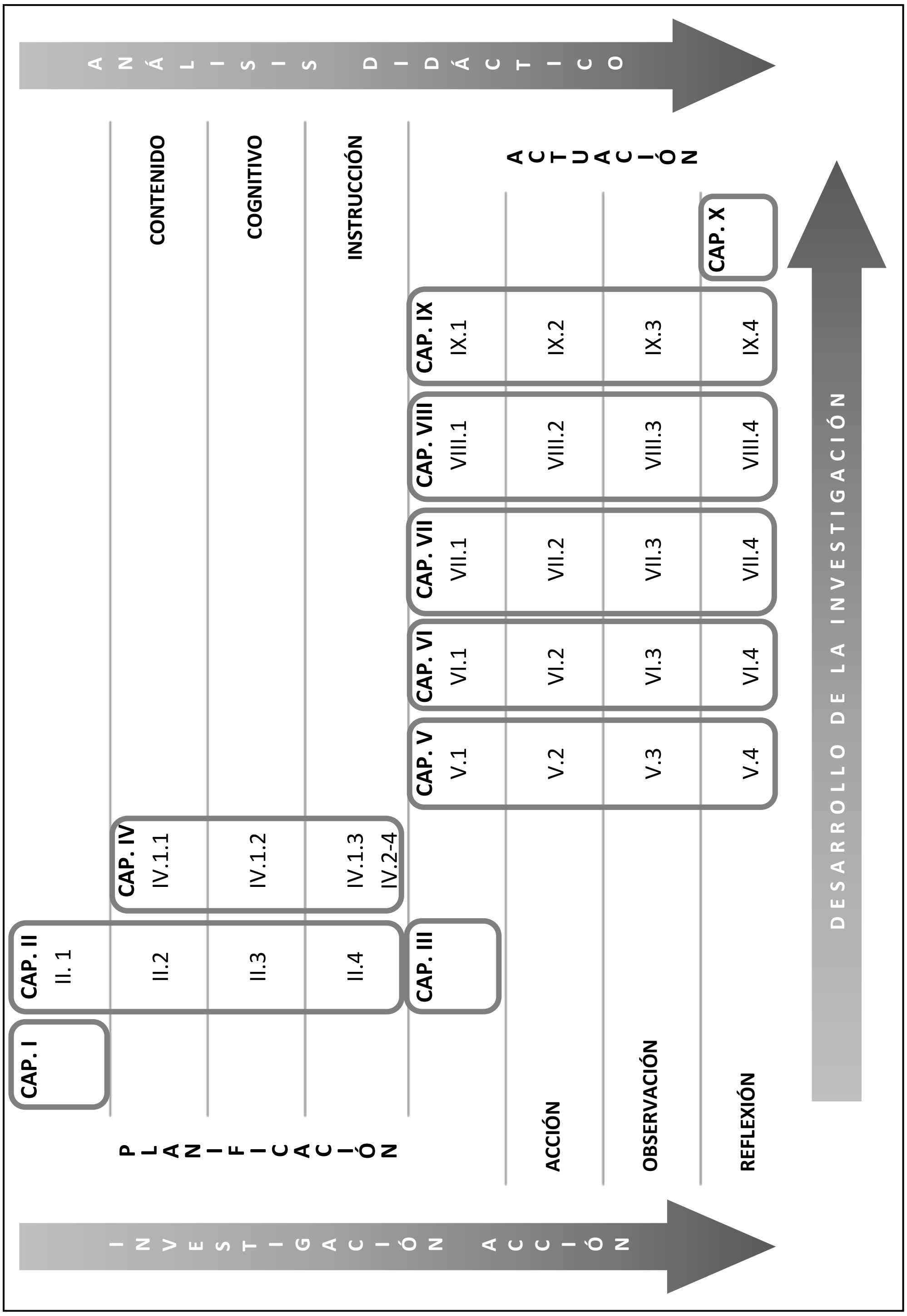


Figura I - 1. Estructura de la memoria y relación con las fases de la investigación-acción y las componentes del análisis didáctico.

La secuenciación de los diferentes capítulos obedece a un esquema tradicional de trabajo de reporte de investigación de diseño en ciencias sociales. Se presenta el problema de investigación y los objetivos del estudio (Capítulo I), se desarrolla el marco teórico que fundamenta el trabajo (Capítulo II), se hace explícito el método y las herramientas para la recogida de información y las categorías de análisis de los resultados (Capítulo III), se presenta el diseño de la propuesta de enseñanza (Capítulo IV y primeras secciones de los capítulos V, VI, VII, VIII y IX), se analizan los resultados de la experimentación (Capítulos V, VI, VII, VIII y IX) y, por último, se presentan las conclusiones del estudio, su alcance, impacto y sus limitaciones (Capítulo X).

Como hemos comentado anteriormente, la metodología de investigación utilizada responde al paradigma de la investigación-acción en cuanto se trata de un trabajo de investigación llevado a cabo por un docente para mejorar sus procesos de enseñanza y el aprendizaje de sus alumnos. La metodología de investigación-acción (se desarrollará en detalle en el Capítulo III) se compone de cuatro fases: planificación, acción, observación y reflexión.

Los cuatro primeros capítulos se encargan de la fase de planificación de la investigación. Esta fase se refina mediante el uso del análisis didáctico (las bases del análisis didáctico se detallan al comienzo del Capítulo II). Rico y Fernández-Cano (2013) destacan la utilidad del análisis didáctico como herramienta para la innovación curricular y como método e instrumento de investigación. Por lo que su empleo es de gran utilidad en un trabajo como el presente en el que se conjugan ambos aspectos. Los subanálisis que componen el análisis didáctico (el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de la instrucción y el análisis de la actuación) nos permiten estructurar, por un lado, la revisión de antecedentes y el marco teórico, y por otro, el diseño de la propuesta didáctica (Capítulo II y Capítulo IV, respectivamente).

Tanto la investigación-acción como el análisis didáctico promueven una estructura cíclica de forma que la fase de reflexión en el caso de la investigación-acción, y el análisis de la actuación en el del análisis didáctico, suponen el final de un ciclo y la base para comenzar el siguiente. Esta estructura cíclica puede observarse en el esquema de esta memoria entre el Capítulo VI y el Capítulo IX (Figura I - 1).

Aunque en el Capítulo III desarrollaremos en detalle las relaciones entre la investigación-acción y el análisis didáctico y el uso conjugado de ambos enfoques en la investigación en educación matemática (García & Romero, 2013), en la Figura I - 1 puede observarse cómo ambas estructuras se complementan y se han utilizado para organizar esta memoria.

I.6.1. Capítulo II: Marco teórico y antecedentes

En el Capítulo II se realiza una revisión de la bibliografía de investigación en educación matemática sobre la proporcionalidad aritmética. El desarrollo de este capítulo supone la elaboración del marco conceptual de nuestro trabajo en el sentido expresado por Camacho Machín (2011, p. 206):

> Este término hace referencia al proceso según el cual un investigador toma ideas de diferentes fuentes y las ajusta para construir, por ejemplo, un marco de referencia para su investigación o un conjunto de actividades para el aprendizaje de un concepto matemático.

Así, en el Capítulo II exponemos y relacionamos diferentes ideas relativas a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad aritmética a partir de una revisión de antecedentes[15]. Posteriormente, en el Capítulo III y en el Capítulo IV, concretaremos la utilización de los trabajos que se convierten en los referentes teóricos de nuestra propuesta de enseñanza y de la investigación que llevamos a cabo con ella.

Algunas secciones del Capítulo II se completan con aportes originales realizados por el autor al marco teórico de la proporcionalidad dentro de la educación matemática. Estos aportes amplían, por un lado, el estudio de las estructuras multiplicativas homogéneas con varias magnitudes que dan lugar a las situaciones de proporcionalidad compuesta. A través de este estudio se desarrollan, para las situaciones compuestas, diferentes caracterizaciones, tipologías de problemas y estrategias de resolución, a partir de las que se proponen en la literatura para las situaciones de proporcionalidad simple directa. Las categorías que surgieron del desarrollo anterior se utilizaron para realizar diferentes análisis de contenido de libros de texto que tratan de caracterizar la enseñanza actual de la proporcionalidad compuesta en los primeros años de secundaria. Por otro lado, se realizan aportaciones originales al estudio de la estructura matemática y a las estrategias de resolución de los problemas de repartos proporcionales, tanto directos como inversos.

El Capítulo II forma parte de la fase de planificación de la investigación-acción y se estructura en cuatro grandes secciones. La primera presenta las características del análisis didáctico y los subanálisis en los que se descompone: análisis conceptual y del contenido, análisis cognitivo, análisis de la instrucción y análisis de actuación. Estos subanálisis guían la estructura del resto del capítulo.

En la segunda sección del marco teórico se presentan los aspectos conceptuales y del contenido de la proporcionalidad. Prestaremos atención a la génesis histórica y epistemológica de los conceptos principales, la estructura conceptual, los sistemas de representación, el análisis fenomenológico, los tipos de tareas escolares y los contenidos curriculares y de los libros de texto. En este último apartado, el análisis de contenido de libros de texto centrado en la proporcionalidad aritmética, se resumen algunas aportaciones a la investigación realizadas por el autor.

La tercera sección se centra en los aspectos cognitivos del aprendizaje de la proporcionalidad. Resumimos y estructuramos los diferentes trabajos que abordan los obstáculos de aprendizaje, las estrategias utilizadas por los alumnos, los errores y los factores que afectan al desempeño de los alumnos en tareas de proporcionalidad.

La última sección del capítulo es una revisión de propuestas y experimentos de enseñanza centrados en la proporcionalidad. Esta sección constituye una revisión de antecedentes para el análisis de la instrucción que se lleva a cabo en capítulos posteriores. En concreto, el capítulo concluye con el resumen de la experiencia de investigación-acción realizada por Oller-Marcén

[15] Debido al amplísimo número de fuentes bibliográficas disponibles en la actualidad y la enorme producción de trabajos relacionados con la proporcionalidad, esta revisión no puede considerarse exhaustiva.

(2012) que supone el punto de partida para la planificación de la experimentación que se lleva a cabo en este trabajo.

I.6.2. Capítulo III: Metodología de investigación

El Capítulo III se encarga de la planificación a nivel metodológico. Se describe el marco metodológico general y algunas características de la investigación cualitativa en ciencias sociales. Posteriormente se detalla el método empleado para esta investigación analizando la muestra, las herramientas de recogida de información y las categorías específicas para el análisis de resultados. A lo largo del capítulo se presentan, además, las conexiones e influencias entre el marco teórico y el marco metodológico y método empleado.

El capítulo comienza con la elaboración de una panorámica general del paradigma de investigación utilizado, la investigación-acción. En la primera sección se presenta la filosofía subyacente a las investigaciones realizadas según esta metodología, y se analizan las diferentes fases en las que se secuencia su estructura cíclica y su conexión con el análisis didáctico. La sección concluye con una revisión del uso de la investigación-acción en trabajos de educación matemática.

En la segunda sección del Capítulo III se describen algunos aspectos éticos y de calidad de investigación cualitativa en ciencias de la educación tenidos en cuenta para la elaboración de la presente memoria.

Las siguientes secciones del capítulo detallan el método de investigación. En la tercera sección se analiza la estructura y las características de los ciclos de investigación realizados. Centrándonos en los procesos de enseñanza vemos que la propuesta completa de 1º y 2º de la ESO ha pasado por tres ciclos de investigación-acción. Para cada alumno que ha completado la propuesta didáctica durante la experimentación, esta ha supuesto dos ciclos de aprendizaje de la proporcionalidad aritmética (uno en 1º de ESO y otro en 2º de ESO). Durante esta sección se detallan las características de la muestra y del centro de enseñanza en el que se puso en práctica la propuesta.

La cuarta sección del capítulo se estructura alrededor de las diferentes herramientas metodológicas que se han utilizado para recoger información: el diario de clase, las producciones escritas de los alumnos, las entrevistas semiestructuradas y las grabaciones de las sesiones junto con los posteriores informes cumplimentados por observadores externos.

En la última sección del capítulo se recogen diferentes categorías de análisis, tanto generales como específicas para cada foco prioritario de la investigación, que se utilizan para el análisis de las producciones de los alumnos. Se describen, además, los referentes teóricos utilizados para crear dichas categorías. Por último, la sección termina con una breve presentación de las herramientas estadísticas empleadas para el análisis cuantitativo de datos.

I.6.3. Capítulo IV: Características de la propuesta didáctica

En este capítulo se concretan los referentes teóricos, cognitivos e instruccionales de la propuesta didáctica. A lo largo del capítulo se sientan las bases para el análisis de la instrucción. Dicho análisis se inicia en este capítulo de manera general y se concluye en las secciones de planificación de cada uno de los ciclos de investigación que se relatan en los capítulos siguientes. En el Capítulo IV se presentan las características generales de la propuesta didáctica y en los posteriores capítulos se detalla el diseño de cada una de las sesiones de clase y de cada una de las actividades que las componen.

En la primera sección se repasan las ideas fundamentales que sustentan la propuesta a nivel conceptual y del contenido, a nivel cognitivo y a nivel instruccional. Este es el punto de partida para justificar la selección de conceptos y contenidos, y agruparlos en los seis focos de interés de la investigación: la caracterización de relaciones de proporcionalidad; la resolución de problemas de en situaciones de proporcionalidad simple directa; la resolución de problemas de en situaciones de proporcionalidad simple inversa; las relaciones de proporcionalidad compuesta y la resolución de problemas que involucran dichas situaciones; la resolución de problemas de reparto proporcional; y la interpretación y uso de porcentajes. Esta estructura de contenidos y los referentes sobre el aprendizaje de la proporcionalidad guiarán posteriormente la concreción de objetivos didácticos y la demanda cognitiva de las tareas diseñadas. La sección termina con una sucinta revisión de los diferentes modelos de enseñanza que coexisten entre la comunidad de investigadores de educación matemática y el posicionamiento del autor. Este posicionamiento guiará la metodología de enseñanza empleada.

En la segunda sección del capítulo se concreta el tratamiento que el profesor-investigador dará a los contenidos seleccionados a lo largo de la propuesta. Se presentan y ejemplifican las caracterizaciones, argumentaciones y estrategias de resolución que se emplearán a lo largo de la propuesta para los contenidos estructurados por focos de interés. Además, en la tercera sección, se justifica la temporalización de los contenidos a lo largo de los dos cursos de secundaria que abarca nuestra propuesta didáctica.

En la cuarta sección del capítulo se justifica y analiza la metodología de enseñanza utilizada para llevar a cabo la propuesta didáctica. La sección se estructura a través de los diferentes tipos de actividades que guían el aprendizaje de los alumnos.

I.6.4. Capítulos V, VI, VII, VIII y IX: Desarrollo de los ciclos de investigación-acción

El conjunto de estos cincos capítulos supone presentar el análisis de los resultados obtenidos a lo largo de la experimentación. Los capítulos están ordenados temporalmente de forma que pueda observarse de manera clara la estructura cíclica de la metodología de investigación. Se ha optado por presentar con esta estructura la experimentación porque concebimos todo el proceso como un resultado de investigación no como una forma de obtener un producto final de investigación.

Esta estructura da cuenta de cómo, tras el análisis de la información recogida, la fase de reflexión conlleva la modificación de aspectos de la propuesta en la fase de planificación del siguiente ciclo. Algunos de estos cambios responden a cuestiones menores de ajuste, otros suponen cambios profundos en algunos aspectos. Todo este proceso provoca la evolución de la propuesta a lo largo del tiempo y creemos importante identificar los momentos y hechos que motivan dicha evolución. Este esquema global para los ciclos de experimentación centrado en el desarrollo de la propuesta se reproduce dentro de cada ciclo centrándonos en el proceso de aprendizaje de los alumnos. De esta forma, no se presentan exclusivamente los resultados de los alumnos en el test final, sino que la monitorización de todas las actividades de clase permite analizar el desempeño de los alumnos a lo largo de cada ciclo.

Los cinco capítulos tienen una estructura idéntica de secciones principales. Cada una de las secciones se corresponde con una de las fases de la metodología de investigación-acción: planificación, acción, observación y reflexión.

Como hemos dicho, los capítulos anteriores de la memoria dan cuenta de diferentes fases de la planificación. Aunque la realización de ciclos de investigación-acción ha provocado ampliaciones y pequeños cambios en estas fases generales de la planificación (estudio de antecedentes y marco teórico-conceptual, metodología de investigación y características generales de la propuesta), su contenido genera un bloque de planificación general común para el desarrollo de todos los ciclos de experimentación. Así, la primera sección de estos capítulos (secciones V.1, VI.1, VII.1, VIII.1 y IX.1) contiene la planificación específica del ciclo correspondiente. En dichas secciones se presentan las decisiones tomadas después de la experimentación del ciclo anterior y el diseño específico de la propuesta didáctica para el ciclo en cuestión (Objetivo I de investigación): secuenciación y temporalización de contenidos, distribución de contenidos por sesiones de clase, objetivos didácticos que se persiguen con cada sesión de clase, estructura en actividades de cada sesión de clase, y enunciado y análisis de cada problema planteado a los alumnos. La fase de planificación concluye con el diseño de la prueba escrita final y el análisis de los problemas que la forman.

Las fases de acción y observación se llevan a cabo simultáneamente. Para la redacción de la memoria se ha optado por presentar en la fase de acción las características muestrales del ciclo (días en las que se implementó la propuesta y las características de los grupos y de los alumnos) y los resultados del diario de clase. En la sección "fase de observación" se presentan los resultados del análisis de la información recogida a partir del resto de los instrumentos. Es decir, se presentan los análisis cualitativo y cuantitativo de las respuestas de los alumnos en las tareas de clase y de casa, el análisis de las producciones de la prueba escrita y la comparativa con el grupo de control, un resumen de los resultados de las entrevistas semiestructuradas y las respuestas al cuestionario que debían rellenar los observadores externos tras visionar las sesiones de clase.

En la última sección de cada uno de los capítulos se presentan las reflexiones y conclusiones obtenidas tras la experimentación del ciclo. Esta etapa de reflexión (en la terminología de la investigación-acción) supone la última parte del análisis de la actuación (análisis didáctico) y se estructura en cuatro niveles. En primer lugar, se presentan las reflexiones relativas al diseño de la propuesta (Objetivo II.1). A continuación, se resumen las conclusiones sobre aspectos cognitivos y del aprendizaje de los alumnos (Objetivo II.2). En tercer lugar, se reflexiona sobre los procesos de enseñanza valorando la metodología empleada y la labor del profesor-investigador (Objetivo II.3). De esta manera se evalúa el funcionamiento de la propuesta en los tres niveles, del análisis didáctico, realizados previamente. Para terminar estas secciones se presentan conclusiones de carácter general sobre el funcionamiento de la propuesta.

I.6.5. Capítulo X: Conclusiones, difusión y trabajo futuro

En el último capítulo de la memoria se destacan y discuten las conclusiones relativas a todo el proceso de investigación organizadas según la estructura de objetivos principales y secundarios de la investigación que se han presentado en este capítulo.

La atención a la consecución del Objetivo II de investigación se completa con un resumen de limitaciones del trabajo y algunas propuestas de mejora.

Para finalizar esta memoria de tesis doctoral se incluye una sección para presentar la difusión, alcance, transferencia y divulgación de la investigación y de la propuesta didáctica que ha hecho el autor a lo largo de este proyecto. Por último, se presentan las líneas de trabajo futuro que se abordarán tras finalizar este proyecto de investigación.

Capítulo II:
Marco teórico y antecedentes

Visita muchas ciudades de Egipto,
y aprende y aprende de todos los que saben.

Como indica Madden (2018, p. 114), “si deseamos reemplazar lo que tenemos actualmente con algo mejor, el primer paso debería ser comprender verdaderamente lo que tenemos”. Así, en el presente capítulo se realiza una revisión de antecedentes de investigación en educación matemática centrados, principalmente, en la proporcionalidad aritmética. Dado el propósito de este trabajo, se presta especial atención a la presentación de trabajos de investigación que diseñan propuestas o experiencias de enseñanza sobre proporcionalidad. Esta revisión de antecedentes proporciona una visión del estado de la cuestión. Por otro lado, la revisión de antecedentes se organiza según el subanálisis conceptual y de contenido y el subanálisis cognitivo que constituyen las dos primeras fases del análisis didáctico (Rico & Fernández-Cano, 2013). En dichos análisis se utilizan los descriptores aportados por este método de investigación para estructurar, sintetizar y relacionar los diferentes trabajos de investigación que se conformarán en referentes para el diseño de la propuesta didáctica, es decir, el análisis de la instrucción y para el posterior análisis evaluativo o de actuación una vez finalizada la experimentación de cada ciclo de la propuesta didáctica.

Algunos de los desarrollos de la estructura conceptual y de la caracterización de tareas escolares y estrategias de resolución, especialmente los relativos a la estructura multiplicativa que da lugar a las situaciones de proporcionalidad compuesta, son aportaciones del autor al análisis didáctico de la proporcionalidad. Estas aportaciones vienen motivadas bien por la necesidad de cubrir algunos aspectos poco trabajados en la investigación, bien por la necesidad de simplificar y unificar la notación a lo largo de la memoria.

El capítulo se estructura en cuatro secciones principales. En la primera sección se presenta el análisis didáctico como herramienta para la innovación curricular, para la investigación educativa en matemáticas y para la selección, organización y síntesis de revisiones bibliográficas. En esta sección se detallan los subanálisis que forman parte del análisis didáctico y los organizadores de cada uno de estos subanálisis.

En la segunda sección se aborda el análisis conceptual y de contenido de la proporcionalidad. Dicha sección comienza con un resumen de trabajos que abordan la aproximación histórica y la génesis epistemológica de los principales conceptos asociados a la proporcionalidad.

Posteriormente se estudia la estructura conceptual, los sistemas de representación, la fenomenología, los tipos de tareas escolares y las estrategias de resolución de dichas tareas, para cada uno de los focos principales del contenido que se abordan en este trabajo. Para concluir la sección se realiza un análisis del contenido prescrito por las leyes educativas vigentes y se resumen las aportaciones, de la investigación centrada en la proporcionalidad, sobre el análisis de contenido de libros de texto escolares.

En la tercera sección se presenta el análisis cognitivo que se preocupa del aprendizaje del alumno. De esta forma se revisan trabajos de investigación centrados en el desarrollo del razonamiento proporcional, en las actuaciones de los alumnos ante tareas de proporcionalidad y en los factores que influyen tanto en la dificultad de las tareas de proporcionalidad como en la estrategia empleada por los alumnos para resolverlas.

El capítulo concluye con una sección en la que se resumen diferentes antecedentes sobre propuestas y experiencias de enseñanza de la proporcionalidad realizadas desde la investigación educativa. Dichos trabajos se agrupan según el nivel educativo de los alumnos a los que van dirigidas las propuestas. Distinguimos las propuestas según vayan dirigidas a alumnos de enseñanza obligatoria, tanto de la etapa primaria como secundaria, o según vayan dirigidas a la formación de futuros maestros de primaria o profesores de secundaria.

II.1. El análisis didáctico

El análisis didáctico como marco en la investigación en educación matemática tiene su origen en los estudios sobre la organización del currículo escolar realizados por Luis Rico en la década de los noventa y que se recogen y resumen en el estudio sobre los antecedentes del análisis didáctico en educación matemática hecho por el propio Rico (2013). Estos trabajos fueron desarrollados posteriormente en las tesis doctorales de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009).

Para Gómez (2002, p. 257) aunque existen muchos usos genéricos del término ‘análisis didáctico’ este describe un procedimiento específico de “cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje”. Así, el análisis didáctico describe un proceso cíclico para la planificación y experimentación de secuencias didácticas.

Con el análisis didáctico que se origina a partir del análisis conceptual y de contenido de textos matemáticos (Rico & Fernández-Cano, 2013) se establece un sistema de categorías basadas en las diferentes dimensiones del currículo de matemáticas. El establecimiento de dichas categorías no solo permite analizar textos matemáticos o didácticos, sino que origina una guía para elaborarlos y ponerlos en práctica, es decir permite elaborar y experimentar secuencias de enseñanza-aprendizaje (Valverde, 2012; Valverde, Castro, & Molina, 2013). Además, esta herramienta puede utilizarse para la formación de profesores pues permite desarrollar su competencia profesional mediante la planificación del aprendizaje (Rico, Marín, Lupiáñez, & Gómez, 2008). Por último, el análisis didáctico se ha mostrado de utilidad como metodología de investigación, tanto para el diseño de pruebas como para la obtención de esquemas de análisis de las producciones de los alumnos (Cañadas & Castro, 2013), como para establecer un método de tratamiento de antecedentes bibliográficos (Gallardo & González-Marí, 2013).

En resumen, Rico y Fernández-Cano (2013) distinguen tres usos o finalidades del análisis didáctico en educación matemática:

- Herramienta para la innovación y el desarrollo curricular.
- Herramienta para el diseño de planes de formación de profesores.
- Método e instrumento de investigación.

El análisis didáctico se descompone en diferentes subanálisis que lo estructuran y secuencian (Gómez, 2002, 2007; Lupiáñez, 2009): el análisis conceptual y de contenido[16], el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación o análisis evaluativo[17]. En las siguientes secciones detallaremos la finalidad y los organizadores de los diferentes subanálisis que componen en análisis didáctico.

En el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad son varios los trabajos que han utilizado el análisis didáctico o que han abordado partes del mismo. Por ejemplo, Valverde (2012) realiza una análisis didáctico de la proporcionalidad centrado en las situaciones de proporcionalidad simple directa que se emplea para el desarrollo de un experimento de enseñanza con maestros en formación (Valverde *et al*., 2013). Oller-Marcén (2012), emplea el análisis didáctico en una experiencia de investigación-acción para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en 1º de ESO realizando aportes al análisis de contenido, especialmente de carácter fenomenológico, mediante el estudio de libros de texto antiguos y actuales. Gómez (2016) presenta el marco teórico utilizado en el grupo de investigación al cual pertenece que les permite delimitar subunidades del análisis de contenido y de instrucción relacionados con el concepto de razón.

II.1.1. El análisis de contenido y el análisis conceptual

El análisis conceptual "es una herramienta metodológica que permite controlar la complejidad semántica, seleccionar las opciones idóneas y disponer del aparato teórico adecuado para una investigación educativa" (Rico & Fernández-Cano, 2013, p. 7).

---

[16] En algunos estudios (Rico, 2013) se presentan cinco subanálisis, distinguiendo entre análisis conceptual y análisis de contenido, mientras que en otros estudios (Gómez, 2002; Lupiáñez, 2009) se considera que el análisis de contenido que estudia la estructura de los conceptos y términos contiene al análisis conceptual. En esta memoria adoptaremos este segundo punto de vista distinguiendo algunos organizadores del análisis conceptual establecidos por Rico (2013).

[17] En algunos trabajos se utiliza el término 'análisis de actuación' y en otros 'análisis evaluativo'. Mientras Rico (2013) habla de análisis evaluativo, Gómez (2002, 2007) y Lupiáñez (2009, 2013) hablan de análisis de actuación.

El análisis de contenido es un conjunto de instrumentos metodológicos para procesar y revisar discursos (Bardin, 1986). Según Krippendorff (2004, p. 18) el análisis de contenido debe "formular inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto". Zapico (2007) analizando la comparación entre análisis de contenido y el análisis del discurso destaca como características del análisis de contenido su corte deductivo, la sistematización y la combinación de métodos cualitativos y cuantitativos, frente al corte inductivo y la metodología cualitativa del análisis del discurso. Para López (2002, p. 174) el análisis de contenido:

> Se sitúa en el ámbito de la investigación descriptiva y pretende, sobre todo, descubrir los componentes básicos de un fenómeno determinado extrayéndolos de un contenido dado a través de un proceso que se caracteriza por el intento de rigor de medición.

Rico y Fernández-Cano (2013, p. 13) mantienen que el análisis didáctico "utiliza las técnicas del análisis conceptual y del análisis de contenido". Además, el análisis de contenido de los conceptos y procedimientos matemáticos es precursor e inicio del análisis didáctico. Al mismo tiempo, como indican los autores, el análisis de los contenidos matemáticos escolares "requiere del análisis conceptual específico de las nociones básicas implicadas incluidos sus precedentes, evolución histórica y base epistemológica" (Rico & Fernández-Cano, 2013, p. 16).

El análisis didáctico incorpora los anteriores análisis y los adapta, según la finalidad perseguida por el análisis, estableciendo una serie de categorías y organizadores generales que permiten su utilización no solo en el análisis de discursos y textos sino en la planificación y desarrollo de los mismos.

Lupiáñez (2009) distingue diferentes niveles de concreción en el análisis de contenido en educación matemática: contenido matemático escolar (conocimiento que puede ser impartido y que se ha considerado a lo largo de la historia), contenido matemático prescrito (conocimiento que las leyes educativas concretan que debe enseñarse), contenido propuesto para una asignatura (el propuesto por un equipo de profesores en el diseño de una programación o un libro de texto), contenido de un tema concreto (el diseñado específicamente para una unidad didáctica o sesión concreta de clase).

Los organizadores del análisis de contenido según Gómez (2002, 2007) y Lupiáñez (2009, 2013) son la *estructura conceptual*, los *sistemas de representación* y el *análisis fenomenológico*. Si bien, como indica Lupiáñez (2009), algunos autores incluyen la aproximación histórica al concepto como otro de los organizadores del análisis de contenido. De hecho, como hemos señalado, Rico y Fernández-Cano (2013), consideran que el ánálisis de contenido debe inciarse con (o venir precedido de) el análisis conceptual que debe considerar la aproximación histórica al concepto y su evolución, y la génesis y variaciones epistemológicas del concepto.

Concretando los organizadores del análisis de contenido, la *estructura conceptual* hace referencia al sistema organizado de conceptos y de procedimientos, junto con las relaciones existentes entre ellos, sus propiedades y criterios de veracidad, que dan lugar a la estructura matemática que los organiza y justifica.

Los *sistemas de representación* incluyen aquellas expresiones, signos, símbolos o gráficos a través de los que aparece un contenido matemático, estableciendo conexiones entre conceptos matemáticos. Así, Rico *et al*. (2008, p. 15) señalan que "conocer un contenido se sustenta en el dominio de sus sistemas de representación y de los modos de expresar una misma propiedad mediante diversos sistemas".

El principal cometido del *análisis fenomenológico* es detectar las "conexiones que muestran la relación entre categorías de fenómenos y las subestructuras que los modelizan" (Gómez, 2002, p. 265). Para Puig (1997, p. 63) "el análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto y la estructura con esos fenómenos". Para abordar el análisis fenomenológico deben detectarse las situaciones reales que son susceptibles de modelizarse mediante una determinada estructura conceptual y que le dan sentido. Además, deben delimitarse los contextos en los que se agrupan los fenómenos según características comunes y establecer relaciones entre la estructura matemática y dichos contextos (Gómez & Cañadas, 2011; Rico *et al*., 2008).

Como síntesis del análisis conceptual y de contenido deben obtenerse los conceptos y red de significados que articulan el tema de estudio, así como los focos prioritarios del estudio, la intervención o el diseño.

II.1.2. El análisis cognitivo

El subanálisis centrado en la dimensión cognitiva pone el foco de atención en el alumno y los procesos de aprendizaje. Según Lupiáñez (2013, p. 89), algunas de las preguntas que surgen en esta dimensión del análisis, y que orientan la actividad del profesor, son "¿qué es aprender matemáticas? ¿cómo se produce el aprendizaje de las matemáticas? ¿cómo se facilita el aprendizaje? ¿qué lo dificulta?".

Desde un punto de vista del diseño curricular, el análisis cognitivo considera "la complejidad de las tareas según la profundidad de los contenidos que tratan, la diversidad de las expectativas que atienden y las limitaciones cuya superación suponen" (Rico & Fernández-Cano, 2013, p. 18). Así, uno de los objetivos del análisis cognitivo es estudiar las dificultades presentes en el aprendizaje de un determinado tema con el fin de que el diseño propuesto pueda superar estas limitaciones. El análisis cognitivo, que es un análisis *a* priori, debe generar:

> […] la identificación, descripción y caracterización sistemática detallada y fundamentada de las tareas que los escolares pueden resolver […] y también […] de los errores en los que los escolares pueden incurrir al abordar dichas tareas, de las dificultades que subyacen a dichos errores y los obstáculos que es necesario superar para resolver dichas dificultades (Gómez, 2002, p. 272).

Así, la síntesis de dicho análisis debe verse reflejada en el planteamiento de propuestas prioritarias para el aprendizaje.

Desde el punto de vista de la investigación, el análisis cognitivo supone el estudio de las dificultades de aprendizaje, de los errores en la ejecución de tareas y de las estrategias de resolución que utilizan los estudiantes con el fin de establecer categorías que permitan describir en el plano cognitivo las producciones de los estudiantes (Cañadas & Castro, 2013).

II.1.3. El análisis de la instrucción

Tras los subanálisis anteriores el análisis de instrucción pone el foco de atención en la enseñanza del objeto matemático considerado y, desde el punto de vista del diseño curricular, se centra en la planificación de dicha enseñanza para obtener como resultado el diseño de la unidad o secuencia didáctica. El diseño de dicha secuencia didáctica se justifica en el análisis de contenido y el análisis cognitivo. Aunque, como indica Gómez (2002), en el proceso de análisis didáctico debe tenerse en cuenta la relación dialógica entre los diferentes subanálisis. Cada subanálisis del análisis didáctico no solo responde a, y se apoya en, los análisis anteriores, sino que las necesidades en una determinada etapa pueden provocar la revisión y modificación de los subanálisis realizados en las etapas anteriores.

Como organizadores del análisis de instrucción se consideran las siguientes categorías (Rico & Fernández-Cano, 2013):

- Funciones y secuencia de las tareas.
- Materiales y recursos.
- Gestión del aula.

Como hemos dicho, la síntesis del análisis de instrucción conlleva el diseño de la unidad didáctica desde un punto de vista de diseño curricular o desde el punto de vista de la investigación, en el caso de un experimento de enseñanza, del instrumento correspondiente.

II.1.4. El análisis de la actuación o análisis evaluativo

Tras la instrucción, el docente, o investigador en su caso, debe reflexionar sobre la adecuación de la propuesta de enseñanza realizando un análisis de los resultados obtenidos (Lupiáñez, 2013). El foco de atención para este análisis es doble, por un lado, debe reflexionarse sobre la consecución de las expectativas de aprendizaje. Es decir, reflexionar sobre en qué medida los alumnos han adquirido los conocimientos pretendidos y han superado las dificultades previstas. En esta dimensión del análisis de actuación, el análisis cognitivo realizado representa un papel fundamental. Por otro lado, los resultados obtenidos por los alumnos son consecuencia de la actuación del profesor y del diseño de la secuencia didáctica por lo que debe ponerse el foco también en los procesos de enseñanza. El análisis de contenido y de la instrucción son fundamentales en este foco prioritario del análisis de actuación.

De esta forma como indica Lupiáñez (2013, p. 99) en esta fase, el profesor puede considerar:

- Valorar si la instrucción se ha llevado a cabo de forma consistente y coherente en términos de la selección y organización de tareas y contenidos, y si éstas han sido adecuadas para los objetivos que se plantearon.
- Determinar el grado de consecución de los objetivos de aprendizaje y del desarrollo de las competencias matemáticas específicas alcanzado por los estudiantes.
- Constatar la superación de errores y dificultades.
- Reflexionar sobre la pertinencia de los materiales y recursos didácticos empleados.
- Valorar la conveniencia de los instrumentos de evaluación para obtener información sobre el aprendizaje y promoverlo.

El análisis de los resultados en los términos anteriores se concreta en la determinación de puntos fuertes y débiles de la propuesta para proponer mejoras en los ciclos siguientes. Por tanto, la síntesis del análisis de actuación genera un nuevo diseño de la unidad o secuencia didáctica.

II.2. Aspectos conceptuales y del contenido de la proporcionalidad

En esta sección abordamos la parte del análisis didáctico sobre la proporcionalidad aritmética que se centra en los aspectos conceptuales y del contenido asociado a la proporcionalidad. Para desarrollar este subanálisis nos basamos en los descriptores que lo caracterizan (Gómez, 2002; Rico & Fernández-Cano, 2013), en concreto, abordamos: la aproximación histórica y epistemológica, la estructura conceptual, los sistemas de representación, la fenomenología y el análisis de los contenidos habituales de la proporcionalidad aritmética en la práctica educativa. Terminaremos la sección realizando un análisis del tratamiento de la proporcionalidad en los currículos vigentes, es decir analizando el contenido prescrito (Lupiáñez, 2009) y resumiendo las principales aportaciones de la investigación en el análisis de contenido de la proporcionalidad en libros de texto escolares.

II.2.1. Aproximación histórica y génesis epistemológica de los conceptos asociados a la proporcionalidad

Dentro del análisis histórico y epistemológico de los conceptos matemáticos que son objetos de la investigación didáctica, resulta de vital importancia el análisis de libros de texto antiguos (Gómez, 2011b) ya que "aporta información sobre algunos de los elementos que sustentan el modelo actual de enseñanza" (Gómez, 1999, p. 20). Además, su estudio ayuda "a reconstruir los conceptos, a contextualizarlos y a conocer sus diversos acercamientos, a interrogarse sobre la validez de las formas de argumentar vigentes en otras épocas y a buscar los fundamentos de las formas actuales." (Madrid, Maz-Machado, León-Mantero, & López-Esteban, 2017, p. 1084).

Diferentes investigadores han abordado dicho análisis mediante el estudio histórico de escritos matemáticos y de enseñanza de las matemáticas. Los conceptos asociados a la proporcionalidad, dado su eminente carácter práctico, son uno de los temas matemáticos con mayor importancia histórica (Benoit, Chemla, & Ritter, 1992).

Oller-Marcén y Gairín (2013) analizan detalladamente los primeros intentos de fundamentación teórica de dos conceptos claves de la proporcionalidad, el de razón y el de proporción. Los autores encuentran dos focos diferenciados en los inicios de esta fundamentación, enmarcados en culturas y filosofías muy diferentes, la griega y la china. Tras analizar los textos en los que se encuentran estos primeros pasos hacia la formalización de los conceptos de razón y proporción, se estudia el proceso de aritmetización que sufrieron dichos conceptos y que, según los autores, los alejó de su significado. Los autores destacan la importancia de este acercamiento histórico para realizar una revisión de los procesos de enseñanza-aprendizaje actuales.

En este mismo sentido, y con motivaciones similares, Madden (2018) analiza el tratamiento de los conceptos de razón y proporción en los *Elementos* de Euclides (s. III a.n.e) coincidiendo con parte del análisis de Oller-Marcén y Gairín (2013). El texto de Euclides recoge de manera sistemática los conocimientos matemáticos de las diferentes escuelas griegas. Además, su lectura proliferó durante la Edad Media y formó la base del desarrollo matemático europeo, por lo que es un punto de partida ineludible. Madden (2018), considera que el tratamiento griego de estos conceptos ha condicionado el tratamiento escolar de la proporcionalidad y utiliza su estudio como punto de partida para un análisis crítico de los elementos curriculares actuales sobre la proporcionalidad en Estados Unidos.

Recogemos brevemente los resultados de los análisis que realizan Madden (2018) y Oller-Marcén y Gairín (2013) de los *Elementos*:

- El concepto de razón se presenta como una relación entre magnitudes homogéneas: "*una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas*" (Libro V, Definición 3). Es decir, no se entiende la razón como un número sino como una relación entre magnitudes que, además, no pueden ser diferentes. No tendría sentido, por ejemplo, construir una razón entre la distancia recorrida por un móvil y el intervalo de tiempo transcurrido. No solo el concepto de razón carece de interpretación numérica, las propias cantidades de magnitud (para algunos autores simplemente magnitudes) no son consideradas números, lo que provoca que se desarrollen teorías separadas según se consideren las razones y las proporciones entre números o entre magnitudes.
- La relación a la que se alude en la definición de razón está íntimamente ligada a los procesos de medida de una de las magnitudes que conforman la razón respecto de la otra. En este hecho se encuentra la necesidad de limitar el concepto de razón al caso de magnitudes homogéneas.
- La ausencia de un significado numérico para la razón hace necesario introducir el concepto de proporción para poder comparar razones: "*una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que*

cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente” (Libro V, Definición 5).

- El producto de magnitudes carece de sentido en la tradición griega lo que hace que los resultados teóricos sean difícilmente aplicables a situaciones cotidianas en donde aplicar de forma práctica los resultados. Sí aparecen tratamientos de problemas físicos, por ejemplo, de móviles, en donde las razones se consideran siempre entre cantidades de una misma magnitud (doble de tiempo, mitad de fuerza).

El proceso de aritmetización de la razón, en el sentido dado en los *Elementos* de Euclides, tiene su origen en la Edad Media a partir de las múltiples copias y traducciones comentadas que se hicieron de esta obra. Oller-Marcén y Gairín (2013) identifican dos orígenes diferentes en este proceso, el contenido en los comentarios de Omar al-Khayyam y el que aparece en la traducción de Giovanni Campano.

El primero, centrado en la noción de razón entre magnitudes, establece una relación de equivalencia entre razones a partir de los valores obtenidos en el proceso de medida por conmensuración (la antifairesis en la cultura griega). A partir de esta noción de equivalencia, pueden abordarse operaciones entre razones, como la composición de dos razones. En este proceso Omar al-Khayyam utiliza que fijada una unidad u, y una razón $a{:}\,b$, existe una (cantidad de) magnitud g de tal forma que $a{:}\,b$ es equivalente a $g{:}\,u$. De esta manera, puede identificarse cualquier razón con una cantidad numérica e interpretarse la composición de razones como un producto entre números.

Por otro lado, Giovanni Campano, define para razones entre números (naturales) la noción de ‘denominación de una razón’. Se asocia, para la razón entre números, una cantidad que, en términos modernos, se correspondería con el cociente entre los elementos que forman la razón. Se asocia así la razón con un número racional y, por tanto, las operaciones entre razones con las correspondientes operaciones entre números racionales.

El otro foco de desarrollo teórico de los conceptos asociados con la proporcionalidad lo fijan Oller-Marcén y Gairín (2013) en el comentario de Liu Hui al Jiuzhang Suanshu (s. III) (*Nueve Capítulos sobre los Procedimientos Matemáticos*). Los textos de la cultura oriental, y en particular la china, tienen un eminente enfoque práctico, pero pueden rastrearse diferentes intentos de generalización y formalización de determinados conceptos matemáticos. En concreto, en el texto chino de los *Nueve Capítulos* aparecen numerosos ejemplos de problemas prácticos relacionados con la proporcionalidad. En sus comentarios a dicho texto, Liu Hui, interpreta los métodos expuestos e intenta generalizar los procesos y relacionar los diferentes problemas presentados. Los puntos principales que se destacan en el trabajo de Oller-Marcén y Gairín (2013) sobre esta obra son:

- Liu Hui introduce un concepto central para el tratamiento de la proporcionalidad denominado *lü,* definiéndola como un conjunto de números correlacionados. Dicho concepto ha sido traducido al inglés como *rate* o como *proportional value* en diferentes versiones traducidas de los *Nueve Capítulos*.
- Las *lü* admiten diferentes operaciones entre ellas. Se establecen propiedades de equivalencia entre *lü* multiplicando los números que las componen por otro número. En particular, si en

una *lü* aparece alguna fracción, ésta puede eliminarse, convirtiéndola en otra *lü* con datos enteros multiplicando la original por un número adecuado. Además, las *lü* pueden simplificarse utilizando el máximo común divisor de los números que la forman.

- Las *lü* se forman como un conjunto de valores de las diferentes magnitudes que envuelven una situación de proporcionalidad directa. Y aunque puede interpretarse la razón entre dos magnitudes como la *lü* asociada a la situación cuando una de las magnitudes toma el valor 1, no aparece en el texto de Liu Hui ninguna definición equivalente al concepto de razón.
- El concepto chino se adapta mejor a las situaciones mercantiles que la concepción griega al permitir trabajar con pares de valores de magnitudes diferentes.
- La concepción china se acerca a un enfoque funcional de la proporcionalidad ya que estudia la covariación entre las diferentes magnitudes involucradas.

Desde un punto de vista epistémico encontramos, por tanto, dos puntos de vista diferenciados en cuanto al concepto de razón. Por un lado, el acercamiento griego que considera exclusivamente razones entre magnitudes homogéneas o números no asociados a magnitudes y cuya aritmetización se produjo mediante procesos de medida o de comparación multiplicativa. Este enfoque origina la necesidad de introducir el concepto de equivalencia de razones o proporción. Por otro, el enfoque chino de la proporcionalidad está ligado a las situaciones de covariación entre diferentes magnitudes del que surge el concepto de razón entre magnitudes diferentes que puede identificarse como tanto por uno. En la sección II.2.2.1. El concepto de razón retomaremos estos dos conceptos diferenciados de razón y los relacionaremos con los términos razón interna y razón externa.

En cuanto al análisis histórico sobre la enseñanza de los conceptos de razón y proporción, Gairín y Oller-Marcén (2012) estudian el tratamiento dado a estos conceptos en 48 manuales escolares desde 1850 hasta 2010. En su análisis constatan el dominio de las concepciones griegas sobre razón y proporción, hecho que coincide con lo observado por Madden (2018) en el currículo estadounidense. Algunas de las conclusiones del estudio son las siguientes:

- Las razones se definen entre números o entre cantidades de la misma magnitud.
- Se destaca la desaparición de la razón entre cantidades de la misma magnitud desde la implantación de la LOGSE[18].
- Las razones se interpretan generalmente como fracciones, frente a una interpretación como cociente o como factor multiplicante, hecho que contrasta con la noción de fracción previamente estudiada por los estudiantes en la que sus términos deben ser cantidades enteras.
- No hay ninguna preocupación por la justificación de la pertinencia de establecer la razón entre cantidades.

[18] LEY ORGÁNICA 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *Boletín Oficial del Estado*, nº 238, 4 de octubre de 1990, Madrid, pp. 28927-28942.

- Se define la proporción como la igualdad de razones de manera formal y descontextualizada y se presenta la denominada ’propiedad fundamental de las proporciones’ (producto de medios igual a producto de extremos).
- Las manipulaciones que permiten obtener nuevas proporciones a partir de una proporción dada (inversión e intercambio de extremos o medios) van desapareciendo con el paso del tiempo.

Para Gómez (2006), el carácter eminentemente práctico que envuelve a la proporcionalidad justifica que el análisis histórico epistemológico de la proporcionalidad se centre en los métodos de resolución de un determinado tipo de problemas en los que se ha basado, casi en exclusiva, la educación matemática. Son los que Gómez (2006) denomina “problemas de Regla de tres”. Para poder realizar la necesaria distinción entre problemas y métodos de resolución, en esta memoria nos referiremos a dichos problemas con el término ‘problemas de valor (En la sección II.2.4. Tipos de tareas escolares: estructura y estrategias de resolución hablaremos de forma detallada sobre la estructura de este tipo de problemas).

La preocupación humana por la resolución de problemas de valor perdido es muy antigua. Como recoge Oller-Marcén (2012, p. 42), en el papiro de Rhind, texto en torno al siglo XVI a.n.e., encontramos ya problemas como el siguiente: “*Si 10 hekat de grasa deben durar un año, ¿cuánta grasa puede usarse en un día?*”. (Robins & Shute, 1987, p. 51). En dicho texto, aparecen resoluciones por métodos que podrían clasificarse como de regla de tres, es decir, mediante la aplicación de fórmulas que permiten calcular el dato desconocido a partir de los tres datos del problema. Sin embargo, como constatan diferentes autores (Gheverghese, 1996; Shen, Crossley, & Lun, 1999), es en los comentarios de Liu Hui al *Jiuzhang Suanshu* donde puede encontrarse el primer intento de formalización de una técnica general de resolución de este tipo de problemas.

Este es el precursor del método de resolución usualmente denominada ‘regla de tres’ o, usando la denominación de Gómez (2006, p. 57), “método reglado… [que] consiste en la ejecución de una lista de pasos que, sin necesidad de conocer la razón ni la explicación de los mismos, llevan a obtener la respuesta de una manera mecánica, breve y fácil de memorizar”. Este método de resolución se convirtió en la forma habitual de resolución de los problemas de valor perdido y perdura hasta nuestros días.

La adopción del método de la regla de tres en Europa se produjo a partir de intercambios entre diferentes culturas, desde la china, hacia la hindú y posteriormente la árabe quien la introdujo en Europa (Morice-Singh, 2018; Oller-Marcén, 2012). Si bien seguía aplicándose como método para la resolución de problemas de valor perdido, los científicos árabes se preocuparon por fundamentar teóricamente este método a partir de su estudio de las razones y proporciones en los *Elementos* (Gómez, 2006).

Se produjo así, paulatinamente, una algebrización de los procedimientos de resolución de problemas de valor perdido a partir del establecimiento de una igualdad entre razones en las que el dato solicitado se sustituía por una incógnita y, bien se aplicaban las propiedades de las proporciones, bien se trataba como una ecuación algebraica. Según Gómez (2006), en los libros de texto de comienzos del siglo XIX se observa una tendencia hacia la algebrización de los métodos de resolución de estos problemas.

Este mismo autor constata que hacia la segunda mitad del siglo XIX aparece, en los manuales escolares el método denominado 'reducción a la unidad'. Este método de resolución se basa en el análisis de las situaciones de proporcionalidad y no hace uso del concepto de proporción ni de técnicas algebraicas, por el contrario, hace uso de la razón entre magnitudes diferentes. Es decir, se adopta un modelo más cercano a la concepción china que a la concepción griega. De esta manera puede llegarse a la solución evitando la memorización de reglas que pudieran resultar artificiosas. Este método, se utilizó por autores de manuales escolares posteriormente como modo de justificar las técnicas algebraicas. Así, se ejemplificaba un problema mediante el método analítico de reducción a la unidad para posteriormente institucionalizar métodos algebraicos o algorítmicos. Aunque revisaremos el tratamiento actual de la proporcionalidad en libros de texto en la sección II.2.5.2. La proporcionalidad aritmética en los libros de texto, cabe destacar aquí que esta práctica de libros de texto descrita por Gómez (2006) se mantiene en los libros actuales. Algunos de ellos presentan métodos de resolución basados en la reducción a la unidad en ejemplos concretos, para posteriormente institucionalizar métodos algorítmicos y que requieren de un menor análisis y comprensión de las situaciones que generan el problema (Martínez-Juste *et al.*, 2014).

Paralelamente al desarrollo de los conceptos de razón y proporción y la aparición y uso de la regla de tres, cabe destacar el desarrollo de una razón o proporción especial, el porcentaje. Parker y Leinhardt (1995) realizan una revisión exhaustiva de la literatura sobre dicho concepto en la que se incluye su evolución histórica. Los precursores del concepto de porcentaje tal y como hoy lo conocemos deben buscarse en problemas de tasas, impuestos e intereses y su evolución está íntimamente ligada a estos contextos monetarios hasta la Edad Contemporánea. Inicialmente el porcentaje aparece como la relación de dos cantidades diferenciadas, una cierta cantidad referenciada a cien unidades de esa misma cantidad, por ejemplo, interés por cada 100 unidades para una unidad temporal de capitalización. A partir del siglo XVII se introducen sistemas de representación específicos, de forma que 'la cantidad por cada cien', pasa a ser 'el porcentaje' (aparece la palabra italiana *perceto*). Las técnicas asociadas al cálculo de intereses se especializan y compactan, despegándose de la regla de tres. La inclusión de los sistemas monetarios basados en el sistema decimal en el que se descompone la unidad monetaria principal en cien subunidades menores favorece la identificación del porcentaje con su representación decimal, por ejemplo, $3\ \%$ como $0{,}03$. A partir del siglo XIX aparecen los primeros usos no monetarios del porcentaje asociados a la estadística y los primeros usos del porcentaje no basados en la estructura parte-todo, lo que permite la aparición de porcentajes mayores que 100.

Como destacan muchos autores, la evolución y especialización del concepto de porcentaje y las técnicas asociadas a su uso provocaron que se perdiera progresivamente el significado original que dio lugar al porcentaje, es decir, el de una cantidad referida a cien unidades. Esta pérdida de significado puede corroborase en el tratamiento educativo actual dado al porcentaje (Brown & Kinney, 1973; Oller-Marcén, 2012; Parker & Leinhardt, 1995).

II.2.2. Estructura conceptual y sistemas de representación

Para organizar la estructura conceptual, y los sistemas de representación utilizados, hemos optado por comenzar por los conceptos asociados a la proporcionalidad más sencillos, y más estudiados en la investigación, como son el de razón entre magnitudes y el de relación de proporcionalidad simple directa. Prestaremos especial atención a un concepto íntimamente ligado al de razón como es el del porcentaje. A partir del análisis estructural de estas piezas clave para entender la proporcionalidad, introduciremos la noción de producto de magnitudes (Vergnaud, 1983) que nos permitirá construir con generalidad las relaciones de proporcionalidad compuesta, y conceptos asociados, de las que emergen de forma natural tanto las relaciones de proporcionalidad simple directa como las de proporcionalidad simple inversa.

II.2.2.1. El concepto de razón y de proporción

El análisis de la génesis epistemológica de la razón desde un punto de vista histórico, recogido en la sección anterior, nos permite desarrollar la estructura conceptual de la razón, abordando sus diferentes interpretaciones y significados e introduciendo los sistemas de representación habituales. Desde la tradición griega, las razones podían establecerse entre cantidades de magnitud homogéneas, y no tenían sentido numérico, por lo que consistían en una relación entre cantidades de magnitud, no necesariamente expresadas en forma numérica. El posterior proceso de aritmetización condujo a considerar razones entre cantidades numéricas, y a interpretar la razón como una comparación multiplicativa entre estas cantidades. Dicha interpretación permitió finalmente identificar la razón como un número. Por otro lado, la tradición china, consideraba la razón entre cantidades de diferentes magnitudes como la cantidad de una de aquellas magnitudes que se correspondía con una unidad de la otra. Estas interpretaciones de la razón, se han mantenido históricamente en la enseñanza de la razón, si bien como indican Gairín y Oller-Marcén (2012), en las definiciones de razón elegidas por los libros de texto, impera la tradición griega, aunque luego puedan considerarse razones entre cantidades de magnitud no homogéneas en la práctica.

Definición y significados de la razón.

Se pueden identificar, así, diferentes definiciones del concepto de razón, atendiendo a diferentes variables (Gairín & Oller-Marcén, 2012; Valverde, 2012). En primer lugar, una razón puede definirse entre números o entre cantidades de magnitud. Si la razón se define entre cantidades de magnitud, cabe distinguir si se define entre cantidades de magnitudes homogéneas (misma magnitud en “objetos” diferentes) o entre cantidades de magnitudes no homogéneas.

Los significados asociados al concepto de razón cuando ésta se define entre números son: *cociente exacto* (número que resulta de realizar la división exacta), *comparación multiplicativa* resultado de una división (número de veces que un número es mayor que el otro) y *factor multiplicante* (número por el que se multiplica uno de los números para obtener el otro).

Los significados de la razón entre cantidades de magnitudes homogéneas: *cociente* de las medidas (adimensional), *medida* de la primera tomando la segunda como unidad, *factor multiplicante* por el que ha de multiplicarse la primera para obtener la segunda (adimensional).

Como vemos, existen fundamentalmente dos enfoques para dotar de significado al concepto de razón entre un par ordenado de cantidades (números reales, generalmente positivos, asociados o no a la medida de una cantidad de magnitud), uno que alude a la relación multiplicativa y tiene carácter esencialmente numérico y otro que se centra en la comparación o medida de los números o las cantidades de magnitud. Estos procesos de comparación y medida aplicados al caso de magnitudes no homogéneas generan el concepto de magnitud intensiva o magnitud cociente (Lamon, 1993a). Las magnitudes intensivas aparecen en los procesos de comparación multiplicativa de dos magnitudes extensivas.

Para Escolano (2007), la razón entre una cantidad a de unidades u_1 de una magnitud M_1 y la cantidad b de unidades u_2 de una magnitud M_2, es la cantidad $\frac{a}{b}\ u_1/u_2$ (de la magnitud cociente M_1/M_2) que expresa la medida de $a\ u_1$, cuando se considera como unidad de medida $b\ u_2$. Desde este punto de vista, la razón entre cantidades no homogéneas puede considerarse como cantidad de magnitud de esta nueva magnitud cociente (intensiva si las dos magnitudes puestas en juego en la razón son extensivas) o interpretarse como la cantidad de la magnitud M_1 asociada a cada unidad de la magnitud M_2. En este caso, en el que se trabaja entre dos espacios de medida diferentes, las interpretaciones adimensionales o puramente numéricas carecen de sentido.

La definición de razón involucra un par ordenado de cantidades, la inversión de los términos de la razón provoca la aparición de una nueva *razón inversa* (multiplicativamente) a la primera.

Los diferentes significados han hecho aparecer, tanto en la enseñanza como en la literatura científica, numerosos términos asociados al concepto de razón y que recogen algunas de las diferencias en su interpretación presentadas anteriormente. Es el caso de la distinción entre *rate* y *ratio*, a veces traducido al español como tasa, o tasa de cambio, y razón; la consideración del término *well-chunked rate*, o razón bien compactada, los conceptos de razón parte-parte y razón parte-todo y los términos por cada y de cada; la distinción entre razón externa y razón interna, o entre razón *between* o *within*, razón dentro del sistema o razón entre sistemas.

Razones y tasas de cambio.

Esta distinción clásica, considerada, por ejemplo, en los trabajos de Lamon (1993a) o Tourniaire y Pulos (1985), recoge la diferencia entre razones entre magnitudes homogéneas (*ratios*) y razones entre magnitudes no homogéneas (*rates*). Así, con esta terminología, la razón entre volumen de agua y volumen de zumo de limón en una limonada sería una *ratio*, mientras que la velocidad media, obtenida como razón entre el espacio recorrido por un móvil y el tiempo empleado para hacerlo sería una *rate*. En nuestro diseño no emplearemos esta distinción entre tasa y razón.

En ocasiones, esta diferenciación entre razón y tasa está relacionada con la fenomenología asociada al concepto de razón, así, por ejemplo, Tourniaire y Pulos (1985) consideran problemas de *rates*, a las situaciones con dos magnitudes diferenciadas, para distinguirlos de los problemas de mezclas, en los que aparecen *ratios* y hay un único tipo de magnitud involucrada. Para Lamon (1993a), existen dos tipos de problemas de *rates*, los de conjuntos asociados (*associated sets*) y los de razones bien compactadas (*well-chunked ratios*) y dos tipos de problemas de *ratios* los parte-parte-todo y los de ampliadores y reductores (*stretchers and shrinkers*).

Razones bien compactadas.

El término razón bien compactada se utiliza para aquellas magnitudes intensivas resultado de un cociente de magnitudes extensivas que tienen entidad propia y, por tanto, pueden ser reconocidas como magnitud de forma independiente a las magnitudes extensivas que la generan. El ejemplo paradigmático de razón bien compactada es el de la velocidad. Otros ejemplos, de magnitudes bien compactadas son el precio o coste (unitario), la densidad, la presión, etc. Frente a las razones bien compactadas, podemos considerar aquellas razones en las que es necesario apelar a las magnitudes extensivas que la conforman, como por ejemplo cantidad de pintura por unidad de superficie, cantidad de libros por estantería, etc.

Razones parte-parte y razones parte-todo.

La distinción entre razones parte-parte y razones parte-todo solo tiene sentido dentro de una estructura parte-parte-todo. Este tipo de estructuras están íntimamente relacionadas con las situaciones de mezclas (Cramer & Post, 1993; Lamon, 1993a, 1993b; Tourniaire & Pulos, 1985) y las parejas de composiciones (Fernández, 2009; Freudenthal, 1983) por lo que las desarrollaremos más en detalle al estudiar la fenomenología y los tipos de tareas escolares en las secciones II.2.3. Fenómenos organizados por la proporcionalidad y II.2.4. Tipos de tareas escolares: estructura y estrategias de resolución De forma sintética, una situación parte-parte-todo es aquella en la que se consideran varios subproductos medidos en la misma magnitud, extensiva y aditiva, que conforman un producto total (cuya cantidad de magnitud es la suma de las cantidades de los subproductos). Las razones parte-parte son aquellas consideradas entre cantidades de dos subproductos, mientras que las razones parte-todo son aquellas consideradas entre la cantidad de un subproducto y la del producto total.

Un ejemplo de razón parte-todo sería aquella que relaciona el número de hombres y mujeres en una determinada reunión, mientras que una razón entre los hombres y el total de asistentes sería una razón parte-todo. Asociados a este tipo de razones, aparecen los términos *por cada* y *de cada* (en inglés *for every* y *out of*), como forma de expresión verbal de las razones parte-parte y parte-todo respectivamente (Singer & Resnick, 1992). Así, diríamos "*2 hombres por cada 3 mujeres*" o "*2 de cada 5 asistentes son hombres*".

Razones externas e internas, razones dentro del sistema y razones entre sistemas.

En las situaciones que involucran magnitudes no homogéneas, como en el caso de la velocidad media que relaciona el espacio recorrido por un móvil y el tiempo, se usan los conceptos de razón externa y razón interna para distinguir las razones consideradas entre cantidades de la misma magnitud, razones internas, por ejemplo, razones entre distancias, de las razones que involucran cantidades de las dos magnitudes, razones externas, como es el caso de la velocidad media. Esta terminología, utilizada por Freudenthal (1983) y recogida en otros trabajos (Fernández, 2009; Valverde, 2012), no queda unívocamente determinada en las situaciones que involucran dos magnitudes homogéneas. Algo similar ocurre con los términos razones dentro del sistema o razones entre sistemas (*between* o *within*), como se recoge en Valverde (2012). Mientras que algunos autores en la investigación en educación matemática han usado el término sistema para referirse a un espacio de medida (Freudenthal, 1983), la tradición científica ha usado el término sistema para referirse los objetos y las magnitudes medidas sobre ellos en un determinado estado físico[19]. El término sistema se usó de esta forma en investigaciones en educación matemática que recogían esta tradición científica (Karplus, Pulos, & Stage, 1983; Noelting, 1980a, 1980b).

Aun tomando partido por una de las dos acepciones anteriores de sistema, las situaciones que involucran dos magnitudes homogéneas pueden presentar ambigüedad en la elección del concepto de sistema. Para poder hacer una distinción adecuada entre razones externas y razones internas (o razones dentro del sistema y razones entre sistemas), en la que no haya ambigüedad en las situiaciones que involucran magnitudes homogéneas, es necesario hablar de relaciones de proporcionalidad y de la función de proporcionalidad asociada a dichas situaciones, por lo que terminaremos de abordar esta distinción en la sección II.2.2.2. Situaciones de proporcionalidad directa

El concepto de proporción.

Uno de los conceptos fundamentales asociados a la idea de razón y que le ha acompañado tradicionalmente es el de *proporción*. Una definición de razón como un par ordenado de cantidades requiere de una noción de equivalencia entre dichos pares, para determinar si dos pares forman o no la misma razón (ver sección II.2.1. Aproximación histórica y génesis epistemológica de los conceptos asociados a la proporcionalidad). Así, una *proporción* es el término utilizado para nombrar a una igualdad de dos razones. De hecho, para algunos autores (Fernández, 2009; Freudenthal, 1983; Gómez, 2016), establecer relaciones de igualdad (también de desigualdad) entre pares de razones es el estatus lógico de la razón.

En ocasiones, los libros de texto asignan gran importancia a la propiedad fundamental de las proporciones pudiendo considerarse de hecho la definición de proporción a partir de esta propiedad: dos razones forman una proporción (es decir, son iguales) si el producto de medios es igual al producto de extremos (Gairín & Oller-Marcén, 2012, p. 256). Aparecen en la anterior propiedad las nociones de *extremos* y *medios*, si se consideran dos parejas de números reales (a, b) y (c, d), los *extremos* serían a y d y los *medios* b y c. Así, la anterior propiedad puede reescribirse de la siguiente forma: (a, b) y (c, d), están en proporción si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$.

[19] En el ejemplo del móvil, el sistema físico es el propio móvil y un estado del sistema son las características de dicho móvil en un momento concreto, por lo que una razón dentro del sistema sería la velocidad que relaciona la distancia recorrida y el tiempo transcurrido hasta ese estado del móvil.

La anterior, propiedad es inmediata, por ejemplo, definiendo la razón entre a y b, como el cociente entre ambos, de esta forma, que las razones (a, b) y (c, d) estén en proporción se identifica con la igualdad:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

El concepto de proporción debe parte de su relevancia histórica a su uso en la resolución de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple (Gómez, 2006), si bien, como indican algunos autores (Gairín & Oller-Marcén, 2012), puede prescindirse de su uso aludiendo al significado numérico de la razón.

Los libros de texto han presentado también tradicionalmente (aunque en menor medida con el paso del tiempo) las manipulaciones que permiten obtener nuevas proporciones a partir de una proporción conocida (Oller-Marcén, 2012, p. 75). Así si se invierten las razones, se intercambian los extremos o se intercambian los medios de una pareja de razones que está en proporción, se obtienen nuevas parejas de razones que también están en proporción. Es decir,

$$(a, b) \text{ y } (c, d) \text{ en proporción} \Rightarrow \begin{cases} (b, a), (d, c) \\ (d, b), (c, a) \\ (a, c), (b, d) \end{cases} \text{son parejas de razones en proporción.}$$

Otra de las propiedades de la equivalencia de razones, que relacionaremos posteriormente con las propiedades de la función lineal es la siguiente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$$

Si bien los conceptos de razón y proporción aparecen en múltiples contextos, estos adquieren especial importancia en las situaciones de proporcionalidad directa a las que dedicaremos la sección II.2.2.2. Situaciones de proporcionalidad directa

Sistemas de representación.

Si nos centramos en los sistemas de representación, podemos distinguir fundamentalmente para los conceptos de razón y proporción entre *representaciones simbólicas, verbales* o *icónicas* (Valverde, 2012; Valverde *et al*., 2013).

Dentro de las representaciones simbólicas para una razón entre las cantidades a y b se pueden distinguir:

- Representación habitual: $a{:}b$ (que además de ser una representación clásica de la razón incluye la representación actual de las escalas).
- Representación fraccionaria: a/b ó $\frac{a}{b}$ (independientemente de que las cantidades involucradas sean, o no, números enteros).
- Representación cartesiana: (a, b).

- Representación decimal: Se presenta el cociente entre a y b en forma de número decimal (esta representación solo es posible cuando el cociente da como resultado un número racional).
- Representaciones normalizadas de base 10: Se presenta una razón equivalente a la que determinan a y b en la que la segunda cantidad es una potencia de base 10 y exponente natural, $\frac{a}{b} = \frac{N}{10^n}$. Además de la propia razón que puede entenderse como tanto por uno $\left(\frac{a}{b} = \frac{a/b}{1}\right)$, los casos particulares más importantes y con sistema de representación propio son:
    - Porcentaje o tanto por cien ($n = 2$): N %.
    - Tanto por mil ($n = 3$): N ‰.
- Otras representaciones simbólicas: En ocasiones se introducen otros símbolos para denotar la razón entre dos cantidades a y b que hacen referencia a la relación que se establece entre las cantidades, como, por ejemplo, $a \to b$.

En cuanto a las representaciones verbales existen diferentes expresiones que se usan para nombrar la razón entre dos cantidades:

- "La razón es a a b."
- "a por cada b."
- "a de cada b." (Generalmente usada para razones homogéneas parte-parte).
- "a es a b."

Por último, las razones pueden aparecer mediante representaciones icónicas o gráficas. Son muchos los trabajos de investigación que hacen uso de tales representaciones, especialmente los que trabajan sobre alumnos de menor edad (ver Imagen II - 1).

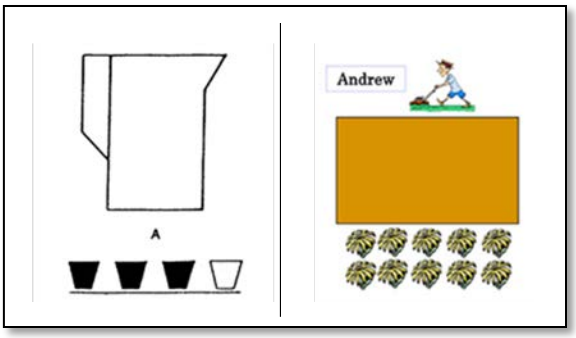


Imagen II - 1. Representaciones icónicas de la razón. Izquierda, problema de la mezcla de zumo de Noelting (1980a, p. 219). Derecha, representación icónica extraída del trabajo de Howe, Nunes y Bryant (2011, p. 398).

Otras representaciones icónicas o gráficas nombradas en el análisis de contenido realizado por Valverde (2012) son las representaciones sobre la recta numérica (asociadas a la representación decimal) o los gráficos estadísticos como los diagramas de sectores o pictogramas generalmente asociados a las frecuencias relativas.

Las representaciones para la proporción entre dos razones se basan en las de la razón introduciendo una representación adicional para indicar la igualdad entre ambas. De esta manera, se obtienen representaciones simbólicas como las siguientes:

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
- En la representación habitual se han usado tradicionalmente dos parejas de dos puntos para expresar la igualdad, por ejemplo, $a : b :: c : d$ (Gómez, 2006, p. 55).
- Otras combinaciones entre los símbolos introducidos: $3 : 2 = 1{,}5$; $\frac{3}{2} = 1{,}5$; $(3{,}2) = (6{,}4)$; …
- Otras representaciones simbólicas como $a - b - c - d$, o $a||b||c||d$ se utilizan ocasionalmente en la resolución de problemas de valor perdido en proporcionalidad simple, problemas de cuarta proporcional (Gómez, 2006, p. 55).

Entre las representaciones verbales:

- "La razón entre a y b es como / es igual a la razón entre c y d."
- "a es a b como c es a d."

Al considerar parejas de razones equivalentes, aparecen *representaciones tabulares* del tipo de las que pueden apreciarse en la Figura II - 1.

Mag. M_1	a	c
Mag. M_2	b	d

Mag. M_1	Mag. M_2
a	b
c	d

$$\begin{array}{ccc} a & - & b \\ c & - & d \end{array}$$

Figura II - 1. Diferentes representaciones tabulares del concepto de proporción.

II.2.2.2. Situaciones de proporcionalidad directa

Como se ha mencionado anteriormente, el concepto de razón tiene una gran importancia en multitud de situaciones, no necesariamente de proporcionalidad (se puede pensar, por ejemplo, en las razones entre el número de habitantes y la superficie de un conjunto de países para comparar la densidad de población entre ellos). Sin embargo, la existencia de una relación de proporcionalidad directa genera una estructura matemáticamente sencilla pero que organiza una rica variedad de fenómenos diferentes.

Partimos de una situación en la que existe una pareja de magnitudes[20] M_1 y M_2 relacionadas mediante una aplicación f. En el ejemplo anterior, las magnitudes medidas sobre el conjunto de

[20] En general, consideraremos solamente magnitudes escalares en el presente trabajo. El concepto de magnitud escalar puede formalizarse considerando semigrupos abelianos totalmente ordenados, $(M, +, \leq)$, sobre los que actúa el semianillo $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$ en el caso continuo y el semianillo $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ en el caso discreto, dotando de estructura de semimódulo monogenerado al semigrupo considerado. Posteriormente se

países serían M_1 la superficie y M_2 el número de habitantes, la aplicación f relacionaría la superficie de cada uno de los países considerados con su número de habitantes. Cada pareja de valores relacionados $(a, f(a))$ tiene asociada una razón. Una de tales situaciones en la que la relación entre M_1 y M_2 viene determinada por una función lineal, $f: M_1 \longrightarrow M_2$, se denomina *situación de proporcionalidad simple directa*[21]. Es decir, existe un número real $k \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$, tal que $f(a) = k \cdot a$, para toda cantidad de magnitud $a \in M_1$. A la función f la denominaremos *función de proporcionalidad* (simple directa) y a la constante k, *constante de proporcionalidad* (simple directa).

Obviamente, la función f es biyectiva, de hecho, es un *isomorfismo de medidas* (Vergnaud, 1983), por lo que puede considerarse la función inversa (respecto a la composición de funciones) $f^{-1}: M_2 \longrightarrow M_1$, que será también de proporcionalidad cuya constante de proporcionalidad asociada será precisamente k^{-1} (inversa multiplicativa de k). En este tipo de situaciones, se define una relación entre las magnitudes consideradas que suele expresarse como que M_1 y M_2 son magnitudes *directamente proporcionales,* aunque no se hagan explícitas las funciones f, f^{-1} ni las constantes k, k^{-1}. Para Vergnaud, la definición y significado de la constante de proporcionalidad se asocia al hecho de que $f(1) = k$. En el ejemplo de la densidad de población, la relación funcional sería con toda probabilidad no lineal. Un ejemplo típico de situación de proporcionalidad directa sería el que asocia el peso y el precio de una determinada mercancía.

Razones externas y razones internas.

El establecimiento de una relación funcional concreta entre una pareja de magnitudes permite hacer una definición no ambigua de razones internas o externas (o si se quiere de razones dentro del sistema y entre sistemas, o factores de cambio escalares y constantes de proporcionalidad). Esta distinción, asociada a la función de proporcionalidad considerada puede encontrarse en los trabajos de Vergnaud (1983, 1988, 1990) sobre estructuras multiplicativas.

Dadas, M_1 y M_2, magnitudes directamente proporcionales, y f, la función de proporcionalidad asociada, consideraremos *razones internas* (también nos referiremos a estas razones como factores de cambio) aquellas establecidas entre dos cantidades de la magnitud M_1 o entre dos cantidades de la magnitud M_2. Hablaremos de *razones externas* cuando consideremos la razón entre dos cantidades relacionadas (*cantidades homólogas*) de M_1 y M_2, es decir, dados $a \in M_1$ y $b \in M_2$, tales que $f(a) = b$, entonces las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ reciben el nombre de razones externas.

considera una biyección entre el semimódulo $(M, +, \circ, \leq)$ y el semimódulo $(\mathbb{R}^+, +, \cdot, \leq)$, para el caso continuo, o con $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ en el caso discreto que relaciona un generador de M con la unidad 1. Dicha biyección recibe el nombre de medida, y el elemento $u \in M$, asociado a 1, es la cantidad de magnitud utilizada como *unidad de medida*. Para evitar un formalismo excesivo, en la presente memoria hablaremos de magnitud M y la identificaremos con $(\mathbb{R}^+, +, \cdot, \leq)$ o $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ o directamente con $\mathbb{R}$ o $\mathbb{N}$ (o subconjuntos de estos), donde evitaremos hablar de la biyección medida explicitando la unidad de medida considerada sobre M.

[21] Nótese que la relación de proporcionalidad podría considerarse también entre magnitudes vectoriales (de la misma dimensión). Pensar por ejemplo en la fuerza total, $\vec{F}$, que actúa sobre una masa m y la aceleración, $\vec{a}$, que esta fuerza le provoca, según la mecánica clásica, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, por lo que el vector fuerza es directamente proporcional al vector aceleración y la constante de proporcionalidad es la masa, m, considerada.

Notemos además que, ya que $b = f(a)$, las razones externas proporcionan las constantes de proporcionalidad k y k^{-1}.

$$b = f(a) = k \cdot a \ \Rightarrow \frac{b}{a} = k$$

$$a = f^{-1}(b) = k^{-1} \cdot b \ \Rightarrow \frac{a}{b} = k^{-1}$$

De esta forma, la definición anterior permite eliminar las ambigüedades cuando consideramos razones entre magnitudes homogéneas. Por ejemplo, consideremos dos circunferencias en el plano euclídeo de radios r_1 y r_2 centímetros, de forma que $r_2 = 5r_1$, consideremos las longitudes L_1 y L_2 de dichas circunferencias, es conocido que las cuatro cantidades anteriores forman una proporción,

$$\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2},$$

o equivalentemente,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{L_2}{L_1}.$$

Para determinar cuál de las proporciones es la formada por razones internas y cuál por razones externas es necesario explicitar la relación de proporcionalidad que estamos considerando. Así, por ejemplo, la función $L: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$definida por $L(r) =$ Longitud de la circunferencia de centro el origen y radio r, es una función lineal que relaciona las magnitudes longitud del radio y longitud de la circunferencia. En esta situación la razón externa o constante de proporcionalidad es 2π (unidades de longitud de la circunferencia por cada unidad de longitud del radio), $L(r) = 2\pi r$. Mientras que las razones internas, o factores de cambio, son las comparaciones multiplicativas entre los radios o longitudes de diferentes circunferencias. Por ejemplo, considerando dos circunferencias de radios r_1 y $r_2 = 5r_1$. Tendríamos la proporción mediante razones externas,

$$\frac{L(r_1)}{r_1} = \frac{L(r_2)}{r_2} = 2\pi,$$

y la proporción por razones internas,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{L(r_2)}{L(r_1)} = 5,$$

además de las correspondientes proporciones formadas con las razones inversas.

Sin embargo, si consideramos una homotecia de razón 5 en el plano euclídeo $h: \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$, la función inducida $s: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que relaciona las longitudes de las curvas C y su imagen por la homotecia $h(C)$, es decir, relaciona las longitudes de dos curvas homólogas, es una función, bien definida y de proporcionalidad directa. La constante de proporcionalidad sería claramente 5 (unidades de longitud de la curva homóloga por cada unidad original de la curva original), $s(x) =$

$5x$. Así, podemos considerar el radio de una circunferencia y la propia circunferencia, y tomar sus longitudes, r_1 y L_1 respectivamente. Por lo que, en esta situación podríamos formar la proporción por razones externas,

$$\frac{s(r_1)}{r_1} = \frac{s(L_1)}{L_1} = 5,$$

y la proporción por razones internas,

$$\frac{L_1}{r_1} = \frac{s(L_1)}{s(r_1)} = 2\pi,$$

además de las correspondientes proporciones formadas con las razones inversas.

Por tanto, la distinción entre razones externas e internas está ligada en mayor medida a la relación funcional de proporcionalidad directa que estemos considerando que a la naturaleza de las magnitudes involucradas. Esta distinción está en la base de diferentes formas de caracterizar la relación de proporcionalidad directa entre magnitudes y, por tanto, como veremos más adelante, de diferentes estrategias para resolver situaciones problemáticas asociadas a la relación de proporcionalidad.

Caracterizaciones de una relación de proporcionalidad simple directa.

Según Oller-Marcén (2012), pese a la aparente simplicidad del concepto de proporcionalidad directa, en los libros de texto han coexistido hasta siete caracterizaciones diferentes de la relación de proporcionalidad directa entre magnitudes. Varias de estas caracterizaciones coinciden con otras consideradas por Fernández (2009) y por Valverde (2012) que recoge las caracterizaciones propuestas por Fernández.

- *Caracterización por razones internas*: Se basa en el hecho de que una relación funcional entre magnitudes es lineal si y solo si la razón formada por dos cantidades de la primera magnitud es equivalente a la razón formada por sus imágenes. Esta caracterización es nombrada por algunos autores mediante el término 'invarianza' (Fernández, 2009; Valverde, 2012).
- *Caracterización por razones externas*: Se basa en el hecho de que una relación funcional entre magnitudes es lineal si y solo si el cociente entre pares de cantidades relacionadas es constante, es decir, todas las razones externas son iguales. Esta caracterización es nombrada por algunos autores mediante el término 'constancia' (Fernández, 2009; Valverde, 2012).
- *Caracterización explícitamente funcional*: Son aquellas caracterizaciones que apelan a la existencia de una relación lineal del tipo $y = kx$ entre las magnitudes involucradas.
- *Caracterización implícitamente funcional mediante argumentos aditivos*: Se basa en el hecho de que una relación funcional entre magnitudes es lineal si y solo si la imagen de la suma de cualquier pareja de cantidades es igual a la suma de las imágenes de dicha pareja. Es decir, f es lineal si y solo si $f(a+b) = f(a) + f(b)$ para todas cantidades $a, b \in M_1$.
- *Caracterización implícitamente funcional mediante argumentos multiplicativos*: Se basa en el hecho de que una relación funcional entre magnitudes es lineal si y solo si la imagen del producto de una cantidad de magnitud por cualquier número real positivo (natural en el caso

discreto) es igual al producto de dicho número real (o natural) por la imagen de la cantidad de magnitud considerada. Es decir, f es lineal si y solo si $f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a)$ para toda cantidad $a \in M_1$ y todo número $\lambda \in \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{N}$).

Además de estas cinco caracterizaciones correctas, Oller-Marcén (2012) encuentra otras caracterizaciones habituales en los textos educativos, una de ellas adolece de cierta falta de rigor, mientras que otra es directamente errónea. Estas caracterizaciones de la relación de proporcionalidad directa han sido descritas en otras investigaciones sobre libros de texto actuales (Martínez-Juste *et al*., 2014, 2015b).

- *Caracterización multiplicativa*: Se trata de un acercamiento a la caracterización implícitamente funcional mediante argumentos multiplicativos pero que generalmente se hace de forma incompleta. Por ejemplo, se caracteriza una relación de proporcionalidad como aquella en la que al multiplicar (o dividir) una cantidad de magnitud por dos, tres, etc., la cantidad correspondiente de la segunda magnitud queda multiplicada (dividida) por el mismo número (Oller-Marcén, 2012, p. 77). En ocasiones, estas caracterizaciones son todavía más someras, explicitando solo el caso del doble y mitad. Por ejemplo, uno de los estándares de evaluación de matemáticas incluido en el currículo básico[22] para Educación Primaria de la LOMCE[23], hace referencia a la "ley del doble, triple, mitad".
- *Caracterización cualitativa por aumentos y disminuciones* (errónea): Es aquella que apela a una relación creciente para caracterizar la proporcionalidad directa con argumentos del tipo "cuando una magnitud aumenta la otra también", "a más de…, más de…", "cuando una disminuye la otra magnitud también disminuye", etc. Con este tipo de argumentos erróneos, muy presentes en los libros de texto escolares, se pretende dar un criterio sencillo para determinar la relación de proporcionalidad directa, muchas veces por contraposición a la relación inversa (decreciente). Sin embargo, de esta forma se fomenta la confusión entre cualquier relación funcional creciente y las relaciones de proporcionalidad directa, es decir, la falsa idea de linealidad (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2007). Que desarrollaremos en la sección II.3. Aspectos cognitivos de la proporcionalidad.

Sistemas de representación.

Como en la sección anterior, para los sistemas de representación asociados al concepto de proporcionalidad directa entre magnitudes tomaremos como referencia los trabajos de Valverde (2012) y Valverde *et al*. (2013), añadiendo algunos ejemplos y representaciones extraídos de otros trabajos (Hino & Kato, 2019) y de la tradición científica (Gairín & Oller-Marcén, 2012; Vergnaud, 1983).

[22] Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, nº 52, 2014, 1 de marzo.

[23] Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre para la Mejora de la Calidad Educativa. *Boletín Oficial del Estado*, nº 295, 10 de diciembre de 2013, Madrid, pp. 97858-97921.

Así, encontramos *representaciones simbólico-algebraicas* para indicar que dos magnitudes son directamente proporcionales (en las que no se expresa explícitamente la función que relaciona cantidades de una y otra y, posiblemente, tampoco se exprese la constante de proporcionalidad):

$$M_1 \propto M_2 \qquad \frac{M_2}{M_1} = cte(= k) \qquad M_2 = k \cdot M_1$$

También representaciones simbólico-algebraicas para determinar la función lineal que relaciona las magnitudes, dando expresiones explícitas o implícitas de la misma:

$$f(x) = k \cdot x \qquad y = k \cdot x \qquad \frac{y}{x} = k \qquad f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$$

Representaciones verbales: "las magnitudes son directamente proporcionales", "la magnitud… es proporcional a…", "a doble de…, doble de…", "cuando se multiplica una magnitud por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número", etc. O las caracterizaciones cualitativas erróneas a través de aumentos y disminuciones "a más de…, más de…", "cuando aumenta una magnitud, la otra también aumenta", etc.

Representaciones tabulares (ver Figura II - 2) para expresar la correspondencia entre pares de valores concretos de la magnitud sobre las que pueden aparecer conectores entre los valores expresando relaciones multiplicativas entre las cantidades de una misma magnitud o entre cantidades correspondientes de ambas magnitudes.

$\times n$

Mag. M_1	a_1	b_1	c_1	d_1	…
Mag. M_2	a_2	b_2	c_2	d_2	…

$\times k$

$\times n$

Figura II - 2. Representación tabular de una relación de proporcionalidad directa.

Representaciones por doble recta numérica (ver Imagen II - 2). Cada una de las magnitudes involucradas se representa mediante una semirrecta y las cantidades se dibujan sobre las rectas uniendo o haciendo coincidir verticalmente valores relacionados. Es un sistema de representación muy similar al tabular, pero se introduce la necesidad de representar los datos de forma ordenada.

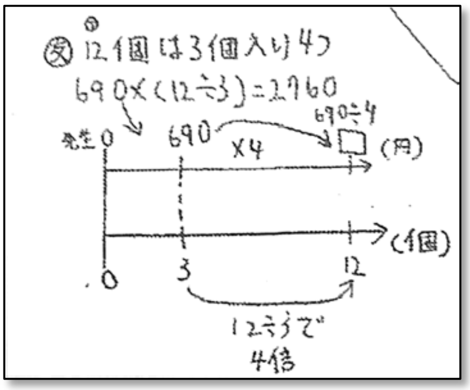


Imagen II - 2. Representación de una relación de proporcionalidad simple directa de un profesor en ejercicio. Imagen extraída del trabajo de (Hino & Kato, 2019).

Representaciones gráficas determinadas por las coordenadas cartesianas asociadas a las parejas de valores relacionados que para el caso de la relación de proporcionalidad simple directa determinan una (semi) recta (ver Figura II - 3).

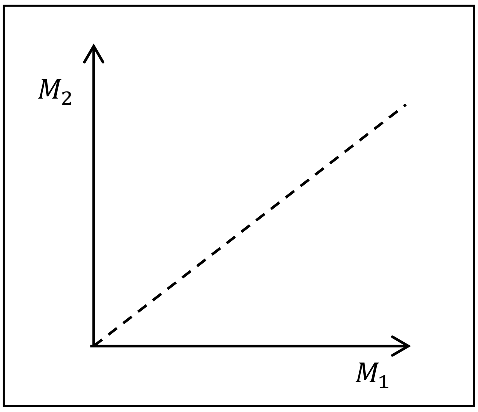


Figura II - 3. Representación gráfica de una función lineal, característica de las relaciones de proporcionalidad simple directa.

II.2.2.3. El concepto de porcentaje

En la sección II.2.2.1. El concepto de razón, hemos presentado el porcentaje como una representación concreta de una razón normalizada. Así, el estudio del porcentaje podría incluirse dentro del estudio de las razones y su normalización. Sin embargo, debido a las múltiples aplicaciones prácticas del porcentaje, su elevado uso cotidiano, su particular génesis histórica (ver sección II.2.1. Aproximación histórica y génesis epistemológica de los conceptos asociados a la proporcionalidad) sus múltiples significados y su compleja relación con los números racionales y la proporcionalidad, parece conveniente prestar atención de forma separada a este concepto (Lembke & Reys, 1994; Parker & Leinhardt, 1995).

Consideraremos porcentaje[24] (porciento) el conjunto formado por un numeral N y el símbolo $\%$, que hemos presentado anteriormente. Como indican Parker y Leinhardt (1995) la interpretación de este aparentemente sencillo objeto puede ser muy variada. Podemos pensar en una relación parte-todo, N de cada 100; en una relación parte-parte, N por cada 100; en una relación entre cantidades de magnitudes diferentes N unidades de una magnitud por cada 100 unidades de otra; en un número racional; en un operador en forma de fracción o en forma decimal; en una pendiente… En cualquier caso, como indican Parker y Leinhardt (1995, p. 444), "El nexo común a través de todas estas descripciones del porcentaje es un lenguaje alternativo para describir relaciones de proporcionalidad [simple directa] – un lenguaje que es único, conciso y proporciona un sistema notacional privilegiado".

Porcentaje como cantidad extensiva o como cantidad intensiva.

Como indican Parker y Leinhardt (1995, p. 436) "muchas contribuciones a la literatura definen porcentaje usando una traducción directa del símbolo del porcentaje" y, por tanto, considerando el porcentaje como una cantidad extensiva resultante de haber dividido una unidad en 100 partes. Sin embargo, este punto de vista aleja al porcentaje de su naturaleza de relación entre cantidades (Brown & Kinney, 1973; Lembke & Reys, 1994; Mendoza & Block, 2010; Parker & Leinhardt, 1995). El porcentaje tiene una naturaleza diferente que los céntimos de una unidad monetaria o que los centímetros como unidad de longitud, que sí son cantidades extensivas que expresan una cantidad en una subunidad obtenida al partir en 100 partes la unidad de referencia.

La identificación del porcentaje con una cantidad extensiva conlleva otorgar al porcentaje categoría de número y, por tanto, tiene sentido considerar relaciones de orden entre porcentajes y operaciones como sumas y restas y porcentajes. Esta identificación y las operaciones relacionadas solo pueden realizarse cuando los porcentajes están referidos a un mismo total, como alertan Brown y Kinney (1973). El tratamiento numérico del porcentaje se ve reforzado por los cambios de representación entre notación decimal, fraccionaria y porcentaje que incluyen una mayoría de libros de texto de matemáticas desde el siglo XIX (Parker & Leinhardt, 1995) y que se mantiene en la actualidad en los libros de texto escolares españoles (Oller-Marcén, 2012).

---

[24] En castellano, según el diccionario de la Real Academia Española, los términos 'porcentaje' y 'porciento' pueden usarse como sinónimos. En ocasiones el término porciento suele usarse para referirse al numeral, mientras que porcentaje se usa para referirse al conjunto formado por el numeral y el símbolo o a la razón formada por el numeral y 100. En algunos textos en lengua inglesa se distingue *percentage* de *percent* (términos equivalentes a los anteriores en español) según se hable de la cantidad de una magnitud que respecto a otra se encuentra en proporción a una razón con referente 100, o según se hable del valor relacionado con 100 en dicha proporción, respectivamente. Es decir, si consideramos la proporción 12 es a 48 como 25 es a 100, diríamos que 12 es el *percentage* y 25 es el *percent*. La confusión entre dichos términos está en el carácter operativo predominante en el uso del porcentaje que identifica expresiones como 'calcular el porcentaje de 48 que supone un 25 %', donde el término '25 %' se lee "veinticinco por ciento", con expresiones abreviadas como 'calcular el 25 % de 48'. En este trabajo usaremos generalmente el término 'porcentaje' para referirnos al conjunto formado por el numeral y el signo % como es habitual en nuestro idioma. Ver por ejemplo el trabajo de Mendoza y Block (2010).

El porcentaje también puede representar una cantidad intensiva que generalmente se interpreta como un factor de cambio, es decir, una razón interna sin unidades, que codifica una relación multiplicativa entre cantidades homogéneas. Para Parker y Leinhardt (1995) la potencia del porcentaje como cantidad intensiva es que, mientras para un decimal sin contexto, por ejemplo $0{,}13$, no puede determinarse un significado extensivo o intensivo de antemano, para un porcentaje, por ejemplo $13\ \%$, puede considerarse su naturaleza intensiva sin necesidad de más información.

Porcentaje y subconstructos del racional.

Como indican diversos autores (Mendoza & Block, 2010; Parker & Leinhardt, 1995) los múltiples significados del porcentaje están ligados con su relación con los números racionales y, en concreto, con las fracciones, y los diferentes subconstructos asociados (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Kieren, 1980).

Si consideramos el porcentaje, $N\ \%$ como una relación multiplicativa entre cantidades, es decir, como una razón, dicho porcentaje puede ser identificado con la razón $N/100$, que en el caso de que N sea un número natural se correspondería con una fracción (Mendoza & Block, 2010). La interpretación de esta fracción asociada a un porcentaje natural no tiene por qué estar ligada necesariamente al subconstructo de razón. De hecho, Parker y Leinhardt (1995) distinguen tres interpretaciones: parte-todo (que llaman simplemente fracción), razón y operador.

Como relación mutiplicativa entre dos cantidades el porcentaje se establece en múltiples ocasiones entre un subconjunto y el conjunto total que lo contiene. En este caso $N\ \%$ o $N/100$ puede interpretarse como que al subconjunto le corresponden N partes de cada 100 en las que se divide el total. Como en el caso de las fracciones (Gairín & Muñoz-Escolano, 2005), esta interpretación del porcentaje parece la favorita de los libros de texto (Parker & Leinhardt, 1995). En la interpretación como parte-todo el tamaño relativo de la parte comparada mediante un porcentaje se encuentra en una escala lineal que va del $0\ \%$ (parte vacía) al $100\ \%$ (la parte es el conjunto total) y no tiene sentido considerar porcentajes mayores del $100\ \%$. Este significado del porcentaje está íntimamente ligado con sus interpretaciones como probabilidad y la regla de Laplace en donde una probabilidad de $N\ \%$ se interpreta como N casos favorables de cada 100 casos posibles.

Para obtener un significado completo del concepto de porcentaje parece necesario hacer explícito su condición de razón (Brown & Kinney, 1973; Mendoza & Block, 2010). Parker & Leinhardt (1995) interpretan el porcentaje como razón cuando este relaciona cantidades, no necesariamente de diferentes magnitudes, de dos objetos distintos (uno no es un subconjunto del otro). En estos contextos pueden darse interpretaciones de porcentajes mayores del $100\ \%$ relacionados con fracciones impropias, por ejemplo expresando que un número de chicos $5/2 = 2{,}5$ veces mayor que el de chicas en una reunión supone que el número de chicos es el $250\ \%$ del número de chicas, o que el número de chicos es un 150 % más que el número de chicas.

Una posible distinción entre significados del porcentaje, sobre todo basados en el uso cotidiano de los mismos, es si el porcentaje se ha generado a partir de datos extensivos y se usa para sintetizar la relación multiplicativa entre dichos datos, como en el caso del uso estadístico del porcentaje, o si el porcentaje es un dato que utilizamos para calcular una cantidad extensiva, por ejemplo, en los intereses, impuestos, descuentos (Parker & Leinhardt, 1995). En el primero de los casos la interpretación del porcentaje resultante de la comparación estará relacionado con los subconstructos parte-todo o razón como hemos discutido anteriormente. Sin embargo, el segundo tipo de situaciones, en el que se usa el porcentaje para el cálculo de una cantidad, se conecta con el significado de operador. En este caso, el porcentaje se utiliza para establecer una relación funcional entre una cantidad inicial y una cantidad final.

Sistemas de representación.

Como razón, para el porcentaje podemos considerar los sistemas de representación incluídos en las sección II.2.2.1. El concepto de razón, añadiendo algunas representaciones verbales propias:

- *Expresión verbal* del símbolo % asociado al numeral en el porcentaje: "por ciento".
- Referencia a un numeral de un porcentaje desconocido: "tanto por ciento".
- Lectura de un porcentaje, N %, que actúa como operador sobre una cantidad X: "N por ciento de X".

Asociados a los problemas, principalmente de valor perdido, en los que intervienen los porcentajes, Parker y Leinhardt (1995) clasifican las representaciones gráficas detectadas en la revisión de la literatura en cuatro categorías:

- *Modelos concretos*: Se usa una recta numérica graduada para los porcentajes desde el 0 % al 100 % y mediante material manipulativo (en el trabajo los autores destacan el uso de regletas) se representan las cantidades de magnitud que se van colocando sobre la recta numérica. Por ejemplo, si 4 regletas representan el total de 28 zanahorias, las 4 regletas cubren la recta numérica y pueden realizarse asociaciones del tipo la cuarta parte de las zanahorias son 7 zanahorias y representan el 25 %.
- *Modelo de barras* (escala comparativa): Representación muy similar al modelo de doble línea que presentamos para la proporcionalidad simple directa. Sobre una misma recta numérica o barra sólida (o dos barras de la misma longitud) se representa de un lado la escala de porcentajes de 0 % a 100 % y del otro la de las cantidades extensivas, relacionando cada cantidad con el porcentaje correspondiente (ver Figura II - 4).

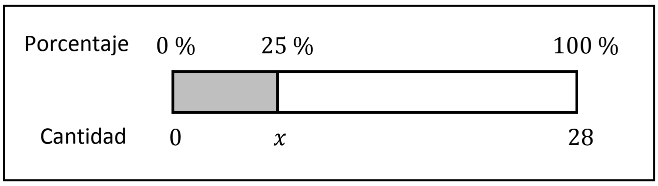


Figura II - 4. Modelo de barras para la representación gráfica de problemas de porcentajes.

- *Tarjetas centesimales*: Se trata de utilizar cuadrados divididos en 100 casillas (10 filas y 10 columnas) y sobre ellos sombrear o colorear el número de casillas correspondiente al numeral del porcentaje considerado. Los cálculos se realizan a partir del cálculo de la cantidad que le corresponde a una de las casillas del retículo (cantidad que se corresponde con un 1 %).

- *Modelos de doble figura*: Son representaciones gráficas en las que se utiliza un gráfico diferente para la cantidad que representa la parte y para la cantidad que representa el total. No se proporciona representación explícita de los porcentajes.

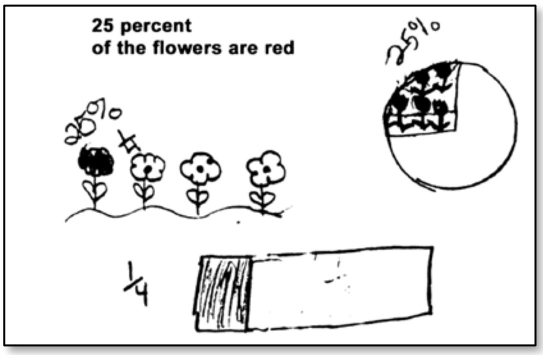


Imagen II - 3. Representación pictórica, diagrama de sectores y modelo de barra como representación gráfica de un porcentaje. Imagen extraída del trabajo de Van Den Huevel-Panhuizen (2003, p. 20).

Otros trabajos destacan el uso de otras representaciones pictóricas y de diagramas circulares para la representación gráfica de los porcentajes (ver Imagen II - 3) que los escolares pueden usar de forma espontánea (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

II.2.2.4. Estructura multiplicativa de las situaciones de proporcionalidad

En las secciones anteriores hemos abordado el análisis de los conceptos relativos a la razón y la relación de proporcionalidad directa entre magnitudes. Dichos conceptos formalizan la noción de cociente o división de cantidades de magnitud cuyo resultado es una razón que puede considerarse como una cantidad de una nueva magnitud cociente de las dos primeras. Así, ante una situación en la que existen dos magnitudes M_1 y M_2 relacionadas funcionalmente entre las que puede definirse la razón entre cantidades relacionadas, estas pueden considerarse elementos de una nueva magnitud que denominamos M_2/M_1, en el caso en el que el valor obtenido para las razones sea constante, hablamos de relación de proporcionalidad directa.

En esta sección abordamos la tarea de conceptualizar el producto de dos magnitudes con dos motivaciones principales: por un lado, poder abordar el estudio de las situaciones de proporcionalidad inversa y, por otro, completar la aritmética de magnitudes de forma que mediante productos y cocientes de magnitudes podamos considerar las estructuras subyacentes a las situaciones de proporcionalidad compuesta. Recogemos para esta tarea las ideas de Vergnaud (1983, 1988, 1990) sobre el campo conceptual de las estructuras multiplicativas que generalizaremos para poder analizar las estructuras funcionales asociadas a las situaciones de proporcionalidad compuesta con un número cualquiera de magnitudes involucradas.

El producto de medidas.

El producto de medidas[25] (o de magnitudes) se caracteriza por una función bilineal entre el producto cartesiano de dos magnitudes M_1 y M_2, que denotaremos por $M_1 \times M_2$, y una tercera magnitud M_3 de tal forma que la unidad en esta tercera magnitud se obtiene como imagen de la pareja de unidades consideradas sobre las dos primeras. Es decir, existe $f\colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_3$, bilineal, y tal que $f(1,1) = 1$ (donde hemos identificado las magnitudes con los números reales positivos y, por tanto, la unidad de medida en cada magnitud con el 1). Notemos que la anterior definición implica que, si pensamos en las magnitudes como subconjuntos de números reales, la aplicación f asocia a cada pareja de números su producto,

$$f(a,b) = a \cdot f(1,b) = a \cdot b \cdot f(1,1) = a \cdot b.$$

Por lo que, en ocasiones, omitiremos la aplicación bilineal f y escribiremos $M_1 \cdot M_2 = M_3$ (esta identificación no implica una biyección entre M_3 y $M_1 \times M_2$).

El ejemplo típico de esta estructura es el del producto de longitudes para obtener el área. Por ejemplo, podemos considerar M_1 el ancho de un rectángulo, M_2 su alto y M_3 su área, estas tres magnitudes quedarían unidas por una relación producto como la anterior y podríamos escribir $M_3 = M_1 \cdot M_2$. Nótese que $1u^2 = 1u \cdot 1u$, siendo u la unidad de longitud, y que, para un área fija, tenemos una infinidad de antiimágenes, es decir, existe una infinidad de parejas de longitudes con las que obtenemos la misma área. Vergnaud (1983, pp. 134-135) también introduce otros ejemplos como el producto de dos magnitudes discretas asociadas a la cardinalidad de dos conjuntos distintos, número de chicos y número de chicas, para obtener el número de parejas distintas que pueden hacerse con un elemento de cada uno de los conjuntos, el número de parejas diferentes que pueden realizarse con a chicos y b chicas es $a \cdot b$.

Como hemos dicho, la construcción anterior identifica el producto de las magnitudes M_1 y M_2 con la magnitud M_3, es decir, permite interpretar el producto de magnitudes como una nueva magnitud. Este proceso de identificación no es siempre sencillo como indican algunos autores (Bosch, 1994; Freudenthal, 1973). En el caso del producto de longitudes, el producto $1\ u \times 1\ u$, donde u es la unidad de longitud considerada, es interpretable como $1\ u^2$, siendo u^2 la unidad de área derivada de dicha unidad de longitud. En otras situaciones la interpretación puede resultar menos natural desde un punto de vista cultural. Por ejemplo, el producto de la magnitud discreta número de máquinas (iguales) que fabrican una determinada pieza por el tiempo en el que están trabajando (medido en horas) requiere interpretar la unidad 1 máquina × 1 hora = 1 máquina·hora como una unidad de una magnitud que caracteriza la cantidad de trabajo realizado.

Como indica Vergnaud (1983), la estructura producto entre magnitudes puede caracterizarse a través de un doble isomorfismo de medidas (dos relaciones de proporcionalidad simple). Así, si se mantiene constante la cantidad de, por ejemplo, M_2, M_1 tiene una relación de proporcionalidad

[25] Vergnaud utiliza el término espacio de medida en vez del de magnitud y se refiere a las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes como isomorfismos de medidas.

simple directa con M_3 y análogamente, manteniendo fijo M_1, M_2 y M_3 serían directamente proporcionales. Recíprocamente, una relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes M_1 y M_2 genera dos estructuras producto que involucran las magnitudes cociente M_2/M_1 y M_1/M_2:

$$M_1 \cdot \frac{M_2}{M_1} = M_2 \qquad M_2 \cdot \frac{M_1}{M_2} = M_1.$$

Vergnaud (1983, p. 137) propone algunos ejemplos como, “tiempo $\times$ velocidad $=$ distancia” y “volumen $\times$ volumen específico $=$ masa” [26]. Sin embargo, el autor prefiere considerar las relaciones de producto de medidas entre magnitudes extensivas ya que considera las magnitudes cociente como magnitudes derivadas de magnitudes extensivas en una relación de proporcionalidad directa y es en ese tipo de relaciones en las que estas magnitudes cociente aparecen de forma natural.

De forma similar, la estructura producto puede utilizarse también para construir la magnitud cociente entre dos magnitudes si se considera la magnitud inversa de una magnitud M_1, que denotaremos por $1/M_1$ o M_1^{-1}. De esta forma la magnitud cociente M_2/M_1 podría entenderse como el producto $M_2 \cdot M_1^{-1}$.

Además de las representaciones simbólicas, algebraicas y funcionales que hemos utilizado para definir el producto de magnitudes, Vergnaud (1983, 1988, 1990) utiliza representaciones tabulares de doble entrada para visualizar este tipo de relación funcional (ver Figura II - 5).

	M_2 b
M_1 a	$a \cdot b$ $\quad M_3$

Figura II - 5. Representación tabular del producto de magnitudes utilizada por Vergnaud (1983, 1988, 1990).

Productos y cocientes de un número cualquiera de magnitudes.

Como indica Arican (2018), pese a que Vergnaud (1983, 1988) no centra su atención en las situaciones de proporcionalidad inversa y solo presenta un tipo concreto de situación de proporcionalidad compuesta, las estructuras multiplicativas introducidas pueden usarse para formalizar estos conceptos. A continuación, presentamos con generalidad la estructura multiplicativa que subyace a las situaciones de proporcionalidad compuesta de las que surgirán como casos particulares las estructuras para la proporcionalidad simple, tanto directa como inversa. Para ello deberemos generalizar la estructura del producto y cociente de dos magnitudes, a un número cualquiera de magnitudes. Aunque este tipo de estructuras, asociadas a las situaciones

[26] El volumen específico es el volumen ocupado por unidad de masa de una cierta sustancia, es la magnitud intensiva inversa a la densidad.

de proporcionalidad compuesta, han recibido una menor atención en la investigación en educación matemática, algunos trabajos realizan desarrollos parcialmente similares al que comenzamos en esta sección (Arican, 2018; Bosch, 1994; Bosch, García, Gascón, & Ruiz, 2006; García, 2005; Martínez-Juste *et al.*, 2017).

La estructura del producto de dos magnitudes puede generalizarse a un número cualquiera de magnitudes, es decir, podemos considerar un conjunto finito de magnitudes escalares, $M_1, \dots, M_n$, y una aplicación multilineal con espacio de llegada una magnitud M,

$$f: M_1 \times \dots \times M_n \longrightarrow M,$$

tal que $f(1, \dots, 1) = 1$ (denotando por 1 la unidad de cada magnitud). De esta forma, $f(a_1, \dots, a_n) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot f(1, \dots, 1) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$. Y, como antes, si omitimos la notación funcional, podemos escribir la anterior relación identificando M con el producto de magnitudes $M = M_1 \cdot \dots \cdot M_n$.

Para la introducción de cocientes, basta con considerar productos por magnitudes inversas. Así en general, podemos abordar las situaciones en las que tenemos un conjunto finito de magnitudes escalares, $M_1, \dots, M_n$, y una magnitud M entre las que se puede establecer una aplicación,

$$E_{\mathbb{p}}: M_1 \times \dots \times M_n \longrightarrow M,$$

siendo $\mathbb{p} = (p_1, \dots, p_n)$ $p_i \in \{1, -1\}$, definida para valores de cantidades de magnitud $a_1, \dots, a_n$ de $M_1, \dots, M_n$ respectivamente, por la función homogénea siguiente:

$$E_{\mathbb{p}}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}.$$

Notemos que $E_{\mathbb{p}}(1, \dots, 1) = 1$, es decir, si consideramos las cantidades unidad de cada una de las magnitudes, su imagen por la aplicación anterior es la unidad de M. Además, si construimos la aplicación $f: M_1^{p_1} \times \dots \times M_n^{p_n} \longrightarrow M$, mediante $f(a_1, \dots, a_n) = E_{\mathbb{p}}\left(a_1^{p_1}, \dots, a_n^{p_n}\right)$, f es multilineal y, además, $f(1, \dots, 1) = E_{\mathbb{p}}(1, \dots, 1) = 1$. Por tanto, puede realizarse la siguiente identificación:

$$M = E_{\mathbb{p}}(M_1, \dots, M_n) = E_{(p_1, \dots, p_n)}(M_1, \dots, M_n) = \prod_{i=1}^{n} M_i^{p_i}$$

Por ejemplo, si M_1, M_2 y M_3, son las dimensiones lineales de un ortoedro y M su volumen podemos identificar $M = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$. En este caso, el producto $1\,u \times 1\,u \times 1u$, donde u es la unidad de longitud considerada, es fácilmente interpretable como $1\,u^3$, siendo u^3 la unidad de volumen derivada de dicha unidad de longitud. Si consideramos un objeto de base rectangular, con M_1 y M_2 las dimensiones lineales de dicha base, M_3 el peso de ese objeto, y M la presión que ejerce el objeto al apoyarlo en una superficie plana, entonces $M = M_3/(M_1 \cdot M_2)$. En este caso, si la unidad de fuerza utilizada para el peso es el Newton (N) y las unidades de longitud son el metro

(m) la unidad derivada $1\,N/(1\,m\ \times\ 1\,m) = 1Pa$, siendo Pa la abreviatura para la unidad de presión denominada Pascal.

Como veremos, las aplicaciones $E_{\mathbb{p}}$, que dan lugar a estructuras homogéneas entre magnitudes (productos y cocientes), permiten definir las relaciones de proporcionalidad compuesta entre magnitudes (también las de proporcionalidad simple en el caso de dos magnitudes). Si prescindimos del significado concreto de las magnitudes involucradas y las identificamos con $\mathbb{R}^+$, el número de estructuras diferentes de este tipo para un número concreto de magnitudes viene determinado por el número de componentes negativas del vector $\mathbb{p}$. Además, consideraremos equivalentes aquellas estructuras que den lugar a magnitudes inversas. Por ejemplo, consideraremos equivalentes las estructuras $M_3/(M_1 \cdot M_2)$ y $(M_1 \cdot M_2)/M_3$, pero no son equivalentes $M_3/(M_1 \cdot M_2)$ y $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$. Es decir, consideraremos equivalentes las estructuras que provengan del vector $\mathbb{p}$ y del vector $-\mathbb{p}$. De hecho, de forma similar a como indican Martínez-Juste *et al*. (2017), fijado el número de magnitudes, toda la información sobre una estructura $E_{\mathbb{p}}$, puede codificarse en un par $\mathbb{e} = (a, b)$ siendo a el número de componentes positivas de $\mathbb{p}$, y b el número de componentes negativas. En la Tabla II - 1 pueden observarse todas las estructuras por productos y cocientes posibles con conjuntos de hasta 4 magnitudes.

N. de Magnitudes	**Estructuras $E_{\mathbb{p}}$**		
2	$\frac{M_2}{M_1}$	$M_1 \cdot M_2$	
3	$\frac{M_3}{M_1 \cdot M_2}$	$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$	
4	$\frac{M_4}{M_1 \cdot M_2 \cdot M_3}$	$\frac{M_3 \cdot M_4}{M_1 \cdot M_2}$	$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4$

Tabla II - 1. Estructuras por productos y cocientes de hasta 4 magnitudes.

Al igual que ocurría con el concepto de razón, podemos considerar las operaciones anteriores entre magnitudes sin necesidad de que estas guarden una relación de proporcionalidad. En una situación de proporcionalidad simple directa la razón externa entre magnitudes permanece constante, la exigencia de constancia de la magnitud $M = E_{\mathbb{p}}(M_1, \dots, M_n)$ permite generalizar este concepto.

Relación de proporcionalidad entre un número cualquiera de magnitudes.

Consideraremos que una *situación de proporcionalidad* es aquella en la que intervienen una serie de magnitudes $M_1, \dots, M_n$ con una estructura $E_{\mathbb{p}}$, como las definidas anteriormente, de forma que la magnitud $M = E_{\mathbb{p}}(M_1, \dots, M_n)$, adquiere siempre un valor constante. Diremos también que las magnitudes $M_1, \dots, M_n$ tienen, o están ligadas por, una $relación\ de\ proporcionalidad$. El valor constante que toma la magnitud M se denomina *constante de proporcionalidad* y lo denotaremos generalmente por k. Es decir,

$$\prod_{i=1}^{n} M_i^{p_i} = k \quad p_i \in \{-1,1\}.$$

Si consideramos la estructura inversa (multiplicativamente) es decir, $M^{-1} = E_{-\mathbb{p}}(M_1, \dots, M_n)$ en una situación de proporcionalidad, la magnitud M^{-1} también toma un valor constante que coincide con k^{-1}. Por tanto, en las situaciones de proporcionalidad se trabajará tanto con la constante k como con su inversa k^{-1}, pero se considerará que la estructura $E_{\mathbb{p}}$ y la estructura $E_{-\mathbb{p}}$ responden a la misma situación ya que las consideramos equivalentes como hemos explicado anteriormente.

La existencia de una relación proporcional provoca que el valor de una de las magnitudes quede determinado si se conocen los valores del resto de magnitudes, es decir, pueden definirse las aplicaciones:

$$f_i: M_1 \times \dots \times M_{i-1} \times M_{i+1} \times \dots \times M_n \longrightarrow M_i,$$

mediante la asignación

$$x_i = f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = k^{p_i} \prod_{j \neq i} x_j^{-p_j \cdot p_i}$$

Para hacer referencia a la interdependencia entre los valores asociados a un conjunto de magnitudes ligadas por una relación de proporcionalidad hablaremos de *tuplas de valores relacionados* u *homólogos*, es decir tuplas de valores $a_1, \dots, a_n$ de forma que $\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} = k$, y las denotaremos por $(a_1: \dots : a_n)$ (como referencia a la representación habitual de las parejas de valores que forman una razón).

En el ejemplo anterior, en el que M_1, M_2 y M_3 eran las dimensiones lineales de un ortoedro y M su volumen, si pedimos que el volumen sea constante, entonces M_1, M_2 y M_3 tienen una relación de proporcionalidad en donde la constante de proporcionalidad es el volumen del ortoedro. Las aplicaciones f_i son las que permiten, dado el volumen y dos de las dimensiones lineales, calcular la tercera, por ejemplo $a_3 = k/(a_1 \cdot a_2)$, siendo k el volumen del ortoedro. Una terna $(a_1: a_2: a_3)$ está formada por valores relacionados u homólogos, si el ortoedro que definen tiene un volumen igual al valor constante considerado, es decir $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = k$.

Estructura multiplicativa de las situaciones de proporcionalidad simple directa.

Estudiemos el caso particular de dos magnitudes con una relación de proporcionalidad a partir de una estructura $\mathbb{p} = (-1,1)$. Es decir, dos magnitudes M_1 y M_2 relacionadas de forma que la magnitud, $E_{(-1,1)}(M_1, M_2)$ adquiere siempre un valor constante, k:

$$E_{(-1,1)}(M_1, M_2) = \frac{M_2}{M_1} = k.$$

La aplicación asociada f_2, es tal que

$$f_2: M_1 \longrightarrow M_2 \qquad x_2 = f_2(x_1) = k \cdot x_1.$$

Podemos comprobar que, en este caso, se recuperan los conceptos de proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes. La aplicación asociada f_2 es la función lineal, o de proporcionalidad directa, que relaciona ambas magnitudes. Notemos que las parejas de valores homólogos $(a_1 : a_2)$ cumplen que su razón externa es constante $(a_2/a_1 = k)$. En este caso, considerando $E_{-(-1,1)}(M_1, M_2) = E_{(1,-1)}(M_1, M_2) = M_1/M_2$ la constante de proporcionalidad es k^{-1} que es la constante de proporcionalidad asociada a la aplicación lineal asociada f_1,

$$f_1 : M_2 \longrightarrow M_1 \qquad x_1 = f_1(x_2) = k^{-1} \cdot x_2.$$

II.2.2.5. Situaciones de proporcionalidad inversa

Si la estructura multiplicativa de una situación de proporcionalidad viene determinada por el par $\mathbb{p} = (1,1)$, tenemos dos magnitudes ligadas por la relación $M_1 \cdot M_2 = k.$ En este caso, la aplicación $E_{\mathbb{p}}$ (bilineal), es el producto de medidas introducido por Vergnaud (1983) y la relación de proporcionalidad queda determinada si dicho producto adquiere siempre un valor constante. Es decir, las parejas e valores homólogos $(a_1 : a_2)$ cumplen que $a_1 \cdot a_2$ adquiere el valor constante k. Estas situaciones de proporcionalidad reciben el nombre de situaciones *de proporcionalidad simple inversa* y hablaremos de k como la *constante de proporcionalidad inversa*.

Para las situaciones de proporcionalidad simple inversa las aplicaciones asociadas f_1 y f_2 tienen una expresión funcional idéntica y reciben el nombre de *funciones de proporcionalidad inversa*:

$$f_2 : M_1 \longrightarrow M_2 \qquad x_2 = f_2(x_1) = \frac{k}{x_1},$$

$$f_1 : M_2 \longrightarrow M_1 \qquad x_1 = f_1(x_2) = \frac{k}{x_2}.$$

Si consideramos dos parejas de valores homólogos $\big(a : f(a)\big)$ y $(b : f(b))$, las anteriores consideraciones permiten establecer las igualdades:

$$a \cdot f(a) = b \cdot f(b) \qquad \frac{a}{b} = \frac{f(b)}{f(a)}.$$

La primera de ellas es la análoga a la proporción entre razones externas en el caso de la proporcionalidad simple directa. La segunda es la análoga a la proporción por razones internas. En las situaciones de proporcionalidad inversa no tiene sentido la consideración de razones externas que se mantenían constantes en las situaciones directas. En este caso, la constante de proporcionalidad viene determinada por el producto de medidas. Las razones internas sí pueden establecerse en las relaciones inversas, si bien estas razones no se conservan al considerar dos parejas de valores homólogos, sino que se invierten.

Por ejemplo, si consideramos la relación entre la altura y la base de los rectángulos que tienen área constante $20\ cm^2$, las parejas $(2 : 10)$ y $(4 : 5)$ (un rectángulo de base $2\ cm$ y altura $10\ cm$ y otro rectángulo de base $4\ cm$ y altura $5\ cm$), observamos como al duplicar la base (razón interna 2) debemos considerar un rectángulo de altura mitad (razón interna $1/2$).

Caracterizaciones de una situación de proporcionalidad simple inversa.

Las situaciones de proporcionalidad simple inversa admiten definiciones análogas a las que estudiamos para la proporcionalidad simple directa (Oller-Marcén, 2012). Añadimos la caracterización errónea por aumentos y disminuciones que supone identificar una situación de proporcionalidad inversa con una relación decreciente (Arican, 2019a). Como las funciones asociadas a una situación inversa no son lineales, no tiene sentido considerar caracterizaciones correctas mediante argumentos aditivos:

- *Caracterización por razones internas*: Se basa en el hecho de que una relación funcional entre magnitudes es de proporcionalidad inversa si y solo si invierte razones internas.
- *Caracterización por constante de proporcionalidad*: Se basa en el hecho de que una relación funcional entre magnitudes es de proporcionalidad inversa si y solo si el producto de valores relacionados se mantiene constante.
- *Caracterización explícitamente funcional*: Son aquellas caracterizaciones que apelan a la existencia de una relación funcional del tipo $y = \frac{k}{x}$ entre las magnitudes involucradas.
- *Caracterización implícitamente funcional*: Se basa en el hecho de que una relación funcional entre magnitudes es de proporcionalidad inversa si y solo si el producto de una cantidad de magnitud por cualquier número real positivo es igual al producto del inverso de dicho número real por la imagen de la cantidad de magnitud considerada. Es decir, f es de proporcionalidad inversa si y solo si $f(\lambda \cdot a) = \lambda^{-1} \cdot f(a)$ para toda cantidad $a \in M_1$ y todo número $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *Caracterización multiplicativa*: Se trata de un acercamiento a la caracterización implícitamente funcional anterior pero que generalmente se hace de forma incompleta. Por ejemplo, se caracteriza una relación de proporcionalidad como aquella en la que al multiplicar (o dividir) una cantidad de magnitud por dos, tres, etc., la cantidad correspondiente de la segunda magnitud queda dividida (multiplicada) por el mismo número.
- *Caracterización cualitativa por aumentos y disminuciones* (errónea): Son aquellas que apelan a una relación decreciente para caracterizar la proporcionalidad inversa con argumentos del tipo "cuando una magnitud aumenta la otra disminuye", "a más de…, menos de…", etc.

Además de estas caracterizaciones, algunos autores proponen caracterizaciones basadas en la relación entre la estructura producto y los isomorfismos de medidas para caracterizar una relación de proporcionalidad inversa apelando a las dos relaciones de proporcionalidad directa que se generan (Gairín & Oller-Marcén, 2011; Oller-Marcén, 2012).

- *Caracterización por doble relación de proporcionalidad simple:* Las situaciones de proporcionalidad simple inversas son aquellas en las que existen dos magnitudes M_1 y M_2 relacionadas, y una magnitud M cuyo valor es constante, de forma que tiene sentido considerar las razones entre M y M_1 y entre M y M_2, obteniéndose como magnitudes cociente $M_2 = M/M_1$ y $M_1 = M/M_2$ respectivamente (Oller-Marcén, 2012, p. 163).

Sistemas de representación.

Al igual que sucede con las caracterizaciones de las relaciones de proporcionalidad, los sistemas de representación asociados a las situaciones de proporcionalidad inversa presentan similitudes con los asociados a las situaciones de proporcionalidad simple directa. Algunas de las representaciones que presentamos en esta sección particularizadas al caso de la proporcionalidad simple inversa pueden observarse en los trabajos de Arican (2018, 2019a).

Representaciones simbólico-algebraicas para indicar que dos magnitudes son inversamente proporcionales:

$$M_2 \propto \frac{1}{M_1} \qquad M_1 \cdot M_2 = cte(= k) \qquad M_2 = \frac{k}{M_1}$$

También representaciones simbólico-algebraicas para determinar la función lineal que relaciona las magnitudes dando expresiones explícitas o implícitas de la misma:

$$f(x) = \frac{k}{x} \qquad y = \frac{k}{x} \qquad x \cdot y = k \qquad f(\lambda x) = \lambda^{-1} f(x)$$

Representaciones verbales: “a doble de…, mitad de…”, “cuando se multiplica una magnitud por un número, la otra queda dividida por el mismo número”, etc. O las caracterizaciones cualitativas erróneas a través de aumentos y disminuciones “a más de…, menos de…”, “cuando aumenta una magnitud, la otra disminuye”, etc.

Representaciones tabulares (ver Figura II - 6) para expresar la correspondencia entre pares de valores concretos de la magnitud. Sobre ellas pueden aparecer conectores entre los valores expresando relaciones multiplicativas entre las cantidades de una misma magnitud o entre cantidades correspondientes de ambas magnitudes.

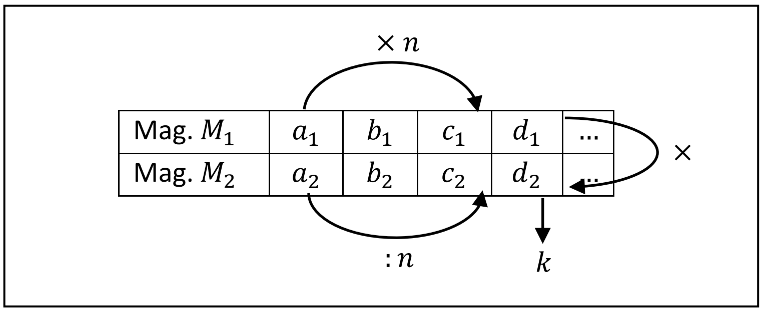


Figura II - 6. Representación tabular de una relación de proporcionalidad inversa.

Representaciones por doble línea numérica (Arican, 2018). Similar a las representaciones tabulares pero cada magnitud se representa mediante una recta o semirrecta y sobre ella se representan los valores de las magnitudes involucradas uniendo los valores relacionados (ver Imagen II - 4)

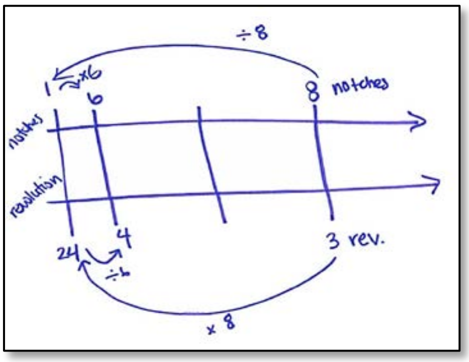


Imagen II - 4. Representación por doble línea numérica realizada por un profesor en formación para una relación de proporcionalidad inversa. Imagen extraída del trabajo de Arican (2018).

Representaciones gráficas (ver Figura II - 7) determinadas por las coordenadas cartesianas asociadas a las parejas de valores relacionados que, en este caso, representan un arco de hipérbola equilátera, centrada en el origen y cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas.

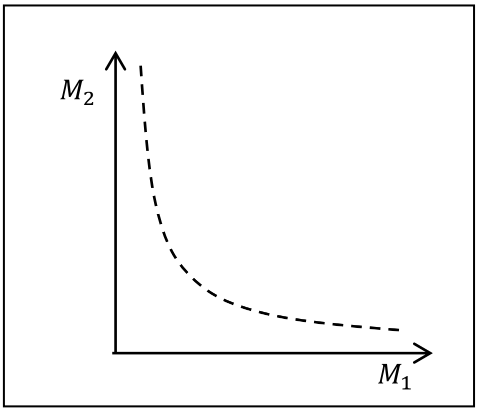


Figura II - 7. Representación gráfica de una función hiperbólica asociada a una relación de proporcionalidad simple inversa.

II.2.2.6. Situaciones de proporcionalidad compuesta

Las situaciones de proporcionalidad en las que intervienen tres o más magnitudes reciben el nombre de *situaciones de proporcionalidad compuesta.* La tipología de estas situaciones es, obviamente, infinita. Algunos autores, como Arican (2018), clasifican las estructuras asociadas a la proporcionalidad compuesta haciendo referencia a las relaciones funcionales de proporcionalidad que se definen entre magnitudes cuando se mantiene constante el valor del resto de magnitudes. Si, por ejemplo, fijamos los valores de las magnitudes $M_3, \dots, M_n$, sean estos, $k_3, \dots, k_n$, obtenemos una función asociada f_{12} entre las magnitudes M_1 y M_2:

$$f_{12}: M_1 \longrightarrow M_2 \qquad x_2 = f_{12}(x_1) = f_2(x_1, k_3, \dots, k_n) = K \cdot x_1^{-p_1 \cdot p_2} \qquad K := \left(k^{p_2} \cdot \prod_{j=3}^{n} k_j^{-p_j \cdot p_2} \right)$$

Así, f_{12} es una función de proporcionalidad directa si p_1 y p_2 tienen distinto signo, y es de proporcionalidad inversa si p_1 y p_2 tienen el mismo signo. Esta consideración, que hemos hecho sobre M_1 y M_2 por simplicidad, puede generalizarse a cualquier pareja de magnitudes involucradas. De esta manera, se puede estudiar la relación de proporcionalidad entre las parejas e magnitudes que viene determinada por la función asociada f_{ij} si se mantienen constantes los valores para el resto de magnitudes.

Con estas consideraciones, Arican (2018), para las situaciones de proporcionalidad compuesta entre tres magnitudes, habla de situaciones de tipo *Directa-Directa-Inversa* con $\mathbb{p} = (-1,-1,1)$ y estructura $M_3/(M_1 \cdot M_2) = k$; y de situaciones de tipo *Inversa-Inversa-inversa* con $\mathbb{p} = (1,1,1)$ y estructura $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = k$. Vergnaud (1983, 1988, 1990), trabaja con las estructuras Directa-Directa-Inversa a las que denomina *proporción doble*, que presenta como una estructura similar al producto de medidas. De hecho, define proporción doble como una situación en la que un producto de magnitudes es directamente proporcional a una tercera magnitud. Es decir, se puede establecer un isomorfismo de medidas entre un producto de medidas y otra magnitud. Así, se obtiene una estructura que Vergnaud presenta en la forma $M_3 = k \cdot M_1 \cdot M_3$. La generalización considerada por Verganud para la estructura de proporcionalidad doble es la de *proporción múltiple* ($\mathbb{p} = (-1,-1,\dots,-1,1)$), es decir $M_n = k \cdot M_1 \cdot \dots \cdot M_{n-1}$. Obviamente, estas estructuras no cubren todas las estructuras posibles para la proporcionalidad compuesta (ver Tabla II - 1).

En una situación de proporcionalidad compuesta si consideramos dos ternas de valores relacionados $(a_1 : \dots : a_n)$ y $(b_1 : \dots : b_n)$, se pueden establecer igualdades análogas a las proporciones para la proporcionalidad simple. Por un lado, la igualdad análoga a la proporción por razones externas vendría dada por la igualdad de la constante de proporcionalidad, esto es:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} = \prod_{i=1}^{n} b_i^{p_i}$$

De la anterior, se pueden deducir igualdades por razones internas:

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{p_i} = 1.$$

La forma habitual de considerar la *proporción compuesta* anterior es despejar una de las razones internas en función del producto de las razones internas de las demás magnitudes, por ejemplo,

$$\frac{a_1}{b_1} = \prod_{i=2}^{n} \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^{-p_i \cdot p_1}.$$

De esta forma, las razones internas en el segundo miembro de la igualdad anterior aparecen como a_i/b_i si p_1 y p_i tienen distinto signo, es decir, si la relación de proporcionalidad asociada entre M_1 y M_i es directa, y aparece la razón inversa si la relación asociada es de proporcionalidad inversa. La anterior propiedad, denominada en diferentes libros de texto como *propiedad fundamental de la* *proporción compuesta* (Oller-Marcén, 2012), proporciona un método para establecer la proporción compuesta por razones internas mediante el estudio de las relaciones proporcionales asociadas entre las parejas de magnitudes involucradas. Dicha propiedad que se utiliza fundamentalmente para resolver problemas de valor perdido sigue presentándose en los libros de texto actuales (Martínez-Juste *et al.*, 2015b).

Si recordamos el ejemplo en el que consideramos que M_1 y M_2 son las dimensiones lineales de la base rectangular de un objeto cuyo peso es M_3 y consideramos que la presión que ejerce dicho objeto al apoyarlo en una superficie plana es constante e igual a $10\ Pa$, entonces $M_3/(M_1 \cdot M_2) = 10$. Tendríamos:

- Función asociada f_{12} al considerar el peso constante e igual a $10\ N$ (aproximación del peso en la Tierra de un objeto de masa $1\ kg$), $f_{12}: M_1 \longrightarrow M_2$, dada por la expresión $f_{12}(x_1) = 10/(10x_1) = 1/x_1$, que es una función de proporcionalidad inversa que proporciona el alto de la base rectangular conocido el ancho.
- Función asociada f_{13} al considerar el alto de la base rectangular del objeto constante e igual a $0{,}5\ m$ $f_{13}: M_1 \longrightarrow M_3$, dada por la expresión $f_{13}(x_1) = 5 \cdot x_1$, que es una función de proporcionalidad directa que proporciona el peso conocido el ancho de la base rectangular.
- Función asociada f_{23} al considerar el ancho de la base rectangular del objeto constante e igual a $2\ m$ $f_{23}: M_2 \longrightarrow M_3$, dada por la expresión $f_{23}(x_2) = 20 \cdot x_2$, que es una función de proporcionalidad directa que proporciona el peso conocido el alto de la base rectangular.
- Estructura Directa-Directa-Inversa según la denominación de Arican (2018), situación de proporcionalidad doble según la denominación de Vergnaud.
- Dadas dos ternas de valores relacionados u homólogos, por ejemplo $(10: 0{,}5: 2)$ y $(50: 0{,}8: 6{,}25)$, podemos establecer el análogo a la proporción por razones externas:

$$\frac{10}{0{,}5 \cdot 2} = \frac{50}{0{,}8 \cdot 6{,}25}$$

- Con las ternas de valores relacionados $(10: 0{,}5: 2)$ y $(50: 0{,}8: 6{,}25)$, podemos establecer el análogo a la proporción por razones internas aislando en un término la razón interna para la anchura de la base M_1. Para ello debemos fijarnos en que f_{12} es de proporcionalidad inversa y f_{13} es de proporcionalidad directa, por tanto, en la proporción la razón interna para M_3 aparece en el “mismo sentido” que la de M_1, mientras que para M_2 se establece en sentido inverso:

$$\frac{0{,}8}{0{,}5} = \left(\frac{6{,}25}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{50}{10} = \frac{2}{6{,}25} \cdot \frac{50}{10}$$

Caracterizaciones de una situación de proporcionalidad compuesta.

A pesar de que pueden establecerse caracterizaciones para determinar las relaciones de proporcionalidad compuesta análogas a las de las relaciones simple, la mayor complejidad de éstas (una caracterización funcional explícita requiere de funciones de varias variables y las caracterizaciones implícitas necesitan de conceptos como el de aplicación multilineal) hace que los textos escolares presenten en exclusiva caracterizaciones aritméticas apelando a la relación de proporcionalidad asociada que se establece entre las parejas de magnitudes involucradas (Martínez-Juste *et al.*, 2015b; Oller-Marcén, 2012). Dichas caracterizaciones suelen tomar una forma similar a la siguiente: "Una magnitud es proporcional (de forma compuesta) a otras varias cuando es proporcional (directa o inversamente) a cada una de ellas al permanecer fijas las restantes." (Oller-Marcén, 2012, p. 86). Esta caracterización se basa, por tanto, en considerar el tipo de función asociada obtenido al fijar cada una de las parejas de magnitudes, f_{ij}, ya que puede demostrarse el recíproco al desarrollo anterior. Es decir, si tenemos un conjunto de magnitudes relacionadas de forma que cualquier pareja considerada tienen una relación de proporcionalidad directa o inversa cuando se mantienen fijos los valores del resto de magnitudes, entonces las magnitudes se relacionan por una estructura de proporcionalidad compuesta generada por productos y cocientes de las magnitudes.

Sin embargo, como indican Martínez-Juste *et al*. (2015b) e Ibáñez y Martínez-Juste (2020) las caracterizaciones que hacen algunos textos y manuales no son excesivamente rigurosas. En muchas ocasiones se omite la necesidad de mantener constantes los valores del resto de magnitudes cuando se estudia la relación de proporcionalidad asociada entre una determinada pareja: "Se establece una proporcionalidad compuesta entre magnitudes cuando dos o más magnitudes están, cada una de ellas, relacionadas mediante una proporcionalidad con otra magnitud." (Fernández & Segovia, 2011, p. 395). Obviamente, estas caracterizaciones son incompletas y no generan necesariamente una relación de proporcionalidad compuesta.

Proporcionalidad simple encadenada.

Por ejemplo, si pensamos en un vino de venta a granel por litros, el precio total de la compra es directamente proporcional al volumen de vino comprado, y el volumen de vino comprado también es directamente proporcional a la masa del vino, por lo que el precio de compra también es directamente proporcional a la masa.

En esta situación, existen tres magnitudes, M_1, M_2, M_3, de forma que cualquiera de las parejas considerada presenta una relación de proporcionalidad simple directa, sin embargo, no existe una relación de proporcionalidad compuesta. Si fijamos una cualquiera de las magnitudes, no existe una relación de covariación entre las otras dos ya que estas quedan automáticamente determinadas por el valor fijado. Una situación como la anterior se corresponde con la composición de relaciones de proporcionalidad simple directa. Si las dos primeras magnitudes son directamente proporcionales, existe $f_1: M_1 \longrightarrow M_2$, lineal, análogamente $f_2: M_2 \longrightarrow M_3$, lineal, y, por tanto, $f_2 \circ f_1: M_1 \longrightarrow M_3$, lineal

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2 \circ f_1"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
M_2 \arrow[rr, "f_2"'] & {} & M_3
\end{tikzcd}$$

De otra forma, si $M_2 = k_1 M_1$ y $M_3 = k_2 M_2$, entonces $M_3 = (k_2 \cdot k_1) \cdot M_1$. Esta situación es la que, en los trabajos sobre estructuras multiplicativas, Levain y Vergnaud (1995) denominan *proportion simple composée*, es decir, proporción simple compuesta[27]. Para distinguir estas situaciones de las de proporcionalidad compuesta traduciremos la anterior expresión como proporcionalidad simple encadenada.

Amalgamación de magnitudes.

Otro de los conceptos (de tipo procedimental) asociados a las situaciones de proporcionalidad compuesta es el de *amalgamación* (Bosch, 1994; Martínez-Juste *et al*., 2014, 2015a, 2015b; Oller-Marcén, 2012). Si suponemos una situación de proporcionalidad compuesta con n magnitudes y estructura multiplicativa $E_{\mathbb{p}}$, podemos considerar $I \subset \{1, \dots, n\}$ un subconjunto de índices y construir una nueva magnitud mediante productos y cocientes de magnitudes:

$$M_I = \prod_{i \in I} M_i^{p_i}$$

De esta manera, la situación de proporcionalidad se podría traducir a otra con menos magnitudes, concretamente las magnitudes M_j , con $j \notin I$ y la magnitud M_I, donde la nueva estructura multiplicativa vendría dada por

$$M_I \cdot \prod_{j \notin I} M_j^{p_j} = k$$

Este proceso de reducción del número de magnitudes involucradas en un problema de proporcionalidad compuesta es el que denominaremos *amalgamación*. Mediante dicho proceso puede convertirse toda situación de proporcionalidad compuesta en una situación de proporcionalidad simple. De hecho, si tenemos una situación en la que $\mathbb{p}$ tenga valores positivos y negativos y tomamos I_+ el conjunto de índices para los que su correspondiente coordenada de $\mathbb{p}$ es 1, y llamamos I_- a su complementario. Podemos amalgamar exclusivamente por producto de magnitudes, generando las nuevas magnitudes:

$$M_{I_+} = \prod_{i \in I_+} M_i \qquad M_{I_-} = \prod_{i \in I_-} M_i$$

De esta forma, podremos traducir la estructura multiplicativa compuesta a una simple (directa).

[27] Cabe aclarar que el concepto tradicionalmente denominado en español 'proporcionalidad compuesta' (y cuyo equivalente en inglés '*compound proportionality*' también puede encontrarse en la literatura) no se corresponde con las situaciones de *proportion simple composée*. En la denominación de Vergnaud '*composée*' hace referencia a la composición de varias funciones de proporcionalidad simple y no a que la función que define la situación proporcional sea de varias variables (magnitudes) que es lo que determina lo que conocemos por proporcionalidad compuesta. Como ya hemos dicho, Vergnaud considera algunos tipos concretos de estructuras compuestas a las que denomina en sus trabajos por '*proportion multiple*'.

$$E_{\mathbb{p}}(M_1, \dots, M_n) = E_{(-1,1)}\left(M_{I_-}, M_{I_+}\right) = \frac{M_{I_+}}{M_{I_-}} = k$$

Si todas las componentes de $\mathbb{p}$ son positivas, se puede reducir la estructura multiplicativa a la estructura simple inversa $E_{(1,1)}$ mediante un proceso similar al anterior mediante amalgamación por producto eligiendo una partición cualquiera en dos subconjuntos del conjunto de índices.

Este concepto está implícitamente considerado en la definición de proporción doble en los estudios sobre la estructura multiplicativa de Verganud (1983, 1988, 1990). Ya que, como hemos dicho, para Vergnaud, la estructura $M_3 = k \cdot M_1 \cdot M_2$, surge al considerar un isomorfismo de medidas (relación de proporcionalidad simple directa) entre M_3 y el producto de medidas $M_1 \cdot M_2$.

Volviendo a los ejemplos de proporcionalidad compuesta que hemos usado anteriormente, un proceso de amalgamación nos llevaría, por ejemplo, a considerar la relación simple inversa entre la altura de un ortoedro y el área de su base, al considerar volumen constante. En el ejemplo de la presión constante, un proceso de amalgamación nos llevaría, por ejemplo, a considerar la relación de proporcionalidad simple directa entre el peso del objeto y el área de su base (superficie de apoyo).

Sistemas de representación.

Como en el caso de las caracterizaciones, la complejidad de las situaciones compuestas hace que no suelan utilizarse representaciones de tipo gráfico de las relaciones funcionales que, aunque podrían visualizarse, en el caso de tres magnitudes vendrían dadas por superficies en $\mathbb{R}^3$ ($z = kxy$, $z = k/(xy)$) contenido no abordado en educación secundaria ni bachillerato. Además de las *representaciones simbólico-algebraicas* presentadas anteriormente, pueden considerarse *representaciones tabulares* (ver Figura II - 8) en las que se relacionan por filas o por columnas las tuplas de valores homólogos (ver, por ejemplo, las producciones de los alumnos presentadas en el trabajo de Arican (2018)). En estas tablas pueden aparecer referencias a las relaciones multiplicativas entre parejas de magnitudes.

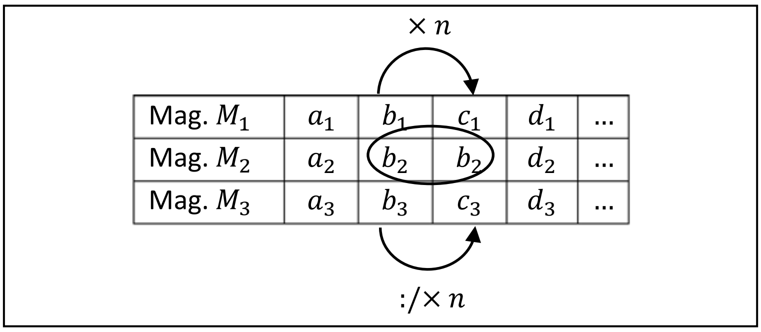


Figura II - 8. Representación tabular de una relación de proporcionalidad compuesta entre tres magnitudes.

II.2.3. Fenómenos organizados por la proporcionalidad

Como hemos dicho anteriormente (ver sección II.1.1. El análisis de contenido), para abordar el análisis fenomenológico se deben detectar los fenómenos que son susceptibles de modelizarse mediante la estructura conceptual objeto de estudio y que le dan sentido. Además, deben identificarse las situaciones en las que estos fenómenos aparecen, delimitar los contextos matemáticos en los que se agrupan los fenómenos según características comunes y establecer la relación existente entre dichos contextos y la estructura matemática estudiada (Gómez & Cañadas, 2011).

Algunos autores consideran cuatro situaciones generales en las que los conceptos matemáticos muestran su utilidad: personales, educativas o laborales, públicas y científicas (Rico *et al.*, 2008). Dichas situaciones coinciden con las utilizadas para la elaboración de ítems del estudio PISA (OCDE, 2005). Valverde (2012, p. 252) considera la clasificación de las tareas propuestas en estas categorías de situaciones en su estudio sobre la proporcionalidad con maestros en formación y da algunos ejemplos de situaciones de proporcionalidad que se ubican en cada una de las categorías: el consumo de un automóvil o las recetas de cocina como situaciones personales; relaciones entre tiempo y trabajadores para realizar determinado trabajo o el cambio de divisas como situaciones laborales; densidad de población y tasas de natalidad y mortalidad como situaciones públicas; densidad, probabilidad, semejanza, leyes de Kepler o cambios de unidades como situaciones científicas. La autora, advierte de que esta tipología de situaciones no es excluyente pudiendo considerarse el mismo fenómeno en situaciones diferentes.

La categorización de fenómenos en contextos surge del planteamiento de la pregunta ¿para qué sirven o para qué se utilizan estas estructuras matemáticas? (Rico *et al*, 2008). Cómo apuntan Fernández y Puig (2002) la variedad de fenómenos organizados por la razón y la proporcionalidad es enorme. Gran parte de estos fenómenos se basan en el llamado 'pensamiento relativo' (Fernández, 2009) y conectan con la estructura multiplicativa de los números reales. Un posible acercamiento a la delimitación de contextos es el análisis fenomenológico histórico (Freudenthal, 1983).

Una categorización de contextos, no exhaustiva, pero relevante en el ámbito de la investigación en educación matemática, es la presentada por Cramer y Post (1993). En su trabajo, distinguen cuatro contextos específicos de situaciones de proporcionalidad simple directa: velocidades, mezclas, densidades y escalas. Contextos que encajan con las categorías semánticas trabajadas por Lamon (1993a, 1993b): medidas bien compactadas, estructura parte-parte-todo, conjuntos asociados, y ampliadores y reductores. Otros autores han utilizado también la clasificación de tareas en contextos, por ejemplo, Carretero (1989), emplea los contextos mercancías y su coste, producciones agrícolas, distribución de objetos en cajas, ahorro por persona en un tiempo determinado.

Un amplio estudio de textos históricos realizado por Oller-Marcén (2012) permite establecer una tipología de contextos modelizables por una estructura proporcional (Oller-Marcén & Gairín, 2016). Presentamos brevemente los contextos delimitados en este estudio, la relación de dichos contextos con la estructura matemática la realizaremos en la sección II.2.4. Tipos de tareas escolares: estructura y estrategias de resolución.

- *Problemas relacionados con intercambios:* Considerados por los autores como una de las posibles actividades humanas que hicieron surgir el razonamiento proporcional. En esta categoría los autores encuentran, fundamentalmente, problemas de valor perdido cuya estructura corresponde a la proporcionalidad simple directa y proporcionalidad compuesta y en menor medida con la proporcionalidad inversa. Dentro de este contexto se distingue entre: Intercambios de mercancías, procesos de compra-venta y cambio de divisas.
- *Problemas relacionados repartos:* Los contextos de reparto marcan generalmente, que debe repartirse una cierta cantidad de forma justa (veremos más adelante que las implicaciones éticas del término 'justo' influyen en cómo los alumnos realizan un reparto) teniendo en cuenta alguna propiedad cuantificable relativa a los individuos a los que se reparte. Dependiendo del contexto, que el reparto sea justo hace que éste se haga de forma directamente proporcional o inversamente proporcional.
- *Problemas relacionados con préstamos:* Son problemas relacionados con el interés generado por el préstamo de una cantidad de dinero. Se encuentran dentro de esta categoría los problemas de interés simple abordables desde una estructura de proporcionalidad compuesta y que hoy en día siguen siendo objeto de estudio en libros de texto de secundaria (Martínez-Juste *et al*., 2015b).
- *Problemas relacionados con mezclas y aleaciones*[28]*:* son problemas en los que varios subproductos se mezclan para obtener otro producto. En muchas ocasiones el problema considera subproductos de diferentes calidades y precios y los relaciona con la calidad o precio del producto resultante. En otros se trabaja sobre disoluciones y concentraciones. La modelización de dichos problemas pasa por la aditividad de la magnitud considerada para caracterizar la cantidad de subproducto (Oller-Marcén, 2012, p. 167), lo que genera una estructura parte-parte-todo, al considerar la magnitud sobre los subproductos o sobre el producto final.

Oller-Marcén (2012) advierte de que la clasificación anterior no es exhaustiva, quedando contextos de problemas fuera de ella. El autor especifica otros contextos concretos que aparecen con menor frecuencia como: Problemas de grifos, problemas de persecuciones, problemas de adivinación o numéricos (se dan condiciones numéricas descontextualizadas, generalmente a partir de comparaciones multiplicativas) y diversos problemas modelizables mediante proporcionalidad compuesta.

Martínez-Juste *et al*. (2015b, p. 98), en un estudio centrado en los problemas de proporcionalidad compuesta, especifican tres contextos diferentes modelizables a partir de esa estructura proporcional y que puede complementar a la anterior. Distinguen así

[28] Estos problemas también han sido denominados tradicionalmente problemas de aligación, si bien esta denominación ha caído en desuso (Gómez, 2015).

- *Problemas asociados a la producción o consumo en un marco de trabajo cooperativo:* Como problemas clásicos que relacionan la cantidad de comida que consume un número de animales durante cierta cantidad de tiempo.
- *Problemas asociados a costes económicos o temporales de una actividad*: Como, por ejemplo, los asociados a situaciones de cálculo del coste que supone para un cierto número de personas pernoctar un determinado número de noches en un hotel.
- *Problemas asociados a situaciones que involucran magnitudes de la Física:* Como, por ejemplo, una situación que estudie el incremento de temperatura que provoca una cierta cantidad de energía para una determinada cantidad de agua.

Los trabajos anteriores, al igual que la presente memoria, se centran en la proporcionalidad aritmética por lo que no recogen aquellos contextos geométricos modelizables desde la proporcionalidad como son las situaciones de semejanza y proporcionalidad geométrica. Dichas situaciones sí se consideran en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983) para la proporcionalidad centrada en las situaciones simples y directas. Una característica de este análisis fenomenológico es que recoge aquellos fenómenos asociados al concepto de razón sin que esta aparezca, necesariamente, ligada a una función de proporcionalidad. Este trabajo ha sido utilizado por diferentes autores para establecer la fenomenología didáctica de la proporcionalidad (Fernández, 2009; Fernández & Puig, 2002; Valverde, 2012). En concreto, el trabajo de Fernández (2009, pp. 30-52) reconstruye con detalle, y multitud de ejemplos, el análisis fenomenológico de Freudenthal que utiliza posteriormente en el diseño de una experiencia de enseñanza de la proporcionalidad con alumnos de primaria. Recogemos brevemente las principales ideas de esta fenomenología didáctica de la proporcionalidad.

Freudenthal considera tres clases de estructuras que organizan los fenómenos asociados a la razón, a saber, *exposiciones*, *composiciones* y *constructos*.

Una exposición es una terna (Ω, M, ω) donde Ω es un conjunto de objetos a cuyos elementos se les asocia una cantidad de la magnitud M, mediante la aplicación ω. Por ejemplo, Ω pueden ser los alumnos de una clase, M la magnitud longitud y ω la aplicación que asigna a cada alumno su altura. Pueden considerarse entonces, las razones (internas) $\omega(x_i)/\omega(x_j)$, que comparan las alturas de dos alumnos, x_i y x_j de clase (de forma multiplicativa). Si consideramos una pareja de exposiciones definidas sobre un mismo conjunto $(\Omega, M_1, \omega_1), (\Omega, M_2, \omega_2)$, la aplicación inducida $f: M_1 \to M_2$, dada por $f\big(\omega_1(x_i)\big) = \omega_2(x_i)$, $(f \circ \omega_1 = \omega_2)$ permite comparar las razones (externas) $\omega_1(x_i)/\omega_2(x_i)$ formadas por cantidades de diferentes magnitudes y asociadas al mismo individuo (elemento de Ω). En el ejemplo anterior, si para los alumnos consideramos su altura y su peso, la aplicación f es la que relaciona la altura y el peso de cada alumno. La relación entre M_1 y M_2 será de proporcionalidad si la función f es de proporcionalidad (generalmente se consideran relaciones de proporcionalidad directa, pero esta definición es claramente exportable al caso inverso). Fernández (2009) propone ejemplos de densidad de población y de coste unitario como característicos de las parejas de exposiciones. En concreto, los problemas relacionados con intercambios en situaciones proporcionalidad simple, que se encuentran entre los contextos delimitados por Oller-Marcén y Gairín (2016), son susceptibles de modelizarse mediante parejas de exposiciones. Como veremos en la sección II.2.4.7. Repartos proporcionales, los problemas de repartos proporcionales también quedarían incluidos en las parejas de exposiciones.

Una composición también es una terna (Ω, M, ω) donde, en este caso, "Ω es un conjunto formado por partes o clases de un universo" (Fernández, 2009, p. 40), es decir, los elementos de Ω son conjuntos de objetos o individuos. Un ejemplo, de esta estructura sería un espacio de probabilidad finito discreto uniforme, donde Ω, sería el conjunto de partes del espacio muestral E y ω sería la aplicación que a cada suceso $S \in \Omega$ (subconjunto del espacio muestral) le asigna su cardinalidad. Aparecería de este modo la razón (interna) $\omega(S)/\omega(\mathrm{E})$ que coincidiría con la definición laplaciana de probabilidad del suceso S. Vemos cómo esta estructura organiza fenómenos probabilísticos y frecuentistas a través del concepto de razón. Fernández (2009) emplea como fenómenos paradigmáticos modelizados por esta estructura los contextos de mezclas y aleaciones en donde tanto la mezcla total como los subproductos que la componen forman parte del conjunto Ω, por tanto, pueden conformase razones parte-parte entre subproductos o parte-todo entre un subproducto y la mezcla total. Estudiaremos la modelización de estas situaciones en detalle en la siguiente sección. Al igual que las exposiciones, las composiciones pueden presentarse por parejas y, de esta forma, comparar razones o establecer relaciones de proporcionalidad.

Por último, un constructo es una pareja (Ω, ω) donde Ω es un conjunto con una estructura geométrica Σ y ω es una función medida. Es decir, esta subestructura modeliza esencialmente aquellas estructuras geométricas sobre las que puede definirse una función medida. Por ejemplo, si consideramos el plano euclídeo $\Sigma = \mathbb{P}_2$ y $\Omega = \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ el conjunto formado por todos los segmentos orientados definidos por pares de puntos del plano, ω sería la función que a cada segmento le asocia su longitud $\omega: \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^+$, $\omega(P, Q) = dis(P, Q)$. Las razones (internas) asociadas a este fenómeno serían las razones entre segmentos del plano, por ejemplo, si consideramos un rectángulo, podríamos establecer la razón entre su base y su altura. Como en los casos anteriores, los constructos pueden presentarse por parejas. Por ejemplo, si consideramos dos copias del constructo del ejemplo anterior $(\Omega_1, \omega_1) = (\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2, dis) = (\Omega_2, \omega_2)$ podemos considerar una homotecia $h: \Sigma_1 = \mathbb{P}_2 \to \Sigma_2 = \mathbb{P}_2$ de razón k, esta induce aplicaciones $\hat{h}: \Omega_1 \to \Omega_2$, dada por $\hat{h}(P, Q) = (h(P), h(Q))$ y $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f\big(dis(P, Q)\big) = dis(h(P), h(Q))$. Por ser h una homotecia, encontramos que f es una función de proporcionalidad directa, además la constante de proporcionalidad es la razón k de la homotecia. Las razones externas en esta situación vendrían dadas por longitudes de segmentos homólogos por la homotecia.

II.2.4. Tipos de tareas escolares: estructura y estrategias de resolución

En esta sección completamos el análisis de la estructura conceptual y de la fenomenología centrándonos en el análisis de los diferentes tipos de tareas escolares asociadas tradicionalmente a los conceptos sobre proporcionalidad (sección II.2.2. Estructura conceptual y sistemas de representación). Así mismo, expondremos diferentes estrategias de resolución para cada tipo de problema considerado. Para ello, estudiaremos los diferentes referentes de la literatura especializada y generalizaremos y adaptaremos las estrategias encontradas a los problemas asociados a situaciones de proporcionalidad en las que existen menos referentes científicos (inversa y compuesta).

II.2.4.1. Distintas clasificaciones de problemas escolares

Son muchos los trabajos encaminados a presentar diferentes maneras de clasificar los problemas matemáticos escolares, tanto desde un punto de vista general como dentro del contexto de la proporcionalidad aritmética.

Para Díaz y Poblete (2001, p. 36) "establecer categorías en los problemas constituye […] la base conceptual de cualquier procedimiento didáctico en el currículo escolar". Si bien, como advierte Blanco (1993, p. 39), "ninguna clasificación puede ser exhaustiva, estableciéndose siempre intersecciones entre los diversos apartados y apareciendo actividades de difícil catalogación, y todo esto por la enorme diversidad de problemas que pueden proponerse de diferentes niveles y contenidos". Conejo y Ortega (2013) ejemplifican esta aseveración al completar y ampliar anteriores clasificaciones de problemas, atendiendo al contexto, formulación, soluciones y métodos de resolución de los problemas, en el primer caso y atendiendo a la definición de problema y a los objetivos que persigue la tarea, en el segundo caso.

Otras posibles clasificaciones surgen al considerar el contexto en el que se enmarca el enunciado del problema. Esta atención a los contextos se hace patente en el diseño de las pruebas PISA (OCDE, 2005) donde para el diseño de los diferentes problemas, además de los contenidos a tratar, se consideran los diferentes contextos y situaciones que introdujimos en la sección II.2.3. Fenómenos organizados por la proporcionalidad: situación personal, situación educativa o laboral, situación pública y situación científica.

Díaz y Poblete (2001) realizan una doble clasificación, además de atender a la naturaleza de los problemas matemáticos, se preocupan por el contexto en el que se plantea el problema. De esta forma, resumen la diferenciación de los problemas según su naturaleza en rutinarios y no rutinarios. Y al hablar de los contextos los clasifican en contextos reales, realistas, fantasistas y puramente matemáticos. Los problemas reales serían aquellos que se producen efectivamente en la realidad y comprometen al alumno a actuar. Si los problemas son susceptibles de producirse realmente y, por tanto, son una simulación de la realidad se consideran realistas. Por el contrario, los problemas fantasistas son fruto de la imaginación y no tienen una base real. Por último, los problemas puramente matemáticos son aquellos que evocan exclusivamente a objetos matemáticos y sus relaciones.

Si tenemos en cuenta el soporte en el que se presentan los problemas, podemos considerar otras clasificaciones generales para los problemas matemáticos sin tener en cuenta el contenido tratado. En concreto, si nos centramos en los problemas que aparecen en manuales escolares puede tener interés, como señala Oller-Marcén (2012), considerar la posición de los problemas dentro de las unidades didácticas de libros de texto respecto al discurso en que se institucionalizan las técnicas de resolución. De esta forma, podemos distinguir entre: problemas introductorios, formulados como motivación al contenido y que no aparecen resueltos, problemas resueltos que suelen acompañar a las explicaciones teóricas del tópico a tratar, problemas de refuerzo que aparecen al final de cada epígrafe en los que se divide una unidad didáctica y problemas presentados en listados al final de las unidades didácticas.

Dentro del ámbito concreto de la aritmética, donde se encuadran los problemas de proporcionalidad objeto de nuestro interés, existen clasificaciones específicas que debemos tener en consideración para realizar un análisis más fino. Una de estas clasificaciones es la abordada por Puig y Cerdán (1988), en cuyo trabajo se realiza un estudio profundo de los problemas verbales aritméticos elementales. Los autores distinguen entre problemas que se resuelven en una etapa o en más de una; según la necesidad de realizar una o más operaciones aritméticas binarias para alcanzar la solución. A partir de ahí, se estudian las estructuras aditivas y multiplicativas para problemas en una etapa y el método de análisis-síntesis para la resolución de problemas aritméticos de varias operaciones combinadas (PAVOC).

En concreto, para los problemas en una etapa con estructura multiplicativa, base de los problemas de proporcionalidad, Puig y Cerdán (1988) realizan una clasificación atendiendo a la categoría semántica que unifica las clasificaciones de Vergnaud (1983) y de Nesher (1987). Otras clasificaciones similares y que completan la anterior pueden encontrarse en los trabajos de Maza (1991), Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999) y en el de Cid, Godino y Batanero (2003).

- *Isomorfismo de medidas:* Se trata de problemas en los que aparecen dos magnitudes y tiene sentido considerar la razón correspondiente. Vergnaud (1983) identifica estos problemas con los de valor perdido entre dos magnitudes directamente proporcionales ya que, aunque en su versión general requieran de dos etapas, cuando uno de los datos proporcionados es la unidad de una de las magnitudes, se pueden considerar como un problema en una única etapa. Esta categoría se corresponde con lo que Cid *et al.* (2003) denominan, problemas Estado-Razón-Estado, correspondiéndose los estados a las magnitudes consideradas, y con los problemas de razón en la terminología de Maza (1991). Estos problemas pueden simbolizarse de forma similar a la siguiente:

  $$\boxed{E_1} \xrightarrow{R_{21}} \boxed{E_2} \qquad\qquad E_1 \cdot R_{21} = E_2$$

  Esta estructura da lugar a tres tipos de problemas diferentes según la posición del dato desconocido. Maza (1991) desarrolla esta casuística y distingue, para los problemas que se resuelven por división, entre problemas de agrupamiento, cuando la incógnita está en el primer estado, y de partición, cuando la incógnita es la razón. Carpenter *et al*. (1999) realizan también esta distinción basándose en el proceso cognitivo que pueden llevar los alumnos en la búsqueda de la solución, realizando tareas de agrupamiento para los problemas de división por agrupamiento o cociente cuotitivo y realizando tareas de reparto para los problemas de cociente partitivo.

- *Comparación multiplicativa:* Se trata de problemas en los que se compara de forma escalar dos cantidades de una misma magnitud. Como antes, la estructura da lugar a tres tipos de problemas diferentes según la posición del dato desconocido. Esta categoría se corresponde con lo que Cid *et al.* (2003) denominan, problemas Estado-Comparación-Estado y Maza (1991) problemas de comparación. Dichos problemas pueden simbolizarse de forma similar a la siguiente:

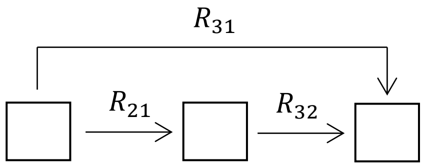
$$\boxed{E_1} \xrightarrow{C_{12}} \boxed{E_2} \qquad\qquad E_1 \cdot C_{12} = E_2$$

Esta categoría semántica puede incluirse dentro de la primera si consideramos como razones los cocientes entre cantidades de una misma magnitud. La distinción entre ambas tipologías obedece al carácter semántico de la clasificación, viéndose en el primer caso las razones como cantidades de una magnitud intensiva (por ejemplo, tres bolígrafos por caja) y en el segundo como escalares sin unidades (por ejemplo, tres veces más). Dicha distinción es comparable a la que hemos hecho entre razones internas y razones externas.

- *Producto de medidas:* Son problemas en los que el producto de dos magnitudes (entendidas en este caso como extensivas) da lugar a una nueva magnitud. Nesher (1987) los denomina problemas de producto cartesiano. Dentro de esta categoría semántica, aparecen, por ejemplo, problemas geométricos en el que un producto de longitudes se utiliza para calcular un área, o problemas combinatorios en los que dos conjuntos de colores se utilizan para conformar diferentes banderas (entendiendo en este caso la cardinalidad como una magnitud discreta). Esta categoría, que también incluye explícitamente Vergnaud (1983), se corresponde con lo que Cid *et al*. (2003) denominan, problemas Estado-Estado-Estado y Maza (1991) problemas de combinación. Carpenter *et al*. (1999) proponen el adjetivo 'simétricos' para esta tipología de problemas, destacando el carácter conmutativo (o simétrico) que tienen los estados o espacios de medida de los que se realiza el producto cartesiano, en contraposición con el carácter no simétrico de los factores en las demás tipologías de problemas. Podemos simbolizar los problemas de producto de medidas de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{c}\boxed{E_1}\\ \boxed{E_2}\end{array}\right] \boxed{E_{1\times 2}} \qquad\qquad E_1 \cdot E_2 = E_{1\times 2}$$

- *Razón-Razón-Razón, Comparación-Comparación-Comparación, Razón-Comparación-Razón:* Estas tres categorías, no aparecen recogidas en el trabajo de Puig y Cerdán (1988), pero sí se tratan en Maza (1991) y la segunda de ellas aparece también en Cid *et al*. (2003). Se trata de situaciones en las que, a partir de tres espacios de medida, se considera la correspondencia entre el primero y el segundo, la correspondencia entre el segundo y el tercero y la composición de ambas correspondencias (que establecería una correspondencia entre el primero y el tercero). Según los espacios de medida sean todos diferentes, todos iguales o haya una pareja de espacios iguales se obtiene una categoría u otra. Una posible forma de simbolizar los problemas Razón-Razón-Razón (para las otras dos categorías es similar) es la siguiente:



$$R_{21} \cdot R_{32} = R_{31}$$

Estas categorías están relacionadas con las estructuras funcionales que hemos denominado anteriormente mediante el término 'proporcionalidad simple encadenada' (ver sección II.2.2.6. Situaciones de proporcionalidad compuesta).

II.2.4.2. Problemas de proporcionalidad simple directa

Si nos centramos específicamente en la proporcionalidad aritmética existen diferentes formas de afrontar la clasificación de las tareas según la propiedad en la que fijemos nuestra atención. Fernández (2009) realiza un análisis exhaustivo de las diversas clasificaciones de problemas de proporcionalidad simple directa que se han planteado en la literatura científica.

Clasificaciones basadas en el contexto

Tourniaire y Pulos (1985), en una revisión de las diferentes tareas de proporcionalidad que se habían utilizado en la investigación, realizan una clasificación de dichas tareas centrándose en el contexto en el que aparecen. Los autores utilizan cuatro categorías: problemas físicos, problemas de razón (*rate*), problemas de mezcla y problemas de probabilidad. Dentro de cada una identifican diferentes situaciones y distinguen los tipos de tareas a realizar por los alumnos para dar una clasificación más fina y detallada de las tareas utilizadas por los investigadores. Se recogen en este trabajo algunos problemas clásicos como el de "Mr. Short and Mr. Tall" que aparece en el trabajo de Karplus, Karplus y Wollman (1974) o los ampliamente utilizados problemas sobre mezclas de limonada y zumo de naranja (Karplus *et al*., 1983; Noelting , 1980a). Como recoge Fernández (2009), algunos autores incluyen como otro elemento de esta clasificación los problemas geométricos cuyo contexto parece de naturaleza diferente a los expuestos (Fiol & Fortuny, 1990).

Clasificaciones basadas en el tipo de razón

Ya hemos abordado en la sección II.2.2.1. El concepto de razón diferentes distinciones entre razones de magnitudes. Dichas distinciones, son utilizadas en ocasiones para clasificar los problemas de proporcionalidad aritmética simple.

Si fijamos la atención en la aparición de una estructura parte-parte-todo, o composiciones en la terminología de Freudenthal (1983), aparecen clasificaciones como la de Singer y Resnik (1992) en la que se distingue si la información del problema hace referencia a la relación entre partes, problemas por cada (*for every*) o ésta hace referencia a la relación entre partes y el todo, problemas de cada (*out of*). Fuera de esta distinción, Singer y Resnik (1992) también diferencian los problemas de razones entre magnitudes no homogéneas, o problemas de tasa.

En el mismo sentido, Lamon (1993a, 1993b) propone una clasificación de problemas que completa y refina la de Singer y Resnik (1992), distinguiendo para las razones entre cantidades no homogéneas si estas están bien compactadas (*well-chunked*) y denominando como problemas de conjuntos asociados aquellos en los que las razones entre magnitudes no homogéneas no lo son. Fuera de estas categorías, Lamon (1993a, 1993b) considera los problemas de ampliadores y reductores en los que incluye aquellos en los que se compara el crecimiento de un objeto a lo largo del tiempo y los problemas de proporcionalidad geométrica.

Clasificaciones basadas en el tipo de tarea

Cramer y Post (1993) realizan un estudio de las situaciones problemáticas asociadas a la proporcionalidad simple presentando una clasificación de problemas y de estrategias correctas de resolución. Los autores se centran en la tarea que debe afrontar el alumno. En concreto, se diferencian los siguientes tipos de problemas de proporcionalidad simple directa:

- *Problemas de valor perdido:* Se conocen tres datos de una proporción y se desea calcular el cuarto valor desconocido. Por ejemplo: Abriendo un grifo 4 horas conseguimos echar 562 l de agua en una piscina. ¿Cuánta agua echaremos abriendo ese mismo grifo durante 6 horas?

- *Problemas de comparación numérica o cuantitativa:* Se conocen (o pueden calcularse) dos razones que se pretenden comparar. Por ejemplo: Trabajando 4 horas, Juan pinta 25 metros cuadrados. Por su parte Luis, pinta 30 metros cuadrados en 5 horas. ¿Quién trabaja más rápido?

- *Problemas de comparación y predicción cualitativas:* Requieren comparaciones que no se enuncian de forma específica con valores numéricos. Por ejemplo: En la clase de 1º B hay más alumnos que en la de 1º D. Por otro lado, la clase de 1ºD es más pequeña que la de 1ºB. ¿En cuál de las dos clases los alumnos están más apretados?

Esta clasificación, salvo la distinción de los problemas cualitativos, ya había sido utilizada en los trabajos de Vergnaud (1988) y en anteriores del mismo grupo (Post, Behr, & Lesh, 1988). Estos mismos autores proponen en otro trabajo, (Lesh *et al*., 1988), una clasificación más exhaustiva de tipos de tareas escolares asociadas a la proporcionalidad simple directa en la que, además de los problemas de valor perdido y de comparación numérica, incluyen: problemas de transformación (pueden suponerse una sofisticación de los problemas de valor perdido y comparación numérica), problemas de media armónica y geométrica (característicos de la proporcionalidad simple directa), problemas en los que se debe establecer una razón unitaria a partir de valores relacionados (pueden suponerse un caso particular de los problemas de valor perdido), problemas de cambio de unidades (otro caso particular de problemas de valor perdido) y problemas de cambio entre sistemas de representación.

La distinción entre problemas de valor perdido y de comparación es central en las investigaciones en proporcionalidad (Rivas, 2013). Cabe destacar que los distintos tipos de problemas han tenido un tratamiento desigual predominando los de valor perdido frente a los de comparación (relaciones de igualdad de razones frente a relaciones de desigualdad), tanto desde un punto de vista histórico, como en la enseñanza actual de la proporcionalidad reflejada en los libros de texto escolares (Gómez, 2016), tanto a nivel español, como internacional (Singh, 2000a).

Dada la importancia de esta tipología de problemas y el papel fundamental que juega en el diseño de la propuesta de esta memoria, conviene formalizar la definición y unificar la notación de los diferentes tipos de problemas de esta clasificación. Como hemos dicho anteriormente una situación de proporcionalidad simple directa es aquella en la que dos magnitudes M_1 y M_2 se relacionan mediante una estructura en la que $\mathbb{p} = (-1,1)$, y el valor que se obtiene para cualquier pareja de valores relacionados de las magnitudes es una constante k, es decir

$$E_{(-1,1)}(M_1, M_2) = \frac{M_2}{M_1} = k.$$

Esta estructura permite definir la tipología de problemas anterior de la siguiente forma:

- *Problemas de valor perdido:* El enunciado del problema no proporciona explícitamente ni $E_{\mathbb{p}}$ ni k. Del enunciado deben deducirse las relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes que determinan $E_{\mathbb{p}}$ y se proporciona una pareja de valores relacionados $(a_1{:}\, a_2)$ para las magnitudes involucradas. Se solicita el valor x correspondiente a una de las magnitudes, supondremos M_2, en otra pareja de valores relacionados $(b_1{:}\, x)$ donde el valor b_1 es proporcionado por el enunciado del problema. En este contexto, y dado que la relación funcional puede escribirse de la forma, $M_2 = k \cdot M_1$, suele denominarse la magnitud M_2 como variable dependiente, y la magnitud M_1 como variable independiente (Martínez-Juste *et al*., 2017). Establecida la estructura multiplicativa esquematizaremos estas situaciones problemáticas de la siguiente forma:

  $$(a_1{:}\, a_2) \leftrightarrow (b_1{:}\, x)$$

  En el ejemplo planteado anteriormente para este tipo de problema, M_1 es el tiempo medido en horas que está abierto un grifo y M_2 es el volumen de agua, medido en litros, emanado por el grifo en ese tiempo. Las magnitudes se relacionan por una relación de proporcionalidad directa que se deduce del contexto del problema. La variable independiente es el tiempo y la dependiente el volumen de agua emanado. Con los datos proporcionados, esquematizaremos la situación mediante:

  $$(4{:}\, 562) \leftrightarrow (6{:}\, x)$$

- *Problemas de comparación numérica o cuantitativa:* El problema pone en juego dos situaciones diferentes de proporcionalidad simple directa que involucran la misma pareja de magnitudes, referidas, posiblemente, a objetos diferentes. Sin embargo, las constantes de proporcionalidad para cada una de las situaciones, k_1 y k_2 respectivamente, pueden no ser iguales. Como en el caso anterior, el enunciado del problema no proporciona explícitamente ni $E_{\mathbb{p}}$ ni k_1 y k_2. Del enunciado deben deducirse las relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes que determinan $E_{\mathbb{p}}$ y se proporcionan, dos parejas de valores relacionados $(a_1{:}\, a_2)$ y $(b_1{:}\, b_2)$ para las magnitudes involucradas una por cada situación. El problema, de forma directa o indirecta, solicita comparar k_1 y k_2. Establecida la estructura multiplicativa esquematizaremos estas situaciones problemáticas de la siguiente forma:

  $$(a_1{:}\, a_2) \sim (b_1{:}\, b_2).$$

En el ejemplo que hemos planteado anteriormente puede considerarse M_1 como el tiempo, medido en horas, que está una persona pintando y M_2 la superficie, en metros cuadrados, pintada. Se proporcionan datos relacionados para dos individuos, Juan y Luis. Con los datos proporcionados, esquematizaremos la situación mediante:

$$(4:25)\sim(5:30).$$

- *Problemas de comparación y predicción cualitativas:* La estructura de este tipo de problema coincide con la de los problemas de comparación cuantitativa, pero en este caso, la información suministrada por el enunciado no son dos parejas de valores relacionados. El enunciado proporciona sendas comparaciones entre los valores para ambas situaciones de las magnitudes M_1 y M_2 respectivamente, sin dar explícitamente dichos valores. Como en el caso cuantitativo el problema solicita, bien sea de forma directa o indirecta, comparar k_1 y k_2 con la información cualitativa dada. Basándonos en las ideas del trabajo de López-Rueda y Figueras (1999) esquematizaremos estos problemas mediante una traducción literal de las comparaciones proporcionadas por el enunciado teniendo en cuenta el sujeto de las oraciones de comparación y si la comparación es de “mayor que”, “menor que” o “igual que”. Las posibles oraciones de comparación en la magnitud M_1 se traducirían de la forma siguiente (las de M_2 se harían de forma análoga):

    - El valor de M_1 es mayor en la situación 1 que en la 2: $(x_1^+ : \dots)\sim(x_1 : \dots)$
    - El valor de M_1es menor en la situación 1 que en la 2: $(x_1^- : \dots)\sim(x_1 : \dots)$
    - El valor de M_1es mayor en la situación 2 que en la 1: $(x_1 : \dots)\sim(x_1^+ : \dots)$
    - El valor de M_1es mayor en la situación 2 que en la 1: $(x_1 : \dots)\sim(x_1^- : \dots)$
    - El valor de M_1es igual en la situación 1 que en la 2: $(x_1^= : \dots)\sim(x_1 : \dots)$
    - …

En el ejemplo propuesto anteriormente, puede considerarse M_1 como la cardinalidad de alumnos que hay en un aula y M_2 la superficie del aula. Se proporcionan comparaciones para dos aulas, 1º B y 1º D, es decir, la situación 1 es la correspondiente al aula 1º B y la situación 2 la correspondiente al aula 1º D. La primera comparación dice que hay más alumnos en 1º B que en 1º D, escribiremos $(x_1^+ : \dots)\sim(x_1 : \dots)$. La segunda comparación dice que en 1º D hay menos superficie, es decir $(\dots : x_2)\sim(\dots : x_2^-)$. Luego la situación puede esquematizarse mediante

$$(x_1^+ : x_2)\sim(x_1 : x_2^-).$$

Obviamente un cambio entre el sujeto y predicado de las oraciones junto con un cambio en el término de comparación provoca oraciones equivalentes. Así, la simetría de las relaciones de comparación permite realizar transformaciones en las traducciones literales de los enunciados de forma que los dos referentes de las comparaciones estén dentro de la misma situación. Por ejemplo, el problema $(x_1^+ : x_2)\sim(x_1 : x_2^-)$ anterior puede transformase en el problema equivalente:

$$(x_1^+ : y_2^+)\sim(x_1 : y_2).$$

Cabe destacar que, aunque el problema pida comprar las dos situaciones proporcionales que presenta, la decibilidad del problema depende de la información suministrada en el mismo. El anterior problema es un ejemplo de problema en el que los datos proporcionados no permiten concluir cuál de las dos situaciones es “más ventajosa”, o en términos del contexto, en qué clase los alumnos están más apretados.

II.2.4.3. Estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad simple directa

Los problemas de proporcionalidad simple directa son problemas aritméticos con varias operaciones combinadas, PAVOC, en la terminología usada por Puig y Cerdán (1988). Las clasificaciones que hemos dado anteriorermente permiten analizar la estructura de dichos problemas y proponer diferentes estrategias de resolución. Concretamente, nos centraremos en las estrategias de resolución para los diferentes problemas recogidos en la clasificación de Cramer y Post (1993), estudiada en el punto anterior y que es central para el desarrollo de este trabajo.

Con matices y diferencias en la terminología, los trabajos que abordan la clasificación de estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad simple directa distinguen, al menos, entre *estrategias escalares*, o de factor de cambio, a través de razones internas y *estrategias funcionales* a través de razones externas (Cramer & Post, 1993; Lamon, 1993a, 1993b; Noelting, 1980b; Vergnaud, 1983). Ya hemos discutido en la sección II.2.2.1. El concepto de razón las posibles ambigüedades que pueden generarse a partir de algunos de los términos empleados para esta distinción y que adoptaremos la distinción realizada por Vergnaud (1983, 1988, 1990). Esta distinción básica entre estrategias puede aplicarse tanto a problemas de valor perdido como a problemas de comparación numérica.

Un problema de valor perdido, $(a_1 : a_2) \leftrightarrow (b_1 : x)$, al considerar la relación funcional entre las magnitudes $f: M_1 \longrightarrow M_2$ dada por $x_2 = f(x_1) = k \cdot x_1$, queda determinado por el siguiente esquema de problemas multiplicativos en una etapa:

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \\
\boxed{a_1} \arrow[r, "k"] \arrow[d, squiggly, "c"'] & \boxed{a_2} \arrow[d, squiggly, "c"] \\
\boxed{b_1} \arrow[r, "k"] & \boxed{x}
\end{tikzcd}
$$

En donde los datos proporcionados por el enunciado son a_1, a_2, b_1 y se solicita el valor x.

La estrategia funcional, o mediante razón externa o reducción a la unidad, pasa por el cálculo de una razón externa en la primera etapa, por ejemplo $f(1) = k = a_2/a_1$, aunque también puede calcularse k^{-1}. En la segunda etapa se utiliza la razón anterior para calcular el valor desconocido, $x = k \cdot b_1$ o $x = b_1/k^{-1}$. Es decir, se resuelven consecutivamente (de arriba abajo en el esquema anterior) los dos problemas de isomorfismo de medidas (Estado-Razón-Estado) horizontales (o los análogos al considerar la función de proporcionalidad f^{-1}).

Por su parte, la estrategia escalar, o de factor de cambio, pasa por el cálculo de la razón interna c (o su inversa), es decir, resolver consecutivamente (de izquierda a derecha en el esquema anterior) los dos problemas de comparación multiplicativa (Estado-Comparación-Estado) verticales.

Junto con las estrategias multiplicativas anteriores, Tourniaire y Pulos (1985) señalan las estrategias *building-up*, que traduciremos por estrategias de *construcción progresiva,* como unas de las más habituales consideradas en la investigación en la resolución de problemas de valor perdido. Las estrategias de construcción progresiva se sustentan en que la función de proporcionalidad directa es una función lineal. De este modo, si se encuentra una combinación lineal de a_1 cuyo resultado sea b_1, es decir, una descomposición del tipo, $\mu a_1 + \lambda a_1 = b_1$, las propiedades definitorias de la función lineal aseguran la igualdad:

$$x = f(b_1) = f(\mu a_1 + \lambda a_1) = \mu f(a_1) + \lambda f(a_1) = \mu a_2 + \lambda a_2$$

Vergnaud (1983), para las estrategias de construcción progresiva, utiliza el término ‘estrategia de descomposición escalar’, ya que se basa en una descomposición dentro de una de las magnitudes y, de hecho, $\lambda + \mu$, es una descomposición aditiva de la razón interna de la situación, $\mu a_1 + \lambda a_1 = b_1$ lo que implica que $\lambda + \mu = c = b_1/a_1$. Pero, como indica el autor, una descomposición funcional, es decir, una descomposición análoga para la razón externa, aunque numéricamente correcta, carecería de sentido físico ya que una combinación lineal mediante escalares de la cantidad de una magnitud no produciría una cantidad de otra magnitud. Si bien, podría considerarse una descomposición funcional en el caso en el que las magnitudes involucradas en la relación funcional fueran homogéneas. La consideración de las estrategias descomposición funcional carente de significado enlaza con la estrategia de construcción de patrones (*pattern building*) descrita por Lamon (1993a, 1993b) que desarrollaremos posteriormente en el análisis del desempeño de los estudiantes en problemas de proporcionalidad.

Ejemplifiquemos la discusión anterior con el ejemplo de problema de valor perdido trabajado en la sección anterior, es decir “*Abriendo un grifo* 4 *horas conseguimos echar* 562 *l de agua en una piscina. ¿Cuánta agua echaremos abriendo ese mismo grifo durante* 6 *horas?”*

Una estrategia de construcción progresiva consistiría en decir que en 4 horas echa 560 litros y en 2 horas echará 280 litros, y como 6 horas es una vez 4 horas y la mitad de 4 horas, echará $562 + 281$ litros.

$$f(6) = f\left(4 + \frac{1}{2} \cdot 4\right) = f(4) + \frac{1}{2} \cdot f(4)$$

En el anterior se ha puesto en juego la descomposición de la razón interna

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Por el contrario, una estrategia de construcción de patrones consistiría en argumentar que la cantidad de litros es 140 veces el número de horas más la mitad del número de horas, para lo que se pone en juego la descomposición de la razón externa

$$\frac{562}{4} = 140 + \frac{1}{2}.$$

La expresión una vez cuatro horas más la mitad de 4 horas son 6 horas tiene sentido físico, mientras que la expresión 140 veces 4 horas más media vez 4 horas da 560 litros no tiene sentido físico (una combinación lineal por escalares dentro de una magnitud da como resultado una cantidad de esa magnitud).

Para los problemas de valor perdido, las estrategias anteriores construyen la solución numérica mediante dos operaciones binarias, si bien, puede construirse la solución mediante una única operación combinada resultante de la *aplicación de una fórmula*. Cramer y Post (1993) llaman a esta técnica *algoritmo de los productos cruzados* que consiste en obtener el valor desconocido mediante una fórmula equivalente a la siguiente:

$$x = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1}$$

En la exposición anterior,el símbolo x, ha denotado el valor desconocido pero no ha sido utilizada como incógnita envuelta en una estructura algebraica que proporcione la solución. Lamon (1993a, 1993b) considera otro tipo de estrategias en las que se utiliza una letra como incógnita para obtener la solución mediante un proceso algebraico tras la consideración de una *proporción* que involucre los datos del enunciado y la incógnita. De esta manera, tras considerar una de las siguientes proporciones (dada por razones externas o dada por razones internas) o sus inversas

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{x}{b_1} \quad / \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{x}{a_2}$$

se despeja el valor de x mediante procedimientos algebraicos.

Para los problemas de comparación la estructura es similar a la de los problemas de valor perdido, en este caso los datos proporcionados por el enunciado son a_1, a_2, b_1, b_2, y se solicita comparar k_1 y k_2. La estrategia funcional consiste en calcular dichas constantes y compararlas, es decir, resolver los dos problemas de isomorfismo de medidas (Estado-Razón-Estado) horizontales y comparar los resultados. La estrategia escalar o de factor de cambio, consiste en calcular las dos razones internas y a través de su comparación inferir la comparación entre las razones externas. Este último método se sustenta en el hecho de que $k_1 \geq k_2$ si y solo sí $c_1 \geq c_2$, (o, equivalentemente, $\frac{c_1}{c_2} \geq 1$) y la igualdad de razones externas implica la igualdad de razones internas.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] & M_2 \\ \boxed{a_1} \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, squiggly, "c_1"'] & \boxed{a_2} \arrow[d, squiggly, "c_2"] \\ \boxed{b_1} \arrow[r, "k_2"] & \boxed{b_2} \\ M_1 \arrow[r, "f_2"'] & M_2 \end{tikzcd}$$

II.2.4.4. Problemas de proporcionalidad inversa y compuesta

Muchos trabajos de investigación utilizan tipos de problemas similares a los de la clasificación de Cramer y Post (1993) en proporcionalidad simple inversa y proporcionalidad compuesta. Por ejemplo, los trabajos de Cabero-Fayos, Santágueda-Villanueva, Villalobos-Antúnez y Roig-Albiol (2020), Fisher (1988), Monteiro (2003), Oliveira (2009), Lamon (2012), Oller-Marcén (2012) y Wijayanti y Winsløw (2017), usan problemas de valor perdido en proporcionalidad inversa. Arican (2018) adapta las estructuras multiplicativas definidas por Vergnaud (1983, 1988) para definir problemas de valor perdido de proporcionalidad simple inversa y compuesta. También Carretero (1989), Bosch (1994), Levain y Vergnaud (1995), Bolea, Bosch y Gascón (2001), García (2005), Lamon (2012) utilizan problemas de valor perdido de proporcionalidad compuesta.

Frente los relativamente numerosos ejemplos de uso de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad inversa y compuesta existen pocos trabajos que consideren los problemas de comparación cuantitativa y cualitativa en estas situaciones. Cortina, Visnovska y Zuniga (2014) exploran el razonamiento cualitativo mediante tareas concretas de proporcionalidad inversa, trabajando la relación entre el número de partes en los que se divide la unidad y el tamaño de dichas partes. De forma más general, López-Rueda y Figueras (1999) proponen tareas de comparación cualitativas en proporcionalidad simple (inversa y directa) y proporcionalidad compuesta.

Aunque la mayoría de los trabajos que tratan la proporcionalidad compuesta lo hace para el caso de tres magnitudes, en los trabajos de Bosch (1994), Bolea *et al*. (2001) y García (2005) se aborda una clasificación general de las estructuras de proporcionalidad compuesta para un número cualquiera de magnitudes. Los autores realizan un estudio de estas situaciones desde un punto de vista funcional por lo que enfocan la clasificación de las estructuras bajo una perspectiva de invarianza de la constante de proporcionalidad para analizar los procesos de covarianza entre las magnitudes. De esta forma, la definición dota a una de las magnitudes de un carácter diferenciado considerándola como la variable cuyo valor depende del valor del resto de magnitudes (variables independientes). Esta representación, que es adecuada para los problemas de valor perdido, no encaja con las situaciones de comparación en las que ninguna de las magnitudes tiene un papel diferenciado.

En los trabajos de Martínez-Juste *et al*. (2014, 2017) se generaliza la clasificación de Cramer y Post (1993) a cualquier situación de proporcionalidad usando el enfoque funcional para definir las estructuras asociadas a dichas situaciones (que hemos presentado en las secciones II.2.2.4. Estructura multiplicativa de las situaciones de proporcionalidad, II.2.2.5. Situaciones de proporcionalidad inversa y II.2.2.6. Situaciones de proporcionalidad compuesta). Se definen así, para cualquier número de magnitudes y cualquier tipo de situación de proporcionalidad compuesta, los problemas de valor perdido, los de comparación cuantitativa y los de comparación cualitativa. Esta generalización, contiene como casos particulares las clasificaciones para problemas de proporcionalidad simple, tanto directa como inversa. Presentamos, a continuación, la generalización que se resume en los citados trabajos adaptándola a la notación utilizada en la presente memoria.

Problemas de valor perdido: Se parte de una situación de proporcionalidad que liga las magnitudes $M_1, \dots, M_n$ ligadas por una estructura multiplicativa $E_{\mathbb{p}}$ y con constante de proporcionalidad k. El enunciado del problema no proporciona explícitamente ni $E_{\mathbb{p}}$ ni k. Del enunciado deben deducirse las relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes que determinan $E_{\mathbb{p}}$ y se proporciona una tupla de valores relacionados $(a_1 \colon \dots \colon a_n)$ para las magnitudes involucradas. Se solicita el valor x_i correspondiente a una de las magnitudes en otra tupla de valores relacionados $(b_1 \colon \dots \colon b_{i-1} \colon x_i \colon b_{i+1} \colon \dots \colon b_n)$.

De forma análoga a la esquematización usada para problemas en proporcionalidad simple directa, en el resto de la memoria, una vez fijada la estructura multiplicativa, representaremos este tipo de problemas de la siguiente forma:

$$(a_1 \colon \dots \colon a_n) \leftrightarrow (b_1 \colon \dots \colon b_{i-1} \colon x_i \colon b_{i+1} \colon \dots \colon b_n)$$

La magnitud M_i de la que hay que calcular el valor desconocido suele recibir el nombre de *variable dependiente,* mientras que nos referiremos al resto de magnitudes como *variables independientes.* Dicho nombre es consistente con el hecho de que, una vez destacada una magnitud dentro de la situación, podemos traducir la estructura y el problema a lenguaje funcional usando las otras $n-1$ magnitudes involucradas, mediante la función multivariante f_i introducida en la sección II.2.2.4. Estructura multiplicativa de las situaciones de proporcionalidad:

$$f_i \colon M_1 \times \dots \times M_{i-1} \times M_{i+1} \times \dots \times M_n \longrightarrow M_i,$$

definida mediante la asignación

$$x_i = f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = k^{p_i} \prod_{j \neq i} x_j^{-p_j \cdot p_i}.$$

Así, se recupera la notación de Bosch (1994), Bolea *et al*. (2001) y García (2005), que concuerda con la utilizada en los trabajos de Vergnaud para la proporcionalidad directa. Observemos que, con este punto de vista, $f(1, \dots, 1)$, representa la constante de proporcionalidad

k. Y que un problema de valor perdido, donde suponemos que la variable dependiente es M_n, queda determinado por el supuesto de igualdad $f(a_1, \dots, a_{n-1}) = a_n$ y la ecuación $f(b_1, \dots, b_{n-1}) = x$ (Bosch, 1994, p. 254).

En concreto, para la estructura $\mathbb{p} = (-1,1)$ se recupera de forma sencilla lo estudiado para proporcionalidad simple directa y para la estructura $\mathbb{p} = (1,1)$ obtenemos la caracterización de los problemas de valor perdido para situaciones de proporcionalidad simple inversa. En dichos problemas tendremos dos magnitudes M_1 y M_2, relacionadas mediante una función del tipo

$$f_2: M_1 \longrightarrow M_i \qquad f_2(x_1) = \frac{k}{x_2}.$$

El enunciado proporcionará una pareja de valores homólogos $(a_1 : a_2)$ y nos pedirán calcular un valor desconocido x de la magnitud M_2 de forma que $(b_1 : x)$ sea una pareja de valores relacionados para un cierto valor b_1 de la magnitud M_1 proporcionado por el enunciado.

En general, si prescindimos del significado de las magnitudes y nos centramos en la expresión analítica de la función f_i obtenida al considerar una de las magnitudes como variable independiente, la caracterización anterior de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta permite establecer una clasificación más fina de estos problemas. Así, pueden clasificarse los problemas de valor perdido según la relación funcional mediante la que se obtiene la variable dependiente en función de las variables independientes (Ver Tabla II - 2). Como indican Martínez-Juste *et al*. (2017), es común denominar las diferentes tipologías de problemas de valor perdido de proporcionalidad compuesta atendiendo a la relación de proporcionalidad que mantiene cada una de las variables independientes con la variable dependiente, es decir considerando el tipo de función asociada f_{in} obtenida al considerar una de las magnitudes independientes M_i, y fijar el valor de todas las magnitudes menos M_i y la magnitud dependiente M_n.

Por ejemplo, ante una estructura $M_3/(M_1 \cdot M_3)$, si consideramos M_3 la variable dependiente, M_1 tiene una relación de proporcionalidad directa si fijamos M_2. Además, M_2 tiene una relación de proporcionalidad directa con M_3 si fijamos M_1. Así, un problema de valor perdido en el que M_3 sea la variable dependiente se dirá que es de tipo Directa-Directa[29], y viene determinado por una relación funcional del tipo $z(x, y) = kxy$. Con esa misma estructura proporcional, fijando M_1 (o

---

[29] No debe confundirse la clasificación de los problemas de valor perdido que presentamos en esta sección con la clasificación de las estructuras multiplicativas asociadas a situaciones de proporcionalidad compuesta que utiliza Arican (2018) y que presentamos en la sección II.2.2.6. Situaciones de proporcionalidad compuesta. Para Arican, el término 'Directa-Directa-Inversa' representa una estructura multiplicativa entre 3 magnitudes de la forma $M_3/(M_1 \cdot M_3)$ porque considera para su nomenclatura todas las posibles relaciones de proporcionalidad binarias involucradas. En la clasificación anterior, en la que presentamos la nomenclatura tradicional para clasificar los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta, 'Directa-Directa-Inversa' representa una relación funcional entre 4 magnitudes de la forma $t(x, y, z) = kxy/z$, en la que una magnitud tiene una posición distinguida (variable dependiente) y el término 'Directa-Directa-Inversa' hace referencia a la relación binaria entre el resto de magnitudes (variables independientes) y la magnitud destacada.

M_2) como variable dependiente, obtendríamos un problema de tipo Directa-Inversa con estructura funcional $z(x,y) = kx/y$. En la Tabla II - 2 pueden verse los diferentes tipos de problemas de valor perdido según la clasificación anterior para dos, tres y cuatro magnitudes.

N. de Magnitudes	**Estructuras $E_{\mathbb{p}}$**	**Relación funcional valor perdido**	**Tipo de problema de valor perdido**
2	$\frac{M_2}{M_1}$	$y(x) = kx$	Directa
	$M_1 \cdot M_2$	$y(x) = \frac{k}{x}$	Inversa
3	$\frac{M_3}{M_1 \cdot M_2}$	$z(x,y) = kxy$	Directa-Directa
		$z(x,y) = k\frac{x}{y}$	Directa-Inversa
	$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$	$z(x,y) = \frac{k}{xy}$	Inversa-Inversa
4	$\frac{M_4}{M_1 \cdot M_2 \cdot M_3}$	$t(x,y,z) = kxyz$	Directa-Directa-Directa
		$t(x,y,z) = k\frac{x}{yz}$	Directa-Inversa-Inversa
	$\frac{M_3 \cdot M_4}{M_1 \cdot M_2}$	$t(x,y,z) = k\frac{xy}{z}$	Directa-Directa-Inversa
	$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4$	$t(x,y,z) = \frac{k}{xyz}$	Inversa-Inversa-Inversa

Tabla II - 2. Tipos de problema de valor perdido según la relación funcional con la variable dependiente.

Problemas de comparación cuantitativa: Se parte de dos situaciones de proporcionalidad que involucran las mismas magnitudes $M_1, \dots, M_n$ ligadas por la misma estructura $E_{\mathbb{p}}$ pero con dos constantes de proporcionalidad no necesariamente iguales, k_1 y k_2. El enunciado del problema no proporciona explícitamente $E_{\mathbb{p}}$, k_1 y k_2. Del enunciado deben deducirse las relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes que determinan $E_{\mathbb{p}}$ y se proporcionan dos tuplas de valores relacionados $(a_1 : \dots : a_n)$ y $(b_1 : \dots : b_n)$ para las magnitudes involucradas en la primera y la segunda situación respectivamente. El problema, de forma directa o indirecta, solicita comparar k_1 y k_2. En el resto de la memoria, una vez fijada la estructura multiplicativa, representaremos este tipo de problemas de la siguiente forma:

$$(a_1 : \dots : a_n) \sim (b_1 : \dots : b_n)$$

Obviamente, para una situación de proporcionalidad simple directa, $\mathbb{p} = (-1,1)$, recuperamos el tipo de problema ya definido en la sección II.2.4.2. Problemas de proporcionalidad simple directa. Además, en este caso, desde el punto de vista de la estructura matemática no puede realizarse un refinamiento de la tipología de problemas como el que hemos hecho para los problemas de valor perdido al considerar la posición de la variable dependiente. Por ejemplo, en una situación de proporcionalidad con estructura $M_3/(M_1 \cdot M_3)$ todos los problemas de comparación serán estructuralmente idénticos, mientras que podremos considerar dos tipos de problemas de valor perdido, los de tipo Directa-Directa y los de tipo Directa-Inversa.

Problemas de comparación y predicción cualitativas: La estructura de este tipo de problemas coincide con la de los problemas de comparación cuantitativa, pero en este caso, la información suministrada por el enunciado no son dos tuplas de valores relacionados. El enunciado proporciona comparaciones entre los valores para ambas situaciones de las magnitudes $M_1, \dots, M_n$, respectivamente, sin dar explícitamente dichos valores. Esquematizaremos dichos problemas realizando una traducción literal de las comparaciones proporcionadas por el enunciado teniendo en cuenta el sujeto de las oraciones de comparación y si la comparación es de "mayor que" o "menor que" como ya se indicó anteriormente (sección II.2.4.2. Problemas de proporcionalidad simple directa).

II.2.4.5. Estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad simple inversa

Además de la menor presencia en la literatura científica de las relaciones de proporcionalidad simple inversa, los trabajos que abordan dichas situaciones y las estrategias de resolución suelen hacerlo de forma conjunta con las situaciones de proporcionalidad simple directa (Arican, 2018; Bosch, 1994; Fisher, 1998; Lamon, 2012). Este tratamiento conjunto puede obedecer a la gran similitud, sobre todo en los problemas de valor perdido, entre las situaciones problemáticas directas e inversas, sin embargo, puede enmascarar algunas diferencias sustanciales entre ambas, ya que, las situaciones directas e inversas responden a "fenómenos de naturaleza radicalmente distinta" (Oller-Marcén, 2012, p. 451).

Como hemos resaltado anteriormente, una situación de proporcionalidad simple inversa viene caracterizada por una estructura multiplicativa, $\mathbb{p} = (1,1)$, entre dos magnitudes M_1 y M_2, en donde el producto de magnitudes, $M_1 \cdot M_2$, adquiere un valor constante, k. Para estas situaciones de proporcionalidad, un problema de valor perdido queda caracterizado por el siguiente esquema de problemas multiplicativos en una etapa de producto de medidas y de comparación multiplicativa:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_2", "k"'] & M_2 \\
\boxed{a_1} \arrow[d, squiggly, "c"'] & \boxed{a_2} \arrow[d, squiggly, "c^{-1}"] \\
\boxed{b_1} \arrow[r, phantom, "k"'] & \boxed{x}
\end{tikzcd}$$

Siendo $(a_1 : a_2)$ y $(b_1 : x)$ parejas de valores homólogos con a_1, a_2 y b_1 proporcionados por el enunciado del problema cuyo objetivo es calcular el valor x.

En el esquema anterior se observa que podemos volver a considerarse estrategias de tipo funcional y de tipo escalar, de forma análoga a lo que ocurría en la proporcionalidad simple directa.

La *estrategia funcional* o basada en el *cálculo de la constante de proporcionalidad,* consiste en la resolución de los dos problemas de producto de medidas (problemas Estado-Estado-Estado) correspondientes a los dispuestos de forma horizontal en el anterior esquema (primero se calcula $f(1) = k = a_1 \cdot a_2$ para posteriormente calcular $x = f(b_2) = k/b_2$). Se observa una clara analogía con la también denominada estrategia de reducción a la unidad, en el caso de la proporcionalidad simple directa, cambiando el tipo de función considerada.

Para adaptar otras estrategias de resolución debemos hacer uso del siguiente hecho: las razones internas entre las cantidades correspondientes de magnitudes inversamente proporcionales son inversas, es decir, si tenemos dos parejas de valores relacionados $(a_1 : a_2)$ y $(b_1 : b_2)$, entonces $\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_2}{a_2}$. Hecho que justifica la introducción de c y c^{-1} en los problemas de comparación multiplicativa dispuestos en vertical en el esquema anterior.

De esta forma, una *estrategia escalar* o por *factor de cambio*, consistirá en la resolución consecutiva de los dos problemas de comparación multiplicativa del esquema, en donde, en un primer momento, se calcula el factor de cambio c, entre a_1 y b_1, es decir, $c = a_1/b_1$, para luego obtener x alegando que la comparación multiplicativa entre x y b_2 es c^{-1}.

La estrategia de *proporciones,* consistirá en plantear la proporción (inversa)

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{x}{a_2},$$

o la dada por las razones inversas a las anteriores, y obtener x mediante manipulaciones algebraicas o usando las propiedades de las proporciones. Obsérvese que, en el caso de la proporcionalidad simple directa, podían plantearse dos proporciones esencialmente diferentes según considerásemos constancia en las razones externas o interna. Sin embargo, en el caso de la proporcionalidad simple inversa la proporción $\frac{a_1}{x} = \frac{b_1}{a_2}$, o la establecida por las razones inversas, aunque matemáticamente correcta, carecería de sentido. En este tipo de situaciones, la estrategia análoga a la de proporciones establecidas entre razones externas sería la resultante de considerar la igualdad del producto de las parejas de valor homólogos (constancia de k), es decir:

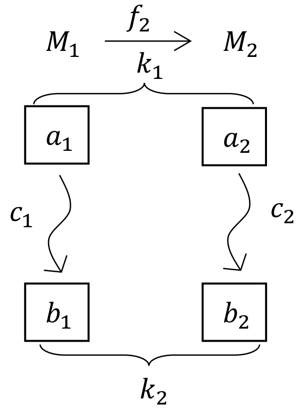
$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot x$$

Obviamente, la estrategia de *aplicación de una fórmula* para obtener la solución en el caso que nos ocupa consistiría en plantear la siguiente operación combinada cuyo resultado es el valor buscado:

$$x = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1}.$$

Por otro lado, las estrategias de construcción progresiva no tienen su análogo en las situaciones inversas ya que la función de proporcionalidad inversa no es una función lineal, sino una función hiperbólica.

Para los problemas de comparación la situación es similar a la anterior, en este caso los datos proporcionados por el enunciado son a_1, a_2, b_1, b_2, y se solicita comparar k_1 y k_2. El esquema mediante problemas multiplicativos en una etapa sería el siguiente:



La estrategia funcional, al igual que en proporcionalidad simple directa, consiste en calcular las dos constantes de proporcionalidad y compararlas, es decir, resolver los dos problemas de producto de medidas horizontales y comparar los resultados.

La estrategia escalar, consiste en calcular las dos razones internas y, a través de su comparación, inferir la comparación entre las razones externas. En este caso puede deducirse sin dificultad que

$$k_1 \geq k_2 \Leftrightarrow c_1 \geq c_2^{-1} \qquad (c_1 \cdot c_2 \geq 1),$$

y, de hecho, la igualdad entre las constantes de proporcionalidad implica la igualdad entre la razón interna en una magnitud y la inversa de su correspondiente razón interna en la segunda magnitud.

II.2.4.6. Estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad compuesta

Son escasos los trabajos que caracterizan estrategias de resolución para problemas de proporcionalidad compuesta. Arican (2018) estudia las respuestas de profesores de secundaria en formación a problemas de proporcionalidad, en su cuestionario incluye situaciones tanto simples, directas e inversas, como compuestas, pero no refina las estrategias de resolución para cada tipo de situación, sino que utiliza una categorización general, basada en la empleada por Fisher (1988) y en la empleada por Lamon (1993a, 1993b) para proporcionalidad simple directa. De esta forma, distingue entre la utilización de una fórmula, utilización de un razonamiento proporcional correcto o el uso de estrategias algebraicas, a lo que añade otros elementos como el empleo de diferentes sistemas de representación para enriquecer el análisis.

Nos centraremos en esta sección en estrategias específicas de resolución de problemas de proporcionalidad compuesta.

Estrategias para problemas de valor perdido en proporcionalidad compuesta.

Bosch (1994, cap. 10-11), bajo el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, estudia la proporcionalidad desde un enfoque algebraico-funcional y analiza el tratamiento de la proporcionalidad compuesta dado en distintos textos antiguos. En su disertación identifica cuatro estrategias propias de resolución de problemas de valor perdido en situaciones compuestas que denomina: método de las proporciones, reducción a la unidad, reducción de la regla de tres compuesta a la simple, y método de causas y efectos. Explicaremos más adelante y con mayor detalle el método de proporciones y el de reducción a la unidad, al que denominaremos paso a paso pasando por la unidad, que suponen la generalización del método de proporciones (por razones internas) y de la estrategia funcional o de cálculo de la constante de proporcionalidad, respectivamente y que ya hemos establecido anteriormente para situaciones de proporcionalidad simple. Destacamos que los otros dos métodos encontrados por Bosch (1994) se sustentan en el concepto de amalgamación (definido en la sección II.2.2.6. Situaciones de proporcionalidad compuesta) que convierte una situación cualquiera de proporcionalidad compuesta en una situación de proporcionalidad simple. De hecho, el método de causas y efectos, reduce cualquier situación de proporcionalidad a una situación de proporcionalidad simple directa, incluso las situaciones de estructura $\mathbb{p} = (1,1, \dots, 1)$, es decir, aquellas con una relación del tipo

$$M_1 \cdot \dots \cdot M_n = cte.$$

Para ello se considera la magnitud producto $A = M_1 \cdot \dots \cdot M_n$ y B una magnitud que adquiere el valor constante 1 para traducir la anterior a la situación de proporcionalidad simple directa $A/B = cte$.

Martínez-Juste *et al*. (2014), teniendo en cuenta la clasificación de Bosch (1994), refinan las diferentes estrategias encontradas por Oller-Marcén (2012) a partir de un análisis de libros de texto, para la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta. Haciendo uso de la notación empleada en la presente memoria para describir las situaciones proporcionales, daremos una descripción detallada de los cinco métodos que describen Martínez-Juste *et al*. (2014). Las estrategias de resolución se basan principalmente en el siguiente hecho: dada una situación de proporcionalidad con una estructura multiplicativa $E_{\mathbb{p}}$ que relaciona las magnitudes $M_1, \dots, M_n$, y dos tuplas de valores relacionados para todas las magnitudes $\boldsymbol{a} = (a_1 : \dots : a_n)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1 : \dots : b_n)$ se tiene que

$$E_{\mathbb{p}}(\boldsymbol{a}) = E_{\mathbb{p}}(\boldsymbol{b}) = k$$

Para expresar las estrategias, cuando nos refiramos a problemas de valor perdido, supondremos que la variable independiente es la magnitud M_n y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $p_n = 1$.

Amalgamación: Esta estrategia tiene carácter general para cualquier problema de proporcionalidad compuesta, no siendo específica de los problemas de valor perdido. Se trata de reducir un problema de proporcionalidad compuesta a un problema de proporcionalidad simple, para, posteriormente, aplicar cualquier estrategia de resolución de proporcionalidad simple en el problema resultante. Si nos centramos en problemas de valor perdido, parece deseable que la amalgamación se realice entre las magnitudes independientes, es decir, generar la nueva magnitud,

$$M = \prod_{i=1}^{n-1} M_i^{p_i}$$

o su inversa, y traducir el problema de valor perdido a uno de proporcionalidad simple

$$(a_1 : \dots : a_n) \leftrightarrow (b_1 : \dots : b_{n-1} : x) \quad \Longrightarrow \quad \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^{p_i} : a_n\right) \leftrightarrow \left(\prod_{i=1}^{n-1} b_i^{p_i} : x\right).$$

Sin embargo, la anterior, no es la única posibilidad de amalgamación. De hecho, el método de causas y efectos descrito por Bosch (1994) se sustenta en amalgamaciones por producto. Como describimos en la sección II.2.2.6. Situaciones de proporcionalidad compuesta, si tomamos I_+ el conjunto de índices para los que su correspondiente coordenada de $\mathbb{p}$ es 1, y llamamos I_- a su complementario, podemos amalgamar por producto generando las magnitudes:

$$M_{I_+} = \prod_{i \in I_+} M_i \qquad M_{I_-} = \prod_{i \in I_-} M_i$$

De esta forma, se traduce la estructura multiplicativa compuesta a una simple (directa).

$$E_{\mathbb{p}}(M_1, \dots, M_n) = E_{(-1,1)}\left(M_{I_-}, M_{I_+}\right) = \frac{M_{I_+}}{M_{I_-}} = k$$

Paso a paso pasando por la unidad o *reducción a la unidad:* Partiendo de $(a_1 : \dots : a_n)$ se construyen sucesivamente tuplas de valores relacionados de forma que en cada paso aparece el valor 1 para una de las variables independientes modificándose el valor para la variable dependiente y manteniéndose fijo el valor del resto de magnitudes. Es decir:

$$(a_1 : \dots : a_n) \leftrightarrow (1 : a_2 : \dots : a_{n-1} : r_1) \leftrightarrow (1 : 1 : a_3 : \dots : a_{n-1} : r_2) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (1 : \dots : 1 : r_{n-1})$$

Nótese que, de hecho, mediante este procedimiento se llega a $r_{n-1} = k$, es decir, se calcula la constante de proporcionalidad. Además, los valores r_i se calculan mediante el proceso

$$r_i = r_{i-1} \cdot a_i^{p_i} \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Definiendo $r_0 = a_1$ y teniendo en cuenta que hemos considerado $p_n = 1$. Notemos que el signo de p_i determina la relación de proporcionalidad entre M_i y la variable dependiente. Es decir, en cada paso, se resuelve un problema de valor perdido de proporcionalidad simple de la forma:

$$(a_i : r_{i-1}) \leftrightarrow (1 : r_i)$$

Dicho problema de valor perdido se realiza en una situación inversa si $p_i = 1$ y en una directa si $p_i = -1$. Notemos, además, que el resultado del proceso anterior es independiente del orden en el que "reduzcamos a la unidad" cada una de las variables independientes.

Una vez se llega a la tupla $(1: \dots : 1: k)$ se completa el proceso hasta llegar a la tupla $(b_1: \dots : b_{n-1}: x)$, procediendo de forma similar a la anterior

$$(1: \dots : 1: k) \leftrightarrow (b_1: 1: \dots : 1: s_1) \leftrightarrow (b_1: b_2: 1: \dots : 1: s_2) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (b_1: \dots : b_{n-1}: s_{n-1})$$

En este caso, $s_{n-1} = x$, es el valor pedido. Los valores intermedios s_i se calculan de forma recursiva teniendo en cuenta la relación de proporcionalidad entre las magnitudes independientes y la magnitud dependiente, como resultado de resolver un problema de valor perdido entre dichas magnitudes.

$$(1: s_{i-1}) \leftrightarrow (b_i: s_i) \implies s_i = s_{i-1} \cdot b_i^{-p_i} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Donde $s_0 = k$. Como antes, el problema simple se realiza en una situación inversa si $p_i = 1$ y en una directa si $p_i = -1$. Además, el orden en el que trabajemos con las magnitudes independientes es irrelevante.

Los procesos anteriores proporcionan una estrategia algorítmica con $2(n-1)$ pasos como máximo, en la que, atendiendo a las relaciones de proporcionalidad simple de cada magnitud independiente con la magnitud dependiente, se calcula el valor de la cantidad desconocida previo cálculo de la constante de proporcionalidad. Cabe destacar que, en cada paso, puede emplearse cualquier técnica de proporcionalidad simple de las establecidas en las secciones anteriores.

Paso a paso sin pasar por la unidad: Partiendo de $(a_1: \dots : a_n)$ se construyen sucesivamente tuplas de valores relacionados de forma que en cada paso aparece el valor b_i para una de las variables independientes modificándose el valor para la variable dependiente y manteniéndose fijo el valor del resto de magnitudes. Es decir:

$$(a_1: \dots : a_n) \leftrightarrow (b_1: a_2: \dots : a_{n-1}: r_1) \leftrightarrow (b_1: b_2: a_3: \dots : a_{n-1}: r_2) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (b_1: \dots : b_{n-1}: r_{n-1})$$

Mediante este procedimiento se llega a $r_{n-1} = x$, es decir, se calcula el valor solicitado. Los valores r_i se construyen mediante la resolución de problemas de valor perdido de proporcionalidad simple entre la variable dependiente y la variable independiente considerada en cada paso:

$$(a_i: r_{i-1}) \leftrightarrow (b_i: r_i) \implies r_i = r_{i-1} \cdot a_i^{p_i} \cdot b_i^{-p_i} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Se toma $r_0 = a_n$ y como antes, el orden en el que trabajemos con las magnitudes independientes es irrelevante. Se obtiene así una estrategia algorítmica con $n-1$ pasos como máximo, en la que durante el procedimiento no se calcula la constante de proporcionalidad.

Proporciones: Este método consiste en establecer la siguiente proporción elaborada a partir de las razones internas:

$$\frac{x}{a_n} = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^{-p_i},$$

alegando la relación de proporcionalidad existente entre las variables independientes y la variable dependiente (relación directa $p_i = -1$, relación inversa $p_i = 1$). La proporción anterior se sustenta en la igualdad:

$$E_{\mathbb{p}}(a_1 : \dots : a_n) = E_{\mathbb{p}}(b_1 : \dots : b_{n-1} : x)$$

Nótese que, si la relación es de proporcionalidad directa, como $p_i = -1$ la razón interna $\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^{-p_i}$ tiene el valor para la segunda tupla en el numerador y el valor para la primera en el denominador, al igual que la razón $\frac{x}{a_n}$. Mientras que, si la relación de proporcionalidad es inversa, se invierte el sentido de la razón, por tanto, en la proporción anterior los términos de la razón interna de la variable independiente con relación inversa con la dependiente aparecen "invertidos".

Una vez establecida la proporción, se calcula el valor de la cantidad desconocida x utilizando propiedades de las proporciones o mediante razonamientos algebraicos.

Uso de una fórmula: Consiste en establecer de forma directa alguna fórmula algebraicamente equivalente a la siguiente:

$$x = a_n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^{-p_i},$$

es decir, se proporciona una fórmula que permite calcular de forma directa el valor desconocido.

Las tres primeras estrategias presentadas (amalgamación, paso a paso pasando por la unidad, paso a paso sin pasar por la unidad) transforman el problema en otro, u otros, de proporcionalidad simple. Además, las dos últimas estrategias no necesitan de otras de proporcionalidad simple para problemas de valor perdido. En cualquier caso, en las cinco estrategias, el resolutor debe analizar el tipo de relación de proporcionalidad existente entre las magnitudes involucradas.

Estrategias para problemas de comparación en proporcionalidad compuesta.

Para problemas de comparación cuantitativa, no encontramos en la literatura intentos de sistematizar estrategias de resolución en proporcionalidad compuesta. Ya hemos mencionado que la estrategia de amalgamación no es exclusiva de los problemas de valor perdido y puede aplicarse como estrategia de resolución para problemas de comparación en situaciones de proporcionalidad compuesta. En este caso, al no tener una magnitud privilegiada, no hay una amalgamación preferente[30]. La estrategia de amalgamación consistirá en traducir la situación compuesta a una simple directa o inversa. Considerando $I \subset \{1, \dots, n\}$ un subconjunto de índices y J el subconjunto de índices complementario se construyen nuevas magnitudes mediante productos y cocientes de magnitudes:

$$M_I = \prod_{i \in I} M_i^{p_i} \quad \text{y} \quad M_J = \prod_{j \in J} M_j^{p_j} \quad \text{o} \quad M_{J^-} = \prod_{j \in J} M_j^{-p_j}$$

De forma que se puede considerar la situación simple inversa $M_I \cdot M_J = k$ o la simple directa $M_I / M_J = k$. Y un problema de comparación en el que los datos fueran las tuplas de valores relacionados $(a_1 : \dots : a_n)$, $(b_1 : \dots : b_n)$ podría traducirse a uno de los dos esquemas siguientes (según consideremos M_J o M_{J^-}):

$$\left(\prod_{i \in I} a_i^{p_i} : \prod_{j \in J} a_j^{p_j} \right) \sim \left(\prod_{i \in I} b_i^{p_i} : \prod_{j \in J} b_j^{p_j} \right) \quad \left(E_{(1,1)}(M_I, M_J) = M_I \cdot M_J = k \right)$$

$$\left(\prod_{i \in I} a_i^{p_i} : \prod_{j \in J} a_j^{-p_j} \right) \sim \left(\prod_{i \in I} b_i^{p_i} : \prod_{j \in J} b_j^{-p_j} \right) \quad \left(E_{(1,-1)}(M_I, M_{J^-}) = \frac{M_I}{M_{J^-}} = k \right)$$

Además, podemos generalizar las dos estrategias presentadas anteriormente para proporcionalidad simple.

La estrategia funcional o mediante el *cálculo de la constante de proporcionalidad* para problemas de comparación, consiste en calcular $k_1 = E_{\mathbb{p}}(\boldsymbol{a})$ y $k_2 = E_{\mathbb{p}}(\boldsymbol{b})$ y comparar los valores obtenidos.

Una estrategia escalar para problemas de comparación consistiría en calcular la tupla formada por las razones internas o comparaciones multiplicativas para cada magnitud $\boldsymbol{c} = \left(\frac{a_1}{b_1} : \dots : \frac{a_n}{b_n} \right)$ y considerar la siguiente equivalencia

$$k_1 \geq k_2 \quad \Leftrightarrow \quad E_{\mathbb{p}}(\boldsymbol{c}) \geq 1\,,$$

que se sustenta en el hecho siguiente:

$$\frac{E_{\mathbb{p}}(\boldsymbol{a})}{E_{\mathbb{p}}(\boldsymbol{b})} = E_{\mathbb{p}}(\boldsymbol{c}).$$

[30] No hay una preferencia teniendo en cuenta la estructura multiplicativa de la situación, sin embargo, en problemas contextualizados la mayor o menor dificultad para dotar de significado a los productos y cocientes de las magnitudes involucradas si genera amalgamaciones preferentes.

Posteriormente (sección II.3.2. Actuaciones de los alumnos en tareas de proporcionalidad), incluiremos una estrategia empleada ocasionalmente por alumnos que no han recibido instrucción previa en este tipo de problemas y sí en problemas de valor perdido.

II.2.4.7. Repartos proporcionales

Como se observó en la sección II.2.3. , las situaciones de repartos proporcionales son un contexto clásico de problemas de proporcionalidad (Gómez, 1999; Oller-Marcén, 2012). Sin embargo, como apuntan diferentes autores (Antequera & Espinel, 2011; Peled & Balacheff, 2011; Peled & Bassan-Cincinatus, 2005; Sánchez, 2013, 2014), en un contexto de reparto de una cantidad de magnitud a partir de cantidades de otra magnitud, además del modelo proporcional que describiremos en esta sección, existen otros posibles modelos de reparto, no necesariamente proporcionales. Estudiaremos más en detalle estos diferentes modelos para un mismo problema de repartos en la sección II.3.2. Actuaciones de los alumnos en tareas de proporcionalidad.

Fijando el foco de atención en los problemas de reparto cuando éste se hace mediante un modelo proporcional podemos definir la estructura matemática de dichos problemas de la siguiente manera (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, & Oller-Marcén, 2018, 2019b):

Reparto directamente proporcional: Dada una cantidad K de una magnitud M_2 y un conjunto de pesos o cantidades de una magnitud M_1, $\{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ debemos encontrar una serie cantidades de la magnitud M_2, $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$, de forma que $k_1 + \cdots + k_p = K$ y para toda pareja de índices i, j se cumpla que

$$\frac{k_i}{k_j} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Reparto inversamente proporcional: Dada una cantidad K de una magnitud M_2 y dado un conjunto de pesos o cantidades de una magnitud M_1, $\{w_1, w_2, \dots, w_p\}$ debemos encontrar una serie cantidades de la magnitud M_2, $\{k_1, k_2, \dots, k_p\}$, de forma que $k_1 + \cdots + k_p = K$ y para toda pareja de índices i, j se cumpla que

$$\frac{k_i}{k_j} = \frac{w_j}{w_i}.$$

Podemos ejemplificar este contexto con algunos de los siguientes problemas extraídos de traducciones del Papiro de Rhind y del Libro de los Nueve Capítulos:

- "*Supongamos que un escriba te dice: cuatro capataces, cuyas cuadrillas consisten en 12, 8, 6 y 4 hombres, respectivamente, han ganado 100 gran hekat cuádruples de grano. ¿Cuánto grano debe recibir cada capataz?*". (Chace, 1979, p. 104)
- "*Hay cinco oficiales de distintos rangos: Dafu, Bugeng, Zanniao, Shangzao y Gongshi. Deben pagar un total de 100 monedas. Si el pago debe compartirse de acuerdo con sus rangos, el de mayor rango paga menos y el de rango más bajo paga más, Di: ¿cuánto debe pagar cada uno?*". (Shen *et al*., 1999, p. 166)

Donde el primero de los problemas puede modelizarse como un reparto directamente proporcional y el segundo mediante un reparto inversamente proporcional (el texto reparte las ganancias de forma inversamente proporcional a los rangos otorgando pesos a dichos rangos según la graduación).

En las definiciones anteriores, entendiendo las cantidades $k_1, k_2, \dots, k_p, K$ y los pesos $w_1, w_2, \dots, w_p$ como cantidades de dos magnitudes diferenciadas, se hace uso de las razones internas para caracterizar el tipo de reparto. Podría optarse por una caracterización por razones externas (para el caso directo) o constantes de proporcionalidad, modificando las anteriores definiciones para exigir $k_i/w_i = cte$ en el caso directo y $k_i \cdot w_i = cte$ en el caso inverso. De esta manera aparece de forma explícita la noción de constante de proporcionalidad (del reparto). Una definición similar a la anterior usando razones externas, pero sin explicitar la constante de proporcionalidad, es la dada por Sánchez (2013) para caracterizar un reparto directamente proporcional como aquel en el que se cumple:

$$\frac{k_1}{w_1} = \frac{k_2}{w_2} = \cdots = \frac{k_p}{w_p} = \frac{k_1 + \cdots + k_p}{w_1 + \cdots + w_p} = \frac{K}{W}.$$

En la anterior expresión hemos denotado por W a la suma de los pesos.

Desde el punto de vista de la estructura proporcional, estas situaciones son casos particulares de las parejas de exposiciones definidas por Freudenthal (1983) y están íntimamente relacionadas con las estructuras parte-parte-todo (Martínez-Juste *et al.*, 2018, 2019b). Los individuos que son objeto del reparto forman el conjunto $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ y se consideran dos espacios de medida (ω_1, M_1) y (ω_2, M_2) sobre dicho conjunto. En algunos casos las cantidades de la magnitud a repartir y las de la magnitud según la que se reparte pueden hacer referencia a conjuntos diferentes por lo que tendríamos una pareja de exposiciones $(\Omega_1, \omega_1, M_1)$ y $(\Omega_2, \omega_2, M_2)$). Las cantidades asignadas a los individuos en el primer espacio de medida M_1 (magnitud según la cual se reparte) son lo que hemos denominado pesos en las definiciones anteriores, es decir, $\omega_1(x_i) = w_i$, el problema consiste en determinar las cantidades $\omega_2(x_i) = k_i$ de la magnitud a repartir M_2, de forma que $\sum \omega_2(x_i) = K$ y que la aplicación asociada $f: M_1 \longrightarrow M_2$, dada por $f\big(\omega_1(x_i)\big) = \omega_2(x_i)$ sea de proporcionalidad directa o inversa, según el caso. Esta situación podría caracterizarse mediante un diagrama como el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[dr, "\omega_2"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
M_1 \arrow[rr, "f"'] & & M_2
\end{tikzcd}$$

Los trabajos que abordan diferentes métodos de resolución para estos problemas suelen centrarse en los repartos directamente proporcionales (Gómez, 1999; Sánchez, 2013) ya que tradicionalmente los repartos inversos se abordan reduciendo estos problemas a un reparto directamente proporcional (Oller-Marcén, 2012).

Oller-Marcén (2012) tras el estudio de textos antiguos clasifica los diferentes métodos de resolución detectados distinguiendo si se procede de forma aritmética dotando de significado a las operaciones, si se utilizan reglas de tres, si se usan propiedades de las series de razones iguales, si se describe un procedimiento algorítmico o si se resuelve el problema de forma algebraica.

Gómez (1999) también en el estudio de manuales escolares antiguos y actuales describe hasta ocho técnicas de resolución diferentes:

- Método de la regla de tres. Que consiste en aplicar un algoritmo de productos cruzados con los datos iniciales para obtener cada uno de los datos solicitados.
- Método de la tasa, método de la tasa inversa, método de la reducción a la unidad: Que consiste en calcular la razón externa entre la cantidad total según la que se reparte y la cantidad total a repartir, o su inversa. Con nuestra terminología consistiría en calcular alguna de las dos razones externas (o constantes de proporcionalidad) de la situación $f: M_1 \rightarrow M_2$ (o su inversa). Posteriormente se razona que dicha razón externa es constante y por tanto se calculan las cantidades desconocidas a partir de los pesos con los que se relacionan y la razón anterior. La distinción que hace Gómez (1999) entre método de la tasa y de la reducción a la unidad se centra en la interpretación que se otorga a las razones externas empleadas en la situación. En nuestra notación caracterizamos este tipo de resolución como que se resuelven p problemas de valor perdido, $(W: K) \leftrightarrow (w_i: k_i)$ mediante una estrategia funcional por razón externa.
- Método de la razón y método de la razón inversa: Que consiste en calcular la razón entre el peso de un individuo y el peso total (o su inversa), es decir, una razón interna parte-todo. Y argumentar que dicha razón es igual a la formada por la cantidad que recibe en el reparto y la cantidad total a repartir. En nuestra notación, se resuelven los mismo p problemas de valor perdido anteriores, $(W: K) \leftrightarrow (w_i: k_i)$ pero mediante una estrategia escalar por razón interna.
- Método algebraico de la tasa y método algebraico de las razones: Consiste en plantear una resolución algebraica mediante un sistema de ecuaciones. En nuestra notación, este planteamiento vendría de considerar las relaciones parte-parte $(w_i: k_i) \leftrightarrow (w_j: k_j)$, de forma que en cada relación hay dos datos desconocidos (k_iy k_j) y, añadir la condición de aditividad de las cantidades a recibir, $k_1 + \cdots + k_p = K$. La diferencia entre método de tasa y método de razón vendría dada según si la relación $(w_i: k_i) \leftrightarrow (w_j: k_j)$ se trabaja mediante una proporción de razones externas o una de razones internas, respectivamente.

El autor, como vemos, distingue si se usan razones externas o internas en el razonamiento (razones y tasas en su terminología), considerando como diferentes dos métodos si plantean las razones de forma inversa. Además, como Oller-Marcén (2012) distingue entre métodos aritméticos y algebraicos y basados en la regla de tres. También Sánchez (2013) plantea una clasificación de las técnicas de resolución que puede asimilarse, en su mayoría, a los de los anteriores trabajos y en la que además incluye como técnica específica la utilización de diferentes sistemas de representación.

Un análisis de los métodos detectados por estos autores arroja que los métodos algebraicos son utilizados, principalmente, junto a planteamientos parte-parte ya que implican el manejo de dos cantidades desconocidas, k_i y k_j.

$$(w_i: k_i) \leftrightarrow (w_j: k_j)$$

Por ejemplo, un problema en el que hubiera que repartir 100 € en partes directamente proporcionales a 13, 5 y 2, podría modelizarse mediante el sistema de ecuaciones que presentamos a continuación, en donde se han empleado razones externas entre los pesos y las cantidades a recibir por cada individuo y la aditividad de las cantidades a percibir (método algebraico de tasas según la nomenclatura de Gómez (1999)).

$$\begin{cases} \dfrac{x}{13} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{2} \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Que puede transformarse en una ecuación lineal con una incógnita, siendo esta la constante de proporcionalidad del problema,

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2} = r, \qquad x + y + z = 100 \qquad \Rightarrow \qquad 13r + 5r + 2r = 100\,.$$

Por otro lado, las resoluciones aritméticas suelen hacer uso de las relaciones parte-todo que solo involucran a una cantidad desconocida y, por tanto, el reparto proporcional puede resolverse mediante p problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa (uno para hallar cada cantidad desconocida k_i)

$$(W: K) \leftrightarrow (w_i: k_i)$$

En el ejemplo anterior, esta estrategia pasaría por resolver los siguientes tres problemas de valor perdido en una situación de proporcionalidad simple directa

$$(20: 100) \leftrightarrow (13: x), \qquad (20: 100) \leftrightarrow (5: y), \qquad (20: 100) \leftrightarrow (2: z),$$

Por tanto, las estrategias de resolución de problemas de valor perdido en proporcionalidad simple directa darían un refinamiento de la técnica empleada en la resolución.

Notemos que, para establecer la relación parte-todo se hace uso de la linealidad de la función de proporcionalidad directa ya que la cantidad a repartir $K = k_1 + \cdots + k_p$, es la cantidad de la magnitud M_2 relacionada por f con la cantidad $\sum w_i$ de la magnitud M_1, es decir, $f(\sum w_i) = \sum f(w_i) = \sum k_i = K$ (en el ejemplo anterior, para formar la pareja de datos homólogos correspondiente a la cantidad a repartir, 100 €, debemos sumar los pesos según los que repartimos, $13 + 5 + 2 = 20$). De esta forma, los datos proporcionados en los enunciados habituales de las tareas de repartos directamente proporcionales proporcionan la constante de proporcionalidad del reparto mediante la siguiente razón externa:

$$\frac{K}{w_1 + \cdots + w_p} = \frac{K}{W}$$

La diferente naturaleza de las relaciones inversas provoca cambios sustanciales en las anteriores consideraciones cuando estudiamos las estrategias de resolución para problemas modelizables mediante repartos inversamente proporcionales.

Los métodos basados en la relación parte-parte en repartos directos pueden traducirse a repartos inversos cambiando la relación de proporcionalidad, es decir, establecer las siguientes ecuaciones dadas por parejas de cantidades relacionadas mediante una relación de proporcionalidad inversa:

$$(w_i : k_i) \leftrightarrow (w_j : k_j)$$

Por ejemplo, un problema en el que hubiera que repartir 100 € en partes inversamente proporcionales a 13, 5 y 2, podría modelizarse mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 13x = 5y = 2z \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Que puede transformarse en una ecuación lineal con una incógnita, siendo esta la constante de proporcionalidad del problema,

$$13x = 5y = 2z = r, \qquad x + y + z = 100 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{r}{13} + \frac{r}{5} + \frac{r}{2} = 100\,.$$

Pero, un método análogo al de la relación parte-todo en repartos directos, requiere estudiar cuál es la cantidad de la magnitud M_1 relacionada con la cantidad a repartir K. Dicha cantidad se corresponde con el valor

$$\frac{1}{w_1^{-1} + \cdots + w_p^{-1}}$$

Es decir, la constante de proporcionalidad en un reparto inversamente proporcional viene dada por la siguiente expresión:

$$K \cdot \frac{1}{w_1^{-1} + \cdots + w_p^{-1}} = \frac{K}{w_1^{-1} + \cdots + w_p^{-1}}$$

Aunque dicho valor, dimensionalmente, tiene las unidades de las cantidades de la magnitud M_1, es complicado, en general, dotar de significado aritmético al inverso de la suma de los inversos de ciertas cantidades. Probablemente, esta es la razón por la que tradicionalmente, los métodos de resolución de repartos inversamente proporcionales han consistido en alegar que, para repartir de forma inversamente proporcional a los valores de una magnitud, hay que repartir de forma directa a los inversos de dichos valores (Martínez-Juste *et al.*, 2019b) y utilizar, sin explicitar el significado de las operaciones realizadas y los datos obtenidos, cualquiera de los métodos para este tipo de repartos.

Además de las estrategias habituales empleadas en los libros de texto, Gairín y Oller-Marcén (2011) proponen una estrategia de resolución aritmética que se basa en una primera etapa en las relaciones parte-parte y, finalmente, en las relaciones parte-todo. La estrategia pasa por normalizar las cantidades repartidas suponiendo que a uno de los individuos se le concede la cantidad $1\ u \in M_2$ y calculando la cantidad de M_2 que debería repartirse al resto de los participantes comparando con este individuo que se ha destacado para hacer un reparto equivalente al que se propone en el enunciado. Así, suponiendo que el primer individuo tiene peso inicial w_1, se trataría de resolver los $p-1$ problemas de valor perdido (de proporcionalidad directa en el caso de reparto directo y de proporcionalidad inversa en el caso de reparto inverso) siguientes:

$$(w_1 : 1) \leftrightarrow (w_j : k_j^*)$$

Las cantidades k_j^* se interpretarían como la cantidad que recibiría el individuo j si el primer individuo recibiera una unidad en el reparto. Una vez, calculadas estas cantidades, se interpreta[31] la cantidad $S = 1 + k_2^* + \cdots + k_p^*$, como la cantidad de la magnitud M_2 que debería repartirse para que cada individuo recibiera las cantidades anteriores. El siguiente paso supone resolver los siguientes problemas de valor perdido centrados en las relaciones parte-todo entre las situaciones de proporcionalidad directa (tanto en el caso del reparto directo como en el caso del reparto inverso esta relación sería directa) que se generan en la magnitud M_2 al considerar diferentes repartos equivalentes:

$$(k_j^* : S) \leftrightarrow (k_j : K)$$

En el ejemplo que hemos utilizado anteriormente, en el que queríamos repartir 100 € en partes directamente proporcionales a 13, 5 y 2, pensaríamos en hacer un reparto equivalente en el que el primer individuo recibiera 1 €. Como es un reparto directo, que debe conservar las razones entre las cantidades de los diferentes individuos, calcularíamos en un segundo lugar las cantidades k_2^* y k_3^* correspondientes al segundo y tercer individuo mediante los problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa siguientes:

$$(13 : 1) \leftrightarrow (5 : k_2^*) \qquad (13 : 1) \leftrightarrow (2 : k_3^*)$$

Así, en ese supuesto en el que el primer individuo recibiera 1 €, el segundo recibiría $\frac{5}{13}$ € y el tercero $\frac{2}{13}$€. En total, estaríamos repartiendo $S = \frac{20}{13}$€. A continuación, se resolverían los problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa siguientes para terminar el problema:

$$\left(1 : \frac{20}{13}\right) \leftrightarrow (k_1 : 100) \qquad \left(\frac{5}{13} : \frac{20}{13}\right) \leftrightarrow (k_2 : 100) \qquad \left(\frac{2}{13} : \frac{20}{13}\right) \leftrightarrow (k_3 : 100)$$

Notar, que como $13, 5$ y 2 son coprimos, en el caso de buscar cantidades enteras tras la primera etapa de resolución, hubiéramos vuelto a la situación inicial. Por lo que, en un reparto directamente proporcional, el método anterior se reduce a una normalización de los pesos. La

[31] En realidad, en el trabajo de Oller-Marcén (2012), tras el cálculo de las cantidades k_j^*, que pueden ser racionales positivos, se propone realizar una normalización que haga que cada una de las cantidades repartidas sea entera, multiplicando las cantidades $1, k_2^*, \cdots, k_p^*$ por un entero adecuado.

potencia de esta forma de proceder es que genera un procedimiento aritmético totalmente análogo en el caso de repartos inversamente proporcionales con la única diferencia de que, en la primera etapa, los problemas de valor perdido se realizan dentro de una situación de proporcionalidad simple inversa.

II.2.4.8. Mezclas

Los problemas de mezclas no tienen un enunciado prototípico y nos referimos con ellos al contexto de problemas que hemos introducido en la sección II.2.3. Fenómenos organizados por la proporcionalidad. Oller-Marcén (2012) ejemplifica este contexto con algunos de los siguientes problemas extraídos de traducciones del Libro de los Nueve Capítulos y del Liber Abaci:

- "*En 1 dou de laca se vierten 3 dou de agua. Un cazo tiene una capacidad de 2 dou 7 sheng. Pregunta: ¿cuánta laca y cuánta agua sobran?*" (Cullen, 2004, p. 59)
- "*Cierto hombre posee 7 libras de plata con la cuales quiere hacer monedas con 2 onzas de plata por libra y quiere saber cuál será el peso total de la aleación, así como la cantidad de cobre que debe añadir*." (Sigler, 2002, p. 228)
- "*Cierto hombre desea fabricar una campana usando una aleación de cinco metales. Un quintal de uno de esos metales cuesta 16 libras, de otro, 18 libras, del tercero, 20 libras; del cuarto, 27 y del quinto, 31 libras. La campana ha de pesar 775 rollos y costar 162 ¾ libras y se pretende averiguar qué cantidad de cada metal ha de utilizar.*" (Sigler, 2002, p. 255)

Este último tipo de problema en el que se introduce el valor (unitario o total) o la pureza de los componentes de la mezcla suponen los ejemplos prototípicos de problemas de mezclas que han tratado tradicionalmente los libros de texto (Gómez, 2015; Oller-Marcén & Gairín, 2016). Gómez (2015) clasifica estos problemas de mezclas, o de aligación en su nomenclatura, en problemas de *aligación medial* y problemas de *aligación alternada*. En los primeros el enunciado proporciona la pureza o valor unitario de los subproductos y se solicita la pureza o precio unitario del total formado por unas determinadas cantidades de los subproductos. En los problemas de aligación alternada se solicita información sobre uno de los subproductos dando la información necesaria de los demás subproductos y del total de la mezcla.

En su lectura analítica Gómez (2015) identifica la relación característica de los problemas de aligación y la utiliza para caracterizar los procesos de resolución de los diferentes tipos de problemas de aligación. Si se mezclan dos cantidades, A y B, de un mismo producto con dos purezas (o valores unitarios) diferentes p y q para obtener un total de cantidad de mezcla $A + B$ con una pureza (o valor unitario) final P_m, esta relación viene dada por la expresión:

$$Ap + Bq = (A + B)P_m$$

Aunque, como apunta Oller-Marcén (2012, p. 167) "en la actualidad, este tipo de situaciones apenas poseen el interés que, desde un punto de vista práctico, tuvieron en su momento" y pueden resolverse teniendo en cuenta la aditividad de las cantidades asociadas a los subproductos y el concepto de precio medio

Sin embargo, como hemos observado en los dos primeros problemas con los que hemos ejemplificado esta categoría, bajo el nombre de problemas de mezclas, también aparecen situaciones en las que solo se pone en juego la idea de aditividad de varios subproductos para formar un producto final. Esta idea es la que Fernández (2009) propone como característica de los contextos de mezclas modelizados por la subestructura de composiciones y parejas de composiciones de la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983). De hecho, para ejemplificar un fenómeno modelizado por una pareja de composiciones utiliza la siguiente situación:

- "*Consideremos el caso en que 30 kg de la aleación Ω_1 (bronce) están formados por 20 kg de cobre y 10 de zinc y que 65 kg de la otra aleación Ω_2 (bronce) están formados por 40 kg de cobre y 25 kg de zinc.*" (Fernández, 2009, p. 43)

Puede estudiarse entonces si dos aleaciones son iguales (tienen la misma razón de un cierto metal) o calcular la cantidad de los subproductos necesaria para formar una cantidad de aleación dada que mantenga las razones de los metales. Este tipo de situaciones de mezcla o situaciones de subproductos aditivos juegan un papel importante en diferentes situaciones de proporcionalidad por lo que es interesante estudiar su estructura en detalle.

Para Fernández (2009), cada una de las aleaciones (mezclas) forma una composición, siendo Ω_1 el conjunto formado por los subproductos zinc y cobre (que debería contener también al producto total) y análogamente para el conjunto Ω_2. Las aplicaciones ω_i son las que a cada elemento de Ω_i le asocian su masa, es decir, tanto M_1 como M_2 son magnitudes de masa, en la primera y segunda aleación respectivamente. Observemos que si consideramos x_1 la materia de zinc en la aleación, x_2 la de cobre y x_T la de la aleación, es claro que $x_1 \cup x_2 = x_3$ (de forma disjunta) y la aditividad de la magnitud masa genera la relación

$$\omega_i(x_1) + \omega_i(x_2) = \omega_i(x_T)$$

Así, considerando la aplicación j que hace corresponder subproductos (y producto total) de la misma materia, se induce la aplicación $f: M_1 \longrightarrow M_2$, definida por $f\big(\omega_1(x_i)\big) = \omega_2(x_i)$. Es decir, la aplicación que relaciona las masas de los productos de la misma especie.

$$\begin{array}{ccc} \Omega_1 & \xrightarrow{j} & \Omega_2 \\ \omega_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \omega_2 \\ M_1 & \xrightarrow[f]{} & M_2 \end{array}$$

Con la anterior estructura, se pueden poner en juego:

- Razones parte-parte $\omega_i(x_1)/\omega_i(x_2)$, o sus inversas, es decir, las razones entre subproductos en cada una de las mezclas consideradas.
- Razones parte-todo en cada una de las mezclas consideradas, $\omega_i(x_1)/\omega_i(x_T)$, o sus inversas, es decir, las razones entre la masa de un subproducto y la de la mezcla.
- Razones entre productos iguales en las diferentes mezclas, $\omega_1(x_i)/\omega_2(x_i)$.

Notemos que existirá una relación de proporcionalidad entre las dos mezclas si la función f es de proporcionalidad directa. Por ejemplo, en las aleaciones del ejemplo extraído de Fernández, la aplicación f asigna a la masa de cobre en la primera aleación, $20\ kg$, los $40\ kg$ de cobre de la segunda aleación, y a los $10\ kg$ de zinc de la primera, los $25\ kg$ de zinc de la segunda, por lo que no habría relación de proporcionalidad entre ambas mezclas (son mezclas diferentes).

El esquema anterior, generalizando a un número de subproductos cualquiera, caracteriza la estructura de lo que denominaremos una situación de mezclas. Es decir, tendremos que Ω está conformado por los subproductos $x_1, \dots, x_n$ y el producto total o mezcla x_T, de forma que la unión disjunta de los subproductos genere la mezcla $x_1 \cup \dots \cup x_n = x_T$, $x_i \cap x_j = \emptyset$ y la magnitud M asociada sea una magnitud aditiva, por lo que

$$\omega(x_1) + \cdots + \omega(x_n) = \omega(x_T).$$

Como se trató anteriormente (sección II.2.2. Estructura conceptual y sistemas de representación), en las situaciones en las que se trabaja con una única magnitud la discusión de qué es una razón externa o interna, está abierta y, en todo caso, ligada al establecimiento de una función de proporcionalidad. En el enfoque anterior, la función de proporcionalidad sería la definida entre subproductos de dos aleaciones. Por ejemplo, si Ω_2 tuviera el doble de todos los subproductos que Ω_1 la función de proporcionalidad inducida f tendría la expresión $f(x) = 2x$, siendo 2 la constante de proporcionalidad, razón externa. Las razones internas darían cuenta de la composición de la mezcla, mientras que la razón externa daría cuenta del tamaño relativo de las mezclas (de la misma composición) consideradas. Considerar otra u otras mezclas con los subproductos a la misma razón implicaría considerar funciones de proporcionalidad diferentes, aspecto, que desde nuestro punto de vista no es deseable. La caracterización de una mezcla viene dada por las razones entre subproductos y el total de la mezcla (o entre los diferentes subproductos) es decir, por la estructura parte-parte-todo. La existencia de mezclas iguales supone la conservación de las razones en dicha estructura. Parece pues deseable considerar una estructura en la que la constante de la función de proporcionalidad considerada codifique esta información.

Para un problema de mezclas con dos subproductos como el ejemplificado anteriormente, consideraremos M_1 la magnitud en la que medimos las cantidades del subproducto 1 en las diferentes mezclas, M_2 la magnitud en la que medimos las cantidades del subproducto 2 en las diferentes mezclas, y análogamente para M_T. En lenguaje de Freudenthal, estamos considerando una terna de exposiciones en la que los objetos del conjunto considerado son diferentes mezclas con los mismos subproductos. Asociadas a dichas magnitudes tendremos las aplicaciones $f_{T1}: M_T \longrightarrow M_1$, $f_{T2}: M_T \longrightarrow M_2$, $f_{12}: M_1 \longrightarrow M_2$, que asocian las cantidades de un subproducto (o del total de la mezcla) con las de otro subproducto de la misma mezcla, generando un diagrama conmutativo $f_{12} \circ f_{T1} = f_{T2}$, donde, además, queremos la aditividad entre subproductos de una misma mezcla luego $f_{T1}(x) + f_{T2}(x) = x$, es decir $f_{T1} + f_{T2} = id$. Si consideramos la familia de mezclas con la misma composición relativa debemos exigir que las aplicaciones anteriores sean de proporcionalidad directa Esto implica que si k_{T1} es la constante de proporcionalidad para f_{T1}, es decir, k_{T1} es la razón externa parte-todo que da cuenta de las unidades del subproducto 1 por unidad de mezcla, entonces inmediatamente

$$k_{T2} + k_{T1} = 1 \qquad k_{12} = \frac{k_{T2}}{k_{T1}},$$

donde, k_{T2} es la razón externa que expresa las unidades del subproducto 2 por unidad de mezcla y k_{12} expresa las unidades del subproducto 2 por unidad de subproducto 1. Dichas razones y sus inversas son las características de la mezcla, una mezcla con la misma composición relativa debe conservar esas tres razones externas. La anterior estructura es propia de cada mezcla e independiente de que, posteriormente, se trabaje con una igualdad o comparación de razones, o se quiera hacer un estudio funcional. Con esta estructura, una mezcla formada por el doble de cada subproducto mantiene las mismas razones externas y pueden establecerse razones internas con un factor escalar 2 entre los mismos subproductos en las dos mezclas.

El caso de n subproductos implicaría, que la relación entre las razones externas asociadas a cada función de proporcionalidad sería:

$$k_{T1} + \cdots + k_{T2} = 1 \qquad k_{ij} = \frac{k_{Tj}}{k_{Ti}}$$

Asociados a las situaciones de mezcla pueden plantearse problemas de las diferentes categorías para proporcionalidad simple directa, en concreto, las situaciones de igualdad y desigualdad de mezclas, consideradas por Fernández (2009), estarán asociadas a problemas de valor perdido y de comparación.

Ejemplifiquemos la anterior discusión con un problema de valor perdido que obedece a esta estructura: *Para 30 kg de una aleación de bronce hacen falta 20 kg de cobre y 10 kg de zinc, ¿Qué cantidades de zinc y cobre habrá que tomar para realizar 65 kg de bronce del mismo tipo?*

Consideraremos M_1, M_2 y M_T las masas de zinc, cobre y bronce respectivamente. La situación inicial dada por el enunciado "*Para 30 kg de una aleación de bronce hacen falta 20 kg de cobre y 10 kg de zinc*" genera funciones de proporcionalidad que asocian los subproductos entre sí y con el total de forma que se mantiene la composición relativa de la mezcla. Por ejemplo, $f_{T1}: M_T \longrightarrow M_1$, es la función de proporcionalidad directa que a cada masa de bronce le asigna la masa de cobre necesaria para que la aleación tenga $k_{T1} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}\ kg$ de cobre por cada kg de bronce. De la misma forma obtendríamos: $k_{T2} = \frac{1}{3}\ kg$ de zinc por cada kg de bronce o $k_{12} = \frac{1}{2}\ kg$ de zinc por cada kg de cobre.

Para esquematizar la estructura funcional asociada a las magnitudes en situaciones como la anterior en la memoria, utilizaremos notaciones similares a la siguiente:

$$M_T = M_1 + M_2 \quad M_1 = kM_T \quad M_2 = (1-k)M_T \quad M_2 = \frac{1-k}{k}M_1\,,$$

donde hemos expresado la relación de aditividad y las relaciones de proporcionalidad directa de cada subproducto con el total y entre subproductos a partir de una cualquiera de las razones.

Una vez establecida la estructura funcional que liga las magnitudes y conocida la estructura numérica del problema esquematizaremos los problemas de forma asimilar a la introducida para problemas de valor perdido y comparación en situaciones de proporcionalidad, por ejemplo, en el problema anterior escribiremos:

$$(30: 20 + 10) \leftrightarrow (65: x_1 + x_2),$$

que codifica, no solo la estructura numérica, también la relación aditiva de los subproductos respecto al total.

Las diferentes estrategias de resolución para este tipo de problemas podrán estudiarse a partir de lo establecido para problemas de proporcionalidad simple directa y teniendo en consideración la condición aditiva. Esta estructura aditiva permitirá distinguir el uso de estrategias parte-parte o estrategias parte-todo.

II.2.4.9. Porcentajes. Aumentos y disminuciones. Interés simple y compuesto

Como se ha comentado anteriormente, el porcentaje puede entenderse como una razón normalizada de una situación de proporcionalidad simple directa en la que una de las cantidades de relacionadas adquiere el valor 100. Con tal consideración, la estructura de los problemas de relacionados con porcentajes y sus estrategias de resolución pueden estudiarse a partir de lo ya mencionado en las secciones anteriores para situaciones de proporcionalidad directa. Sin embargo, como se comentó en la sección II.2.2.3. El concepto de porcentaje, como razón, el porcentaje tiene ciertas peculiaridades que sugieren un tratamiento específico (Parker & Leinhardt, 1995). Los diferentes problemas que abordaremos están íntimamente ligados a las aplicaciones prácticas más usuales que como se deduce del análisis histórico y epistemológico expuesto en este trabajo son, principalmente, situaciones mercantiles de compra-venta e intereses (Oller-Marcén, 2012; Parker & Leinhardt, 1995). No trataremos, por ejemplo, aspectos probabilísticos del porcentaje debido al propósito de este trabajo.

La clasificación de problemas de Cramer y Post (1993) para problemas de proporcionalidad simple puede adaptarse trivialmente al caso del porcentaje. Sin embargo, la mayoría de los trabajos de investigación y los libros de texto se centran en problemas de valor perdido. Dentro de estos problemas, los autores suelen considerar en una categoría diferente los problemas asociados con aumentos y disminuciones porcentuales de una cantidad de aquellos en los que el porcentaje compara el tamaño relativo de dos conjuntos. Hay que tener en cuenta, además, que en multitud de ocasiones los porcentajes aparecen ligados a situaciones de proporcionalidad con estructuras aditivas parte-parte-todo.

En general, los *problemas de valor perdido con porcentajes* se clasifican en tres categorías diferentes según la posición de la incógnita en el problema de valor perdido (Brown & Kinney, 1973; Dole, Cooper, Baturo & Conoplia, 1997; Oller-Marcén, 2012; Parker & Leinhardt, 1995). Los presentamos utilizando la terminología empleada por Dole (2000):

- *Tipo I* (cálculo directo, cálculo de porcentaje, cálculo de la parte conocido el total): Responden a problemas de la forma “calcula el p % de T”, siendo p y T cantidades conocidas. Su esquema como problema de valor perdido de una situación de proporcionalidad simple directa sería el siguiente:

$$(p: 100) \leftrightarrow (x: T)$$

- *Tipo II* (cálculo de la razón normalizada, cálculo del porciento): Responden a problemas de la forma "calcula qué porcentaje representa la cantidad P respecto de la cantidad T", siendo P y T cantidades conocidas. Su esquema como problema de valor perdido de una situación de proporcionalidad simple directa sería el siguiente:

$$(x: 100) \leftrightarrow (P: T)$$

- *Tipo III* (cálculo inverso, cálculo del total conocida la parte): Responden a problemas de la forma "calcula la cantidad de la que un p % es la cantidad P", siendo p y P cantidades conocidas. Su esquema como problema de valor perdido de una situación de proporcionalidad simple directa sería el siguiente:

$$(p: 100) \leftrightarrow (P: x)$$

Aunque hemos presentado la tipología anterior mediante una notación que sugiere una estructura parte-todo donde P representa la parte y T el todo o total, los problemas asociados con porcentajes no tienen por qué estar asociados a este tipo de estructuras. Por ejemplo, un problema como el siguiente correspondería a la tercera categoría de las que acabamos de establecer: "El azúcar que contiene el refresco A es el 80 % del azúcar que contiene el refresco B. Si en el refresco A hay 2 gr de azúcar, ¿cuánta azúcar hay en el refresco B?".

Como indican Parker y Leinhardt (1995) la clasificación anterior ha supuesto durante mucho tiempo la base para la resolución de problemas de porcentajes. El llamado 'método de los tres casos' suponía una resolución mediante fórmulas que el estudiante debía aprender para cada caso. Así el método se estructuraba en diferentes pasos: clasificar el problema en uno de los tipos anteriores, recordar la fórmula que le corresponde, identificar en el problema las diferentes cantidades que correspondían a los distintos elementos de la fórmula y realizar los cálculos correctamente.

Además de los diferentes tipos de problemas de valor perdido en porcentaje, diversos estudios destacan la introducción de *tareas de interpretación del porcentaje* para la posterior resolución de problemas basada en la relación del porcentaje con el concepto de razón en una situación de proporcionalidad simple directa (Lembke & Reys, 1994; Parker & Leinhardt, 1995).

La mayoría de los métodos recogidos en la literatura para la resolución de los problemas de porcentajes pueden traducirse a los métodos descritos en secciones anteriores para situaciones de proporcionalidad. Así por ejemplo Parker y Leinhardt (1995) describen el método de la ecuación (método algebraico basado en el planteamiento de la ecuación $\frac{p}{100} \cdot T = P$), el método de la fórmula, el método del análisis unitario (consiste en usar razones internas para averiguar la cantidad correspondiente a un 1 %) y el método de la proporción, también descrito por Brown y Kinney (1973). Lembke y Reys (1994), además de algunas estrategias de estimación y ensayo y error que abordaremos al tratar los aspectos cognitivos, añaden la estrategia de la razón en la que el resolutor especifica una interpretación del porcentaje como una cantidad de una magnitud que se corresponde con 100 unidades de otra y los métodos gráficos para apoyar los cálculos. Estos métodos gráficos, especialmente el uso del modelo de barras para porcentajes, *percent bars*, (ver

Figura II - 4) se describen ampliamente en el trabajo de Van Den Heuvel-Panhuizen (2003). Oller-Marcén (2012) analiza el uso de razones externas de forma que el resultado pueda obtenerse mediante el producto de una razón externa y uno de los datos del enunciado.

Los problemas de aumentos y disminuciones porcentuales, ligados a situaciones mercantiles e impuestos, involucran una estructura aditiva parte-parte-todo y la multiplicativa propia de las situaciones de proporcionalidad directa. Además, suelen poder esquematizarse mediante una línea temporal teniendo en cuenta la cantidad inicial u original, el aumento o disminución y la cantidad final. Parker y Leinhardt (1995, p. 455) citando a Masson (1975) ejemplifican esta situación mediante el siguiente problema: “Después de un incremento del $15\ \%$, el precio de un artículo era $28{,}75\ \$$. Encuentra el precio original.” La información del problema puede resumirse en forma tabular (ver Tabla II - 3) de forma que puede distinguirse la estructura aditiva (la suma de las dos primeras columnas debe dar como resultado la tercera) y la línea temporal con la que se puede modelizar la situación.

	Inicial	**Incremento**	**Nuevo precio**
Datos relativos	100	15	115
Datos reales	x	y	$28{,}75\ \$$

Tabla II - 3. Ejemplo de tabla para resumir las cantidades involucradas en un aumento porcentual.

En nuestra notación la estructura numérica del anterior problema, que coincide con la de los llamados problema de mezcla, quedaría esquematizada de la siguiente forma:

$$(100 + 15{:}\, 115) \leftrightarrow (x + y{:}\, 28{,}75)$$

En general si denotamos por C_I a la cantidad inicial, por C_F a la cantidad final, por I al incremento y por p al porcentaje de aumento (consideramos las disminuciones como casos particulares en los que p e I toman valores negativos), la estructura numérica de los problemas de aumentos y disminuciones porcentuales vendría caracterizada por el siguiente esquema:

$$(100 + p{:}\, (100 + p)) \leftrightarrow (C_I + I{:}\, C_F)$$

Sobre los problemas de aumentos y disminuciones porcentuales podríamos también considerar los Tipos I, II y III de problemas dependiendo del lugar de la incógnita en el problema de valor perdido. La diferencia con los problemas anteriores es que, mientras en los problemas que involucran una situación del tipo “P es el $p\ \%$ de T”, el porcentaje se corresponde con una razón normalizada parte-todo, en los aumentos y disminuciones porcentuales el porcentaje relaciona parte con parte (cantidad inicial y aumento o disminución) por lo que se trata de una razón normalizada parte-parte.

Por último, cabe relacionar la estructura de los llamados problemas de interés, tanto simple como compuesto, con las estructuras de proporcionalidad que hemos introducido anteriormente.

Los problemas de interés simple es decir aquellos en los que una cantidad de dinero produce una cantidad de intereses fija en cada periodo de capitalización son modelizables mediante una estructura de proporcionalidad compuesta (Martínez *et al*., 2015b). Si denotamos por C el capital invertido, por T el tiempo de la inversión, con unidad el periodo de capitalización, y por I el interés obtenido, se obtiene una estructura funcional del tipo

$$\frac{I}{C \cdot T} = cte,$$

siendo la constante de proporcionalidad el interés por unidad invertida y por periodo de capitalización.

Por otra parte, los problemas de interés compuesto, es decir, aquellos en los que los intereses obtenidos tras un periodo de capitalización se suman al capital inicial de forma que general intereses para el siguiente periodo de capitalización, pueden caracterizarse mediante una secuencia de problemas de proporcionalidad simple encadenados (Levain & Vergnaud, 1995). La secuencia se compondría de tantos problemas de aumentos porcentuales como periodos de capitalización, por lo que una estructura funcional del problema vendría modelizada por la siguiente expresión exponencial:

$$C_F = C_I \cdot (100 + r)^T,$$

en donde r sería el porciento de interés en cada periodo de capitalización, C_I la cantidad inicial invertida, C_F la cantidad final obtenida y T el tiempo o número de periodos de capitalización.

II.2.5. La proporcionalidad en la práctica educativa actual

Abordamos en esta última subsección del análisis de contenido estudiando el tratamiento dado a la proporcionalidad aritmética en las leyes educativas vigentes, es decir analizando el contenido prescrito (Lupiáñez, 2009) y resumiendo algunas aportaciones al análisis de contenido de la proporcionalidad aritmética en libros de texto escolares hechas desde la investigación en educación matemática, ya que, en palabras de Schubring (1987, p. 41), “la práctica docente no está tan determinada por los decretos ministeriales como lo está por los libros utilizados para la enseñanza”.

II.2.5.1. La proporcionalidad aritmética en el currículo español

La experimentación que se presenta en esta memoria se llevó a cabo entre el curso 2013-2014 y el curso 2016-2017. Dicho periodo corresponde con el final[32] de la Ley Orgánica de Educación, LOE[33], y el comienzo de la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa, a la cual ya hemos hecho referencia anteriormente en esta memoria. Como detallaremos más adelante, el

[32] La entrada en vigor de la LOMCE no supone una derogación de la LOE sino una modificación.

[33] Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, nº 106, 4 de mayo de 2006, Madrid, pp. 17158-17207.

último ciclo de investigación-acción en primero de ESO y el segundo y tercer ciclo de segundo de ESO se desarrollaron estando en vigor la LOMCE[34]. El resto, incluido el ciclo de referencia desarrollado por Oller-Marcén (2012) se desarrollaron antes de entrar en vigor dicha Ley Educativa.

Es pertinente, por tanto, presentar y analizar el tratamiento curricular de la proporcionalidad en ambas leyes educativas. Para ello se han analizado los documentos oficiales estatales en los que se desarrollan los contenidos mínimos de las diferentes materias. Dichos documentos son:

- Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *Boletín Oficial del Estado*, nº 173, 20 de julio de 2007, pp. 31487-31566.
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, nº 52, 1 de marzo de 2014, pp. 19349-19420.
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, nº 5, 5 de enero 2007, pp. 677-773.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, nº 3, 3 de enero de 2015, pp. 169-546.

En ellos, se ha rastreado la aparición de los elementos relacionados con la proporcionalidad desde un punto de vista aritmético en los organizadores curriculares ‘contenidos’ y ‘criterios de evaluación’. Hemos introducido para la LOMCE el organizador curricular ‘estándares de aprendizaje’ que aparece por primera vez en esta ley y que especifica los criterios de evaluación. Aunque nuestra propuesta se centra en 1º y 2º de ESO parece conveniente determinar los conocimientos previos y las necesidades propedéuticas, por lo que se ha extraído el tratamiento curricular desde primaria hasta 4º de la ESO. En la Tabla II - 4 y en la Tabla II - 5 se recoge el contenido curricular relacionado con la proporcionalidad aritmética según los anteriores organizadores en las etapas de Educación Primaria y Educación Secundaria según los currículos de la LOE y la LOMCE respectivamente.

[34] Si bien parte de la propuesta se desarrolló estando en vigor la LOMCE, todos los alumnos de nuestra experimentación habían cursado los estudios primarios con el currículo LOE.

Nivel	Contenidos	Criterios de evaluación
Primaria	Expresión de partes utilizando porcentajes. El tanto por ciento de una cantidad en casos simples. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales (de hasta dos dígitos decimales) y porcentajes.	4. Utilizar los números decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana.
1º ESO	Razón y proporción. Identificación y utilización en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas en las que intervenga la proporcionalidad directa. Porcentajes para expresar composiciones o variaciones. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales.	(Sin mención explícita)
2º ESO	Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes. Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. Razón de proporcionalidad. Aumentos y disminuciones porcentuales. Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana en los que aparezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa.	1. Utilizar números enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. 2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.
3º ESO	-	-
4º ESO Op. A	Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana. Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto.	2. Aplicar porcentajes y tasas a la resolución de problemas cotidianos y financieros, valorando la oportunidad de utilizar la hoja de cálculo en función de la cantidad y complejidad de los números.
4º ESO Op. B	-	-

Tabla II - 4. Elementos curriculares referentes a la proporcionalidad aritmética en la LOE en las etapas primaria y secundaria.

En la etapa de la Educación Primaria, los currículos desarrollados bajo la LOE y bajo la LOMCE presentan una diferencia significativa en cuanto al tratamiento de la proporcionalidad. La LOE no menciona explícitamente la proporcionalidad aritmética y solo hace referencia al concepto de porcentaje, mientras que en el currículo LOMCE sí se hace mención explícita a las relaciones de proporcionalidad. Como contenidos en la LOMCE se mencionan los “porcentajes”, la “Regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa” y, como especificación de la regla de tres, la “Ley del doble, triple y mitad”. Esta alusión a las técnicas de resolución, mediante uso de un algoritmo de cálculo y mediante estrategias escalares o de razón interna, se hace de manera un tanto confusa ya que se introduce la “Ley del doble, triple y mitad” como especificación de la “Regla de tres”, muy probablemente por una identificación entre el tipo de problema, valor perdido, y la técnica usada para resolverlo. Salvo esta, más que probable, alusión a los problemas de valor perdido no aparece mención a otras tipologías de problemas, como los problemas de comparación, el currículo LOMCE se limita a decir “resolver problemas de la vida diaria”.

Nivel	Contenidos	Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje
Prim.	Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales. La Regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad. Resolución de problemas de la vida cotidiana.	7. Iniciarse en el uso de los de porcentajes y la proporcionalidad directa para interpretar e intercambiar información y resolver problemas en contextos de la vida cotidiana.
		7.1. Utiliza los porcentajes para expresar partes. 7.2. Establece la correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. 7.3. Calcula aumentos y disminuciones porcentuales. 7.4. Usa la regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad, para resolver problemas de la vida diaria. 7.5. Resuelve problemas de la vida cotidiana utilizando porcentajes y regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.
1º y 2º ESO	Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales. Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad. Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.	5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.
		5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas. 5.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente proporcionales.
3º ESO	-	-
4º ESO Apl.	Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana. Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes sucesivos. Interés simple y compuesto.	1. Conocer y utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades y aproximaciones, para resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico recogiendo, transformando e intercambiando información.
		1.6. Aplica porcentajes a la resolución de problemas cotidianos y financieros y valora el empleo de medios tecnológicos cuando la complejidad de los datos lo requiera. 1.7. Resuelve problemas de la vida cotidiana en los que intervienen magnitudes directa e inversamente proporcionales.
4º ESO Aca.	Cálculo con porcentajes. Interés simple y compuesto.	2. Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico.
		2.4. Aplica porcentajes a la resolución de problemas cotidianos y financieros y valora el empleo de medios tecnológicos cuando la complejidad de los datos lo requiera.

Tabla II - 5. Elementos curriculares referentes a la proporcionalidad aritmética en la LOMCE en las etapas primaria y secundaria.

El concepto de porcentaje, común en la etapa de Educación Primaria para ambos currículos se introduce de manera muy similar. El porcentaje se presenta con carácter numérico como una forma de representación de la fracción ligada al significado de parte-todo, “Expresión de partes utilizando porcentajes”, “Utiliza los porcentajes para expresar partes.” Este hecho se refuerza en ambos currículos con la inclusión de los cambios entre sistemas de representación numéricos: “Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.” El porcentaje no se relaciona en ninguno de los dos currículos con las situaciones de proporcionalidad directa ni siquiera en el currículo LOMCE que aparecen los conceptos de forma consecutiva. En particular, no hay ninguna mención a la interpretación de porcentaje como cantidad de una magnitud correspondiente a cien unidades de otra o su relación con la razón como tanto por uno. Este último concepto, el de razón, no aparece mencionado en ninguno de los dos currículos en la etapa primaria. El currículo LOMCE especifica tipos de situaciones problemáticas que deben resolverse con el concepto de porcentaje como los aumentos o disminuciones porcentuales.

Para 1º y 2º de ESO, el currículo LOE presenta elementos curriculares diferenciados. mientras que el currículo LOMCE los presenta de forma conjunta. Así, aunque se especifican más contenidos en la LOMCE que en la LOE, también hay mayor libertad para su secuenciación. Aunque el concepto de porcentaje y la proporcionalidad se presentan en ambos currículos uno a continuación del otro, se mantiene la aparente separación entre ambos, introduciendo contenidos y criterios de evaluación diferenciados para ambos conceptos y relacionando el porcentaje con los sistemas de representación del número racional. Únicamente en la LOMCE aparece un estándar de aprendizaje que liga las situaciones de proporcionalidad con los porcentajes “Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes)”.

En estos dos primeros cursos de la etapa secundaria se hace mención por primera y última vez en el currículo a los conceptos de razón y proporción, presentándolos ambas leyes de forma simultánea. Además, se mencionan las relaciones de proporcionalidad directa e inversa, que el currículo LOE secuencia de forma que la proporcionalidad inversa solo se trabaja en 2º de ESO. Tras una mención genérica al concepto de razón en 1º de ESO, la LOE menciona “la razón de proporcionalidad” en 2º de ESO y la LOMCE “la constante de proporcionalidad”, en clara alusión a las razones externas en el caso de la proporcionalidad directa. El currículo LOE no explicita estrategias de resolución ni tipología de problemas más allá de la alusión a las “razones de proporcionalidad” y al “análisis de tablas”. En cambio, el currículo LOMCE menciona explícitamente el uso de diferentes estrategias “uso de tabla, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.” y diferentes tipos de problemas de proporcionalidad. Además de los problemas con porcentajes y de “factor de conversión”, la LOMCE explicita “utilizar diferentes estrategias […] para obtener elementos desconocidos” en clara alusión a los problemas de valor perdido y se introduce una mención explícita a los problemas de repartos directa e inversamente proporcionales.

En el currículo LOE, en la opción B (propedéutica) de matemáticas en 4º de ESO, no se volvían a contemplar elementos curriculares referidos a la proporcionalidad aritmética tras 2º de la ESO. En la opción A (terminal) de matemáticas en 4º de ESO aparece una breve reseña a las situaciones de proporcionalidad directa e inversa y problemas de la vida diaria relacionados, y se vuelve a incidir en el concepto de porcentaje, único elemento que se recoge en los criterios de evaluación.

En el currículo LOMCE la proporcionalidad aritmética desaparece en 3º de ESO, tanto en la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas” como en la asignatura “Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas”. El tratamiento se retoma en 4º en las dos opciones. En la opción académica solo para introducir el cálculo con porcentajes y el interés simple y compuesto. En la opción aplicada se recoge la proporcionalidad directa e inversa para resolver problemas de la vida cotidiana y se incide, especialmente, en el concepto de porcentaje, y sus aplicaciones a la economía y los problemas financieros. No se especifican tipologías de problemas ni métodos de resolución.

II.2.5.2. La proporcionalidad aritmética en los libros de texto

El término libro de texto se utiliza generalmente para designar los manuales utilizados por profesores y alumnos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de una materia determinada (González & Sierra, 2004). El uso de dicho término tiene connotaciones relacionadas con la sistematicidad en la presentación de los contenidos (Patiniotis, 2006) y con la autoridad del documento dentro del área de conocimiento (Stray, 1994). Estos hechos, contribuyen a que los libros de texto formen parte de lo que Huntley y Terrell (2014) denominan “currículo escrito” y diversos estudios ponen de manifiesto que los docentes utilizan el libro de texto para decidir qué tareas implementar con sus alumnos y también cómo hacerlo (Tarr, Chávez, Reys, & Reys, 2006). En esta misma línea, Rodríguez (2007) considera que el texto es la principal herramienta de instrucción y llega a utilizarse como currículo. Otros autores como González y Sierra (2004, p. 389) afirman que “la utilización del libro de texto en el aula […] ha determinado una práctica escolar determinada por su uso”. Para Monterrubio y Ortega (2009, p. 38) “el libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real”.

Teniendo en cuenta lo anterior, el estudio de libros de texto desde la investigación educativa es determinante para decidir la práctica educativa real ya que tienen un gran impacto sobre los contenidos impartidos por los docentes. Además, el análisis de libros de texto puede proporcionar información interesante sobre otros aspectos. Desde un punto de vista histórico, Schubring (1987) apunta que el análisis de textos antiguos de matemáticas permite estudiar el modo en que se difundieron y evolucionaron ciertos saberes matemáticos en una determinada época. González (2009) señala que, entre otros aspectos, dichos estudios pueden proporcionar información sobre ventajas e inconvenientes de determinadas orientaciones y metodologías didácticas. Maz-Machado y Rico (2015, p. 54) ponen de manifiesto que “el análisis de textos escolares proporciona información sobre los contenidos, los conocimientos tratados y también sobre aspectos pedagógicos, curriculares o sociales”. Por último, estos análisis pueden advertir de la existencia de errores e imprecisiones en libros de texto ampliamente difundidos, tanto de Educación Primaria (Fernández, Caballero, & Fernández, 2013) como de Educación Secundaria (Gómez, 2011a), lo que hace necesario un estudio profundo enfocado en esta línea.

En un trabajo de revisión sistemático, Fan, Zhu y Miao (2013) distinguen tres grandes tipos de trabajos relacionados con libros de texto: trabajos centrados en el análisis, en la comparación y en el uso de los libros de texto. Dentro de los trabajos orientados hacia el análisis de libros de texto, estos autores identifican cinco subcategorías. La subcategoría mayoritaria es la formada por aquellos estudios en los que se analiza el tratamiento recibido por contenidos concretos en los libros de texto. Además, como indican Occelli y Valeiras (2013), la mayor parte de los trabajos de análisis de libros de texto (de ciencias) usan la metodología del análisis de contenido para su investigación.

Existen en nuestro país numerosos estudios relativamente recientes enfocados en el tratamiento de contenidos concretos de educación matemática: respecto a los números negativos (Maz-Machado, 2005), sobre temas relativos al análisis matemático (González & Sierra, 2004; Sierra, González, & López, 1999, 2003), respecto a los significados del número racional positivo (Escolano, 2007; Gairín & Muñoz-Escolano, 2005), sobre el sistema métrico decimal (Picado & Rico, 2011), sobre las reglas de derivación (Conejo, Arce, & Ortega, 2014, 2015), respecto a la probabilidad en primaria (Gómez-Torres, Ortiz, & Gea, 2014), sobre la estadística y probabilidad en bachillerato (Rodríguez-Muñiz & Díaz, 2018); por citar algunos ejemplos.

Centrándonos en la proporcionalidad aritmética, resumimos algunas de las investigaciones sobre libros de texto realizadas recientemente tanto nacionales como internacionales.

Burgos y Godino (2019b) analizan la instrucción sobre el porcentaje presente en un texto de 6º de Ed. Primaria concluyendo que el tratamiento es meramente algorítmico y está desprovisto de sentido y conexión con la proporcionalidad. En este sentido, no se identifican los diversos significados del porcentaje, y no hay tareas propuestas en las que deba determinarse el todo o el porcentaje, ni se consideran porcentajes superiores al 100% que requieran conectar unos significados del porcentaje con otros.

Bolea (2002), aunque en un marco más amplio, tras el análisis de dos colecciones completas de libros de ESO concluye que las técnicas asociadas con la proporcionalidad se tratan de forma aislada y no relacionadas entre sí produciéndose un fenómeno de "desarticulación" de la proporcionalidad (Bosch *et al*., 2006). El fenómeno de la desarticulación escolar de la proporcionalidad se pone también de manifiesto en el análisis de libros de texto de ESO llevado a cabo por García (2005) en su tesis doctoral. En esta misma línea, Solar y Zamorano (2006) realizan un análisis, enfocado en la proporcionalidad, de libros de texto chilenos que complementan con un cuestionario a alumnas de 16-17 años y entrevistas a expertos en matemáticas. De su estudio se desprenden algunas conclusiones:

- La enseñanza se basa únicamente en el uso de la regla de tres (contraviniendo el currículo oficial de Chile que daba prioridad al uso de la constante de proporcionalidad).
- La regla de tres se muestra como un método eficaz pero que esconde la razón de ser de los objetos involucrados.
- No se introducen ejemplos de situaciones no proporcionales para poder comparar con las proporcionales lo que implica que los estudiantes no puedan identificar correctamente el concepto de proporcionalidad.
- La regla de tres no permite articular la proporcionalidad hacia niveles más altos de algebrización[35].

[35] Bolea *et al*. (2001) describen cuatro indicadores del grado de algebrización de una organización matemática, cada uno de ellos estructurado en tres grados o niveles. Los indicadores son: la manipulación, la

- Esta articulación debe pasar por explicitar la existencia de la constante de proporcionalidad.

Guacaneme (2002) analiza en profundidad el discurso de cinco textos escolares colombianos de séptimo grado (12-13 años) respecto a los conceptos de razón, proporción y magnitudes directa e inversamente proporcionales. El autor señala algunas deficiencias como las siguientes:

- Algunos conceptos como los de cantidades correspondientes, razones entre cantidades correspondientes, producto de razones o proporcionalidad compuesta se presentan sin definición a pesar de hacerse uso de ellos.
- La razón entre números y la razón entre cantidades de magnitud se trabaja en partes diferenciadas de los textos sin establecerse relaciones entre ambos conceptos.
- Los textos identifican el crecimiento funcional con una relación de proporcionalidad directa y el decrecimiento funcional con una relación inversa.

Pino y Blanco (2008) realizan un interesante estudio comparativo sobre los problemas de proporcionalidad contenidos en ocho textos de Chile y España para estudiantes de 12-13 años. Las categorías para el análisis de contenido que realizan los autores no son específicas de las tareas de proporcionalidad por lo que el estudio es reproducible para otros contenidos específicos de matemáticas escolares. Los autores concluyen que la mayoría de los problemas eran "de traducción simple" y "ejercicios de reconocimiento y algorítmicos" (Blanco, 1993), los menos complejos, de manera que las tareas matemáticas que debían realizar los alumnos consistían únicamente en aplicar procedimientos o algoritmos conocidos. Estas conclusiones concuerdan con las de trabajos más generales que destacan la escasa preocupación de los libros de texto por proporcionar oportunidades reales de resolución de problemas y estudio de situaciones, centrándose en modelos tecnológico-pragmáticos (Ruiz de Gauna, Dávila, Etxeberría, & Sarasua, 2013).

Lundberg (2011) analiza más de tres mil cuatrocientas tareas que involucran conceptos relacionados con la proporcionalidad en cinco libros de texto suecos para estudiantes de 16-17 años. La autora, estudia el tipo de tarea, las estrategias de resolución y las justificaciones que aparecen. Además, dado el enfoque funcional del marco teórico utilizado (TAD), distingue si la relación de proporcionalidad se establece de forma estática (expresión algebraica) o dinámica (explicitando la covariación entre cantidades de magnitud). La autora encuentra una buena diversidad de tareas y técnicas de resolución, pero destaca la ausencia de justificaciones y de conexiones entre las diferentes técnicas presentadas. También en el ámbito sueco, Ahl (2016), se centra en estudiar la conexión entre las propuestas editoriales y las investigaciones en didáctica de la matemática centradas en proporcionalidad. La autora destaca la pobre repercusión de la investigación didáctica en los libros de texto suecos en torno a cinco puntos que se consideran relevantes, a saber, proporcionar oportunidades para comparar y contrastar situaciones aditivas y

tematización, la unificación y reducción y la independencia del modelo. En el caso de la proporcionalidad de magnitudes, los grados de algebrización de la manipulación sería: en un primer grado manipular magnitudes, en un segundo grado manipular variables y en un tercer grado manipular variables en problemas no lineales, por ejemplo, en relaciones del tipo $T = k\sqrt{l}$ (Solar & Zamorano, 2006).

multiplicativas, identificar estructuras proporcionales, utilizar diferentes sistemas de representación y la conexión con los conocimientos sobre la fracción.

Gairín y Oller-Marcén (2012) analizan el tratamiento de los conceptos de razón y proporción en libros de texto españoles desde el siglo XIX a la actualidad. En concreto, analizan cuarenta y ocho libros de textos determinando si las razones se definen entre números o cantidades de magnitud, caracterizando los significados de la razón (fracción, cociente o factor multiplicante) y estudiando la preocupación de los textos por determinar las condiciones bajo las que puede definirse la razón y el tratamiento dado a la idea de proporción. Las conclusiones obtenidas por los autores son:

- La idea de razón y proporción se utiliza principalmente en un contexto numérico.
- No hay una preocupación por determinar las condiciones bajo las que tiene sentido utilizar el concepto de razón lo que puede provocar que el alumno aplique los conocimientos adquiridos en situaciones que no son de proporcionalidad.
- La idea de proporción se presenta tradicionalmente de forma descontextualizada y enfocada a la justificación de técnicas algorítmicas.

Shield y Dole (2013) realizan un análisis a priori (Van Dormolen, 1986) del contenido presentado en diversas colecciones de libros de texto sin considerar el uso que puedan hacer posteriormente los docentes. Los autores establecen una serie de indicadores para identificar si los textos estudiados promueven el conocimiento profundo de los alumnos en relación con la proporcionalidad y el razonamiento proporcional. Entre los indicadores considerados, encontramos los siguientes: la inclusión de oportunidades de confrontar situaciones aditivas y multiplicativas, el establecimiento explícito de situaciones de comparación entre razones, el uso de estrategias dentro del sistema y entre sistemas, el uso de diferentes sistemas de representación y el cambio entre ellos, la distinción entre relaciones parte-parte-todo, etc. Algunas de las conclusiones de este estudio fueron:

- Los textos no proporcionan oportunidades a los alumnos para diferenciar situaciones aditivas y multiplicativas.
- En general, se da un mayor peso a las representaciones simbólicas y al tipo de operaciones binarias a realizar que al estudio de la estructura multiplicativa que envuelve las situaciones.
- En opinión de los autores, los textos estudiados tienen una capacidad limitada para proporcionar herramientas a los profesores que les permitan desarrollar el razonamiento proporcional de los alumnos.
- Los textos se centran, principalmente, en establecer técnicas para los diferentes tipos de problemas, sin profundizar en las conexiones entre ellos o la estructura común.

Martínez-Juste *et al*. (2014) realizan un análisis de contenido a priori, siguiendo las etapas de Rico y Fernández-Cano (2013) de cuatro libros de texto para 2º de ESO. En él estudian el modo en que se caracteriza la proporcionalidad compuesta entre magnitudes, describen los métodos y técnicas presentados por los autores de los textos para resolver problemas de proporcionalidad compuesta y analizan la tipología de problemas de proporcionalidad compuesta que aparecen en los textos objeto de estudio. Para localizar las unidades de análisis los autores se basan en el trabajo de Gairín y Muñoz-Escolano (2005) en el que establecen dos categorías para clasificar las distintas actuaciones propuestas por los textos: práctica docente y práctica discente. Como práctica docente se clasifican aquellas actuaciones que, según el texto, se corresponderían al trabajo realizado por el profesor. Dentro de la práctica docente se distinguen discursos (son párrafos o dibujos que ofrecen explicaciones del contenido matemático y cuyo propósito es introducir, definir y explicar los conceptos que se pretende que el alumno aprenda), y ejemplos y ejercicios resueltos (aquellas actividades que aparecen resueltas por los autores del texto en cada tema). Como práctica discente se clasifican aquellas actuaciones que, según el texto, se corresponderían con el trabajo que debe desempeñar el alumno y que contienen todas las actividades, ejercicios y problemas sin resolver que están propuestos en el texto. Algunos de los resultados y conclusiones resaltados por los autores en este estudio son los siguientes:

- Se observa un escaso interés por la adecuada caracterización de la proporcionalidad compuesta, reflejado en el escaso espacio dedicado a ello en el discurso y la inclusión de caracterizaciones ambiguas.
- Los autores destacan que los textos tienden a automatizar los procesos de resolución de los problemas, mostrando preferencia por el método de proporciones y el uso de una fórmula frente a métodos que requieren una mayor comprensión de los fenómenos involucrados como el paso a paso o la amalgamación.
- Todos los problemas detectados son de valor perdido y salvo dos excepciones, todos involucran exactamente tres magnitudes. Además, existe un claro predominio de los problemas de tipo Directa-Directa frente a otras estructuras.
- Se aprecia una cierta inconsistencia entre la práctica docente y la discente. Algunos textos presentan tipos de problemas a los alumnos que no se han introducido en la práctica docente.

Martínez-Juste *et al*. (2015b) realizan un análisis de contenido para veintiséis libros de texto de seis colecciones completas de textos de matemáticas para la etapa de Educación Secundaria. Las seis colecciones pertenecen a dos editoriales de amplia implantación de las que se analiza una colección para cada periodo de las últimas leyes educativas españoles LOGSE-LOE-LOMCE. Las categorías de análisis que utilizan los autores son: la posición de la unidad dedicada a la proporcionalidad dentro de la secuencia del completa, la caracterización de la proporcionalidad compuesta, la estructura multiplicativa de los problemas y su tipología según la tarea que se propone, las estrategias de resolución que emplean los libros de texto, la aparición de argumentos, las situaciones y contextos a los que pertenecen los problemas, el tratamiento del Interés Simple y los sistemas de representación. Algunos de los resultados y conclusiones resaltados por los autores en este estudio son los siguientes:

- En ninguno de los textos de 1º de ESO se trabaja la proporcionalidad compuesta, aunque, según los autores, este tipo de problemas podrían trabajarse en este nivel educativo incluso sin instrucción específica.
- La posición que ocupan las unidades didácticas dedicadas a la proporcionalidad dentro de la secuenciación del curso es bastante similar en todas las editoriales. La proporcionalidad se presenta al final del bloque de unidades aritméticas y antes de comenzar con las unidades dedicadas al álgebra. Los autores resaltan que "este hecho casa con la visión "tradicional" de

la Proporcionalidad como culminación del estudio de la Aritmética" (Martínez-Juste *et al*., 2015b, p. 107,), pero entra en contradicción con la utilización de lenguaje y métodos algebraicos para la presentación de técnicas de resolución.

- Para las situaciones de proporcionalidad compuesta se detecta una escasa preocupación por realizar caracterizaciones rigurosas. Estás se realizan siempre desde un enfoque aritmético basado en las relaciones simples. Además, se detectan escasas justificaciones e, incluso, justificaciones incorrectas en las relaciones de proporcionalidad simple que identifican relaciones crecientes con las de proporcionalidad simple directa con frases del tipo "a más de…, más de…" y relaciones decrecientes con las de proporcionalidad simple inversa ("a más…, menos… ").
- La tipología de los problemas trabajados es muy homogénea en las diferentes editoriales. Los problemas de proporcionalidad compuesta son de valor perdido involucrando tres magnitudes y aparecen muy escasos ejemplos de las estructuras producto ($\mathbb{p} = (1,1,1)$ en la notación usada en esta memoria).
- En el periodo LOE, los autores señalan la estrategia de resolución "Proporciones" como la de mayor aparición en los libros de texto, mientras que la más utilizada en el periodo LOGSE es la de "Paso a Paso". Además, se señala que, aunque casi todos los textos presentan más de una estrategia, acaban destacando una de ellas, intentando dar un tratamiento más mecánico. Esta estrategia es, en la mayoría de los casos, la estrategia de "Proporciones". Los autores destacan que existen otras estrategias que promueven más el razonamiento proporcional que la estrategia de "Proporciones".
- Los autores destacan que el uso de los diferentes sistemas de representación encontrados va fuertemente ligado a las estrategias de resolución que emplea cada texto, no realizándose cambios entre distintos sistemas de representación.
- Se detectan preferencias por contextos determinados dentro de cada editorial recibiendo una escasa atención los contextos físicos relacionados con las situaciones científicas de PISA (OCDE, 2005).
- Pese a que los libros que trabajan las situaciones de Interés Simple lo hacen en la misma unidad didáctica en la que se presenta la proporcionalidad compuesta, ambos tópicos se trabajan de forma desconectada pese a su estrecha relación.

Algunos trabajos como los de Conejo *et al*. (2014, 2015) se centran en las justificaciones y demostraciones presentes en libros de texto. En este sentido, el trabajo de Conejo, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2016), analiza cómo se justifican los enunciados matemáticos sobre conceptos asociados a la proporcionalidad en los libros de texto y guías del profesor de una editorial española desde 6º de primaria a 4º de secundaria. Entre los resultados obtenidos los autores destacan que un mismo resultado puede ser enunciado como procedimiento o como proposición en diferentes cursos. Este hecho puede suponer un obstáculo para el desarrollo del pensamiento proporcional de los alumnos.

Martínez-Juste *et al*. (2017) analizan los problemas que contienen situaciones de proporcionalidad compuesta en doce libros de texto de 2º de ESO. De cada problema, los autores estudian el contexto, el tipo de tarea que se propone, la estructura multiplicativa asociada, el papel de los problemas dentro de la unidad didáctica y los tipos de magnitudes involucradas en el problema. Tras el análisis de los 167 problemas detectados, principalmente de corte cuantitativo, los autores realizan una serie de conclusiones y aportan sugerencias para la enseñanza. En concreto, los autores destacan:

- El tratamiento dado a los problemas de proporcionalidad compuesta es muy uniforme en cuanto al contexto y estructura proporcional ya que la mayor parte de los problemas estudiados son rutinarios, de contexto realista (Díaz & Poblete, 2001), de valor perdido e involucran tres magnitudes.
- La instrucción de los libros de texto se basa en las técnicas y no en los conceptos involucrados ya que no se encuentran problemas no rutinarios, ni gran variedad de problemas esencialmente diferentes. Los autores proponen la inclusión de problemas de comparación cualitativa que fomentan el razonamiento proporcional en los estudiantes.
- Las estructuras producto, $\mathbb{p} = (1,1,1)$, tienen una aparición mucho menor que las estructuras cociente, $\mathbb{p} = (1,-1,-1)$. Los autores achacan este distinto tratamiento de las estructuras a la dificultad de dotar de significado al producto de magnitudes y proponen un mayor trabajo discursivo sobre las estructuras producto, comenzando con las que provocan la proporcionalidad simple inversa, para que le alumno pueda afrontar estas tareas con éxito.
- La variedad de magnitudes trabajada en los textos es muy escasa. En particular, hay poco trabajo con magnitudes físicas diferentes al tiempo y velocidad. Los autores indican la conveniencia de trabajar de forma conjunta con otras áreas para poder aumentar el número de magnitudes físicas trabajadas ya que los contextos físicos son susceptibles de modelizarse mediante la proporcionalidad compuesta.
- Se detecta una clara preferencia por la inclusión de magnitudes extensivas en los problemas analizados por lo que los autores consideran necesario potenciar el tratamiento de las magnitudes intensivas en la docencia.

Ibáñez y Martínez-Juste (2020) elaboran un análisis de contenido de la unidad didáctica dedicada a la proporcionalidad aritmética en tres libros de texto de 4º de ESO de la opción de matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas publicados en periodo LOMCE. Los autores organizan el análisis según la estructura conceptual, la fenomenología y los sistemas de representación utilizados. En el trabajo se destacan algunas conclusiones e implicaciones para la enseñanza y se destaca que muchas de las deficiencias encontradas en los textos coinciden con las concluidas en otros trabajos de libros de texto de las etapas educativas anteriores:

- Se detecta la ausencia de ciertos algunos aspectos conceptuales como el establecimiento de condiciones de regularidad que permitan justificar las relaciones de proporcionalidad.
- Aparecen caracterizaciones incompletas e incluso erróneas de las relaciones de proporcionalidad. Por ejemplo, la identificación de las relaciones proporcionales con relaciones funcionales de crecimiento o decrecimiento, o la identificación de las relaciones compuestas con relaciones simples encadenadas.
- Los libros presentan métodos específicos para cada tipo de problema considerado reduciendo la tarea del alumno a memorizar y aplicar las diferentes técnicas que se le presentan sin oportunidad de relacionar las técnicas y los conceptos relacionados con la proporcionalidad.

Como se observa, una de las principales deficiencias achacadas a los libros de texto en los diferentes análisis mostrados es la prevalencia de métodos algorítmicos de resolución frente a otros que incidan en aspectos conceptuales y promuevan resoluciones razonadas y argumentadas. Este hecho no es exclusivo de los libros de texto en el sistema educativo español. Trabajos como el de Memiş (2019) ponen el foco de atención en este aspecto en una comparativa sobre el tratamiento dado a la proporcionalidad en libros de texto turcos y japoneses. En su estudio se concluye que los libros turcos se centran casi en exclusiva en técnicas algorítmicas de resolución mientras que los japoneses promueven una mayor variedad de tipos de razonamiento como el razonamiento creativo.

Otra constante en los diferentes análisis revisados es la homogeneidad en los tipos de problemas que se plantean en los libros de texto, siendo ampliamente mayoritaria la introducción de problemas de valor perdido. Este hecho, también coincide con investigaciones sobre libros de texto en otros contextos educativos (Wijayanti & Winsløw, 2017).

Además de la revisión del contenido matemático y didáctico de los libros de texto para la enseñanza de las matemáticas, en los últimos años ha cobrado interés el análisis de dichos elementos en otros materiales de soporte electrónico como los vídeos educativos en línea (Beltrán-Pellicer, Burgos, & Giacomone, 2021; Beltrán-Pellicer & Giacomone, 2021b; Beltrán-Pellicer, Giacomone, & Burgos, 2018). En el caso de la proporcionalidad, enfocados en los vídeos que trabajan los repartos proporcionales, Beltrán-Pellicer *et al*. (2018) detectan diversas carencias, imprecisiones y errores en su análisis. Por ejemplo, se detectan errores aritméticos o algebraicos en el desarrollo de las soluciones realizado en los vídeos, o se caracteriza el tipo de reparto (si es directo o inverso) mediante argumentos cualitativos erróneos ("al que más pone le tiene que tocar más en el reparto"). Los autores también detectan este tipo de argumentación para verificar que la solución obtenida es adecuada. Por otro lado, las explicaciones realizadas en algunos vídeos no relacionan los diferentes objetos que se manejan y no suelen explicitar el curso al que va dirigido el vídeo.

II.3. Aspectos cognitivos de la proporcionalidad

Abordamos en esta sección el análisis cognitivo de la proporcionalidad desde un enfoque investigador (Cañadas & Castro, 2013) y como método de tratamiento de los antecedentes de nuestra investigación (Gallardo & González-Marí, 2013). Así, mediante esta revisión de antecedentes y tras el análisis de contenido pretendemos realizar una "identificación, descripción y caracterización de los errores en los que los escolares pueden incurrir al abordar dichas tareas, de las dificultades que subyacen a esos errores y de los obstáculos que es necesario superar para resolver dichas dificultades" (Gómez, 2002, p. 272). Como indican Cañadas y Castro (2013) los análisis de contenido y cognitivo, desde un punto de vista investigador, deben servirnos para establecer categorías que nos permitan describir las producciones de los alumnos tanto en términos de las estrategias utilizadas como en términos de los errores cometidos. Desde el punto de vista del diseño curricular, la síntesis de este análisis se verá reflejada en el diseño de tareas que pretendan paliar algunas de las dificultades y limitaciones expuestas (Rico & Fernández-Cano, 2013).

Para realizar este subanálisis abordaremos una revisión de la literatura sobre el llamado razonamiento proporcional. Posteriormente, nos centraremos en las actuaciones de los alumnos en las diferentes tareas de proporcionalidad que hemos abordado en el análisis conceptual y de contenido. Por último, estudiaremos los diferentes factores que pueden influir en el tipo de estrategia puesta en juego por los alumnos en tareas de proporcionalidad y en la dificultad de dichas tareas.

II.3.1. El razonamiento proporcional

Los investigadores no han llegado a un consenso para dar una definición precisa del término ‘razonamiento proporcional’, resultando más sencillo determinar qué no es razonamiento proporcional o qué personas no razonan proporcionalmente (Lamon, 2012, pp. 2-3). Para la autora (Lamon, 2007, p. 638) el término ‘razonamiento proporcional’ hace referencia a la “habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades”. Según Lamon (1993b, p. 41) muchos investigadores han usado, de forma incorrecta, el término ‘razonamiento proporcional’ como la capacidad para resolver tareas de proporcionalidad. Sin embargo, el término debe asociarse a la capacidad de realizar argumentaciones y deducciones de manera comprensiva, más que con la habilidad para resolver determinadas tareas en las que puede tenerse éxito sin tener un conocimiento suficiente de los conceptos que se ponen en juego. Es decir, el razonamiento proporcional está relacionado con los aspectos cognitivos de la proporcionalidad y ligado a la comprensión del número racional y las estructuras multiplicativas. Un adecuado desarrollo del razonamiento proporcional es clave para comprender los fenómenos asociados con la proporcionalidad.

Podemos encontrar otros intentos de definición del significado del término ‘razonamiento proporcional’ en los trabajos de los componentes del *Rational Number Project*[36] (RNP):

> [El] razonamiento proporcional es una forma de razonamiento matemático que involucra el sentido de covariación y comparaciones múltiples y la habilidad de poner en marcha ciertas piezas de información […] está mucho más relacionado con la inferencia y la predicción e involucra formas de pensamiento cualitativo y cuantitativo. (Lesh *et al*., 1988, p. 93)

Estos autores, afirman también, que el razonamiento proporcional es un concepto fundamental para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas escolares ya que supone la culminación de la aritmética elemental y es la piedra angular para adquirir muchos conocimientos posteriores. Además, y aunque admiten que su perspectiva no es la usada universalmente por la

[36] El RNP es un proyecto de desarrollo curricular e investigación en torno al número racional creado en 1979 por componentes de diferentes universidades de EEUU y que ha desarrollado importantes trabajos de investigación sobre proporcionalidad. (Ver http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/)

comunidad científica, para estos autores, el razonamiento proporcional involucra también la capacidad de resolver ciertas tareas de proporcionalidad como las de comparación cualitativa y cuantitativa y las de valor perdido. En esta misma línea, Cramer y Post (1993), Singh (2000a), identifican como punto clave del razonamiento proporcional las relaciones multiplicativas entre cantidades y defienden que el desarrollo de la comprensión de estas estructuras multiplicativas requiere del planteamiento de diferentes tareas de proporcionalidad como las citadas anteriormente. Así, la resolución de problemas no rutinarios se convierte en una pieza principal del desarrollo del razonamiento proporcional. Por tanto, la enseñanza no debe basarse tampoco en técnicas rutinarias encaminadas únicamente a resolver problemas de valor perdido si el propósito es convertir a los estudiantes en “razonadores proporcionales” (Singh , 2000a, p. 597).

El origen de los estudios de enfoque cognitivo se encuentra en los trabajos de la escuela piagetiana en los años cincuenta del siglo XX (Obando, Vasco, & Arboleda, 2014; Tourniaire & Pulos, 1985). En concreto los trabajos de Inhelder y Piaget (1958) y Piaget e Inhelder (1975) son algunos de los precursores de este enfoque. Para Piaget, el razonamiento proporcional se encuentra en el cambio entre la etapa de operaciones concretas y la de operaciones formales ya que:

> Supone en los sujetos la capacidad de manejo simultáneo de clases y […] la coordinación de las inversiones de las operaciones con las reciprocidades de las relaciones, ambas necesarias en los procesos de equilibrio implicados en la comprensión de la proporcionalidad. (Obando *et al*., 2014, p. 62).

Los trabajos de Piaget y sus conclusiones sobre el razonamiento proporcional fueron criticados desde dos enfoques diferentes. Por un lado, las tareas usadas en los experimentos piagetianos tenían un contexto físico no trivial ya que usaban palancas o proyecciones de sombras para crear las tareas sobre proporcionalidad y algunos autores no estiman conveniente introducir tareas que requieran de conocimientos previos complejos para estudiar el desarrollo del razonamiento proporcional (Karplus *et al*., 1983, pp. 49-50; Tourniaire & Pulos, 1985, p. 183). Por otro lado, los estudios de Piaget abordaban de forma general el desarrollo cognitivo de los aspectos lógico-matemáticos, sin embargo, parece necesario atomizar el contenido matemático para poder profundizar en el desarrollo del conocimiento de los alumnos. En palabras de Vergnaud (1983, p. 127):

> Piaget ha demostrado que el conocimiento y la inteligencia se desarrollan durante un largo periodo de tiempo, pero lo ha hecho analizando el desarrollo de los niños en términos de capacidades generales […] sin prestar suficiente atención a contenidos específicos de conocimiento. Es necesario comprender mejor la adquisición y el desarrollo del conocimiento y habilidades específicos.

Así, Vergnaud introduce la idea de los campos conceptuales que fragmentan el conocimiento y permiten el estudio específico requerido sin perder de vista las relaciones entre diferentes campos (Vergnaud, 1990). En concreto, el razonamiento proporcional se integra en el campo de las estructuras multiplicativas, que, aunque no puede separarse por completo del campo de las estructuras aditivas, tiene su propia organización intrínseca (Vergnaud, 1983, p. 128).

A partir de los años ochenta del siglo XX, tras las críticas al trabajo de Piaget, los trabajos sobre el razonamiento proporcional se vuelven más específicos y se enfocan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad (Obando *et al.*, 2014). Por ejemplo, Noelting (1980a, 1980b) busca caracterizar el desarrollo del razonamiento proporcional y el concepto de razón. Dicha búsqueda tiene, según el autor, dos problemas a los que la investigación debe dar respuesta, a saber, si el desarrollo está jerarquizado, es decir si existen etapas diferenciadas durante el proceso de adquisición del razonamiento proporcional y cuáles son los mecanismos relacionados con ese proceso de desarrollo. En sus trabajos, Noelting, intenta dar respuesta a esta problemática caracterizando etapas en el desarrollo del razonamiento proporcional en niños y adolescentes y estableciendo las estrategias de resolución características de cada etapa para interpretar el paso de una etapa a otra.

Otros estudios, como el de Karplus *et al*. (1983), intentan complementar y unificar resultados como los de Noelting sobre el desarrollo del razonamiento proporcional. Para ello identifican diferentes objetivos prioritarios de la investigación sobre el razonamiento proporcional: los factores que intervienen en la dificultad de los problemas, las estrategias alternativas al razonamiento proporcional que utilizan los estudiantes y la relación entre las tareas de comparación y los problemas de valor perdido.

Una clasificación similar sobre los focos de interés de la investigación sobre el desarrollo del razonamiento proporcional es la utilizada por Tourniaire y Pulos (1985) en su revisión de la literatura. Así, tras estudiar las diferentes metodologías empleadas en las investigaciones empíricas y los contextos utilizados para diseñar las tareas presentadas a los alumnos, los autores identican dos focos de investigación principales:

- Las estrategias de resolución empleadas por los alumnos en el desarrollo del razonamiento proporcional. Distinguiendo entre estrategias correctas, estrategias incorrectas y secuencias de desarrollo de las estrategias que promueven el razonamiento proporcional.
- Variables que influyen en la actuación de los alumnos, distinguiendo entre variables centradas en la tarea (estructurales y de contexto) y variables centradas en el estudiante (edad, razonamiento formal, capacidad matemática, dependencia o independencia del campo, inteligencia, género, actitud y otras habilidades).

Junto con los estudios centrados en la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad, han coexistido trabajos de tipo teórico. En las tesis doctorales de Oller-Marcén (2012) y Valverde (2012) se destacan algunos de ellos. Por ejemplo, los ya mencionados trabajos de Vergnaud (1983, 1988, 1990) sobre las estructuras multiplicativas y la teoría de campos conceptuales, o el trabajo de Freudenthal (1983) sobre la fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Ambas disertaciones doctorales coinciden en remarcar como trabajo de corte teórico de época reciente el de Clark, Berenson y Cavey (2003). En dicho estudio se presentan cinco modelos para comprender las relaciones entre razones y fracciones. La idea principal es considerar las fracciones y las razones como conjuntos, de forma que en cada modelo se presentan dichos conjuntos con una relación diferente: contenido estricto (en un sentido y en el contrario), igualdad, intersección no vacía diferente de ambos conjuntos o intersección vacía. Los autores buscan evidencias en las concepciones en profesores, estudiantes y libros de texto sobre los diferentes modelos.

II.3.2. Actuaciones de los alumnos en tareas de proporcionalidad

Como hemos dicho, dentro de la investigación educativa sobre el razonamiento proporcional, una de las líneas clásicas de trabajo consiste en identificar y analizar las estrategias y razonamientos, correctos e incorrectos, que emplean los estudiantes al resolver tareas de proporcionalidad, así como la descripción de la evolución de esas estrategias para caracterizar el desarrollo del razonamiento proporcional. En el trabajo experimental con alumnos aparecen dos enfoques diferentes pero complementarios. Por un lado, es interesante tener en cuenta el efecto de la instrucción recibida en las estrategias de resolución utilizadas por los alumnos. Por otro, para el diseño de secuencias de enseñanza adecuadas, parece interesante analizar las respuestas dadas por alumnos que no han recibido ningún tipo de instrucción previa en ese tipo de tareas. Como afirman Silvestre y da Ponte (2012, p. 74) “en su planificación, los docentes deben tener en consideración el conocimiento informal previo de sus alumnos”.

II.3.2.1. Situaciones de proporcionalidad simple directa y consideraciones generales

Uno de los trabajos de referencia sobre el aprendizaje de la proporcionalidad simple directa es el realizado por Cramer y Post (1993). En su trabajo, se recogen las estrategias empleadas por 900 alumnos de entre 12 y 14 años (*7th-8th grade*) en tareas de proporcionalidad simple directa de valor perdido y de comparación cuantitativa. Los autores clasifican las actuaciones correctas de los alumnos según usen una estrategia de *razón unitaria* (razón externa), de *factor de cambio* (razón interna), de *fracción* y *algoritmo de productos cruzados* (que incluye el método de proporciones y la regla de tres). Las estrategias de razón unitaria (entendida como razón externa) y de fracción, se corresponden con esquemas matemáticos similares, pero con un matiz cognitivo que los autores quieren poner en relieve. Mientras que los alumnos clasificados en la estrategia de razón unitaria mantienen las unidades de las cantidades tras establecer la razón y le otorgan significado como tanto por uno, los alumnos clasificados con una estrategia de fracción establecen la razón entre las cantidades relacionadas omitiendo las unidades y utilizando propiedades de las fracciones para resolver el problema sin tener en cuenta el significado de las cantidades involucradas. Los autores destacan que mientras los alumnos de 7º grado (el equivalente a 1º de ESO) utilizan de forma mayoritaria la estrategia de razón unitaria, los alumnos de 8º grado (2º de ESO), con mayor instrucción sobre proporcionalidad, emplean de forma mayoritaria la estrategia de productos cruzados. Como conclusión, se sugiere que debe fomentarse el uso de diferentes estrategias de resolución prestando especial atención a aquellas más intuitivas, y que fomentan el razonamiento proporcional como las de razón unitaria y el factor de cambio, frente a la de productos cruzados, ya que al aplicarla no se deduce necesariamente que los alumnos utilicen razonamiento proporcional, sino que ejecutan de manera automática un procedimiento.

Un esquema muy similar al anterior, para determinar la estrategia utilizada por los alumnos en la resolución de problemas de proporcionalidad simple directa de valor perdido, es el utilizado por Vergnaud (1983) que distingue entre *estrategia escalar* (razón interna), *funcional* (razón externa), *valor unitario*, *regla de tres*, y *descomposición escalar* (construcción progresiva o *building-up*). Vergnaud diferencia la estrategia funcional de la de valor unitario según que el resolutor considere esta razón como una cantidad constante (intensiva) o como el valor de una de las magnitudes correspondiente a una unidad de la otra, en cuyo caso considera que la estrategia es esencialmente escalar. En notación funcional, si consideramos la función de proporcionalidad simple directa $f\colon X \longrightarrow \mathrm{Y}$, $f(x) = kx$, la estrategia funcional calcula k, cantidad de la magnitud intensiva Y/X, mientras que la de valor unitario calcula $f(1)$, cantidad de la magnitud Y. En el estudio realizado con 220 alumnos de 6º, 7º, 8º y 9º grado (6º de EP, 1º, 2º y 3º de ESO) la estrategia más utilizada es la escalar.

Lamon (1993a, 1993b) estudia la influencia de la estructura semántica de los problemas en las estrategias de resolución empleadas por los alumnos. Así, propone problemas de medidas bien compactadas, con estructura parte-parte-todo, de conjuntos asociados y de ampliadores-reductores, para caracterizar las estrategias utilizadas por 24 estudiantes de 11-12 años sin instrucción previa. Lamon (1993b) emplea una clasificación de estrategias correctas, similar a la de Cramer y Post (1993) y a la de Vergnaud (1983), incluyendo las estrategias de unidad simple y de unidad compuesta, parecidas a la razón unitaria y el factor de cambio y relacionadas con el *proceso de unitización* (*unitizing*) e incluyendo la *estrategia de construcción progresiva*. Lamon clasifica las resoluciones según el nivel de razonamiento proporcional, distinguiendo entre razonamiento preproporcional y razonamiento proporcional (Piaget, Grize, Szeminska, & Vinh, 1968). Las resoluciones que incluyen métodos informales que no demuestran la comprensión de las relaciones escalares y funcionales son clasificadas como preproporcionales. Es decir, los alumnos usan argumentos aditivos, correctos, aunque no llegan a reconocer constantes multiplicativas en la situación. Las producciones en las que se evidencia el reconocimiento de una constante multiplicativa, razón, son consideradas proporcionales. En el mismo sentido, Riehl y Steinthorsdottir (2019) consideran efectivas aquellas estrategias que son multiplicativas, mientras que estrategias como la de construcción progresiva o ir produciendo dobles de dobles son consideradas como no efectivas.

Para Lamon (1993b), usar la razón como unidad implica un razonamiento proporcional por lo que los procesos de unitización y construcción progresiva, juegan un papel importante en el paso del razonamiento preproporcional al proporcional. Por ejemplo, en un problema del tipo "8 *latas cuestan* 6 €, *¿cuánto cuestan* 12 *latas?*" Un razonamiento de construcción progresiva consistiría en razonar que 4 latas cuestan 3 € y por tanto 12 latas $= 8 + 4$ latas, costarían $9 = 6 + 3$ €. Un proceso de unitización, más sofisticado que el anterior, consistiría, por ejemplo, en cambiar la unidad "número de latas" por "número de grupos (paquetes) de 4 latas". El problema admitiría una traducción del tipo "2 *paquetes cuestan* 6 €, *¿cuánto cuestan* 3 *paquetes?*", que admite una solución por razón unitaria más amable que el problema original.

Para Fernández (2009) y Gómez (2016) las estrategias de unitización junto con las de normalización (*norming*) juegan un papel determinante en el desarrollo del razonamiento proporcional y resultan imprescindibles en las tareas de comparación de razones (Monje & Gómez, 2019). Las estrategias de normalización consisten en expresar las razones involucradas en una situación fijando una cantidad determinada en una de las magnitudes que las componen. Fernández (2009) destaca las normalizaciones ligadas al sistema de numeración decimal, es decir, el tanto por 10, por 100, por 1000, etc., y propone el entrenamiento en el uso de expresiones del tipo "por cada" o "de cada" desde los primeros años de primaria pues permite a los alumnos percibir las razones y afrontar tareas de comparación.

En general, como ponen de manifiesto Tourniaire y Pulos (1985), las estrategias correctas de los alumnos pueden clasificarse en dos grandes categorías: multiplicativas y de construcción progresiva. Dentro de las multiplicativas pueden tenerse en cuenta las relaciones escalares y las funcionales. La estrategia de construcción progresiva es una de las que primero aparece en los niños de forma espontánea (Singh, 2000b) y admite muchos grados de sofisticación (Lamon, 2012, p. 111-112). De hecho, Steinthorsdottir (2006), propone una tercera categoría de estrategias, que sitúa en un punto intermedio entre una estrategia multiplicativa y una estrategia de construcción de progresiva (aunque podría considerarse un caso particular de ésta), es la denominada por la autora como *estrategia combinada*. Esta estrategia, aplicada a problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa en los que la razón interna no es entera, consiste en aplicar un razonamiento escalar, encontrando el múltiplo más cercano y ajustar hasta la solución mediante otro procedimiento. En todo caso, que pueda aplicarse correctamente una estrategia de construcción progresiva, que mezcla argumentos aditivos y multiplicativos, depende fuertemente de la estructura numérica (Tourniaire & Pulos, 1985) y aparece en la resolución de problemas de valor perdido (no de comparación) de situaciones de proporcionalidad simple directa.

En cuanto a las estrategias incorrectas o no constructivas de razonamiento proporcional Lamon (1993a) destaca las *estrategias aditivas de diferencia constante* (los alumnos realizan argumentos aditivos erróneos del tipo "como hay 3 más de… tiene que haber 3 más de…"), *pictóricas o de evocación* ("parece que…") y la *construcción de patrones* (los alumnos usan patrones escritos u orales sin comprensión de las relaciones entre cantidades), esta última, juzgada incorrecta sin considerar el resultado obtenido. La construcción de patrones numéricos sin significado puede relacionarse con la estrategia de *descomposición funcional*, matemáticamente correcta pero carente de significado, nombrada por Vergnaud (1983). Además de estas estrategias erróneas, Lamon, considera en una categoría diferente aquellos intentos en los que no hay una interacción seria con el problema. Tourniaire y Pulos (1985), además de la estrategia aditiva de diferencias constantes, destacan como errores comunes aquellos en los que los alumnos desechan parte de los datos para realizar los razonamientos (se olvidan, por ejemplo, de una magnitud para resolver un problema de comparación) y aquellos en los que aplican de forma errónea una estrategia correcta.

Vergnaud (1983), clasifica las estrategias incorrectas poniendo la atención en el tipo de relación que tienen las parejas de datos que los alumnos usan para realizar las operaciones binarias, sin tener en cuenta (al menos en un primer nivel de análisis) si realizan una comparación aditiva o multiplicativa. Es decir, Vergnaud identifica, estrategias escalares y funcionales incorrectas, en las que incluye, por ejemplo, las estrategias aditivas de diferencia constante, pero poniendo el foco de atención en si las cantidades involucradas pertenecen a la misma magnitud o a diferentes magnitudes. En una categoría de respuesta funcional incorrecta se incluiría tanto una respuesta en la que un alumno resta distancia y tiempo, como otra en la que un alumno divide distancia y tiempo, pero luego lo multiplica por una distancia. Así, Vergnaud distingue las categorías: *escalar incorrecta*, *funcional incorrecta*, *escalar y funcional incorrecta*, *inversa*, *producto erróneo*, *cociente erróneo* y *otras estrategias*. Una estrategia escalar y funcional incorrecta en un problema de proporcionalidad simple directa (de valor perdido) de estructura $(a_1\colon a_2) \leftrightarrow (b_1\colon x)$, vendría provocada por considerar el producto $b_1 \cdot a_2$, y dar dicho valor como solución, o considerar la razón externa a_2/a_1 y la interna b_1/a_1 y multiplicar ambas razones para obtener la solución. Las producciones incorrectas categorizadas por el término 'estrategia inversa' establecen una razón pertinente (externa o interna) entre los tres datos conocidos, pero terminan el problema realizando la operación inversa a la requerida con el tercer dato para hallar la cantidad desconocida. Una estrategia de producto erróneo es aquella que realiza un producto $a_1 \cdot a_2$ o $a_1 \cdot b_1$ sin sentido, y análogamente una estrategia de cociente erróneo es aquella en la que se realiza el cociente a_1/b_2 o su inverso.

En el caso concreto de los problemas de comparación, Karplus *et al*. (1983) usan un problema de disolución de azúcar en zumo para caracterizar las respuestas de 120 alumnos de grados 6º y 8º (6º de EP y 2º de ESO). Las categorías de análisis distinguen entre *respuestas incompletas o ilógicas*, respuestas que utilizan *argumentos cualitativos* para inferir la comparación ("como hay más de…. y menos de …, entonces…"), respuestas que utilizan *argumentos aditivos* ("hay cinco cucharadas más de azúcar y tres vasos más de agua") y respuestas que utilizan *argumentos multiplicativos* (cálculo de razones). Para refinar el análisis, los autores distinguen si las comparaciones se hacen entre cantidades de la misma magnitud en las dos mezclas puestas en juego (razones internas o estrategia escalar en el caso multiplicativo), o entre las cantidades de cada magnitud dentro de cada mezcla presentada a los alumnos (razones externas o estrategia funcional en el caso multiplicativo). Los autores detectan un aumento de los argumentos proporcionales al aumentar el nivel educativo en el que se encuentran los alumnos y una considerable mayor frecuencia de las comparaciones entre cantidades relacionadas de cada una de las magnitudes (argumentos funcionales).

Silvestre y da Ponte (2011), describen con detalle algunas producciones de cuatro estudiantes de 11 años al resolver dos problemas de valor perdido y dos de comparación cuantitativa, y encuentran también estrategias multiplicativas, aditivas y cualitativas de resolución para el caso de los problemas de comparación. En las estrategias multiplicativas aparece exclusivamente el cálculo de la razón externa (estrategia funcional) en cada una de las situaciones involucradas en la comparación.

El trabajo de Valverde y Castro (2009), aunque centrado en resolutores adultos (maestros en formación), describe otra estrategia para abordar los problemas de comparación cuantitativa, que denominan *suposición de igualdad de proporciones*. Dicha estrategia se basa en convertir el problema de comparación en un problema de valor perdido. Así los resolutores calculan, para una de las situaciones implicadas en la comparación, el valor correspondiente a una de las cantidades de magnitud de la otra situación, para posteriormente comparar el valor obtenido con el que proporcionaba el problema. Usando la notación introducida en esta memoria, el esquema de razonamiento descrito por Valverde y Castro (2009) sería equivalente al siguiente:

- Problema Inicial: $S1: (a_1: a_2) \sim S2: (b_1: b_2)$.
- Plantear problema de valor perdido en la primera situación: $S1: (a_1: a_2) \leftrightarrow (b_1: x)$.
- Calcular x.
- Inferir el resultado del problema al comparar $S1: (b_1: x) \sim S2: (b_1: b_2)$ mediante la comparación de x y b_2.

En las situaciones de proporcionalidad simple directa, este esquema es similar a establecer las razones en cada una de las situaciones e igualar denominadores o numeradores para inferir la comparación de las razones, esquema que es similar a la estrategia de fracción presentada por Cramer y Post (1993). Esta estrategia, usando la igualación de denominadores, aparece descrita en el trabajo de Rivas, Godino y Konic (2009). Los autores usan un problema de comparación cuantitativa contextualizado en la disolución de azúcar en zumo de limón para describir las estrategias de trece equipos formados por maestros en formación. Un único equipo utilizo la técnica descrita anteriormente, mientras que los otros doce utilizaron una técnica de reducción a la unidad para comparar las razones (estrategia funcional). En el trabajo se destaca que dos de los doce equipos que calcularon la razón unitaria lo hicieron mediante el uso de la regla de tres. En un trabajo más amplio, Rivas (2013), constata el elevado uso de la regla de tres, incluso en situaciones sencillas de proporcionalidad, junto con algunas deficiencias en el razonamiento proporcional en maestros en formación.

Como indican Heller, Ahlgren, Post, Behr y Lesh (1989), los problemas de comparación cualitativa suponen un prerrequisito importante para abordar con éxito problemas numéricos de proporcionalidad. Los autores introducen este tipo de problemas en cuestionarios de respuesta múltiple para comparar el éxito en este tipo de tareas con el éxito en otros problemas numéricos de proporcionalidad y sobre conocimientos relacionados con el número racional, concluyendo que existen indicios de que el pensamiento cualitativo sea necesario, pero no suficiente, para resolver problemas de proporcionalidad numérica, aunque una enseñanza basada en técnicas acríticas puede enmascarar este efecto. Además, estudian la variación en el desempeño según el tipo de razones involucradas y el contexto de las tareas. Las conclusiones coinciden con otras reflexiones que ya hemos mencionado como la mayor dificultad que supone para los alumnos trabajar con magnitudes que provienen de la física y la menor dificultad con otras que aparecen en contextos más cercanos como los costes económicos. Las opciones entre las que deben elegir los estudiantes en los ítems que elaboran los autores son:

- Es mejor/mayor/más ventajosa, … la primera situación o la situación inicial.
- Es mejor/mayor/más ventajosa, … la segunda situación o la situación final.
- Ambas situaciones son iguales (igual de ventajosas) o no cambia nada desde una situación inicial respecto a la final después de la introducción de unos cambios.
- No puede decidirse que situación es mejor/mayor/ más ventajosa con los datos que proporciona el problema.

En los trabajos en los que los problemas de comparación cualitativa aparecen como ítems de respuesta cerrada no queda constancia de las estrategias que pueden poner en juego los estudiantes para resolverlos. En general, el estudio de este tipo de estrategias ha recibido una menor atención en la investigación. López-Rueda y Figueras (1999) realizan un estudio exploratorio para detectar posibles estrategias en problemas de comparación cualitativa, convirtiendo problemas escolares de proporcionalidad simple (directa e inversa) y proporcionalidad compuesta, en problemas de comparación y predicción cualitativa. Los autores analizan las respuestas dadas por 65 alumnos de educación superior a un cuestionario que incluye este tipo de problemas. Los resultados muestran una gran variedad de respuestas diferentes y ligadas a las variables de cada una de las tareas propuestas (como el contexto) lo que dificulta la clasificación de estas. Así, proponen, como un primer acercamiento, distinguir si los resolutores han usado *argumentos escritos*, *dibujos o gráficos* y *ejemplos numéricos* en sus argumentaciones. Además, introducen un sistema de representación, similar al presentado anteriormente (sección II.2.4.3. Estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad simple directa), para facilitar el análisis de las respuestas.

II.3.2.2. La transición entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo

Como ponen de manifiesto los anteriores trabajos, la transición entre el razonamiento aditivo y el razonamiento multiplicativo parece uno de los puntos clave en el desarrollo del razonamiento proporcional. En esta etapa de transición entre el razonamiento aditivo y multiplicativo ocurren dos fenómenos característicos, el abuso de métodos aditivos de forma errónea en situaciones proporcionales y el abuso de métodos multiplicativos en cualquier tipo de situación, aunque no sea proporcional, incluidas las aditivas (Fernández & Llinares, 2012).

Tourniaire y Pulos (1985) inciden en que el desarrollo del razonamiento proporcional no es lineal y destacan fenómenos como el llamado ‘vuelta atrás’ (*fall-back*) consistente en que alumnos con niveles de razonamiento proporcional incipientes, que en determinados tipos de tareas razonan de forma proporcional, utilizan estrategias más elementales (como las de construcción progresiva), o incluso estrategias aditivas erróneas, cuando se enfrentan a tareas de proporcionalidad más complejas. En sentido contrario, alumnos con un buen desempeño tienden a utilizar estrategias proporcionales menos avanzadas en problemas sencillos, por lo que algunos autores cuestionan secuencias de enseñanza de nivel progresivo ya que tareas más complejas parecen obligar a los alumnos a desarrollar estrategias más sofisticadas (Downton & Sullivan, 2017).

Uno de los fenómenos más ampliamente descritos relacionados con la etapa de transición entre el pensamiento aditivo y multiplicativo es el conocido como ilusión de linealidad o ilusión de proporcionalidad (Van Dooren *et al*., 2008; De Bock *et al*., 2007). Mediante este término los autores se refieren al hecho de que alumnos que han recibido instrucción en proporcionalidad abusan de las estrategias para estas situaciones aplicándolas a cualquier tipo de relación funcional, sea esta de proporcionalidad o no. Esta aplicación incorrecta de modelos lineales por parte de los estudiantes se mantiene en el tiempo, como se comprueba, por ejemplo, en los trabajos de Buforn (2017) y Buforn y Fernández (2014) en el que una amplia mayoría de los estudiantes para maestros que participaron en el estudio resolvieron erróneamente como proporcional un problema no proporcional. Otros estudios también apuntan hacia dificultades y errores similares al trabajar con profesores de enseñanzas medias en formación (Arican, 2019a).

Diferentes estudios corroboran esta problemática entre los alumnos de últimos años de primaria y primeros años de secundaria. Modestou y Gagatsis (2009) realizan un estudio con 982 alumnos de entre 5º a 9º grado (5º de EP a 3º de ESO) en el que concluyen que, independientemente del grado, los alumnos muestran resultados especialmente bajos en las tareas no proporcionales incluidas en el cuestionario por considerarlas proporcionales. Los autores limitan los efectos de la instrucción al desempeño y las estrategias utilizadas en los problemas que sí eran de proporcionalidad. Anteriormente, Modestou, Elia, Gagatsis y Spanoudis (2008) habían realizado un experimento con 653 estudiantes chipriotas de grado 9º y 10º (3º y 4º de ESO) en el que ponían de manifiesto la tendencia en el uso de modelos lineales en tareas que involucraban perímetros, áreas y volúmenes. Además, una buena parte de los alumnos mostraba reticencias a abandonar dichos modelos pese a la confrontación con modelos correctos.

En este mismo sentido, un amplio estudio llevado a cabo con 755 alumnos españoles entre 4º de EP y 4º de ESO ha constatado estas características del desarrollo del razonamiento proporcional en el sistema educativo español en la etapa que coincide con la transición entre la educación primaria y secundaria (Fernández & Llinares, 2010, 2011, 2012; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2011). En estos trabajos se caracterizan perfiles de razonamiento aditivo y proporcional, y su desarrollo, dependiendo del nivel educativo. Los autores confirman que los perfiles aditivos dominan en la etapa de EP mientras que en la etapa de ESO aumentan los perfiles proporcionales.

Existen dos interpretaciones alternas sobre el fenómeno de la falsa idea de proporcionalidad (Obando *et al.*, 2014). Mientras que algunos autores apuntan a la existencia de un obstáculo epistemológico inherente a los conceptos matemáticos involucrados (Modestou & Gagatsis, 2007, 2009), otros autores apuntan al método de enseñanza tradicional de la proporcionalidad basado casi en exclusiva en problemas de valor perdido abordados con estrategias algorítmicas como uno de los principales culpables (Van Dooren *et al*., 2008). En este sentido, Van Dooren *et al.* (2008) proponen que la enseñanza proporcione oportunidades para contrastar modelos lineales con otros modelos y que la enseñanza de la proporcionalidad se realice a partir de un abanico más amplio de tipos de tareas.

La mayor parte de los trabajos presentados anteriormente se centra en las situaciones de proporcionalidad simple directa. Recogemos a continuación, las principales aportaciones de los trabajos que abordan de manera más específica la actuación de los alumnos en tareas relacionadas con los porcentajes, en situaciones de proporcionalidad inversa y compuesta, y en problemas de repartos proporcionales.

II.3.2.3. Porcentajes

A pesar de ser uno de los conceptos matemáticos escolares de uso más extendido en la sociedad y con más aplicaciones prácticas, la comprensión del porcentaje es uno de los temas en los que escolares y adultos presentan mayores dificultades (Lembke & Reays, 1994). Estas dificultades son extensibles a profesroes en ejercicio cuando intentan implementar procesos adecuados para la enseñanza del porcentaje (Parker & Leinhardt, 1995). Algunos de los motivos por los que las tareas asociadas con porcentajes pueden resultar complicadas tienen que ver con la con los diferentes significados e interpretaciones que pueden atribuirse a la expresión a una expresión del tipo N % que lo conectan con las dificultades propias del conjunto numérico de los racionales y del concepto de razón (Mendoza & Block, 2010). Por otro lado, el lenguaje natural usado en problemas de enunciado y el simbolismo propio del porcentaje pueden ocultar la naturaleza multiplicativa del concepto (Parker & Leinhardt, 1995). Además, la tradición educativa y curricular se centra en la enseñanza del porcentaje desde un modelo parte-todo y basado en la tipificación de los problemas asociados para proporcionar métodos algorítmicos en cada uno de los casos, lo que provoca que no se venzan algunas de las dificultades anteriores (Parker & Leinhardt, 1995; Pöhler & Prediger, 2015).

Lembke y Reys (1994) establecen tres áreas para investigar la comprensión del porcentaje por parte de los alumnos: conocimiento conceptual sobre el porcentaje, habilidad para resolver problemas descontextualizados y habilidad para resolver problemas contextualizados. Para ello determinan diferentes componentes para estudiar la comprensión en las diferentes áreas: uso de representaciones gráficas, conversión entre fracciones, decimales y porcentajes, uso de estimaciones y puntos de referencia (*benchmarks*[37]), cálculo mental y capacidad para verificar si los resultados obtenidos son razonables.

Los diferentes estudios que abordan el estudio de la comprensión del porcentaje suelen utilizar tareas con las tres tipologías de problemas de porcentajes (ver sección II.2.4.9. Porcentajes. Aumentos y disminuciones. Interés simple y compuesto). En ellos se analizan las producciones de los alumnos determinando el grado de éxito y clasificando las estrategias de resolución empleadas, bien mediante las producciones escritas de los alumnos, mediante entrevistas individuales, o usando ambos métodos (Dole *et al.*, 1997; Lembke & Reys, 1994; Mendoza & Block, 2010; Pöler & Prediger, 2015). Además de las estrategias de uso de una fórmula, algebraica, el análisis unitario (estrategia de razón interna para calcular la cantidad asociada a un 1 %), o la estrategia de razón (en la que se engloban las estrategias en las que se hace una interpretación del porcentaje en términos de dos cantidades diferentes relacionadas, el numeral y 100) los trabajos anteriores suelen recoger otras estrategias informales que en ocasiones ponen en juego los estudiantes:

- Uso de un dibujo: siendo éste el único método que presenta el estudiante para resolver el problema.
- Ensayo y error: el estudiante comprueba diferentes resultados hasta encontrar la solución al problema que se le plantea.

[37] Parker y Leinhardt (1995) definen punto de referencia o *benchmark* en el trabajo con porcentajes como aquellos porcentajes cuya fracción asociada es unitaria, así como la identificación entre ambos sistemas de representación y los procedimientos asociados a su significado de operador. Es decir, identificar, por ejemplo, 50 % con la fracción $1/2$ y el procedimiento de calcular el 50 % con el de dividir por 2.

- Cálculo y comprobación: el estudiante multiplica y divide la cantidad absoluta por el porcentaje en forma de fracción o decimal y de los resultados intenta inferir cuál es la solución.
- Uso de puntos de referencia: se utiliza directamente una fracción unitaria si el porcentaje del enunciado lo permite o se utilizan puntos de referencia para acotar o estimar la solución o construirla mediante procesos de construcción progresiva.

La investigación muestra que los estudiantes sin instrucción previa sobre porcentaje ponen en juego conocimientos informales o culturales al enfrentarse a este tipo de tareas de forma natural (Lembke & Reys, 1994; Parker & Leinhardt, 1995; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). En concreto, se constata el uso de puntos de referencia que se utilizan conjuntamente con estrategias de construcción progresiva, el uso de pictogramas y de diagramas circulares y en forma de barra y algunos conocimientos específicos ligados a la interpretación parte-todo como que el $100\ \%$ indica la cantidad total. Aunque, como advierten Parker y Leinhardt (1995), la presencia de estos conocimientos previos, sin una instrucción adecuada, puede ser limitante en el aprendizaje del porcentaje porque lo encuadran en las interpretaciones numéricas y parte-todo. Para las autoras resulta relevante que algunos alumnos que comienzan la instrucción en resolución de tareas de porcentajes muestran una mayor tasa de éxito cuando en el enunciado, en vez de utilizar la notación habitual del porcentaje, se presenta el numeral como una cantidad absoluta relacionada con la cantidad 100. Es decir, la notación compacta del porcentaje resultado de su desarrollo histórico provoca dificultades en los alumnos.

Lembke y Reys (1994) estudian la evolución de las estrategias que ponen en juego los estudiantes desde esta primera estapa sin instrucción previa o con un primer contacto (5º y 7º grado), a la etapa en la que los alumnos reciben nstrucción específica incluyendo conocimientos algebraicos (9º grado) y las comparan con las estrategias que ponen en juego alumnos transcurridos unos años desde esa instrucción específica (11º grado). En su estudio, las autoras destacan que mientras los alumnos de las primeras etapas muestran una variedad de estrategias de resolución los estudianets con instrucción se centran en la estrategia algebraica basada en despejar de una fórmula memorizada. En cambio, pasados unos años desde la instrucción los alumnos vuelven a mostrar una variedad más amplia de estrategias de resolución volviendo a aprecer estrategias más intuitivas. En esta misma línea, Parker y Leinhardt (1995, p. 459) afirman que “desgraciadamente, mucha de la creatividad y flexibilidad puesta en juego por los estudiantes antes de la instrucción desaparece con la introducción y repetición de procedimientos formales para el porcentaje”.

Además de la variación de las estrategias puestas en juego por los alumnos con la instrucción, otros trabajos, como el de Dole *et al*. (1997) comparan las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos según su nivel de competencia, o nivel de desempeño. En su trabajo determinan tres niveles de competencia, competente, semi-competente y no competente, que determinan según los alumnos sean capaces de resolver correctamente problemas de Tipo I, II y III (ver sección II.2.4.9. Porcentajes. Aumentos y disminuciones. Interés simple y compuesto), sean capaces de resolver problemas de Tipo I pero muestran dificultades en los de Tipo II y III, o muestren dificultades en todos los tipos de problemas, respectivamente. En el experimento con alumnos de grados 8, 9 y 10 se confirma la mayor dificultad que los Tipos II y III plantean a los alumnos debido al bajo número de alumnos categorizados como competentes. Además, se ponen de manifiesto las diferencias en cuanto a las estrategias y argumentos utilizados por los alumnos clasificados en cada categoría.

En el estudio de Dole *et al*. (1997), los alumnos competentes muestran capacidad para realizar representaciones gráficas, sin embargo, evitan realizarlas y se centran en las resoluciones numéricas. Además, a pesar de que se encuentra una gran variedad de estrategias utilizadas entre los alumnos muestran rechazo a la hora de argumentar sus producciones. Los alumnos competentes muestran una buena capacidad para realizar cambios entre sistemas de representación (porcentaje, fracción y decimal) y habilidades de cálculo mental y estimación. Los alumnos de la categoría intermedia se centran en resoluciones basadas en una fórmula y no muestran habilidad para hacer representaciones gráficas del problema. Además, aunque algunos alumnos semi-competentes pueden verificar si la solución numérica es razonable, son incapaces de rehacer sus estrategias para encontrar una solución correcta. Los alumnos con baja competencia, aunque son capaces de representar gráficamente los problemas, son incapaces de utilizar dichas representaciones para apoyar una estrategia de resolución. En esta categoría, los alumnos evidencian un fuerte apego a la fórmula de forma que si no la recuerdan correctamente no pueden resolver el problema por otros medios. Además, tienden a intentar resolver los problemas identificado palabras clave con procesos matemáticos, por ejemplo, identificando la preposición 'de' con la operación de multiplicar.

Burgos y Godino (2019a, 2019b) distinguen las dificultades detectadas los estudiantes de 6º de EP al resolver tareas de porcentajes en tres grandes categorías: representacionales (uso inapropiado del lenguaje en sus diversos registros), conceptuales (como no percibir correctamente la relación de proporcionalidad) y procedimentales (como operar de forma incorrecta con la expresión decimal de la fracción o con el producto o división con decimales). Concluyen que los alumnos de 6º de EP tienen dificultades para reconocer la relación de proporcionalidad en un problema de porcentajes y para justificar los procedimientos empleados en la resolución o reconocer la pertinencia de otros procedimientos. También señalan que sólo cuando los estudiantes comunicaron sus soluciones en la discusión con todo el grupo clase y argumentaron sobre situaciones en las que aparecen porcentajes y su conexión con la relación de proporcionalidad, les permitió dotar de significado a los procedimientos y símbolos empleados cuando plantean una proporción, evitando algunos de los errores de tipo conceptual, procedimental y representacional identificados en sus respuestas.

Maz-Machado y Gutiérrez (2008) identifican tres tipos de errores en la comprensión del porcentaje por parte de estudiantes de Magisterio ante una tarea en la que había que realizar dos aumentos porcentuales consecutivos del $20\ \%$ a una cantidad dada: empleo del cien como una cantidad o dato del enunciado; aplicar el segundo porcentaje solo al primer aumento porcentual y realizar la suma nominal de los dos porcentajes. Concluyen que, si bien los estudiantes de Magisterio dominan adecuadamente los aspectos procedimentales y algorítmicos para poder resolver ejercicios, el porcentaje no es comprendido conceptualmente, sino que es asociado a una operación algebraica, ya sea de suma, multiplicación, o de regla de tres.

Las identificaciones entre palabras clave y procesos matemáticos son, como hemos dicho, uno de los focos de dificultad con el trabajo de porcentajes. Además de la identificación de la preposición 'de' y la multiplicación, Parker y Leinhardt (1995) destacan otras expresiones del lenguaje natural que pueden crear confusión pues parecen hacer referencia a las estructuras aditivas en vez de a las multiplicativas en donde vive el porcentaje. Es el caso de las expresiones "un N % más, o menos que", "aumentar, incrementar, disminuir un N %", etc.

Las diferentes investigaciones centradas en la mejora de la competencia de los alumnos, en los términos que hemos expuesto anteriormente, parecen tener un mayor éxito en los alumnos con una competencia media o alta, mientras que no parecen mejorar la de los alumnos de baja competencia (Parker & Leinhardt, 1995, p. 457).

II.3.2.4. Situaciones de proporcionalidad inversa y proporcionalidad compuesta

Como ya hemos comentado anteriormente, en los estudios sobre la actuación de los alumnos en los que aparecen situaciones inversas o compuestas, estas situaciones suelen incorporarse en un contexto amplio de estudio de situaciones proporcionales, por lo que, en general, no se recogen estrategias de resolución específicas.

Norton (2005), realiza un experimento de enseñanza con 46 alumnas[38] de 6º grado y pasa un cuestionario con actividades de proporcionalidad simple directa e inversa antes y después de la instrucción. Las actividades que plantea el autor para el desarrollo del razonamiento proporcional son de carácter manipulativo. Se utilizan mezclas y modelos a escala humana de muñecas para las situaciones de proporcionalidad directa y piezas de construcción, con motores, ruedas y engranajes para las situaciones de proporcionalidad inversa. El estudio destaca el aumento de éxito en el test tras la instrucción y el aumento de respuestas proporcionales y disminución de las estrategias de carácter aditivo. Los fallos en las tareas de proporcionalidad inversa se debieron a fallos en el reconocimiento de dicha estructura, es decir, las alumnas consideraban una relación directa en vez de inversa.

Este fallo en el que se trata una relación inversa como directa es uno de los mayormente señalados en estos estudios, como por ejemplo en el de Oliveira (2009). En su trabajo incluye situaciones de proporcionalidad inversa (además de situaciones de proporcionalidad directa y no proporcionales) en un estudio sobre 33 alumnos de entre 13 y 14 años. La autora introduce específicamente para los problemas de proporcionalidad inversa la estrategia denominada 'consideración de una magnitud intermediaria', que describe la estrategia de cálculo de la constante de proporcionalidad de la situación. El estudio destaca que los alumnos emplean dicha estrategia para resolver los problemas de proporcionalidad inversa aun cuando no habían recibido instrucción sobre este tipo de problemas. Norton (2005) destaca que uno de los fallos más comunes es considerar la situación inversa como directa.

Incluso en resolutores adultos, la utilización de las técnicas de proporcionalidad simple directa para resolver problemas de proporcionalidad inversa es predominante. Por ejemplo,

[38] El experimento de enseñanza se realiza en un centro femenino.

Monteiro (2003) describe la resolución de tareas de proporcionalidad simple directa e inversa por parte de futuros maestros. Además de tener una menor tasa de éxito, la mayoría de los fallos encontrados en las tareas de proporcionalidad inversa vienen por la aplicación de la regla de tres o de un factor de cambio siguiendo el modelo de las situaciones directas. Como fallo minoritario aparece la aplicación de modelos aditivos.

Diferentes autores confirman la mayor dificultad que tienen los alumnos en la resolución de problemas y reconocimiento de relaciones en situaciones de proporcionalidad simple inversa, respecto a la directa (Arican, 2019b; Monteiro, 2003). Esta mayor dificultad se pone de manifiesto también en profesores de secundaria, tanto en formación como en ejercicio (Arican, 2108, 2019a; Cabero-Fayos *et al.*, 2020; Fisher, 1988). Por ejemplo, Fisher experimenta con profesores de secundaria en ejercicio para describir las estrategias de resolución empleadas en la resolución de problemas de valor perdido en el que incluye situaciones de proporcionalidad inversa. Además de resolver los problemas, los profesores debían indicar cómo enseñarían a resolver dichos problemas. El análisis de resoluciones categoriza las respuestas erróneas principalmente en aditivas o intentos de resolución proporcional mal ejecutados, y las respuestas correctas según se emplee razonamiento proporcional (principalmente mediante métodos aritméticos), una fórmula proporcional (método de proporciones o regla de tres) o métodos algebraicos. Todos los profesores determinaron que el mejor método (incluso el único) para enseñar los problemas era el de la fórmula proporcional. Además, el estudio destaca que entre el 25 % y el 50 % contestaron de forma incorrecta a los problemas de proporcionalidad inversa.

También con profesores de secundaria, pero en formación, Arican (2018) estudia los métodos de resolución empleados en problemas de valor perdido que incluyen situaciones de proporcionalidad inversa y de proporcionalidad compuesta. Algunos de los resolutores emplearon métodos basados en sistemas de representación tabulares o de doble línea numérica. Según el autor, estas representaciones permitían a los resolutores comprender las relaciones multiplicativas y reconocer las constantes de proporcionalidad, conceptos clave del razonamiento proporcional. Por otro lado, la mayoría de los resolutores preferían el uso de una estrategia de proporciones o una fórmula. Estos resolutores presentaron más dificultades en los problemas de proporcionalidad inversa. Además, el autor destaca el uso de caracterizaciones de las relaciones proporcionales por argumentos cualitativos que hacían que los profesores en formación supusieran relaciones proporcionales en situaciones no proporcionales. En el caso concreto de la proporcionalidad inversa, algunos resolutores, aunque identifican correctamente las relaciones de proporcionalidad inversa, las tratan como una relación afín decreciente (Arican, 2019a). Para los problemas de proporcionalidad compuesta, los resolutores evitaron el uso de métodos algorítmicos, y utilizaron sistemas de representación tabular que favorecían la aparición de estrategias de paso a paso.

En el marco del desarrollo cognitivo, Carretero (1989) estudia la adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas. Para ello, elabora un cuestionario con situaciones de proporcionalidad simple directa, simple directa encadenada y proporcionalidad compuesta. Los resultados del cuestionario, llevado a cabo por 136 alumnos de entre 8 y 11 años, muestran que los alumnos encuentran mayores dificultades en las situaciones de proporcionalidad compuesta frente a los problemas de proporcionalidad simple. Además de errores por estrategias aditivas y realización de operaciones erróneas o sin sentido, el trabajo constata que uno de los errores más comunes en los problemas de proporcionalidad compuesta es el olvido de un dato.

Martínez-Juste *et al*. (2015a) realizan un trabajo específico sobre proporcionalidad compuesta. Los autores estudian las estrategias utilizadas por estudiantes de 6º de EP, 1º de ESO y 2º de ESO ante tres problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta. En la clasificación previa de los alumnos, además del nivel educativo en el que se encuentran, se tiene en cuenta si han tenido o no instrucción en resolución de problemas de proporcionalidad simple y de proporcionalidad compuesta.

En este trabajo los autores encuentran una gran variedad de estrategias de resolución tanto correctas como incorrectas. En cuanto a estrategias correctas detectan: *amalgamación*, *paso a paso pasando por la unidad*, *paso a paso sin pasar por la unidad*, *proporciones* y *uso de una fórmula*. También se detectan estrategias de *construcción de patrones* que, aunque permiten obtener una respuesta numérica correcta, no son constitutivas de razonamiento proporcional (Lamon, 1993a). Las estrategias incorrectas de resolución son categorizadas en: *operaciones sin sentido*, *razonamiento aditivo, trabajo con las dos magnitudes independientes por separado*, *omisión de una de las magnitudes independientes* y la *incorrecta aplicación de una fórmula*. En concreto, las estrategias erróneas en las que se trabaja solo con una pareja de magnitudes son propias de las situaciones de proporcionalidad compuesta.

Martínez-Juste *et al* (2015a) encuentran diferencias significativas en la tasa de éxito global entre los diferentes niveles educativos, aumentado según avanza el nivel educativo. Sin embargo, no se encuentran diferencias significativas entre los alumnos de 2º de ESO que han tenido y que no han tenido instrucción previa sobre proporcionalidad compuesta. Sí aparecen diferencias entre estos dos grupos a la hora de analizar las estrategias empleadas para la resolución. Mientras que los alumnos sin experiencia previa utilizan mayoritariamente las estrategias de paso a paso y amalgamación, en los alumnos con experiencia en proporcionalidad compuesta aparecen, de forma mayoritaria, la estrategia de proporciones y la de uso de una fórmula. Es decir, la instrucción se centra en estrategias que no aparecen de forma natural en los alumnos, que proporcionan métodos algorítmicos de resolución, que no consideran el significado de las operaciones y, además, no produce mejoras significativas en la tasa de éxito de las tareas. Este efecto de la instrucción también es detectado en los alumnos que hacen uso de la estrategia de amalgamación para reducir el problema a un problema de proporcionalidad simple. Los grupos de menor nivel educativo emplean mayoritariamente la estrategia de reducción a la unidad tras amalgamar, mientras que los grupos de 2º de ESO utilizan fundamentalmente la regla de tres (o algoritmo de productos cruzados). Además, la estrategia de paso a paso es la única que aparece en todos los grupos de alumnos estudiados. Estos hechos son, para los autores, indicativos de que las estrategias del tanto por uno y amalgamación pueden ser introducidas con éxito al iniciar el trabajo con la proporcionalidad (Gairín & Oller-Marcén, 2011).

El trabajo de Martínez-Juste *et al* (2015a) detecta una fuerte influencia del nivel educativo y el grado de instrucción en el tipo de estrategias que aparecen entre las respuestas incorrectas. Por ejemplo, desaparecen las estrategias aditivas a partir de 2º de ESO, pero con la instrucción en técnicas específicas para proporcionalidad simple y para proporcionalidad compuesta aparecen errores relacionados con la omisión de una magnitud y con la aplicación de algoritmos mecánicos.

Al margen de las estrategias empleadas, Martínez-Juste *et al* (2015a) ponen otro foco de atención en las justificaciones dadas por los alumnos en las resoluciones, concluyendo que pocos alumnos se preocupan por caracterizar el tipo de proporcionalidad involucrada y que, los que lo hacen, suelen usar argumentos erróneos del tipo "a más…, más…". Este hecho es una clara influencia de la enseñanza basada en los libros de texto en donde se observa un escaso interés por la caracterización de la proporcionalidad y se favorece la aparición de ese tipo de razonamientos (Martínez-Juste *et al*., 2014).

II.3.2.5. Repartos proporcionales

Como se comentó en la sección II.2.4.7. Repartos proporcionales, en las situaciones de repartos proporcionales, existen múltiples formas de realizar un reparto de una cierta cantidad entre un número determinado de individuos, no necesariamente proporcionales, a las que llamaremos modelos de reparto. De hecho, parte de las investigaciones sobre este tópico se centran en estudiar qué modelo de reparto realizan los resolutores ante un problema de reparto y qué estrategias de resolución emplean una vez seleccionado dicho modelo (Antequera & Espinel, 2011; Peled & Balacheff, 2011; Peled & Bassan-Cincinatus, 2005; Sánchez, 2013, 2014). Para ello, suelen usarse contextos de repartos de ganancias o pérdidas de dinero entre individuos que han aportado capitales diferentes. Este caso particular de repartos llamados también de "regla de compañías", y sus métodos de resolución, han supuesto tradicionalmente un ejemplo paradigmático de reparto proporcional en la enseñanza de la aritmética (Gómez, 1999; Oller-Marcén, 2012).

Unos de los ejemplos típicos de problemas asociados a repartos de una cantidad de dinero son los de bancarrota, por ejemplo, la venta de un bien en cuya compra han participado varios individuos aportando cantidades diferentes de dinero se hace por un capital inferior al precio de coste o capital inicialmente invertido. Antequera y Espinel (2011) utilizan este tipo de problema para estudiar la forma en que aplican diferentes modelos de reparto los alumnos de secundaria. Para su estudio consideran cuatro modelos de reparto: *reparto proporcional* (los individuos se reparten las ganancias obtenidas en la venta de forma proporcional a las cantidades invertidas), *reparto equitativo* (los individuos se reparten de forma equitativa lo obtenido en la venta), *igualación de pérdidas* (los individuos se reparten lo obtenido en la venta de forma que la diferencia entre el capital puesto inicialmente y el capital obtenido en la venta es constante), *orden de llegada* (se supone un reparto de forma ordenada en el que cada uno recoge el capital invertido o el máximo capital posible si lo que queda es inferior a lo invertido cuando acude al reparto, cada individuo obtiene la media aritmética de lo obtenido en estos repartos cuando se tienen en cuenta todos los órdenes posibles).

Los tres primeros métodos de reparto, descritos en el párrafo anterior, aparecen en otras investigaciones sobre resolución de problemas de reparto de beneficios. Sánchez (2013) analiza respuestas para el "problema de la lotería" en el que una serie de individuos invierte un capital diferente para comprar un billete de lotería que resulta premiado con un valor mayor al de compra. El autor encuentra, además del modelo de reparto proporcional, el modelo de reparto equitativo. Peled y Bassan-Cincinatus (2005), para el mismo problema, además de estos modelos, describen el equivalente al modelo de igualación de pérdidas para el caso de ganancias, es decir, repartir de forma que la diferencia entre el capital obtenido y el capital invertido sea la misma para cada individuo.

La revisión de la literatura sobre actuaciones de los alumnos en repartos susceptibles de ser realizados mediante un modelo directamente proporcional apunta a clasificar los diferentes modelos aplicables en tres bloques (exportables al caso inverso): repartos equitativos (la cantidad a repartir se divide en partes iguales entre los diferentes participantes en el reparto), compensación multiplicativa o reparto proporcional (razón entre la cantidad a repartir y el peso constante en el caso directo y producto entre la cantidad a repartir y el peso constante en el caso inverso) y compensación aditiva (diferencia de la cantidad a repartir y el peso constante en el caso directo, suma de la cantidad a repartir y el peso constante en el caso inverso).

Si bien, como indican Peled y Bassan-Cincinatus (2005), la aparición del modelo equitativo podría obedecer a motivaciones éticas (sin el dinero puesto por el que menos ha invertido en la compra no se podría haber comprado el bien inicial), la diferencia entre aplicar el segundo o el tercer modelo podría ser significativa del nivel de razonamiento proporcional de los alumnos. Además de considerar el modelo de reparto elegido por los alumnos, los problemas de repartos proporcionales obedecen a situaciones de proporcionalidad simple con una estructura parte-parte-todo (ver sección II.2.4.7. Repartos proporcionales), por lo que el estudio de las estrategias correctas y erróneas de resolución puede hacerse a partir de dicha estructura.

II.3.3. Factores que influyen en la actuación de los alumnos

Tourniaire y Pulos (1985) recogen diferentes variables que pueden influir en la dificultad de las tareas de proporcionalidad y en la elección de determinadas estrategias. Algunas variables externas, como el nivel de instrucción (e indirectamente la edad) ya las hemos considerado en la sección anterior estudiando las estrategias de resolución y su evolución. Otras variables externas que influyen de manera obvia en el desempeño de los alumnos están relacionadas con la instrucción recibida. Los diferentes enfoques curriculares, por ejemplo, pueden afectar no solo a la tasa de éxito en tareas de proporcionalidad, sino también en las estrategias empleadas por los estudiantes (Jiang, Hwang, & Cai, 2014).

En esta sección abordamos el estudio de las variables inherentes a la tarea y que pueden influir en la tasa de éxito y, en determinados casos, en la elección de estrategias de resolución. En concreto, distinguiremos los efectos provocados por la estructura numérica, las magnitudes involucradas, otras variables de contorno o contextuales (Tourniaire & Pulos, 1985) y, por último, por la estructura multiplicativa.

II.3.3.1. Estructura numérica

En las investigaciones sobre educación matemática se recogen diferentes variables relacionadas con la estructura numérica: orden de los datos, tamaño de los números, presencia de unidades, igualdad o desigualdad de razones. Si bien, la variable más utilizada en las investigaciones y que recoge un mayor consenso sobre su influencia en la dificultad de las tareas y las estrategias utilizadas por los alumnos es la distinción entre razones enteras y no enteras (Tourniaire & Pulos, 1985).

Orden en el que se presentan los datos.

El orden en el que se presentan los datos hace referencia a que los datos aparezcan en el enunciado del problema en el orden natural en el que deben ser utilizados para realizar las operaciones conducentes a su resolución (Tourniaire & Pulos, 1985). Esta es según Rupley (1981) una de las causas de dificultad de los problemas, aunque, como apuntan Tourniaire y Pulos, no es una de las variables generalmente utilizadas en la investigación y las evidencias sobre su efecto son escasas.

Por ejemplo, Carretero (1989) introduce la variable *orden numérico de los datos* (entre otras) para medir su influencia en las actuaciones de 136 niños de entre 8 y 11 años. El estudio no revela diferencias significativas en la tasa de aciertos por la variación del orden en el que se presentan los datos, aunque se detecta un ligero aumento de procedimientos “puramente numéricos” (combinar los datos sin tener en cuenta la magnitud de referencia).

Tamaño de los números.

Al igual que el orden en el que se presentan los datos, el tamaño de los números es otra de las variables consideradas por Rupley (1981) que, como indican Tourniaire y Pulos (1985) no suele ser considerada en las investigaciones experimentales que tienden a utilizar números pequeños, siendo el valor desconocido en los problemas de valor perdido el mayor valor considerado.

Aparición de razones unitarias

Tourniaire y Pulos (1985) señalan que la presencia de razones unitarias, es decir de razones del tipo $1{:}n$ proporciona tareas más sencillas de resolver (Noelting 1980b). En este sentido, estudios más recientes (Cortina *et al*., 2014) han profundizado en los beneficios del trabajo con razones unitarias en tareas de proporcionalidad como precursor del trabajo con fracciones. Las razones unitarias aparecen al considerar situaciones de comparación multiplicativa en las que en uno de los dos sentidos la relación se establece mediante una razón entera y en el sentido inverso mediante una razón unitaria.

Igualdad o desigualdad de constantes.

En el caso concreto de los problemas de comparación, uno de los efectos estudiados es el de que las constantes de proporcionalidad presentadas en las dos situaciones involucradas sean iguales o diferentes. En concreto Karplus *et al*. (1983) introducen esta variable en su estudio de problemas de comparación de proporcionalidad simple directa, por lo que hablan de igualdad o desigualdad de razones. El estudio concluye que esta variable es la más determinante en la dificultad para aplicar razonamientos proporcionales, resultando más complicados los problemas en los que las razones consideradas son diferentes.

Otros estudios coinciden con el anterior en mostrar las dificultades que tienen los estudiantes a la hora de enfrentarse a tareas donde se ven involucradas la comparación de razones desiguales como tareas en contextos realistas en los que hay que comparar distintas ofertas comerciales y descuentos. Gómez y García (2014) apuntan a que, para resolver esta clase de tareas, los estudiantes de bachillerato suelen emplear estrategias de tipo aditivo y tienen dificultades a la hora de percibir la invariancia de la razón que les permita resolver estas situaciones. En concreto, reportan que no realizan normalizaciones, ni relativizan las razones involucradas en los enunciados y que tienen muchas más dificultades para realizar comparaciones empleando razones del tipo unidades por euro (frente a las razones inversas como euros por unidad). En la misma línea, Monje y Gómez (2019), experimentan con este tipo de tareas en una muestra más amplia de estudiantes de magisterio. Los resultados señalan que más de tres cuartas partes de los estudiantes no fueron capaces de resolver satisfactoriamente estas tareas de comparación de descuentos, bien porque no compararon las cantidades de manera relativa, bien porque tuvieron dificultades ligadas a identificar el referente del descuento o del pago, o bien porque tuvieron dificultades ligadas a la elección de los ítems y/o precios.

Razones enteras y razones no enteras.

La aparición de razones enteras y no enteras ha sido una de las variables clásicamente considerada en los trabajos de investigación sobre el desempeño de los alumnos en tarea de proporcionalidad (Tourniaire & Pulos, 1985). Aunque generalmente centradas en relaciones de proporcionalidad simple directa, podemos encontrar estudios que se centran tanto en problemas de comparación como en problemas de valor perdido.

En el trabajo de Karplus *et al*. (1983) se estudia la respuesta de 60 alumnos de 6º grado y 60 alumnos de 8º grado a problemas de comparación (problema de la limonada, *lemonade puzzles*). Los problemas se clasifican según su estructura numérica y según si se trata de problemas en los que las razones son iguales o diferentes. Para la estructura numérica se distinguen cuatro categorías según las razones internas (dentro del mimo producto) y las razones externas (entre azúcar y limonada) sean o no sean enteras. Los autores detectaron una mayor tasa a los problemas que presentaban tanto las razones internas como externas enteras, y en los que solo tenían las razones internas enteras. Además, en los problemas con solo razón externa entera o con todas las razones no enteras hubo una mayor frecuencia de respuestas incorrectas aditivas que provenían de calcular diferencias aditivas internas (dentro de la misma magnitud).

Steinthorsdottir (2006) señala que la estructura numérica de los problemas, en concreto la presencia de cantidades enteras o no enteras, influye en la tasa de éxito y en la estrategia utilizada de manera más determinante que su estructura semántica, por lo que la estructura numérica determina el nivel de dificultad. En su estudio, utiliza la categorización de problemas de Lamon (1993a) según la estructura semántica, y para cada una de las categorías genera problemas diferentes variando la estructura numérica. En concreto, Steinthorsdottir (2006), considera cuatro categorías de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa según la estructura numérica I-I-I, I-N-I o N-I-N, N-N-I y N-N-N, según las cantidades que conforman la razón externa y la razón interna sean múltiplos (Una razón o su inversa son enteras) y según el valor solicitado sea entero o no (I por "integer", N por "noninteger").

Los resultados del experimento anterior muestran que las estrategias multiplicativas (esencialmente de tipo funcional o escalar) decrecen conforme crece el número de cantidades no enteras involucradas (del 85 % de estrategias multiplicativas en la estructura I-I-I al 25 % en la estructura N-N-N). Las estrategias de tipo construcción progresiva y la aditiva de diferencias constantes (errónea) aumentan conforme aumenta el número de cantidades no enteras involucradas (de un 9 % en la estructura I-I-I al 51 % en la estructura N-N-N). Destacando entre las estrategias de construcción progresiva, muchas aplicadas de forma incorrecta. Así, parece inducirse que el número de cantidades no enteras involucradas en la tarea (en referencia a las razones y la cantidad solicitada) aumentan la dificultad de las tareas.

En un reciente trabajo, Riehl y Steinthorsdottir (2019) utilizan una categoría similar a la usada por Karplus *et al*. (1983) para encontrar diferencias en las tasas de éxito en problemas de valor perdido. En este trabajo, para categorizar los problemas se centran en si las razones externas o internas del problema son enteras, encontrando así cuatro categorías A (ambas razones enteras), B (razón interna entera y externa no entera), C (razón externa entera e interna no entera) y D (ambas razones no enteras). En el estudio se concluye que los problemas de valor perdido con razones internas enteras tienen una mayor tasa de éxito que los que tienen razones externas enteras. Además, el número de respuestas multiplicativas (frente a aquellas de construcción progresiva) es mayor. Además, en el estudio se pone de manifiesto que los problemas en los que las razones internas son menores que la unidad (tomando como denominadores las cantidades de la pareja de valores homólogos en los que no se encuentra la incógnita) provocan mayores dificultades en los alumnos, pues no pueden poner en juego estrategias de construcción progresiva de forma tan inmediata.

En una línea similar a la anterior, Fernández *et al*. (2011) clasifican la estructura numérica de los problemas en dos categorías, entera y no entera. En la categoría entera tanto la razón externa como la interna son enteras, mientras que en la categoría no entera ambas razones son no enteras (Se corresponden con las categorías A y D del estudio de Riehl y Steinthorsdottir (2019)). Sin embargo, en el trabajo de Fernández *et al*. (2011), no solo aparecen problemas de valor perdido (en proporcionalidad simple directa), sino que se introducen problemas en los que la relación funcional entre las magnitudes es afín y no lineal, manteniendo la misma estructura numérica. Los autores, tras estudiar las respuestas dadas al cuestionario por alumnos de secundaria, encuentran que los resolutores tienen una mayor tasa de éxito en los problemas proporcionales con razones enteras que con razones no enteras. Además, en los problemas proporcionales con razones no enteras aparecen más estrategias aditivas erróneas. Por el contrario, al resolver problemas aditivos, las relaciones no enteras promueven una mayor tasa de éxito entre los resolutores. Estos efectos tienen una mayor tasa de aparición en los primeros niveles de secundaria.

II.3.3.2. Tipo de magnitudes

El tipo de magnitudes involucradas en los problemas matemáticos, y en concreto en los problemas de proporcionalidad, es una de las variables más ampliamente estudiadas en la literatura. Como recogen Martínez-Juste *et al*. (2017), en González y Gómez (2011, p. 357), se plantean diferentes clasificaciones de las magnitudes involucradas en problemas aritméticos según distintos criterios, a saber:

- *Distinción entre magnitudes extensivas e intensivas,* es decir, entre aquellas que son aditivas, como el peso, la cardinalidad o la superficie y aquellas que son razones y no son aditivas, como la velocidad, el precio unitario, la densidad o la temperatura.
- *Distinción entre magnitudes continuas* (como la longitud) *y discretas* (como la cardinalidad de un conjunto de objetos o como el valor monetario, considerado discretos por los autores porque debe expresarse finalmente con un número finito de decimales, generalmente dos como máximo).
- *Distinción entre magnitudes fundamentales* (como la longitud) *y derivadas* (como la superficie).
- *Distinción entre magnitudes escalares* (como la masa) *y vectoriales* (como la fuerza).

Para estudiar la influencia del tipo de magnitud en la dificultad de los problemas y en las estrategias de resolución nos centraremos en las dos primeras distinciones anteriores. Además, consideraremos también la distinción entre situaciones que presentan magnitudes homogéneas (es decir, la misma magnitud considerada sobre objetos diferentes) y magnitudes heterogéneas (es decir, situaciones de proporcionalidad que involucran dos magnitudes diferentes).

Magnitudes continuas y magnitudes discretas.

No existe un consenso claro entre los investigadores sobre el papel de las magnitudes continuas y discretas en la dificultad de las tareas. Si bien algunos estudios apuntan a que los estudiantes más jóvenes emplean las magnitudes discretas con mayor éxito en contextos de proporcionalidad (Fernández & Llinares, 2011; Tourniaire & Pulos, 1985), otros estudios señalan resultados en sentido contrario (Boyer, Levine, & Huttenlocher, 2008; Spinillo & Bryan, 1999).

Boyer *et al*. (2008) realizaron un experimento con 240 estudiantes de infantil y primeros años de primaria. El contexto de las situaciones presentadas era de mezclas de zumo y agua. A los alumnos se les presentaba una mezcla y una serie de alternativas de entre las que tenían que elegir la que tenía "el mismo sabor". La información se proporcionaba a los alumnos de forma gráfica, no numérica, mediante un diagrama con una parte de color rojo (zumo) y otra parte de color azul claro (agua). Para estudiar el efecto de la continuidad, unas barras se presentaban divididas en cuadraditos (los niños podían contar el número de unidades de zumo y de agua) y otras se presentaban sin estas divisiones. Así, los autores caracterizaron los problemas según la opción presentada y su alternativa tuvieran una representación discreta (D) o continua (C), creando cuatro categorías DD, DC, CD y DD. Tras el análisis de datos los autores encuentran diferencias significativas en el desempeño en las tareas DD y el resto, no encontrando diferencias entre las otras tres categorías. Para los autores, este hecho muestra que "la tendencia en los niños a establecer relaciones numéricas interfiere con su razonamiento proporcional" (Boyer *et al*., 2008, p. 4).

Como ponen de manifiesto Tourniaire y Pulos (1985), hay estudios, que apuntan en el sentido contrario, es decir, que la presencia de magnitudes continuas provoca dificultades en los alumnos, Estos autores, relacionan la presencia de estas magnitudes con los contextos de mezclas, que suponen un mayor grado de dificultad, pero indican que la incidencia de esta variable no está completamente comprendida por lo que necesita más estudio.

En un trabajo más reciente (Fernández *et al*., 2011) se estudió el efecto de la presencia de magnitudes continuas y discretas en problemas numéricos de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa. Uno de los objetivos de los autores es estudiar el efecto de esta variable, junto con la aparición de razones enteras y no enteras ya comentada en la sección anterior, en alumnos de últimos años de primaria y alumnos de secundaria y relacionarlas con el efecto de ilusión de linealidad, presentando problemas aditivos y multiplicativos. Los autores incluyen magnitudes de naturaleza discreta, en concreto de cardinalidad, en las que las cantidades no enteras no tendrían sentido, por ejemplo:

> Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Empezaron al mismo tiempo, pero Tomás es más rápido. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomás ha cargado 100 cajas. Si Pedro ha cargado 60 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás? (Fernández & Llinares, 2012, p. 132).

Y contraponen dichos problemas a problemas análogos en los que las magnitudes involucradas son de naturaleza continua, por ejemplo:

> Ana y Raquel están patinando. Empezaron al mismo tiempo, pero Raquel es más rápida. Cuando Ana ha patinado 40 metros, Raquel ha patinado 100 metros. Si Ana ha patinado 60 metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel? (Fernández & Llinares, 2012, p. 132).

El estudio muestra un ligero aumento de los métodos proporcionales (incluso en problemas no proporcionales) en los problemas que involucran magnitudes discretas. Sin embargo, como indican los autores, las diferencias con otros estudios (Boyer *et al*., 2008; Spinillo & Bryan, 1999) podrían estar generadas por el uso de otra tipología de problemas (valor perdido en vez de comparación). Otro hecho a tener en cuenta es que los problemas planteados en este estudio tienen solución entera. Cabría preguntarse si el efecto de las magnitudes discretas podría añadir dificultad en problemas en los que la solución no fuese entera y hubiera que interpretar o manejar una cantidad como 11,6 cajas en cada camión con poco o ningún sentido físico (Fernández et al., 2011, p. 20).

Magnitudes homogéneas y magnitudes heterogéneas.

La presencia de magnitudes homogéneas (o no) está íntimamente ligada a la clasificación de las estructuras semánticas hecha por Lamon (1993a) y las estructuras organizativas en la fenomenología de Freudenthal (1983). Hay contextos paradigmáticos de situaciones que involucran situaciones de proporcionalidad entre una misma magnitud medida en objetos diferentes. Por un lado, los problemas de mezclas, que dan lugar a problemas parte-parte-todo (Cramer & Post, 1993;

Lamon, 1993a; Tourniaire & Pulos, 1985) relacionados con las composiciones (Fernández , 2009). Por otro, los problemas relacionados con la proporcionalidad geométrica, que incluyen los de escalas, que pertenecen a la categoría semántica de ampliadores y reductores (Cramer & Post, 1993; Lamon, 1993a) y relacionados con los constructos (Fernández, 2009).

Entre los primeros, en la literatura han sido ampliamente utilizados, los problemas de mezcla de agua y zumo (Boyer *et al.*, 2008; Noelting, 1980a, 1980b), en los que las magnitudes involucradas son de volumen o de capacidad (de agua y de zumo). En general, como explicamos en la sección II.2.4.8. Mezclas., los problemas de mezclas vienen caracterizados por la presencia de una magnitud aditiva y la situación de proporcionalidad la proporciona la relación entre los espacios de medida al considerar dicha magnitud sobre cada subproducto de la mezcla y sobre el total. De esta forma, tanto las razones internas como externas son razones que involucran cantidades de la misma magnitud. De la misma forma, las situaciones de proporcionalidad geométrica (escalas, Thales, semejanza, etc.) involucran una única magnitud geométrica (longitud, área, volumen, etc.).

Diferentes autores señalan la mayor dificultad que tienen las situaciones con magnitudes homogéneas frente a las heterogéneas (Cramer & Post, 1993; Fernández, 2009; Lamon, 1993a; Steinthorsdottir, 2006; Tourniaire & Pulos, 1985).

Vergnaud (1983) expresa de la siguiente forma la diferente dificultad que supone dotar de significado a las razones cuando estas involucran cantidades heterogéneas y homogéneas:

> El análisis dimensional de las razones funcionales está claro cuando M_1 y M_2 tienen diferentes dimensiones como: el tiempo en horas y la distancia en kilómetros para la velocidad, volumen en centímetro cúbicos y la masa en gramos para la densidad volumétrica, [...]. En muchos estudios en los que las unidades de medida son las mismas (vasos del mismo tamaño para agua y zumo de naranja), el cociente de las dos dimensiones no aparece de forma tan clara. (p. 167)

Fernández (2009) identifica cada una de las estructuras fenomenológicas con un nivel de dificultad. En el nivel más sencillo estarían los problemas que involucran parejas de exposiciones, generalmente identificados con magnitudes heterogéneas, y con las situaciones bien compactadas y de conjuntos asociados propuestas por Lamon (1993a). En un segundo nivel se encontrarían los problemas que involucran parejas de composiciones, en los que se incluyen los problemas de estructura parte-parte-todo y que corresponden a situaciones de magnitudes homogéneas. Por último, los problemas más complicados serían los relacionados con parejas de constructos en los que se incluyen las situaciones de ampliadores y reductores y que también involucran magnitudes homogéneas.

Magnitudes extensivas y magnitudes intensivas.

Otra de las variables que puede introducir dificultad en los problemas es la presencia de magnitudes intensivas. Schwartz (1988) señala esta posibilidad, aunque sin evidencias empíricas al respeto. Nunes, Desli y Bell (2003) realizan una amplia experimentación con alumnos de siete y ocho años. Al igual que en otras experimentaciones con alumnos de primeros años de Educación Primaria, la información en los problemas se proporciona de manera gráfica y son problemas de comparación (no de valor perdido), por lo que los alumnos no deben realizar operaciones entre las cantidades ni obtener un resultado numérico. Para elaborar las magnitudes intensivas del estudio los autores se basan principalmente en la siguiente estructura, se consideran dos magnitudes extensivas M_1 y M_2, entre las que tiene sentido considerar la razón, es decir, las magnitudes intensivas $I_1 = M_1/M_2$ e $I_2 = M_2/M_1$. Entonces, si se considera constante una de las magnitudes extensivas la otra es directamente proporcional a una de las magnitudes intensivas e inversamente proporcional a la otra (su inversa). Los autores buscan contextos familiares que permitan hacer referencias a las magnitudes intensivas con facilidad (caro/barato o situación más o menos económica, dulce/amargo, rápido/lento). Además de encontrar en los alumnos, una mayor dificultad para realizar las tareas de proporcionalidad inversa, el trabajo contrapone estas situaciones con otras en las que intervienen magnitudes extensivas en el enunciado concluyendo que los alumnos tienen más dificultades en las tareas de comparación que incluyen magnitudes intensivas. Los autores remarcan la necesidad de realizar un mayor trabajo en la Educación Primaria respecto a la presentación de magnitudes intensivas.

Además de las dificultades relacionadas con el uso de magnitudes intensivas relatadas por algunos trabajos, otros autores señalan algunas dificultades propias del trabajo con magnitudes extensivas como, por ejemplo, la dificultad para dotar de significado el producto de dos magnitudes extensivas (Bosch, 1994; Freudenthal, 1973; Vergnaud, 1983). Para Vergnaud, estos productos, incluidos en la estructura de producto de medidas, que también hemos nombrado anteriormente como problemas Estado-Estado-Estado, son diferentes de los productos establecidos entre una magnitud extensiva y una intensiva (en la que la extensiva aparece como “denominador”) que prefiere incluir en la categoría de isomorfismo de medidas (problemas Estado-Razón-Estado). Las situaciones de producto de medida están, además, íntimamente ligadas a las situaciones de proporcionalidad inversa y compuesta (Arican, 2018).

En el contexto de las situaciones de proporcionalidad compuesta, Bosch (1994) incide en la dificultad de dotar de significado a los productos de magnitudes extensivas. Además, relaciona el éxito en este tipo de actuaciones a elementos culturales y observa diferentes estrategias de resolución según pueda establecerse o no dicho significado.

Esta dificultad es una de las posibles causas que Martínez-Juste *et al*. (2017) relacionan con el hecho de que los libros de texto incluyan siempre magnitudes intensivas en los problemas con estructuras producto $\mathbb{p} = (1,1, \dots, 1)$, pese a la escasa presencia general de este tipo de magnitudes en los enunciados de los problemas.

> Este hecho está en clara relación con las dificultades para dotar de significado al producto de magnitudes. Según Freudenthal (1973), los procesos matemáticos que dotan de significado al producto de dos magnitudes son complicados y, por tanto, la dificultad es aun mayor cuando se trata de dotar de significado al producto de 3 o 4 magnitudes. (Martínez-Juste *et al*., 2017, p. 117)

Los autores apuntan a que en la docencia deberían presentarse las magnitudes extensivas e intensivas de manera más equilibrada (abunda el uso de magnitudes extensivas), y que los procesos para dotar de significado al producto de varias magnitudes pueden proporcionar métodos para elaborar enunciados de problemas de proporcionalidad compuesta a futuros docentes (o docentes en ejercicio), pese a las dificultades que presentan en este tipo de tareas (Ortega, Pecharromán, & Sosa, 2011).

Magnitudes intensivas bien compactadas.

Lamon (1993a) distingue, como hemos dicho anteriormente, que las razones (externas) de una situación de proporcionalidad simple directa conformen una magnitud con entidad propia o no, las primeras son las denominadas razones bien compactadas y las segundas son razones en situaciones de conjuntos asociados. Los resultados de su estudio muestran que los alumnos son capaces de concebir la razón como unidad (razonamiento proporcional) con mayor facilidad en los problemas de conjuntos asociados que en los de medidas bien compactadas. Lamon, atribuye este hecho a que los problemas de conjuntos asociados requieren de menor capacidad de abstracción y son más fácilmente representables que los problemas de razones bien compactadas como los de velocidad y precio. Otros estudios, sin embargo, no encuentran diferencias significativas en las tasas de éxito de los alumnos en tareas que implican magnitudes intensivas bien compactadas o provenientes de situaciones de conjuntos asociados (Nunes *et al*., 2003).

II.3.3.3. Variables de contorno

Tourniaire y Pulos (1985) distinguen variables de contorno que pueden afectar al éxito en las tareas y que han sido puestas de manifiesto por algunas investigaciones en educación matemática. Es el caso de la *familiaridad con la situación* y con el *uso de materiales manipulativos*. Si bien, parece demostrada su influencia en la tasa de éxito, los autores indican que dicha influencia es limitada y no afecta por igual a todos los individuos, incluso puede perjudicar a un número reducido de alumnos.

II.3.3.4. Estructura multiplicativa

Ya hemos mencionado las mayores dificultades que relacionan algunos autores con las situaciones de proporcionalidad inversa respecto a las de relación directa (Arican, 2019a, 2019b; Fisher, 1988; Nunes *et al*., 2003). Además, según Gairín y Oller-Marcén (2011, p. 189) “la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa están muy alejadas, tanto desde un punto de vista matemático como cognitivo”. Estas diferencias y la mayor dificultad que plantean las situaciones de proporcionalidad inversa también se relacionan con la mayor dificultad que Vergnaud (1983) achaca a los problemas que envuelven situaciones de producto de medidas, que están en la base de la proporcionalidad inversa (Arican, 2018), frente a los de isomorfismo de medidas, relacionados con las situaciones de proporcionalidad directa.

En cuanto a la proporcionalidad compuesta, es obvio que, considerada de forma general, es una estructura de un nivel superior que contiene a las estructuras propias de la proporcionalidad simple y, por tanto, los problemas relacionados plantean más dificultades en los alumnos. En este sentido apuntan los resultados de Carretero (1989) que solo consideraba relaciones directas. Sin embargo, en el estudio realizado por Vergnaud (1983), los problemas con estructura compuesta con tres magnitudes, $\mathbb{p} = (1, -1, -1)$, proporcionalidad doble en su terminología, resultaron más sencillos (tasa de éxito mayor) que los que tenían una estructura de producto de medidas. En este mismo sentido, el estudio realizado por Martínez-Juste *et al*. (2015a) con problemas de valor perdido con la estructura multiplicativa anterior y la incógnita en la primera magnitud, es decir, problemas de tipo Directa-Directa, mostró que alumnos de primaria y alumnos de primer año de secundaria sin experiencia previa obtenían buenas tasas de éxito en la resolución. Tal hecho, puede deberse, precisamente, a la relación de tipo directa que puede establecerse entre la variable dependiente y cada una de las independientes.

II.4. Propuestas y experiencias de enseñanza desde la investigación educativa

Presentamos en esta sección una revisión, que no pretende ser exhaustiva, de propuestas y experiencias de enseñanza de la proporcionalidad que se han planteado desde la investigación educativa a modo de antecedentes de la investigación que abordamos en esta memoria. Entre los trabajos revisados mencionaremos varias tesis doctorales de defensa reciente en nuestro país en las que la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad es el concepto matemático principal. En concreto, los trabajos de García (2005), Rivas (2013) y Valverde (2012), y el trabajo de Oller-Marcén (2012) que, como hemos dicho, es el referente principal de este trabajo.

II.4.1. Dirigidas a alumnos de primaria y secundaria

Lamon (2007), desarrolla a lo largo de cuatro cursos consecutivos, equivalentes a 3º, 4º, 5º y 6º de Educación Primaria, una intervención centrada en la enseñanza de la fracción y el desarrollo del razonamiento proporcional. La intervención se realizó sobre cinco grupos naturales de alumnos manteniendo un sexto grupo como grupo de control. La intervención en los cinco grupos no fue homogénea, sino que en cada grupo se inició la intervención presentando la fracción desde un modelo diferente, utilizando los cinco significados del número racional comúnmente utilizados en la investigación en educación matemática: medida, cociente, razón, operador y relación parte-todo (Kieren, 1980). Los resultados indicaron una mejor actuación de los cinco grupos experimentales frente al grupo de control, siendo algo mejores los resultados obtenidos en los grupos de medida y razón.

La propuesta descrita por Moss (2002) utiliza el porcentaje como constructo para introducir la enseñanza del número racional en 4º de Educación Primaria. Para Moss, la ventaja de utilizar el porcentaje en la introducción del número racional plantea varias ventajas: los alumnos poseen un conocimiento informal sobre el porcentaje previo a la instrucción y las fracciones decimales permiten relacionar la notación como fracción y la notación como número decimal de los números racionales con facilidad.

Abrahamson (2004) desarrolla en su tesis doctoral una propuesta de enseñanza de la razón y proporción para alumnos de 5º grado (5º de Educación Primaria). En dicha propuesta, expuesta también en el trabajo de Abrahamson y Cigan (2003), se presenta una trayectoria de enseñanza basada en el uso de la tabla de multiplicar como herramienta para encontrar patrones multiplicativos. De esta manera las razones externas e internas aparecen como los elementos de la columna y la fila que comienza en la unidad. A partir de ahí se trabajan las situaciones de proporcionalidad directa entre dos magnitudes a partir de sistemas de representación tabular. Una forma similar de conexión entre la multiplicación de números enteros y la proporcionalidad, a través de un sistema de representación concreto (la doble línea numérica) es utilizada también por maestros japoneses de matemáticas (Hino & Kato, 2019).

El trabajo de Norton (2005), ya mencionado anteriormente, explica una propuesta de enseñanza experimentada con 46 alumnas de 6º grado (6º de Educación Primaria). La propuesta se articula a través de tres actividades de investigación de carácter abierto y manipulativo, que desarrollan diferentes conceptos asociados con el razonamiento proporcional. Los tres conceptos para los que se desarrollan las actividades son, la proporcionalidad directa en situaciones de mezcla (parte-parte-todo), la proporcionalidad directa en situaciones de escalas, y la proporcionalidad inversa. Para el primer concepto se desarrollan prácticas reales con mezclas de líquidos, para la segunda se realiza un modelo a escala humana de una muñeca para estudiar si las proporciones corporales de la muñeca son realistas y para el tercero se realizan actividades con piezas de construcción y engranajes. Con los test inicial y final, el estudio revela avances en el pensamiento proporcional de las alumnas.

Howe *et al*. (2011) implementan una experiencia de enseñanza para la enseñanza de la proporcionalidad a través de magnitudes intensivas. Dicha experiencia se llevó a cabo en doce grupos del equivalente a 5º de Educación Primaria y doce grupos del equivalente a 6º de Educación Primaria. En el diseño de las cuatro lecciones de intervención se introdujeron tareas de comparación y valor perdido tanto de situaciones directas como inversas involucrando magnitudes intensivas. La propuesta comienza con tareas de comparación en las que la información se presenta de forma gráfica, similares a las utilizadas en el trabajo exploratorio de Nunes *et al.* (2003). En las intervenciones, los profesores que llevaron a cabo la propuesta utilizaron dos enfoques diferentes de la interpretación de las cantidades intensivas: razón y fracción. Las conclusiones muestran que con ambos enfoques favorecieron la adquisición de habilidades para el trabajo con fracciones pero que, además, los alumnos que recibieron instrucción bajo el enfoque de razón desarrollaron su razonamiento proporcional.

Mochón (2012) realiza una propuesta de enseñanza basada en antecedentes de la investigación matemática que pretende ser una guía para profesores y maestros. La propuesta se divide en diferentes etapas en las que se plantean situaciones problemáticas para ir generando el conocimiento proporcional. El objetivo de la propuesta es llegar a introducir procedimientos algorítmicos como la regla de tres justificando dicha técnica a través del concepto de razón. Para ello, Mochón secuencia el aprendizaje en cinco etapas que se basan en la sofisticación de las estrategias para resolver problemas de valor perdido (acercamientos en su terminología): uso de tablas y razonamiento pre-proporcional, unitario (calcular la cantidad de una magnitud que se relaciona con una unidad de la otra), unitario por razón externa, razonamiento proporcional (se establece la constancia de la razón externa), algorítmico (se justifica el método de proporciones mediante la constancia de la razón externa y a partir de él se despeja la incógnita mediante razonamientos algebraicos que terminan justificando la regla de tres).

Burgos y Godino (2019a) describen los resultados de una experiencia de enseñanza utilizando un modelo instruccional de tipo mixto que combina el autodescubrimiento guiado y la instrucción directa. La secuencia, que se inspira en las indicaciones de Mochón (2012) y adopta alguna de sus actividades, está diseñada para introducir los conceptos de razón y de relación de proporcionalidad simple directa a alumnos de 5º de Educación Primaria. Los autores describen cuatro sesiones y un post-test o prueba de evaluación. En las sesiones de clase se combinaban situaciones introductorias abiertas con actividades guiadas por la profesora-investigadora. Las actividades se centran en la resolución de problemas de valor perdido mediante el trabajo con series numéricas tabuladas y argumentaciones basadas en el concepto de razón externa. Los autores analizan los efectos positivos de la instrucción en el reconocimiento de la reciprocidad de las relaciones directas y de las dos razones externas que pueden considerarse, y en la resolución de problemas de contexto geométrico como el del puzle de Brousseau (2006). En concreto, según los autores, la introducción de los conceptos de proporcionalidad desde un punto de vista aritmético puede ayudar a solventar algunas de las dificultades que tienen los estudiantes al abordar tareas de proporcionalidad en un contexto geométrico.

Centrada en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de porcentaje cabe destacar la trayectoria de aprendizaje diseñada por Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) mediante tres unidades didácticas para grado 5º y 6º (5º y 6º de Educación Primaria). La propuesta, fuertemente basada en la relación entre porcentaje, decimal y fracción, tiene como idea principal el uso del modelo de barras (ver sección II.2.2.3. El concepto de porcentaje). Así, tras unas primeras actividades exploratorias que ponen de manifiesto los conocimientos previos e informales de los alumnos se introduce la representación gráfica mediante el modelo de barras. Dicho modelo se utiliza en la realización de estimaciones, en la resolución de problemas de valor perdido y en la modelización de situaciones complejas asociadas a porcentajes. La trayectoria, secuenciada en complejidad, comienza con actividades de corte más cualitativo y termina con problemas de cálculo más complejos. Inspirados en esta trayectoria de aprendizaje, Pöhler y Prediger (2015) rediseñan y experimentan en cuatro ciclos una trayectoria de aprendizaje para el porcentaje con alumnos de 7º grado (1º de ESO). La propuesta consiste en una trayectoria dual, basada tanto en el desarrollo de los conceptos matemáticos como del léxico asociado a las actividades de porcentajes, estructurada mediante el modelo de barras para porcentajes. Los tres primeros ciclos de investigación se realizaron mediante experimentos de laboratorio en la que un instructor se encargaba de dos alumnos, mientras que el cuarto ciclo se experimentó sobre un grupo natural de alumnos.

Adjiage y Pluvinage (2007) desarrollan un experimento de enseñanza sobre números racionales y razón, con dos grupos durante dos cursos consecutivos de niveles equivalentes a 6º de Educación Primaria y 1º de ESO. El profesor que impartió las clases fue el mismo en ambos grupos durante los dos años. En ambos grupos se introdujeron cambios sobre las propuestas tradicionales investigando las relaciones entre el mundo físico y el mundo matemático alrededor del concepto de razón, pero en uno de los grupos, este aprendizaje se realizó con una metodología basada en pizarra y papel y en el otro, de forma guiada por los investigadores, mediante el uso de herramientas informáticas. Los resultados, tras la comparación de un test inicial y un test final muestran una mejora en ambos grupos, pero más completa en el grupo que recibió la docencia mediante el entorno informático. Las mejoras en este grupo afectaron de manera más significativa a los alumnos con altas y bajas puntuaciones en el test inicial.

Ben-Chaim, Fay, Fitzgerald, Benedetto y Miller (1998) comparan dos propuestas curriculares[39] diferentes que convivían en Estados Unidos en la década de los noventa. En concreto estudian los efectos de la enseñanza de la proporcionalidad en ocho grupos de 7º grado (1º de ESO) a partir de una propuesta novedosa y los comparan con los obtenidos por siete grupos de estudiantes que han recibido una enseñanza tradicional. La propuesta novedosa presenta los contenidos a través de la resolución de problemas contextualizados (Gaulin, 2001). Además, los profesores motivan a los alumnos a crear sus propias estrategias de resolución. Los resultados del estudio muestran mejores resultados de los alumnos mediante el nuevo currículo. Los autores remarcan la capacidad de los alumnos que han recibido enseñanza mediante el nuevo currículo para dar explicaciones sobre sus actuaciones y la variedad de estrategias de resolución (algunas óptimas) encontradas en los cuestionarios finales.

Otro trabajo de comparación de propuestas didácticas es el llevado a cabo por Miyakawa y Winsløw (2009). En este caso, los autores comparan dos diseños didácticos para el desarrollo del razonamiento proporcional en la escuela primaria en dos países diferentes (Japón y Francia). El contexto de las propuestas es geométrico basándose en la idea de igualdad de formas entre figuras. Las propuestas se basan en dos marcos teóricos diferentes, mientras que la propuesta japonesa se basa en el desarrollo de *lesson studies*, la francesa lo hace en la ingeniería didáctica dentro del marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

A partir de la década de los noventa, Kaput, Roschelle y otros colaboradores estudian la introducción de la tecnología en el aula de matemáticas para la enseñanza de las “matemáticas del cambio y la variación” que hace referencia a los contenidos matemáticos modelizables desde una perspectiva funcional, enfatizando la idea de razón como tasa de cambio y los diferentes sistemas de representación (Kaput & Roschelle, 1998). Desarrollan para ello el programa SimCalc que introducen en diferentes centros de enseñanza secundaria en Estados Unidos. Mediante el uso de estas herramientas autores del grupo de trabajo de SimCalc hicieron una amplia experimentación de la enseñanza de la proporcionalidad (1º y 2º de ESO) a partir del estudio de la función lineal (Roschelle *et al.*, 2010).

Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel (2004) realizan un experimento de enseñanza para alumnos de 8º grado (2º de ESO) con el fin de reducir la falsa idea de linealidad en

---

[39] Los autores comparan la propuesta curricular *Connected Mathematics Project* (CMP) desarrollada a partir de la influencia de los estándares curriculares del NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) con la enseñanza tradicional.

un contexto geométrico con las magnitudes longitud, área y volumen. Para ello diseñan una secuencia de diez lecciones de una hora de duración cada una para el grupo de estudio y realizan un cuestionario inicial al grupo de estudio y al de control, así como un cuestionario final tras las lecciones. Aunque los alumnos redujeron las respuestas proporcionales en situaciones no proporcionales, los autores destacan que un número significativo de alumnos sigue presentando problemas para distinguir las situaciones proporcionales de las que no lo son.

Flores, Koontz, Inan y Alagic (2015) estudian el impacto de dos propuestas de enseñanza sobre porcentajes llevadas a cabo en dos grupos naturales de 7º grado (1º de ESO), de veintidós y veintiún alumnos respectivamente. Los alumnos de ambos grupos recibieron la misma instrucción, pero en orden diferente. En un primer grupo los alumnos comenzaban con una instrucción que presentaba diferentes sistemas de representación (múltiples representaciones - MR) y se proponían actividades abiertas en las que disponían de libertad para explorar estrategias de resolución. La segunda parte de la instrucción se basaba en presentar técnicas algorítmicas para la resolución de problemas tipificados de porcentajes. El segundo grupo de alumnos recibía la instrucción en el orden contrario. Los resultados revelaron una mejora mayor en el grupo que comenzó con la instrucción en múltiples representaciones. La mejora fue más acusada en los problemas que no se correspondían directamente con los Tipos I, II y II, como el caso de los problemas de aumentos y disminuciones porcentuales.

Vahey *et al*. (2012) reportan una interesante propuesta de enseñanza interdisciplinar en el nivel equivalente a 1º de ESO que pretende mejorar la competencia numérica y desarrollar el razonamiento proporcional de los alumnos. Para ello se diseña una propuesta que involucra cuatro áreas de conocimiento: ciencias sociales, matemáticas, ciencias y lengua (inglesa). En el módulo de ciencias sociales se introduce el problema de reparto de agua entre países con carestías, estudiando ciertos parámetros demográficos. En el bloque de matemáticas se desarrollan los contenidos sobre proporcionalidad a partir de la modelización del problema de reparto "justo", simplificando el problema del reparto de agua e introduciendo las razones con argumentos de reparto per cápita. A partir de ahí, se introducen otros conceptos relacionados con la proporcionalidad, siempre de forma contextualizada, como la salinidad de agua. Tras el trabajo en matemáticas se introduce el bloque de ciencias en el que se siguen usando los conceptos matemáticos como herramienta. En el bloque lingüístico los alumnos ponen en juego los conocimientos adquiridos en matemáticas, ciencias y ciencias sociales para elaborar argumentaciones

Parte del trabajo realizado por García (2005) en su tesis doctoral es la realización de un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) para la articulación de los conceptos asociados con la proporcionalidad. Se llevaron a cabo dos ciclos de experimentación, el primero de ellos con alumnos seleccionados de 1º de bachillerato que no pudo completarse y el segundo con un grupo natural de 4º de ESO. La idea fundamental es realizar una propuesta que permita articular los contenidos escolares asociados a la proporcionalidad (Bosch *et al*., 2006), para ello se utiliza un enfoque de modelización funcional de una situación contextualizada en los planes ahorro.

II.4.2. Dirigidas a profesores en formación o en ejercicio

Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007, 2012) diseñan, implementan y evalúan una propuesta de enseñanza para maestros y profesores en formación israelíes centrada en la enseñanza de la razón y proporción. Para ello utilizan lo que los autores denominan "actividades auténticas de investigación" que consisten en tareas abiertas y no rutinarias basadas en situaciones de la vida cotidiana que dan espacio a la reflexión, la creatividad y la autocrítica (Ben-Chaim, Ilany, & Keret, 2008). Los autores persiguen de esta forma valorar la influencia de la propuesta en el conocimiento matemático y profesional de los futuros docentes.

Monteiro (2003) utiliza la proporcionalidad para ejemplificar los principios mediante los que se diseña un programa de enseñanza para futuros maestros de primaria portugueses. Dichos principios son, experimentación, reflexión y transferencia. Así, los futuros maestros resuelven actividades de proporcionalidad para después reflexionar y discutir sobre procesos cognitivos puestos en juego en la resolución, otras formas de resolución de las tareas, el conocimiento matemático y los conceptos que modelizan las situaciones y las dificultades de los estudiantes. Posteriormente, los futuros maestros ponen en juego los conocimientos adquiridos mediante el diseño de secuencias de aprendizaje para alumnos de la escuela primaria. Los autores destacan que esta metodología permite que los estudiantes sean conscientes de sus posibles carencias en la comprensión de los conceptos involucrados y reflexionen sobre ellas.

Berenson y Nason (2003) describen un experimento de enseñanza a partir del desarrollo de *lesson studies* con tres maestras en formación. La propuesta se basa en diferentes representaciones de la razón para desarrollar el conocimiento específico de los alumnos de magisterio.

Berk, Taber, Gorowara y Poetzl (2009) evalúan y comparan los efectos de dos propuestas de enseñanza de la proporcionalidad para futuros maestros centradas en el concepto de flexibilidad. La flexibilidad es la habilidad que presentan los individuos para utilizar diferentes estrategias de resolución ante un mismo problema y la capacidad para discernir aquella que resulta más eficaz. La diferencia entre las dos propuestas es que, mientras en una los futuros maestros comparaban respuestas dadas por supuestos alumnos, en la otra realizaban y comparaban sus propias resoluciones. El estudio concluye que, pese a la poca flexibilidad inicial de los futuros maestros, ambas propuestas condujeron a aumentar dicha habilidad y no se encontraron diferencias significativas entre los dos enfoques utilizados.

Valverde (2012) desarrolla un experimento de enseñanza para la proporcionalidad para futuros maestros de primaria. Para el proceso de elaboración, la puesta en práctica y el análisis de la propuesta se hace uso del análisis didáctico como marco que permite organizar y fundamentar los conocimientos necesarios en el desarrollo de un experimento de enseñanza (Valverde *et al*., 2013). Como base para el diseño se utilizaron 7 tareas de proporcionalidad propias de educación primaria extraídas de investigaciones previas sobre proporcionalidad a partir de las cuales los futuros profesores debían realizar un análisis epistémico que posteriormente se comparaba con los realizados por el equipo de investigación.

Bajo el marco del Enfoque OntoSemiótico (EOS) Rivas (2013) y Rivas, Godino y Castro (2012) describen un experimento de enseñanza para desarrollar el conocimiento profesional de maestros en formación a partir de tareas de proporcionalidad. La introducción de herramientas del EOS permite identificar objetos y significados involucrados en la resolución de problemas de proporcionalidad. Este análisis epistémico se utiliza como instrumento para desarrollar el conocimiento especializado del contenido y del conocimiento común del contenido de los estudiantes de magisterio (Rivas *et al.*, 2009). El enfoque anterior ha sido utilizado también para la formación de profesores de secundaria (Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone, & Godino, 2018). Una de las principales ideas en estas propuestas es el reconocimiento de niveles de algebrización (Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi, 2014) en tareas de proporcionalidad (Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer, & Godino, 2017).

Además, de los experimentos de enseñanza en los programas universitarios para formación de futuros profesores, otros trabajos relatan experiencias en el ámbito de la formación continua o formación de profesores en ejercicio. Es el caso de la experiencia llevada a cabo en Australia por Hilton, Hilton, Dole y Goos (2016) con 130 profesores de enseñanza secundaria. En su trabajo, los autores destacan la importancia de la formación continua de los profesores en ejercicio para mejorar el razonamiento proporcional de sus alumnos. El programa constaba de seis talleres colaborativos en los que se alternaba teoría y práctica para presentar avances de la investigación educativa en proporcionalidad. Además, se usó el cuestionario inicial realizado por los alumnos de los participantes para enfocar su atención en las necesidades específicas de sus clases. Tras el curso, los profesionales pusieron en práctica los conocimientos adquiridos con sus grupos de alumnos y se evaluaron los progresos de los estudiantes mediante la comparación del cuestionario inicial con otro cuestionario realizado tras la intervención.

II.4.3. Experiencia previa con la propuesta didáctica

En esta sección se resume con mayor detalle la experiencia de investigación-acción de la propuesta de enseñanza para la proporcionalidad aritmética en 1º de ESO llevada a cabo por Oller-Marcén (2012). Dicha propuesta se elaboró a partir de las ideas clave recogidas en las secciones previas de este capítulo y, además, su experimentación supone el punto de partida de los ciclos de investigación-acción desarrollados en el marco del presente proyecto de tesis doctoral. Por tanto, es necesario destacar los puntos fundamentales del diseño y las principales conclusiones obtenidas tras la experimentación de este trabajo.

II.4.3.1. Fase de planificación y diseño

Para la fase de planificación el autor realiza una análisis fenomenológico y epistemológico desde un punto de vista histórico de la proporcionalidad. Para ello, realiza un análisis de contenido de textos antiguos y libros de texto actuales en los que se trabaja la proporcionalidad aritmética. El análisis se estructura en torno a tres grandes bloques, a saber, los aspectos conceptuales, la tipología de problemas y las técnicas de resolución de problemas empleadas en los textos. Las conclusiones obtenidas del análisis son empleadas por el autor en el diseño de la propuesta.

Oller-Marcén (2012) propone una serie de ideas clave que sustentan la filosofía de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad aritmética que posteriormente se plasmarán en el diseño. Estas ideas han sido revisadas e incorporadas en la sección IV.1 del Capítulo IV de esta memoria, además, se han completado y ampliado, incorporando, por ejemplo, los referentes asumidos para los aspectos instruccionales y evaluativos de la propuesta.

Tras la exposición de las ideas generales se realiza un diseño para trabajar algunos de los contenidos en 1º de ESO. En concreto, se trabajaron las situaciones de proporcionalidad simple directa y simple inversa. Dentro de las situaciones de proporcionalidad simple directa se trabaja el concepto de razón y condición de regularidad, los problemas de comparación cuantitativa, los problemas de valor perdido y las situaciones relacionadas con porcentajes. Para las situaciones de proporcionalidad inversa, se trabaja su caracterización y la resolución de problemas de valor perdido.

El diseño se compuso de ocho fichas de trabajo de aula, siete fichas de trabajo para casa y una prueba escrita final. El diseño curricular concreto de las once sesiones de clase y las actividades que se plantean puede consultarse en la sección V.3. del trabajo de Oller-Marcén (2012, pp. 183-225).

II.4.3.2. Fase de acción

La propuesta didáctica de Oller-Marcén (2012) se experimentó en dos grupos naturales de 1º de ESO del IES Avempace (Zaragoza). Los grupos contaban con veintisiete y veintinueve alumnos respectivamente, por lo que el tamaño final de la muestra fue de 56 alumnos. Los alumnos trabajaban en parejas (o tríos) las fichas de actividades de aula y de manera individual las de trabajo para casa. La experimentación tuvo lugar en marzo de 2010.

II.4.3.3. Fase de observación

Se utilizan los siguientes instrumentos para la recogida de información:

- Diario de clase en el que se recogía información sobre el ajuste de la acción al plan previsto, incidencias y ausencias de los alumnos, aspectos sobre la comprensión de los contenidos por parte de los alumnos y decisiones sobre la planificación.
- Producciones de los alumnos: de las actividades de aula, de las tareas de casa y de la prueba escrita.
- Encuesta final a los alumnos en la que se recogió la opinión de los alumnos en torno a cuatro aspectos de la propuesta: desarrollo de las clases y forma de trabajar, interés y dificultad de los contenidos trabajados, actitud general hacia la asignatura de matemáticas y ayuda externa recibida durante la propuesta.

Especialmente detallado es el análisis cuantitativo y cualitativo que hace Oller-Marcén (2012) de las producciones de los alumnos en cada una de las tareas que componen la propuesta didáctica y de los problemas propuestos en la prueba escrita final. Para el análisis de las producciones de los alumnos, el autor utiliza diferentes unidades de análisis para cada tipo de actividad según la clasificación mencionada en la sección anterior estructurada alrededor de los focos de interés. Así, dentro de cada uno de los contenidos que componen cada foco de interés se establecen unidades de análisis generales para dar cuenta del éxito en la tarea y unidades específicas para estudiar el tipo de argumentaciones y las estrategias empleadas por los alumnos en la resolución. Esta estructura de unidades de análisis ha supuesto el germen para los niveles de análisis y el sistema de categorías de análisis utilizado en la presente memoria y que hemos presentado en el Capítulo III.

El análisis de la información extraída de los instrumentos anteriores permitió al autor elaborar las reflexiones y conclusiones que resumimos en la siguiente sección y que, como veremos, suponen uno de los puntos de partida para la planificación de los primeros ciclos de investigación-acción que relatamos en este trabajo.

II.4.3.4. Fase de reflexión

Conclusiones respecto al diseño de la propuesta

Para Oller-Marcén (2012, p. 497) es necesario "revisar la temporalización y la extensión de las actividades de aula", el tiempo previsto para el desarrollo de las sesiones resultó insuficiente en este primer ciclo de la propuesta en 1º de ESO en dos aspectos:

- El número de sesiones planificadas fueron insuficientes para presentar y desarrollar los contenidos.
- El número de apartados diferentes en algunas de las actividades diseñadas fue excesivo haciendo que algunos alumnos no pudieran acabarlas en el tiempo dedicado a cada sesión en el aula.

Además, parece necesario reelaborar la secuenciación de los contenidos dentro del diseño de la propuesta para reflejar de manera más adecuada las ideas en las que se sustenta la propuesta didáctica. Sin embargo, como indica Oller-Marcén (2012), un diseño completo siguiendo las ideas de la propuesta supone una importante ruptura curricular que puede generar ciertos problemas para una implementación en el aula.

Conclusiones respecto a la comprensión de los alumnos

El concepto clave que articula toda la propuesta es el de razón externa entre las magnitudes relacionadas en una situación de proporcionalidad directa e interpretada como tanto por uno. Es, por tanto, a este concepto, su significado y las condiciones necesarias para su existencia, a los que se dedican un mayor número de conclusiones tras la experimentación:

- Un número relativamente alto de los alumnos muestra indicios de comprender el concepto de razón externa y su interpretación como cantidad de magnitud intensiva.
- Las justificaciones de las relaciones de proporcionalidad a través de razones externas explicitando condiciones de regularidad (constancia) tienen poca presencia.
- Pocos alumnos manejan de forma simultánea las diferentes facetas del concepto de razón externa: valor numérico, interpretación en contextos realistas y condición de regularidad que permite su cálculo.
- Aunque los alumnos distinguen situaciones en las que no puede calcularse la razón, un número significativo de ellos no presenta justificaciones en este tipo de situaciones.
- El trabajo centrado en la interpretación de la razón externa como cantidad de magnitud intensiva acarrea ciertas dificultades a la hora de detectar las situaciones de proporcionalidad inversa. Los alumnos detectan condiciones de regularidad y magnitudes intensivas en este tipo de situaciones lo que les hace pensar que existe una relación directa.

Tras estas reflexiones, se proponen algunos aspectos que podrían mejorarse en futuras implementaciones:

- Debe aumentarse el tiempo dedicado a trabajar conceptos básicos como el de razón y la condición de regularidad.
- Sería conveniente hacer un mayor énfasis en los diferentes aspectos que incluye el concepto de razón (valor numérico, significado, existencia) y la interrelación de estos.
- Al presentar la razón externa y su interpretación como cantidad de magnitud intensiva en situaciones de proporcionalidad directa, debe realizarse mayor énfasis en que la covariación entre las magnitudes involucradas es una condición necesaria para poder considerar este tipo de relación y, por tanto, para poder calcular las razones asociadas.

Otras de las consideraciones sobre la caracterización de las relaciones proporcionales, tanto directas como inversas, que se hacen en el trabajo son las siguientes:

- Los alumnos tienen mayores dificultades identificando relaciones de proporcionalidad cuando las magnitudes se presentan de forma genérica sin un contexto concreto en el que se proporcionan datos numéricos.
- En general, el éxito detectando situaciones que no son proporcionales es alto y mayor que caracterizando situaciones en las que sí existe una relación proporcional.
- El número de alumnos que caracteriza las relaciones de proporcionalidad sin esgrimir argumentos no es despreciable.
- Se detecta un alto uso de caracterizaciones cualitativas por aumentos y disminuciones.

Para mejorar estos aspectos se propone dedicar mayor tiempo y esfuerzo para trabajar estos conceptos. Además, parece conveniente aumentar el número de situaciones diferentes presentadas a los alumnos en los que deban decidir si dos magnitudes están ligadas por una relación de proporcionalidad. Sin embargo, no debe perderse de vista que los alumnos de 1º de ESO muestran dificultades en el trabajo con algunas magnitudes provenientes de la física.

Se considera que los conocimientos previos sobre algoritmos de cálculo en problemas de Tipo I de porcentajes han dificultado que los alumnos relacionen las situaciones de porcentajes con las situaciones de proporcionalidad directa durante la propuesta didáctica. Para el autor, la propuesta ha resultado fallida en lo concerniente a las situaciones relacionadas por el porcentaje. Por tanto, parece necesario reformular la propuesta en este aspecto y, quizás, dedicar un mayor tiempo a este aspecto para vencer el obstáculo que suponen los conocimientos previos.

Conclusiones respecto a la metodología

Respecto a la metodología de aula Oller-Marcén (2012) reflexiona sobre el papel del material manipulativo, las tareas para casa y las agrupaciones de aula que se han empleado en la experimentación:

- Las actividades introductorias para el primer ciclo se diseñaron de forma que los alumnos dispusieran de material de apoyo manipulativo (pajitas y tarjetas) para responder a actividades de intercambio. Sin embargo, se observó que un bajo número de alumnos lo utilizaba. Oller-Marcén (2012) propone reflexionar sobre la conveniencia de utilizar este tipo de materiales o, incluso, eliminarlos de la propuesta.
- En las tareas que los alumnos realizaron fuera del aula se observaron un buen número de influencias externas no deseables. Por tanto, parece conveniente replantearse el papel y el número de actividades incluidas en dichas actividades.
- Cabría la posibilidad de replantearse el trabajo por parejas o tríos ya que se ha observado que en algunos de estos grupos la mayor parte del trabajo era realizado por algunos miembros concretos. Oller-Marcén (2012) se plantea el funcionamiento de la propuesta si se trabajase en grupos colaborativos de nivel homogéneo.

Conclusiones respecto al funcionamiento general de la propuesta

Uno de los principales logros de la propuesta es el referente al uso significativo de las operaciones entre cantidades de magnitud relacionadas mediante estructuras multiplicativas:

> La propuesta que hemos desarrollado, si bien es mejorable, contribuye a que los alumnos hagan mayor y mejor uso de sus conocimientos sobre el significado de las operaciones aritméticas a la hora de resolver problemas relacionados con la proporcionalidad, obteniendo así un aprendizaje más significativo. (Oller-Marcén, 2012, p. 480)

Además, se destacada que mediante la propuesta se evita el empleo de estrategias como la regla de tres o el empleo de otras fórmulas que no solo suponen un esfuerzo memorístico, además, ahondan en la identificación de la resolución de problemas con la clasificación de estos en diferentes tipos. Así, los alumnos que han recibido la propuesta muestran competencia resolviendo problemas de proporcionalidad empleando los significados de los productos y cocientes de cantidades de magnitud dentro del contexto en el que se les plantea el problema. Por lo que la propuesta contribuye a dejar de lado otras estrategias en las que se ha basado tradicionalmente la enseñanza y que “no muestran claramente el porqué de las cosas” (Oller-Marcén, 2012, p. 479).

Otras ideas para mejorar y ampliar la propuesta

Se apuntan diferentes aspectos para tener en cuenta en siguientes implementaciones, para ampliar la propuesta a otros niveles educativos y, en general, para continuar la línea de investigación centrada en la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad aritmética. Entre ellos destacamos los siguientes:

- Diseñar fichas de actividades de aula y de trabajo en casa para trabajar los contenidos que no se experimentaron en el primer ciclo. En particular, los relativos a la proporcionalidad compuesta y los repartos proporcionales.
- Concretar un modelo de aprendizaje para la introducción de la proporcionalidad inversa en el que la constante de proporcionalidad surja de manera natural.
- Sería recomendable extender la experimentación a más alumnos. De esta forma se dispondría de una mayor muestra experimental que mejoraría la evaluación de la propuesta.
- Una ampliación de la experimentación en otros centros de secundaria permitiría acceder a un mayor número de docentes y observar el modo en el que acogen y asumen la forma en la que se trabajan los contenidos sobre proporcionalidad en la propuesta didáctica.
- Sería deseable disponer de grupos de control con los que poder comparar los resultados obtenidos mediante esta propuesta didáctica frente a los obtenidos mediante una enseñanza tradicional.
- El trabajo en la formación inicial y permanente con maestros de primaria y profesores de secundaria es esencial para consolidar la propuesta didáctica y estudiar cómo la adaptan a su práctica docente los docentes en ejercicio.

Capítulo III: Metodología de investigación

En este capítulo de la memoria de tesis doctoral se describe y fundamenta el diseño y la metodología de investigación de nuestro trabajo. En una primera sección, presentamos el marco metodológico describiendo las características principales de la investigación-acción. A continuación, repasamos algunos indicadores sobre calidad y ética en investigación en ciencias sociales. Por último, se presenta el método de investigación empleado, relacionando su diseño con las características generales descritas para la investigación-acción. Describiremos el contexto social en el que se genera el problema de investigación y en el que se actúa. La descripción del contexto social se elabora a diferentes niveles: el personal del profesor-investigador, el del centro donde se realiza la experimentación y los alumnos involucrados, y el del grupo de investigación al que pertenece el profesor-investigador. Temporalizaremos y describiremos las diferentes etapas en las que se ha desarrollado la investigación y las diferentes fases que componen cada etapa. Presentaremos las herramientas utilizadas para la obtención de datos y la metodología para el tratamiento y análisis de dichos datos. Por último, justificaremos las consideraciones tenidas en cuenta en el trabajo para mejorar los aspectos éticos y de calidad de nuestra investigación. Para ello relacionaremos las acciones llevadas a cabo en el trabajo con los indicadores generales presentados en la segunda sección.

III.1. La investigación-acción

El marco metodológico de esta tesis doctoral, la investigación-acción, es un paradigma de metodología cualitativa muy extendido, no solo en la investigación en educación matemática, sino de manera más general en el ámbito de las ciencias sociales. Para sentar las bases definitorias de esta metodología haremos un breve repaso a su historia a través del siglo XX y concretaremos sus principales características y las fases en las que se estructura. Destacaremos, asimismo, su importancia dentro del ámbito de la educación matemática y su relación con el análisis didáctico.

III.1.1. La investigación-acción como metodología de investigación cualitativa en ciencias sociales

El término 'investigación-acción' recoge diferentes enfoques metodológicos de investigación en ciencias sociales dentro de la corriente de estudios sociocríticos (Colmenares &

Piñero, 2008). La corriente sociocrítica tiene como objeto fundamental de estudio la práctica en diferentes ámbitos, lo que incluye el estudio del comportamiento observable de quienes la realizan y las interpretaciones y significados que los que la realizan asocian a dicha práctica (Martínez González, 2007, p. 35). Se trata, por tanto, de una corriente metodológica dentro del paradigma de investigación cualitativa, aunque, como indica Martínez González (2007), puede llegar a combinar algunos aspectos de carácter cuantitativo que tratan de aportar mayor objetividad.

Las diferentes formas, e incluso nombres, que toma la investigación-acción obedecen, entre otros aspectos, a los diferentes campos de aplicación de esta metodología, que van desde la medicina a la agricultura y a las diferencias de carácter político, práctico o epistemológico derivadas de dichos campos de aplicación y de los grupos sociales de estudio. Sin embargo, se reconocen algunas características comunes y que son definitorias de la metodología de investigación-acción (Coleman, 2019; Kemmis, McTaggart, & Nixon, 2013):

- Reconoce la capacidad de los individuos involucrados en una determinada actividad de participar efectivamente en el proceso de investigación. En palabras de Coleman (2019, p. 157), “es una forma de hacer investigación *con* la gente, no *sobre* ellos”. Es decir, tiene un carácter social y democrático.
- La investigación se lleva a cabo por participantes de la actividad y está encaminada a mejorar las prácticas que se realizan. Es decir, el objetivo principal no es comprender teóricamente las prácticas sino mejorarlas. Por lo que tiene un carácter eminentemente práctico.
- El aprendizaje para realizar cambios sobre la acción no se consigue solo a través de la descripción de la acción, sino que la participación en la acción es uno de los requisitos para el aprendizaje. Es decir, el aprendizaje emerge de la acción y se produce en los individuos que actúan. Por tanto, la investigación-acción, por un lado, no reniega de un cierto carácter subjetivo, como actividad humana y, por otro, no concibe una estructura diferenciada entre la planificación y la acción ya que la propia acción provoca cambios en la planificación.

Aunque los orígenes de este enfoque metodológico no son fácilmente determinables (Berg, 2007), podemos situar el origen del término ‘investigación-acción’ en la primera mitad del siglo XX con los trabajos de Kurt Lewin (1890-1947) para la modificación de los hábitos alimenticios de la población en Estados Unidos (Colmenares & Piñero, 2008). En esta primera etapa, las pautas para cambiar la práctica de los individuos implicados provienen de especialistas externos ajenos a dicha práctica pero que involucran a los prácticos como coinvestigadores en el proceso (*Modalidad técnica de investigación-acción*).

En la segunda mitad del siglo XX la metodología de investigación-acción cobró importancia con los enfoques de, entre otros, Stenhouse (1998) , Elliot (2000), y Carr y Kemmis (1988) centrados en la educación en Inglaterra y Australia (Colmenares & Piñero, 2008; Abero, Berardi, Capocasale, García, & Rojas, 2015). En esta segunda etapa nace la denominada *Modalidad* *práctica de investigación-acción*[40]. La diferencia principal con la modalidad técnica es que la responsabilidad investigadora recae en el práctico, en este caso el profesor, y los agentes externos, en caso de existir tienen un rol de asesores o consultores.

El trabajo realizado a partir de una metodología de investigación-acción puede clasificarse también distinguiendo los destinatarios del trabajo realizado. Así el práctico-investigador puede pensar en primera persona del singular, *trabajo para mi*, en primera persona del plural, *trabajo para nosotros*, o en tercera persona del plural, *trabajo para ellos*. Los trabajos de investigación-acción suelen contener una combinación de estos tres nieveles de interés. (Coleman, 2019). El *trabajo para mi* recoge la idea de que el práctico-investigador debe estar siempre en el foco de la reflexión, no solo debe reflexionar sobre los efectos de sus prácticas sobre el grupo de estudio, sino también sobre su propia práctica. Este proceso mediante el que el práctico-investigador se convierte en objeto de su propia investigación se denomina 'reflexividad', que, como apunta Coleman (2019), no hay que confundir con el término reflexión. La reflexividad es la reflexión que el práctico-investigador hace sobre su propia práctica. El trabajo *para nosotros* alude a la naturaleza colaborativa de los métodos de investigación-acción (Elliot, 2015). Para atender a este aspecto deben crearse grupos de investigación en los que colaboren prácticos e investigadores. Estas comunidades de colaboración, deben estar dotadas de espacios de comunicación adecuados para que los implicados expresen y conecten sus creencias, valores e ideas. El *trabajo para ellos* contiene todas aquellas acciones cuyo objetivo es conectar la investigación con grandes grupos o comunidades. Estas acciones intentan paliar el carácter local de los trabajos de investigación-acción a través de muchas pequeñas actividades de difusión y contacto con otros grupos de investigación. La atención a estas diferentes esferas de intervención en una investigación-acción debe reflejarse en la incorporación de diferentes herramientas metodológicas.

Resumiendo las ideas anteriores, la principal intención de la investigación-acción, cuando la aplicamos a la práctica educativa, es reflexionar sobre dicha práctica con la intención de mejorarla (McNiff, 1992). Esta metodología tiene la particularidad de que el investigador actúa también como profesor de aula, *profesor-investigador*, incluido posiblemente en un *equipo de investigación* formado por otros profesores o especialistas externos. De esta forma, la separación entre profesores e investigadores desaparece (Lewin, citado por Elliot, 2000). Además, "en la investigación-acción las teorías no se validan de forma independiente para aplicarlas luego a la práctica, sino a través de la práctica." (Elliot, 2005, p. 88).

Esta línea de investigación ha sido aceptada en el campo de la educación en el ámbito internacional. Elliot (2000) destaca su influencia en Reino Unido, Australia, Canadá, Alemania, Austria e Islandia, e, incipientemente, también en Estados Unidos y España. Además, la metodología de investigación-acción se ha aplicado para diferentes propósitos como el desarrollo

[40] Además de la modalidad técnica y la modalidad práctica, diferentes autores distinguen también la *Modalidad crítica de investigación-acción* que se caracteriza por tener una finalidad emancipadora de los prácticos a través de cambios profundos en las organizaciones sociales en las que se desarrolla su actividad (Colmenares & Piñero, 2008).

e innovación curricular, la mejora de la organización educativa, la mejora de programas escolares o como instrumento de desarrollo profesional (Martínez González, 2007).

La planificación de la metodología de investigación-acción se estructura en fases que se suceden de forma cíclica por lo que el proceso suele denominarse "espiral de investigación-acción" (Coleman, 2019, p. 156). En dicha espiral, las conclusiones obtenidas al finalizar uno de los ciclos de investigación-acción provocan cambios al comienzo del ciclo siguiente (Elliot, 2000; Kemmis *et al*. 2013). Con pequeñas diferencias entre autores y enfoques, la estructura de cada ciclo suele descomponerse en cuatro fases diferenciadas: planificación, acción, observación y reflexión. Carr y Kemmis (1988) asocian las dos primeras fases a un proceso constructivo de la investigación, mientras que las dos últimas corresponden a un proceso reconstructivo. Por otro lado, las fases centrales (acción y observación) se desarrollan de manera simultánea durante la práctica en el contexto social, mientras que las fases primera y última se desarrollan mediante un discurso entre los prácticos e investigadores participantes. Con carácter general, Elliot (2005, p. 107) recomienda realizar, al menos, tres ciclos de investigación-acción para poder apreciar las mejoras provocadas por el proceso. Aunque, como también indica el autor, puede llegarse a un ciclo de saturación tras el primer o segundo ciclo de investigación-acción en casos concretos. Es decir, se puede llegar a un ciclo tras el que no se observe la posibilidad de mejorar sin realizar cambios sustanciales en la planificación original o la intervención de agentes externos.

En la Figura III - 1 podemos observar la disposición en espiral del proceso de investigación-acción y las fases de las que se componen cada uno de los ciclos, con un esquema similar al que puede encontrarse en el trabajo de Carr y Kemmis (1988).

III.1.2. Fases de la investigación-acción

Describimos, a continuación, las principales características de cada una de las fases en las que se estructura la metodología de investigación-acción.

III.1.2.1. Fase de planificación

El objetivo principal de esta primera fase es realizar un análisis del problema de investigación y proponer un plan de actuación. La fase de planificación del ciclo inicial tiene unas características que la distinguen del resto de fases de planificación de los siguientes ciclos. En la fase de planificación del primer ciclo se produce la identificación y concreción del problema de investigación (Elliot, 2005). Además, en este primer ciclo se crea el grupo colaborativo formado los prácticos-investigadores y asesores o colaboradores externos. Como indican Kemmis *et al*. (2013), en el ámbito educativo este grupo lo constituyen los profesores-investigadores del contexto educativo sobre el que se actúa y profesores universitarios expertos en educación. A partir del diálogo generado entre los participantes deben sentarse las bases metodológicas y éticas de la investigación y generarse ideas generales de actuación. En los siguientes ciclos la idea general puede modificarse según los resultados obtenidos. La planificación en cada ciclo debe concretar un plan de actuación en el que deben especificarse las herramientas y técnicas que permitan supervisar la calidad del proceso de acción y evidenciar los efectos de la acción (tanto los pretendidos como los inesperados).

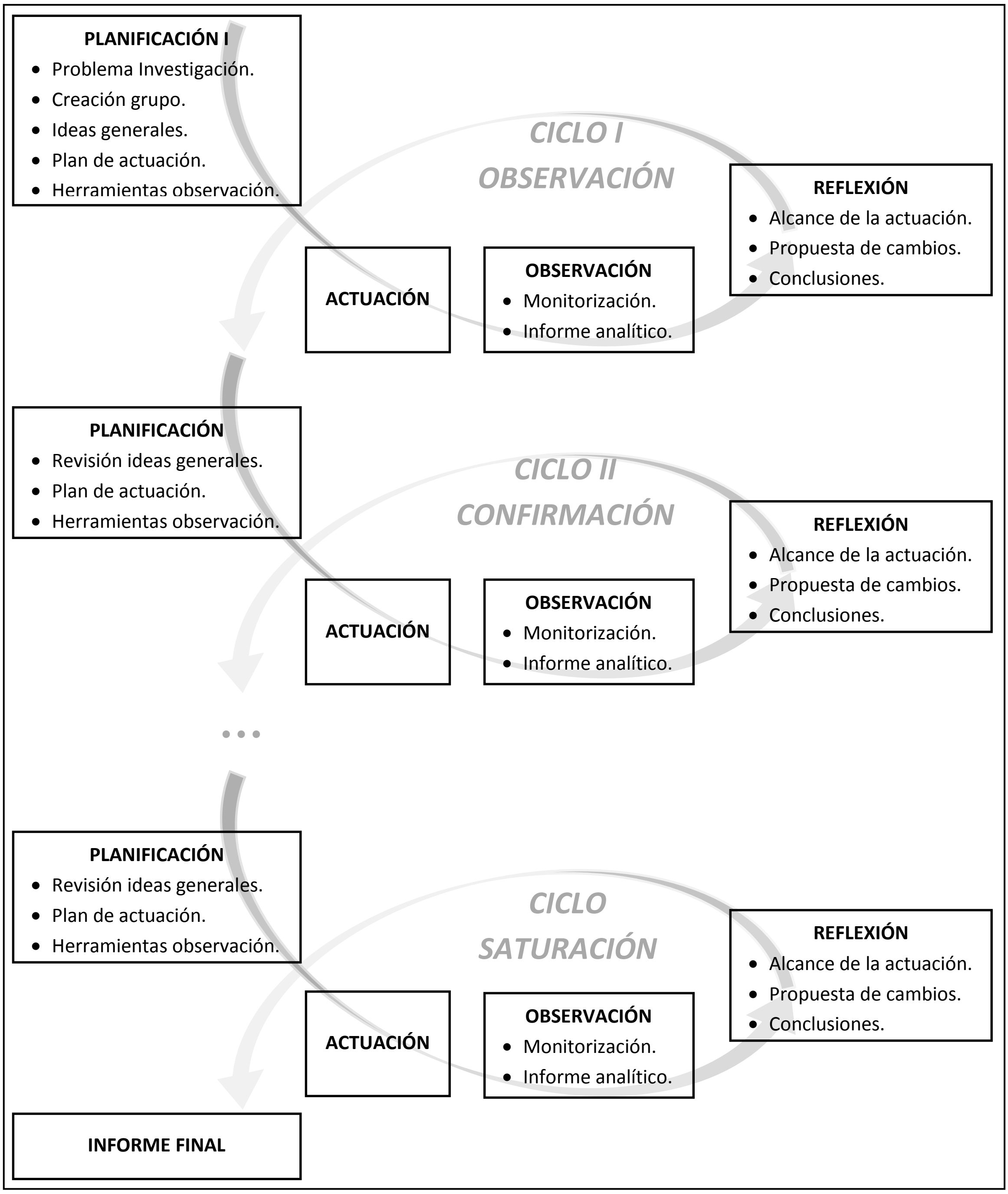


Figura III - 1. Proceso en espiral de la investigación-acción.

III.1.2.2. Fase de acción

Durante esta fase el práctico-investigador lleva a cabo la actuación planificada teniendo en cuenta la posibilidad de realizar cambios para actuar sobre los imprevistos surgidos. En caso necesario de cambios profundos en la planificación, estos deben consensuarse con el grupo colaborativo de participantes. En palabras de Kemmis *et al*. (2013, p. 105):

> No hay mucho que decir sobre […] la forma de implementar tu planificación – simplemente […] intenta hacer lo que has planificado. Por supuesto, normalmente no es tan simple como eso. Tu plan no habrá previsto todas las circunstancias que puedan ocurrir en la acción, o las cosas pueden cambiar incluso antes de comenzar […] y necesitarás cambiar el plan de forma casi inmediata. […] no abandones la planificación, arréglala. Si te ves en la necesidad de realizar cambios mayores, discútelos con el resto de los participantes para decidir colaborativamente cómo continuar.

III.1.2.3. Fase de observación

Esta fase ocurre en buena medida de forma simultánea a la fase de acción y consiste en la monitorización del proceso de acción mediante el uso de diferentes herramientas que permitan recabar información sobre la fase de acción. Elliot (2005) y Kemmis *et al*. (2013), proponen algunas herramientas que pueden utilizarse para esta tarea:

- Diario de actuación realizado por el práctico-investigador.
- Registro de las actividades realizadas mediante la elaboración de un blog.
- Elaboración de perfiles concretos de algunos individuos participantes en el estudio o de periodos de actuación significativos.
- Análisis de documentos escritos (en el caso del ámbito educativo, estos pueden ser fichas de trabajo o tareas de los alumnos, exámenes escritos, partes utilizadas de los libros de texto para la enseñanza, apuntes de los alumnos, actas de reuniones, etc.)
- Datos fotográficos.
- Grabaciones de audio o video.
- Realización de entrevistas a los participantes.
- Utilización de observadores externos.
- Observación directa de los participantes mientras se realiza la actuación.
- Listas de comprobación o inventarios.
- Triangulación de datos entre los colaboradores.
- Elaboración de informes analíticos.

Posteriormente en este capítulo (ver sección III.3.7. Fuentes de obtención de datos experimentales), describiremos con más detalle las herramientas utilizadas en nuestra investigación concretándolas, además, al ámbito educativo. Cabe destacar que, aunque los autores presentan el listado anterior de herramientas como un abanico de posibilidades entre las que elegir las que mejor se adapten al tipo de investigación-acción realizada y a los recursos de los que dispongan los prácticos-investigadores, sí marcan como prescriptiva la elaboración de un diario que contenga una narración de los hechos que acontecen durante la acción (Kemmis *et al*., 2013, p. 106).

La fase de observación concluye con la elaboración de informes analíticos que organicen y presenten la información recabada. Dichos informes deben estar enfocados a realizar una narrativa de lo acontecido en la acción, aunque, como indican Kemmis *et al*. (2013) cuando se selecciona, organiza y conecta la información recabada, se inicia necesariamente el análisis e interpretación de dicha información, es decir, comienza la fase de reflexión.

III.1.2.4. Fase de reflexión

La última fase, la de reflexión, consiste en realizar un análisis y valoración de los datos para extraer conclusiones y, en su caso, tomar las decisiones necesarias para mejorar el proceso. Como hemos mencionado anteriormente, las fases de la investigación-acción se suceden de forma cíclica. Así, las conclusiones obtenidas en la fase de reflexión de uno de los ciclos sirven de punto de partida a la hora de planificar la siguiente.

Las reflexiones, basadas en las evidencias recogidas durante la fase de observación, deben hacerse de forma individual y colectiva con el equipo de colaboradores. Las reflexiones deben valorar el alcance de las mejoras que ha supuesto la puesta en práctica del plan diseñado y proponer cambios y actuaciones concretas que deberían introducirse para paliar las deficiencias encontradas durante el proceso. Estas reflexiones deberían plasmarse en un documento que sintetice y organice las diferentes conclusiones obtenidas al finalizar cada ciclo acción (Kemmis *et al*., 2013).

Tras la conclusión de los diferentes ciclos de investigación-acción, Elliot (2005, p. 109) propone la elaboración de un informe final que debería redactarse siguiendo un "formato histórico", es decir, debe "narrar el desarrollo cronológico de los hechos, tal como se han ido produciendo a lo largo del tiempo". El autor, propone una lista de comprobación de algunos elementos que deberían quedar reflejados en el informe final:

- La evolución de nuestra idea general inicial y de nuestra comprensión del problema a lo largo de la investigación-acción.
- Las acciones llevadas a cabo a la luz de los cambios que se producen en la idea general y la comprensión del problema.
- La forma en la que se ha ejecutado el plan previsto y la forma de resolver los imprevistos surgidos.
- Los efectos (tanto pretendidos como imprevistos) que ha tenido nuestra acción.
- Las herramientas metodológicas empleadas y las posibles dificultades que puedan surgir en su utilización.
- Otras dificultades o imprevistos y las soluciones adoptadas que tengan que ver con los aspectos éticos de la investigación y con la coordinación entre los diferentes colaboradores.

III.1.3. La investigación-acción en educación matemática

Como hemos mencionado, los trabajos de investigación-acción en educación tienen como objetivo principal intervenir sobre la práctica educativa con el fin de mejorarla. Desde este enfoque, la investigación-acción se convierte en una herramienta importante para incrementar el diálogo entre la investigación y la práctica e intentar conectar ambas disciplinas. De hecho, esta conexión es uno de los objetivos destacados en la agenda internacional de la investigación en educación matemática (English & Kirshner, 2016).

Varias de las características de la investigación-acción la convierten en un paradigma referente dentro de la investigación en educación matemática. Es reflexiva, activa y se sustenta en la elaboración de comunidades colaborativas creadas entre expertos en investigación y prácticos (Appelbaum & Stathopoulou, 2016; Fried & Amit, 2016; Ruthven & Goodchild, 2016). La necesidad de crear relaciones de trabajo entre prácticos e investigadores mediante grupos o redes de investigación, basada en las recientes formas de pensar el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, es uno de los motivos por los que los paradigmas de investigación-acción cobran relevancia. Además, "mediante ella se posibilita la innovación docente, al idear nuevas formas que conllevan una comprensión más adecuada del sentido y de la utilidad de las matemáticas en la formación de los alumnos" (Romera, 2012, p. 70).

Algunas de las críticas a esta metodología, como las que inciden en los bajos conocimientos teóricos en didáctica de la matemática que tienen generalment los prácticos que llevan a cabo la investigación, son contrarrestadas por el carácter cíclico de la metodología (Fried & Amit, 2016). De esta manera, los profesores adquieren los conocimientos teóricos necesarios durante el desarrollo de los diferentes ciclos que se realizan en un proyecto de investigación-acción (Vula, 2019).

Precisamente, las experiencias de investigación-acción resultan especialmente beneficiosas en la formación inicial de docentes de matemáticas mejorando sus capacidades de planificación, análisis e implementación de secuencias de enseñanza y aprendizaje (Erbilgin, 2019).

También los profesores de matemáticas en ejercicio que desarrollan experiencias de investigación-acción relatan diferentes beneficios para su práctica (Vula, 2019). Por ejemplo, realizan innovaciones en su práctica y en el uso de recursos para mejorar los resultados de sus alumnos. Estos cambios mejoran aspectos en el plano afectivo y mejoran el interés de los alumnos. Además, los profesores adquieren una mayor responsabilidad en la comprensión detallada de las necesidades de los alumnos. En definitiva, los profesores de matemáticas implicados en procesos de investigación-acción tienen una mejor comprensión de las dificultades de los procesos de enseñanza y aprendizaje. La característica de reflexividad de esta metodología permite reconocer estas dificultades, aceptar las limitaciones y manejarlas de una manera efectiva que redunda en beneficio de los alumnos y del propio profesor (Vula, 2019).

Aunque el establecimiento de redes y grupos de investigación-acción ha demostrado ser útil para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en otros países (Elliot, 2005, pp. 26-60), el número de trabajos de investigación publicados que utilizan la investigación-acción en didáctica de las matemáticas en España, al igual que ocurre en didáctica de las ciencias experimentales, es bajo (Romera, 2012, 2014; Torralbo, Vallejo, Fernández, & Rico, 2004).

Encontramos algunas experiencias de investigación-acción en el ámbito nacional que trabajan diferentes temas de didáctica de las matemáticas en distintos niveles educativos. Por ejemplo, Climent y Carrillo (2003), a partir de una experiencia de investigación-acción en Educación Primaria, estudian el desarrollo profesional de los maestros implicados en el proceso. Con un enfoque similar, Novo, Alsina, Marbán y Berciano (2017) realizan un estudio en Educación Infantil. Sin embargo, la mayor parte de los trabajos publicados se enfoca en proyectos llevados a cabo con estudiantes de Educación Secundaria (Romera, 2012, 2014).

Como ya hemos mencionado, nuestro trabajo continúa la línea de otras tesis doctorales que utilizan la metodología de investigación-acción. Castro (1994) realiza una investigación-acción en dos ciclos con alumnos de 1º y 2º de ESO para introducirlos en el trabajo con el sistema de representación gráfico para números naturales denominado configuraciones puntuales. Su trabajo combina el paradigma heurístico de la investigación-acción con herramientas empíricas que pretenden reducir los aspectos subjetivos. Romero (1995) realiza una investigación-acción para la introducción del número real a alumnos de 13-14 años. La investigación-acción se estructura en dos ciclos más un ciclo adyacente introducido para solventar problemas disciplinarios y actitudinales. Gairín (1998) realiza una investigación-acción en dos ciclos para la elaboración de una innovación curricular en la que desarrolla una propuesta de enseñanza de la fracción para alumnos de magisterio. También centrado en el número racional, Escolano (2007) realiza una investigación-acción para desarrollar una propuesta innovadora para 4º y 5º de Educación Primaria. Oller-Marcén (2012) desarrolla un ciclo de investigación-acción en 1º de ESO para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética.

III.1.4. La investigación-acción y el análisis didáctico

En el Capítulo II hemos desarrollado las características del análisis didáctico y su utilidad en investigaciones en educación matemática con diferentes propósitos. Nos centramos aquí en su utilidad para la planificación y puesta en práctica de propuestas curriculares. Recordemos que el análisis didáctico se descomponía en cuatro subanálisis: de contenido, cognitivo, de la instrucción y de la actuación o evaluativo. Los tres primeros subanálisis son, por tanto, previos a la puesta en práctica de la propuesta de enseñanza diseñada.

Así, una investigación-acción cuyo objetivo sea mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de un determinado contenido matemático puede apoyarse en el análisis didáctico para el diseño de la propuesta mediante la que se llevará a cabo la acción. En estas circunstancias, como indican García y Romero (2013), los tres primeros subanálisis del análisis didáctico concretan la fase de planificación de la investigación-acción. Además de estas autoras, otros autores como Escolano (2007) y Oller-Marcén (2012) han utilizado el análisis didáctico en experiencias de investigación-acción.

Por otro lado, la investigación-acción pone el foco de atención en la acción y la reflexión sobre la misma, lo que permite concretar el último de los subanálisis del análisis didáctico, el análisis de actuación. García y Romero (2013) distinguen dos partes dentro del análisis de actuación. En primer lugar, se desarrolla la acción o puesta en marcha de la propuesta didáctica y, simultáneamente, la recogida de datos necesaria para la posterior evaluación de la puesta en práctica. En este proceso el profesor-investigador evalúa en tiempo real la puesta en práctica de la propuesta para poder tomar decisiones de cambio o reajuste en caso necesario. Esta primera etapa del análisis de actuación es la que las autoras denominan “sobre la marcha”. Las fases de actuación y observación de la investigación-acción se corresponden con esta primera parte del análisis de actuación. En un segundo momento tiene lugar el análisis de actuación “a posteriori” en el que se analiza la información recolectada mediante los instrumentos diseñados tras finalizar la implementación. Este segundo momento del análisis de actuación se corresponde con la fase de reflexión de la investigación-acción.

Más aun, de manera previa a la acción, el análisis de actuación o evaluativo debe establecer criterios y categorías de análisis para evaluar la actuación y generar los instrumentos adecuados para la recogida de la información (Rico & Fernández-Cano, 2013, p. 18). Este análisis de actuación “a priori” se enmarcaría en la fase de planificación de la investigación-acción.

En resumen, los subanálisis de contenido, cognitivo y de la instrucción del análisis didáctico pueden estructurar la fase de planificación de una investigación-acción. A su vez, el análisis de actuación puede abordarse mediante el desarrollo de las cuatro fases de la investigación-acción atendiendo a los aspectos “a priori” (fase de planificación), “sobre la marcha” (fases de acción y observación) o “a posteriori” (fase de reflexión). En la Figura III - 2 se recogen estas ideas.

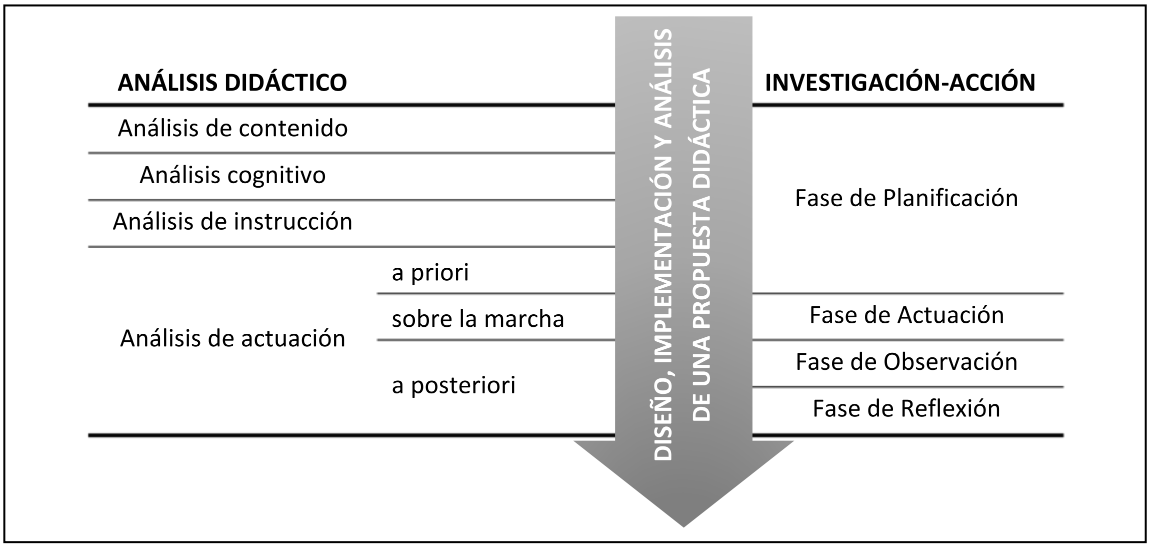


Figura III - 2. Articulación entre los subanálisis del análisis didáctico y las fases de la investigación-acción.

III.2. Calidad y ética en investigación cualitativa

Con el desarrollo y la importancia cobrada por los métodos cualitativos en investigación en ciencias sociales surge la preocupación sobre garantizar la calidad en dicha aproximación metodológica. Los distintos actores intervinientes en los procesos de investigación deben preocuparse de asegurar la calidad de los trabajos: investigadores, organizaciones que financian la investigación, editores de revistas de investigación y los lectores de un trabajo de investigación cualitativa (Flick, 2007). Además, la calidad y la ética en la investigación cualitativa están íntimamente relacionadas. Flick distingue tres formas de argumentar esta relación: no es ético realizar investigaciones cualitativas de baja calidad; los aspectos éticos como la protección de datos o la integridad física y moral y el derecho a la privacidad de los participantes, deben reflejarse en el diseño de una investigación cualitativa de calidad; debe atenderse a los posibles problemas éticos que puedan derivarse de un diseño de investigación al querer incrementar su calidad.

III.2.1. Aspectos sobre la calidad

La aproximación a la definición de calidad en investigación cualitativa puede realizarse intentando aplicar los criterios de *fiabilidad*, *validación* y *relevancia* propios de la investigación cuantitativa o creando criterios específicos para la investigación cualitativa (Flick, 2007; Mays & Pope, 2000). Adoptando el primer enfoque, los términos propios de la investigación cuantitativa deben ser redefinidos y adaptados.

III.2.1.1. Fiabilidad

La fiabilidad, en el sentido estricto de estabilidad de resultados en la réplica de un experimento, no puede considerarse desde un enfoque cualitativo por la propia naturaleza social de la investigación. La fiabilidad en ciencias sociales debe considerarse en términos más procedimentales. El investigador debe aportar los datos suficientes para que el lector distinga entre hechos objetivables e interpretaciones del investigador, aportando, por ejemplo, transcripciones literales de conversaciones o grabaciones. Además, los informes de investigación deben tener una estructura detallada y coherente y, en su redacción, debe hacerse un adecuado uso de las citas a las referencias empleadas.

III.2.1.2. Validación

La validación en términos de investigación cualitativa no debe entenderse como una prueba objetiva de la veracidad de los resultados, sino como un proceso reflexivo relacionado con el término ‘credibilidad’. La reflexión debe involucrar a los diferentes agentes implicados en el proceso de investigación, los datos, los resultados e interpretaciones, para ubicar los resultados en el contexto de la disciplina científica y destacar su utilidad. Según Kvale (2007) citado por Flick

(2007, p. 18), "validar no significa definir un criterio abstracto y contrastar el resultado y procedimiento con él, sino realizar una reflexión a diferentes niveles, así lo válido es aquello que encuentra consenso de los miembros y la práctica del área". Además, en la investigación cualitativa tradicionalmente se ha distinguido entre *validación interna* y *validación externa*, según los factores considerados ocurran durante los procesos de observación o sean ajenos a este proceso, respectivamente (Denzin, 1978).

Para mejorar la validez de los trabajos de investigación cualitativa Mays y Pope (2000) sugieren diferentes procedimientos: la utilización de técnicas de triangulación, la validación de los resultados por parte de los sujetos de estudio, la exposición clara de los métodos para la recogida de la información y su análisis, la reflexividad sobre la propia práctica, la atención a los casos negativos (elementos que parezcan contradecir la explicación del fenómeno bajo estudio), y la discusión de los resultados con otros puntos de vista.

El término triangulación, tiene su origen en las técnicas para determinar puntos inaccesibles a través de los datos obtenidos en otros dos puntos accesibles. En el contexto de la investigación en ciencias sociales, este término se aplica a la combinación de procedimientos y técnicas metodológicas para, desde diferentes puntos de vista, intentar dar explicación a un mismo fenómeno de forma que el diálogo entre las diferentes informaciones e interpretaciones produce no solo una mayor cantidad de información sino una comprensión más profunda y precisa de dicho fenómeno (Flick, 2007; Mays & Pope, 2000).

Denzin (1978, pp. 294-304) distingue cuatro tipos de triangulación: la triangulación de datos, la triangulación de investigadores, la triangulación metodológica y la triangulación teórica. La triangulación de datos consiste en la utilización de diferentes fuentes de información para un mismo problema. La triangulación de investigadores implica que varios profesionales analicen los mismos datos. La triangulación metodológica implica el uso de diferentes estrategias metodológicas para tratar de explicar un mismo fenómeno. Por último, la triangulación teórica supone modificar los principios teóricos sobre los que se sustentan las hipótesis de investigación para interpretar el problema desde diferentes perspectivas.

III.2.1.3. Relevancia

Una investigación es relevante si supone un avance en el conocimiento sobre un determinado problema o si incrementa o sustenta la validez de un determinado conocimiento. Asimismo, un indicador de la relevancia de un trabajo en el paradigma cualitativo es la posibilidad de extender, generalizar o transferir los conocimientos que aporta sobre un determinado problema más allá del contexto social sobre el que se ha realizado la investigación. Para incrementar la relevancia, los investigadores deben dar suficientes detalles en sus informes para que el lector juzgue la posibilidad de aplicar los resultados en otros contextos sociales. Además, es deseable que la muestra empleada y el diseño teórico puedan evidenciar el mayor número posible de variaciones de comportamiento de los individuos del estudio (Mays & Pope, 2000).

III.2.2. Aspectos éticos

Como indica Flick (2007), la investigación en ciencias sociales, que implica intervenir en la rutina de los individuos involucrados, solo puede considerarse si esta se realiza bajo unos principios de calidad contrastables. Estos principios de calidad deben garantizar los derechos de los participantes y que su participación sea justa, beneficiosa y no perjudicial. Implementar investigaciones fiables, válidas y relevantes, tiene algunas implicaciones éticas y morales inmediatas sobre la conducta del investigador. El ejercicio de la investigación debe obedecer a cualidades como la confianza, la honestidad y la reciprocidad (Kielmann, Cataldo, & Seeley, 2012). La fiabilidad requiere que el investigador pueda asegurar a los individuos que los datos recogidos se van a reflejar de la manera más próxima posible a la realidad y las circunstancias en las que se recogieron. Además, el investigador no puede manipular los datos recogidos para que estos validen sus hipótesis iniciales. Por último, el investigador debe dar cuenta a los individuos involucrados de la relevancia de la investigación, es decir, de los hallazgos del estudio.

Además de explicitar estas implicaciones éticas de la calidad, nos preocupamos en esta sección de describir la relación en sentido contrario que indica Flick (2007), es decir, determinar aspectos éticos que mejoran la calidad en la investigación. Muchos de estos aspectos éticos están relacionados con las características de una investigación en educación en la que, además de investigar sobre seres humanos, la parte principal de los sujetos que intervienen son niños.

Los conceptos éticos centrales en la investigación cualitativa que involucra seres humanos son el *consentimiento* (y la capacidad de consentir), la *confidencialidad* y el *anonimato* (Flick, 2007; Wiles, 2013).

III.2.2.1. Consentimiento

Los participantes en una investigación deben dar consentimiento explícito para participar. Idealmente este consentimiento debe ser por escrito, mediante la firma de un documento, o más informalmente mediante consentimiento oral (Flick, 2007). Además, este consentimiento debe ser un consentimiento informado, los participantes deben estar al tanto del propósito y los detalles de la investigación y de cómo esta podría afectarles (Wiles, 2013).

Relacionada con este aspecto, aparece la noción de 'capacidad para consentir', especialmente relevante en la investigación con grupos vulnerables, como es el caso de los niños o adolescentes. A pesar de que existe debate sobre la necesidad del permiso parental para que los niños participen en determinados estudios, esta práctica parece conveniente.

Independientemente de los debates generados acerca de la obligatoriedad del consentimiento parental, el consentimiento del niño o adolescente es estrictamente necesario. Es decir, "si los padres dan permiso, pero los niños no quieren participar, entonces deben ser excluidos de la investigación" (Wiles, 2013, p. 39). Además, los individuos, deben tener y sentir la libertad de poder salir del estudio en el momento que ellos estimen oportuno.

III.2.2.2. Confidencialidad y anonimato

La confidencialidad y el anonimato son dos aspectos relacionados, pero no sinónimos. La confidencialidad supone no revelar datos de los individuos o de las instituciones que no hayan sido acordados, mientras que el anonimato hace referencia a poder hablar de las características de estos individuos o instituciones sin revelar su identidad. Por tanto, un estudio podría no mantener el anonimato de los individuos, pero sí la confidencialidad de los datos acordados. De hecho, como indica Wiles (2013) existen tendencias en la investigación en ciencias sociales hacia el no anonimato de los participantes. En cualquier caso, si se tratan informaciones delicadas o con grupos vulnerables la protección del anonimato es considerada como un aspecto crucial (Flick, 2007).

El anonimato suele conllevar la elipsis de los nombres de los individuos cuando se relatan historias de vida o se transcriben entrevistas u otros episodios. Esta elipsis se puede hacer mediante el uso de pseudónimos, aunque la elección de un determinado pseudónimo puede estar influida por características del individuo que pudieran servir para identificarlo (Wiles, 2013).

La confidencialidad y el anonimato hacen necesario un uso y almacenaje adecuado de los datos recogidos en la investigación. Además, si uno de los participantes retira el consentimiento de participación cuando ya se han recogido datos sobre él, estos datos deben ser destruidos (Kielmann *et al.*, 2012).

III.3. Descripción de la experimentación. Método

A partir del marco metodológico general descrito en las dos secciones anteriores describimos con detalle el diseño experimental de nuestra investigación. En primer lugar, resumimos el tipo de investigación realizada, para después detallar los diferentes individuos y grupos sociales que intervienen en el estudio. Describimos también la estructura de las fases en las que se divide la experimentación, la temporalización de la misma y las herramientas utilizadas para la obtención de datos y para el tratamiento de dichos datos a partir de las categorías de análisis. Por último, se concretan las características de la investigación encaminadas a mejorar la calidad y dar garantías éticas al estudio.

III.3.1. Características generales de la investigación

El trabajo que se presenta en esta memoria sigue el paradigma de la investigación-acción para ciencias sociales en el ámbito de la educación y más concretamente en el área de educación matemática. Por tanto, se trata de un trabajo esencialmente cualitativo en el que añadimos aspectos metodológicos cuantitativos para introducir una mayor objetividad del proceso de investigación (Castro, 1994; Martínez González, 2007).

El grupo social sobre el que se actúa está formado por alumnos de secundaria y su profesor de matemáticas y, por tanto, el objetivo principal de la investigación-acción es mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dentro de ese grupo social. El contenido matemático concreto que organiza el proceso es la proporcionalidad aritmética. Por tanto, el trabajo se enmarca en las líneas de investigación-acción de diseño y desarrollo curricular (Elliot, 2005, 2015; Romera, 2014) por cuanto que investiga sobre la aplicación de las prescripciones curriculares vigentes, y la innovación curricular (Martínez González, 2007; Romera, 2012) ya que introduce cambios en el planteamiento curricular del contenido matemático concreto.

La investigación-acción utilizada se corresponde con una modalidad práctica (Colmenares & Piñero, 2008) ya que es el profesor del grupo social en el que se actúa el que sostiene el peso del proceso de investigación. Nos referiremos a este profesor (el autor de esta memoria que ejerce como investigador principal) como profesor-investigador. Para el proceso de investigación-acción el profesor-investigador cuenta con el apoyo de investigadores expertos que no forman parte del grupo social en el que se realiza la acción, conformándose de esta manera el equipo de investigación. Este grupo colaborativo permite realizar triangulación de investigadores (Denzin, 1978).

Para intentar asegurar la saturación del proceso de investigación-acción se han desarrollado tres ciclos (observación, confirmación y saturación) experimentales (Elliot, 2005). Los ciclos están estructurados en cuatro fases: planificación, acción, observación y reflexión (Carr & Kemmis, 1988) diferenciando la especificidad de la planificación previa al primer ciclo, o ciclo de observación, (Elliot, 2000). La metodología de la investigación-acción se ha utilizado de forma combinada con el análisis didáctico para refinar la fase de planificación de la investigación-acción y el análisis de actuación del análisis didáctico (García & Romero, 2013).

En el diseño de la investigación se usan distintas herramientas dirigidos a la obtención de diferentes tipos de datos sobre el mismo fenómeno (triangulación de datos) y el acercamiento al fenómeno con diferentes enfoques metodológicos (triangulación metodológica) (Denzin, 1978). Desde el punto de vista de la obtención de datos para un tratamiento cuantitativo, las diferentes fases del estudio introducen elementos de investigación exploratoria y de investigación conclusiva. Dentro del enfoque conclusivo se combinan acercamientos descriptivos longitudinales (observación del mismo fenómeno en el mismo grupo de alumnos durante diferentes fases del proceso) y transversales (observación del mismo fenómeno en diferentes grupos de alumnos en el mismo momento del proceso). Además, introducimos elementos de investigación experimental para reflexionar sobre la influencia de la propuesta en el desempeño de los alumnos mediante la comparativa con grupos de control (Singh, 2007, pp. 63-68).

III.3.2. Contexto social en el que se actúa

La experimentación de la propuesta didáctica se ha llevado a cabo en el IES Leonardo de Chabacier. Se trata de un instituto público situado en Calatayud, localidad de unos 20000 habitantes que es cabecera de comarca en la provincia de Zaragoza. La localidad cuenta con tres centros que imparten Educación Secundaria Obligatoria, uno concertado y dos públicos. El instituto donde se desarrolla la experimentación es el único de los tres centros de la localidad que no tenía durante el desarrollo de la investigación programas de bilingüismo. El nivel socioeconómico de las familias en la comarca es medio y está basado en el sector servicios. La industria decayó en los últimos años por la crisis financiera del 2008, siendo más frecuente la pequeña y mediana empresa. Una parte importante de los alumnos que recibe el instituto proviene de localidades vecinas cuyas familias se dedican a la agricultura. Se trata de un centro de tamaño medio con 3 o 4 vías en 1º y 2º de la ESO. El número de vías ha variado según el curso académico y el nivel.

Para intentar describir en líneas generales las características del centro educativo nos basamos en los resultados obtenidos en la prueba piloto del estudio "PISA para centros Educativos"[41] (OCDE, 2015). Dicha prueba se llevó a cabo en el último trimestre de 2013 (mismo curso en el que comenzamos la experimentación de este proyecto en 1º de ESO) y en ella participaron todos los alumnos de 15 años del centro (mayoritariamente cursando 4º de ESO). En la prueba se evaluó la competencia lectora, matemática y científica de los alumnos, la implicación de los estudiantes y el ambiente de aprendizaje y las características socioeconómicas de los alumnos. Los informes, personalizados para cada centro educativo participante mostraban los resultados obtenidos en las categorías anteriores y realizaban una comparación de los resultados del centro con los resultados globales a nivel español e internacional.

Según los resultados de la prueba anterior, el perfil del centro en competencia matemática es medio-bajo. Se obtienen medias inferiores a la media española y a la del conjunto de países de la OCDE, aunque sin diferencias estadísticas significativas. Los resultados del centro son comparables con los de los centros situados en el tercer cuartil de rendimiento en España y en la mayoría de los países de nuestro entorno y del conjunto de la OCDE. El porcentaje de alumnos que muestran un nivel competencial alto (el 8 %) se sitúa al mismo nivel que el correspondiente a la media española y es inferior al de la media de la OCDE (13 %). Por otro lado, hay un mayor porcentaje de alumnos en un nivel de competencia bajo en el centro, el 33 %, que en el conjunto de alumnos españoles y de la OCDE, el 24 % y 23 % respectivamente. Si se introduce la variable de nivel socioeconómico ISEC[42] (de las siglas Índice PISA de nivel Socio Económico y Cultural), que

---

[41] En el documento de la OCDE "Dónde se sitúa su centro educativo en el contexto internacional: PISA para centros educativos prueba piloto 2013-2014" (2015, p. 29) se establecen las características generales y el propósito de la prueba.

> […] han participaron 225 centros educativos españoles y se ha evaluado a 15.527 alumnos. El propósito de la prueba piloto consiste en validar las condiciones y procedimientos de la evaluación. […] y establecer los estándares normativos y técnicos para su adecuada implementación y utilización en España. […], la prueba piloto se ha diseñado de modo que permita analizar la precisión de las medidas (tanto de rendimiento como de las variables del contexto del aprendizaje) que se pueden obtener para cada centro educativo, […]. El muestreo de la prueba […] se ha diseñado como un muestreo de conveniencia mediante el que se seleccionaron los 225 participantes de entre el grupo de centros que participó en el PISA 2009.

[42]El índice ISEC se calcula a partir de información dada por los estudiantes sobre variables socioculturales de su entorno personal, como el nivel de educación de sus padres, número de libros que se

sitúa al centro educativo cercano a la media de la OCDE y por encima de la media española, los resultados en competencia matemática siguen situándose por debajo de la media de los centros que tienen un nivel socioeconómico similar. En cuanto a disciplina y relaciones entre profesor y alumnos, los resultados muestran peores resultados en la media del centro que en la media a nivel español. Sin embargo, muestran una motivación y confianza en sus propias capacidades similares a las de la media española.

El equipo directivo del centro procura realizar una distribución homogénea de los alumnos entre las diferentes vías que componen cada curso. No se aplica ningún criterio basado en los resultados académicos, solamente criterios organizativos, como la elección de asignaturas optativas, sociales, como el centro de primaria de procedencia, o incompatibilidades puntuales por asuntos disciplinarios. Por tanto, no pueden preverse sesgos en el nivel competencial de los alumnos entre los diferentes grupos. Además, el profesor-investigador no ha seleccionado los grupos concretos de actuación, sino que la asignación (decisión que compete al equipo directivo del centro), se realizó por una combinación de criterios organizativos y asignación aleatoria por parte del software de elaboración de horarios. Los grupos de alumnos suelen reorganizarse en cada nivel, por lo que, en líneas generales, las agrupaciones de 1º de ESO no se mantienen en 2º de ESO. El número de alumnos por aula en el centro es generalmente bajo, alrededor de 20 alumnos por aula, inferior a las ratios máximas oficiales. La agrupación general de los alumnos en el aula es en parejas.

El departamento de matemáticas del centro está compuesto por cuatro o cinco profesores, dependiendo del curso escolar. En el departamento trabajaban tres profesores con destino definitivo entre los que se incluye el profesor-investigador. Las plazas restantes se cubrieron cada curso con diferentes profesores interinos o funcionarios en prácticas. El modelo de enseñanza general aplicado por los profesores del departamento tenía un enfoque principalmente empirista, basado en una enseñanza *para* la resolución de problemas en donde la institucionalización supone el punto de partida de la instrucción, seguida de la resolución de tareas puramente matemáticas para ejercitar las técnicas y concluyendo con la resolución de problemas contextualizados en los que aplicar dichas técnicas (ver sección IV.1.3. Ideas sobre aspectos instruccionales). Dicho enfoque metodológico se muestra en la programación didáctica del departamento, donde además se recoge la obligatoriedad de que el profesor envíe y evalúe tareas para casa, reservando un porcentaje de la calificación final que refleja si el alumno ha elaborado o no dichas tareas[43]. Además, la selección de contenidos, su secuenciación y las actividades planteadas a los alumnos

poseen en casa o mobiliario para el estudio. La escala se presenta estandarizada de forma que la media de la OCDE posee índice 0 y la unidad es la desviación típica en el estudio PISA 2012, el ISEC español es de -0,19, que es significativamente inferior al de la OCDE (OCDE, 2014) y el instituto en el que se llevó a cabo la experimentación obtuvo un índice de -0,04 en la prueba Pisa para escuelas (OCDE, 2015). El índice se encuentra por debajo de la media de la OCDE y por encima de la media española.

[43] La programación didáctica del departamento recoge el siguiente texto dentro de la especificación de los criterios de calificación: "[…] se controlará, además, la realización de las tareas encomendadas al alumno. […] Para obtener una calificación positiva en una evaluación se valorará hasta un 70 % los resultados de los exámenes, hasta un 15 % la realización de tareas, hasta un 10 % la libreta de trabajo y hasta un 5 % la participación positiva."

eran, principalmente, las propuestas en los libros de texto utilizados[44]. Estos libros de texto forman parte de la muestra seleccionada en el trabajo de Martínez-Juste *et al*. (2015b) que resumimos en el Capítulo II y en el que se detectan algunos aspectos no deseables en la enseñanza de la proporcionalidad.

III.3.3. El profesor-investigador

El objetivo de esta sección es contextualizar el perfil académico y profesional al comienzo del proceso de investigación-acción del profesor-investigador, que es el autor de esta tesis doctoral. El profesor-investigador cursó la licenciatura de matemáticas en la Universidad de Zaragoza entre 1998 y 2003. Al terminar la licenciatura obtuvo el Diploma de Estudios Avanzados en la especialidad de Geometría y Topología y el Certificado de Aptitud Pedagógica. Además de unos meses trabajando como docente en un instituto en el curso 2004-2005, se dedicó exclusivamente a la actividad docente en secundaria y bachillerato en el sector público en Aragón desde finales del año 2007. En el año 2010 obtuvo plaza de funcionario docente, ejerciendo en diferentes centros de Zaragoza hasta que en el curso 2012-2013 obtuvo el primer destino definitivo como funcionario de carrera en el IES Leonardo de Chabacier de Calatayud, centro donde se realizó esta experimentación. En el mismo curso obtuvo una plaza de Profesor Asociado en la Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza en el área de didáctica de la matemática. Desde entonces compatibilizó ambas tareas.

Por tanto, el perfil del profesor-investigador al comienzo de la investigación es el de un docente joven con amplios conocimientos matemáticos pero bajos conocimientos sobre didáctica de la matemática, con una experiencia docente en secundaria de algo más de 4 cursos académicos y con un contacto incipiente con la docencia universitaria en el ámbito de la educación matemática y de la didáctica de la matemática como disciplina científica.

El profesor-investigador es el responsable principal de la investigación. Por tanto, además de asumir las tareas propias de la docencia en los grupos en los que se implementa la docencia, asume la mayor parte de las tareas propias de la investigación, apoyándose en los expertos que junto a él constituyen el equipo de investigación para mejorar la fiabilidad y validez del trabajo.

[44] Las referencias de los libros de texto que los profesores del departamento de matemáticas usaban durante el tiempo en el que se llevó a cabo esta propuesta y que recoge la programación didáctica del departamento son los siguientes:

Álvarez, M.D., Hernández, J., Machín, P., Miranda, A.Y, Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R. Sánchez, M.T., Santos, T. & Serrano, E. (2011). Matemáticas 2 ESO Los caminos del Saber. Madrid, España: Santillana.

Álvarez, M.D., Hernández, J., Miranda, A.Y, Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R. Sánchez, M.T., Santos, T. & Serrano, E. (2010). Matemáticas 1 ESO Los caminos del Saber. Madrid, España: Santillana.

III.3.4. Génesis del problema de investigación

En el Capítulo I hemos detallado el problema de investigación que se aborda en este trabajo. Esta sección pretende conectar dicho problema con el contexto en el que se genera. Como hemos dicho, el profesor-investigador, tras unos años de experiencia docente, comienza a realizar su actividad en un centro de un perfil medio-bajo en competencia matemática, por debajo de la media para su nivel socioeconómico, en un departamento que, de manera general, sigue modelos de enseñanza de corte empírico.

Además, coincidiendo con su llegada al centro, el profesor-investigador entra en contacto con la didáctica de la matemática como disciplina científica comenzando a trabajar con investigadores de la Universidad de Zaragoza. La docencia del profesor-investigador en la Universidad de Zaragoza se imparte en el Grado de Magisterio de Educación Primaria en la asignatura de Didáctica de la Aritmética II que aborda los procesos de enseñanza y aprendizaje del número racional en primaria, incluido el significado de razón del número racional y la proporcionalidad aritmética. Esta asignatura se estructura utilizando, entre otros, referentes como los trabajos de Gairín (1998), Escolano (2007) y Oller-Marcén (2012).

En esta situación, el profesor-investigador comienza a cuestionar las secuencias tradicionales de enseñanza y aprendizaje de los temas relacionados con la aritmética y, en concreto, con la proporcionalidad aritmética, que se llevan a cabo en su centro educativo. Esta reflexión desemboca en su preocupación por basar el aprendizaje de la proporcionalidad aritmética en un uso significativo de las operaciones implicadas y alejarlo de técnicas algorítmicas. Además, se cuestiona los modelos de enseñanza que se aplican en su centro y su propia práctica como docente, queriendo introducir cambios en el primer aspecto y ahondar en sus conocimientos didácticos para mejorar su práctica.

III.3.5. El equipo de investigación

El profesor-investigador, que es el práctico que sostiene el peso de la investigación-acción, está incluido en un grupo colaborativo de trabajo junto con dos asesores externos, que en este caso son dos de los directores de este proyecto de tesis doctoral. Estos asesores, expertos en investigación en educación matemática, son los doctores José M. Muñoz Escolano y Antonio M. Oller Marcén.

El equipo de investigación se reúne, con diferente periodicidad, a lo largo de las cuatro fases que compone cada uno de los ciclos de investigación-acción. En la fase de planificación se mantuvieron reuniones quincenales en las que el profesor-investigador planteaba sus avances en la planificación de la propuesta didáctica y los asesores orientaban hacia posibles cambios y mejoras. Durante las fases de acción se mantenían, al menos, dos reuniones por semana para monitorizar la implementación de la propuesta de forma que el profesor-investigador pudiera informar "sobre la marcha" de los imprevistos y, además de los cambios que el profesor-investigador introducía de manera inmediata, pudieran consensuarse otros cambios en la planificación. Tras la acción se analizaban los resultados obtenidos a través de los diferentes instrumentos y se realizaban reuniones quincenales para la triangulación de investigadores, y para debatir sobre el análisis de los casos negativos o de aquellos cuya inclusión en una determinada categoría pudiera resultar conflictiva. Una vez realizado dicho análisis, el profesor-investigador realizaba una reflexión personal y elaboraba un breve informe que presentaba en el equipo de investigación y servía como punto de partida para realizar una reflexión colectiva.

III.3.6. Diseño de los ciclos de investigación-acción

La intervención en el aula se ha desarrollado en cinco etapas (ver Tabla III - 1, Tabla III - 2 y Figura III - 3). Estas etapas se corresponden a cinco ciclos de investigación-acción, dos con la propuesta de 1º de ESO, ciclos II-1 y III-1, que continua el ciclo realizado por Oller-Marcén (2012), ciclo I-1, y otros tres ciclos con la propuesta diseñada para 2º de ESO, ciclos I-2, II-2 y III-2. Los ciclos de investigación-acción de 2º de ESO se realizaban sobre grupos de alumnos que habían recibido el curso anterior nuestra propuesta en un ciclo de investigación-acción en 1º de ESO.

	Ciclo investigación-acción	Abreviatura	Curso	Alumnos intervención	Alumnos control
ETAPA 1	Confirmación 1º ESO	Ciclo II-1	2013-2014	65	21
ETAPA 2	Observación 2º ESO	Ciclo I-2	2014-2015	20	19
ETAPA 3	Saturación 1º ESO	Ciclo III-1	2015-2016	58	17
ETAPA 4	Confirmación 2º ESO	Ciclo II-2	2016-2017	20	20
ETAPA 5	Saturación 2º ESO	Ciclo III-2	2016-2017	18	-

Tabla III - 1. Etapas del diseño experimental y principales características.

Debido a las reorganizaciones de alumnos que se llevaban a cabo entre un curso y otro en el instituto donde se realizó la experimentación no se pudieron seleccionar grupos a los que poder aplicarles la propuesta sin que hubiera grandes variaciones de alumnos. Por tanto, se optó por realizar la propuesta en el mayor número posible de grupos en 1º de ESO para poder asegurar un alto porcentaje de alumnos en cada grupo de 2º sobre los que hubiéramos actuado en 1º. Así, se reservaba un grupo de 1º de ESO para el grupo de control y el profesor-investigador no solo actuaba en los grupos que tenía asignados durante todo el curso, sino también en el resto de los grupos de 1º en los que no era el docente habitual. La selección de los grupos fue incidental, obedeciendo a razones de organización del centro (la asignación de los grupos habituales del profesor-investigador) y compatibilidad de horarios (para decidir el resto de los grupos sobre los que se intervenía).

Al haber dos cursos diferentes en los que se intervenía en 1º de ESO, se planificaron dos ciclos de 2º de ESO durante un mismo curso escolar dejando el espacio suficiente entre ciclos para poder realizar las fases de observación y reflexión del ciclo anterior y la planificación del siguiente antes de la acción. El equipo de investigación estimó conveniente realizar el ciclo de observación de 2º de ESO, de carácter exploratorio, I-2 en un curso y los ciclos de confirmación y saturación, II-2 y III-2 en otro. En el curso 2016-2017 en donde se realizaron las fases de acción de los ciclos II-2 y III-2, el centro perdió una vía en 2º de ESO, pasando de cuatro a tres. Al disponer solo de tres grupos se determinó incluir el único grupo de control disponible en el ciclo II-2, por lo que para el ciclo III-2 se utilizó el mismo grupo de control que para el ciclo II-2 ya que eran de la misma promoción. Para el grupo de control del ciclo I-2 se eligió el grupo de una profesora en prácticas a la que tutorizaba el profesor-investigador y con la que disponía de una hora de coordinación semanal.

En la Tabla III - 1 puede observarse el número de alumnos que participaron en las diferentes etapas de investigación, tanto de los grupos de intervención como de los de control. Los alumnos de los grupos de control componen un único grupo en cada etapa de la experimentación. Los alumnos de los ciclos correspondientes a 2º de ESO también completan un único grupo. Los alumnos de 1º de la ESO con los que se actuó en los ciclos II-1 y III-1 pertenecen a tres grupos diferentes en cada ciclo. Como hemos dicho, la reorganización de los alumnos entre cursos no ha hecho posible realizar un estudio longitudinal sobre un mismo grupo a lo largo de 1º y 2º, sí sobre alumnos particulares, por lo que no hemos desglosado la muestra en los ciclos II-1 y III-1 por grupos y trabajaremos sobre los datos obtenidos de estos grupos de forma conjunta. En total se ha actuado sobre 113 alumnos en 1º de ESO y con 58 en 2º de ESO y han participado como alumnos del grupo de control 38 alumnos de 1º de ESO y 20 de 2º de ESO.

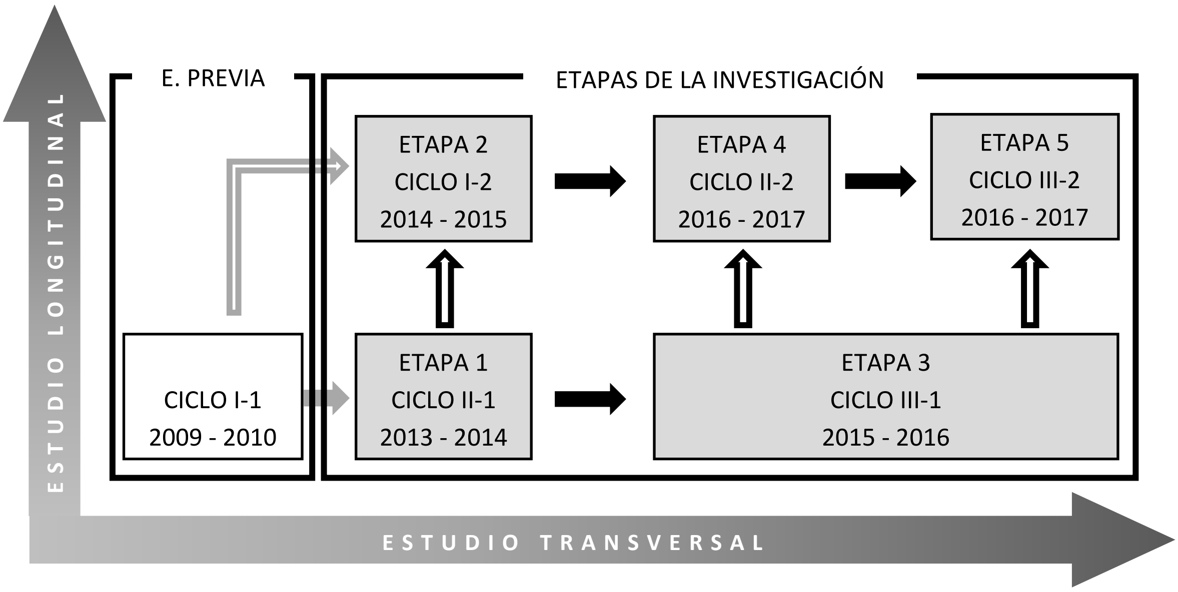


Figura III - 3. Esquema del diseño experimental e influencia entre ciclos.

Inicialmente el diseño planificaba las cinco etapas a lo largo de tres cursos académicos: el ciclo II-1 en el curso 2013-2014, los ciclos I-2 y III-1 en el curso 2014-2015 y los ciclos II-2 y III-2 durante el curso 2015-2016. Sin embargo, poco antes de finalizar el ciclo II-1, el profesor-investigador tuvo que ser intervenido quirúrgicamente y hubo que rediseñar la planificación. La afección al final de la fase de acción del ciclo II-1, que detallaremos posteriormente, era menor, por lo que dicho ciclo se dio por concluido correctamente. Sin embargo, no se pudo realizar el ciclo III-1 durante el curso 2014-2015 por lo que hubo que posponerlo al curso 2015-2016. Para realizar los ciclos II-2 y III-2 era necesario haber realizado un curso antes el ciclo III-1 por lo que dichos ciclos se pospusieron al curso 2016-2017.

Por tanto, en nuestro estudio, fijando el foco de atención en el diseño e implementación de la propuesta didáctica para 1º y 2º de ESO se han completado dos espirales de investigación-acción (Coleman, 2019, p. 156) con tres ciclos cada una, una para 1º de ESO (tomando como ciclo I-1 el implementado por Oller-Marcén (2012)) y otra para 2º de ESO. Dichas espirales no se han completado para cada nivel independientemente. Los ciclos de cada espiral se han intercalado para favorecer que las reflexiones no solo tuvieran consecuencias en la siguiente iteración del mismo nivel, sino que también se han tenido en cuenta las reflexiones de los ciclos de 1º de ESO para la iteración en 2º de ESO llevada a cabo con los mismos alumnos (ver Figura III - 3).

Etapa	Fases	Curso	Temporalización
1	Planificación inicial general	2013-2014	Septiembre-Diciembre
	Análisis libros de texto – prop. compuesta	2013-2014	Noviembre-Febrero
	Fase de planificación ciclo II-1	2013-2014	Diciembre-Febrero
	Fase de acción ciclo II-1	2013-2014	Febrero-Abril
	Fase de observación ciclo II-1	2013-2014	Abril-Junio
	Fase de reflexión ciclo II-1	2014-2015	Septiembre
2	Fase de planificación ciclo I-2	2014-2015	Octubre-Diciembre
	Fase de acción ciclo I-2	2014-2015	Enero-Febrero
	Fase de observación ciclo I-2	2015-2016	Septiembre-Octubre
	Fase de reflexión ciclo I-2	2015-2016	Noviembre-Diciembre
3	Fase de planificación ciclo III-1	2015-2016	Enero-Marzo
	Fase de acción ciclo III-1	2015-2016	Abril
	Fase de observación ciclo III-1	2015-2016	Mayo-Junio
	Fase de reflexión ciclo III-1	2016-2017	Septiembre
4	Fase de planificación ciclo II-2	2016-2017	Octubre-Enero
	Fase de acción ciclo II-2	2016-2017	Enero-Febrero
	Fase de observación ciclo II-2	2016-2017	Febrero
	Fase de reflexión ciclo II-2	2016-2017	Marzo
5	Fase de planificación ciclo III-2	2016-2017	Marzo
	Fase de acción ciclo III-2	2016-2017	Marzo-Abril
	Fase de observación ciclo III-2	2016-2017	Mayo-Junio
	Fase de reflexión ciclo III-2	2017-2018	Septiembre

Tabla III - 2. Temporalización de las fases de cada ciclo de investigación-acción.

En la Tabla III - 2 puede observase de forma detallada la planificación de las diferentes etapas y las fases de investigación-acción que la componen. Cabe destacar que el carácter cíclico de la investigación-acción ha provocado que dicha planificación no se haya desarrollado de la forma estrictamente lineal tal y como la presentamos. El avance en la acción ha supuesto cambios en la estructura y contenidos del marco teórico y conceptual y otros elementos de la investigación. Entre ellos, destacamos las categorías de análisis de los resultados que se han ido refinando a lo largo de todo el proceso.

A continuación, detallamos algunas características de las diferentes fases de las que se compone cada ciclo, las modificaciones que se introdujeron desde el diseño inicial y la justificación de algunas de las decisiones tomadas en el diseño experimental.

III.3.6.1. Fases de planificación

Al comenzar una investigación-acción, la fase de planificación inicial implica concretar el problema de investigación e indagar sobre dicho problema. Esta fase inicial en nuestra investigación supuso concretar y completar el marco teórico y conceptual, la revisión de antecedentes y la profundización en la metodología de investigación. Se realizaron, además, algunas investigaciones adyacentes a la investigación que presentamos. Destacamos las centradas en la proporcionalidad compuesta, por un lado, intentando caracterizar la enseñanza tradicional a través de los libros de texto (Martínez-Juste *et al*., 2014, 2015b, 2017), por otro indagando sobre aspectos cognitivos como las estrategias de resolución utilizadas por estudiantes (Martínez-Juste *et al*., 2015a). Estos trabajos, que hemos comentado en el Capítulo II, buscaban completar el marco teórico de nuestro trabajo para diseñar, implementar y analizar correctamente la parte de nuestra propuesta alrededor de este concepto. El grueso de esta parte de la primera fase de planificación tuvo lugar durante la primera mitad del curso 2013-2014.

Los ciclos I-1 (no realizado por el autor) y II-1 tienen un carácter exploratorio para poder preparar planes de acción más afinados tras la fase de reflexión (Kemmis *et al*., 2013). Este carácter exploratorio implica diferencias en las fases de planificación en estos primeros ciclos, respecto al resto. En este proyecto, dado el carácter exploratorio del ciclo I-1 y la necesidad de adaptar la propuesta al nuevo contexto social, hemos realizado un diseño diferenciado al de Oller-Marcén (2012) que recoge todas sus ideas principales y las reflexiones tras la experimentación, pero modifica una parte importante de las tareas y su secuencia. Así, en la fase de planificación del ciclo II-1 (sección V.1), se rediseña y analiza la propuesta para 1º de ESO. En la fase de planificación del ciclo I-2 (sección VI.1) se crea un diseño completamente nuevo para 2º de ESO. En las fases de planificación del resto de los ciclos (secciones VII.1, VIII.1 y IX.1) nos centramos en los cambios introducidos a partir de la reflexión de los ciclos anteriores. Las fases de planificación de cada ciclo se llevaron a cabo entre el primer trimestre y el principio del segundo trimestre del curso escolar correspondiente a la fase de acción, salvo la planificación del ciclo III-2 que se llevó a cabo al final del segundo trimestre del curso escolar al coincidir, como hemos dicho, dos ciclos de investigación-acción en el mismo nivel en el mismo curso.

III.3.6.2. Fases de acción

El diseño de la propuesta didáctica se realizó para que pudiera implementarse en un número de sesiones similar al que se preveía en la programación didáctica del centro y que esta duración no supusiera cambios significativos respecto al grupo de control. Así, se reservó un espacio de unas tres semanas, entre once y trece sesiones de clase dependiendo del ciclo, para la acción en cada uno de los ciclos de investigación-acción, además de una sesión para la prueba escrita. La planificación y duración concreta de cada ciclo puede verse en la Tabla III - 2. El calendario específico de actuación en cada grupo y en cada ciclo se muestra en los informes sobre las fases de planificación en las secciones V.2, VI.2, VII.2, VIII.2 y IX.2. En laTabla III - 3 se muestra la ubicación de la propuesta didáctica dentro de la planificación de unidades didácticas del curso correspondiente.

Ciclo	Sesiones	Grupo	Ubicación en el curso
II-1	12	B, C	Dentro del bloque de números, después del racional positivo y antes de números enteros y de introducir el álgebra.
	12	A	Dentro del bloque de números, después del racional positivo y enteros y antes de introducir el álgebra.
III-1	13	D	Dentro del bloque de números, después del racional positivo y antes de números enteros y álgebra.
	14	B, C	Dentro del bloque de números, después del racional positivo y enteros y antes de introducir el álgebra.
I-2	14	Único	Al final del bloque de números y antes del álgebra.
II-2	14	Único	Al final del bloque de números y antes del álgebra.
III-2	14	Único	Antes del bloque de geometría, tras terminar el bloque de números y álgebra.

Tabla III - 3. Duración de las fases de acción y ubicación de la propuesta dentro de la programación anual.

La duración de la acción mostrada en la Tabla III - 3, no corresponde a una planificación a priori antes de comenzar la investigación, el aumento de una sesión entre los primeros ciclos en 1º de ESO y los siguientes se corresponde a decisiones tomadas en la fase de reflexión correspondiente para dar un tratamiento más pausado a algunos conceptos. De manera similar, la planificación inicial de 2º de ESO constaba de 13 sesiones, sin embargo durante la fase de acción del primer ciclo se consideró conveniente añadir una sesión.

La diferencia de la ubicación de la propuesta en 1º de ESO se debe a que el profesor-investigador era el profesor habitual en los grupos B y C del ciclo II-1 y en el grupo D del ciclo III-1, por lo que en dichos grupos se implementó la propuesta con la ubicación que entendemos como natural. Para poder compatibilizar los horarios e intervenir en el grupo A del ciclo II-1 y en los grupos B y C del ciclo III-1 se adelantaron las unidades relativas al número entero. En el centro donde se intervino, la enseñanza del número entero recibía un tratamiento aritmético a través de modelos concretos, así que, aunque entendemos como preferente la ubicación tras el tratamiento del número racional positivo, pensamos que dicho cambio no supone ningún conocimiento previo signitificativo a la hora de abordar nuestra propuesta.

Los ciclos I-2 y II-2 de 2º de ESO se realizaron en la ubicación que consideramos deseable para nuestra propuesta, como culminación de los temas aritméticos en 2º de ESO y previa al tratamiento del álgebra. Aunque el profesor-investigador era el profesor habitual de todos los grupos en los que se intervino en 2º de ESO, para poder realizar el ciclo III-2 en el mismo curso escolar que el ciclo II-2 se pospuso la implementación de la propuesta, realizándose el ciclo III-2 al finalizar el bloque de álgebra. A pesar de que en este ciclo los alumnos tenían unos conocimientos previos sobre álgebra mayores que en los ciclos anteriores, pensamos que este hecho no interfiere de forma significativa en los resultados de la propuesta ya que todos los alumnos que intervinieron en 2º de ESO tenían conocimientos previos de 1º de ESO sobre lenguaje algebraico y ecuaciones de primer grado.

III.3.6.3. Fases de observación

Las fases de observación se planificaron para realizarse durante el tercer trimestre de los cursos escolares en los que se intervenía, a excepción de la fase de observación del ciclo II-2 que debía realizarse antes de la intervención en el ciclo III-2. Esta planificación inicial se vio modificada para la fase de observación del ciclo I-2 debido a la intervención quirúrgica del profesor-investigador que obligó a trasladar dicha fase al primer trimestre del curso siguiente. Este hecho provocó también que no se pudieran realizar entrevistas semiestructuradas durante dicho ciclo ya que, aunque los instrumentos de recogida de información se implementaban de forma simultánea a la acción, las entrevistas semiestructuradas se realizaban en las fases de observación. Sin embargo, el equipo de investigación consideró que no era adecuado realizar las encuestas semiestructuradas en el ciclo I-2 tras haber transcurrido ocho meses de la acción, cuando en el resto de los ciclos, en el momento de realización de las entrevistas, habían transcurrido solo unos días desde la realización de la prueba escrita.

El análisis de los datos recogidos en las diferentes fases de observación puede consultarse en las secciones V.3, VI.3, VII.3, VIII.3 y IX.3 de la presente memoria.

III.3.6.4. Fases de reflexión

El carácter continuo de la reflexión durante todo el proceso de investigación-acción por parte del profesor-investigador hace difícil situarlo en un momento concreto en el tiempo. En la Tabla III - 2 se localiza temporalmente la planificación de las fases de reflexión. Dicha localización temporal hace referencia al momento en el que se realizaron las reuniones del equipo de investigación donde, a partir de los informes elaborados por el profesor-investigador sobre la fase de observación, se realiza una reflexión conjunta sobre el proceso para extraer conclusiones y marcar las líneas para la planificación de los siguientes ciclos.

Salvo el retraso provocado por la baja del profesor-investigador, no se produjeron modificaciones en el diseño inicial de las fases de reflexión de los diferentes ciclos.

Las reflexiones sobre el desarrollo de cada uno de los ciclos de investigación se estructuraron en torno a tres grandes focos de atención que en último término pretenden dar respuesta al Objetivo II de nuestra investigación: "Explorar las potencialidades y limitaciones de la propuesta didáctica cuando se implementa con grupos naturales de primero y segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria." En cada ciclo se responde parcialmente a este objetivo para poder tomar decisiones que conlleven a una adecuada consecución del Objetivo I de investigación: "Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética para todo el primer ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria, modificando la realizada para 1º. ESO en (Oller-Marcén, 2012) y completando la propuesta para todo el primer ciclo constituyendo una alternativa a la enseñanza tradicional."

Atendiendo a las relaciones del triángulo didáctico Profesor-Alumno-Contenido (Houssaye, 1988), se organizan las reflexiones tras cada ciclo de investigación-acción (Castro, 1994; Escolano, 2007; Romero, 1995). Así, en los informes de cada ciclo presentamos en primer lugar las reflexiones sobre el diseño de la propuesta (secciones V.4.1, VI.4.1, VII.4.1, VIII.4.1 y IX.4.1) que atiende a la relación Profesor-Contenido y suponen conclusiones parciales en torno al subobjetivo II.1. A continuación, realizamos las reflexiones sobre la comprensión de los alumnos (secciones V.4.2, VI.4.2, VII.4.2, VIII.4.2 y IX.4.2) que dan cuenta de la relación entre los alumnos y el contenido de la propuesta y suponen conclusiones parciales en torno al subobjetivo II.2. En tercer lugar, se presentan las reflexiones sobre la metodología y la labor del profesor-investigador que se centran en las relaciones entre el profesor y los alumnos en el contexto del aula (secciones V.4.3, VI.4.3, VII.4.3, VIII.4.3 y IX.4.3). Estas suponen conclusiones parciales en torno al subobjetivo II.3. Además, salvo en el Capítulo VIII, en las secciones V.4.4, VI.4.4., VII.4.4. y IX.4.4 se hacen otras reflexiones sobre el funcionamiento general de la propuesta.

Como es obvio, las fases de reflexión de los ciclos II-1 y III-1 estarán enfocadas en mayor medida a las conclusiones que redunden en una mejora en la consecución de la adecuada modificación de la propuesta de Oller-Marcén (subobjetivo I.1), mientras que las de los ciclos I-2, II-2 y III-2 se enfocan a la consecución del subobjetivo I.2 "Diseñar una propuesta completa para los contenidos no incluidos en la experimentación de Oller-Marcén (2012)."

III.3.7. Fuentes de obtención de datos experimentales

Para poder obtener las conclusiones parciales en cada ciclo en torno a los subobjetivos II.1, II.2 y II.3 que hemos recordado en la sección anterior, se han establecido diferentes mecanismos y herramientas para la obtención de datos experimentales. De entre los listados en la sección III.1.2.3. descritos por Kemmis *et al*. (2013), en nuestra investigación se han utilizado los siguientes:

- Diario de clase del profesor-investigador, que recoge la información obtenida mediante la observación directa de los alumnos mientras trabajaban.
- Análisis de documentos escritos:

- Producciones de los alumnos de las tareas de clase, las tareas de casa y la prueba escrita.
- Producciones de los alumnos del grupo de control en la prueba escrita.

- Realización de entrevistas semiestructuradas a una selección de alumnos.
- Grabación de las sesiones de clase.
- Observadores externos, que cumplimentaban un protocolo de observación tras el visionado de las sesiones de clase.

Así, los datos se generan a partir de la interacción entre los diferentes participantes del proceso de investigación. El profesor-investigador genera un diario de clase. Los alumnos rellenan las fichas de trabajo y la prueba escrita. La producción de las entrevistas semiestructuradas combina las preguntas que realiza el profesor-investigador y las respuestas generadas por los alumnos. Las grabaciones de las sesiones de clase son visionadas por observadores externos al equipo de investigación que rellenan un informe de cada una de las sesiones de clase visionadas. Por último, se recogen las respuestas a la prueba escrita realizadas por los alumnos del grupo de control.

Para cada foco de atención en la reflexión se obtiene información mediante varias de las fuentes de datos, lo que supone una triangulación de datos. Así, para valorar el diseño de la propuesta se utiliza tanto el diario de clase, como el análisis de las producciones de los alumnos y algunos aspectos de la observación externa. Para reflexionar sobre los aspectos cognitivos se usan principalmente las producciones de los alumnos y las entrevistas semiestructuradas, pero también la observación directa de los alumnos realizada por el profesor-investigador y por la recogida en los diarios de clase. Para reflexionar sobre los aspectos instruccionales se utilizan tanto el diario de clase como las respuestas de los observadores externos al protocolo de observación.

Por otro lado, la combinación de métodos cualitativos y cuantitativos supone una triangulación metodológica. Por ejemplo, el análisis de los diarios y de las entrevistas semiestructuradas se realiza en un plano cualitativo esencialmente descriptivo. Por otro lado, las producciones de los alumnos se analizan desde un punto de vista cualitativo, acompañando el estudio de estadísticos descriptivos y realizando una comparación cuantitativa con el grupo de control centrada en la prueba escrita.

III.3.7.1. Diario de clase

Como hemos indicado en la sección III.1, la elaboración de un diario de clase que narre los hechos acontecidos durante la acción es la herramienta de recogida de información ineludible en una investigación-acción educativa (Kemmis *et al.*, 2013). Además, como advierte Elliot (2005), este diario debe contener no solo datos objetivos, sino que debe recoger las impresiones, reflexiones, interpretaciones, … que la acción genera en el profesor-investigador.

En nuestra investigación-acción se elaboraron cinco cuadernillos para recoger la narración de las fases de acción de cada uno de los ciclos llevados a cabo. El conjunto de estos cuadernillos supone el diario de clase de nuestra investigación. Cada cuadernillo contiene la planificación por sesiones de la propuesta del ciclo correspondiente y una página por cada sesión y grupo en el que se actuaba. El profesor-investigador realizaba sus anotaciones durante la sesión y al final de esta, rellenando dos tablas, una con la información para ubicar la sesión (número de sesión de la propuesta, grupo en el que se actuaba y fecha) y otra con la información que consideraba relevante sobre la sesión alrededor de seis indicadores tomados de la estructura de los diarios de clase utilizados en sus investigaciones por Escolano (2007) y Oller-Marcén (2012):

- Plan previsto.
- Ejecución del plan previsto.
- Aspectos actitudinales y asistencia.
- Aspectos relacionados con la comprensión.
- Valoración.
- Toma de decisiones.

El primer indicador incluía un esquema de la planificación a priori de la sesión para comparar con el segundo indicador en el que se reflejaba la estructura real de la sesión llevada a cabo. En este segundo indicador se recogían consideraciones sobre la implementación como: actividades que no se han llevado a cabo, cambio en el orden de las actividades previstas, o diferencias significativas respecto al tiempo estimado de cada actividad. El tercer indicador recoge información sobre la percepción del profesor-investigador acerca de cómo los alumnos están reaccionando a la instrucción, de su interés y su comportamiento a lo largo de la sesión y de las eventuales faltas de asistencia. A continuación, el cuarto indicador recoge las impresiones del profesor-investigador sobre la comprensión de los alumnos derivadas de la observación directa durante el trabajo en pequeño grupo (Kemmis *et al.*, 2013) o de los debates que se generan con el grupo clase (Blázquez, Ibañes, & Ortega, 2005). En el siguiente indicador el profesor-investigador valora de manera general la sesión a partir de las reflexiones e impresiones que ha tenido durante la acción. Por último, se incluye un indicador en el que se recogen los posibles cambios que se proponen de cara a las siguientes sesiones y que, por tanto, implican una consulta con el equipo de investigación.

III.3.7.2. Producciones de los alumnos

Una de las principales fuentes de información sobre aspectos cognitivos utilizada en este trabajo son las respuestas escritas de los alumnos a los problemas que se les proponen (Cañadas & Castro, 2013). Diferenciaremos entre las producciones escritas de los alumnos de los grupos de intervención de las de los alumnos del grupo de control. Las producciones escritas de los alumnos de los grupos donde se actúa son de tres clases:

- Respuestas a los **problemas planteados durante las sesiones** que los alumnos realizan por parejas. Al finalizar la actividad correspondiente el profesor-investigador recoge una de las fichas de los alumnos del grupo, antes de la puesta en común e institucionalización, para que estas no se vieran reflejadas en las respuestas de los alumnos. Al finalizar la sesión de clase el profesor-investigador escanea todas las producciones recogidas.

- Respuestas a los **problemas planteados como tarea para realizar fuera del horario lectivo** que los alumnos responden individualmente, pero sin la supervisión del profesor. Al comenzar la siguiente sesión de clase el profesor-investigador recoge todas las producciones de los alumnos antes de la puesta en común e institucionalización, para que estas no se vieran reflejadas en las respuestas de los alumnos. Al finalizar la sesión de clase el profesor-investigador escanea todas las producciones recogidas.
- Respuestas a los **problemas planteados en la prueba escrita** que los alumnos responden individualmente y bajo la vigilancia del profesor-investigador. La prueba escrita tiene una duración de una sesión de clase. Al terminar la prueba escrita se escanean todas las pruebas.

De los alumnos del grupo de control solo se recogen las producciones de la prueba escrita. Esta prueba, a la que los alumnos responden individualmente y bajo la vigilancia de su profesor habitual, es la misma que la de los grupos en los que se actúa. Aunque los alumnos del grupo de control realizaron las pruebas escritas de forma íntegra, los profesores responsables de dichos grupos las revisaron previamente para detectar aquellos ítems que trabajasen contenidos no impartidos en estos grupos. Estas diferencias se remarcarán en las fases de observación de cada ciclo en las que se analizan los resultados de las pruebas escritas.

Los problemas que los alumnos deben resolver se entregan en un documento impreso en papel. El documento se maqueta de forma que se reserva un hueco suficientemente amplio para que los alumnos respondan y para que el profesor-investigador pueda localizar correctamente la respuesta (ver Imagen III - 1).

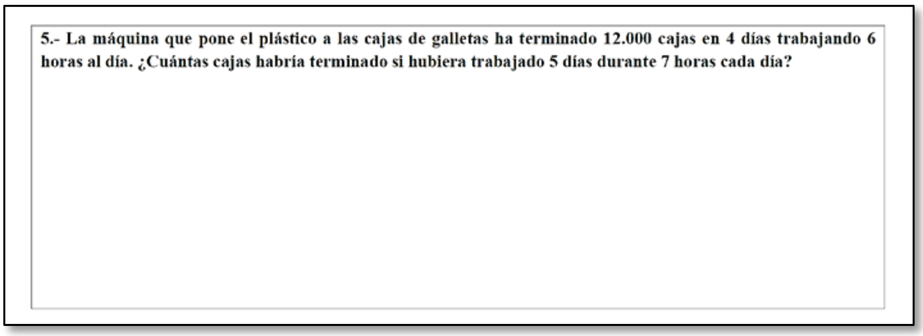

5.- La máquina que pone el plástico a las cajas de galletas ha terminado 12.000 cajas en 4 días trabajando 6 horas al día. ¿Cuántas cajas habría terminado si hubiera trabajado 5 días durante 7 horas cada día?

Imagen III - 1. Detalle de la maquetación de los problemas en la prueba escrita.

De forma anecdótica, durante la investigación se recogen otras producciones escritas que realizan los alumnos durante las entrevistas semiestructuradas. En ocasiones, los alumnos solicitan responder por escrito a las preguntas realizadas por el profesor-investigador o desarrollar algún caso concreto que ejemplifique sus argumentos.

III.3.7.3. Entrevistas semiestructuradas

La realización de entrevistas es uno de los principales instrumentos de obtención de datos sociológicos (Denzin, 1978). Como indican Blázquez *et al*. (2005, p. 1) "[La validez de una investigación-acción] que está basada en triangulaciones (y en saturaciones), puede y debe ser complementada con debates y con entrevistas."

Denzin (1978) distingue tres tipos de entrevistas según si las entrevistas se desarrollan a partir de un guion planificado previamente o no (*Nonstandardized Interview)*, y si, cuando siguen un guion planificado previamente, este es común a todos los entrevistados (*Standardized Interview)* o se eligen focos de contenido prioritarios y las preguntas dentro de cada foco se adaptan teniendo en cuenta las características propias de cada individuo (*Nonschedule Standardized Interview*). En un plano intermedio entre las *entrevistas estructuradas* con un guion cerrado y las entrevistas abiertas o *no estructuradas*, se sitúan las *entrevistas semiestructuradas* (Kemmis *et al*., 2013). Una entrevista semiestructurada no se realiza según un guion cerrado de preguntas que deben seguirse en un orden concreto, sino que la planificación prevé preguntas abiertas o más generales cuyo orden puede modificarse y el entrevistador improvisa preguntas durante la entrevista para profundizar sobre las respuestas que obtiene del entrevistado. Diferentes trabajos exploran las cualidades deseables que debe tener una entrevista en el ámbito de la investigación educativa (Seidman, 2006). Dentro del campo específico de la educación matemática, Blázquez *et al*. (2005) señalan como preferente la elaboración de entrevistas semiestructuradas que se adapten al nivel y a las producciones concretas de los alumnos y señalan como fundamentales un conjunto de principios "asociados al entrevistador, a los entrevistados, a los contenidos y al desarrollo de las entrevistas".

En nuestro trabajo hemos optado por realizar entrevistas semiestructuradas, eligiendo focos de interés comunes a las diferentes entrevistas, pero adaptando los guiones a cada uno de los entrevistados. Concretamos para nuestro estudio los principios de Blázquez *et al*. (2005) de la siguiente forma:

- **Respecto al entrevistador:** Dada la importancia que tiene que el entrevistador conozca las producciones de los alumnos y haya reflexionado sobre ellas, domine el contenido y conozca las hipótesis de trabajo, es el profesor-investigador el que realiza las entrevistas semiestructuradas.
- **Respecto a los alumnos entrevistados:** Se han seleccionado alumnos cuyas producciones escritas contenían algún elemento difícil de analizar o interpretar, contenían algún elemento de especial importancia sobre el que se quería profundizar, o presentaban producciones con estrategias diferentes en ejercicios similares y se quería indagar sobre las posibles causas de esa variabilidad. Se realiza más de una entrevista por ciclo intentando elegir alumnos con perfiles de desempeño diferentes.
- **Respecto a los contenidos:** Se realiza un guion diferenciado para cada entrevista que contiene producciones escritas de los alumnos entrevistados. No se trabajan todos los focos de contenido en cada ciclo, sino que el equipo de investigación selecciona algunos focos de contenido concretos que considera de mayor relevancia para las entrevistas en dicho ciclo. Estos focos de interés varían entre ciclos para poder abarcar la mayor parte posible del contenido. Las entrevistas de un mismo ciclo se estructuran alrededor de los mismos focos, pero personalizando las preguntas para cada entrevistado en función de su nivel de desempeño y de sus producciones concretas.

- **Respecto al desarrollo de la entrevista:** Se evitan preguntas directas o que contengan la solución. En general, no se validan las respuestas de los entrevistados ya que no se da importancia a que estos respondan correctamente. El profesor-investigador sostiene un diálogo con los entrevistados con la intención de que aflore su pensamiento. Los alumnos disponen de una fotocopia de sus respuestas a los problemas que se utilizan como punto de partida para realizar las preguntas y de material para escribir si quieren apoyar sus respuestas planteando ejemplos numéricos, plantear enunciados de problemas o resolver algún problema concreto.

En la Figura III - 4 se observa el guion de una de las entrevistas preparadas para el ciclo II-1 que se estructura alrededor de cuatro focos de contenido. Entre corchete y sombreado aparecen las referencias a las tareas del alumno entrevistado sobre las que se pregunta que el entrevistador fotocopiaba y añadía al guion de la entrevista. Entre paréntesis se incluyen frases condicionales que dan paso a una pregunta en función de las respuestas dadas por los alumnos a preguntas anteriores.

A. Magnitudes directamente proporcionales. Razón. Condición de regularidad.
A.1. ¿Qué significa la razón entre dos magnitudes?
A.2. ¿Qué es y para qué sirve la condición de regularidad?
[TAREA 2 - Hoja A1]
A.3. Explícame lo que has escrito en T2S6
A.4. ¿Son directamente proporcionales las magnitudes que aparecen en T2S6?
A.5. Te voy a proponer un problema: En esa misma situación imagínate que te pido que calcules cuántas horas al día tendría que leer para terminar el libro en 4 días.
[TAREA 4 - Hoja A2]
A.6. ¿Por qué no son directamente las magnitudes en esta situación?
A.7. ¿Se parecen en algo T4 camiones y T2S6?
A.8. ¿Qué diferencias encuentras entre las situaciones anteriores y las de proporcionalidad directa?

B. Problemas de comparación cuantitativa.
[TAREA 4 EJERCICIO 1 A - Hoja B]
B.1. Lee y explícame la condición de regularidad en este ejercicio.
B.2. (Si no explicita que existen dos condiciones de regularidad) ¿Tardan tanto Íker como Thais en dibujar cada caricatura?

C. Problemas de comparación cualitativa.
[TAREA 8 EJERCICIO 1 D - Hoja C]
C.1. En este ejercicio pones que no puedes saberlo “porque necesitas más datos”. ¿Qué datos necesitas?
C.2. Pon un ejemplo y resuélvelo.
C.3. ¿Siempre sale eso? ¿Puedes poner otros datos para que el resultado sea diferente?

D. Problemas de valor perdido.
D.1. Explícame lo que haces para resolver este problema.
[FICHA 7.1 PROBLEMA 4 - Hoja D1]
D.2. Explícame lo que haces para resolver este problema.
[TAREA 6 PROBLEMA 3 - Hoja D2]
D.3. ¿Podrías hacer en F7.1 P4 el mismo método que en T6P3?
D.4. (Si a la anterior responde que sí) ¿Por qué no lo has usado?
D.5. ¿Podrías hacer en T6P3 el mismo método que en F7.1 P4?
D.6. (Si a la anterior responde que sí) ¿Cómo lo harías?

Figura III - 4. Ejemplo de guion para una entrevista semiestructurada.

Las entrevistas semiestructuradas son grabadas con una cámara de video que encuadra al profesor-investigador (entrevistador) y al alumno (entrevistado). Los alumnos disponen de papel y bolígrafo para acompañar, si lo desean, sus respuestas orales con respuestas escritas o realizar operaciones y desarrollos matemáticos para completar sus respuestas. En las entrevistas en las que los entrevistados realizaron algún tipo de producción escrita, el profesor-investigador muestra esta producción a cámara antes de continuar con otras partes de la entrevista. Posteriormente se escanearon estas producciones escritas surgidas a partir de las entrevistas semiestructuradas.

A partir de las grabaciones de video, se genera un informe escrito sobre cada una de las entrevistas semiestructuradas realizadas en tres etapas de trabajo. Estas etapas adaptan algunas de las fases de análisis de grabaciones de clase descritas por Planas (2006) al caso de entrevistas con alumnos:

- **Estudio y descripción del video:** Se visiona al menos dos veces la entrevista completa para tener una primera experiencia de lo acontecido. Y se realiza un informe descriptivo que incluye descripciones breves por intervalos de tiempo centrados en los focos de contenido que se han elegido para la entrevista.
- **Identificación de casos (episodios de revisión):** Se buscan y transcriben episodios concretos de especial relevancia para interpretar la comprensión de los alumnos del contenido del foco de investigación.
- **Elaboración de historias explicativas:** Se interpretan los contenidos del video y de la transcripción relacionándolos con aspectos cognitivos que genera una síntesis de contenidos matemáticos cuya intención es responder a la pregunta, ¿qué conocimientos matemáticos expresa el alumno? En este punto del proceso es necesario realizar una triangulación de investigadores “a fin de validar las relaciones e historias construidas para los distintos episodios” (Planas, 2006, p. 49).

III.3.7.4. Grabación de las sesiones y observadores externos

Además del diario de clase, se estableció otro mecanismo de control para el seguimiento exhaustivo de la implementación del diseño, la grabación de las sesiones de clase. La grabación se realiza con una única cámara de video que realiza un plano general desde el fondo del aula. En la imagen pueden verse a los alumnos y al profesor-investigador y el encuadre recoge la pizarra de tiza y la pizarra digital.

El propósito de este registro fue incluir la observación de las sesiones por parte de expertos en educación matemática que no pertenecían al equipo de investigación (Kemmis *et al.*, 2013). De esta manera, se introduce un mecanismo externo de validación.

Para este fin se contactó con cuatro doctores en didáctica de las matemáticas para que observaran las grabaciones en vídeo y cumplimentaran un protocolo de observación:

- D. Alberto Arnal Bailera, doctor por la Universitat Autònoma de Barcelona desde 2013. Observador externo del ciclo II-1 y del ciclo II-2.
- D. Pablo Beltrán Pellicer, doctor por la Universidad Nacional de Educación a Distancia desde 2015. Observador externo del ciclo III-1.

- Dña. Janeth A. Cárdenas Lizarazo, doctora por la Universidad de Extremadura desde 2014. Observadora externa del ciclo I-2.
- D. Rafael Escolano Vizcarra, doctor por la Universidad de Zaragoza desde 2007. Observador externo del ciclo III-2.

En el protocolo, los observadores informaban para cada sesión sobre una serie de indicadores, adaptados de los utilizados por Porres (2011), agrupados en cuatro bloques. En un primer bloque se incluyen preguntas sobre aspectos del diseño y su implementación en el aula. A continuación, se incluyen preguntas sobre la actuación del profesor-investigador. El tercer bloque de preguntas se centra en la actuación de los alumnos, tanto sobre temas actitudinales, como de participación, como de la asimilación de los contenidos que se observa. El último bloque incluye indicadores sobre el tipo y la frecuencia de las interacciones profesor-alumno. En la Figura III - 5, se muestran los ítems de los que consta el protocolo de observación de cada sesión. El protocolo incluye cuestiones de respuesta abierta para que el observador pudiera expresar su opinión, cuestiones de opción múltiple e ítems de escala Likert. Estas cuestiones graduadas debían valorarse en una escala de 1 a 5, con valor entero (1 nada adecuado / malo, 5 totalmente adecuado / excelente).

1. Sobre el tratamiento y la metodología de la sesión.
1.1. Grado de adecuación de la sesión de clase al diseño teórico.
 1.1.1 Objetivos. (1-5)
 1.1.2 Contenidos. (1-5)
 1.1.3 Metodología. (1-5)
1.2 Viabilidad del tratamiento de los contenidos. (1-5)
1.3 Ajuste de la sesión al tiempo previsto. (SÍ/NO)
1.4. Comentarios sobre este apartado.

2. Sobre la actuación del profesor en la sesión.
2.1. Actitud y comportamiento.
 2.1.1. Actitud del profesor durante la sesión. (1-5)
 2.1.2. Interés por el aprendizaje de los alumnos. (1-5)
 2.1.3. Atención a las necesidades de los alumnos. (1-5)
2.2 Participación en el proceso docente.
 2.2.1 Fomenta participación. (SÍ/NO)
 2.2.2 Reconoce avances y progresos. (SÍ/NO)
 2.2.3 Identifica dificultades. (SÍ/NO)
 2.2.4 Promueve la reflexión. (SÍ/NO)
2.3 Calidad y claridad expositiva en las intervenciones.
 2.3.1 Calidad expositiva. (1-5)
 2.3.2 Claridad expositiva. (1-5)
2.4 Tiempo de intervención. (Escaso/Adecuado/Excesivo)
2.5. Comentarios sobre este apartado.

3. Sobre la actuación de los alumnos en la sesión.
3.1. Tipo de participación predominante. (Iniciativa/Pasividad/Silencio/Realizan las tareas/Otras)
3.2. Tipo de preguntas que realizan los alumnos. (Aclarar dudas/Ampliar conceptos/Otras)
3.3. Atención/asimilación observadas.
 3.3.1. Atienden a las intervenciones. (Sí/no/No observable)
 3.3.2. Comprenden las intervenciones. (Sí/no/No observable)
 3.3.3. Comprenden los contenidos. (Sí/no/No observable)
3.4. Actitud predominante. (Negativa/Neutra/positiva).
3.5. Comentarios sobre este apartado.

4. Interacciones profesor-alumno.
4.1. Frecuencia. (Nunca/A menudo/Constantemente)
4.2. Tipo de interacciones en la sesión. (Con el grupo-clase/Con parejas de alumnos/Con alumnos individualmente/A instancia del profesor/A instancia del alumno/Unidireccional/Diálogo fluido)
4.3. Comentarios sobre este apartado.

5. Otras incidencias y comentarios generales sobre la sesión observada.

Figura III - 5. Indicadores del protocolo de observación cumplimentado por los expertos externos.

Para que los observadores externos pudieran realizar su labor de manera informada, se elaboró un dossier para cada ciclo de investigación-acción que incluía un resumen de las ideas clave de la propuesta didáctica, el modelo de enseñanza que se seguía y la información completa sobre el diseño curricular correspondiente a cada sesión. El diseño curricular contenía los objetivos didácticos, los contenidos trabajados, un esquema con la secuenciación y temporalización de las actividades que estructuran la sesión y los enunciados de las tareas que se proponían a los alumnos.

III.3.8. Categorías de análisis y tratamiento de datos

A partir de los datos obtenidos mediante las herramientas descritas en la sección anterior se realiza un análisis de contenido (Bardin, 1986). La información se sistematiza y organiza alrededor de una serie de categorías de análisis que permiten combinar métodos cualitativos y cuantitativos para extraer conclusiones fiables y válidas del fenómeno bajo estudio (Krippendorff 2004; López, 2002). Las categorías de análisis empleadas para sistematizar la información obtenida obedecen a la estructura que hemos presentado para la fase de reflexión que se genera a partir de las relaciones del triángulo didáctico. Así, se establecen unidades, o categorías, de análisis para el contenido de la propuesta didáctica, para los aspectos cognitivos y de comprensión del contenido, y para la instrucción o interacción didáctica.

III.3.8.1. Categorías de análisis del contenido

Las categorías utilizadas en este nivel de análisis se corresponden con los focos prioritarios de nuestra investigación. En el Capítulo I ya introdujimos estos focos que estructuran el contenido de la propuesta didáctica y surgen como síntesis del análisis conceptual y de contenido realizado en el Capítulo II. En el Capítulo IV haremos explícita esta síntesis y justificaremos y detallaremos la construcción de los focos de interés. En el siguiente esquema presentamos de nuevo estos focos de interés que forman el sistema de categorías y subcategorías de análisis del contenido.

- **0.** Magnitudes y vocabulario asociado.
- **1.** Relaciones entre magnitudes.
  - **1.1.** Existencia de relación proporcional.
  - **1.2.** Caracterización de la relación.
- **2.** Problemas de proporcionalidad simple directa.
  - **2.1.** Tipo de problema.
  - **2.2.** Estrategias de resolución.
- **3.** Problemas de proporcionalidad simple inversa.
  - **3.1.** Tipo de problema.
  - **3.2.** Estrategias de resolución.
- **4.** Problemas de proporcionalidad compuesta.
  - **4.1.** Estructura multiplicativa.
  - **4.2.** Tipo de problema.
  - **4.3.** Estrategias de resolución.
- **5.** Repartos proporcionales.
  - **5.1.** Tipo de relación proporcional.
  - **5.2.** Estrategias de resolución.
- **6.** Porcentajes.
  - **6.1.** Interpretación.
  - **6.2.** Tipo de problema.
  - **6.3.** Estrategias de resolución.

Para categorizar los tipos de problemas en situaciones proporcionales simples y compuestas utilizaremos la distinción clásica entre problemas de comparación cuantitativa, problemas de comparación cualitativa y problemas de valor perdido (Cramer & Post, 1993). Para los problemas de porcentajes distinguiremos de forma general los Tipos I, II y III (Dole *et al*., 1997) y los problemas de aumentos y disminuciones porcentuales (Parker & Leinhardt, 1995).

III.3.8.2. Categorías de análisis de la comprensión del contenido

Como hemos mencionado anteriormente, las conclusiones sobre la comprensión de los alumnos se realizan a partir del análisis de las producciones escritas y de las respuestas de las entrevistas semiestructuradas. Para analizar las respuestas de los alumnos establecemos un sistema de categorías en dos niveles. El primer nivel es general y común a todos los focos de investigación en el que se clasifican las respuestas a los problemas según el éxito. El segundo nivel se realiza de forma específica para las respuestas a los problemas dentro de cada una de las categorías de análisis de contenido. En este segundo nivel, se estudian aspectos concretos relacionados con cada tipo de problema como las caracterizaciones, los tipos de argumentaciones o las estrategias utilizadas en la resolución.

Para el nivel general, se han considerado cuatro categorías:

- **N**: el alumno no entrega la tarea para casa o no asiste a la sesión de clase por lo que no hay registro de sus producciones.
- **B**: el alumno entrega el ejercicio en blanco o no responde a una pregunta en la entrevista. Por tanto, hay registro de su producción, pero esta está vacía. En esta categoría se clasifican algunas producciones ininteligibles.
- **I**: el alumno responde de forma incorrecta a la pregunta.
- **C**: el alumno responde de forma correcta a la pregunta.

La introducción de las categorías diferenciadas N y B permite distinguir en las producciones de clase entre la ausencia de los alumnos y los ejercicios propuestos y no realizados. Este último aspecto puede relacionarse en ocasiones con una mayor dificultad del ejercicio o una excesiva carga de problemas en la actividad. En la clasificación de las producciones entre las categorías I y C, no se han tenido en cuenta errores aritméticos achacables a fallos en la ejecución de los algoritmos de las operaciones básicas o en los cambios de representación de números racionales.

En el siguiente nivel de análisis se establecen categorías específicas para los focos de contenido, a excepción del Foco 0 en el que se hace un análisis meramente cualitativo descriptivo y no se introducen categorías específicas de análisis. Para el resto de los focos se incluyen una categoría “cero” que, generalmente indica que se ha dado una solución a una pregunta, de forma correcta o incorrecta, sin apoyar en ningún tipo de argumento o proceso que permita interpretar el razonamiento llevado a cabo por el alumno para su obtención.

Categorías de análisis específicas para el Foco 1.

En este foco de contenido se han utilizado las categorías de análisis que pueden observarse en la Tabla III - 4. Dichas categorías sirven para describir los argumentos empleados por los alumnos en la caracterización de una relación de proporcionalidad. Estas categorías recogen las caracterizaciones de la relación de proporcionalidad basadas en las de Fernández (2009), Oller-Marcén (2012) y Valverde (2012) para la proporcionalidad simple directa y las de Oller-Marcén (2012) para proporcionalidad simple inversa que expusimos en las secciones II.2.2.2. y II.2.2.5. del Capítulo II.

Cód.	Argumento	Cód.	Argumento
D0	Sin argumentación.	**D5**	Implícitamente funcional. Multiplicativa.
D1	Por razones internas.	**D6**	Multiplicativa. Doble, triple, mitad, …
D2	Por razones externas / Constante de proporcionalidad.	**D7**	Cualitativa. Aumentos y disminuciones.
D3	Explícitamente funcional.	**D8**	Existencia de relación.
D4	Implícitamente funcional. Aditiva.	**D9**	Número de magnitudes.

Tabla III - 4. Categorías específicas para el análisis de las caracterizaciones de relaciones de proporcionalidad simple.

En el análisis de las situaciones se introducen contextos en los que las magnitudes no están relacionadas y situaciones en las que hay expresiones numéricas que no se corresponden con una cantidad de magnitud. Para recoger las respuestas que aluden a la existencia o no existencia de relación para determinar si existe una relación proporcional entre las magnitudes y las respuestas que aluden a que no hay suficientes magnitudes para considerar una relación funcional, incorporamos las categorías D8 y D9.

Categorías de análisis específicas para el Foco 2.

Problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Describimos la actuación específica de los alumnos al resolver problemas de comparación cuantitativas mediante las categorías de la Tabla III - 5. Estas categorías recogen estrategias correctas de resolución (C1-C3) que podrán provenir de respuestas incluidas en las categorías generales de respuestas correctas e incorrectas, C e I, en función de si la estrategia se ha aplicado correcta o incorrectamente. Pero también recogen estrategias incorrectas (C4-C5) que, necesariamente provendrán de la categoría general de respuestas incorrectas, I.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
C0	Sin razonamiento	**C3**	Resuelve problema de valor perdido
C1	Funcional, cte. proporcionalidad	**C4**	Operaciones sin sentido
C2	Escalar, razones internas	**C5**	Razonamientos aditivos erróneos

Tabla III - 5. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Estas categorías se han generado imitando las de Karplus *et al*. (1983) para los problemas de comparación de mezclas de azúcar y zumo (sección II.3.2.1. del Capítulo II). Unimos los razonamientos erróneos cualitativos ("como tiene más azúcar está más dulce") con los aditivos ("tiene dos cucharadas más de azúcar luego está más dulce") en la categoría C5 y consideramos las respuestas ilógicas clasificadas por los autores como respuestas clasificadas en nuestra categoría C4 "Operaciones sin sentido". Para refinar la categoría de respuestas multiplicativas incluida en el trabajo de Karplus *et al*. (1983) utilizamos la distinción de Vergnaud (1983) entre estrategias funcionales mediante la comparación de razones externas (constante de proporcionalidad en el caso directo), categoría C1, y las estrategias escalares mediante comparación de razones internas, categoría C2 (sección II.2.4.3. del Capítulo II). Además, añadimos como categoría C3, las producciones descritas por Valverde y Castro (2009) en las que los alumnos resuelven un problema de valor perdido para responder a un problema de comparación cuantitativa (ver sección II.3.2.1. del Capítulo II).

Problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Las categorías específicas empleadas para el análisis de las respuestas a los problemas de comparación cualitativo las vamos a estructurar a su vez en dos niveles o dos conjuntos de categorías. Por un lado, para analizar el desempeño de los alumnos en los problemas de respuesta cerrada introducimos un nivel de categorías que se corresponde con las opciones de respuesta utilizadas en el trabajo de Heller *et al*. (1989) que presentamos en la sección II.3.2.1. del Capítulo II (ver Tabla III - 6). Estas categorías se usarán de forma general en todos los problemas de comparación cualitativa ya que recogen las cuatro únicas posibles respuestas.

Código	**Tipo de argumento**	**Código**	**Tipo de argumento**
$\boldsymbol{S_1 > S_2}$	La primera situación es mejor/mayor/más ventajosa	$\boldsymbol{S_1 = S_2}$	Las dos situaciones son igual de buenas / ventajosas.
$\boldsymbol{S_1 < S_2}$	La segunda situación es mejor/mayor/más ventajosa	$\boldsymbol{S_1}$¿?$\boldsymbol{S_2}$	No puede decidirse qué opción es mejor/mayor/más ventajosa

Tabla III - 6. Categorías específicas para clasificar la respuesta final en un problema de comparación cualitativa.

En un tercer nivel, usaremos las ideas de López-Rueda y Figueras (1999) que introdujimos en la sección II.3.2.1. del Capítulo II, para establecer el sistema de categorías de la Tabla III - 7. Estas categorías distinguen entre los diferentes modos en los que los estudiantes argumentan sus respuestas introduciendo diferentes sistemas de representación. Así, la categoría CL1 incluye las respuestas en las que los alumnos emplean argumentaciones en lenguaje natural ya sea escrito o verbal. Las respuestas que apoyan sus argumentos en representaciones gráficas de la situación a estudio se incluyen en la categoría CL2. Las argumentaciones que proponen ejemplos numéricos concretos para razonar sus respuestas se incluyen en la categoría CL3.

Código	Tipo de argumento	Código	Tipo de argumento
CL0	Sin razonamiento	**CL2**	Gráfico
CL1	Escrito/verbal	**CL3**	Ejemplo numérico

Tabla III - 7. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Describimos la actuación específica de los alumnos al resolver problemas de valor perdido mediante las categorías de la Tabla III - 8. Como en otros casos, estas categorías recogen tanto estrategias correctas de resolución (VPd2-VPd7) como estrategias incorrectas (VPd8-VPd9). Incluimos la categoría VPd1, cuyas respuestas correctas se incluirán en la categoría de respuestas correctas C, que supone un procedimiento matemáticamente correcto y se corresponde con estrategias de construcción de patrones numéricos, aunque carentes de significado (Vergnaud, 1983) y, como indica Lamon (1993a), no es constitutiva de razonamiento proporcional (ver secciones II.2.4.3. y II.3.2.1 del Capítulo II). Mientras que las respuestas incluidas en las categorías VPd8-VPd9 se incluirán en el primer nivel de análisis en la categoría de respuestas incorrectas I, las correspondientes a las categorías VPd1-VPd7 podrán estar incluidas en la categoría de respuestas correctas C, o en la categoría de respuestas incorrectas I, según si la aplicación de la estrategia no ha sido correcta.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
VPd0	Sin razonamiento	**VPd5**	Proporción
VPd1	Construcción de patrones	**VPd6**	Construcción sucesiva
VPd2	Factor de cambio	**VPd7**	Uso de una fórmula
VPd3	Razón externa con multiplicación	**VPd8**	Operaciones sin sentido
VPd4	Razón externa con división	**VPd9**	Razonamientos aditivos erróneos

Tabla III - 8. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Para construir las categorías VPd2-VPd7, correspondientes a estrategias correctas, utilizamos la distinción entre estrategias multiplicativas escalares, o por factor de cambio, (VPd2) y funcionales, o por razón externa, (VPd3 y VPd4), que utilizan múltiples autores (Cramer & Post, 1993; Lamon, 1993a, 1993b; Noelting, 1980b; Vergnaud, 1983). Como comentamos en la sección II.2.4.3. del Capítulo II, la estrategia funcional puede plantearse de dos formas diferentes, según se considere una relación funcional entre las magnitudes o su inversa, lo que produce que, en la última etapa, una estrategia por razón externa se concluya con una multiplicación (VPd3) o una división (VPd4). Para completar las categorías para estrategias correctas, consideramos el establecimiento de una proporción[45] (Lamon, 1993a), que codificaremos por VPd5. Así mismo,

[45] No introducimos en las categorías para problemas de valor perdido en situaciones directas, ni tampoco en las inversas, la distinción entre si la proporción se genera a partir de razones externa o razones

añadimos el uso de una estrategia de construcción progresiva (Tournaire & Pulos, 1985) o descomposición escalar (Verganud, 1983), para la que emplearemos el código VPd6, y, por último, el uso de una fórmula, o resolución por regla de tres, (Cramer & Post, 1993) codificada como VPd7.

Para las estrategias incorrectas, además de la comentada VPd1, añadimos VPd8 y VPd9 de forma análoga a las categorías C4 y C5, que se corresponden con respuestas en las que se plantean operaciones carentes de significado y con respuestas que usan razonamientos aditivos erróneos (Lamon, 1993a), respectivamente.

Categorías de análisis específicas para el Foco 3.

Para las situaciones de proporcionalidad inversa, utilizamos como categorías las estrategias correctas que presentamos en la sección II.2.4.5. del Capítulo II, realizando una adaptación por analogía de las estrategias directas. Algunas de estas estrategias para el caso inverso han sido utilizadas en los trabajos de Fisher (1988), Monteiro (2003) y Oliveira (2009). Además de la adaptación de las estrategias directas al caso inverso, hemos introducido la categoría "Supone relación directa" en las categorías específicas para cada tipo de problema, ya que, como relatamos en la sección II.3.2.4. del Capítulo II diversos autores (Monteiro, 2003; Norton, 2005; Oliveira, 2009) señalan que la mayoría de las respuestas incorrectas en tareas que involucran situaciones de proporcionalidad simple inversa se deben a suponer que existe una relación directa o, al menos, proceder exactamente con la misma secuencia de operaciones como si este hecho ocurriera.

En la Tabla III - 9 y en la Tabla III - 10 presentamos las categorías específicas de análisis para las respuestas a problemas de comparación cualitativos y para caracterizar el tipo de argumento empleado en los problemas de comparación cualitativa, respectivamente. Estas categorías tienen el mismo código que las correspondientes para los problemas en situaciones simples directas ya que únicamente hemos añadido la categoría C6, en el caso cuantitativo, y la categoría CL4, en el caso del tipo de argumento cualitativo, a las correspondientes categorías del caso directo. Para describir qué respuesta concreta da el estudiante, de entre las cuatro posibles, en un problema de comparación cualitativa se utiliza el mismo sistema de categorías presentado en la Tabla III - 6.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
C0	Sin razonamiento	**C4**	Operaciones sin sentido
C1	Funcional, cte. proporcionalidad	**C5**	Razonamientos aditivos erróneos
C2	Escalar, razones internas	**C6**	Supone relación directa
C3	Resuelve problema de valor perdido		

Tabla III - 9. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

internas. Dado que nuestra propuesta evita el uso de proporciones es esperable que esta estrategia no aparezca de forma predominante por lo que incluiremos todas las producciones que usen una proporción dentro de esta categoría comentando, si las hubiere, las diferencias entre estrategias que planteen proporciones.

Código	Tipo de argumento	Código	Tipo de argumento
CL0	Sin razonamiento	**CL3**	Ejemplo numérico
CL1	Escrito/verbal	**CL4**	Supone relación directa
CL2	Gráfico		

Tabla III - 10. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

Las categorías de análisis para las respuestas a problemas de valor perdido en situaciones inversas reciben una denominación distinta a las correspondientes para situaciones de proporcionalidad simple directa (ver Tabla III - 11), ya que, además de introducir la categoría “Supone relación directa” (VPi8), hemos eliminado de las categorías la estrategia de construcción progresiva, intrínsecamente ligada a las relaciones lineales, y hemos eliminado la distinción entre las dos estrategias funcionales para situaciones directas (VPd3 y VPd4), que no tiene sentido en las situaciones inversas, por lo que las resoluciones que utilizan estrategias funcionales, mediante el cálculo de la constante de proporcionalidad inversa, se incluyen en la categoría VPi3.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
VPi0	Sin razonamiento	**VPi5**	Uso de una fórmula
VPi1	Construcción de patrones	**VPi6**	Operaciones sin sentido
VPi2	Factor de cambio	**VPi7**	Razonamientos aditivos erróneos
VPi3	Constante de proporcionalidad	**VPi8**	Supone relación directa
VPi4	Proporción		

Tabla III - 11. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

Categorías de análisis específicas para el Foco 4.

Problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta.

El punto de partida para establecer las categorías de análisis de las respuestas de los alumnos a problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta. son los trabajos de Martínez-Juste *et al*. (2014) y Martínez-Juste *et al*. (2015a). Estos trabajos, que se presentaron con detalle en las secciones II.2.4.6 y II.3.2.4 del Capítulo II, se centran en los problemas de valor perdido. De esta manera, en la Tabla III - 12, se presentan las categorías que utilizaremos en este tipo de problemas, tanto correctas VPC1-VPC7, como incorrectas VPC8-VPC11. Como en las situaciones de proporcionalidad simple, la estrategia de construcción de patrones numéricos (VPC1) ha sido incluida entre las respuestas correctas, aunque no sea constitutiva de razonamiento proporcional. En la sección II.2.4.6 distinguimos teóricamente la estrategia de amalgamación (VPC2) de la estrategia de paso a paso pasando por la unidad, sin embagro, ante la previsible falta de argumentación en las respuestas de los alumnos, verificada posteriormente en la práctica como veremos en el Capítulo V, se añadió la categoría VPC4, ya que existe una fina diferencia entre considerar el resultado de una operación binaria entre la magnitud M_1 y M_2 como la cantidad de una de las magnitudes, por ejemplo M_1, correspondiente a una unidad de M_2 (por ejemplo, considerar la longitud correspondiente a caminar una hora), y considerar el resultado como la cantidad correspondiente a una nueva magnitud, M_3 (por ejemplo considerar la velocidad medida en "kilómetros por cada hora").

Código	Estrategia	Código	Estrategia
VPC0	Sin razonamiento	**VPC6**	Proporciones
VPC1	Construcción de patrones	**VPC7**	Uso de una fórmula
VPC2	Amalgamación de magnitudes	**VPC8**	Operaciones sin sentido
VPC3	Paso a paso pasando por la unidad	**VPC9**	Razonamientos aditivos erróneos
VPC4	Se mezcla el uso de **VPC2** y **VPC3**	**VPC10**	Trabajo con las magnitudes independientes por separado
VPC5	Paso a paso sin pasar por la unidad	**VPC11**	Omisión de una de las magnitudes independientes

Tabla III - 12. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta.

A partir del estudio de los métodos de resolución para problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Tabla III - 12) y los métodos para problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple (Tabla III - 5) , establecemos un sistema de categorías (Tabla III - 13) para analizar las respuestas de los alumno a problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
CC0	Sin razonamiento	**CC4**	Operaciones sin sentido
CC1	Cálculo de las constantes de proporcionalidad mediante amalgamación	**CC5**	Razonamientos aditivos erróneos
CC2	Cálculo de las constantes de proporcionalidad mediante otros procedimientos	**CC6**	Omisión de alguna magnitud
CC3	Se resuelve un problema de valor perdido		

Tabla III - 13. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Los métodos correctos se han reducido esencialmente a dos, CC2 y CC3, donde CC3 es la adaptación del método detectado en Valverde y Castro (2009) para proporcionalidad simple directa C3. Destacamos CC1, que podría quedar incluido en CC2 o CC3, para hacer un seguimiento específico ya que es el método que institucionalizamos en nuestra propuesta. Dentro de las categorías para estrategias incorrectas hemos unido VPC10 y VCP11 en una única estrategia incorrecta CC6, ya que en los problemas de comparación no existe la distinción entre magnitudes o variables dependientes e independientes y, por tanto, no hay magnitudes privilegiadas.

Al igual que las estrategias VPC1 a VPC7, las estrategias CC1 a CC4 son estrategias potencialmente correctas, pero que pueden corresponder a respuestas incorrectas debido a una mala aplicación del método (habrán sido incluidas previamente en la categoría general I o C). Por otro lado, tanto las categorías de VPC8 a VPC11, como de CC5 a CC7 corresponden a estrategias incorrectas y, por tanto, darán lugar necesariamente a resoluciones incorrectas (habrán sido incluidas en la categoría general I).

Problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Aunque hemos introducido una nueva codificación para distinguir los tipos de argumentos utilizados en los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Tabla III - 14), las categorías de análisis de CLC0 a CLC3 se corresponden con las categorías de CL0 a CL3 presentadas en la Tabla III - 7 que empleamos en el caso simple. Para el caso compuesto hemos añadido por analogía con los problemas cuantitativos la estrategia errónea de responder al problema mediante la omisión de una de las magnitudes involucradas, es decir, como si fuera un problema de proporcionalidad simple.

Código	Tipo de argumento	Código	Tipo de argumento
CLC0	Sin razonamiento	**CLC3**	Ejemplo numérico
CLC1	Escrito/verbal	**CLC4**	Omisión de alguna magnitud
CLC2	Gráfico		

Tabla III - 14. Categorías específicas de análisis de problemas de comparación cualitativa en problemas de proporcionalidad compuesta.

Para describir qué respuesta concreta da el estudiante, de entre las cuatro posibles, en un problema de comparación cualitativa se utiliza el mismo sistema de categorías presentado en la Tabla III - 6.

Categorías de análisis específicas para el Foco 5.

El análisis específico de los problemas de repartos proporcionales lo hemos considerado a su vez en otros tres subniveles de análisis. En una primera etapa estudiaremos el modelo empleado por los alumnos a la hora de hacer los repartos. Así, como hemos explicado en la sección II.3.2.5. del Capítulo II, la revisión de la literatura (Antequera & Espinel, 2011; Peled & Balacheff, 2011; Peled & Bassan-Cincinatus, 2005; Sánchez, 2013, 2014) nos lleva a considerar tres grandes modelos de reparto: el modelo equitativo (categoría MR1), el modelo de compensación aditiva (categoría MR2) y el modelo de reparto proporcional (MR3). Las motivaciones sociales o éticas que pueden estar detrás de elegir uno u otro modelo para resolver un problema de reparto en el que no se explicita que deba hacerse mediante un modelo proporcional hacen que no hayamos incluido el modelo equitativo y el de compensación aditiva como estrategias erróneas al resolver un problema proporcional.

Código	Modelo	Código	Modelo
MR1	Equitativo	**MR3**	Proporcional
MR2	Compensación aditiva		

Tabla III - 15. Categorías específicas de análisis para determinar el modelo empleado en un problema de reparto.

En el siguiente nivel, centrándonos en las respuestas realizadas mediante un modelo proporcional, establecemos las siguientes categorías de análisis para las estrategias de resolución de problemas de repartos proporcionales, tanto directos como inversos (Tabla III - 16). En primer lugar, distinguimos las respuestas que se basan en la resolución de problemas de valor perdido relacionando partes y totales, categoría RP1 (en dichos problemas solo hay un dato desconocido). Si se establece la relación entre dos parejas de datos relacionando partes con partes, encontramos dos datos desconocidos y las estrategias pasan por una resolución algebraica, código RP2. Mediante RP3 codificamos la estrategia aritmética basada en normalizar los pesos y generar un reparto equivalente en el que a un individuo se le da la cantidad 1 para, posteriormente hacer uso de las relaciones parte-todo para terminar el problema. Se completa el sistema de categorías con la inclusión de las estrategias que hacen un uso directo de una fórmula para obtener las soluciones. Estas categorías, que presentamos en la sección II.2.4.7. del Capítulo II, se basan en las estrategias de resolución utilizadas en los trabajos de Gairín y Oller-Marcén (2011), Gómez (1999) y Sánchez (2013).

Código	Estrategia	Código	Estrategia
RP0	Sin razonamiento	**RP3**	Aritmético mixto, normalización, parte-parte y parte-todo.
RP1	Emplean problemas de valor perdido parte-todo.	**RP4**	Uso de una fórmula
RP2	Algebraico planteando problemas de valor perdido parte-parte y aditividad.		

Tabla III - 16. Categorías específicas de análisis de problemas de repartos proporcionales.

La categoría RP1 engloba muchas estrategias diferentes si nos centramos en la resolución de los problemas de valor perdido que se generan. Por tanto, en un siguiente nivel de análisis, las respuestas categorizadas en RP1 pueden analizarse según las categorías establecidas para problemas de valor perdido en la Tabla III - 8 para el caso directo, o en la Tabla III - 11 en el caso inverso. Las respuestas de RP2 también pueden refinarse con algunas de estas categorías de problemas de valor perdido distinguiendo si se usan proporciones (VPd5/VPi4) o regla de tres (VPd7/VPi5) para las relaciones parte-parte, y en el caso de usar proporciones si estas se generan mediante un acercamiento funcional o escalar.

Categorías de análisis específicas para el Foco 6.

Utilizaremos dos sistemas de categorías diferentes para el análisis de las respuestas de los alumnos relacionados con las áreas que Lembke y Reys (1994) establecen como prioritarias para el estudio de la comprensión del porcentaje (ver sección II.3.2.3. del Capítulo II), la comprensión del porcentaje y la resolución de problemas. Para la comprensión conceptual establecemos el sistema de categorías que se observa en la Tabla III - 17 generado a partir de las diferentes interpretaciones del concepto de porcentaje que determinan Parker y Leinhardt (1995) (ver sección II.2.2.3. del Capítulo II). Estos autores distinguen entre interpretación parte-todo (IP1), razón (IP2) y operador (IP3). Hemos introducido la categoría IP0 para incluir aquellas respuestas en las que no se evidencie una interpretación determinada.

Código	Interpretación	Código	Interpretación
IP0	No se evidencia	**IP2**	Razón
IP1	Parte-todo	**IP3**	Operador

Tabla III - 17. Categorías específicas de análisis para las interpretaciones del concepto de porcentaje.

Para analizar la resolución de problemas hemos adaptado las categorías para analizar la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa de la Tabla III - 8. Esta categorización de respuestas puede emplearse para analizar las producciones sobre problemas de Tipo I, Tipo II y Tipo III y para los problemas de variaciones porcentuales (sección II.2.4.9. del Capítulo II). En la estrategia de factor de cambio (VPp2) hemos introducido la nomenclatura habitual en los trabajos sobre porcentajes “análisis unitario”. Además, hemos añadido las categorías VPp10, VPp11, VPp12 y VPp13 que se corresponden con estrategias propias de trabajos sobre porcentaje (Lembke & Reys, 1994) y que introdujimos en la sección II.3.2.3 del Capítulo II.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
VPp0	Sin razonamiento	**VPp7**	Uso de una fórmula
VPp1	Construcción de patrones	**VPp8**	Operaciones sin sentido
VPp2	Factor de cambio/Análisis unitario	**VPp9**	Razonamientos aditivos erróneos
VPp3	Razón externa con multiplicación	**VPp10**	Cálculo y comprobación
VPp4	Razón externa con división	**VPp11**	Fracción unitaria/puntos referencia
VPp5	Proporción	**VPp12**	Estimaciones/Ensayo y error
VPp6	Construcción sucesiva	**VPp13**	Argumento basado en gráficos

Tabla III - 18. Categorías específicas de análisis de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje.

Los problemas de aumentos y disminuciones porcentuales involucran una estructura aditiva parte-parte-todo de forma que el porcentaje se corresponde con una razón normalizada parte-parte (sección II.2.4.9 del Capítulo II). Al estudiar las respuestas en este tipo de problemas analizaremos si los estudiantes utilizan la relación parte-parte o construyen una razón parte-todo relacionando la cantidad inicial y la final.

III.3.8.3. Categorías de análisis de la instrucción

Como describimos en el Capítulo II, como organizadores del análisis de instrucción se consideran las siguientes categorías (Rico & Fernández-Cano, 2013): funciones y secuencias de las tareas, materiales y recursos, y gestión del aula.

Escolano (2007) establece un sistema de unidades para analizar las interacciones didácticas entre el profesor y los alumnos que se producen en el aula, y supone una especificación del organizador 'gestión del aula'. El autor distingue tres tipos de interacciones en el aula y describe indicadores centrados en el profesor y en el alumno para cada tipo de interacción:

- **Gestión del trabajo en el aula (GTA):** Da cuenta de la estructura organizativa que forma parte del contrato pedagógico y que el profesor tiene a su cargo. Se utilizan descriptores que dan cuenta de la responsabilidad del profesor como gestor del aula (informar sobre las actividades que se deben realizar, procurar que los alumnos trabajen y atiendan) y de cómo los alumnos actúan en acuerdo o desacuerdo con la estructura organizativa. En esta categoría se incluyen también los aspectos actitudinales.
- **Gestión del desarrollo del contenido (GDC):** El profesor es el responsable de presentar y desarrollar los contenidos, promover, fomentar o dar por finalizados los debates generados, resolver dudas, … Por su parte, los alumnos realizan acciones como proponer preguntas o dudas, pedir aclaraciones o solicitar ampliar información sobre los conceptos trabajados, y estas acciones influyen en el desarrollo del contenido.
- **Gestión de la construcción del conocimiento (GCC):** El profesor promueve la construcción del conocimiento en los debates generados con los alumnos, organizando y contrastando las respuestas que proponen los escolares.

El diseño del diario de clase y del protocolo de los observadores externos, engloba indicadores que informan sobre cada una de las tres categorías anteriores de la gestión del aula.

Así, en el diario de clase, el indicador "Ejecución del plan previsto" da información sobre la gestión del contenido, el indicador "Aspectos actitudinales y asistencia" sobre parte de la gestión del trabajo en el aula y el indicador "Aspectos relacionados con la comprensión" lo hace sobre la construcción del conocimiento. Además, los indicadores "Valoración" y "Toma de decisiones" pueden contener también información relativa a las categorías anteriores.

En la Tabla III - 19 puede verse la relación entre los indicadores del protocolo para el observador externo centrados en el profesor y centrados en el alumno (Figura III - 5), y las categorías para el análisis de la gestión del aula:

Categoría	Indicadores centrados en el profesor	Indicadores centrados en los alumnos
GTA	1.3, 1.4, 2.1, 2.2.1, 2.4	3.4, 3.3.1
GDC	1.1, 1.2, 1.4, 2.3	3.1, 3.2
GCC	2.2.2, 2.2.3	3.3.2, 3.3.3

Tabla III - 19. Indicadores del protocolo de observación y su relación con las categorías de análisis de la gestión del aula.

Cabe destacar que, además de los indicadores que se relacionan en la Tabla III - 19, el protocolo contiene preguntas de respuesta abierta y otros indicadores centrados en las interacciones profesor-alumno que potencialmente pueden dar información adicional sobre cualquiera de las categorías anteriores.

III.3.8.4. Análisis cuantitativo de datos

Como hemos indicado, los datos, de naturaleza cualitativa, se clasifican utilizando las categorías de análisis presentadas anteriormente. Para su tratamiento cuantitativo utilizamos principalmente métodos básicos de estadística descriptiva de una variable (Singh, 2007).

Además, para comparar el desempeño en la prueba escrita de los grupos experimentales y los de control utilizaremos métodos estadísticos para comparar dos variables. En concreto, los datos se estructuran en tablas de contingencia (Tabla III - 20) con las frecuencias absolutas conjuntas para la variable bidimensional (X, Y), siendo X: "grupo al que pertenece el alumno" e Y: "corrección en la respuesta". Para estudiar la hipótesis nula de que responder de forma correcta a la pregunta es independiente del grupo en el que se encuentra el alumno realizaremos un test exacto de Fisher. Mediante esta prueba se calcula, en una tabla de contingencia dos por dos, la probabilidad de obtener una diferencia en las frecuencias igual o mayor que la observada, suponiendo que las dos variables no están relacionadas (son independientes). Un p-valor bajo indica diferencias significativas entre la frecuencia de respuestas correctas en cada uno de los grupos (es poco probable que las frecuencias estén igual o más alejadas bajo la hipótesis de no dependencia). Empleamos el test de Fisher y no el de Pearson chi-cuadrado (χ^2) debido al reducido tamaño de la muestra en algunos de los grupos y de que en algunas tablas de contingencia obtenemos frecuencias absolutas muy bajas o nulas en alguna de las casillas (Singh, 2007).

Grupo al que pertenece\Corrección en la respuesta	**Respuestas no correctas**	**Respuestas correctas**
Respuestas en el grupo experimental	I_1	C_1
Respuestas en el grupo de control	I_2	C_2

Tabla III - 20. Tipo de tabla de contingencia para comparar los resultados de los grupos experimentales y de control.

III.3.9. Aspectos sobre la calidad y la ética de esta investigación

La descripción del método experimental nos permite resaltar las acciones tenidas en cuenta en esta investigación para incrementar la calidad y asegurar el cumplimiento de los principios éticos en nuestro trabajo.

III.3.9.1. Sobre la fiabilidad

La fiabilidad del estudio se incrementa con el análisis detallado de los datos recogidos mediante los diferentes mecanismos expuestos anteriormente. En este análisis, que se desarrolla en las secciones V.3, VI.3, VII.3, VIII.3 y IX.3 de esta memoria, se incluyen descriptores de bajo nivel inferencial que incluyen imágenes extraídas de los documentos escritos (III.3.7.2. Producciones de los alumnos), transcripciones de los episodios de las entrevistas semiestructuradas que se analizan y transcripciones del diario de clase y de los protocolos de observación. La inclusión literal de gran parte de los datos en esta memoria, que supone el informe final de investigación, facilita que el lector distinga entre hechos objetivables e interpretaciones del investigador.

III.3.9.2. Sobre la validación

A pesar de que la réplica de un trabajo de investigación sobre el comportamiento humano no es posible, la validación en términos generales requiere de la descripción de las condiciones iniciales del objeto de estudio. Este aspecto de la validación lo desarrollamos mediante una descripción detallada de la contextualización tanto de la comunidad educativa en la que se interviene, como de los componentes del equipo de investigación y, especialmente, del profesor-investigador (secciones III.3.2. - III.3.5.).

La validación interna se apoya en la cercanía del profesor-investigador a los fenómenos que se estudian. El profesor-investigador tiene una amplia relación con los alumnos que le proporciona un buen conocimiento de estos en el contexto natural del aula. La investigación se desarrolla, por tanto, incidiendo de forma mínima en la rutina habitual de los alumnos.

Además, la validación interna de la investigación se incrementa mediante triangulaciones: de investigadores actuando sobre un mismo conjunto de datos, de datos informando sobre un mismo fenómeno y de uso de herramientas cualitativas y cuantitativas para la obtención de información. Así mismo, la validez externa se incrementa mediante la actuación de observadores expertos ajenos a la investigación.

Las reflexiones y conclusiones extraídas al final de cada ciclo de investigación-acción y al final de esta memoria de investigación son el resultado de la reflexión conjunta de los componentes del equipo de investigación y de la reflexión sobre su propia práctica del profesor-investigador.

III.3.9.3. Sobre la relevancia

En el Capítulo I hemos argumentado sobre la pertinencia del problema de investigación planteado (ver secciones I.2 y I.3).

En el Capítulo X presentaremos los avances en la comprensión del problema que ha supuesto nuestro trabajo. Además, en este capítulo final se detallan las acciones de difusión que se han llevado a cabo para dar a conocer a la comunidad científica los resultados. Resaltaremos también, las acciones encaminadas a la transferencia del conocimiento generado enfocadas en la formación de profesorado en ejercicio y la implementación de la secuencia didáctica por otros docentes.

Además, este informe de investigación será remitido al Equipo Directivo del IES Leonardo de Chabacier para su conocimiento.

III.3.9.4. Sobre el consentimiento de los participantes

☐**AUTORIZO** al IES *Leonardo de Chabacier* a la **toma y difusión -con uso exclusivamente pedagógico-** de las imágenes en que pueda aparecen mi hijo/a realizadas en actividades lectivas, complementarias y extraescolares organizadas por el centro docente. **Autorizo a que puedan ser difundidas en diferentes soportes y ámbitos como la web del centro, blogs, fotografías, cartelería, etc.** Lo autorizo mientras mi hijo/a esté cursando estudios en el IES *Leonardo de Chabacier*. (TOMA Y DIFUSIÓN)

☐**AUTORIZO** al IES *Leonardo de Chabacier* a la **toma -con uso exclusivamente pedagógico-** de imágenes en que pueda aparecen mi hijo/a realizadas en actividades lectivas, complementarias y extraescolares organizadas por el centro docente, **pero NO AUTORIZO A SU DIFUSIÓN** en cualesquiera soportes y ámbitos, aunque tenga fines didácticos, educativos o de investigación. Lo autorizo mientras mi hijo/a esté cursando estudios en el IES *Leonardo de Chabacier*. (TOMA PERO NO DIFUSIÓN)

☐ **NO AUTORIZO** al IES *Leonardo de Chabacier* ni a la toma de imágenes en que aparezca mi hijo/a ni a su difusión en cualquier soporte o ámbito. No lo autorizo mientras mi hijo/a esté cursando estudios en el IES *Leonardo de Chabacier*. (NI TOMA NI DIFUSIÓN)

Imagen III - 2. Extracto de la autorización genérica del centro escolar para poder realizar y difundir imágenes de los alumnos.

A pesar de que la ley educativa vigente promueve la investigación docente (sección I.2.3. La necesidad de la investigación en el aula, del Capítulo I) y de que el centro educativo donde se desarrolla la investigación pedía consentimiento expreso a los tutores legales de los alumnos menores de edad para tomar y difundir imágenes con fines pedagógicos (ver Imagen III - 2), se consideró necesario solicitar consentimiento para participar en la investigación tanto a los participantes como a los tutores legales de los alumnos. También se solicitó consentimiento del Equipo Directivo del instituto.

Para que el consentimiento fuera informado se realizó, de forma previa al comienzo de cada ciclo de investigación, una reunión con cada uno de los grupos de alumnos involucrados en la que se les informaba del propósito de la investigación y de las especiales características metodológicas que conllevaba. Ningún alumno mostró disconformidad con su participación en la investigación.

Además, se elaboró una circular informativa adaptada a cada ciclo de investigación-acción (ver Imagen III - 3) para informar por escrito a las familias. La circular se modificaba según si el profesor-investigador era el profesor habitual del grupo o no, en cuyo caso se informaba también de que durante la implementación él sería el profesor del grupo. Al final de la circular se solicitaba que los tutores firmaran dando o no dando su consentimiento a que sus hijos participaran en la investigación. Ninguna familia se negó a dar su consentimiento, aunque algunas familias contactaron telefónicamente para solicitar más detalle sobre la información proporcionada.

Al equipo directivo del centro, además del consentimiento para poder implementar la investigación, se le ha solicitado consentimiento para poder incluir en esta memoria sus datos identificativos (nombre y localidad) y la información que sobre el centro se da en este capítulo (III.3.2. Contexto social en el que se actúa). Para ello se le envió por escrito la redacción previa de la sección que contiene la contextualización del centro para que pudieran revisarla.

De la misma manera, se ha solicitado consentimiento a los expertos externos que cumplimentaron el protocolo de observación para hacer públicos los datos personales incluidos en este capítulo (III.3.7.4. Grabación de las sesiones y observadores externos).

Desde IES Leonardo de Chabacier estamos desarrollando diferentes proyectos que involucran a una gran cantidad de nuestros departamentos para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje. En particular, desde el Departamento de Matemáticas, el profesor Sergio Martínez Juste y colaborador de la Universidad de Zaragoza, desarrolla una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en 2º ESO, enmarcada en la elaboración de su Tesis Doctoral. Dicha propuesta será llevada a cabo entre los días XXXXXX y XXXXXX de XXXXXX de XXXXXX. Durante las clases de matemáticas involucradas cambiará la metodología empleada y para su correcto desarrollo os solicitamos vuestra colaboración y apoyo en los siguientes aspectos:

- El profesor que **impartirá las clases** de matemáticas en las fechas indicadas será **Sergio Martínez Juste**. Sin embargo, la profesora XXXXXX supervisará las calificaciones de los alumnos en este tema y las enmarcará en el desarrollo global de todo el curso.
- Las clases **serán grabadas en video** desde el fondo del aula (detrás de los alumnos) sin realizar planos directos. Este material no será difundido ni publicado en ningún momento. El propósito es guardar un registro de la investigación realizada y solo será visionado por el profesor Sergio Martínez y profesores colaboradores de Didáctica de las Matemáticas.
- Durante las clases **no se utilizará el libro de texto**, sin embargo, el profesor proporcionará apuntes y ejercicios resueltos que complementarán las notas y ejercicios que hagan los alumnos en clase. Así se asegurará de que los alumnos dispongan del material adecuado para el estudio del tema.
- Las explicaciones de los conceptos y las técnicas empleadas en los problemas se alejan de las que tradicionalmente se enseñan. Por tanto, para el correcto desarrollo, os rogamos que, en el caso de que los alumnos reciban apoyo externo éste se ciña lo máximo posible a lo enseñado y practicado en clase y no se enseñen técnicas diferentes. El profesor se preocupará especialmente en este tema de atender a aquellos alumnos que presenten dificultades.

Si tenéis alguna duda al respecto de esta investigación no dudéis en poneros en contacto con nosotros.

Imagen III - 3. Información contenida en la circular enviada a las familias de los alumnos participantes en la investigación.

III.3.9.5. Sobre la confidencialidad y el anonimato

Como hemos dicho en la sección anterior, se ha informado a las personas e instituciones involucradas en esta investigación sobre qué información iba a incluirse en esta memoria y se ha solicitado su consentimiento. Para garantizar la confidencialidad solo han accedido a los registros completos de datos y las grabaciones de video los miembros del equipo de investigación y, de manera parcial, los observadores externos. Los archivos electrónicos se almacenan en dispositivos físicos propiedad del profesor-investigador y en sistemas de almacenamiento on-line vinculados a la cuenta institucional del profesor-investigador en la Universidad de Zaragoza.

Para garantizar el anonimato de los estudiantes se ha realizado una codificación que tiene en cuenta el ciclo de investigación-acción y el grupo en el que se encontraba el participante. Se han eliminado también las distinciones de género, por lo que las referencias a términos como ‘el estudiante' o 'el alumno' en esta memoria deben entenderse de forma neutra ya que no son indicadoras de género masculino.

Capítulo IV: Características de la propuesta didáctica

Pero en la mente siempre ten a Ítaca,
porque llegar allí es tu objetivo.

Tras la amplia presentación de antecedentes sobre aspectos conceptuales, del contenido y del estado de la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad aritmética en la investigación educativa hecha en el Capítulo II, y de la presentación del marco metodológico y del diseño de nuestra investigación hecha en el Capítulo III, este capítulo concreta los referentes teóricos adoptados y establece las principales características de nuestra propuesta didáctica. Así, fijaremos los focos prioritarios que guían la selección del contenido, su tratamiento didáctico, la secuenciación de contenidos y la metodología de enseñanza utilizada. Además, para finalizar este primer nivel de planificación, previo al diseño curricular concreto y planificación de cada uno de los ciclos de investigación-acción, resumiremos la experiencia exploratoria de Oller-Marcén (2012) que tomaremos como punto de partida de nuestra experimentación.

Aunque algunas de las ideas que se desarrollan en este capítulo se han expuesto previamente en trabajos de investigación propios y del grupo de investigación (Gairín & Escolano, 2009; Gairín & Oller-Marcén, 2011; Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén, & Pecharromán, 2015; Oller-Marcén, 2012), en este capítulo presentamos la adaptación y concreción de dichas ideas que hemos realizado para el propósito de este trabajo.

IV.1. Ideas clave que sustentan la propuesta didáctica

En esta sección presentamos las principales ideas que sustentan nuestra propuesta didáctica y que suponen una toma de posición en cuanto a los procesos de enseñanza de la proporcionalidad aritmética. Esta toma de posición supone, al mismo tiempo, la asunción de referentes teóricos para el diseño de la propuesta, tanto desde un punto de vista del contenido como cognitivo, de entre los antecedentes expuestos en el Capítulo II de la presente memoria. Además, presentamos algunos referentes a nivel instruccional para encuadrar la metodología de enseñanza utilizada durante la propuesta (ver sección IV.4. Metodología de enseñanza).

IV.1.1. Ideas sobre aspectos conceptuales, del contenido y cognitivos

La enseñanza de la proporcionalidad puede abordarse en momentos muy diferentes de las etapas educativas. Desde los primeros años de la educación primaria, con enfoques menos numéricos y más cualitativos (Nunes *et al.*, 2003), hasta los últimos años de secundaria y primeros años de bachillerato, con enfoques basados en la modelización funcional (García, 2005), existe un amplio intervalo temporal. En dicho intervalo, el desarrollo del razonamiento proporcional puede ir ligado al desarrollo de otros conceptos como el de multiplicación de números enteros (Hino & Kato, 2019) o la comprensión del número racional (Lamon, 2007). Dentro de ese intervalo, la transición entre la educación primaria y secundaria en el sistema educativo español coincide con la etapa de transición entre el pensamiento aditivo y multiplicativo (Fernández & Llinares, 2012). La educación en esta etapa debe promover el paso hacia un razonamiento proporcional multiplicativo de forma que los alumnos puedan gestionar de forma crítica las situaciones apropiadas donde pueden aplicarlo (Van Dooren *et al*., 2008).

Para potenciar el desarrollo del razonamiento proporcional los estudiantes deben enfrentarse a diferentes tipos de tareas (Cramer & Post, 1993) ricas y no rutinarias (Singh, 2000a). Una clasificación ampliamente utilizada de tareas de proporcionalidad se basa en la distinción entre problemas de valor perdido y problemas de comparación, tanto cuantitativa como cualitativa. Además, la instrucción no debe basarse en técnicas específicas para cada tipo de problema, que suelen presentarse algoritmizadas escondiendo la naturaleza del fenómeno que se estudia (Van Dooren *et al*., 2008; Solar & Zamorano, 2006).

La comprensión de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1983) resulta un elemento clave para el desarrollo del razonamiento proporcional, tanto si nos centramos en las relaciones simples directas (Karplus *et al*., 1983; Lamon, 1993b; Singh, 2000b; Van Dooren *et al*., 2008; Vergnaud, 1983), como si incluimos las situaciones inversas y compuestas (Arican, 2018; Levain & Vergnaud, 1995). Las piezas fundamentales de la estructura multiplicativa son los problemas de isomorfismo de medidas, que aparecen en las situaciones de proporcionalidad simple directa, y construyen el significado de las magnitudes intensivas cociente y los problemas de producto de medidas que dan significado al producto de magnitudes, especialmente si estas son extensivas (Vergnaud, 1983).

Así, desde un punto de vista matemático, la proporcionalidad organiza estructuras multiplicativas relativamente sencillas como la razón y la función lineal, otras más alejadas cognitiva y epistemológicamente (Gairín & Oller-Marcén, 2011) como la función hiperbólica y otras estructuras complejas como las funciones homogéneas asociadas a situaciones de proporcionalidad compuesta (Martínez *et al*., 2017). El trabajo con dichas estructuras puede realizarse, además, en diferentes niveles de algebrización (Bolea *et al*., 2001; Burgos *et al*., 2017; Solar & Zamorano, 2006). Es decir, las estrategias de resolución de los problemas asociados a la proporcionalidad pueden sustentarse en manipulaciones con diferentes grados de sofisticación. Se pueden emplear, por ejemplo, manipulaciones aritméticas como la construcción progresiva, que surge de manera espontánea y tiene un carácter pre-proporcional (Lamon, 1993a), por lo que algunos autores la consideran no efectiva (Riehl & Steinthorsdottir, 2019), y se clasificaría en un nivel básico de algebrización (Burgos *et al*., 2017), o manipular variables mediante una modelización funcional, lo que supondría grados más elevados de sofisticación. La organización escolar de la proporcionalidad debe conectar y articular estas diferentes facetas de la estructura matemática subyacente a las situaciones organizadas por la proporcionalidad.

Desde el punto de vista de las estructuras multiplicativas, en la resolución de problemas de proporcionalidad aparecen, de forma general, estrategias de tipo escalar y estrategias de tipo funcional (Vergnaud, 1983). Las estrategias de tipo funcional hacen uso de la constante de proporcionalidad. La explicitación de esta constante es un elemento central en el desarrollo del razonamiento proporcional (Arican, 2018; Cramer & Post, 1993; Levain & Vergnaud, 1995), es una pieza clave para introducir la covariación de las magnitudes implicadas (Burgos & Godino, 2019a; Mochón, 2012), su uso da cuenta de una algebrización incipiente (Burgos *et al*., 2017) y conecta el mundo aritmético con el algebraico para realizar una posterior modelización funcional (Solar & Zamorano, 2006).

En el caso concreto de las situaciones de proporcionalidad simple directa la constante de proporcionalidad (Vergnaud, 1983) se relaciona con el concepto de razón externa (Freudenthal, 1983) y aparece en las situaciones de isomorfismo de medidas (Vergnaud, 1983) que consideran la relación funcional entre las magnitudes involucradas. Las situaciones de isomorfismo de medidas permiten la construcción de las magnitudes intensivas cociente. En este contexto, la constante de proporcionalidad puede interpretarse como una cantidad de esta nueva magnitud cociente (Vergnaud, 1983). Este significado de la razón como tanto por uno asociado a una relación funcional aparece en la génesis histórica de la proporcionalidad en la tradición china (Oller-Marcén & Gairín, 2013).

Para las situaciones de proporcionalidad simple inversa la constante de proporcionalidad aparece como una cantidad de la magnitud generada mediante un producto de medidas (Arican, 2018; Vergnaud, 1983). En una situación de producto de medidas, cada una de las magnitudes iniciales puede verse como una magnitud intensiva que surge de un isomorfismo de medidas entre la otra magnitud inicial y la magnitud producto generada (Vergnaud, 1983).

En las situaciones de proporcionalidad compuesta la constante de proporcionalidad puede interpretarse como una cantidad de una magnitud generada mediante productos y cocientes de las magnitudes iniciales (Arican, 2018; Martínez-Juste *et al*., 2017). Además, estos isomorfismos y productos de medidas permiten transformar una situación compuesta en una simple mediante el proceso de amalgamación (Bosch, 1994; Martínez-Juste *et al*., 2014, 2015a, 2015b; Oller-Marcén, 2012).

El concepto de porcentaje puede incluirse dentro del estudio de las relaciones de proporcionalidad simple directa como un caso particular de razón normalizada. Sin embargo (como ya comentamos en el Capítulo II), sus múltiples aplicaciones prácticas que provocan conocimientos previos informales en los alumnos, su particular génesis histórica separada de la concepción griega de razón, y su compleja relación con los números racionales (Lembke & Reys, 1994; Parker & Leinhardt, 1995), aconsejan realizar un tratamiento diferenciado. Precisamente, la instrucción sobre el porcentaje debe hacer aflorar su condición de relación multiplicativa y de razón entre cantidades de magnitud (Brown & Kinney, 1973; Burgos & Godino, 2019b; Lembke & Reys, 1994; Maz-Machado & Gutiérrez, 2008; Mendoza & Block, 2010; Parker & Leinhardt, 1995).

IV.1.2. Focos prioritarios del diseño y de la investigación

La síntesis del análisis conceptual y de contenido genera los conceptos y significados que articulan nuestra propuesta (Figura IV - 1). Además, la previsión de las dificultades y limitaciones de los estudiantes en el estudio de la proporcionalidad y la necesidad de que la propuesta brinde oportunidades para superarlas o, al menos, mitigarlas, nos lleva a la introducción de diferentes tareas que trabajen de forma conveniente el razonamiento proporcional. Es decir, los requerimientos cognitivos influyen en el contenido seleccionado.

De forma previa al desarrollo de los focos prioritarios de contenido, listamos algunas características y principios generales que definen nuestra toma de posición:

- **Concreción:** Nuestra propuesta se centra en la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de secundaria. La planificación se realiza para los cursos 1º y 2º de ESO, es decir, alumnos entre doce y catorce años de edad. Por tanto, aunque nace con la intención de presentar una propuesta completa para la proporcionalidad en dichos cursos, la propuesta es parcial desde su inicio. Es parcial en tanto en cuanto no aborda el aprendizaje relacionado con el razonamiento proporcional en la etapa previa de educación primaria, ni el posterior avance hacia una modelización funcional. Tampoco abordamos de manera específica las situaciones asociadas a la estructura de constructos y parejas de constructos (Freudenthal, 1983) que surgen en el ámbito geométrico. Así, nuestra propuesta se centra en el desarrollo del razonamiento proporcional de alumnos preadolescentes en un contexto aritmético. Nos proponemos, además, que el tiempo dedicado a la propuesta didáctica en el aula sea de, aproximadamente, unas tres semanas de clase. Esta limitación temporal obliga a seleccionar y concretar los contenidos organizados en la propuesta didáctica. Por tanto, la propuesta también es parcial en cuanto al contenido matemático escolar relacionado con la proporcionalidad aritmética. Una propuesta que abarque todos los contenidos sobre la proporcionalidad que pueden trabajarse con alumnos de entre doce y catorce años debería contemplar, además de un tiempo muchísimo mayor de intervención, aspectos no incluidos en este trabajo como, por ejemplo, la institucionalización de diferentes caracterizaciones de las relaciones de proporcionalidad, su equivalencia y sus implicaciones en las estrategias empleadas en la resolución de diferentes tipos de problemas.
- **Suficiencia:** Los contenidos abordados en la propuesta didáctica, aunque parciales, deben permitir que los alumnos puedan afrontarla independientemente de sus conocimientos previos sobre proporcionalidad. Los alumnos de 1º de ESO provienen de colegios de Educación Primaria diferentes. El profesor de matemáticas de secundaria no tiene control

acerca de los contenidos sobre proporcionalidad abordados, ni el tratamiento que se ha hecho de dichos contenidos. Por tanto, la propuesta pretende ser autosuficiente, reconstruyendo el conocimiento sobre aspectos conceptuales y procedimentales que pudieran tener los alumnos. Además, los conocimientos proporcionados por la propuesta deben ser suficientes desde un punto de vista propedéutico.

- **Amplitud:** La concreción de contenidos y las limitaciones temporales no deben limitar el número de situaciones problemáticas diferentes a las que se enfrentan los alumnos. De hecho, uno de los objetivos de la propuesta es ampliar dicho número, es decir, enfrentar a los alumnos a una variedad de problemas mayor que la proporcionada por la enseñanza tradicional basada en la utilización, casi exclusiva, de problemas de valor perdido. Por tanto, la propuesta no cubre solo las situaciones problemáticas del contenido de la proporcionalidad aritmética prescrito en las normas curriculares y de los libros de texto, sino que las amplía.
- **Optimización:** La amplitud en la variedad de situaciones problemáticas no debe conllevar un gran aumento en el número de contenidos procedimentales institucionalizados. Por tanto, pretendemos seleccionar los conocimientos conceptuales necesarios que permitan a los alumnos abordar situaciones problemáticas variadas sin necesidad de introducir técnicas específicas de resolución o, al menos, minimizando este número de técnicas.
- **Coherencia:** La forma en la que se caracteriza una relación de proporcionalidad justifica de manera más o menos inmediata alguna de las estrategias de resolución que se pueden poner en juego en la resolución de problemas. Por ejemplo, una caracterización por argumentos multiplicativos justifica de manera inmediata las estrategias escalares. Una caracterización multiplicativa incompleta por dobles, triples, mitades puede relacionarse con una estrategia de construcción progresiva. Una caracterización errónea mediante argumentos cualitativos puede "justificar" estrategias aditivas erróneas. Nuestra propuesta didáctica busca la coherencia entre las caracterizaciones de las relaciones de proporcionalidad y las estrategias institucionalizadas para la resolución de situaciones problemáticas.
- **Diálogo:** Como veremos más adelante en este capítulo (ver IV.4. Metodología de enseñanza), la institucionalización del conocimiento en nuestra propuesta se inicia a partir de debates generados con los alumnos después de la resolución de problemas para los que no se han explicado técnicas específicas previamente. La institucionalización no pretende determinar una estrategia única o preferente de resolución. El objetivo de los debates y las posteriores institucionalizaciones es validar las respuestas de los alumnos, conectarlas, aportar justificaciones y concretar procedimientos que puedan resultar útiles para avanzar en el aprendizaje.

Tras el análisis general hecho en el Capítulo II, la síntesis de referentes realizada en la sección anterior y el establecimiento de los principios básicos que guían la toma de posición hecha, detallamos los focos prioritarios seleccionados para el diseño (Figura IV - 2) y que recogen la estructura de conceptos y contenidos presentados en la Figura IV - 1.

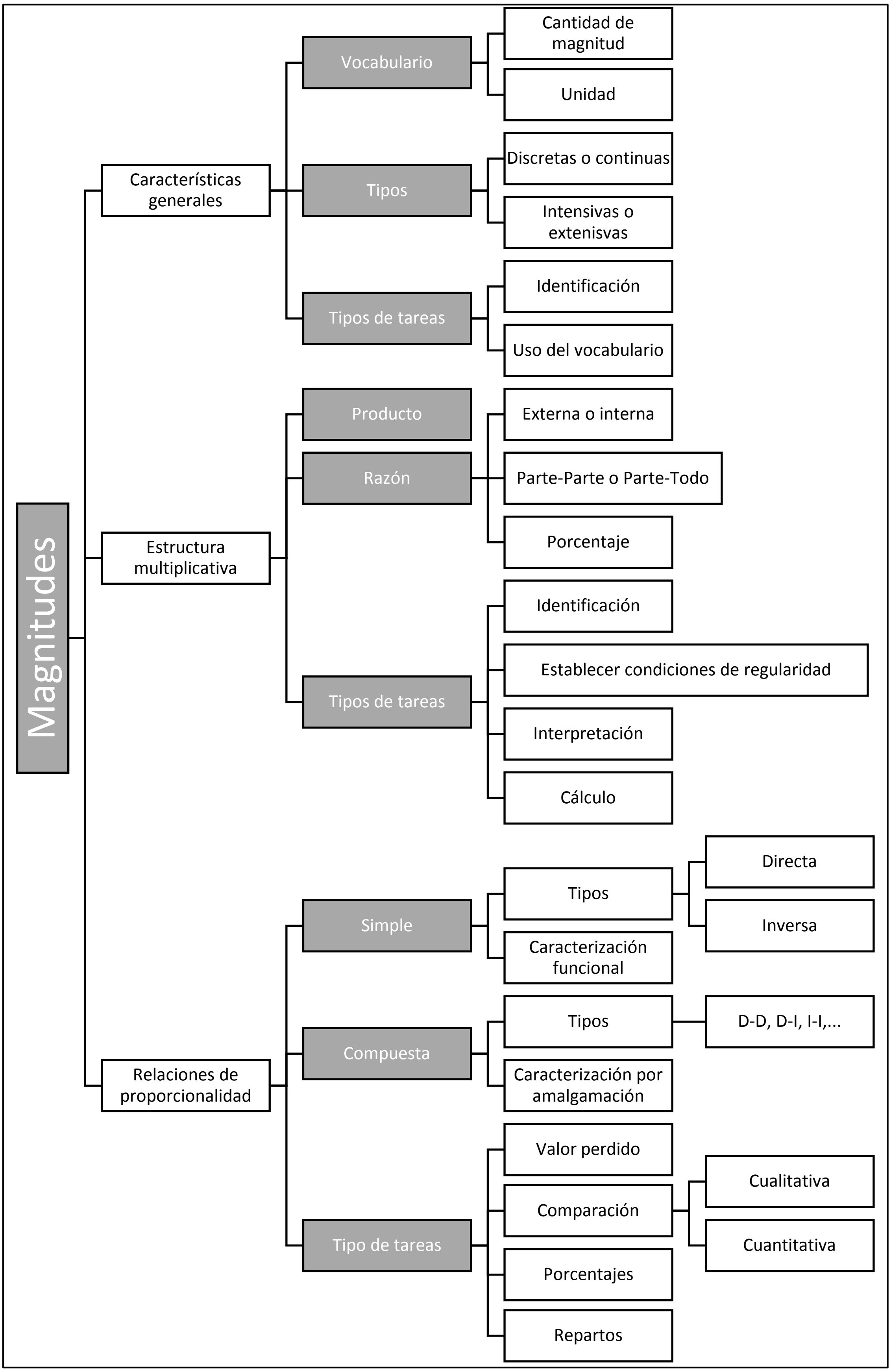


Figura IV - 1. Esquema de conceptos y contenidos utilizados en la propuesta didáctica.

Los contenidos generales asociados al concepto de magnitud, como la identificación de magnitudes, el uso de vocabulario asociado (magnitud, unidad, cantidad de magnitud, valor de una cantidad de magnitud) o la distinción de tipos de magnitudes (continuas y discretas) no aparece como un foco de contenido específico. Estos contenidos se trabajan de forma transversal en toda propuesta y se incorpora una sesión específica inicial en el diseño de 1º de ESO.

En cada foco indicaremos dificultades y limitaciones previstas, y oportunidades de aprendizaje que supone la propuesta didáctica mediante el tipo de tareas asociadas a cada foco. Así, esta sección concluye con el análisis de contenido y con el análisis cognitivo de nuestro diseño curricular. En la sección IV.2. de este capítulo detallaremos el tratamiento que reciben en la propuesta didáctica los conceptos y contenidos seleccionados.

IV.1.2.1. Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad

Los alumnos a los que va dirigida esta propuesta se encuentran en la etapa de transición entre el pensamiento aditivo y multiplicativo. En esta etapa, los estudiantes pueden presentar algunas dificultades en el aprendizaje, bien por aferrarse a modelos aditivos incluso en problemas proporcionales, bien por aferrarse a modelos multiplicativos en cualquier tipo de problemas.

Por tanto, contemplamos la introducción de situaciones proporcionales y no proporcionales para que los alumnos analicen la conveniencia o no de realizar una modelización proporcional. En el caso de que pueda suponerse una relación proporcional los alumnos deben ser capaces de argumentar dicha suposición caracterizando el tipo de relación proporcional existente.

El análisis de las situaciones de proporcionalidad se basa en la detección de relaciones de covariación entre las magnitudes involucradas y en la existencia de condiciones de regularidad que permitan argumentar la constancia de la constante de proporcionalidad. Argumentar sobre la constancia en relaciones entre magnitudes implica manejar la estructura multiplicativa subyacente y poder interpretar razones y productos de magnitudes. Además, en las situaciones en las que aparece una razón entre magnitudes, puede considerarse la razón inversa. Como cantidades de una magnitud intensiva, una razón y su inversa reciben interpretaciones diferenciadas. La construcción e interpretación de productos y cocientes de magnitudes puede verse dificultada o facilitada por variables como la estructura numérica, el tipo de magnitudes y la estructura multiplicativa.

En las situaciones a analizar introducimos números que no representan una cantidad de magnitud. También, presentamos magnitudes no relacionadas funcionalmente, relaciones monótonas no multiplicativas y relaciones de proporcionalidad. Además, se introducen "falsos problemas" de proporcionalidad. Estos problemas responden a un esquema numérico de valor perdido o de comparación, pero no pueden resolverse al no existir relación entre las magnitudes involucradas.

Para el diseño de actividades de análisis de relaciones entre magnitudes tendremos en cuenta las siguientes variables y su especificación:

- **Relación de proporcionalidad.** Describe el tipo de relación que hay entre las magnitudes de entre las siguientes categorías: No hay suficientes magnitudes (en el contexto no se describen un mínimo de dos magnitudes), las magnitudes que aparecen no están relacionadas, las magnitudes están relacionadas, pero no son proporcionales, hay una relación de proporcionalidad directa, hay una relación proporcionalidad inversa o hay una relación de proporcionalidad compuesta.
- **Magnitudes involucradas:** Se describen las magnitudes que se observan en el contexto y las unidades que se emplean. Para cada magnitud se distingue entre si es discreta o continua y entre si es intensiva o extensiva.
- **Estructura funcional.** Se detalla la estructura $E_{\mathbb{P}} = k$.
- **Constante de proporcionalidad.** Interpretación de la constante de proporcionalidad, k, del problema y de su inversa k^{-1} (si son una razón).
- **Estructura numérica.** Se explicita el vector de valores numéricos de las cantidades de magnitud en el caso de que se presente la situación de forma numérica $(a_1 : a_2 : \dots : a_n)$.
- **Razones externas.** Se explicita el carácter entero o no entero de las razones externas involucradas.

IV.1.2.2. Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

La resolución de diferentes tipos de problemas de proporcionalidad es uno de los objetivos principales de nuestro diseño. Separamos en dos focos diferenciados la resolución de problemas con relaciones simples directas e inversas a pesar de que, formalmente, tanto el tipo de problema, como las diferentes variables didácticas consideradas, como las categorías de análisis para estudiar el desempeño de los estudiantes tienen una clara analogía. Esta separación se debe a las mayores dificultades cognitivas que hemos constatado en la revisión de la literatura científica para el caso inverso. Además, en las situaciones de proporcionalidad directa la estructura multiplicativa puede convivir con una estructura aditiva parte-parte-todo. Así, nuestro segundo foco de interés es la resolución de problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Para el diseño utilizamos los tres tipos de problemas distinguidos por Cramer y Post (1993): problemas de comparación cualitativa, problemas de comparación cuantitativa y problemas de valor perdido. El desempeño en estos problemas puede venir condicionado por la estructura numérica, el tipo de magnitudes involucradas (tanto las directamente relacionadas en el enunciado como las que se generen como razón externa) o la coexistencia con una estructura aditiva parte-parte-todo.

Se espera que los alumnos, en una primera fase, sean capaces de analizar y caracterizar la relación de proporcionalidad existente entre las magnitudes que aparecen en el problema. Una vez analizada la situación, nuestra propuesta de resolución se sustenta en el uso del concepto de razón externa (estrategia funcional). Posteriormente, los alumnos deben ser capaces de desarrollar estrategias multiplicativas basadas en el significado de las operaciones binarias entre magnitudes (en este caso relacionadas con los problemas de isomorfismo de medidas). La propuesta debería favorecer la desaparición de argumentos aditivos y de posibles conocimientos procedimentales previos, como la regla de tres.

Las variables didácticas “relación de proporcionalidad”, “constante de proporcionalidad” y “razones externas” tienen la misma especificación en este foco que la presentada en el foco anterior. Las siguientes variables, también introducidas en el foco anterior, tienen una especificación diferente:

- **Magnitudes involucradas.** Además de las consideraciones hechas en el foco anterior, se explicita cuál de las magnitudes es la variable dependiente en el caso de problemas de valor perdido.
- **Estructura funcional:** Además de la estructura multiplicativa $E_{\mathbb{p}} = k$, se detalla, en su caso, la existencia de una estructura aditiva para distinguir esquemas de razonamiento parte-parte y parte-todo.
- **Estructura numérica:** Se explicitan los vectores de valores numéricos relacionados unidos con el símbolo ‘↔’ para los problemas de valor perdido y con el símbolo ‘∼’ para los de comparación. Los problemas de comparación cualitativa reproducen el sentido de las comparaciones en vez de los valores de las cantidades de magnitud.

Además, consideramos las dos siguientes nuevas variables:

- **Tipo de problema:** Se distingue entre problema de valor perdido, problema de comparación cuantitativa y problema de comparación cualitativa.
- **Razones internas:** Se explicita el carácter entero o no entero de las razones internas que intervienen.

IV.1.2.3. Foco 3: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa

Como hemos dicho, la estructura formal de los contenidos en este foco de interés es análoga al caso directo. Sin embargo, hay que tener en cuenta la especificidad de las relaciones inversas y la mayor dificultad que plantean en los estudiantes.

En el diseño se introducen los tres tipos de problemas considerados en el foco anterior. Se espera que el trabajo realizado sobre la asignación de significado a la magnitud producto de medidas, y el trabajo previo sobre el concepto de razón externa, permitan a los estudiantes construir estrategias basadas en el significado de las operaciones binarias entre magnitudes para resolver estos problemas (ver el apartado IV.2.3. Situaciones de proporcionalidad simple inversa, dentro de la sección IV.2. Tratamiento de los conceptos y contenidos clave).

En el caso de los problemas de proporcionalidad en situaciones inversas simples, no tiene sentido considerar la razón externa entre magnitudes por lo que la variable didáctica que distinguía si dicha cantidad era entera o no, y analizaba las representaciones decimal y fraccionaria no se tiene en cuenta. El resto de las variables didácticas del foco anterior se mantiene con las mismas especificaciones.

IV.1.2.4. Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta

Los problemas asociados con estructuras multiplicativas compuestas que incluimos en este foco prioritario son un terreno poco explorado en los trabajos de investigación. Nuestro trabajo resulta una innovación en este sentido al investigar sobre la enseñanza y aprendizaje de este tipo de situaciones. Creemos necesario, por tanto, prestarle especial atención en las diferentes fases de la investigación-acción.

Al margen de nuestro trabajo adyacente que, de forma exploratoria, analizaba las estrategias empleadas por estudiantes de diferentes niveles educativos (6º de educación primaria, 1º y 2º de la ESO) al resolver problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta, no disponemos de referentes sobre la actuación de alumnos de estas edades en tareas de proporcionalidad compuesta. Este cuarto foco, por tanto, pretende avanzar en la comprensión de este fenómeno.

Las dificultades y limitaciones previstas tienen que ver, por un lado, con la complejidad estructural y, por otro, con la interpretación del significado tanto de la constante de proporcionalidad como de las posibles amalgamaciones parciales (productos y razones de las magnitudes involucradas).

Se pretende que, a partir de nuestra propuesta, el alumno sea capaz de detectar e interpretar la constante de proporcionalidad asociada a una situación de proporcionalidad compuesta y de utilizar las operaciones binarias entre magnitudes de forma significativa para desenvolverse en problemas de comparación y de valor perdido.

Además de las variables didácticas empleadas en los focos anteriores, introducimos una nueva:

- **Amalgamaciones parciales.** En la planificación se estudia la posible interpretación de cada una de las amalgamaciones parciales (interpretación de todas las posibles operaciones binarias entre magnitudes).

IV.1.2.5. Foco 5: Repartos proporcionales

En este foco destacamos un tipo concreto de problemas en los que se aplican los conceptos de la proporcionalidad simple, tanto directa como inversa. A pesar de que los repartos directamente proporcionales pueden suponerse como un caso particular (quizá algo complejo) de conjunto de problemas de valor perdido en una situación de proporcionalidad simple directa, lo destacamos fuera de los focos anteriores por varias razones. Es un tipo de problema introducido explícitamente en la última reforma educativa en el currículo español. Existe poca literatura de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de los repartos directamente proporcionales y no hemos encontrado trabajos que aborden estos procesos de forma experimental en el caso de los repartos inversamente proporcionales. Por tanto, aunque el número de sesiones dedicadas a este foco de contenidos es muy bajo en comparación con el dedicado a otros focos, consideramos necesario e interesante prestarle una atención destacada.

Las principales dificultades previstas para la resolución de este tipo de problemas son la elección del modelo de reparto (modelo equitativo, modelo de compensación aditiva, modelo proporcional) y el trabajo significativo con las magnitudes.

Aunque se planifica una estrategia basada en compensaciones multiplicativas y en el concepto de razón externa en la propuesta didáctica (ver apartado IV.2.5. Repartos proporcionales, en la sección IV.2. Tratamiento de los conceptos y contenidos clave), se espera que el trabajo con las situaciones simples pueda dotar a los alumnos de herramientas eficientes para abordar este tipo de problemas.

Además de las variables didácticas introducidas para los problemas simples y la distinción entre repartos directos e inversos, introducimos la siguiente variable didáctica para:

- **Número de participantes en el reparto:** Indica el número de pesos, objetos, individuos, entre los que se reparte la cantidad.

Cabe destacar que, en este tipo de problemas, los esquemas de razonamiento parte-parte y parte-todo y la interpretación de las constantes de proporcionalidad asociadas juegan un papel crucial.

IV.1.2.6. Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados

Los resultados poco satisfactorios alrededor del porcentaje en el ciclo exploratorio realizado por Oller-Marcén (2012) con la propuesta didáctica y las dificultades generalizadas que presentan los alumnos y que se recogen en la literatura científica, han provocado que, en nuestro estudio, organicemos un foco de contenido e interés alrededor del porcentaje.

Nuestra propuesta se basa en la interpretación del porcentaje como una relación de proporcionalidad entre dos cantidades de magnitud. La falta de conexión entre estos conceptos parece ser la clave de muchas de las dificultades en la comprensión del porcentaje.

Así, de forma coherente con el tratamiento de la proporcionalidad simple directa, el porcentaje se interpreta como una pareja de valores relacionados que pueden dar lugar a dos razones diferentes (el numeral entre cien y cien entre el numeral). Además, en las situaciones relacionadas con el porcentaje suelen aparecer estructuras aditivas parte-parte-todo que permiten establecer diferentes razones a partir de un mismo porcentaje y el estudio de complementarios. La interpretación del porcentaje en términos de una relación multiplicativa entre dos cantidades de magnitud permite abordar los problemas de valor perdido asociados al porcentaje de Tipo I, Tipo II y Tipo III bajo una misma perspectiva.

En los problemas de aumentos y disminuciones porcentuales potenciamos los esquemas de razonamiento parte-todo, o, en este contexto cantidad inicial-cantidad final. Esta relación multiplicativa entre cantidad inicial y final permite evitar razonamientos aditivos que, en el caso del cálculo de la cantidad inicial conocido el aumento (o disminución) y la cantidad final, provocan estrategias aditivas erróneas (calcular el porcentaje de aumento sobre el total y restárselo para calcular la cantidad inicial, por ejemplo).

Como en el foco anterior, no se introducen variables didácticas específicas para el porcentaje. Sin embargo, se analizará el tipo de problema de valor perdido dependiendo de la posición de la incógnita (Tipo I, Tipo II y Tipo III) y se distinguirán los problemas en los que el porcentaje se use para expresar un aumento o una disminución.

FOCO 1: DETECCIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD

- Razón (externa) entre magnitudes: condición de regularidad; interpretación; cálculo; existencia de dos razones inversas; identificación.
- Producto de magnitudes: condiciones de regularidad; interpretación; cálculo; razones entre el producto y las magnitudes iniciales.
- Relaciones de proporcionalidad simple directa e inversa.
- Constante de proporcionalidad.
- Magnitudes no relacionadas o relacionadas de forma no proporcional.

FOCO 2: PROBLEMAS EN SITUACIONES DE PROPORCIONALIDAD SIMPLE DIRECTA

- Valor perdido.
- Comparación cuantitativa.
- Comparación cualitativa.

FOCO 3: PROBLEMAS EN SITUACIONES DE PROPORCIONALIDAD SIMPLE INVERSA

- Valor perdido.
- Comparación cuantitativa.
- Comparación cualitativa.

FOCO 4: PROBLEMAS EN SITUACIONES DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

- Amalgamación de magnitudes.
- Constante de proporcionalidad.
- Problemas de valor perdido, comparación cualitativa y comparación cuantitativa.

FOCO 5: REPARTOS PROPORCIONALES

- Repartos directamente proporcionales.
- Repartos inversamente proporcionales.
- Constantes de proporcionalidad en un reparto proporcional.

FOCO 6: PORCENTAJES Y PROBLEMAS ASOCIADOS

- Interpretación.
- Razones asociadas a un porcentaje.
- Complemetarios.
- Problemas de Tipo I, Tipo II y Tipo III.
- Aumentos y disminuciones porcentuales.

Figura IV - 2. Resumen de los focos prioritarios de la propuesta didáctica.

IV.1.3. Ideas sobre aspectos instruccionales

Como indican Arce, Conejo y Muñoz-Escolano (2019), en el campo de las ciencias de la educación han convivido tradicionalmente dos enfoques en cierta manera contrapuestos: el constructivismo y el empirismo. Los autores presentan como dominante la corriente constructivista, tanto en la segunda mitad del siglo XX, como en lo transcurrido del presente siglo. La corriente constructivista se centra en el papel del alumno como motor de su aprendizaje. Este aprendizaje se realiza a través de los conflictos cognitivos generados por las actividades diseñadas por el docente. La superación de dichos conflictos reorganiza los conocimientos previos y provoca una evolución en las estructuras cognitivas del alumno.

Dentro del ámbito de la educación matemática "los modelos constructivistas de aprendizaje, en sus diversas variantes, tienen actualmente una amplia aceptación" (Burgos & Godino, 2019a, p. 390). Arce *et al*. (2019) citan tres referentes del enfoque constructivista en educación matemática: la didáctica francesa y la *teoría de las situaciones didácticas*, destacando a los investigadores Yves Chevallard y Guy Brousseau (Brousseau, 2006); el *enfoque discursivo del aprendizaje de las matemáticas* que tiene en el trabajo de Vygotsky (1998) uno de sus referentes principales; la fenomenología didáctica y la educación matemática realista, corriente nacida en Holanda con Hans Freudhental y su trabajo sobre la fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas como principal referente (Freudenthal, 1983).

En el Capítulo II hemos hecho una revisión de diferentes diseños didácticos centrados en la proporcionalidad en los que también domina el enfoque constructivista. Si bien, junto a este enfoque conviven algunos diseños de corte empirista, como el trabajo de Bentley y Yates (2017) en el que se promueve un estilo de enseñanza basado en la resolución de ejemplos por parte del profesor. También, algunos trabajos abogan por un estilo mixto en el que se combinan momentos de indagación por parte de los alumnos con momentos de transmisión de conocimientos por parte del profesor (Burgos & Godino, 2019a).

La metodología de enseñanza que utilizamos en nuestra propuesta didáctica y que detallaremos más adelante en este capítulo (ver IV.4. Metodología de enseñanza) sigue un modelo constructivista basado en la enseñanza a través de la resolución de problemas. Este enfoque de aprendizaje basado en problemas (Lopes & Costa, 1996) se introduce en contraposición a los enfoques *para* la resolución de problemas y *sobre* la resolución de problemas (Bingolbali & Bingolbali, 2019; Gaulin, 2001).

El enfoque de enseñanza para la resolución de problemas tiene una concepción funcional del contenido matemático escolar, tras la transmisión del conocimiento los estudiantes lo aplican a la resolución de problemas. La docencia sobre la resolución de problemas se centra en las estrategias generales de resolución y el uso de heurísticos. El enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas promueve un modelo constructivista en el que los alumnos adquieren el conocimiento mediante la realización de problemas diseñados por el profesor para hacer surgir los contenidos deseados.

Por ejemplo, Bingolbali y Bingolbali (2019), para describir los modelos de enseñanza utilizados en libros de texto, ejemplifican el proceso de enseñanza según el enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas de la siguiente forma:

> Este enfoque comienza con una situación problemática; el concepto (hecho, fórmula o definición) se introduce como resultado de la resolución de un problema. Por ejemplo, en el enfoque a través de la resolución de problemas, se proporciona un problema que requiere el uso de exponentes para que los lectores se involucren en el concepto. Después de involucrarlos, se da la fórmula, el hecho o la definición del concepto. El concepto / hecho / fórmula se emplea para resolver problemas o se consolida a través de diferentes ejercicios. (p. 246)

Así, siguiendo este enfoque, los escolares deben enfrentarse a situaciones problemáticas sin haber recibido instrucción previa sobre los contenidos que quieren enseñarse. Estos problemas deben promover la reflexión y la indagación hacia la búsqueda de estrategias que permitan resolverlos. El profesor utilizará posteriormente las producciones de los alumnos en estas tareas para introducir los nuevos conceptos. Por último, los alumnos resuelven problemas para afianzar los nuevos contenidos adquiridos.

Este enfoque de enseñanza ha ganado relevancia en la investigación en educación matemática en las últimas décadas (English & Gainsburg, 2016; Lesh & Zawojewski, 2007). Como indican Bingolbali y Bingolbali (2019, p. 238):

> Como alternativa a la enseñanza tradicional de heurísticos o del uso de las aproximaciones de resolución de problemas “concepto y después resolución”, “enseñar a través de la resolución de problemas” […] ha ganado interés (Lesh & Zawojewski, 2007). La investigación en esta dirección está creciendo y afirma que el uso de estos enfoques es efectivo para el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

En la misma línea Ortega *et al*. (2011, p. 100) afirman que “el aprendizaje de los conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas es un procedimiento altamente valorado y esta práctica es fundamental en la consolidación de los aprendizajes”.

IV.2. Tratamiento de los conceptos y contenidos clave

En esta sección presentamos el tratamiento didáctico de los diferentes contenidos de la propuesta. Para ello, ejemplificamos el discurso argumentativo que se emplea con los alumnos en las discusiones, puestas en común de soluciones e institucionalizaciones. Aunque estos elementos de comunicación con los alumnos tienen una naturaleza dinámica en la que el instructor se adapta a las producciones concretas realizadas por los alumnos o las aportaciones que realizan estos a los debates, pretendemos plasmar las ideas básicas utilizadas por el docente-investigador en estos momentos del proceso de enseñanza.

A lo largo de esta sección utilizaremos imágenes y ejemplos resueltos que incluyen los textos de apoyo elaborados para los alumnos y que pueden consultarse íntegros en el Anexo VII. Así mismo, desarrollaremos ejemplos concretos del discurso argumentativo utilizado por el docente-investigador para resolver algunas de las tareas propuestas. También utilizaremos algunas imágenes de las presentaciones que se proyectaban sobre la pizarra digital para esquematizar, resumir y apoyar los momentos de corrección e institucionalización. Recogemos, por tanto, los contenidos trabajados a lo largo de la implementación de la propuesta expuesta en esta memoria, el tratamiento que proponemos para trabajar otros contenidos (problemas de proporcionalidad simple encadenada, problemas de aligación, regla de interés, repartos respecto a varias magnitudes) puede consultarse en Oller-Marcén (2012, pp. 131-175).

IV.2.1. Reconocimiento de magnitudes y vocabulario asociado

Como podrá observarse en el tratamiento que reciben los conceptos y contenidos relacionados con la proporcionalidad en nuestra propuesta, uno de nuestros intereses principales es que los estudiantes interpreten y den significado a las cantidades que aparecen en las situaciones y problemas de proporcionalidad, así como a las operaciones que se realizan entre ellas. Por tanto, aunque no se ha incluido como foco de contenido propio, es necesario como contenido transversal a toda la propuesta prestar atención al concepto de magnitud, al vocabulario asociado y a su identificación en diferentes situaciones.

Con este fin, proponemos actividades en las que los alumnos tienen que distinguir entre diferentes significados que podemos asignar a los números naturales y racionales, según estos números sean utilizados para expresar una cantidad de magnitud o no. Por ejemplo, se presentan otros usos del número natural como identificador u ordinal.

Una magnitud es una **propiedad** de un objeto que se puede **medir**.

Pero, ¿qué hace fala para poder medir?

- Necesitamos establecer una **unidad**. Una unidad no es más que un "objeto" determinado que utilizamos para comparar la magnitud de éste con otros objetos.
- Necesitamos poder encontrar cuántas veces "cabe" la unidad en el objeto que queremos medir. Esto nos proporciona un número (natural, fracción, decimal,…) al que llamamos **valor de la cantidad** de magnitud.

¡Observa!

El valor de la cantidad de magnitud para un mismo objeto depende de la unidad empleada para medirlo.

¡Cuidado!

Los números no solo se utilizan para expresar cantidades de una magnitud. También utilizamos números para: Ordenar, identificar, escribir códigos,…

Imagen IV - 1. Extractos del texto de apoyo para 1º de ESO sobre características generales de las magnitudes.

Al identificar cantidades numéricas que expresen una cantidad de magnitud pretendemos que los estudiantes puedan poner en juego un vocabulario adecuado para expresar su análisis de las situaciones. Deben ser capaces de distinguir entre la propiedad que se mide sobre un objeto concreto, es decir la magnitud, la unidad que se está utilizando para expresar la cantidad de esa magnitud que posee el objeto y el valor numérico concreto mediante el que se expresa esa cantidad de magnitud utilizando la unidad elegida (Imagen IV - 1). Para ello, presentamos una variedad de situaciones a los alumnos en las que se expresa información de diversas magnitudes de distintos tipos (geométricas, físicas, económicas, …) y con diferentes características (discretas, continuas). En un primer momento, la mayoría de las magnitudes que se presentan son extensivas, conforme avanza la propuesta se incide en las magnitudes intensivas.

La distinción entre estos conceptos fundamentales de la medida y el empleo del vocabulario asociado permiten analizar con mayor cuidado las relaciones existentes entre diferentes magnitudes para decidir si una pareja de magnitudes que están involucradas en una misma situación guarda una relación de covariación o no. Además, nos esforzamos en que los estudiantes identifiquen qué posibles operaciones podrían realizarse entre magnitudes que aparecen en una misma situación y que identifiquen el resultado de esas posibles operaciones binarias con la cantidad de una magnitud. Especialmente, dado que trabajamos con estructuras multiplicativas, promovemos la interpretación de las razones involucradas en situaciones de isomorfismo de medidas y las magnitudes que aparecen como resultado de un producto de medidas.

IV.2.2. Razón y situaciones de proporcionalidad simple directa

El concepto de razón y su tratamiento forman uno de los pilares fundamentales sobre los que se sostiene la propuesta didáctica. Frente a otras interpretaciones, priorizamos el significado de razón como “tanto por uno”. De este modo, la razón entre una cantidad a de una magnitud A y una cantidad b de una magnitud B, que denotamos a/b, se identifica con la cantidad de una nueva magnitud intensiva que da cuenta de la cantidad de magnitud de A correspondiente a una unidad de B. Así, al emplear la notación a/b no debemos pensar en dos números diferentes correspondientes a cantidades de magnitudes diferentes, sino interpretar la razón como un único número que representa una cantidad de una magnitud cociente.

De esta forma, la razón inversa b/a puede distinguirse de la anterior al corresponderse con una cantidad de magnitud diferente. El hecho de la existencia de las dos razones inversas quedaría diluido interpretando las razones como una pareja de datos relacionados cuya única diferencia sería el orden de presentación.

En cuanto al sistema de representación simbólico para la razón, damos libertad a los alumnos para utilizar fracciones o números decimales. No obstante, se insiste en la conveniencia de uno o de otro dependiendo de la situación, debatiendo en las puestas en común e institucionalizaciones, tanto los diferentes sistemas utilizados por los alumnos como otras posibilidades que no han surgido en su trabajo, pero se consideran interesantes.

La posibilidad de establecer la razón entre dos cantidades de magnitud se basa en la noción de reparto, conectando los significados del racional como reparto y como razón. La idea fundamental es hacer pensar a los estudiantes si en la situación planteada puede tener sentido averiguar cuántas unidades de una de las magnitudes le corresponden a cada unidad de la otra. Esta consideración permite evaluar la pertinencia del establecimiento de razones tanto en situaciones de proporcionalidad directa como en otros fenómenos en los que la razón puede no ser una constante de la situación (por ejemplo, exposiciones como la densidad de población de una región que, si bien son ejemplos relevantes de razones, no responden a una situación de covariación proporcional).

Aparece de esta manera en nuestra propuesta la noción de condición de regularidad que debe darse en una situación de covariación entre dos magnitudes para que dicha relación sea de proporcionalidad directa y tenga, por tanto, sentido hablar de razón (realizar el reparto) y de la constancia de esta. Así, la condición de regularidad consiste en explicitar las condiciones necesarias para que tenga sentido realizar un reparto igualitario entre las cantidades de las magnitudes involucradas y, en caso de variar el valor de una de las magnitudes, el otro se modifique de tal forma que el resultado de dicho reparto permanezca constante. Se incide así en varios aspectos: la existencia de al menos dos magnitudes en la situación, que dichas magnitudes estén relacionadas y que a cada unidad de una de las magnitudes le corresponda siempre una cantidad fija de la otra. Este último aspecto permite el enunciado de dos condiciones de regularidad equivalentes, de forma que cada una hace referencia a una de las dos razones inversas que se pueden establecer en una situación de proporcionalidad directa.

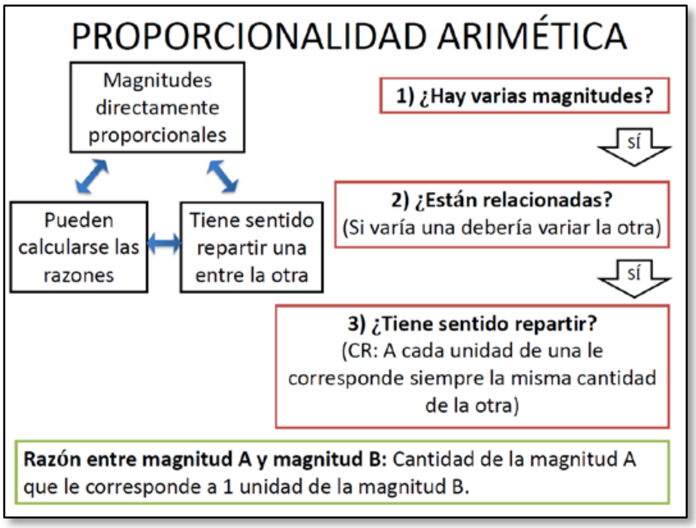


Imagen IV - 2. Parte de la proyección de apoyo a la institucionalización del concepto de magnitudes directamente proporcionales.

El trabajo previo con el concepto de razón y con la condición de regularidad desemboca, por tanto, en la relación de proporcionalidad directa entre magnitudes. En un contexto determinado, caracterizamos la proporcionalidad simple directa como aquella relación entre dos magnitudes que hace que tenga sentido definir la razón entre ambas y ésta permanece constante. Con los alumnos, ponemos nombre a esta relación solo tras haber trabajado los conceptos previos e incidimos en que se trata de una relación particular de entre otras muchas que pueden ligar a dos magnitudes. Creemos necesario trabajar con actividades que ejemplifiquen las diversas situaciones posibles: casos en los que no haya una pareja de magnitudes, casos en los que las magnitudes no estén relacionadas, casos en los que haya dos magnitudes relacionadas, pero por una situación que no sea de proporcionalidad directa y casos proporcionales. En la Imagen IV - 2 puede observarse el esquema resumen que se proyectó en la pizarra digital para apoyar la institucionalización de estos conceptos.

El trabajo del alumno se realiza siempre sobre situaciones contextualizadas, de manera que la relación proporcional se evalúa dentro del contexto particular y no de forma puramente matemática. Se enfatiza en la necesidad de disponer de dicho contexto para asegurar una relación de proporcionalidad (directa) entre una pareja de magnitudes concretas (ver Imagen IV - 3). Por ejemplo, la longitud y el tiempo pueden ser directamente proporcionales en el estudio del movimiento uniforme de un objeto, pero no lo son cuando se refieren a la estatura y edad de una persona. Muchas de las situaciones contextualizadas que utilizamos en la propuesta para que los alumnos evalúen la pertinencia de calcular las razones y obtener su expresión numérica, responden a fenómenos de intercambio y reparto. Así, las situaciones iniciales que introducen el concepto de razón responden a situaciones de compraventa, que son un caso particular de fenómeno de intercambio o trueque cercano al alumno.

¡Cuidado!

Dos magnitudes pueden ser directamente proporcionales en una determinada situación y no serlo en otra. Por eso para hablar de magnitudes directamente proporcionales es muy importante la situación concreta en que aparecen.

Que sean o no directamente proporcionales dependerá de que se cumplan las condiciones de regularidad necesarias para poder definir las razones en esa situación concreta.

Imagen IV - 3. Extracto del texto de apoyo de 1º de ESO que incide en la importancia del contexto para caracterizar una relación de proporcionalidad.

En el siguiente ejemplo desarrollamos el discurso argumentativo que utilizamos con los alumnos en la puesta en práctica de la propuesta en los momentos de institucionalización, en el análisis de cuatro situaciones concretas. Partes de este ejemplo desarrollado y otros ejemplos resueltos pueden encontrarse en el Anexo VII dentro del material que se elaboró como texto de apoyo para los alumnos.

Ejemplo: En cada una de las siguientes situaciones se te pide que estudies si hay una pareja de magnitudes directamente proporcionales. Para ello indica cuáles son las condiciones de regularidad que deben cumplirse para que tenga sentido calcular las razones. Después, calcula las dos razones en las situaciones que sea posible e indica lo que significa cada razón:

a) En la planta 5 hay ingresados 28 enfermos.

b) El profesor de matemáticas pesa 80 kg y Pedro mide 170 cm.

c) Laura tiene 10 años y tiene una estatura de 120 cm.

d) En el supermercado he pagado 15 € por comprar 30 productos.

e) En 4 horas limpió 37 cristales.

Solución:

a) No tiene sentido calcular razones con las cantidades numéricas del enunciado porque el número de la planta no se corresponde con una magnitud, es un identificador. Por tanto, no hay dos magnitudes directamente proporcionales.

b) Las magnitudes que presenta el enunciado no están relacionadas, una variación en el peso del profesor no supone que cambie la estatura de Pedro. Por tanto, no hay magnitudes directamente proporcionales.

c) Si bien puede considerarse que la edad y la estatura de una niña están relacionadas mediante una relación creciente (al menos hasta cierta edad), la relación no puede considerarse de proporcionalidad directa ya que no tiene sentido pensar que por cada año de vida ha crecido siempre lo mismo (con toda seguridad con un año no medía 12 cm)

d) Las magnitudes sí están relacionadas, un cambio en el número de productos puede suponer un cambio en la cantidad que debo pagar. Para que tenga sentido calcular las razones y, por tanto, repartir, hay que suponer que todos los productos son iguales y que, entonces, todos los productos valen el mismo precio. Equivalentemente podríamos pensar en que por cada euro me den siempre la misma cantidad de productos.

La anterior condición que hace que tenga sentido calcular las razones es la que hemos llamado condición de regularidad. Si se cumple, sí podemos suponer que tenemos dos magnitudes directamente proporcionales y podemos calcular las razones.

Si repartimos el precio total entre el número de productos, obtenemos el precio que vale cada producto:

Razón 1: $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ € cada producto (También $0{,}5$ € cada producto)

Si repartimos el número de productos entre el precio total obtenemos los productos que podemos comprar por cada euro:

Razón 2: $\frac{30}{15} = 2$ productos por cada euro.

e) Sí hay dos magnitudes relacionadas, ya que si varía el tiempo de trabajo variará el número de cristales limpiados. Para que tenga sentido calcular las razones, debemos suponer que los cristales son iguales y que cada hora limpia el mismo número de cristales. O, equivalentemente, que invierte el mismo tiempo en limpiar cada cristal.

Si la condición de regularidad anterior se cumple, sí hay dos magnitudes directamente proporcionales y podemos calcular las razones.

Razón entre cristales y tiempo: Se limpian $37/4 = 9{,}25$ cristales cada hora.

Razón entre tiempo y cristales: Se tardan $4/37$ horas en limpiar cada cristal.

IV.2.2.1. Problemas de valor perdido

Como hemos dicho en la primera sección de este capítulo, optamos por potenciar las estrategias funcionales en la resolución de problemas de proporcionalidad. Sin embargo, durante la propuesta no se prohíbe la utilización de ninguna estrategia válida, aunque se incide en la necesidad de argumentar los procedimientos y de interpretar en términos de magnitudes los resultados intermedios obtenidos al realizar operaciones entre cantidades de magnitud.

Como vimos en el Capítulo II , un problema de valor perdido, $(a_1 : a_2) \leftrightarrow (b_1 : x)$, al considerar la relación funcional entre las magnitudes $f: M_1 \longrightarrow M_2$ dada por $x_2 = f(x_1) = k \cdot x_1$, queda determinado por el siguiente esquema de problemas multiplicativos en una etapa:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \\
\boxed{a_1} \arrow[r, "k"] \arrow[d, squiggly, "c"'] & \boxed{a_2} \arrow[d, squiggly, "c"] \\
\boxed{b_1} \arrow[r, "k"] & \boxed{x}
\end{tikzcd}$$

En donde los datos proporcionados por el enunciado son a_1, a_2, b_1 y se solicita el valor x.

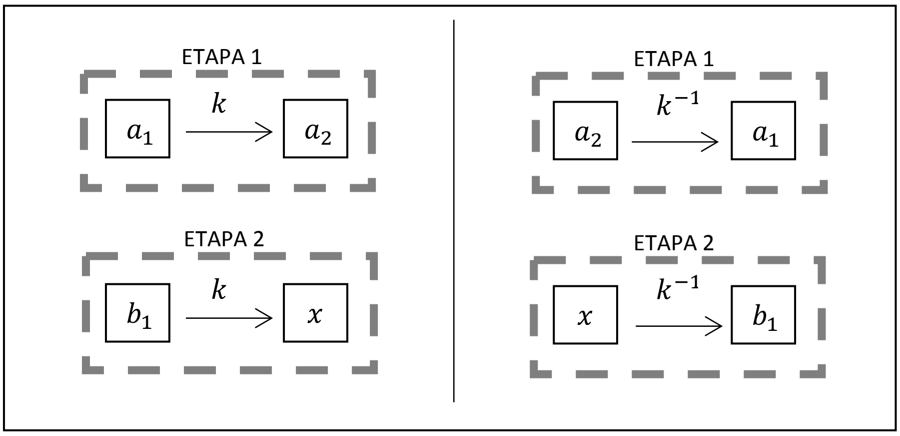


Figura IV - 3. Esquemas de resolución funcional de un problema de valor perdido de proporcionalidad simple.

El trabajo previo sobre la razón externa entre cantidades de magnitudes relacionadas se ha basado, precisamente en el cálculo de la razón k del esquema anterior y de la razón k^{-1}. Así, en realidad, para un problema de valor perdido pueden utilizarse dos estrategias funcionales según se considere uno de los dos esquemas que pueden verse en Figura IV - 3.

En el esquema de la izquierda el problema se resuelve mediante dos etapas, de forma que en la primera de ellas se calcula la razón externa entre M_1 y M_2 en un problema de isomorfismo de medidas (problema Estado-Razón-Estado) con la incógnita en la razón (división partitiva) y, en la segunda etapa, se vuelve a resolver un problema de isomorfismo de medidas, pero con la incógnita en el estado final. Por tanto, en esta segunda etapa debe procederse multiplicando la razón calculada en la primera etapa y el estado inicial. La argumentación de la validez de este método pasa por interpretar la razón externa k como tanto por uno para posteriormente deducir que si k da cuenta de la cantidad de M_2 por cada unidad de M_1, si buscamos la cantidad de M_2 relacionada con b_1 unidades de M_1, debemos repetir b_1 veces la cantidad k.

En el esquema que observamos en derecha de la Figura IV - 3, encontramos una diferencia en la segunda etapa ya que la incógnita se encuentra en el estado inicial y, por tanto, la resolución concluye dividiendo el estado final entre la razón calculada en la primera etapa. La argumentación de la validez de este método pasa por interpretar la división de la segunda etapa como un problema de agrupamiento. Si k^{-1} da cuenta de la cantidad de M_1 por cada unidad de M_2 y buscamos la cantidad de unidades de M_2 relacionada con b_1 unidades de M_1, debemos calcular cuántas veces cabe la cantidad k^{-1} en la cantidad b_1.

La mayor dificultad de los problemas de división frente a los de multiplicación y, además, la mayor dificultad de los problemas de agrupación frente a los de reparto, nos conducen a institucionalizar el primer método.

La utilización de una u otra estrategia estará influida por el análisis previo de la relación de proporcionalidad que hagan los alumnos para establecer la condición de regularidad y la posibilidad de calcular las razones. Por tanto, en la institucionalización se propone a los alumnos interpretar el significado de las dos razones puestas en juego y, en ocasiones, incluso calcular ambas como paso inicial, para evaluar la conveniencia de usar una u otra para resolver el problema.

Ejemplo: Para obtener 420 litros de kétchup hacen falta 600 kilogramos de tomate, ¿cuántos kilogramos de tomate se necesitan para obtener 350 litros de kétchup?

Solución:

En el enunciado del problema aparece una situación que relaciona dos magnitudes, volumen de kétchup (en litros) que se fabrica y el peso de tomate (en kilos) necesario para fabricar una cantidad determinada de kétchup. Ambas magnitudes serán directamente proporcionales si suponemos que se cumple la condición de regularidad, es decir, que se emplean los mismos kilogramos de tomate para fabricar cada litro de kétchup o, equivalentemente, que por cada kilogramo de tomate se obtiene el mismo volumen de kétchup.

Así, podemos calcular las dos razones a partir de la pareja de datos relacionados "para obtener 420 litros de kétchup hacen falta 600 kilogramos de tomate".

Razón entre el volumen de kétchup y el peso de tomates:

$\frac{420}{600} = \frac{7}{10} = 0{,}7$ litros de kétchup por cada kilogramo de tomates.

Razón entre el peso de tomates y el volumen de kétchup:

$\frac{600}{420} = \frac{10}{7}$ kilogramos de tomate para cada litro de kétchup.

Como nos solicitan los kilogramos de tomate para 350 litros de kétchup, usaremos los kilogramos de tomate que le corresponden a 1 litro de kétchup y lo multiplicaremos por el número de litros de kétchup que indica el enunciado:

$\frac{10}{7} \cdot 350 = 500$ kilogramos de tomate (para hacer 350 litros de kétchup).

IV.2.2.2. Problemas de comparación cuantitativa

Al igual que para los problemas de valor perdido, para la resolución de problemas de comparación cuantitativa se potencian las estrategias funcionales. Pero, al contrario de lo que ocurre con los problemas de valor perdido, la reversibilidad de la función de proporcionalidad directa no genera estrategias esencialmente diferentes (Figura IV - 4).

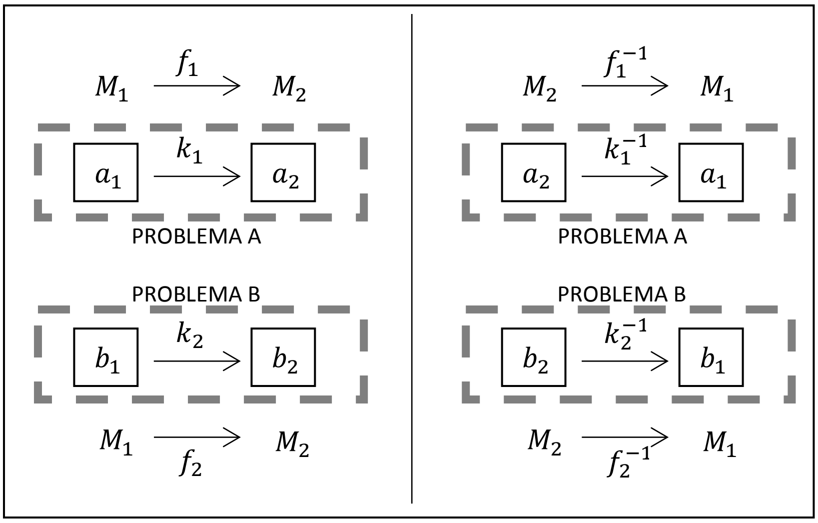


Figura IV - 4. Esquemas de resolución funcional para problemas de comparación cuantitativa.

La estrategia funcional se basa, en primer lugar, en el cálculo de las razones externas asociadas a cada una de las situaciones. Para ello, deben resolverse dos problemas de isomorfismo de medidas con la incógnita en la razón (cociente partitivo) sin ningún orden en particular (Problemas A y B de la Figura IV - 4). Posteriormente, deben compararse numéricamente los resultados obtenidos en el paso anterior.

Si bien, la estructura de las resoluciones presentadas en Figura IV - 4 es idéntica, el contexto concreto en el que se presenta el problema suele determinar una mayor facilidad para interpretar la cuestión utilizando una de las dos razones posibles. Así, aunque cualquier solución correcta se tendrá en cuenta y se empleará para los debates en clase, se anima a los alumnos a realizar un estudio previo de los significados de las dos razones que se ponen en juego en la situación proporcional para evaluar la conveniencia de calcular una u otra.

Así, en estos problemas, además de en evaluar las condiciones de regularidad necesarias para considerar relaciones de proporcionalidad directa en cada una de las situaciones que aparecen, se hará énfasis en que los alumnos interpreten la pregunta en términos de alguna de las razones que puedan calcularse.

Ejemplo: La receta de naranjada de María indica que hay que mezclar $0{,}5$ litros de zumo naranja con $1{,}5$ litros de agua. La receta de Pedro dice que hay que mezclar $1{,}5$ litros de zumo de naranja con 5 litros de agua. ¿Cuál de las dos recetas dará un sabor de naranja más fuerte?

Solución:

En el enunciado del problema se nos presentan dos situaciones (la receta de naranjada de María y la receta de naranjada de Pedro) en las que se relacionan las mismas dos magnitudes el volumen de zumo de naranja (medido en litros) y el volumen de agua (medido en litros). En cada situación, dichas magnitudes serán directamente proporcionales siempre que, en cada receta, se eche la misma cantidad de zumo por cada litro de agua.

Por otro lado, un refresco tendrá un sabor a naranja más fuerte que otro, si la cantidad de zumo de naranja añadida por unidad de volumen de agua es mayor. Es decir, la naranjada con más sabor a naranja será aquella que tenga más litros de zumo de naranja por cada litro de agua.

Calcularemos así la razón “volumen de zumo de naranja por cada litro de agua” en cada una de las situaciones, es decir, en cada una de las recetas:

Naranjada de María: $\frac{0,5}{1,5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ litros de zumo por cada litro de agua.

Naranjada de Pedro: $\frac{1,5}{5} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$ litros de zumo por cada litro de agua.

Como $\frac{1}{3} > \frac{3}{10}$ (expresado en forma decimal o reducido a común denominador), entonces la naranjada de María tiene más zumo de naranja por cada litro de agua que la de Pedro. Por tanto, la naranjada de María tiene un sabor más fuerte.

IV.2.2.3. Problemas de comparación cualitativa

Durante los debates e institucionalización de las técnicas de resolución para problemas de comparación cualitativa se promoverá que los alumnos traduzcan el enunciado del problema de forma que las comparaciones enunciadas posean el mismo referente. Así:

- Un enunciado $S_1: (x_1^+ : x_2) \sim S_2: (x_1 : x_2^+)$, puede convertirse en $S_1: (x_1^+ : y_2^-) \sim S_2: (x_1 : y_2)$.
- Un enunciado $S_1: (x_1^+ : x_2) \sim S_2: (x_1 : x_2^-)$, puede convertirse en $S_1: (x_1^+ : y_2^+) \sim S_2: (x_1 : y_2)$.

Notemos que el resto de las combinaciones son análogas y simétricas con respecto a una de las dos anteriores.

Para concluir la resolución de estos problemas deben ponerse en juego diferentes estrategias argumentativas según el problema sea resoluble o no. Por ejemplo, de los casos anteriores, en el primero puede argumentarse qué situación es más ventajosa interpretando la pregunta realizada en términos de una de las razones (como en los problemas de comparación cuantitativa) e interpretando la construcción de la razón a través de un reparto. Con una estructura como $S_1: (x_1^+ : y_2^-) \sim S_2: (x_1 : y_2)$, la razón x_1^+/y_2^- es mayor que x_1/y_2 ya que en la primera repartimos una cantidad mayor entre un número menor de unidades y, por tanto, el resultado del reparto es mayor. Análogamente, podría razonarse que y_2^-/x_1^+ es mayor que y_2/x_1 por que en la primera se reparte una cantidad menor entre un número mayor de unidades y, por tanto, el resultado del reparto es menor.

Ejemplo: Para hacer naranjada mezclando zumo de naranja y agua, María usa más zumo de naranja que Pedro. Sabemos también, que Pedro ha usado más agua que María. ¿Qué naranjada tendrá un sabor más fuerte, la de María o la de Pedro?

Solución:

En el enunciado del problema se nos presentan dos situaciones (la receta de naranjada de María y la receta de naranjada de Pedro) en las que se relacionan las mismas dos magnitudes el volumen de zumo de naranja y el volumen de agua. En cada situación, dichas magnitudes serán directamente proporcionales siempre que, en cada receta, se eche la misma cantidad de zumo por cada unidad de volumen de agua.

Por otro lado, un refresco tendrá un sabor a naranja más fuerte que otro, si la cantidad de zumo de naranja añadida por unidad de volumen de agua es mayor.

Si cambiamos de orden la comparación de la segunda frase del problema nos damos cuenta de que el problema puede esquematizarse de la siguiente manera:

María echa más zumo de naranja que Pedro.
María echa menos agua que Pedro.

Por tanto, la cantidad de zumo de naranja por cada unidad de volumen de agua es mayor en la receta de María, ya que estaremos repartiendo una mayor cantidad de zumo de naranja entre una menor cantidad de volumen de agua en la razón asociada a la receta de María que en la razón asociada a la receta de Pedro.

En conclusión, la naranjada de María tiene un sabor más fuerte a naranja.

Estas argumentaciones pueden acompañarse de representaciones gráficas o ejemplificaciones con datos concretos para razonar sobre ellas. Este tipo de apoyos para la argumentación se promueven especialmente para elaborar las respuestas de las situaciones en las que no puede decidirse qué situación es más ventajosa ya que la respuesta podría variar en función de las cantidades de magnitud concretas puestas en juego.

Ejemplo: Para hacer naranjada mezclando zumo de naranja y agua, María usa más zumo de naranja que Pedro. Sabemos también, que Pedro ha usado menos agua que María. ¿Qué naranjada tendrá un sabor más fuerte, la de María o la de Pedro?

Solución:

En el enunciado del problema se nos presentan dos situaciones (la receta de naranjada de María y la receta de naranjada de Pedro) en las que se relacionan las mismas dos magnitudes el volumen de zumo de naranja y el volumen de agua. En cada situación, dichas magnitudes serán directamente proporcionales siempre que, en cada receta, se eche la misma cantidad de zumo por cada unidad de volumen de agua.

Por otro lado, un refresco tendrá un sabor a naranja más fuerte que otro, si la cantidad de zumo de naranja añadida por unidad de volumen de agua es mayor.

Si cambiamos de orden la comparación de la segunda frase del problema nos damos cuenta de que el problema puede esquematizarse de la siguiente manera:

María echa más zumo de naranja que Pedro.
María echa más agua que Pedro.

Por tanto, no podemos determinar cuál de las dos naranjadas tendrá un sabor más fuerte a naranja ya que dependerá de las cantidades concretas que eche cada uno.

Por ejemplo, si María echase 5 litros de zumo y 10 litros de agua y Pedro echase 2 litros de zumo y 2 litros de agua, se cumpliría que María echa más zumo y más agua, pero la razón de zumo de naranja y agua sería mayor en la receta de Pedro. Por tanto, sabría más fuerte la naranjada de Pedro.

Sin embargo, si María echase 5 litros de zumo y 10 litros de agua y Pedro echase 1 litro de zumo y 2 litros de agua, se cumpliría que María echa más zumo y más agua, pero la razón de zumo de naranja y agua sería igual en ambas recetas, por lo tanto, las dos recetas sabrían igual de fuertes.

Por último, podría darse el caso en el que fuese más fuerte la receta de María. Por ejemplo, si María echase 5 litros de zumo y 10 litros de agua y Pedro echase 1 litro de zumo y 9 litros de agua, se cumpliría que María echa más zumo y más agua y la razón de zumo de naranja y agua sería mayor en la receta de María, es decir, sabría más fuerte la naranjada de María.

IV.2.3. Situaciones de proporcionalidad simple inversa

Las relaciones de proporcionalidad inversa en la propuesta de Oller-Marcén (2012) se caracterizan mediante la doble relación directa que se forma con la magnitud producto que debe permanecer constante. Así, el tratamiento que se le da a la caracterización de la proporcionalidad simple inversa se basa en la existencia de una relación de covariación entre magnitudes en la que se puede determinar una tercera magnitud, producto de medidas de las dos anteriores, que se mantiene constante. De esta forma tiene sentido definir la razón entre esta tercera magnitud y las dos magnitudes iniciales. Además, la razón entre esta tercera magnitud y cada una de las magnitudes iniciales resulta ser la otra magnitud presentada. En este caso, las ideas fundamentales son la idea de razón como "tanto por uno" y la de constante de proporcionalidad, dotando a ambos conceptos de significado concreto en cada situación. En torno a estas ideas gira la caracterización de las magnitudes inversamente proporcionales.

Ejemplo: Analizar la relación de proporcionalidad existente en la siguiente situación:

"*Hemos comprado un televisor y tenemos que pagar* 12 *plazos de* 85 *euros para pagarlo.*"

Solución: Podemos considerar las magnitudes "número de plazos" e "importe de cada plazo". Evidentemente estas magnitudes están relacionadas, pero no tiene sentido tratar de definir las razones entre ellas porque el importe de cada plazo no puede repartirse entre el número total de plazos (por tanto, no son magnitudes directamente proporcionales). Sin embargo, si consideramos la magnitud constante (constante de proporcionalidad) "precio del televisor" sí que tiene sentido calcular la razón entre el precio del televisor y el número de plazos (obteniendo la magnitud importe de cada plazo) y entre el precio del televisor y el importe de cada plazo (obteniendo la magnitud número de plazos). Por tanto, las magnitudes son inversamente proporcionales siempre que se cumplan las condiciones de regularidad. En este caso es necesario que se pague siempre lo mismo en cada plazo y que la duración de los plazos sea constante.

Tras la experimentación del primer ciclo en primero de la ESO que realizó Oller-Marcén (2012), y que resumimos en la última sección de este capítulo, creemos necesario incidir, además de en la caracterización por doble relación de proporcionalidad, en la caracterización por constante de proporcionalidad. Esta se centra en la estructura multiplicativa de la relación funcional caracterizando esa tercera magnitud que toma un valor constante en la situación como el producto de medidas de las magnitudes iniciales (ver Imagen IV - 4).

Dos **magnitudes** relacionadas (si varía el valor de una debe variar el de la otra) se dicen **inversamente proporcionales**, si se puede calcular una tercera magnitud mediante el producto de las primeras y que permanece constante, de forma que se pueden definir las razones entre esta tercera magnitud y las dos magnitudes iniciales.

La tercera magnitud que se calcula en esta situación se denomina **constante de proporcionalidad**.

Piensa que para que pueda calcularse la constante de proporcionalidad y que se puedan definir las razones entre la constante de proporcionalidad y las primeras magnitudes habrá que exigir algunas **condiciones de regularidad**.

Imagen IV - 4. Extracto del texto de apoyo de 2º de ESO en donde se caracteriza la proporcionalidad inversa.

Esta caracterización, trabajada de forma aritmética y contextualizada, requiere dotar de significado al valor obtenido como constante de proporcionalidad. En el ejemplo anterior la constante de proporcionalidad es, como hemos dicho, el “precio del televisor”, que se construye fácilmente como el producto de las cantidades iniciales “número de plazos” e “importe de cada plazo” ya que la segunda magnitud es una magnitud intensiva construida como cociente cuyo denominador es la primera magnitud. Sin embargo, puede resultar más costosa la interpretación cuando las magnitudes involucradas en una relación de proporcionalidad simple inversa son ambas extensivas. Para solventar esta dificultad dotamos a los alumnos de argumentos para interpretar estos productos. Los argumentos pasan, en primer lugar, por diferenciar estas situaciones de las de proporcionalidad simple directa, observando que no tiene sentido realizar un reparto entre las magnitudes. Este razonamiento lleva a realizar una “interpretación intensiva” de las magnitudes extensivas, lo que permite dar dos significados diferentes a la constante de proporcionalidad. Veámoslo en un ejemplo:

Ejemplo: Analizar la relación de proporcionalidad existente en la siguiente situación:

“Con 10 máquinas, trabajando a la vez, se ha terminado un pedido en 50 h.”

Solución:

Podemos considerar las magnitudes “número de máquinas” y “tiempo para terminar el pedido”. Estas magnitudes están relacionadas ya que, si variase el número de máquinas, también variaría el tiempo necesario para terminar el pedido.

Por un lado, observamos que no tiene sentido definir la razón entre las magnitudes, ya que el tiempo trabajado no puede repartirse entre las máquinas porque cada una de las máquinas trabaja esa cantidad de tiempo. Del mismo modo, no tiene sentido repartir el número de máquinas entre el tiempo de trabajo porque cada una de las horas están trabajando todas las máquinas.

Es decir, el tiempo de trabajo, las 50 horas, es el tiempo que dedica cada máquina para terminar el trabajo (daría igual que no lo hicieran al mismo tiempo), por tanto, como hay 10 máquinas, se necesitan $50 \cdot 10 = 500$ horas de trabajo total. Esta magnitud permanecerá constante, para acabar ese pedido, y para que tenga sentido lo anterior debemos suponer que todas las máquinas hacen el mismo trabajo y todas las máquinas trabajan el mismo número de horas. Equivalentemente, si solo dispusiéramos de 1 máquina esta tardaría 500 horas en terminar el pedido. Notemos, además, que si calculamos la razón entre la constante de proporcionalidad y el número de máquinas de las que disponemos obtendremos cuántas horas tienen que funcionar para acabar el pedido.

También podemos interpretar la constante de proporcionalidad de la siguiente manera, las 10 máquinas trabajan cada una de las horas, por lo que, si han estado trabajando 50 horas, quiere decir que necesitaríamos $10 \cdot 50 = 500$ máquinas para realizar el trabajo en una hora. Así, la razón entre la constante de proporcionalidad y el número de horas que tenemos que poner a trabajar las máquinas proporcionaría cuántas máquinas tenemos que poner a trabajar.

En definitiva, el producto de las magnitudes de la situación nos habla del trabajo total necesario para terminar un pedido y este es constante (mientras no cambie el pedido). Si medimos el trabajo que requiere el pedido con la unidad "trabajo realizado por una máquina en una hora", el pedido requiere 500 unidades de trabajo.

Por tanto, las magnitudes tienen una relación de proporcionalidad simple inversa.

Es decir, interpretamos en un primer momento la constante de proporcionalidad k de una situación de proporcionalidad inversa de la que conocemos una pareja de datos relacionados $(a_1 : a_2)$ en términos de cantidades de las magnitudes iniciales, $(a_1 : a_2) \leftrightarrow (k : 1) \leftrightarrow (1 : k)$. En un segundo momento se dota de significado propio a la magnitud producto interpretando la nueva unidad $u_1 \cdot u_2$. Para que pueda construirse esta nueva unidad, es decir, para que tenga sentido el producto de medidas, necesitamos que estas unidades sean constantes, esto se consigue mediante las suposiciones hechas en la condición de regularidad. En el ejemplo, la cantidad de trabajo que hace cada máquina en cada hora es constante (no hay máquinas que trabajen más rápidas que otras ya que todas realizan el mismo trabajo y todas las horas están puestas el mismo número de máquinas), por lo que queda bien determinada la unidad de trabajo "máquina·hora". Notar que, en este punto encontramos una diferencia sustancial entre la proporcionalidad directa e inversa, mientras que en el caso directo la condición de regularidad "que a cada unidad de M_1 le corresponda siempre un número fijo de unidades de M_2", da cuenta de la buena definición de la razón y de la constancia, en el caso inverso la condición anterior da cuenta de la buena definición, pero no de la constancia. La condición de constancia suele estar explícita o implícitamente indicada en el enunciado de las situaciones en el caso inverso (en el caso del precio del televisor parece asumible que su precio está fijo mientras se hable del mismo televisor, en el caso del trabajo para realizar un pedido también, siempre que se hable del mismo pedido).

Como se ha mostrado en el ejemplo, en ocasiones, será necesario reinterpretar los productos de medidas (problema Estado-Estado-Estado), como un producto en una situación de isomorfismo de medidas (problema Estado-Razón-Estado). Por ejemplo, en una situación en la que analizásemos la relación entre el número de pantalones y de camisetas que puede tener una persona sabiendo que puede hacer 36 combinaciones diferentes al vestirse, interpretaríamos un producto de 3 camisetas por 12 pantalones, interpretando como intensiva bien la cardinalidad de camisetas, bien la cardinalidad de pantalones, por ejemplo, interpretaríamos que se puede poner 3 camisetas por cada pantalón de los que dispone, o doce pantalones por cada camiseta.

IV.2.3.1. Problemas de valor perdido

Al igual que en el caso de la proporcionalidad simple directa, los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa se abordan mediante la resolución de un problema aritmético en dos etapas, priorizando, de entre las estrategias posibles, la estrategia funcional. La diferencia con el caso directo es que, debido a la conmutatividad del producto, tenemos un único camino de resolución siguiendo una estrategia funcional.

Recordemos que un problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad simple inversa, contextualiza una estructura multiplicativa entre dos magnitudes M_1 y M_2, de la forma $M_1 \cdot M_2 = cte$, de forma que el enunciado nos proporciona una pareja de valores relacionados $(a_1 : a_2)$y se nos pide calcular el valor, x, de una de las magnitudes, supongamos M_2, relacionado con cierto valor b_1 de M_1, $(a_1 : a_2) \leftrightarrow (b_1 : x)$.

La estrategia funcional pasa por construir, en una primera etapa, la constante de proporcionalidad, k, mediante un problema de producto de medidas (Estado-Estado-Estado) cuya incógnita está en el producto. La segunda etapa consiste en resolver un problema de producto de medidas (Estado-Estado-Estado) cuya incógnita está en una de las medidas (estados) iniciales. En la Figura IV - 5 esquematizamos la estrategia priorizada desde nuestra propuesta.

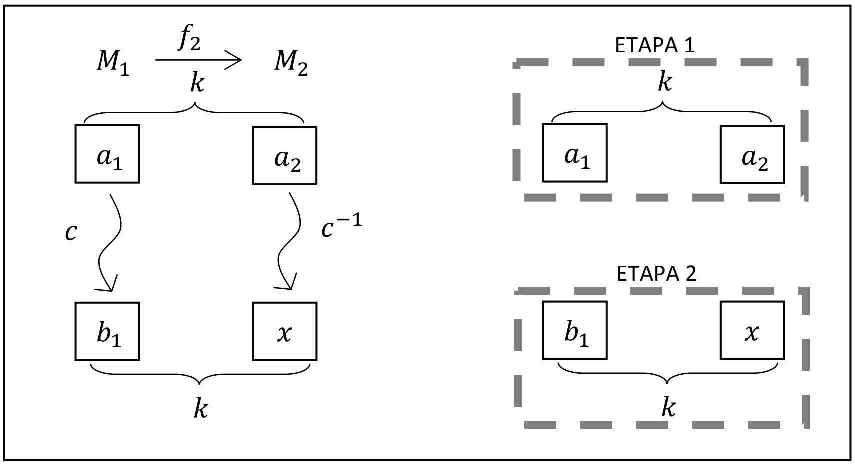


Figura IV - 5. Esquema de la estructura (izquierda) y etapas de resolución funcional (derecha) de un problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad simple inversa.

Observemos que, el tratamiento dado al análisis de las situaciones de proporcionalidad inversa reinterpreta en ocasiones los problemas de producto de medidas en problemas de isomorfismos de medidas mediante el uso de la razón entre magnitudes, concepto en el que nuestra propuesta incide de manera prioritaria. De esta forma, el problema aritmético que debe resolverse en la segunda etapa se trabaja como el cálculo de la razón entre la magnitud constante y una de las magnitudes iniciales.

Ejemplo: Un ganadero tiene pienso para alimentar a 30 terneros durante 90 días. Si tuviese 20 terneros, ¿durante cuántos días los podría alimentar?

Solución:

En el enunciado del problema aparecen dos magnitudes, "número de terneros" y "tiempo que los alimentamos" (expresado en días). Estas dos magnitudes están relacionadas ya que un cambio en el número de terneros cambiará el tiempo que los podemos alimentar con el pienso que tiene el ganadero. Esa cantidad de pienso es una tercera magnitud que permanece constante en el problema. Además, podemos pensar en que hemos alimentado 30 terneros cada día (que no tendrían por qué ser los mismos), en total hemos alimentado (durante un día) a $30 \cdot 90 = 2700$ terneros. Es decir, con la comida que tenemos puedo dar la comida de un día a 2700 terneros.

También podríamos pensar que he podido alimentar a cada ternero durante 90 días (que no tendrían por qué ser los mismos 90 días). Luego con el pienso que tengo dispongo de 2700 días para dar la comida que necesita un ternero.

Es decir, 2700 son las *raciones* de pienso de las que disponemos, entendiendo ración como la cantidad de pienso que come un ternero durante un día. Así si suponemos (condiciones de regularidad) que el ganadero da la misma comida a cada ternero y que gasta la misma comida cada día, tendremos que cada ternero come la misma cantidad de pienso cada día y las magnitudes son inversamente proporcionales.

Ahora, si tuviésemos 20 terneros, como disponemos de 2700 raciones, repartiendo las raciones entre los terneros, es decir calculando la razón, raciones por ternero, averiguaremos el número de días que podemos alimentar a los 20 terneros.

Así, $\frac{2700}{20} = 135$ raciones por cada ternero. Es decir, si tuviera 20 terneros podría alimentarlos durante 135 días.

IV.2.3.2. Problemas de comparación cuantitativa

Para abordar los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa basta con traducir el método visto para proporcionalidad directa cambiando razón por constante de proporcionalidad y utilizar el tratamiento para el cálculo e interpretación de la constante de proporcionalidad inversa que hemos comentado anteriormente. Así, en la Figura IV - 6 puede verse el esquema para un problema de comparación cuantitativa de estructura numérica $(a_1 : a_2) \sim (b_1 : b_2)$ donde las magnitudes vienen ligadas por una estructura multiplicativa $M_1 \cdot M_2 = cte$ y los problemas A y B de una etapa (sin orden prioritario) en los que se descompone una resolución funcional. Recordemos que, tras el cálculo de las constantes de proporcionalidad k_1 y k_2, a partir de los problemas A y B, deben compararse estas constantes interpretando la pregunta realizada en el problema en términos de esta comparación.

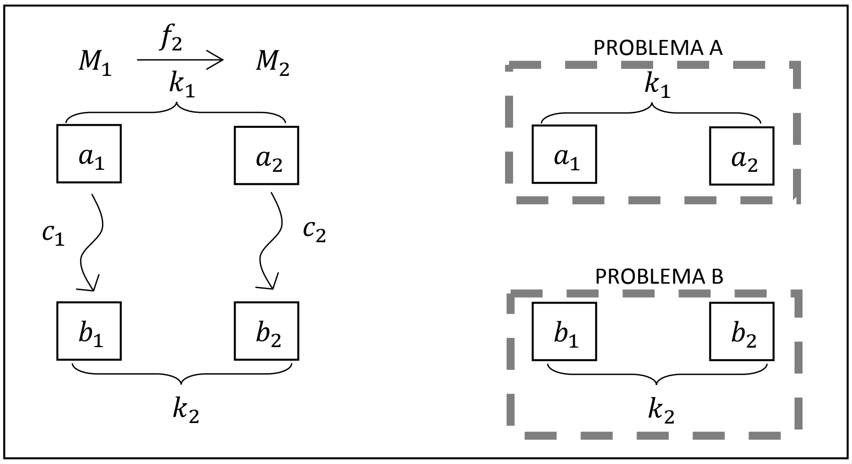


Figura IV - 6. Esquema de la estructura (izquierda) y estrategia de resolución funcional (derecha) de un problema de comparación cuantitativa en una situación de proporcionalidad simple inversa.

Ejemplo: Un ganadero tiene pienso para alimentar a 30 terneros durante 90 días. Otro, tiene pienso para alimentar a 26 terneros durante 100 días. ¿Qué ganadero tiene una mayor cantidad de pienso?

Solución:

En el ejemplo anterior ya hemos analizado este tipo de relación entre magnitudes. Si no cambia la cantidad de pienso que tiene cada ganadero, si cada ganadero da la misma comida a cada ternero y cada ganadero gasta la misma cantidad de comida cada día, las magnitudes involucradas en el enunciado tienen una relación de proporcionalidad simple inversa.

El primer ganadero tiene $30 \cdot 90 = 27000$ raciones de pienso.

El segundo ganadero tiene $26 \cdot 100 = 26000$ raciones de pienso.

Por tanto, si los dos ganaderos echan la misma cantidad de comida en cada ración, el primer ganadero tiene una mayor cantidad de pienso que el segundo.

En los problemas de comparación en situaciones de proporcionalidad simple inversa, en los que hacemos una interpretación de la magnitud producto como la anterior, es necesario considerar una condición que garantice que el tamaño de las unidades de la magnitud producto creada sea el mismo. Este problema general, que podríamos tener en otros contextos debido al uso de diferentes unidades, surge en este tipo de problemas de proporcionalidad inversa ya que la pregunta no se formula directamente sobre la magnitud producto sino sobre una magnitud directamente proporcional a la magnitud producto de interpretación más sencilla. En el ejemplo de los terneros se pregunta sobre la cantidad de comida que es directamente proporcional para cada ganadero al número de raciones del que dispone, por lo que se necesita que la razón “cantidad de pienso por ración” sea la misma en ambas situaciones.

IV.2.3.3. Problemas de comparación cualitativa

Al igual que con este tipo de problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa, durante los debates e institucionalización de las técnicas de resolución para problemas de comparación cualitativa se promoverá que los alumnos traduzcan el enunciado del problema de forma que las comparaciones enunciadas posean el mismo referente. Así, esencialmente tendremos los dos siguientes tipos de enunciados:

- Un enunciado $S_1: (x_1^+ : x_2) \sim S_2: (x_1 : x_2^+)$, puede convertirse en $S_1: (x_1^+ : y_2^-) \sim S_2: (x_1 : y_2)$.
- Un enunciado $S_1: (x_1^+ : x_2) \sim S_2: (x_1 : x_2^-)$, puede convertirse en $S_1: (x_1^+ : y_2^+) \sim S_2: (x_1 : y_2)$.

El primero de ellos conduce a una situación indecidible ya que, tras traducir la pregunta del enunciado en términos de la constante de proporcionalidad, deberíamos comparar las cantidades $x_1^+ \cdot y_2^-$ y $x_1 \cdot y_2$, es decir, debemos comprar dos productos sabiendo que en el primer producto un factor es menor que en el segundo y el otro mayor. Los argumentos orales u escritos pueden venir acompañados de ejemplos numéricos concretos o de gráficos.

Por el contrario, en el segundo caso se deduce que la constante de proporcionalidad de la primera situación es mayor por ser mayores los dos factores que la generan frente a los factores con los que construimos la constante en la segunda situación.

Ejemplo: En la calle Alta y en la calle Baja de mi pueblo, han hecho obras este verano. En la calle Alta trabajaron más obreros que en la calle baja. También sabemos que en la calle Baja tardaron más días en terminarla que en la calle Alta. ¿Qué obra requería de una mayor cantidad de trabajo, la de la calle Alta o la de la calle Baja?

Solución:

En el enunciado se nos presentan dos situaciones (obra de la calle Alta y obra de la calle Baja) en las que intervienen la misma pareja de magnitudes: “número de obreros” y “tiempo necesario para terminar la obra”. Si suponemos que en cada obra el trabajo se reparte de forma equilibrada a cada obrero (cada obrero trabaja lo mismo) y se trabaja a la misma velocidad (cada día se trabaja lo mismo) y que los obreros de ambas obras son igual de rápidos, podemos suponer que las magnitudes son inversamente proporcionales. En esta situación conocidos cuántos obreros participan y cuántos días trabajan podríamos calcular el producto de ambas cantidades para calcular cuántos días harían falta para terminar la obra si solo tuviéramos un obrero. Es decir, cuántas jornadas de trabajo se necesitan para acabar. Esta es la constante de proporcionalidad.

Además, el problema puede traducirse y esquematizarse de la siguiente manera:

En la calle Alta hay más trabajadores que en la calle Baja.
En la calle Alta tardan menos días que en la calle Baja.

Con la información que tenemos no podemos responder a la pregunta que se nos realiza. Por ejemplo, si en la calle Alta hubiera 5 trabajadores y en la calle Baja 4 y en la calle Alta hubieran tardado 6 días y en la calle Baja 10, tendríamos que para acabar en la calle Alta hacen falta 30 jornadas de trabajo mientras que en la calle Baja hacen falta 40 jornadas. Luego llevaría más trabajo la obra de la calle Baja.

Pero si, por ejemplo, en la calle Alta hubiera 5 trabajadores y en la calle Baja 3 y en la calle Alta hubieran tardado 6 días y en la calle Baja 10, tendríamos que para acabar en la calle Alta hacen falta 30 jornadas de trabajo mientras que en la calle Baja hacen falta 30 jornadas. Luego ambas obras llevarían el mismo trabajo.

IV.2.4. Situaciones y problemas de proporcionalidad compuesta

El tratamiento tradicional de la proporcionalidad compuesta suele basarse en procedimientos artificiosos y pegados al tipo de estructura funcional subyacente. Frente a esta situación proponemos un tratamiento cercano a la proporcionalidad simple y basado en operaciones binarias entre magnitudes. Así, la idea principal para abordar estas situaciones es considerar la relación existente entre una magnitud y cada una de las otras magnitudes involucradas (cuando el resto permanecen constantes) y trabajar con la operación binaria asociada a la estructura multiplicativa simple (isomorfismo de medidas o producto de medidas).

Tanto para la caracterización como para las estrategias de resolución proponemos trabajar mediante amalgamación. Como se comentó en el Capítulo II, la amalgamación de magnitudes permite traducir una situación de proporcionalidad compuesta en una de proporcionalidad simple realizando productos y cocientes de magnitudes (Imagen IV - 5). Así, en la nueva situación generada tendremos dos magnitudes ligadas por una relación de proporcionalidad simple directa o simple inversa. De esta manera, los problemas contextualizados en situaciones de proporcionalidad compuesta se reducirán a alguno de los tipos de problemas que hemos trabajado en las anteriores secciones.

Ejemplo: Analicemos la siguiente situación de proporcionalidad:

Para alimentar a 3 gatos durante 4 días, son necesarios 480 gramos de pienso.

Solución:

En la situación anterior podemos observar tres magnitudes relacionadas entre sí, “número de gatos”, “tiempo que estamos alimentándolos” y “peso de pienso”. Además, si mantenemos una de ellas fija, las dos restantes siguen estando relacionadas (si cambiase una cambiaría la otra).

Si mantenemos el número de gatos fijo el número de días que podemos alimentarlos y el peso de pienso se relacionan mediante una relación de proporcionalidad directa en la que tendrá sentido calcular las razones “peso de pienso por día” o “días que dura un gramo de pienso”.

Si mantenemos fijo el número de días que podemos alimentarlos, el número de gatos y el peso de pienso están relacionadas mediante una relación de proporcionalidad directa en la que tendrá sentido calcular las razones “pienso por gato” o “gatos que alimentamos con 1 gramo de pienso”, durante ese número de días.

Si mantenemos fijo el peso de pienso, las magnitudes número de gatos y tiempo en el que se comen el pienso están relacionadas mediante una relación de proporcionalidad inversa. En esta relación tendrá sentido calcular el producto de los gatos y los días que los alimentamos para saber las "raciones" que podemos formar con esa cantidad de pienso.

Por tanto, la situación permite las siguientes tres traducciones a situaciones simples:

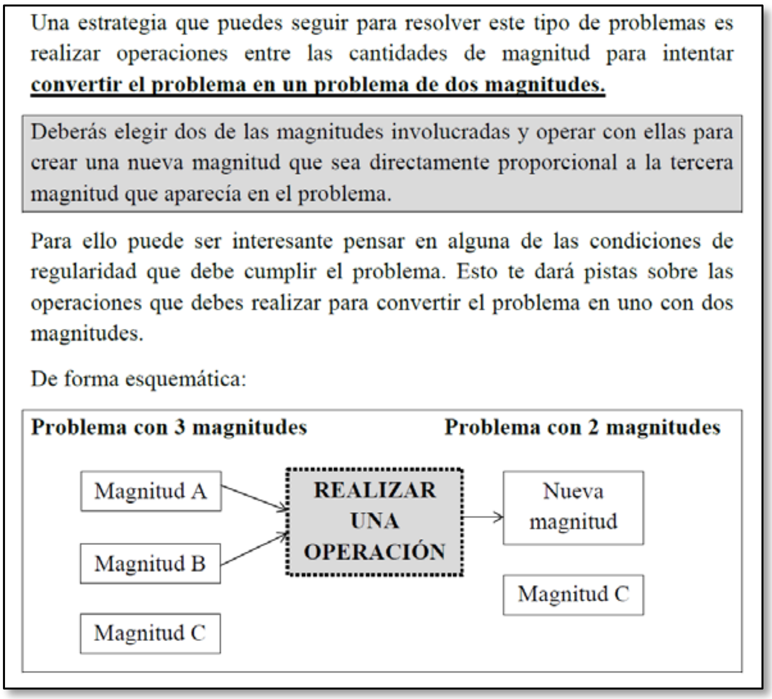
480 gramos de pienso son 12 raciones de comida de gato.

3 gatos consumen 120 gramos de pienso al día.

Para alimentar a un gato durante 4 días son necesarios 160 gramos de pienso.

La constante de proporcionalidad que observamos en la situación inicial y que guía la elaboración de las condiciones de regularidad que deben establecerse es la cantidad diaria de pienso que consume un gato.

Aunque, como en toda la propuesta, los alumnos tienen libertad para construir sus propias estrategias, esta estrategia general para analizar situaciones con más de dos magnitudes será la que reciba un tratamiento específico en la institucionalización. En la Imagen IV - 5 se observan los consejos generales para abordar situaciones con más de dos magnitudes que se dan a los alumnos en el texto de apoyo elaborado en la propuesta.


Una estrategia que puedes seguir para resolver este tipo de problemas es realizar operaciones entre las cantidades de magnitud para intentar **convertir el problema en un problema de dos magnitudes.**

Deberás elegir dos de las magnitudes involucradas y operar con ellas para crear una nueva magnitud que sea directamente proporcional a la tercera magnitud que aparecía en el problema.

Para ello puede ser interesante pensar en alguna de las condiciones de regularidad que debe cumplir el problema. Esto te dará pistas sobre las operaciones que debes realizar para convertir el problema en uno con dos magnitudes.

De forma esquemática:

Imagen IV - 5. Extracto del texto de apoyo de 1º de ESO donde se presentan las situaciones de proporcionalidad compuesta.

Además del análisis, la estrategia de amalgamación deviene en una estrategia de resolución de problemas de valor perdido y de comparación ya que permite reducir el problema a uno en una situación simple y utilizar las estrategias de resolución propias de este tipo de situaciones. Esta estrategia general, no depende por tanto del tipo de problema, pero tampoco de la estructura multiplicativa concreta que tenga la situación de proporcionalidad compuesta. Un mayor número de magnitudes y el tipo de relaciones (directas o inversas) entre ellas simplemente implica un mayor número de etapas para concluir la amalgamación y el uso de diferentes operaciones binarias (cociente o producto).

En los problemas de valor perdido se promoverá que las magnitudes amalgamadas sean las variables independientes para que el problema de valor perdido traducido mantenga la misma variable dependiente.

En los problemas el énfasis recae en la interpretación de la pregunta en términos de la constante de proporcionalidad (al igual que en las situaciones simples).

IV.2.5. Repartos proporcionales

Para los problemas de repartos proporcionales, nos basamos en la idea de que en una situación de reparto proporcional se produce la comparación multiplicativa entre dos situaciones. En la primera situación cada individuo que participa en el reparto posee una cantidad de una cierta magnitud, a estas cantidades en función de la cuales se realiza el reparto es lo que también hemos denominado pesos. En la segunda situación se dispone de una cantidad de otra magnitud que se quiere repartir entre los individuos que participan en el reparto. La cantidad que se reparte a cada individuo debe responder a una comparación multiplicativa constante con las cantidades según las que se ha realizado el reparto. Nos encontramos ante dos posibilidades, el reparto puede reflejar la situación inicial o equilibrarla (compensarla multiplicativamente). El primer caso en el que se refleja la situación inicial recibe el nombre de reparto directamente proporcional y en el segundo caso diremos que el reparto es inversamente proporcional. Entendemos que el reparto refleja la situación inicial si las razones entre las cantidades recibidas por dos cualesquiera de los individuos involucrados en el reparto coinciden con las razones entre los pesos (cantidades de la magnitud inicial que tenían asignada). Por otra parte, el reparto equilibra o compensa la situación inicial si las razones entre las cantidades recibidas por dos cualesquiera de las personas implicadas en el reparto son las inversas de las razones entre los pesos.[46]

[46] Hemos elegido para presentar el tratamiento de los repartos proporcionales las mismas ideas que utiliza Oller-Marcén (2012, p. 157), expuestas también en los trabajos de Gairín y Oller-Marcén (2011, p. 188) y de Martínez *et al*. (2015, p. 465), ya que, estas ideas supusieron el punto de partida para el diseño del primer ciclo de investigación-acción de la propuesta de 2º de ESO. En los trabajos mencionados el tratamiento de los repartos proporcionales se basa en la comparación de las razones parte-parte en las situaciones inicial y final, de forma que un reparto directo las razones entre las cantidades asignadas a dos individuos son iguales en la situación inicial y final y en un reparto inverso se invierten dichas razones. Como daremos cuenta en detalle entre los capítulos VI y VIII el proceso de investigación-acción provocó que el equipo investigador realizara cambios en esta forma de abordar los repartos proporcionales. Así, se cambió la atención hacia las relaciones

La decisión de si un reparto debe reflejar o equilibrar la situación inicial es algo que el estudiante debe decidir según el contexto del problema. En nuestra propuesta apostamos por no introducir explícitamente el tipo de reparto que debe hacerse para dejar libertad a los estudiantes en el modelo de reparto utilizado. Un problema realista de reparto debe responder a una situación en el que el modelo de reparto surja de manera natural, si no, estaríamos ante un problema puramente matemático contextualizado.

Recordemos, que un problema de reparto proporcional, puede definirse de la siguiente manera: Dada una cantidad K de una magnitud M_2 y un conjunto de pesos o cantidades de una magnitud M_1, $w_1, w_2, \dots, w_p$ debemos encontrar una serie cantidades de la magnitud M_2, $k_1, k_2, \dots, k_p$, de forma que $k_1 + \cdots + k_p = K$ y para toda pareja de índices i, j se cumpla que: $k_i/k_j = w_i/w_j$ si el reparto es directamente proporcional o $\mathrm{k_i}/\mathrm{k_j} = \mathrm{w_j}/\mathrm{w_i}$ si el reparto es inversamente proporcional.

El proceso de resolución que proponemos, común para repartos directos e inversos, adaptado del trabajo de Oller-Marcén (2012, pp. 158-159), y que ya se presentó en el Capítulo II dentro del marco teórico, se puede esquematizar de la siguiente forma:

- En una primera etapa se debe decidir si el reparto debe reflejar o equilibrar la situación inicial, para saber si las razones entre las cantidades correspondientes a dos individuos en M_1 son las mismas o inversas a las correspondientes con las cantidades asignadas de M_2.
- En una segunda etapa se supone que a uno de los individuos le corresponde en el reparto la cantidad de $1\ u_2$ de M_2 y bajo esta suposición se calculan las cantidades, k_j^* de M_2 que, en este caso, le correspondería a cada uno de los demás individuos. Para ello, se compara a cada participante en el reparto con el individuo al que se ha repartido $1\ u_2$. Si el reparto es directo, al individuo j le corresponderán $k_j^* = w_j/w_1$ unidades de M_2 para que se refleje la razón inicial. Si el reparto es inverso le corresponderán $k_j^* = w_1/w_j$ unidades, para que se equilibre la situación inicial.
- Una tercera etapa opcional es la normalización de las cantidades a repartir de forma que estas sean enteras, multiplicando un valor adecuado.
- La siguiente etapa consiste en interpretar la suma $S = \sum k_j^*$ como la cantidad total de M_2 a repartir en el supuesto de que a cada participante se le hubiera entregado las cantidades k_j^* anteriores.
- Por último, como debemos repartir una cantidad total K, se utiliza que la razón K/S entre las cantidades totales a repartir debe ser la misma que las razones k_j/k_j^* formadas con las cantidades que recibe cada participante.

En el Capítulo II desarrollamos un ejemplo para este método en el caso directo, otro ejemplo de reparto directo con una estructura numérica más compleja puede consultarse en el trabajo de

parte-todo que suponen en los repartos directos una razón constante para todos los individuos y en los repartos inversos un producto constante para todos los individuos.

Oller-Marcén (2012, p. 159). Desarrollamos aquí un ejemplo de resolución de un reparto que podría considerarse inversamente proporcional.

Ejemplo: Una persona quiere dejar en herencia 78000 € a sus tres hijos. El primer hijo cobra aproximadamente 1000 € al mes, el segundo 2000 € y el tercero 1500 €. La herencia se quiere repartir de tal forma que se compense la diferencia de riqueza entre los tres hijos. ¿Cómo debería repartirse la herencia?

Solución:

En el reparto se quiere equilibrar o compensar la diferencia de riqueza que viene dada por el sueldo mensual. Podríamos pensar que el segundo hijo al ganar el doble que el primero debe recibir la mitad de herencia para equilibrar esa desventaja inicial. Es decir, vamos a realizar un reparto inversamente proporcional.

Vamos a pensar que al que más tiene (y por tanto recibirá menos), es decir el segundo, le repartimos 1 €. Como el segundo gana 2 euros por cada euro que gana el primer, el primero recibirá 2 euros por cada euro que gana el segundo, es decir, al primero le daríamos 2 €. Como el tercero gana $1500/2000 = 3/4$ € por cada euro que gana el segundo, el tercero recibirá, $4/3$ € por cada euro que gane el segundo. Es decir, si el segundo recibe 1 €, el primero recibirá 2 € y el tercero $4/3$ €.

Si realizamos el anterior reparto tres veces, obtendríamos que el primero recibiría 6 €, el segundo recibiría 3 € y el cuarto recibiría 4 €. Es decir, en un reparto de $6 + 3 + 4 = 13$ €, que buscase equilibrar la situación inicial, los participantes recibirían esas cantidades.

Como queremos repartir 78000 €, es decir, queremos hacer un reparto 78000/13=6000 veces mayor, cada participante recibirá las siguientes cantidades:

Primer hijo: $6 \cdot 6000 = 36000$ €.

Segundo hijo: $3 \cdot 6000 = 18000$ €.

Tercer hijo: $4 \cdot 6000 = 24000$ €.

IV.2.6. Porcentajes

El trabajo con los contenidos y conceptos relacionados con el porcentaje dentro de una secuencia de proporcionalidad aritmética puede abordarse como caso particular de relación de proporcionalidad simple. Aunque nuestro enfoque se centra en hacer explícita esta condición del porcentaje, dada la especificidad de este concepto desde un punto de vista cognitivo, creemos necesario tratar el porcentaje de forma separada, aunque interconectada, al resto de situaciones de proporcionalidad directa.

Nuestra propuesta incide especialmente en la interpretación del porcentaje en tareas contextualizadas como “tanto por ciento”, es decir, como una notación abreviada que codifica una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes y presenta una pareja de datos homólogos. A uno de estos datos es al que hace referencia el numeral del porcentaje y el otro es 100 (ver Imagen IV - 6). Es decir, un porcentaje p % que una cierta magnitud M_1 representa sobre la magnitud M_2, siendo estas magnitudes directamente proporcionales, codifica la pareja de datos relacionados $(p: 100)$.

En algunas situaciones, especialmente cuando las dos magnitudes son la misma, puede resultar interesante averiguar la cantidad de la primera magnitud que se corresponde con 100 unidades de la segunda. A esto se le llama porcentaje de la primera respecto de la segunda.

El porcentaje que una magnitud representa respecto de otra es la cantidad de la primera magnitud que se corresponde con 100 unidades de la segunda. Para representarlo se utiliza el símbolo % (que se lee "por ciento").

Imagen IV - 6. Extracto del texto de apoyo de 1º de ESO en el que se presenta la interpretación del porcentaje.

Así, el primer paso en nuestra propuesta al trabajar con porcentajes es interpretar el porcentaje como esa pareja de datos relacionados, identificando la magnitud a la que hace referencia el numeral y la magnitud que se usa como referencia para normalizar a 100 unidades.

Ejemplo: Interpreta el porcentaje que se presenta en la siguiente situación:

El 15 % *del volumen del refresco es zumo.*

Solución: En la situación anterior se presentan dos magnitudes “volumen de refresco” y “volumen de zumo”. La expresión anterior es una manera abreviada de expresar la siguiente situación:

Por cada 100 *unidades de volumen de refresco hay* 15 *unidades de volumen de zumo.*

Esta relación es de proporcionalidad simple directa si consideramos que se echa siempre la misma cantidad de zumo por cada unidad de volumen de refresco.

Junto con la interpretación de porcentaje como “tanto por ciento” se resalta que en el uso habitual del porcentaje se relacionan magnitudes homogéneas (ver Imagen IV - 6), por lo que es importante especificar concretamente el objeto sobre el que la magnitud nos da cuenta de una cierta propiedad cuantificable. En el ejemplo anterior, las dos magnitudes relacionadas son el volumen, por lo que es importante especificar que mientras una da cuenta del volumen de refresco, la otra lo hace del de zumo.

IV.2.6.1. Problemas de cálculo directo e inverso

Tras la traducción del porcentaje como situación de proporcionalidad directa que relaciona dos cantidades de magnitud aparece de forma natural el cálculo de las razones asociadas a una situación de porcentaje. Pensamos que es importante que los alumnos no asocien el concepto de porcentaje a una única razón por lo que se trabaja de forma simultánea en el cálculo y la interpretación de las razones inversas $p/100$ y $100/p$ asociadas a la expresión p %.

Ejemplo: *En un refresco sabemos que el* 15 % *del volumen es zumo. ¿Cuál es la razón entre el volumen de zumo y el de refresco? ¿Y la razón entre el volumen de refresco y el de zumo?*

Solución: Como hemos interpretado anteriormente, la expresión 15 % del enunciado indica que "por cada 100 unidades de volumen de refresco hay 15 unidades de volumen de zumo", por tanto:

Razón entre volumen de zumo y volumen de refresco: $\frac{15}{100} = \frac{3}{20} = 0{,}15$ unidades de zumo por cada unidad de volumen de refresco. La unidad anterior puede ser cualquiera, siempre que sea la misma en las dos magnitudes, por ejemplo, si es el centilitro, "hay $0{,}15$ cl de zumo por cada cl de refresco".

Razón entre volumen de refresco y volumen de zumo: $\frac{100}{15} = \frac{20}{3} = 6{,}66\ldots$ unidades de refresco por cada unidad de volumen de zumo. La unidad anterior puede ser cualquiera, siempre que sea la misma en las dos magnitudes, por ejemplo, si es el centilitro, "hay $20/3$ cl de refresco por cada cl de zumo".

Además del trabajo con magnitudes homogéneas, una de las particularidades del porcentaje es que suele presentarse dentro de estructuras aditivas parte-parte-todo, por lo que otra de las claves en estos primeros momentos del aprendizaje del porcentaje es distinguir las situaciones en las que puede calcularse el complementario de un porcentaje dado. Por ejemplo, si hacemos refresco mezclando agua y zumo, el porcentaje complementario del volumen de zumo será el volumen de agua. Sin embargo, si no sabemos (o sabemos positivamente) si se han mezclado más ingredientes líquidos no es posible calcular el porcentaje que representa el volumen de agua respecto al volumen de refresco solo con la información del porcentaje de zumo.

Creemos importante que los problemas asociados a porcentajes de Tipo I, Tipo II y Tipo III se presenten sin atender a esta calificación relacionándolos con los resueltos para situaciones generales de proporcionalidad simple. Sin embargo, sí secuenciamos su incorporación atendiendo a su relación con la interpretación del porcentaje, comenzando por los de Tipo II, cálculo del porcentaje que una cantidad de magnitud representa respecto de otra, y a su dificultad, tras los de Tipo II se presentan los de Tipo I, cálculo de la cantidad de una magnitud que representa un porcentaje dado respecto de otra. Así, en último lugar se introducen los de Tipo III, cálculo de la cantidad correspondiente a la magnitud que se usa como referente para normalizar a 100 un porcentaje dado. Su tratamiento, como hemos dicho, es totalmente equivalente al que reciben los problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa. En el siguiente ejemplo se muestra una resolución siguiendo estas ideas de un problema de valor perdido de Tipo III.

Ejemplo: En una botella de refresco se lee que el 18 % del contenido es zumo de limón. Sabiendo que en la botella hay $0{,}27$ litros de zumo de limón, ¿cuántos litros de refresco tiene la botella?

Solución: Que el $18\ \%$ del contenido del refresco sea zumo significa que hay 18 litros de zumo por cada 100 litros de refresco. Considerando que las magnitudes “volumen de zumo” y “volumen de refresco” son directamente proporcionales (CR: Siempre que por cada litro de refresco se echen los mismos litros de zumo), podemos calcular las dos razones asociadas

$\frac{18}{100} = \frac{9}{50}$ litros de zumo por cada litro de refresco.

$\frac{100}{18} = \frac{50}{9}$ litros de refresco por cada litro de zumo.

En este caso, como nos piden cuánto refresco hay si tenemos 0,27 litros de zumo, podemos resolver el problema usando la segunda razón que nos indica el refresco por cada litro de zumo:

$\frac{50}{9}$ litros de refresco por cada litro de zumo $\times$ $0{,}27$ litros de zumo $= \frac{50}{9} \times 0{,}27$ litros de refresco $=$ $1{,}5$ litros de refresco.

IV.2.6.2. Problemas de aumentos y disminuciones porcentuales

Para los aumentos y disminuciones porcentuales el tratamiento que damos en la propuesta es equivalente al explicado anteriormente con la particularidad de que en estas situaciones siempre encontramos una estructura aditiva parte-todo al considerar la magnitud inicial M_i, la magnitud que da cuenta del aumento, A, o disminución, D, y la magnitud tras el aumento o disminución, M_f.

$$M_i + A = M_f \qquad M_i - D = M_f$$

Así, si $p\ \%$ indica un aumento de p unidades por cada 100 unidades de M_i, pueden considerarse las siguientes seis razones:

$$\frac{p}{100}, \quad \frac{100}{p}, \quad \frac{100+p}{100}, \quad \frac{100}{100+p}, \quad \frac{100+p}{p}, \quad \frac{p}{100+p}.$$

Según se considere la relación entre M_i y A, entre M_i y M_f o entre A y M_f. En las situaciones de disminución tendríamos otras seis razones análogas a las anteriores cambiando el signo más por un signo menos. En nuestra propuesta, potenciamos el uso de la relación entre cantidades iniciales y finales (ver Imagen IV - 7).

Aumentar una cantidad de magnitud un p % significa que tenemos $100 + p$ unidades de la magnitud después del aumento por cada 100 unidades de la magnitud antes del aumento. Obteniendo así las razones:

$\frac{100+p}{100}$ unidades después por cada unidad antes del aumento.

$\frac{100}{100+p}$ unidades antes por cada unidad después del aumento.

Para las disminuciones podemos hacer un tratamiento totalmente similar.

Disminuir una cantidad de magnitud un p % significa que tenemos $100 - p$ unidades de la magnitud después de la disminución por cada 100 unidades de la magnitud antes de la disminución. Obteniendo así las razones:

$\frac{100-p}{100}$ unidades después por cada unidad antes de la disminución.

$\frac{100}{100-p}$ unidades antes por cada unidad después de la disminución.

Imagen IV - 7. Extracto del texto de apoyo de 2º de ESO sobre aumentos y disminuciones porcentuales.

Ejemplo: Un comerciante sube el precio de todos sus productos un 5 %. (A) ¿Cuál será el nuevo precio de algo que antes costaba 30 €? (B) Si con la subida un artículo cuesta 21 €, ¿cuánto costaba anteriormente?

Solución: Si sube un 5 % a todos los artículos, significa que por cada 100 € que vale un artículo antes de la subida (precio inicial), el artículo costará 105 € $(100 + 5)$ después de la subida (precio final).

Razón 1: $\frac{105}{100}$ euros del precio final por cada euro del precio inicial.

Razón 2: $\frac{100}{105}$ euros del precio inicial por cada euro del precio final.

(A) Para calcular el precio después de la subida, si al principio costaba 30 € podemos usar la primera razón que da cuenta del precio final por cada euro de precio inicial, así:

$\frac{105}{100} = 1{,}05$ € en el precio final por cada euro del precio inicial× 30 € de precio inicial $=$ 31,50 € costará después de la subida.

(B) Para esta pregunta puede ser más cómodo usar la razón 2 que nos dice cuántos euros costaba inicialmente por cada euro del precio final:

$\frac{100}{105}$ € de precio inicial por cada euro del precio final $\times$ 21 € de precio final $=$ 20 € costaba antes de la subida.

IV.3. Distribución de los contenidos por curso

La propuesta didáctica que presentamos en este trabajo abarca los dos primeros cursos de secundaria por lo que es necesario organizar los contenidos que se trabajan (ver Figura IV - 1) en estos dos cursos.

Como vimos en el Capítulo II, el currículo LOMCE no distribuye los contenidos por curso, sino que los presenta de forma agrupada para 1º y 2º. Desde ese punto de vista, nuestra propuesta de contenidos (Figura IV - 1) no rompe con lo propuesto en la legislación, aunque sí desarrolla y especifica los conceptos y contenidos a trabajar y los organiza por cursos (Figura IV - 2 y Figura IV - 7).

Por otro lado, la experimentación se ha realizado en un centro de secundaria de la Comunidad Autónoma de Aragón. En dicha comunidad el desarrollo autonómico del currículo[47] sí organiza los contenidos por curso y presenta los siguientes para el primer curso de secundaria:

- Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales.
- Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
- Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa.

Para el segundo curso de secundaria, los contenidos establecidos en el currículo son prácticamente idénticos, si bien se introducen los repartos proporcionales y se hace mención a la resolución de problemas con variaciones porcentuales (aunque ya se habían introducido los aumentos y disminuciones en el primer curso):

- Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales.
- Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
- Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.

Considerando este nivel de concreción curricular, nuestra propuesta no solo desarrolla y especifica los contenidos, sino que rompe con la anterior prescripción al postponer la proporcionalidad inversa, y los aumentos y disminuciones porcentuales al 2º curso de secundaria. La introducción de dichos conceptos en el segundo curso está motivada principalmente por los resultados y conclusiones que se obtuvieron en el trabajo de Oller-Marcén (2012) tras el primer ciclo de investigación-acción llevado a cabo con la propuesta. Además de en estos resultados

[47] ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Boletín Oficial de Aragón, nº 105, 2 de junio de 2016, Zaragoza, pp. 12640-13458.

empíricos, la decisión de posponer al segundo curso las relaciones de proporcionalidad inversa se basa en la especificidad y la mayor dificultad que diferentes autores atribuyen a las relaciones inversas en comparación con las directas (Fisher, 1988; Gairín & Oller-Marcén, 2011; Nunes *et al*., 2003; Vergnaud, 1983), que ya fueron comentados en el Capítulo II.

La segunda ruptura importante respecto a la tradición educativa en cuanto a la distribución de contenidos que se realiza en nuestra propuesta es el adelanto en la introducción de las relaciones de proporcionalidad compuesta. Si bien, este tipo de relaciones no aparecen explícitamente nombradas en los desarrollos curriculares, pueden entenderse como situaciones en las que intervienen relaciones directas e inversas entre magnitudes y, además, han recibido y siguen recibiendo actualmente atención en los libros de texto. Además, como indican algunos de los análisis de libros de texto presentados en el Capítulo II (Martínez-Juste *et al*., 2014; Martínez-Juste *et al*., 2015b; Martínez-Juste *et al*., 2017; Oller-Marcén, 2012) la proporcionalidad compuesta se introduce habitualmente en el segundo curso de secundaria. Proponemos introducir dicho contenido en primer curso trabajando estructuras funcionales que permitan una reducción a una estructura simple directa mediante amalgamación.

Los contenidos concretos organizados por focos de interés que se trabajan en el primer curso de secundaria pueden verse en la Figura IV - 7. En segundo de secundaria se abordan todos los contenidos de la propuesta (Figura IV - 2).

Además de las rupturas con la enseñanza tradicional y las prescripciones curriculares que hemos señalado anteriormente, en el primer curso se trabaja específicamente el Foco 0, o foco transversal, relacionado con las magnitudes y el vocabulario asociado.

Respecto al Foco 1, en el primer curso se trabajan todos los tipos de relaciones de proporcionalidad, pero no se introduce el nombre ni la caracterización específica para las relaciones inversas. Sin embargo, pensamos que es interesante que los alumnos se enfrenten al análisis de relaciones inversas desde primer curso para detectar la no existencia de una relación de proporcionalidad directa en ellas. En el segundo curso se nombran y caracterizan relaciones de proporcionalidad tanto directas como inversas.

Respecto a los focos 2 y 3, en 1º de ESO el trabajo se centra en el Foco 2, es decir, en los problemas asociados a situaciones de proporcionalidad simple directa, mientras que en segundo curso se trabajan con generalidad las relaciones simples.

Las relaciones de proporcionalidad compuesta y los problemas asociados que componen el Foco 4 se trabajan en ambos cursos. Como hemos dicho, en el primer curso solo se presentan estructuras multiplicativas compuestas que puedan ser reducidas mediante amalgamación a una situación simple directa. Por ejemplo, las estructuras del tipo $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = cte$ no se trabajan en primer curso. Además, para el primer curso, se restringe el número de magnitudes involucradas en la situación de proporcionalidad compuesta a tres.

El Foco 5, relativo a repartos proporcionales, se trabaja exclusivamente durante segundo curso.

Por último, los problemas asociados al concepto de porcentaje, Foco 6, se trabajan durante ambos cursos. Las situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales se trabajan durante la propuesta de segundo curso, dedicando un mayor esfuerzo en primero a la interpretación del porcentaje como tanto por cien.

FOCO 1: DETECCIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD

- Razón (externa) entre magnitudes: condición de regularidad; interpretación; cálculo; existencia de dos razones inversas; identificación.
- Relaciones de proporcionalidad simple directa.
- Magnitudes no relacionadas o relacionadas de forma no proporcional.

FOCO 2: PROBLEMAS EN SITUACIONES DE PROPORCIONALIDAD SIMPLE DIRECTA

- Valor perdido.
- Comparación cuantitativa.
- Comparación cualitativa.

FOCO 4: PROBLEMAS EN SITUACIONES DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

- Amalgamación de magnitudes en estructuras compuestas que dan lugar a relaciones simples directas.
- Constante de proporcionalidad.
- Problemas de valor perdido y de comparación cuantitativa.

FOCO 6: PORCENTAJES Y PROBLEMAS ASOCIADOS

- Interpretación.
- Razones asociadas a un porcentaje.
- Complemetarios.
- Problemas de Tipo I, Tipo II y Tipo III.

Figura IV - 7. Contenidos estructurados por focos que se abordan durante la propuesta en 1º de ESO.

IV.4. Metodología de enseñanza

Como dijimos en la primera sección de este capítulo (IV.1. Ideas clave que sustentan la propuesta didáctica) el método de enseñanza en el que se basa la propuesta es de enfoque constructivista centrado en el aprendizaje a través de la resolución de problemas. En esta sección concretamos dicho modelo con la descripción de los diferentes tipos de actividades que estructuran la propuesta didáctica.

En las sesiones de clase predomina el trabajo autónomo de los alumnos, generalmente en pequeño grupo, sobre problemas contextualizados. Durante la realización de este tipo de actividades el profesor-investigador observa a los alumnos para recoger información que pueda ser de utilidad sobre aspectos cognitivos. Las intervenciones del profesor-investigador en el desarrollo de estas actividades se reducen a resolver dudas concretas, y apoyar y dinamizar el trabajo autónomo. Las actividades enfocadas en los alumnos mediante las que se dirige su trabajo son de tres tipos:

- Situaciones introductorias, o situaciones iniciales.
- Actividades de clase para trabajar en pequeño grupo.
- Actividades individuales de refuerzo a realizar fuera del horario lectivo.

A este trabajo de los alumnos le siguen otros dos tipos de actividades. La primera de ellas con un enfoque mixto hacia la enseñanza y aprendizaje, basada en la comunicación de resultados y la argumentación a través de puestas en común de los resultados obtenidos. Los debates en gran grupo que se generan en estas puestas en común son dirigidos y animados por el profesor-investigador. Por último, en algunos momentos de la propuesta el profesor-investigador institucionaliza determinadas caracterizaciones o estrategias de resolución.

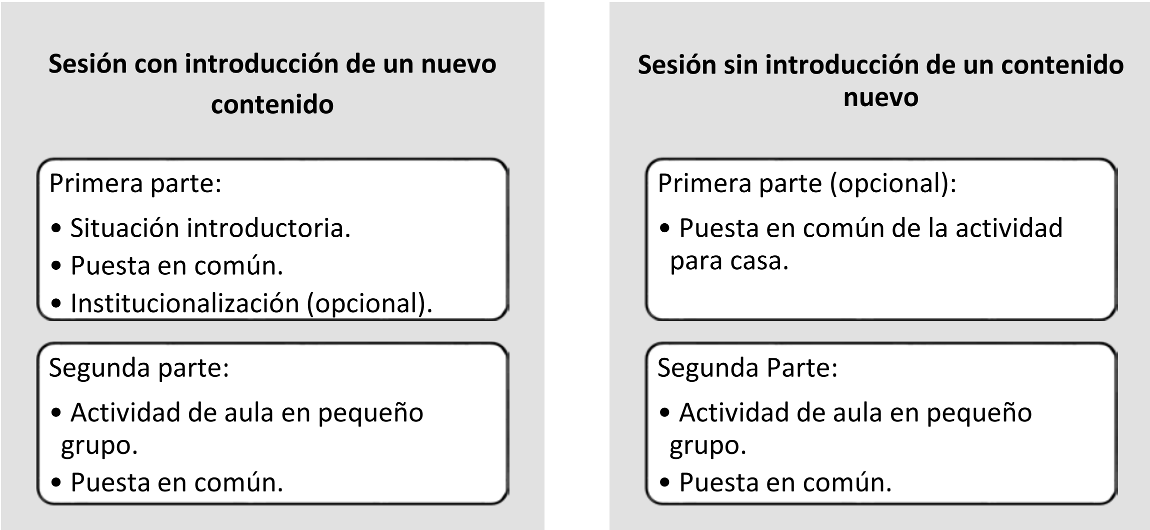


Figura IV - 8. Esquema de las estructuras habituales de las sesiones de clase.

Así, las sesiones de clase se organizan a través de los cinco tipos de actividades anteriores. Con pequeñas variaciones, la estructura de una sesión de clase responde a uno de los dos modelos siguientes: cuando durante la sesión debe comenzarse el trabajo con una de las ideas clave que articula la propuesta (Figura IV - 8, izquierda) los alumnos se enfrentan a una situación introductoria, tras lo cual, se realiza una puesta en común y se institucionalizan algunos conceptos o estrategias si es necesario; si en la sesión no se introduce un nuevo contenido (Figura IV - 8, derecha), esta se organiza en forma de taller de problemas, reservando un tiempo al final de la sesión para la puesta en común y, posiblemente, un tiempo al inicio de la misma para debatir la resolución de las actividades propuestas para casa.

Describimos a continuación con mayor detalle algunas de las características de estos cinco tipos de actividades.

IV.4.1. Las situaciones introductorias

Las situaciones introductorias suponen el punto de partida del enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas. En la propuesta didáctica diseñamos al menos una situación introductoria para cada foco de interés. En algunos focos de interés, como el de resolución de problemas de proporcionalidad simple directa en primero de ESO, se diseñaron varias situaciones introductorias para atender a los diferentes tipos de problemas.

Los alumnos se enfrentan a las situaciones introductorias sin haber recibido instrucción previa específica sobre el concepto que se quiere introducir (Burgos & Godino, 2019a). El objetivo de la actividad es que entre los alumnos surjan durante la resolución, al menos de manera informal, las ideas clave necesarias para construir el contenido matemático pretendido. Así, el profesor-investigador podrá generar un debate a partir las producciones de los alumnos para contrastar y formalizar las diferentes ideas surgidas en la resolución del problema y, posiblemente tras la posterior institucionalización, formalizar el nuevo contenido (Bingolbali & Bingolbali, 2019).

Para la selección de las actividades introductorias seleccionamos problemas realistas contextualizados. Estos problemas deben conjugar, al menos, las siguientes propiedades: deben tener un enfoque abierto de alta demanda cognitiva (Smith & Stein, 1998), que permita ser abordado con diferentes acercamientos (Brousseau, 2006); y además tener la suficiente especificidad para promover la aparición de las ideas fundamentales que pretendemos institucionalizar. Las situaciones introductorias se entregan a los alumnos mediante unas fichas que contienen su enunciado y un espacio para responder. Los alumnos las abordan trabajando en pequeño grupo para fomentar los debates entre ellos, y disponen de un tiempo limitado para su realización tras el cual se recoge una de las fichas del grupo y se realiza la puesta en común.

IV.4.2. Las actividades de clase

Tras la introducción de los contenidos principales a partir de las situaciones introductorias, los alumnos trabajan la resolución de problemas a través de los cuales se consolidan y desarrollan los nuevos conocimientos adquiridos. Como indican Bingolbali y Bingolbali (2019), en este momento el enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas coincide con el enfoque de la enseñanza para la resolución de problemas. Las clases se convierten así en talleres de problemas en los que los alumnos trabajan por parejas para fomentar los debates y el aprendizaje entre iguales.

Al igual que en las situaciones introductorias, nos decantamos por utilizar problemas realistas, es decir, no introducimos actividades puramente matemáticas a lo largo de la propuesta. Para la selección de los problemas que componen estas actividades de aula revisamos los diferentes aspectos y variables didácticas que influyen en la dificultad y en las estrategias de resolución que emplean los alumnos (Capítulo II). En concreto, se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

- Magnitudes involucradas: Se intenta presentar un abanico amplio de magnitudes diferentes. Además, se tiene en cuenta si las magnitudes son continuas o discretas y si son extensivas o intensivas.

- Relación de proporcionalidad existente: Presentando problemas en los que las magnitudes no tienen relación de proporcionalidad, tienen relación simple directa, simple inversa o están conectadas por una relación de proporcionalidad compuesta.
- Estructura funcional de la situación: Atiende tanto a la estructura multiplicativa como a la posible existencia de estructuras aditivas de tipo parte-parte-todo.
- Tipo de problema según la tarea matemática: Valor perdido o comparación (cualitativa o cuantitativa).
- Estructura numérica: Con especial atención a si las razones externas e internas son o no enteras.
- Interpretación de la constante de proporcionalidad: Se analiza cualitativamente la interpretación de la magnitud que da cuenta de la constancia de la relación funcional entre las magnitudes a partir de las operaciones que deben realizarse entre ellas para obtener dicha constante. En las situaciones de proporcionalidad compuesta se analizan también las amalgamaciones parciales.

Las actividades se concretan en fichas de trabajo con unas breves instrucciones y los enunciados de los problemas. Los problemas se ordenan dentro de las fichas de trabajo de forma creciente según la dificultad prevista. Los alumnos disponen de un tiempo limitado para su resolución tras el cual se recoge una de las fichas de trabajo del equipo y se procede a la puesta en común.

IV.4.3. Las actividades individuales de refuerzo

Siguiendo la metodología de implementación de la propuesta didáctica realizada por Oller-Marcén (2012) y la práctica habitual en las clases de matemáticas del centro donde se implementó la propuesta, se elaboraron fichas de problemas para que los alumnos las realizaran individualmente fuera del horario lectivo. Mediante estas actividades se refuerzan los contenidos de las sesiones de clase, pero no se introducen conceptos nuevos. Generalmente se plantean problemas de estructuras similares a las trabajadas en clase en donde puede variar el contexto pero que no introducen variaciones importantes de las variables didácticas respecto a los problemas planteados en las actividades de aula. De esta forma, las tareas escolares que los alumnos resuelven fuera del aula no suponen una profundización o avance en los contenidos trabajados en clase, para evitar que la realización de estas pueda suponer diferencias significativas entre los estudiantes. Además, en algunos momentos clave de la propuesta estas fichas contienen problemas que abarcan los contenidos trabajados hasta ese momento, de forma que su resolución y su posterior corrección pueda suponer para los alumnos un mecanismo de autoevaluación.

La resolución de los problemas que se plantean en estas actividades se pone en común al iniciar la siguiente sesión de clase. Así, en las sesiones previas a la introducción de los conceptos clave de la propuesta no se proponen actividades a realizar fuera del horario lectivo para reservar esa primera franja de la sesión a realizar la situación introductoria correspondiente.

IV.4.4. Los debates y puestas en común con el grupo clase

Además de su importancia como instrumento para la investigación cualitativa en los procesos de investigación-acción (Blázquez *et al*., 2005) que ya hemos destacado en el Capítulo III, los debates con el grupo clase son un elemento principal en la metodología de enseñanza que empleamos en la puesta en práctica de nuestra propuesta. La gestión de estos debates en los que los alumnos presentan sus resoluciones de los problemas planteados son determinantes para "promover la construcción del conocimiento matemático" (Arce *et al*., 2019, p. 116).

Diferentes autores proponen la estructuración de los debates con el grupo clase en etapas para promover un progreso en la comprensión de los contenidos matemáticos tras la resolución de problemas (Ferrer, Fortuny, & Morera, 2014; Smith & Stein, 1998). De forma previa al propio debate con el grupo clase es importante realizar una adecuada planificación. Así, la organización de los debates comienza con la propia planificación de la propuesta didáctica en la que, como hemos visto, prevemos diferentes estrategias de resolución, tanto correctas como incorrectas, y posibles dificultades que pueden surgir durante la resolución de problemas. Esta planificación previa a la sesión de clase se complementa con la observación durante el tiempo de trabajo autónomo de los alumnos en el que resuelven los problemas planteados en las situaciones introductorias y las actividades de clase. El profesor-investigador, además de resolver dudas concretas o plantear preguntas que puedan servir para que los alumnos reflexionen y puedan avanzar en sus soluciones, intenta detectar concepciones, diferentes estrategias empleadas, errores y dificultades que surgen en los pequeños grupos de trabajo. Esta información se obtiene a raíz de la lectura de las producciones de los alumnos o gracias a los debates que se generan en los grupos de trabajo.

Tras la finalización de la actividad de clase, comienza el debate para poner en común las soluciones encontradas y las estrategias empleadas por los diferentes equipos para obtenerlas. Esta puesta en común no se realiza de forma aleatoria, sino que el profesor-investigador dirige el debate seleccionando y secuenciando las intervenciones de los alumnos según la información recogida en la fase anterior. De esta manera, intentan evitarse duplicidades en las intervenciones de los alumnos para abarcar todo el abanico de estrategias surgido y validar las soluciones y estrategias correctas que aparezcan. La presentación de las diferentes producciones de los alumnos sirve para conectar distintos modos de abordar el problema basándose en diferentes argumentos y en ocasiones en diferentes conceptos, y vincular estas producciones a las ideas matemáticas que se quieren presentar.

El proceso anterior cobra especial importancia en los debates que se generan tras la resolución de las diferentes situaciones introductorias, cuyo principal objetivo es la construcción de un nuevo contenido matemático. Pero, además de para la puesta en común de las situaciones introductorias, estos debates los realizamos para la corrección de las actividades de clase y de las actividades que los alumnos realizan como tarea para casa.

IV.4.5. Los momentos de institucionalización

Asumimos el término ‘institucionalización’ o ‘situación de institucionalización’ proveniente de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 2006) para designar a aquellas situaciones “en las que el docente interviene para terminar de perfilar los avances y atribuir a los conocimientos construidos el estatus de conocimiento o de saber matemático perteneciente a la cultura matemática.” (Arce *et al*., 2019).

En nuestra propuesta se intenta minimizar estos momentos de institucionalización. En el diseño reservamos espacio para este tipo de situaciones al finalizar los debates creados tras la resolución de las situaciones introductorias. Si bien, es previsible la necesidad de que el profesor-investigador realice alguna intervención extraordinaria a lo largo de la propuesta en momentos críticos no planificados inicialmente.

Debemos destacar también que la institucionalización de diferentes estrategias de resolución a la que nos referimos a lo largo de la propuesta no pretende convertir dichas estrategias en el único referente procedimental que deben usar los alumnos en la resolución de problemas. El docente destacará determinadas estrategias de resolución con el fin de dotar a los alumnos de instrumentos que les permitan aumentar su rendimiento y avanzar en los aprendizajes. Sin embargo, nuestra propuesta se basa en que la adecuada comprensión de algunos conceptos básicos asociados a las estructuras multiplicativas promueve la capacidad de análisis y resolución de situaciones problemáticas más o menos complejas de proporcionalidad. Por tanto, la instrucción no se centra en la adquisición de técnicas específicas para la resolución de los distintos tipos de problemas. Así, si la puesta en común mediante el debate con el grupo clase ha sido lo suficientemente rica como para que aparezcan los conceptos fundamentales pretendidos, no se producirá una formalización posterior de dichos conceptos.

Capítulo V:
Segundo ciclo de investigación-acción en 1º de ESO

Mas no apresures en nada tu viaje.

Mejor que dure muchos, muchos años,

...

Comenzamos en este capítulo el relato histórico de los resultados de la planificación, acción, observación y reflexión, obtenidos en cada una de las etapas de nuestra investigación. La estructura de este capítulo (y la de los cuatro siguientes) obedece a las cuatro fases en las que se estructura la metodología de investigación-acción. En este capítulo se presta especial atención al propósito y análisis de los problemas diseñados. Algunos de estos problemas se utilizarán en la implementación en 2º de ESO y la mayoría volverán a aparecer en la siguiente implementación en 1º de ESO, por lo que el detalle dedicado al diseño en los siguientes capítulos será menor. El diseño curricular presentado en la primera sección de este capítulo es, por tanto, uno de los resultados de este trabajo, y supone una parte importante del Objetivo I de investigación. Este objetivo se completará en el capítulo siguiente con el diseño para 2º de ESO y con las valoraciones y modificaciones al diseño que haremos a lo largo de la memoria tras las distintas fases de reflexión. Una vez presentado el diseño de la propuesta, daremos cuenta de la implementación realizada en este ciclo y analizaremos dicha implementación según lo descrito en el Capítulo III. El capítulo concluye con una síntesis crítica de estos resultados parciales.

V.1. Fase de planificación

Este ciclo de investigación-acción, a pesar de ser el primero realizado para la experimentación de este proyecto de tesis doctoral, no supone la primera implementación con las ideas en las que se basa la propuesta didáctica, ya que en el trabajo de Oller-Marcén (2012) se realizó un primer ciclo exploratorio. Las profundas reflexiones sobre necesidades de cambio realizadas por el autor, el cambio de centro educativo y, sobre todo, de profesor-investigador, han generado modificaciones importantes, no tanto en las ideas generales de la propuesta, como en la implementación concreta en primero de secundaria. Estas modificaciones, incluyen el diseño de muchas de las actividades propuestas. Así, en esta sección, explicitaremos las decisiones de cambio y mejora planteadas y cómo estas se ven reflejadas en la secuenciación y temporalización de los contenidos. Daremos el detalle del diseño curricular de cada sesión de clase, presentando los distintos tipos de actividades y analizando el propósito y valor de las variables didácticas de cada uno de los problemas que se plantean. Por último, realizaremos este mismo análisis para la prueba escrita que se plantea a los alumnos al finalizar la implementación.

V.1.1. Decisiones tomadas tras la observación del primer ciclo

A partir de las reflexiones que se realizaron tras el ciclo exploratorio que presentamos en el Capítulo II (ver sección II.4.3. Experiencia previa con la propuesta didáctica), se han tomado las siguientes decisiones encaminadas a mejorar la propuesta didáctica.

V.1.1.1. Cambios en el diseño

Los focos prioritarios de contenido se rediseñan para atender a la introducción de la proporcionalidad compuesta y de los repartos proporcionales (en 1º de ESO no entra en juego el foco de contenido relacionado con los repartos) y para prestar una mayor atención al porcentaje.

Se eliminan los contenidos de proporcionalidad inversa de 1º de ESO (que se posponen a 2º de ESO) y se introducen problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta con estructura $\mathbb{p} = (-1, -1, 1)$.

Incorporamos también a la propuesta los problemas de comparación cualitativa para trabajar los tres tipos de problemas propuestos por Cramer y Post (1993).

Se baja el número de apartados y problemas contenidos en las fichas de ejercicios, pero se aumenta el número de fichas de trabajo de aula (de 8 a 11), el número de fichas de trabajo para casa (de 7 a 8) y el número de sesiones de clase dedicadas a la propuesta (de 11 a 12). El número de sesiones específicamente dedicado al concepto de razón, condición de regularidad y problemas de proporcionalidad simple directa sube de 5 a 7 sesiones. Además, aumentamos de uno a dos el número de sesiones dedicadas al porcentaje.

En nuestra propuesta incorporamos algunos enunciados textuales de la propuesta de Oller-Marcén (2012) y algún problema clásico de comparación cualitativa (Cramer & Post, 1993). Sin embargo, la mayor parte de los enunciados han sido reelaborados.

V.1.1.2. Cambios sobre aspectos cognitivos

El trabajo con la proporcionalidad inversa requiere que el alumnado sea capaz, por un lado, de dotar de significado al producto de medidas que generan las magnitudes involucradas y, por otro, de razonar sobre su constancia y la relación de isomorfía entre cada una de las magnitudes iniciales y la razón entre la magnitud producto y la otra magnitud. Este trabajo está alejado de la caracterización para la proporcionalidad simple directa y conlleva más dificultades. Por esta razón, proponemos abordar dicho trabajo en el segundo curso. Esta decisión de posponer la introducción de la proporcionalidad inversa no obedece al objetivo de postergarla, sino de proporcionar oportunidades de aprendizaje adecuadas en el primer curso para poder abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad inversa con éxito en el segundo. Así, en primero se introducen situaciones de proporcionalidad compuesta que, a priori, pudieran parecer de mayor complejidad que las inversas. Sin embargo, solo introducimos situaciones con estructura $\mathbb{p} = (-1,-1,1)$. De este modo, por un lado, los problemas de valor perdido que introducimos propondrán la incógnita en la tercera magnitud, por lo que la relación de la variable dependiente con las independientes es directa, es decir, son problemas de tipo Directa-Directa. Por otro lado, la amalgamación de cualquier pareja de magnitudes simplifica el problema hasta uno de proporcionalidad simple directa (ver Figura V - 1), independientemente de que se amalgame por producto o por cociente e independientemente de que el problema sea de valor perdido o de comparación.

$$\frac{M_3}{M_1 \cdot M_2} = cte \longrightarrow \frac{M_3}{M_1 \cdot M_2} = cte \longrightarrow \frac{A_1}{M_2} = cte$$

$$\frac{M_3}{M_1 \cdot M_2} = cte \longrightarrow \frac{M_3}{M_1 \cdot M_2} = cte \longrightarrow \frac{A_2}{M_1} = cte$$

$$\frac{M_3}{M_1 \cdot M_2} = cte \longrightarrow \frac{M_3}{M_1 \cdot M_2} = cte \longrightarrow \frac{M_3}{A_3} = cte$$

Figura V - 1. Esquema de posibles amalgamaciones en una estructura compuesta $\mathbb{p} = (-1,-1,1)$.

Los alumnos se acercan al producto de medidas mediante amalgamación por producto, que es la estrategia que elegimos para la institucionalización, y tienen las herramientas para calcular razones externas que les permiten resolver el problema. Este primer contacto con la amalgamación por producto, es decir, con un problema de producto de medidas en el sentido dado por Vergnaud (1983), es una primera etapa para poder abordar posteriormente las relaciones inversas. Sin embargo, en esta situación no es necesario argumentar sobre la constancia del producto y la relación de isomorfía entre cocientes del producto con una de las magnitudes factor y la otra magnitud factor.

Además, los alumnos tienen otro acercamiento informal a las situaciones de proporcionalidad inversa. En las actividades de análisis de relaciones de proporcionalidad entre magnitudes, se mezclan situaciones directamente proporcionales, con situaciones inversamente proporcionales o con magnitudes con otros tipos de relaciones no proporcionales o sin relación.

Los alumnos pueden contrastar así entre relaciones directas e inversas, aunque no se hayan mencionado explícitamente las inversas, lo que les da la oportunidad de argumentar por qué una situación inversa no es de proporcionalidad directa (Singh, 2000a).

La incorporación de los problemas de comparación cualitativa permite trabajar y evaluar aspectos del razonamiento proporcional que no se habían trabajado en la experimentación previa.

Además de la previsión de dificultades y posibles estrategias de resolución (correctas e incorrectas) para los nuevos contenidos incorporados, se han completado y refinado estos análisis respecto al ciclo de Oller-Marcén (2012) para el resto de contenidos.

V.1.1.3. Cambios en la metodología de aula y de investigación

Respecto a la implementación experimental de la propuesta, incorporamos varios elementos metodológicos que pretenden aumentar la fiabilidad y validación de los resultados de investigación. Por un lado, grabamos las sesiones en video para que sean analizadas por expertos externos. Por otro, realizamos entrevistas semiestructuradas a determinados alumnos. Por último, añadimos la comparación con un grupo de control.

En cuanto a la instrucción, eliminamos el trabajo con material manipulativo que, como sugiere Oller-Marcén (2012), resultó de poca utilidad para la introducción del concepto de razón.

Se refuerza el modelo de enseñanza a través de la resolución de problemas con la incorporación de un mayor número de situaciones introductorias para presentar los diferentes contenidos. Se diseñan situaciones introductorias para el concepto de magnitud, razón y condición de regularidad, problemas de comparación cuantitativa, problemas de comparación cualitativa, problemas de valor perdido, problemas de proporcionalidad compuesta y cálculo inverso con porcentajes (problemas de Tipo III).

V.1.2. Secuenciación y temporalización

La propuesta de enseñanza para la proporcionalidad aritmética en 1º de ESO en este segundo ciclo de investigación-acción se estructura en 12 sesiones (ver Tabla V - 1). Se comienza por una sesión introductoria de repaso sobre el concepto de magnitud, uso del vocabulario y conceptos relacionados. Las dos siguientes sesiones se dedican a introducir el concepto de razón entre dos magnitudes como tanto por uno y las condiciones que deben suponerse en la relación entre las magnitudes involucradas para que su cálculo tenga sentido. En las cuatro siguientes sesiones se trabajan los tres tipos de problemas de proporcionalidad simple directa y en la octava sesión se presentan las situaciones de proporcionalidad compuesta. Tras esto, se abordan los conceptos y problemas relacionados con el porcentaje. Se finaliza la propuesta con una sesión de repaso y una prueba escrita individual.

Todas las sesiones fueron de 50 minutos, y las actividades se iban entregando en diferentes etapas a lo largo de la sesión para lo que se elaboraron fichas de trabajo. Estas son principalmente de dos tipos, fichas de trabajo en el aula (se trabaja por parejas) y fichas de trabajo para casa (se realizan de forma individual y fuera del horario lectivo). Las fichas se han codificado con los siguientes patrones:

- F$i.j$: Ficha de trabajo en el aula entregada en el orden j durante la sesión i-ésima.
- TCi: Ficha de trabajo para casa entregada al finalizar la sesión i-ésima.

	Breve descripción de los contenidos	**Fichas de trabajo**
Sesión 1	Concepto de magnitud y vocabulario asociado.	F1.1, F1.2, TC1
Sesión 2	Razones como tanto por uno. Condiciones de regularidad.	F2.1, F2.2, TC2
Sesión 3	Magnitudes directamente proporcionales.	F3.1, TC3
Sesión 4	Problemas de comparación (I).	F4.1, F4.2, TC4
Sesión 5	Problemas de comparación (II).	F5.1
Sesión 6	Problemas de valor perdido (I).	F6.1, F6.2, TC6
Sesión 7	Problemas de valor perdido (II).	F7.1
Sesión 8	Situaciones de proporcionalidad compuesta.	F8.1, F8.2, F8.3, TC8
Sesión 9	Porcentaje como tanto por cien. Cálculo directo.	F9.1, TC9
Sesión 10	Cálculo directo e inverso con porcentajes.	F10.1, F10.2, TC10
Sesión 11	Repaso de la unidad.	F11.1
Sesión 12	Prueba escrita.	PE

Tabla V - 1. Secuencia temporal de la propuesta para 1º de ESO (Ciclo II-1).

Las fichas de trabajo en el aula presentan, bien situaciones para introducir los conceptos a través de la resolución de problemas para los que los alumnos no han recibido instrucción, bien problemas de consolidación posteriores a la puesta en común e institucionalización realizada tras una situación introductoria. Las tareas para casa son, en general, ejercicios de refuerzo.

Para codificar los problemas se ha añadido al código anterior el ordinal correspondiente a cada problema dentro de la ficha en la que se encuentra. En el caso de problemas con diferentes apartados se añaden, al código anterior, los ordinales correspondientes.

V.1.3. Diseño curricular de las sesiones de clase

V.1.3.1. Primera sesión: Magnitudes

En esta primera sesión se trabaja el concepto de magnitud y el vocabulario asociado a los procesos de medida de una magnitud como unidad de medida, cantidad de magnitud y valor numérico asociado a una cantidad de magnitud respecto a una unidad de medida.

Se introduce la cardinalidad como una magnitud discreta, por lo que se trabajan los diferentes significados que puede adquirir un número (cardinal, ordinal, identificador, …). Durante la institucionalización se repasan las magnitudes más habituales para los alumnos de secundaria.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla V - 2.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Introducir el concepto de magnitud y el vocabulario asociado. • Distinguir magnitudes de propiedades no medibles. • Identificar la necesidad de la unidad de medida. • Asociar la cantidad a la unidad de medida utilizada. • Conocer los diferentes significados de un número e identificarlos.	• Propiedades medibles y no medibles. • Cantidad de magnitud. • Valor numérico de una cantidad de magnitud. • Unidades de medida. • Magnitudes habituales. • Cardinalidad como magnitud. • Números como cantidades de magnitud, como ordinales y como identificadores.

Tabla V - 2. Objetivos didácticos y contenidos de la primera sesión (Ciclo II-1).

Esquema de la sesión:

- La sesión comienza con una situación introductoria sobre el concepto de magnitud, cantidad de magnitud, unidad y valor de una cantidad de magnitud. (Trabajo en parejas, F1.1, 20 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F1.1. Se institucionaliza el significado de magnitud y su vocabulario asociado. A partir de las intervenciones de los alumnos se repasan las magnitudes más habituales. (10 min)
- Se realiza F1.2 en trabajo por parejas. Actividad para distinguir expresiones numéricas referidas a cantidades de magnitud y otros usos de las expresiones numéricas. (15 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F1.2. (5 min)
- Entrega de TC1, que deben realizar los alumnos de forma individual, fuera del horario lectivo para la siguiente sesión. Se presentan diferentes contextos en los que aparecen cantidades numéricas, algunas referidas a una cantidad de magnitud y otras no. Los alumnos deben identificar las magnitudes que aparecen en el contexto e identificar la unidad en la que se mide.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de esta sesión pertenecen a dos fichas de trabajo en el aula, F1.1 y F1.2, que se reparten en momentos diferentes de la sesión, y una ficha de trabajo para casa, TC1. Analizamos individualmente cada uno de los ejercicios propuestos.

En la actividad introductoria F1.1 se presentan situaciones de comparación y cuantificación de propiedades de los objetos. Algunas de las propiedades a las que se hace referencia son medibles y otras no. Se busca que los alumnos discutan sobre la posibilidad de comparar y cuantificar la presencia de estas propiedades en dos objetos. Se espera que a partir de la situación introductoria aparezcan definiciones informales de magnitud, cantidad de magnitud, valor de una cantidad de magnitud y unidad de medida.

Lee con tu compañero las siguientes preguntas, examina el material que se te entrega y contesta razonadamente en esta misma ficha.
F1.1.1: *¿Quién es más alegre de los dos? ¿Cuánto más?* **F1.1.2:** *¿Quién pesa más de los dos? ¿Cuánto más?* **F1.1.3:** *Tenéis dos tiras de papel encima de la mesa, ¿cuál es más larga? ¿Cuánto más?* **F1.1.4:** *¿A quién le gusta más el jamón? ¿Cuánto más?* **F1.1.5:** *¿Quién tiene más hermanos? ¿Cuántos más?* **F1.1.6:** *Tenéis dos sobres con dinero (falso ☹) encima de la mesa, ¿en qué sobre hay más dinero? ¿Cuánto más?*

Para contestar a dos de las cuestiones se entrega el material que puede verse en la Imagen V - 1. En la pregunta F.1.1.3 los alumnos tienen que comparar y decir qué diferencia de longitud hay entre dos tiras de papel que se les entrega (Imagen V - 1, derecha). Se espera que entre las parejas surjan mediciones con unidades arbitrarias y antropométricas que provoquen respuestas numéricas diferentes para una misma longitud. En la pregunta F1.1.6 aparece la situación contraria. se entregan dos sobres con billetes de juguete (Imagen V - 1, izquierda), unos representan billetes de Euro y otros billetes de Libra. En los dos sobres hay la misma cantidad numérica pero referenciada a unidades diferentes, los alumnos deben debatir sobre si hay la misma cantidad de dinero en ambos sobres.

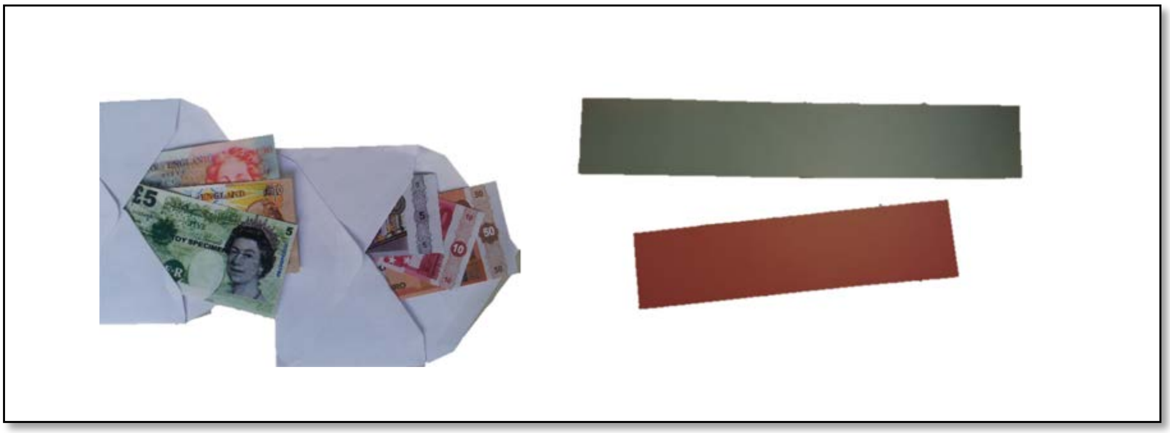


Imagen V - 1. Materiales para la actividad de aula F1.1.

En la segunda ficha de trabajo, los alumnos deben diferenciar en una factura de teléfono móvil (Imagen V - 2) números que expresan una cantidad de magnitud y números que no expresan una cantidad de magnitud. Para los números que no expresan una cantidad de magnitud (por ejemplo, el DNI o el número de cuenta bancaria) deben expresar el uso que se le da a esa expresión numérica.

F1.2.1: *Encontrad números en esta factura que se utilicen para medir y explicad qué miden.*
F1.2.2: *Encontrad números en esta factura que NO se utilicen para medir y explicad para qué se utilizan.*

Nº de factura:	CI0550349146
Nº de cuenta Vodafone:	914310719
NIF:	*****915T
Fecha de emisión:	26/01/2012
Lugar de emisión:	Madrid
Forma de pago:	Domiciliación bancaria
Entidad bancaria:	CAJA DE AHORROS Y M.P. DE GIPU
Nº de cuenta:	******7380
Fecha de vencimiento:	06/02/2012

Alfredo López Gracias

Paseo Extremadura, 5 2A

50345 Calatayud, España

Periodo de facturación: 26/12/2011 al 25/01/2012

Total (base imponible 18%)	76,37
IVA (18%)	13,75
Total factura	**90,12**
Total a pagar	**90,12€**

Resumen de factura:

Líneas	Plan de Precios	Total: 76,3740€
645205365	T.Plana Live! Conexión	36,3180
976911361	T.Plana Live! Conexión	40,0560
663181606	Módem USB	0,0000

Resumen: 645205365 **T.Plana Live! Conexión** **Total: 36,3180€**

Cuotas	Total: 0,0000€

Consumos			Total: 36,3180€
Voz	**Nº Llam.**	**Duración**	**26,7180€**
Móvil Vodafone	33	128:26	11,5170
Fijo	6	15:50	2,0940
Móvil no Vodafone	8	59:50	13,1070

Mensajes	Nº Men.	Vol. (Kb)	9,6000€
SMS Vodafone	29		4,3500
SMS no Vodafone	15		2,2500
MMS Vodafone	3	109	3,0000

Imagen V - 2. Factura telefónica modificada para la actividad de aula F1.2.

En la tarea para casa se presentan cuatro contextos que los alumnos deben analizar. No se espera una respuesta numérica sino un análisis de las magnitudes que aparecen, los valores que toman las cantidades de magnitud y en qué unidad vienen expresadas. Junto a cantidades numéricas asociadas a magnitudes, se introducen expresiones numéricas como el ordinal de la planta de un edificio en la situación TC1.3, que no aparecen con el significado de cantidad de magnitud. Esta tarea supone un análisis previo al de relaciones entre magnitudes que abordaremos en la siguiente sesión.

Encuentra las magnitudes de las que se habla en las siguientes situaciones. Para cada magnitud que encuentres escribe la cantidad que aparece y la unidad utilizada:

TC1.1: *En 4 horas limpió 37 cristales.*
TC1.2: *Laura tiene 10 años y tiene una estatura de 120 cm.*
TC1.3: *En la planta 5 hay ingresados 28 enfermos.*
TC1.4: *Al comprar 3 botellas de refresco me regalaron 2 camisetas.*
TC1.5: *Por 125 dólares me han dado 155 euros*
TC1.6: *Leyendo 2 horas al día tardo 7 días en terminar un libro.*

V.1.3.2. Segunda sesión: Razón entre magnitudes

Tras el trabajo genérico sobre el concepto de magnitud se introduce el concepto de razón entre magnitudes. Se presenta al alumno una situación introductoria sin institucionalización previa. Se espera que surjan de forma natural los conceptos de razón como tanto por uno, condición de regularidad y existencia de dos razones, una inversa de la otra.

La razón y los conceptos asociados se institucionalizarán aludiendo al significado de reparto igualitario, tanto para interpretar la razón en representación fraccionaria, como para interpretarla como número decimal obtenido tras un algoritmo de cálculo. Por tanto, se hará énfasis en la necesidad de que sea razonable que "a cada unidad de la magnitud cociente le correspondan siempre la misma cantidad de la magnitud repartida". Dicho argumento se constituirá como condición de regularidad.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla V - 3.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Calcular las razones externas asociadas a una situación de proporcionalidad. • Interpretar las razones como tanto por uno asociándolas al resultado de un reparto igualitario. • Identificar condiciones de regularidad necesarias para el cálculo de una razón. • Reconocer en qué situaciones puede o no calcularse una razón entre las magnitudes involucradas.	• Razones externas. • Razón inversa. • Condición de regularidad. • Magnitudes y vocabulario asociado.

Tabla V - 3. Objetivos didácticos y contenidos de la segunda sesión (Ciclo II-1).

Esquema de la sesión:

- En un primer momento se recoge la ficha de trabajo para casa TC1 (Identificación de magnitudes en contextos) y se debate con el grupo la solución. (5 min)
- Se reparte la situación introductoria (Ficha 2.1) para que la trabajen en parejas. Con ella se trabaja el concepto de razón, la posibilidad de establecer la razón entre magnitudes dependiendo de la existencia de relación entre las mismas, la necesidad de exigir condiciones

de regularidad para que cobre sentido el cálculo de la razón y la existencia de dos razones (inversas). (15 min)

- Tras la resolución, en la puesta en común, se institucionaliza el concepto de razón, asociándolo con el significado de la división/fracción como reparto. Se expone la necesidad de introducir condiciones de regularidad para que tenga sentido el cálculo de la razón. (10 min)
- Se realizan los problemas de consolidación de F2.2. En estos problemas el alumno debe analizar un contexto en el que intervienen varias magnitudes, detectar la posibilidad de calcular la razón entre ellas y establecer las condiciones de regularidad necesarias para que dicha razón cobre sentido. (15 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F2.2. (5 min)
- Reparto de TC2 para reforzar el mismo tipo de problemas presentado en F2.2. En esta ficha se utilizan los mismos contextos en los que tuvieron que analizar las magnitudes involucradas en TC1.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de esta sesión pertenecen a dos fichas de trabajo en el aula, F2.1 y F2.2, que se reparten en momentos diferentes de la sesión, y una ficha de trabajo para casa, TC2. Analizamos individualmente cada uno de los ejercicios propuestos.

Para la situación introductoria, F2.1, se ha elegido una situación de compraventa por tratarse de un contexto donde surgen de forma natural las ideas de proporcionalidad directa exigiendo constante el precio unitario. El enunciado de la actividad introductoria es deliberadamente ambiguo para provocar que surja en los alumnos la necesidad de imponer mayor exigencia al enunciado para poder calcular lo que se solicita y aprovechar esto para introducir el concepto de condición de regularidad.

F2.1.1: *Hemos ido de compras al supermercado y hemos comprado 30 productos y nos han cobrado 15 € ¿Cuánto cuesta 1 producto? ¿Cuántos productos puedo comprar con 1 €?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Valor económico (€). Extensiva, discreta. B: Cantidad de productos. Extensiva, discreta.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, coste unitario de los productos.	**Estructura numérica:** $(15:30)$
Razones externas: Enteras (k entera previo cambio a céntimos) $k = 0{,}50$ €/producto $=$ 50 cént./producto. $k^{-1} = 2$ productos/€.	

El enunciado ambiguo busca que aparezca la necesidad de solicitar condiciones de regularidad a la situación para que tenga sentido realizar un "reparto" entre las magnitudes y asociar así la cantidad de una de las magnitudes que le corresponde a cada unidad de la otra. Parece razonable pensar que en una compra de un supermercado los productos que se adquieren no tengan el mismo valor. Se espera que surja de forma natural esta consideración en algunas de las parejas de alumnos. La estructura numérica es sencilla para no obstaculizar los procesos de cálculo e interpretación de las razones.

En la segunda parte de la situación introductoria se trabaja un contexto muy similar al anterior, pero introduciendo el ordinal del día en el enunciado como falso dato. Se pretende que los alumnos reflexionen sobre la necesidad de analizar las situaciones para determinar si realmente disponemos de magnitudes en las que tenga sentido calcular la razón. Se persigue generar un debate sobre las posibles causas por las que en una situación en la que se presentan dos datos numéricos no tenga sentido calcular la razón entre ellos.

F2.1.2: *Unos amigos fueron al supermercado el día 30 y les cobraron 15 € ¿Cuánto hubieran pagado el día 1? ¿En qué día se paga 1€?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes

Las situaciones tras la institucionalización se han ordenado de forma creciente atendiendo a la posible dificultad para interpretar las razones asociadas. Se alternan situaciones que no son de proporcionalidad directa para que los alumnos trabajen la necesidad de establecer y evaluar las condiciones de regularidad necesarias para el cálculo de las razones.

Se comienza por la situación F2.2.1 en la que una de las razones admite expresión entera y tiene interpretación de velocidad, con una magnitud discreta en el denominador. Además, se propone una estructura numérica de forma que la razón inversa también admita expresión entera si se realiza un cambio de unidades (entre horas y minutos).

F2.2.1: *Un pintor hace 28 retratos en 7 horas.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de retratos pintados. Extensiva, discreta. B: Tiempo (h). Extensiva, continua.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, velocidad a la que se pinta (cantidad de retratos por unidad de tiempo).	**Estructura numérica:** $(28{:}\,7)$
Razones externas: Enteras (k^{-1} previo cambio de unidades a minutos). k: Entera. 4 retratos/h. k^{-1}: Entera tras cambio de unidad. 1/4 h/retrato = 15 min/retrato.	

Se sigue con una situación, F2.2.2, en la que ambas magnitudes son continuas y la obtención de razones no enteras puede causar menos problemas de interpretación a los alumnos. Como se observará en muchas situaciones a lo largo de la propuesta, se eligen valores numéricos enteros cuyos únicos divisores primos son 2 y 5 para que el cálculo de expresiones decimales no sea un obstáculo para los alumnos.

F2.2.2: *Para hacer arroz con leche, se mezclan 2kg de arroz con 5 litros de leche.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Volumen de leche (l). Extensiva, continua. B: Masa de arroz (kg). Extensiva, continua.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, volumen de leche por unidad de masa de arroz.	**Estructura numérica:** $(2:5)$
Razones externas: No enteras (ambas admiten expresión decimal exacta)	

La situación F2.2.3 es análoga a la presentada en la situación introductoria F1.1.2, el dato correspondiente al año no debería considerarse como asociado a una magnitud sino, como un ordinal. Por tanto, no cabría plantearse la existencia de ninguna razón entre magnitudes. Aunque los alumnos pudieran interpretar el año como una magnitud temporal que mida el intervalo temporal entre dos momentos, el establecimiento de alguna condición de regularidad debe llevar a rechazar las mismas por carecer de sentido.

F2.2.3: *En el año 2000 había 6.000 millones de personas en el mundo.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes

La siguiente situación contiene una magnitud discreta de cardinalidad y otra magnitud continua de forma que las razones no son enteras. Se espera mayor dificultad a la hora de interpretar el cociente discreta/continua que su inverso. En concreto, en la situación F2.2.4aparece la magnitud “número de personas” de forma que el valor de la razón externa “número de personas por kg” no es un número entero de personas. Este hecho puede generar algún obstáculo para su interpretación.

F2.2.4: *Entre 3 personas se han comido 2 kilogramos de guisantes.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Masa de guisantes (kg). Extensiva, continua. B: Cantidad de comensales. Extensiva, discreta.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, masa de guisantes por ración. k^{-1}, raciones por cada kilogramo de guisantes.	**Estructura numérica:** $(2:3)$
Razones externas: No enteras (k^{-1} admite expresión decimal exacta)	

La última situación de la ficha, F2.2.5, relaciona dos magnitudes discretas de cardinalidad en la que una de ellas es una cantidad de personas. La estructura numérica provoca que la razón en la que la cantidad de personas es la “magnitud repartida” no sea entera. Este hecho, junto a la tipología de las magnitudes, puede suponer un obstáculo para la interpretación de las razones resultantes.

F2.2.5: *Un grupo de 5 amigas ha realizado 25 pulseras para un mercadillo solidario.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de pulseras. Extensiva, discreta. B: Cantidad de personas. Extensiva, discreta.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, cantidad de pulseras que hace cada persona.	**Estructura numérica:** $(25:5)$
Razones externas: $k = 5$ pulseras/amiga. Entera. (k^{-1}, admite expresión decimal exacta)	

La actividad que deben realizar los alumnos de forma individual fuera del horario lectivo presenta exactamente las mismas situaciones de la actividad TC1, solo que en esta ocasión se les pedirá a los alumnos analizar si pueden calcularse razones en dichas situaciones, estableciendo las condiciones de regularidad necesarias e interpretando dichas razones en caso de que puedan calcularse. Además, las situaciones son similares a las presentadas en la actividad de aula F2.2 y están secuenciadas con los mismos criterios.

La situación TC2.1, de velocidad de trabajo, es análoga a la F2.2.1 pero con una estructura numérica algo más compleja.

TC2.1: *En 4 horas limpió 37 cristales.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de cristales. Extensiva, discreta. B: Tiempo (h). Extensiva, continua.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, velocidad a la que se limpia (cantidad de cristales por unidad de tiempo).	**Estructura numérica:** $(37:4)$
Razones externas: No enteras (solo k admite expresión decimal exacta).	

En la situación TC2.2 aparece una relación entre magnitudes que no es proporcional ya que no se cumple la condición de regularidad entre ambas.

TC2.2: *Laura tiene 10 años y tiene una estatura de 120 cm.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Relación no proporcional.

La situación TC2.3 es análoga a la analizada en F2.2.3.

TC2.3: *En la planta 5 hay ingresados 28 enfermos.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes

Las situaciones TC2.4 y TC2.5 son análogas a la presentada en la actividad de aula F2.2.5 añadiendo la dificultad de que ambas razones son no enteras. Se espera que los alumnos tengan problemas similares para interpretar y asumir el significado de las razones.

TC2.4: *Al comprar 3 botellas de refresco me regalaron 2 camisetas.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de camisetas. Extensiva, discreta. B: Cantidad de botellas. Extensiva, discreta.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, cantidad de camisetas que te regalan con una botella.	**Estructura numérica:** $(2:3)$
Razones externas: No enteras (solo k^{-1} admite expresión decimal exacta).	

En la situación TC2.5, el hecho de que la razón asociada a la situación se construya a partir de dos magnitudes homogéneas (en este caso medidas con unidades diferentes) puede provocar problemas de interpretación de los resultados. Aunque esta es la primera ocasión en la que los alumnos se enfrentan a una situación de este tipo, los cambios monetarios se trabajan en varias ocasiones a lo largo de la propuesta.

TC2.5: *Por 125 dólares me han dado 155 euros*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Valor económico (\$). Extensiva, discreta. B: Valor económico (€). Extensiva, discreta.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, factor multiplicativo en el cambio desde dólares a euros (euros/dólar).	**Estructura numérica:** $(155:125)$
Razones externas: No enteras (solo k^{-1} admite expresión decimal exacta).	

En la situación TC2.6 aparece una relación de proporcionalidad inversa. Como se ha comentado anteriormente, no se busca que los alumnos la caractericen como tal, sino que argumenten la imposibilidad de calcular las razones entre las cantidades que se presentan.

TC2.6: *Leyendo 2 horas al día tardo 7 días en terminar un libro.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.

V.1.3.3. Tercera sesión: Magnitudes directamente proporcionales

En esta sesión se consolidan los conceptos trabajados en las sesiones anteriores y se introduce la expresión 'magnitudes directamente proporcionales' para designar la relación entre aquellas magnitudes en las que se mantiene la condición de regularidad. En este tipo de relación se podrán calcular e interpretar las razones asociadas.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla V - 4.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Profundizar en el concepto de razón, cálculo e interpretación. • Profundizar en la condición de regularidad asociada a una situación en la que se pueden calcular las razones. • Introducir el concepto 'Magnitudes directamente proporcionales'.	• Razón y condición de regularidad. • Magnitudes directamente proporcionales. • Vocabulario asociado a las situaciones de proporcionalidad directa.

Tabla V - 4. Objetivos didácticos y contenidos de la tercera sesión (Ciclo II-1).

Esquema de la sesión:

- Se ponen en común los problemas contenidos en TC2 sobre el cálculo de razones y el establecimiento de condiciones de regularidad. (10 min)
- Al hilo de la corrección anterior se institucionaliza la expresión 'magnitudes directamente proporcionales' para designar a las parejas de magnitudes para las que tiene sentido calcular sus razones. (5 min)
- Los alumnos pasan a trabajar por parejas las actividades contenidas en F3.1. Entre una lista de magnitudes (para las que no aparecen datos numéricos) deben encontrar parejas susceptibles de ser directamente proporcionales y establecer las condiciones bajo las que lo serían. Así mismo, se les pide encontrar parejas de magnitudes que no pueden ser directamente proporcionales argumentando la elección. (25 min)
- Puesta en común de F3.1. (10 min)
- Se reparte TC3 para que realicen las actividades individualmente en casa. Esta ficha contiene problemas de refuerzo de cálculo de las razones externas en situaciones de proporcionalidad. Sin embargo, se diseña para que aparezcan situaciones equivalentes donde la razón adquiere valores diferentes.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de esta sesión pertenecen a una ficha de trabajo en el aula, F3.1, y una ficha de trabajo para casa, TC3. Analizamos individualmente cada uno de los ejercicios propuestos.

En la ficha de trabajo F3.1 se plantean tres situaciones no numéricas. En cada situación aparecen descritas seis magnitudes relacionadas en dos columnas para que los alumnos identifiquen parejas de magnitudes que sí podrían tener una relación de proporcionalidad directa, indicando las condiciones de regularidad que deberían darse para que este hecho sucediera. Además, se deben identificar parejas de magnitudes entre las que no pueda suponerse una relación de proporcionalidad directa y argumentar por qué no puede suponerse tal relación.

La primera situación indica posibles magnitudes que podrían considerarse en un contexto físico de movimiento dentro de un coche, por lo que aparecen magnitudes como la velocidad, el tiempo y la distancia. Además, se incluyen otras magnitudes como el número de pasajeros o la edad de los mismos y referencias a expresiones numéricas usadas para identificar, como la matrícula de un coche. La segunda situación hace referencia a posibles expresiones numéricas y magnitudes que podríamos considerar en un entorno escolar, como el número de alumnos o la superficie del recreo. En la tercera situación se hace referencia a cantidades numéricas que podrían aparecer en torno a un libro.

En cada uno de los siguientes ejercicios:
a) Busca una pareja de MAGNITUDES, una de cada columna, que sean directamente proporcionales, señalando la condición de regularidad que deben cumplir. ¿Qué significado tiene la razón entre ellas?
b) Busca una pareja de MAGNITUDES, una de cada columna, que no sean directamente proporcionales, indicando las razones por las que no lo son.

F3.1.1:

Tiempo, en horas, empleado en el recorrido	*Distancia, en kilómetros, recorrida por el móvil*
Edad, en años, del conductor	*Velocidad en kilómetros por hora*
El número de la matrícula del coche	*El número de pasajeros*

F3.1.2:

Número de alumnos en el patio	*Superficie, en m^2, del patio de recreo*
Edad media de los alumnos	*Estatura media de los alumnos*
Anchura del patio	*Hora de comienzo de las clases*

F3.1.3:

Número de libros	*Número de páginas*
Precio de cada libro	*Edad, en años, del comprador*
El tamaño de la letra del texto	*Número de fotografías de cada libro*

La tarea para casa plantea el análisis de dos contextos de comparación de razones sin llegar a pedir la comparación. Por tanto, los alumnos deben realizar la misma tarea que en problemas anteriores, pero en dos situaciones diferentes dentro de cada contexto. En el primer contexto de mezcla de agua y zumo para hacer un refresco, se pide analizar la situación y calcular las razones en la receta que proporciona cada uno de los protagonistas que presenta el enunciado. La estructura numérica es relativamente sencilla, aunque aparecen expresiones decimales que pueden entorpecer el planteamiento de una razón con una representación simbólica de fracción.

TC3.1: *La receta de naranjada de María indica que hay que mezclar 0,5 litros de zumo naranja con 1,5 litros de agua. La receta de Pedro dice que hay que mezclar 1,5 litros de zumo de naranja con 5 litros de agua.*

a) ¿Qué magnitudes aparecen? ¿En qué unidades se miden?
b) ¿Son las magnitudes directamente proporcionales? Escribe la condición de regularidad que debe darse.
c) Calcula las razones entre zumo de naranja y agua en la receta de María explicando lo que significan.
d) Calcula las razones entre zumo de naranja y agua en la receta de Pedro explicando lo que significan.

Tipo de problema: Análisis de situaciones.
Magnitudes involucradas:
A: Volumen de zumo de naranja (l). Extensiva, continua.
B: Volumen de agua (l). Extensiva, continua.
Estructura funcional:
$$\frac{A}{B} = k$$
Relación de proporcionalidad: Directa.
Constante de proporcionalidad:
k, comparación multiplicativa entre el volumen de zumo de naranja respecto al volumen de agua en la mezcla para hacer zumo.
Estructura numérica:
$$S_1: (0{,}5: 1{,}5)\ \ / \ S_2: (1{,}5: 5)$$
Razones externas: $k_1^{-1} = 3$ litros agua/litro z. naranja. Entera. El resto no enteras.

En el segundo problema se recupera el contexto de intercambio monetario y se piden las tasas de cambio en dos bancos a partir de la información sobre un cambio realizado en cada uno.

TC3.2: *En el banco A cambian 120 dólares por 140 euros, y en el banco B cambian 180 euros por 150 dólares.*

a) ¿Qué magnitudes aparecen? ¿En qué unidades se miden?
b) ¿Son las magnitudes directamente proporcionales? Escribe la condición de regularidad que debe darse.
c) Calcula las razones entre dólares y euros en el banco A.
d) Calcula las razones entre dólares y euros en el banco B.

Tipo de problema: Análisis de situaciones.
Magnitudes involucradas:
A: Valor económico (€). Extensiva, discreta.
B: Valor económico ($). Extensiva, discreta.
Constante de proporcionalidad:
k, factor multiplicativo en el cambio desde dólares a euros (euros/dólar).
Razones externas: No enteras.
Relación de proporcionalidad: Directa.
Estructura funcional:
$$\frac{A}{B} = k$$
Estructura numérica:
$$S_1: (140: 120)\ \ / \ S_2: (180: 150)$$
Razones internas: No enteras.

V.1.3.4. Cuarta sesión: Comparación de razones I

Los problemas de comparación cuantitativa surgen de manera natural al comparar situaciones de proporcionalidad con el mismo contexto, pero con una constante de proporcionalidad diferente. Aprovechamos este hecho para enfrentar a los alumnos a este tipo de problemas sin recibir instrucción previa sobre técnicas de resolución. En esta sesión se realiza la actividad introductoria y la institucionalización de la técnica de comparación de razones externas.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla V - 5.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Resolver razonadamente problemas de comparación de razones.	• Razón y condición de regularidad. • Magnitudes directamente proporcionales. • Identificación, análisis y resolución de problemas de comparación cuantitativa.

Tabla V - 5. Objetivos didácticos y contenidos de la cuarta sesión (Ciclo II-1).

Esquema de la sesión:

- Se comienza con la puesta en común de la tarea para casa TC3. (5 min)
- Con los resultados de los problemas de TC3 a la vista se reparte la situación introductoria F4.1. En ella se presentan dos problemas de comparación cuantitativa que toman como base las situaciones de TC3. (5 min)
- Puesta en común de F4.1 e institucionalización de la estrategia funcional de comparación de razones externas para problemas de comparación cuantitativa. (10 min)
- Trabajo por parejas para realizar F4.2. En esta ficha se trabaja la resolución de problemas de comparación cuantitativa. (20 min)
- Puesta en común. (10 min)
- La tarea para casa de la ficha TC4 recoge un resumen de problemas de repaso de las sesiones realizadas hasta el momento.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de esta sesión pertenecen a dos fichas de trabajo en el aula, F4.1 y F4.2, que se reparten en momentos diferentes de la sesión, y una ficha de trabajo para casa, TC4. Analizamos individualmente cada uno de los ejercicios propuestos.

En el primer problema de la situación introductoria se utiliza el enunciado de la actividad TC3.1 para comparar la intensidad del sabor de dos recetas de naranjada. El contexto con magnitudes continuas y la baja complejidad numérica para establecer razones externas no obstaculiza la aparición de esta estrategia. En esta primera situación, la estructura numérica también facilita el empleo de razones internas y del uso de un acercamiento mediante problemas de valor perdido: *si María echase* $1{,}5$ *litros de zumo (triple de lo que se dice en el contexto que echa) debería echar* $4{,}5$ *litros de agua, por tanto, como* $4{,}5$ *es menor que* 5*, María echaría menos agua.*

Es decir, la estructura numérica de esta situación introductoria puede provocar la aparición de diferentes estrategias.

A la vista de los resultados de la Tarea para Casa…
F4.1.1: *¿Qué naranjada tendrá un sabor más fuerte a naranja, la de Pedro o la de María? ¿Por qué?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Volumen de zumo de naranja (l). Extensiva, continua. B: Volumen de agua (l). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el volumen de zumo de naranja respecto al volumen de agua en la mezcla para hacer zumo.
Estructura funcional: $\frac{A}{B}=k$	**Estructura numérica:** $(0{,}5:1{,}5)\sim(1{,}5:5)$
Razones externas: k_1^{-1}: Entera. 3 litros agua/litro z. naranja. El resto no enteras.	**Razones internas:** r_A^{-1}: Entera. 3. El resto no enteras.

La segunda parte de la situación introductoria, basada en el contexto del problema TC3.2, tiene una estructura numérica más compleja. No aparecen ni razones externas ni razones internas enteras. Además, de las posibles representaciones decimales de las razones solo una es exacta. De esta manera, el problema no pretende favorecer la aparición de ninguna de las estrategias a partir de la estructura numérica.

A la vista de los resultados de la Tarea para Casa…
F4.1.2: *¿A qué banco irías si tuvieras que cambiar de euros a dólares? ¿Por qué?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Valor económico (€). Extensiva, discreta. B: Valor económico ($). Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, factor multiplicativo en el cambio desde dólares a euros (euros/dólar).
Estructura funcional: $\frac{A}{B}=k$	**Estructura numérica:** $(140:120)\sim(180:150)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

Tras la situación introductoria y la institucionalización se proponen cinco problemas de comparación entre los que se incluyen "falsos problemas de comparación", es decir, problemas que tienen una estructura semántica idéntica a un problema de comparación, pero en donde no puede aplicarse un modelo proporcional (ni ningún otro) para resolverlos. Los problemas que sí son resolubles se diseñan introduciendo diferentes magnitudes y diferentes interpretaciones y significados de la razón. En la situación introductoria debía interpretarse la intensidad del sabor y la tasa de cambio monetario en términos de razón, en los problemas F4.2.1, F4.2.3, F4.2.5, debe interpretarse la velocidad o rapidez, el rendimiento goleador de unos jugadores de fútbol y la cantidad de comida que reciben los comensales en una cena. Las estructuras numéricas, con razones externas e internas no enteras en todos los problemas, no deberían favorecer ninguna de las estrategias.

Aunque ya habían aparecido contextos de velocidad (número de cristales que se limpian por unidad de tiempo en TC2.1, o número de retratos que se pintan por unidad de tiempo en F2.2.1), en el problema F4.2.1 aparece por primera vez la magnitud bien compactada velocidad como razón entre la magnitud longitud y la magnitud tiempo.

F4.2.1: *Jesús ha recorrido 8 kilómetros en 3 horas, mientras que en 2 horas y media Celia ha recorrido 7 kilómetros, ¿quién ha ido más rápido?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Estructura funcional:**
A: Distancia (km). Extensiva, continua. B: Tiempo (h). Extensiva, continua.	$\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad:	**Estructura numérica:**
k, velocidad.	$(8:3)\sim(7:2{,}5)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

El falso problema de comparación, F4.2.2, se presenta en un contexto análogo al de las situaciones TC1.3 y TC2.3.

F4.2.2: *En el hospital A en la planta 5 trabajan 25 médicos. En el hospital B en la planta 7 hay 20 médicos, ¿qué hospital ofrece una mayor atención a sus pacientes?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes

En F4.2.3, la razón se presenta con un significado de promedio estadístico.

F4.2.3: *El futbolista C ha marcado 18 goles en los 22 partidos que ha jugado, mientras que el futbolista M ha marcado 25 goles en los 35 partidos jugados, ¿qué futbolista ofrece mayor rendimiento goleador?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Estructura funcional:**
A: Cantidad de goles. Extensiva, discreta. B: Cantidad de partidos. Extensiva, discreta.	$\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad:	**Estructura numérica:**
k, goles por partido.	$(18:22)\sim(25:35)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

El problema F4.2.4 es otro falso problema de comparación en el que las expresiones numéricas que hacen referencia al curso supondrían, bien un identificador, bien un ordinal, pero no una cantidad de magnitud relacionada con el número de asignaturas aprobadas.

F4.2.4: *En 2º el hermano de Esteban aprobó 7 asignaturas y en 3º aprobó también 7 asignaturas. ¿En qué curso le fue mejor?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes

En F4.2.5 la razón externa aparece ligada al significado de reparto de los números racionales.

F4.2.5: *Sara ha preparado una cena con 5 tortillas para sus 12 amigos. David también ha preparado una cena con tortillas, pero él servirá 7 tortillas para sus 15 amigos. ¿En qué cena se podrá comer más tortilla?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de tortillas. Extensiva, discreta[48]. B: Cantidad de comensales. Extensiva, discreta.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, cantidad de tortillas para cada comensal.	**Estructura numérica:** $(5:12) \sim (7:15)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

La actividad para realizar fuera del horario lectivo se diseña pensando en que suponga un repaso de todo lo visto a lo largo de las cuatro primeras sesiones (planificadas para llevarse a cabo en una semana). Por eso recoge actividades de las anteriores sesiones y tiene una extensión mayor que otras actividades de trabajo para casa. La actividad se compone de dos bloques de problemas. En un primer bloque se proponen cuatro problemas de comparación cuantitativa y en el segundo se plantean cinco situaciones en un contexto numérico para analizar la relación existente entre las magnitudes y decidir si son o no directamente proporcionales y, en el caso en el que lo sean, calcular e interpretar las dos razones externas asociadas.

No se plantean contextos ni estructuras numéricas con diferencias sustanciales a los trabajados durante las sesiones. La situación de proporcionalidad sobre la que se construye, por ejemplo, TC4.1 es análoga a las analizadas en F2.2.1 y TC2.1. En TC4.1 se construye con esa situación

[48] Hemos considerado la cantidad de tortillas como cardinalidad y, por tanto, como magnitud discreta. Sin embargo, podemos pensar en alguna de las propiedades medibles sobre la tortilla, por ejemplo, masa o superficie si consideramos las tortillas con la misma forma y grosor uniforme. Entonces, si tomamos la cantidad de esa magnitud asociada a una tortilla como unidad, podemos entender la magnitud del problema continua y tiene total sentido hablar, por ejemplo, de cuatro quintos de tortilla. En los grupos en los que el profesor-investigador era el profesor habitual, se habían trabajado anteriormente los significados de medida y reparto para fracciones en el sentido dado por Escolano (2007). Dentro de ese trabajo habían aparecido contextos similares al del problema F4.2.5.

un problema de comparación. La diferencia fundamental con F2.2.1 radica en la estructura numérica que obstaculiza en mayor grado el trabajo con la razón k^{-1}, ya que la razón $19/3$ "caricaturas por hora que hace Thais", no admite una expresión entera, ni siquiera haciendo un cambio de la unidad temporal a minutos.

TC4.1: *Íker hace 13 caricaturas en 2 horas mientras que Thais hace 19 caricaturas en 3 horas. ¿Quién dibuja más rápido Íker o Thais?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de caricaturas. Extensiva, discreta. B: Tiempo (h). Extensiva, continua.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, velocidad a la que hace las caricaturas (caricaturas por unidad de tiempo).	**Estructura numérica:** $(13{:}\,2) \sim (19{:}\,3)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En el problema TC4.2 aparece otro término asociado a la comparación de disoluciones, el dulzor (ya habíamos trabajado con "la intensidad del sabor"). La magnitud "número de cucharadas" admite una interpretación discreta y una interpretación continua considerando la "cucharada" como unidad arbitraria de la magnitud masa. En cualquier caso, las posibles dificultades que pudiera plantear considerar la magnitud de forma discreta se compensan al considerar razones externas ("cucharadas en cada litro") enteras.

TC4.2: *Para hacer un batido Jorge echa 5 cucharadas de azúcar por cada medio litro de leche. Por otro lado, Lorena prefiere echar 6 cucharadas por cada 0,6 litros de leche. ¿Quién hace el batido más dulce?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Masa azúcar (cucharada). Extensiva, continua. B: Volumen de leche (l). Extensiva, continua.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, concentración de azúcar en la leche (.	**Estructura numérica:** $(5{:}\,0{,}5) \sim (6{:}\,0{,}6)$
Razones externas: $k_1 = k_2 = 10$ cucharadas/litro. Enteras. Sus inversas no enteras	**Razones internas:** No enteras.

En el falso problema de comparación TC4.3, aunque podría interpretarse la razón "alumnos por profesor", en ningún caso podría conectarse esa interpretación con la obtención de mejores calificaciones, que, por otro lado, tampoco es una magnitud.

TC4.3: *En colegio A hay matriculados 450 alumnos, y en colegio B hay matriculados 320 alumnos. En el colegio A hay 35 profesores, mientras que en colegio B hay 25 profesores. ¿En cuál de los colegios los alumnos obtienen mejores calificaciones?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.

En el problema TC4.4 debe reinterpretarse la pregunta "¿Qué equipo ha trabajado mejor?" en términos del número de libros transportado por cada miembro del equipo. Es decir, en este contexto, la razón nos informa de la eficiencia del trabajo de los miembros de un equipo y aparece fuertemente unida al significado de reparto de los números racionales.

TC4.4: *Para trasladar la biblioteca de ubicación se han realizado dos equipos de trabajo. El equipo A está formado por 20 alumnos y ha trasladado 254 libros. El equipo B, que ha trasladado 300 libros está formado por 22 alumnos. ¿Qué equipo ha trabajado mejor?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de libros. Extensiva, discreta. B: Cantidad de alumnos. Extensiva, discreta.	**Estructura funcional:** $\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad: k, cantidad de libros por alumno.	**Estructura numérica:** $(254{:}\,20)\sim(300{:}\,22)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

El segundo bloque de actividades reproduce contextos muy similares a los ya trabajados. En TC4.6 se presenta un contexto de compra-venta, en TC4.9 uno de velocidad. El resto de los contextos presentan relaciones no directamente proporcionales: en TC4.5 porque la relación no es proporcional (ni determinable, a priori, mediante expresiones matemáticas), en TC4.7 porque solo aparece una magnitud en el contexto y en TC4.8 porque la relación que aparece es de proporcionalidad inversa.

Lee las siguientes situaciones e identifica, las magnitudes que aparecen y las unidades que se emplean. Identifica en qué situaciones aparecen parejas de magnitudes directamente proporcionales. En ese caso, indica la condición de regularidad que se debe cumplir, calcula las razones que aparecen y escribe el significado de cada una de ellas.

TC4.5: *Manuel tiene 8 años y mide 1,10 m.*
TC4.6: *Por 4,5 litros de vino he pagado 5€.*
TC4.7: *En la planta 3 del hospital hay ingresados 40 enfermos.*
TC4.8: *Para transportar la mercancía al aeropuerto se han necesitado 7 camiones y cada uno ha realizado 4 viajes.*
TC4.9: *Yendo de paseo he recorrido 3 km en 40 min.*

TC4.5	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Relación no proporcional

TC4.6	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Estructura funcional:**
A: Valor económico (€). Extensiva, discreta. B: Volumen de vino (l). Extensiva, continua.	$\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad:	**Estructura numérica:**
k, coste (unidad de volumen) del vino.	$(5: 4{,}5)$
Razones externas: No enteras.	
TC4.7	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes
TC4.8	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
TC4.9	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Estructura funcional:**
A: Distancia (km). Extensiva, continua. B: Tiempo (min). Extensiva, continua.	$\frac{A}{B} = k$
Constante de proporcionalidad:	**Estructura numérica:**
k, velocidad.	$(3{,}40)$
Razones externas: No enteras. k^{-1} entera previo cambio de unidades a segundos.	

V.1.3.5. Quinta sesión: Comparación de razones II

En esta sesión, por un lado, se consolidan los problemas de comparación cuantitativa y, por otro, se introducen los problemas de comparación cualitativa. La sesión se estructura como taller de problemas con una única ficha, por lo que la intervención del profesor-investigador con el grupo clase se reduce a los minutos finales de la sesión.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla V - 6.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Consolidar la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad directa. • Resolver razonadamente problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad directa.	• Identificación, análisis y resolución de problemas de comparación cuantitativa. • Identificación, análisis y resolución de problemas de comparación cualitativa.

Tabla V - 6. Objetivos didácticos y contenidos de la quinta sesión (Ciclo II-1).

Esquema de la sesión:

- Se recoge la ficha TC4 y se entrega a los alumnos una resolución razonada y comentada para que la comparen con su resolución.
- Mediante la resolución en parejas de F5.1 se continúa trabajando con problemas de comparación. Se introducen por primera vez problemas de comparación cualitativa. (35 min)
- Puesta en común de las resoluciones de F5.1. (15 min)

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de esta sesión pertenecen a una única ficha de trabajo en el aula, F5.1. Analizamos individualmente cada uno de los ejercicios propuestos.

Se presentan a los alumnos cuatro problemas de comparación, dos cuantitativa y dos cualitativa. De entre los problemas de comparación cualitativa se ha diseñado un problema en el que puede decidirse cuál de las razones es mayor y otro en el que la información del enunciado es insuficiente para decidirlo.

En F5.1.1, el contexto de compraventa y la interpretación de las constantes k_1 y k_2 como magnitudes bien compactadas hacen suponer que los alumnos se decantarán por una estrategia de resolución basada en el cálculo de k_1 y k_2. La estructura numérica en cada situación favorece también el trabajo con estas razones antes que con sus inversas.

F5.1.1: *Marga ha comprado 3 kilos de naranjas y le han cobrado 0,93 €. Chaimae, en otra tienda ha comprado 5 kilos de naranjas y le han cobrado 1,70 €. ¿Quién ha comprado las naranjas más baratas?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Estructura funcional:**
A: Valor económico (€). Extensiva, discreta.	$\frac{A}{B}=k$
B: Masa de naranjas (kg). Extensiva, continua.	
Constante de proporcionalidad:	**Estructura numérica:**
k, coste unitario (unidad de masa).	$(0{,}93:3)\sim(1{,}70:5)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En el problema F5.1.2, la constante de proporcionalidad es una magnitud intensiva que proviene del cociente de dos magnitudes discretas y los valores de k y k^{-1} no son enteros, esto puede suponer algún obstáculo para interpretar el significado de dichas razones. Ni la estructura numérica ni el significado de las operaciones con las magnitudes deberían favorecer una técnica concreta. Sin embargo, la cuestión que se les plantea a los alumnos está ligada a la interpretación de k más que de k^{-1}, por lo que parece razonable que estos se decanten en mayor medida por una estrategia de cálculo de k_1 y k_2, en vez de calcular sus inversas.

F5.1.2: *Sara ha preparado una cena con 8 tortillas para sus 10 amigos. David también ha preparado una cena con tortillas, pero el servirá 3 tortillas para sus 4 amigos. ¿En qué cena se podrá comer más tortilla?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de tortillas. Extensiva, discreta. B: Cantidad de comensales. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, cantidad de tortillas por comensal.
Estructura funcional: $\frac{A}{B} = k$	**Estructura numérica:** $(8:10)\sim(3:4)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En F5.1.3 aparece el primer problema de comparación cualitativa. Se trata de un problema en el que puede decidirse cuál de las dos naranjadas da un sabor más fuerte a naranja. La cuestión planteada a los alumnos orienta hacia la interpretación de la constante k para decidir cuál sabe más fuerte razonando si es mayor k_1 o k_2. No parece razonable que los alumnos argumenten a partir de k^{-1}. La estructura semántica del problema requiere que los alumnos planteen alguna de las siguientes equivalencias para responder adecuadamente:

$$(a^+, b)\sim(a, b^+) \quad \equiv \quad (a^+, b^-)\sim(a, b) \quad \Rightarrow \quad \frac{a^+}{b^-} > \frac{a}{b}$$
$$(a^+, b)\sim(a, b^+) \quad \equiv \quad (a, b)\sim(a^-, b^+) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} > \frac{a^-}{b^+}$$

F5.1.3: *María ha echado más zumo de naranja que Pedro para preparar naranjada. Sin embargo, Pedro ha echado más agua que María al preparar la naranjada. ¿Cuál de las dos naranjadas proporciona un sabor a naranja más fuerte?*

Tipo de problema: Comparación cualitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Volumen de zumo de naranja. Extensiva, continua. B: Volumen de agua. Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el volumen de zumo de naranja respecto al volumen de agua en la mezcla para hacer zumo.
Estructura funcional: $\frac{A}{B} = k$	**Estructura numérica:** $(a^+: b)\sim(a: b^+)$

En el problema F5.1.4, de comparación cualitativa, si se interpreta “tamaño de la clase” como “superficie de la clase”, no puede decidirse entre las opciones planteadas ya que las comparaciones aditivas suministradas por el problema no son suficientes para comparar las constantes de proporcionalidad. Además, se ha añadido una pequeña complicación lingüística al tener que interpretar la expresión “más pequeña” como “valor numérico menor” para poder comparar adecuadamente. La estructura semántica del problema puede requerir que los alumnos planteen alguna de las siguientes equivalencias para responder adecuadamente:

$$(a^+, b)\sim(a, b^-) \quad \equiv \quad (a^+, b^+)\sim(a, b) \quad \Rightarrow \quad \frac{a^+}{b^+} \text{ ¿? } \frac{a}{b}$$
$$(a^+, b)\sim(a, b^-) \quad \equiv \quad (a, b)\sim(a^-, b^-) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} \text{ ¿? } \frac{a^-}{b^-}$$

Otras interpretaciones de "tamaño de la clase" como, por ejemplo, su volumen, no parecen razonables, aunque fueran formalmente correctas.

F5.1.4: *En la clase de 1º B hay más alumnos que en la de 1º D. Por otro lado, la clase de 1ºD es más pequeña que la de 1ºB. ¿En cuál de las dos clases los alumnos están más apretados?*

Tipo de problema: Comparación cualitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Constante de proporcionalidad:**
A: Cantidad de alumnos. Extensiva, discreta. B: Superficie de la clase. Extensiva, continua.	k, cantidad de alumnos por unidad de superficie.
Estructura funcional:	**Estructura numérica:**
$\frac{A}{B} = k$	$(a^{+}: b) \sim (a: b^{-})$

V.1.3.6. Sexta sesión: Problemas de valor perdido I

Tras el amplio trabajo con el concepto de razón se abordan en esta sesión los problemas de valor perdido. El objetivo principal de la sesión es trabajar en profundidad la situación introductoria y su posterior institucionalización, por lo que se propondrán pocos problemas en clase. Los problemas de refuerzo y consolidación que trabajan un amplio número de contextos diferentes se posponen para el trabajo para casa y la siguiente sesión.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla V - 7.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Resolver razonadamente problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad directa previo cálculo de la razón unitaria que resuelve por multiplicación.	• Razón y condición de regularidad. • Magnitudes directamente proporcionales. • Identificación, análisis y resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad directa.

Tabla V - 7. Objetivos didácticos y contenidos de la sexta sesión (Ciclo II-1).

Esquema de la sesión:

- Los alumnos abordan por parejas una tarea contextualizada (F6.1) en una situación de compraventa de tela por metros. En dicha tarea tendrán que completar una tabla que relaciona cantidades de las magnitudes involucradas. (20 min)
- La puesta en común se aprovecha para observar que, una vez conocidas las razones unitarias, puede encontrarse cualquier valor solicitado mediante una adecuada multiplicación. (10 min)
- Se consolida la resolución de problemas de valor perdido mediante la realización de F6.2. (15 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F6.2 (5 min)

- Se refuerzan los contenidos de la sesión mediante la tarea para casa, TC6, que contiene problemas de valor perdido.

Diseño y análisis de las actividades:

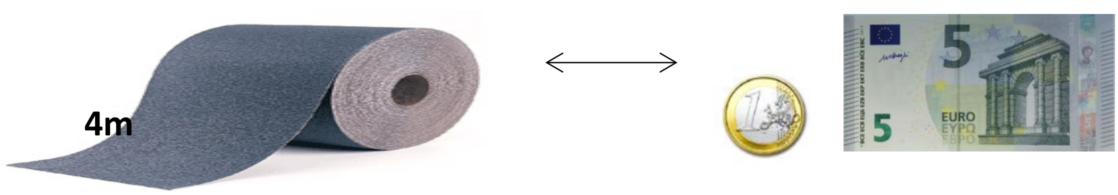
A pesar del trabajo previamente hecho con las razones, se ha procurado que en esta primera sesión de problemas de valor perdido las razones involucradas sean fácilmente interpretables. Así, se han diseñado problemas con magnitudes no homogéneas para favorecer la interpretación de la razón. Además, aunque las razones externas no tienen expresión entera, la mayoría de ellas admite una representación decimal exacta.

Los problemas de esta sesión pertenecen a dos fichas de trabajo en el aula, F6.1 y F6.2, que se reparten en momentos diferentes de la sesión, y una ficha de trabajo para casa, TC6. Analizamos individualmente cada uno de los ejercicios propuestos.

Durante la situación introductoria, F6.1, se propone un problema de valor perdido múltiple (a partir de una relación inicial se plantean varios problemas de valor perdido encadenados) en un contexto de compraventa. Los alumnos deben completar una tabla de covariación entre las magnitudes involucradas sin indicaciones por parte del profesor. A partir de ella se institucionalizará el método para resolver problemas de valor perdido en dos etapas, una primera para calcular el valor de la razón, y una segunda para calcular el valor solicitado. Para poder concluir el problema mediante una multiplicación los alumnos deberán analizar previamente el problema para determinar qué razón calcular. En el caso de calcular las dos razones es importante que las doten correctamente de significado para poder elegir la adecuada. Obviamente, no se penalizará la aparición de ningún otro método correcto en el que los alumnos operen de forma significativa.

Como en otras situaciones introductorias de la propuesta, se ha elegido un contexto de compraventa que facilita el trabajo con la razón externa (bien compactada) coste unitario. En la tabla propuesta para el alumno se varía la estructura numérica para observar qué técnicas de resolución aparecen de forma natural. Por ejemplo, la penúltima y antepenúltima fila son un múltiplo de la primera fila más su mitad, por lo que podrían aparecer estrategias de construcción progresiva. La quinta fila es un múltiplo de la primera fila, lo que podría hacer aparecer estrategias de factor de cambio. Sin embargo, se espera que la introducción en las primeras filas del cálculo de la cantidad de una magnitud correspondiente a una unidad de la otra permita trabajar a los alumnos con la razón correspondiente en cada caso para terminar los cálculos mediante multiplicación. De esta manera, se dará una visión amplia de las situaciones de valor perdido y de cómo puede ayudar el cálculo de una u otra razón para su resolución.

F6.1.1: *Imagínate que vas a comprar tela para hacer un traje y en el escaparate de la tienda ves el siguiente cartel anunciando una tela que está a un precio especial:*



Completa la siguiente tabla explicando bien el razonamiento que usas para realizar el cálculo en cada caso.

Precio (€)	*Longitud de la tela (m)*	*Razonamiento*
6		
	1	
1		
8		
	12	
15		
21		
	10	

Tipo de problema: Valor perdido.
Magnitudes involucradas:
X: Valor económico (€). Extensiva, discreta. (Dependiente o independiente según el caso).
Y: Longitud de tela (m). Extensiva, continua. (Dependiente o independiente según el caso).
Estructura funcional:
$$X = k \cdot Y$$
Razones externas: No enteras.

Relación de proporcionalidad: Directa.
Constante de proporcionalidad:
k, coste unitario de la tela.
Estructura numérica:
$$(6: 4) \leftrightarrow (x_1: 1), (1: y_1), (8: y_2), (x_2: 12), (15: y_3), (21: y_4), (x_3: 10)$$
Razones internas: Enteras o no, dependiendo del apartado

Como en otras ocasiones, para el problema F6.2.1 se ha elegido la estructura numérica de forma que la expresión decimal de las razones externas sea exacta. Las relaciones multiplicativas entre los datos no parecen favorecer ninguna técnica en concreto. La interpretación de las razones externas es sencilla y simétrica respecto a la inversión, es decir, no es previsible que los alumnos encuentren más natural k que k^{-1}. El ejercicio se ha diseñado con la intención de que, una vez institucionalizada la técnica, los alumnos exploren cuál es la razón que les conviene aplicar.

F6.2.1: *Para hacer arroz con leche una receta dice que hay que echar 2kg de arroz por cada 5 litros de leche. ¿Cuánto arroz tendré que echar si solo dispongo de 3 litros de leche?*

Tipo de problema: Valor perdido.
Magnitudes involucradas:
V. dependiente, X: Masa de arroz (kg). Extensiva, continua.
V. independiente, A: Volumen de leche (l). Extensiva, continua.
Estructura funcional:
$$X = k \cdot A$$

Relación de proporcionalidad: Directa.
Constante de proporcionalidad:
k, masa de arroz por cada unidad de volumen de leche.
Estructura numérica:
$$(2: 5) \leftrightarrow (x: 3)$$

Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En F6.2.2, la estructura numérica puede hacer aparecer estrategias de construcción progresiva $\left(12{,}5 = 2 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5\right)$. Sin embargo, la familiaridad con el contexto y con el significado de la razón k^{-1} hacen prever que los alumnos, en vez de usar la técnica institucionalizada, se decanten por el cálculo de k^{-1}, para terminar el cálculo de la cantidad desconocida mediante una división con significado de agrupación. Así, el profesor-investigador podrá contrastar ambas técnicas en la puesta en común final de la sesión.

F6.2.2: *En una papelería por 4 bolígrafos me han cobrado 5 euros. ¿Cuántos bolígrafos me puedo comprar con 12,5 €?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Cantidad de bolígrafos. Extensiva, discreta. V. independiente, A: Valor económico. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, masa de arroz por cada unidad de volumen de leche.
Estructura funcional: $X = k \cdot A$	**Estructura numérica:** $(4{:}\,5) \leftrightarrow (x{:}\,12{,}5)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

Las actividades del trabajo para casa, TC6, refuerzan la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa. En TC6.1 se presenta un problema con un diseño similar al del problema F6.2.1, que se ha trabajado en el aula. La estructura numérica puede resultar un poco más complicada al introducirse un factor 7 en algunas de las cantidades.

TC6.1: *Para obtener 420 litros de kétchup hacen falta 600 kilogramos de tomate, ¿cuántos kilogramos de tomate se necesitan para obtener 350 litros de kétchup?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Masa de los tomates (kg). Extensiva, continua. V. independiente, A: Volumen de kétchup (l). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, masa de arroz por cada unidad de volumen de leche.
Estructura funcional: $X = k \cdot A$	**Estructura numérica:** $(600{:}\,420) \leftrightarrow (x{:}\,650)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En TC6.2 no cabe plantearse una relación funcional entre la cantidad de alumnos y la cantidad de móviles. No parece razonable que la cantidad de móviles por alumno pueda ser una magnitud constante y más aún sin conocer las características de cada una de las clases. Se espera que los alumnos, tras escribir la condición de regularidad, aleguen que esta no es razonable y que, por tanto, no puede resolverse el problema.

TC6.2: *En una clase de 25 alumnos hay 14 teléfonos móviles, ¿cuántos teléfonos móviles habrá en una clase de 18 alumnos?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación proporcional.

En TC6.3 se presenta a los alumnos un problema con una estructura numérica muy sencilla y que puede favorecer la aparición de diversas técnicas de resolución. Las razones externas son potencias de 10, por lo que es previsible la aparición de métodos de construcción de patrones. Además, la relación entre las cantidades de la variable independiente favorece también la aparición de este tipo de estrategias. La interpretación más natural de k^{-1} favorece su cálculo (que además es entera) frente al de k y que los alumnos acaben el problema mediante una división. Se incorpora al enunciado un distractor que no juega papel en el problema (por ser constante durante toda la situación).

TC6.3: *Un grupo de 3 obreros tarda 2 días en embaldosar una superficie de 200 metros cuadrados. ¿Cuántos días tardarán en embaldosar una superficie de 350 metros cuadrados?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Tiempo (días). Extensiva, continua. V. independiente, A: Superficie. Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, tiempo necesario para embaldosar una unidad de superficie.
Estructura funcional: $X = k \cdot A$	**Estructura numérica:** $(2{:}\,200) \leftrightarrow (x{:}\,350)$
Razones externas: Razón externa k^{-1} entera. $k^{-1} = 100\ m^2$/día.	**Razones internas:** No enteras.

En el problema TC6.4, no cabe plantearse ninguna relación funcional, ya que ni siquiera parece razonable suponer un incremento anual constante. Aún en el caso de que pudiera suponerse un incremento anual constante, no parece razonable considerar una función lineal. En todo caso, podría suponerse que tenemos una función localmente afín. Bajo esta suposición el problema seguiría siendo irresoluble por falta de datos.

Se espera que los alumnos aleguen, bien la falta de relación funcional, bien que, suponiéndola, no es razonable pensar en un incremento constante por año desde el momento del nacimiento.

TC6.4: *María tiene 13 años y recibe una propina semanal de 7 euros. ¿Qué propina recibirá a los 17 años?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación proporcional

Como ocurría con TC6.1, el problema TC6.5 es análogo a uno de los problemas trabajados en el aula, F6.2.2. Sin embargo, en esta ocasión el significado de la razón que resuelve el problema por multiplicación es el natural (coste unitario). Parece previsible que los alumnos utilicen la técnica institucionalizada para resolver el problema.

TC6.5: *Si 6 entradas de cine cuestan 22,2 euros. ¿Cuánto costarán 10 entradas?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Valor económico. Extensiva, discreta. V. independiente, A: Cantidad de entradas. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, coste unitario por entrada.
Estructura funcional: $X = k \cdot A$	**Estructura numérica:** $(22{,}2{:}\,6) \leftrightarrow (x{:}\,10)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

V.1.3.7. Séptima sesión: Problemas de valor perdido II

En esta sesión se siguen trabajando los problemas de valor perdido. Al tratarse de una sesión de consolidación, las intervenciones del profesor con el grupo se restringen al principio y al final de la sesión dejando un amplio tiempo para que los alumnos trabajen por parejas en la resolución de los problemas.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla V - 8.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Consolidar la resolución razonada de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad directa previo cálculo de la razón unitaria que resuelve por multiplicación.	• Identificación, análisis y resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad directa.

Tabla V - 8. Objetivos didácticos y contenidos de la séptima sesión (Ciclo II-1).

Esquema de la sesión:

- Recogida y puesta en común de TC6. (10 min)
- Los alumnos trabajan en parejas la ficha F7.1 que contiene problemas de valor perdido de proporcionalidad simple en diferentes contextos. (30 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F7.1 (10 min)

Diseño y análisis de las actividades:

Se busca enfrentar a los alumnos a situaciones de dificultad creciente para comprobar la asimilación de los conceptos involucrados. De esta manera se introducen obstáculos a las técnicas institucionalizadas principalmente mediante la estructura numérica, las magnitudes involucradas y la estructura semántica de los problemas.

En varios problemas, la estructura numérica favorece la aparición de técnicas como el factor de cambio o la construcción progresiva. Se pretende observar cómo se desenvuelven los alumnos en este tipo de problemas con las técnicas institucionalizadas previamente.

Proponemos varios problemas en los que las razones externas se obtienen mediante cociente de la misma magnitud que mide la misma propiedad en diferentes objetos o mediante diferentes unidades. La interpretación de las razones homogéneas prepara además para la comprensión del porcentaje y su interpretación como cantidad de una magnitud asociada a 100 unidades de otra. Además, se trabaja una situación de descomposición de un conjunto en partes disjuntas con una magnitud aditiva asociada a los elementos de forma que la razón entre las partes y el total es constante. Este tipo de situaciones, que se pueden resolver descomponiendo en varios problemas de valor perdido o utilizando relaciones aditivas para el cálculo de complementarios, enlazan también con el posterior trabajo con porcentajes.

Los problemas de esta sesión se estructuran en una sola ficha de trabajo, F7.1.

En F7.1.1, aunque la estructura numérica no favorece ninguna estrategia concreta es probable que los alumnos usen una estrategia con el cálculo de k por tener un significado más más sencillo que el de k^{-1} y así calculen el valor desconocido por multiplicación. El hecho de no dar explícitamente el segundo valor para la variable independiente, sino de establecer una comparación aditiva con el primer valor, puede favorecer la aparición de estrategias de tipo construcción progresiva.

F7.1.1: *A mi abuela le gustan mucho los gatos. En su casa del pueblo tiene 4 gatos a los que les encanta beber leche. Todos los días se beben 5 litros de leche entre los cuatro. Encima, ahora ha recogido 3 gatos más que estaban abandonados. ¿Cuánta leche tendrá que ponerles ahora a todos si quiere que cada gato siga bebiendo lo mismo?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Constante de proporcionalidad:**
V. dependiente, X: Volumen de leche.	k, volumen de leche por gato.
Extensiva, continua.	
V. independiente, A: Cantidad de gatos.	
Extensiva, discreta.	
Estructura funcional:	**Estructura numérica:**
$X = k \cdot A$	$(5:4) \leftrightarrow (x:4+3)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En el problema F7.1.2, no cabe plantearse ninguna relación funcional ya que en la situación solo aparece una magnitud (cantidad de oficinas) y el resto de los datos numéricos tienen significado ordinal. Se espera que los alumnos detecten esta falta de magnitudes para establecer relaciones de proporcionalidad.

F7.1.2: *En el piso 17 de un rascacielos hay 6 oficinas. ¿Cuántas oficinas habrá en el piso 51?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes

En el problema F7.1.3, además de la dificultad para dotar de significado a las razones debido a que ambas magnitudes expresan valor económico, la estructura numérica obstaculiza el cálculo de k (no entero y con decimal asociado no exacto) para calcular la cantidad pedida mediante multiplicación. Por el contrario, el enunciado proporciona directamente el valor de k^{-1} por lo que es probable que los alumnos calculen la cantidad desconocida mediante una división, con sentido de agrupación. Las razones internas son enteras, aunque este hecho no es fácilmente detectable sin realizar operaciones por lo que no se espera una aparición significativa de estrategias de factor de cambio.

F7.1.3: *Hoy el euro se cambia por 1,20 dólares. Si vas al banco y quieres que te den 450 dólares para un viaje, ¿cuántos euros tienes que llevar?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Valor económico (€). Extensiva, discreta. V. independiente, A: Valor económico ($). Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, factor multiplicativo en el cambio desde dólares a euros (euros/dólar).
Estructura funcional: $X = k \cdot A$	**Estructura numérica:** $(1: 1{,}20) \leftrightarrow (x: 450)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** $r_A^{-1} = 375.$ Entera.

En F7.1.4, la estructura numérica y la posición de la incógnita favorecen la aparición de estrategias de factor de cambio una vez unificadas las unidades en las cantidades involucradas. La comparación multiplicativa entre 500 y 2000 es muy fácilmente reconocible por los alumnos de este nivel educativo y proporciona un factor de cambio que permite resolver el problema mediante una multiplicación sencilla.

F7.1.4: *Para hacer medio kilo de albóndigas, se mezclan 400 gramos de carne de ternera con 100 gramos de carne de cerdo. ¿Cuánta carne de cada tipo se necesita para preparar 2kg de albóndigas?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: P_1: Masa de carne de ternera (g). Extensiva, continua. P_2: Masa de carne de cerdo (g). Extensiva, continua. T: Masa de la mezcla (kg). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre la masa de carne de ternera respecto al total de la mezcla (análogamente para $(1 - k)$ con la carne de cerdo).

Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot A \qquad P_1 = \dfrac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(\square: 400 + 100) \leftrightarrow (2 \cdot 1000: x_1 + x_2)$
Razones externas: $\frac{k}{1-k} = 4$ unidades de masa de carne de ternera/unidad de masa de carne de cerdo. $(1-k)^{-1} = 5$ unidades de masa carne mezclada/ unidad de masa carne de cerdo. El resto no enteras.	**Razones internas:** $r_T^{-1} = 4.$ Entera.

En F7.1.5, no cabe plantearse ninguna relación funcional ya que no parece razonable suponer constante el número de páginas de un capítulo en un libro. Se espera que los alumnos argumenten mediante el establecimiento de la condición de regularidad que debería darse para suponer proporcionalidad y que, posteriormente, digan que tal condición no tiene sentido.

F7.1.5: *En un libro de 360 páginas hay 15 capítulos, ¿cuántos capítulos tendrá un libro de 288 páginas?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Magnitudes sin relación funcional

V.1.3.8. Octava sesión: Proporcionalidad compuesta

Tras trabajar los diferentes tipos de problemas sobre proporcionalidad simple directa, los alumnos se enfrentan por primera vez a problemas que involucran tres magnitudes ligadas por una relación de proporcionalidad compuesta. A partir de la situación introductoria se espera que, al menos, surja en algunas parejas de alumnos, la estrategia de amalgamación. Dicha estrategia será posteriormente institucionalizada para dotar a los alumnos de una técnica común a la hora de abordar este tipo de problemas. Sin embargo, cualquier técnica que involucre una manipulación significativa de las magnitudes involucradas, como el cálculo de la constante de proporcionalidad a partir del cálculo de razones sucesivas, será trabajada en clase y tratada como una estrategia absolutamente válida.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla V - 9.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Reconocer situaciones de proporcionalidad en las que intervienen tres magnitudes. • Resolver problemas de proporcionalidad en los que intervienen tres magnitudes. • Reducir los problemas de proporcionalidad con tres magnitudes a un problema de proporcionalidad directa con dos magnitudes realizando operaciones con las magnitudes involucradas.	• Identificación, análisis y resolución de problemas de valor perdido de tipo “directa-directa” con tres magnitudes. • Identificación, análisis y resolución de problemas de comparación con tres magnitudes reducibles a dos magnitudes previa multiplicación de dos de ellas. • Amalgamación de magnitudes para reducir problemas de tres magnitudes a problemas con dos magnitudes.

Tabla V - 9. Objetivos didácticos y contenidos de la octava sesión (Ciclo II-1).

Esquema de la sesión:

- Se comienza con la situación introductoria F8.1, en la que se presenta un problema de valor perdido con un contexto de compraventa. (10 min)
- Puesta en común de los resultados de la situación introductoria e institucionalización del método de amalgamación para reducir un problema de 3 magnitudes a uno con 2 magnitudes. (10 min)
- Tras la institucionalización las parejas de alumnos abordan los problemas de F8.2, uno de valor perdido y otro de comparación, ambos con tres magnitudes. (20 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F8.2. (10 min)
- Entrega del TC8 que contiene una serie de problemas de repaso de lo visto hasta ese momento para que los alumnos resuelvan individualmente en casa.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de proporcionalidad compuesta que se presentan en esta sesión tienen un contexto realista. Como se ha comentado anteriormente, para este ciclo se mezclan problemas de valor perdido y de comparación cuantitativa, todos ellos con una estructura funcional del tipo $\frac{M_1}{M_2 \cdot M_3}$. Para los problemas de valor perdido la posición de la variable independiente es la correspondiente a M_1, de forma que el problema sea de tipo D-D.

Los problemas se han secuenciado previendo la dificultad que puedan tener los alumnos para dotar de significado al producto $M_2 \times M_3$. Así, en los primeros problemas, una de estas dos magnitudes es intensiva, obtenida como cociente de dos magnitudes extensivas $M_2 = U/V$, y la otra es la magnitud que se utiliza como “denominador” para calcular la primera, $M_3 = V$.

$$M_2 = \frac{U}{V}, \quad M_3 = V \quad \Rightarrow \quad M_2 \cdot M_3 = U$$

Posteriormente se introducen problemas en los que las magnitudes involucradas en esta amalgamación por producto son extensivas y, por tanto, tiene mayor dificultad interpretar la magnitud resultante.

Los problemas de esta sesión pertenecen a tres fichas de trabajo en el aula, F8.1, F8.2 y F8.3, que se reparten escalonadamente a lo largo de la sesión, y a una ficha de trabajo para casa, TC8.

La actividad introductoria para la proporcionalidad compuesta, F8.1.1 está diseñada de forma que el problema resulte familiar al alumno. Se trata de un contexto de compraventa que relaciona la cantidad de compra con su precio. Se optó por un problema de valor perdido de tipo D-D en el que la amalgamación de las variables independientes fuera fácilmente reconocible. Para ello una de las variables independientes es una magnitud intensiva no compactada y la otra es la magnitud extensiva correspondiente al denominador de la intensiva.

Para favorecer el trabajo significativo con las constantes de proporcionalidad se optó por una estructura numérica con datos enteros en el que las razones externas fueran enteras si se consideraban los precios en céntimos en vez de en euros. De esta forma, las dos constantes de proporcionalidad compuesta, k y k^{-1}, admiten expresiones enteras según la unidad elegida.

Es previsible que los alumnos opten por un método de amalgamación entre las variables independientes o que, en caso de realizar un método paso a paso, comiencen calculando la razón X/A cuyo significado es fácilmente identificable. Si bien la estructura no condiciona el trabajo con k o k^{-1}, parece razonable que los alumnos se decanten por trabajar con k.

F8.1.1: *En una frutería ponen el mismo tipo de naranjas en dos tamaños de bolsa. En el tamaño grande de bolsa cada una tiene 15 naranjas, mientras que en el tamaño pequeño hay 7 naranjas. Al comprar 4 bolsas grandes me han cobrado 6 €, ¿cuánto me cobrarían si comprara 8 bolsas pequeñas?*

Tipo de problema: Valor perdido. **Magnitudes involucradas:** V. dependiente, X: Valor económico de la compra (€). Extensiva, discreta. V. independiente, A: Cantidad de bolsas. Extensiva, discreta. V. independiente, B: Cantidad de naranjas por bolsa. Intensiva, discreta. **Estructura funcional:** $X = k \cdot A \cdot B$ **Razones externas:** $k^{-1} = 10$ naranjas/€. Entera. Previo cambio de unidades a céntimos: $k = 10$ cént/naranja. Entera y las amalgamaciones X/A y X/B en la primera situación también lo son.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta. **Constante de proporcionalidad:** k, coste unitario de las naranjas. **Amalgamaciones parciales:** $A \cdot B$, cantidad (total) de naranjas. X/A, coste unitario de las bolsas. X/B, valor económico de la compra por cada naranja que hay en la bolsa. **Estructura numérica:** $(6{:}\,4{:}\,15) \leftrightarrow (x{:}\,7{:}\,8)$ **Razones internas:** No enteras.

El problema F8.2.1 tiene la misma estructura de la situación introductoria en otro contexto e involucrando otras magnitudes. La principal diferencia proviene de la introducción de magnitudes continuas, "tiempo" y "distancia", y por consiguiente de la aparición de la magnitud intensiva bien compactada "velocidad". Además, la estructura numérica favorece la aparición de las razones en un sentido concreto, aquel en el que son enteras y que coincide con el sentido bien compactado de la razón "velocidad". Sin embargo, se posibilita el trabajo con cantidades enteras considerando la inversa de la velocidad previo cambio de la unidad temporal a minutos.

Es previsible que los alumnos opten por un método de amalgamación entre las variables independientes o que, en caso de realizar un método paso a paso, comiencen calculando la razón X/A cuyo significado es fácilmente identificable. Si bien la estructura no condiciona el trabajo con k o k^{-1}, parece razonable que los alumnos se decanten por trabajar con k al tratarse de una magnitud intensiva bien compactada cuyo significado les es cercano y calculen la cantidad desconocida mediante multiplicación.

F8.2.1: *La máquina que pinta las líneas de la carretera tarda 3 días, trabajando 4 horas al día para pintar una carretera de 48 km. ¿Cuántos kilómetros puede pintar en 6 días si trabajase 5 horas al día?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Distancia pintada (km). Extensiva, continua. V. independiente, A: Cantidad de jornadas de trabajo. Extensiva, discreta. V. independiente, B: Duración de la jornada de trabajo (h/día). Intensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, velocidad a la que pinta. **Amalgamaciones parciales:** $A \cdot B$, tiempo (total) de trabajo. X/A, velocidad, distancia pintada por jornada de trabajo. X/B, distancia total pintada por cada hora de trabajo diaria.
Estructura funcional: $X = k \cdot A \cdot B$	**Estructura numérica:** $(48{:}\,3{:}\,4) \leftrightarrow (x{:}\,6{:}\,5)$
Razones externas: $k = 12$ km/h. Entera. X/A y X/B enteras. Previo cambio de unidades a minutos: $k^{-1} = 5$ min/km. Entera.	**Razones internas:** $r_A^{-1} = 2$ Entera. El resto no enteras.

En el problema F8.2.2 los alumnos se enfrentan por primera vez a un problema de comparación de proporcionalidad compuesta y, además, la amalgamación por producto es más complicada de interpretar. Se espera una tasa de éxito menor y que surjan diferentes interpretaciones tanto de la amalgamación por producto como de la constante de proporcionalidad. La estructura numérica de la segunda situación, que obstaculiza el cálculo de algunas de las razones externas, puede favorecer la aparición de la amalgamación como primer paso en la primera situación. En cualquier caso, es previsible la aparición de métodos en los que se calculen razones sucesivas comenzando con la primera situación. Teniendo en cuenta su interpretación y estructura numérica, los alumnos podrían decantarse por un método en el que calculen k_1 y k_2 y no sus inversas.

F8.2.2: *Para alimentar a sus 4 gatos durante 5 días Miguel necesita 40 vasos de leche. Ana María sin embargo gasta 35 vasos de leche para alimentar a sus 3 gatos durante 7 días. ¿Qué gatos comen más los de Ana María o los de Miguel?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa. **Magnitudes involucradas:** A: Volumen de leche (vaso). Extensiva, continua. B: Cantidad de gatos. Extensiva, discreta. C: Tiempo durante el que se alimenta (días): Extensiva, continua.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta. **Constante de proporcionalidad** k, volumen de leche en cada ración. **Amalgamaciones parciales:** $B \cdot C$, cantidad de raciones necesarias. A/B, volumen total de leche que consume cada gato. A/C, volumen diario de leche necesario para alimentar a todos gatos.
Estructura funcional: $$\frac{A}{B \cdot C} = k$$	**Estructura numérica:** $$(40{:}\,4{:}\,5) \sim (35{:}\,3{:}\,7)$$
Razones externas: $k_1 = 2$ vasos/ración. Entera A/B entera en la primera situación. A/C entera en ambas situaciones. El resto no enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En el problema F8.3.1 no cabe plantearse una relación funcional entre la cantidad de alumnos y la cantidad de móviles ya que las mediciones del problema se han obtenido en poblaciones muy diferentes. Es decir, no podemos establecer una relación de proporcionalidad (ni de otro tipo) entre las magnitudes cantidad de móviles, cantidad de clases, cantidad de alumnos por clase. Se espera que los alumnos aleguen esta falta de relación funcional para decidir que el problema no tiene solución y no resuelvan, erróneamente, un problema de valor perdido.

F8.3.1: *En primero de ESO tenemos 4 clases con 25 alumnos en cada clase y tienen móvil 50 de los alumnos. ¿Cuántos alumnos tendrán móvil en segundo de Bachillerato si hay 2 clases de 30 alumnos?*

La interpretación del producto en F8.3.2 es complicada ya que requiere entender que los grifos trabajan de forma colaborativa. Cada hora trabajan todos los grifos, por lo que cabe plantearse que el tiempo de apertura es una magnitud intensiva ya que es el tiempo de trabajo de cada grifo. Con esta interpretación la amalgamación por producto adquiriría el sentido de tiempo de trabajo equivalente necesario para llenar la piscina con un único grifo. Análogamente, podría interpretarse como la cantidad de grifos necesarios para llenar la piscina en una unidad de tiempo.

La estructura numérica y su interpretación hacen previsible que los alumnos se decanten por una estrategia de cálculo de k en vez de k^{-1}, aunque se facilita el trabajo numérico para esta última previo cambio de la unidad temporal a minutos.

F8.3.2: *Si abrimos 7 grifos durante 4 horas conseguimos echar 560 hl de agua en una piscina. ¿Cuánta agua echaremos abriendo 5 grifos durante 6 horas?*

Tipo de problema: Valor perdido. **Magnitudes involucradas:** V. dependiente, X: Volumen de agua (hl). Extensiva, continua. V. independiente, A: Cantidad de grifos. Extensiva, discreta. V. independiente, B: Tiempo de apertura (h). Extensiva, continua.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta. **Constante de proporcionalidad:** k, velocidad de emanación en cada grifo. **Amalgamaciones parciales:** $A \cdot B$, tiempo equivalente de emanación (para un solo grifo). X/A, volumen final de agua emanado por cada grifo. X/B, velocidad de llenado de la piscina.
Estructura funcional: $X = k \cdot A \cdot B$	**Estructura numérica:** $(560{:}\,7{:}\,4) \leftrightarrow (x{:}\,5{:}\,6)$
Razones externas: $k = 20$ l/h. Entera. X/A y X/B enteras. Previo cambio de unidades a minutos. $k^{-1} = 3$ min/l (cada grifo). Entera.	**Razones internas:** No enteras.

Al igual que la actividad TC4, TC8 está diseñada para ser un repaso de los contenidos vistos hasta la octava sesión, planificados para dos semanas de clase. Por tanto, esta actividad es más extensa que otras tareas para casa. La actividad tiene un primer bloque de preguntas de respuesta cerrada y un segundo bloque de resolución de problemas. Las tres primeras respuestas de opción múltiple se centran en el cálculo, interpretación e identificación de razones externas asociadas a una situación. El cuarto problema de respuesta múltiple es de comparación cualitativa.

Con TC8.1 se pretende trabajar un problema de cálculo e interpretación de la razón asociada a dos magnitudes directamente proporcionales en sentido contrario. Esto es, conocido el significado dar el valor numérico de la razón que se ajusta a ese significado. Las diferentes opciones de respuesta que se plantean al alumno presentan el valor numérico de la razón en dos representaciones diferentes, como fracción y como número decimal. Se da la misma interpretación de los tres valores presentados (representación fraccionaria de k con su significado y representación fraccionaria y decimal de k^{-1} con el significado de k). Los alumnos deben descartar la opción que alega falta de proporcionalidad y encontrar el valor numérico que corresponde a la interpretación de k (cabe la posibilidad de que razonen por descarte al presentarse dos respuestas idénticas en las que solo varía la representación de la cantidad).

TC8.1: *Un grifo echa, cada 5 min, 3 litros de agua, por tanto: (elige la opción correcta)*

1) El grifo suelta 5/3 litros por minuto.
2) El grifo suelta 1,666… litros por minuto.

3) No se puede calcular lo que sale por minuto.
4) El grifo suelta 3/5 litros por minuto.

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Volumen de agua emanado (l). Extensiva, continua. B: Tiempo de apertura del grifo (min). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, volumen de agua emanado por unidad de tiempo.
Estructura funcional: $$\frac{A}{B} = k$$	**Estructura numérica:** $(3:5)$
Razones externas: No enteras.	

El ejercicio TC8.2 es similar al TC8.1. Se presentan al alumno valores numéricos en forma decimal y en forma fraccionaria con un significado que corresponde bien a k, bien a k^{-1}. El alumno debe detectar la pareja “valor numérico” - “interpretación” que sea correcta. Como en otros ejercicios, se proponen cantidades numéricas cuyos únicos divisores primos sean 2 y 5 para facilitar el trabajo con cantidades decimales a los alumnos.

TC8.2: *En el banco me han dicho que el cambio entre euros y dólares está hoy de la siguiente forma: “5 dólares por cada 4 euros”, por tanto: (elige la opción correcta)*

1) Me darán 5/4 euros por cada dólar.
2) Me darán 1,25 dólares por cada euro.
3) Me darán 0,8 dólares por cada euro.
4) Me darán 1,25 euros por cada dólar.

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Valor económico (\$). Extensiva, discreta. B: Valor económico (€). Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, factor multiplicativo para el cambio monetario desde euros a dólares.
Estructura funcional: $$\frac{A}{B} = k$$	**Estructura numérica:** $(3:5)$
Razones externas: No enteras.	

El enunciado de TC8.3 y las respuestas que se plantean nos permitirán introducir el concepto de porcentaje en el aula, como cantidad de una magnitud correspondiente a cien unidades de otra. Además, se trabajan diferentes representaciones de la razón: valor en forma fraccionaria (simplificado y sin simplificar) y valor en forma decimal asociado a la razón como tanto por 1. También se trabaja la interpretación de la razón como relación entre valores de dos magnitudes (que, de hecho, es la respuesta correcta).

TC8.3: *Sabemos que 20 de cada 100 españoles está en el paro, por tanto: (elige la opción correcta)*

1) Hay 0,2 españoles por cada persona que está en el paro.
2) Hay 1 persona en el paro por cada 5 españoles.
3) Hay 0,02 personas en el paro por cada español.
4) Hay 20/100 españoles por cada persona que está en el paro.

Tipo de problema: Análisis de situaciones. **Magnitudes involucradas:** A: Cantidad de personas en paro. Extensiva, discreta. B: Cantidad total de personas. Extensiva, discreta.	**Relación de proporcionalidad:** Directa. **Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre la cantidad de personas en paro respecto a la cantidad total de personas.
Estructura funcional: $\frac{A}{B} = k$ **Razones externas:** k^{-1} entera. (5 españoles por cada persona en paro)	**Estructura numérica:** $(20\colon 100)$

En TC8.4 introducimos un problema de comparación cualitativa en el que no puede decidirse qué chicles son más baratos a partir de las comparaciones absolutas que proporciona el enunciado. La elección de los sujetos para cada comparación se ha hecho de forma que en cada una se usa una situación diferente, lo que puede provocar dificultades en los alumnos para interpretar correctamente el enunciado. Así, la estructura semántica del problema requiere que los alumnos planteen alguna de las siguientes equivalencias para responder adecuadamente:

$$(a+, b) \sim (a, b-) \equiv (a+, b+) \sim (a, b) \Rightarrow \frac{a+}{b+} \text{ ¿? } \frac{a}{b}$$
$$(a+, b) \sim (a, b-) \equiv (a, b) \sim (a-, b-) \Rightarrow \frac{a}{b} \text{ ¿? } \frac{a-}{b-}$$

Este problema es análogo al problema F5.4.

TC8.4: *En la marca T de chicles hay más chicles en cada paquete que en los de la marca D. Por otro lado, cada paquete de la marca D es más barato que los paquetes de la marca T. Por tanto: (elige la opción correcta)*

1) Los chicles de T son más caros.
2) Los chicles de D son más caros.
3) Los chicles de T y D cuestan lo mismo.
4) No puedo saber qué chicles son más caros.

Tipo de problema: Comparación cualitativa. **Magnitudes involucradas:** A: Valor económico. Extensiva, discreta. B: Cantidad de chicles. Extensiva, discreta.	**Relación de proporcionalidad:** Directa. **Constante de proporcionalidad:** k, coste unitario de cada chicle.

Estructura funcional: $$\frac{A}{B} = k$$	**Estructura numérica:** $$(a + : b) \sim (a : b -)$$

En TC8.5 la interpretación de las razones, que relacionan dos magnitudes iguales (medidas en objetos diferentes), puede suponer un obstáculo a los alumnos que, además, se encuentran con una estructura numérica que puede dificultar el trabajo con razones (tanto externas como internas). Lo anterior, unido a la relación entre las cantidades de la variable independiente, $3 = 2 + \frac{1}{2} \cdot 2$, puede favorecer la aparición de estrategias de construcción progresiva.

TC8.5: *Para la masa de tortas de maíz se deben mezclar 3 kilos de harina de trigo por cada 2 kilos de harina de maíz. ¿Qué cantidad de harina de trigo debo mezclar para hacer tortas si he echado 3 kilos de harina de maíz a la masa?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Masa de harina de trigo (kg). Extensiva, continua. V. independiente, A: Masa de harina de maíz (kg). Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre la masa de harina de trigo respecto a la masa de harina de maíz.
Estructura funcional: $$X = k \cdot A$$	**Estructura numérica:** $$(3 : 2) \leftrightarrow (x : 3)$$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No entera.

En el falso problema de valor perdido TC8.6, no cabe plantearse una relación funcional entre la duración de una película y el valor económico de la entrada ya que los cines cobran una cantidad fija por entrada (en un mismo día) para cualquier película. En todo caso, la función asociada a la situación es una función constante que no da lugar a una relación de proporcionalidad. Se espera que los alumnos aleguen que el valor económico de la entrada no depende de la duración de la película y que, por tanto, o bien no tiene sentido plantearse el problema anterior, o la entrada sigue costando lo mismo.

TC8.6: *La entrada de cine para ver una película que dura 3 horas cuesta 7,5 €. ¿Cuánto costará la entrada de cine para ver una película que dura 2 horas?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación proporcional

La estructura numérica en TC8.7 no facilita ninguna de las posibles técnicas de resolución. Al ser k una magnitud intensiva bien compactada de significado fácilmente identificable es probable que los alumnos se decanten por una estrategia de cálculo de la cantidad desconocida multiplicando por la razón k la cantidad de la variable A en la segunda situación. Para su resolución también es necesario tener en cuenta el cambio de unidades entre número de docenas de huevos y número de huevos.

TC8.7: *Si 3 docenas de huevos cuestan 3,5 euros. ¿Cuánto costarán 25 huevos?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Valor económico de los huevos. Extensiva, discreta. V. independiente, A: Cantidad de huevos (docena, huevo). Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, coste unitario (de una docena o de un huevo).
Estructura funcional: $X = k \cdot A$	**Estructura numérica:** $(3{,}5 : 3 \cdot 12) \leftrightarrow (x : 25)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No entera.

El problema TC8.8 es la versión como problema de valor perdido del problema de comparación cuantitativa F8.2.2. Se espera que los alumnos puedan interpretar correctamente la amalgamación por producto de las variables independientes ya que es la misma amalgamación que se ha trabajado anteriormente en la sesión. La estructura numérica favorece tanto el trabajo mediante amalgamación como el cálculo de razones sucesivas para obtener la constante de proporcionalidad. Parece razonable a partir del significado y de la estructura numérica que los alumnos se decanten por el cálculo de k, y no por el de k^{-1}, y utilicen una multiplicación (o dos en el caso del método paso a paso) para calcular el valor desconocido.

TC8.8: *Para alimentar a 4 gatos durante 5 días necesitamos 40 vasos de leche. ¿Cuántos vasos de leche necesitaremos para alimentar a 3 gatos durante 7 días?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Volumen de leche (vaso). Extensiva, continua. V. independiente, A: Cantidad de gatos. Extensiva, discreta. V. independiente, B: Tiempo durante el que se alimenta (días): Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, volumen de leche en cada ración. **Amalgamaciones parciales:** $A \cdot B$, cantidad de raciones necesarias. X/A, volumen total de leche que consume cada gato. X/B, volumen diario de leche necesario para alimentar a todos gatos.
Estructura funcional: $X = k \cdot A \cdot B$	**Estructura numérica:** $(40 : 4 : 5) \leftrightarrow (x : 3 : 7)$
Razones externas: $k = 2$ vasos/ración, entera. X/A y X/B enteras.	**Razones internas:** No enteras.

La interpretación del producto en TC8.9 es complicada ya que requiere considerar que el tiempo de alojamiento de cada uno de los amigos que se alojan es aditivo, y que el hotel cobra una cantidad constante por persona y día. Así, tiene sentido calcular el número de pernoctaciones que nos cobrará el hotel multiplicando el número amigos que se han alojado por el número de noches que ha estado cada uno. La estructura numérica y su interpretación hacen previsible que los alumnos se decanten por una estrategia de cálculo de k_1 y k_2 en vez de k_1^{-1} y k_2^{-1}.

TC8.9: *En el hotel A han cobrado 1750 € a 5 amigos por dormir 11 noches. En el hotel B, a 7 amigos les han cobrado 1120 € por dormir 4 noches. ¿Qué hotel es más barato?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa. **Magnitudes involucradas:** A: Valor económico total del alojamiento (€). Extensiva, discreta. B: Cantidad de personas que se han alojado. Extensiva, discreta. C: Tiempo de alojamiento (día): Extensiva, discreta.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta. **Constante de proporcionalidad** k, coste unitario del día de alojamiento (por persona). **Amalgamaciones parciales:** $B \cdot C$, días de alojamiento que deben pagar entre todos. A/B, valor económico del alojamiento (de toda la estancia) por persona. A/C, valor económico del alojamiento (para todo el grupo) por noche.
Estructura funcional: $\frac{A}{B \cdot C} = k$	**Estructura numérica:** $(1750:5:11) \sim (1120:7:4)$
Razones externas: Todas enteras salvo A/C y $A/(B \cdot C)$ en la primera situación.	**Razones internas:** No enteras.

V.1.3.9. Novena sesión: Porcentajes I

A partir de la novena sesión comienza el trabajo con porcentajes. La idea principal es identificar las situaciones en las que intervienen porcentajes con las de proporcionalidad simple. Así, se relacionan los conceptos de porcentaje como cantidad de una magnitud asociada a 100 unidades de otra. A partir de lo anterior, los problemas con cálculo de porcentajes de Tipo I, Tipo II y Tipo III, se identifican con problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla V - 10.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Interpretar el porcentaje como tanto por cien. • Calcular el porcentaje que representa una cantidad respecto de otra, asociando el proceso al cálculo de una razón. • Calcular un porcentaje de una cantidad, asociando el proceso a la resolución de problemas de valor perdido.	• Porcentajes. • Cálculo del porcentaje que una cantidad representa respecto de otra. • Cálculo de la cantidad que representa un porcentaje de otra cantidad.

Tabla V - 10. Objetivos didácticos y contenidos de la novena sesión (Ciclo II-1).

Esquema de la sesión:

- El profesor recoge la tarea para casa TC8 y entrega a los alumnos una resolución razonada y comentada del TC8 para que comparen con su resolución (una vez devuelta).
- A partir del problema TC8.3 se abre un pequeño debate sobre el significado del porcentaje y se institucionaliza su significado como cantidad de una magnitud asociada a 100 unidades de otra. (10 min)
- Mediante trabajo en parejas, se resuelven los problemas de F9.1. (30 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F9.1. (10 min)
- Reparto de los problemas para trabajar individualmente en casa contenidos en TC9, para reforzar lo tratado durante la sesión.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de esta sesión pertenecen a una ficha de trabajo en el aula, F9.1 y una ficha de trabajo para casa, TC9. Analizamos individualmente cada uno de los ejercicios propuestos:

Tras la institucionalización de la noción de porcentaje surgida del debate de la actividad TC8.3 se espera que los alumnos puedan analizar situaciones de porcentaje y resolver los problemas asociados. El primer problema F91.1 es un problema de Tipo II. A partir de un contexto numérico que relaciona dos cantidades de magnitud se espera que los alumnos puedan calcular la razón asociada y normalizarla para obtener el numeral del porcentaje asociado a dicha razón. Además, se comienza a trabajar con porcentajes complementarios.

F9.1.1: *En cierta población, en las últimas elecciones municipales, votaron 2400 personas de las 3000 que podían hacerlo. A) ¿Qué porcentaje de personas votó? B) ¿Qué porcentaje de personas se abstuvo (no votó)?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo del porcentaje conocidos parte y total. Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de personas que votan. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de personas que se abstienen. Extensiva, discreta. T: Total de personas que pueden votar. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el total de personas que pueden votar y el total de personas que efectivamente votan (análogamente para $(1-k)$ con las abstenciones).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \frac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(3000{:}\, 2400 + \square) \leftrightarrow (100{:}\, x_1 + x_2)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** Enteras

En el problema F9.1.2 se aborda un problema de Tipo I y se hace énfasis en la relación del porcentaje con la razón unitaria. Además, se retoma el cálculo de porcentajes y cantidades complementarias en la estructura parte-todo del problema. Aunque este problema pudiera resultar más familiar a los alumnos que F9.1.1, presentamos primero aquel para insistir en la interpretación del porcentaje como una razón normalizada o relación entre dos cantidades de magnitud, una de ellas con el valor 100. Los contextos de F9.1.1 y F9.1.2 son muy similares ya que ambos presentan magnitudes discretas de cardinalidad.

F9.1.2: *En una ciudad hay un 52% de mujeres. Si la población total es de 725.000 habitantes: A) ¿Cuántas mujeres viven en esa ciudad? B) ¿Cuántos hombres viven en la ciudad? C) ¿Cuál es la razón entre hombres y mujeres? D) ¿Cuál es el porcentaje de hombres respecto de la población total de la ciudad?*

Tipo de problema: Valor perdido y cálculo de razones. Cálculo de la parte conocidos el porcentaje y el total. Tipo I.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de mujeres. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de hombres. Extensiva, discreta. T: Total de personas. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el número de mujeres y las personas que viven en la ciudad (análogamente para $(1-k)$ con hombres).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \qquad P_1 = \dfrac{k}{1-k}\, P_2$	**Estructura numérica:** $(100\colon 52 + x_4) \leftrightarrow \ (725000\colon x_1 + x_2)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** Enteras

En los problemas de la tarea para casa se repite el patrón de la ficha de problemas realizada en clase. Se presenta en primer lugar un problema de Tipo II para, a continuación, presentar un problema de Tipo I. El problema TC9.1 se contextualiza en una situación de mezcla, equivalente a la de F4.1.1, en la que aparecen magnitudes continuas. Tras la presentación de la situación de forma numérica, se pide que se calcule una razón y posteriormente el porcentaje asociado. Por último, el problema concluye con un enunciado de problema de valor perdido análogo al realizado en F7.1.4.

TC9.1: *Para elaborar refresco de naranja se deben mezclar 0,4 litros de zumo de naranja con un litro de agua. A) ¿Cuál es la razón entre el agua y el zumo? B) ¿Cuál es el porcentaje de zumo de naranja respecto del total de refresco? C) ¿Qué harías para elaborar 2 litros de refresco?*

Tipo de problema: Valor perdido y cálculo de razones. Cálculo del porcentaje conocidos parte y total. Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.

Magnitudes involucradas: P_1: Volumen de zumo de naranja. Extensiva, continua. P_2: Volumen de agua. Extensiva, continua. T: Volumen de refresco. Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el volumen de zumo de naranja y el volumen de refresco (análogamente para $(1-k)$ con el volumen de agua).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \qquad P_1 = \frac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(\square : 0{,}4 + 1) \leftrightarrow (100{:}\, x_1 + \square), (2{:}\, x_2 + x_3)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras en la pregunta B) y enteras en la pregunta C).

En TC9.2 se presenta un problema análogo a F9.1.2, con el mismo tipo de magnitudes. La diferencia con F9.1.2 es que en este problema el total se descompone en tres subconjuntos disjuntos en vez de en dos. El porcentaje que deben usar los alumnos para realizar el problema de Tipo I se obtiene como complementario de la suma de los dos porcentajes suministrados en el enunciado.

TC9.2: *En el instituto hay 460 alumnos repartidos de la siguiente forma: en primer ciclo está el 45% de los alumnos, en segundo ciclo el 30%, y el resto está en bachiller. A) ¿Qué porcentaje de alumnos hay en bachiller? B) ¿Cuántos alumnos hay en bachiller?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo de la parte conocidos el porcentaje y el total. Tipo I.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de alumnos en primer ciclo. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de alumnos en segundo ciclo. Extensiva, discreta. P_3: Cantidad de alumnos en bachiller. Extensiva, discreta. T: Cantidad total de alumnos. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k_1, comparación multiplicativa entre el número de alumnos de primer ciclo y el total de alumnos del instituto (análogamente para k_2 con los alumnos de segundo ciclo y k_3 para los alumnos de bachiller).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 + P_3$ $P_1 = k_1 \cdot T \qquad P_2 = k_2 \cdot T \qquad P_3 = k_3 \cdot T$ $k_1 + k_2 + k_3 = 1$	**Estructura numérica:** $(100{:}\, 45 + 30 + x_1) \leftrightarrow (460{:} \square + \square + x_2)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

V.1.3.10. Décima sesión: Porcentajes II

Durante esta sesión se refuerzan los conceptos relacionados con porcentajes y se amplía el campo de problemas trabajado. Así, se incorporan problemas de Tipo III o cálculo del total conocido el porcentaje y la parte, mediante un problema introductorio. Tras el debate e institucionalización se continúa con este tipo de problemas para reforzar la adquisición de este contenido.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla V - 11.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Profundizar en el concepto de porcentaje como tanto por cien. • Consolidar la relación entre los problemas de porcentajes y los de proporcionalidad directa. • Calcular razonadamente el total conocidos la parte y el porcentaje asociado a la parte.	• Porcentajes. • Cálculo de la cantidad total conocidos la parte y el porcentaje asociado a ella.

Tabla V - 11. Objetivos didácticos y contenidos de la décima sesión (Ciclo II-1).

Esquema de la sesión:

- Se recogen las producciones de los alumnos para TC9 y se realiza una puesta en común. (10 min)
- A partir de la situación introductoria F10.1 los alumnos se introducen en el cálculo del total conocida la parte y el porcentaje asociado en un contexto real. (10 min)
- Se realiza una puesta en común con todo el grupo de F10.1 y se institucionaliza el proceso asociándolo, de nuevo, a la resolución de un problema de valor perdido. (5 min)
- Mediante los problemas F10.2 los alumnos consolidan las técnicas aprendidas asociadas al cálculo de porcentajes. (15 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F10.2. (10 min)
- Entrega de los problemas asociados al cálculo con porcentajes (TC10) para que los alumnos refuercen en casa de forma individual los contenidos.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de esta sesión pertenecen a dos fichas de trabajo en el aula, F10.1 y F10.2, que se reparten en momentos diferentes de la sesión y una ficha de trabajo para casa, TC10. Analizamos individualmente cada uno de los ejercicios propuestos.

En el problema introductorio F10.1.1 se presenta un contexto realista para introducir de modo natural los problemas de Tipo III. Se pide a los alumnos que verifiquen la corrección de una información estadística sobre el número de alumnos que han aprobado todas las asignaturas en un trimestre. En la información no cuadran los valores absolutos con el porcentaje asociado. Se espera que los alumnos detecten este error. A partir de ahí, los alumnos reciben la información de que el dato erróneo es el total de alumnos, por lo que los datos correctos son la parte de alumnos con todo aprobado y el porcentaje asociado. Así, la situación se convierte en un problema de Tipo III. La estructura numérica favorece las estrategias funcionales (con razón externa entera $100/25$) frente a estrategias escalares (razones internas no enteras $25/6$).

F10.1.1: *Un profesor del instituto ha hecho un resumen de los resultados de la primera evaluación. En el resumen para 3º A aparece lo siguiente:*

3ºA	Total de alumnos: 17
Alumnos con …	
…0 suspensos: 6	25%

¿Estás de acuerdo con el anterior resumen? ¿Por qué? Sabiendo que el error está en el total de alumnos, corrige el anterior resumen para que sea correcto.

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo del total conocidos el porcentaje y la parte. Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de alumnos con 0 suspensos Extensiva, discreta. T: Total de alumnos. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el número de alumnos sin suspensos y el número total de alumnos de clase.
Estructura funcional: $P_1 = k \cdot T$	**Estructura numérica:** $(100 : 25) \leftrightarrow (x_1 : 6)$
Razones externas: k^{-1}entera.	**Razones internas:** No enteras.

El primer problema tras la institucionalización, F10.2.1, vuelve a ser un problema esencialmente de Tipo III. Además, se pregunta por un falso complementario, es decir, se pregunta por la cantidad de magnitud asociada a una parte que no es necesariamente la complementaria de la parte sobre la que se informa en el enunciado (las personas rubias no son el complementario de las pelirrojas en el total de la población). La última pregunta insiste en la conexión entre el concepto de porcentaje y el concepto de razón.

F10.2.1: *Se sabe que en un determinado pueblo sólo el 3% de la gente es pelirroja. Si en ese pueblo hay exactamente 625 pelirrojos: A) ¿Cuántas personas viven en ese pueblo? B) ¿Cuántas personas rubias viven allí? C) ¿Cuál es la razón entre el número de pelirrojos y el total de la población?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo del total conocidos el porcentaje y la parte.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de personas pelirrojas. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de personas no pelirrojas. Extensiva, discreta. T: Total de personas en la población. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el número de pelirrojos y el total de personas en la población (análogamente para $(1-k)$ con la cantidad de no pelirrojos).

Estructura funcional:	Estructura numérica:
$T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \qquad P_1 = \frac{k}{1-k} P_2$	$(100 : 3 + \square) \leftrightarrow (x_1 : 625 + \square)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En la actividad F10.2.2, el primer apartado es un problema de Tipo III seguido de otro problema en el que se solicita la cantidad asociada a un porcentaje pensando que se resuelva como un problema de Tipo I seguido del problema de Tipo III (aunque podría resolverse sin necesidad de calcular el total).

F10.2.2: *En el parque hay una gran variedad de árboles. El 7% de ellos son olmos y el 11% fresnos. Sabemos que hay 468 olmos. A) ¿Cuántos árboles hay en total? B) ¿Cuántos de dichos árboles son fresnos?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo del total conocidos el porcentaje y la parte. Cálculo la parte conocido el porcentaje y el total. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de olmos. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de fresnos. Extensiva, discreta. P_3: Cantidad de árboles que no son ni fresnos ni olmos. Extensiva, discreta. T: Total de árboles. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k_1, comparación multiplicativa entre el número de olmos y el total de árboles (análogamente para k_2 con la cantidad de fresnos y para k_3 con la cantidad de árboles que no son ni fresnos ni olmos).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 + P_3$ $P_1 = k_1 \cdot T \qquad P_2 = k_2 \cdot T \qquad P_3 = k_3 \cdot T$ $k_1 + k_2 + k_3 = 1$	**Estructura numérica:** $(100 : 7 + 11 + \square) \leftrightarrow (x_1 : 468 + x_2 + \square)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

De forma exploratoria se introduce un problema asociado a aumentos y disminuciones porcentuales en la tarea para casa. En el primer apartado de TC10.1 los alumnos deben aplicar un aumento (problema Tipo I) y en el segundo apartado calcular qué porcentaje ha aumentado el precio de un producto (Tipo II). Se espera que, al no haber institucionalizado estas situaciones, los alumnos hagan uso de la estructura aditiva y razonen mediante una estructura parte-parte. Es previsible una mayor dificultad en el segundo apartado en el que tienen que calcular la diferencia de precio de forma previa a abordar el problema de porcentaje siguiendo esta estructura de razonamiento.

TC10.1: *Debido a la subida del precio de la gasolina, los billetes de autobús también van a subir de precio. En concreto la subida va a ser del 4,5%. A) Si un billete de autobús cuesta 1,10 euros, ¿cuánto costará después de la subida? B) Si un litro de gasolina ha pasado de costar 0,98 euros a costar 1,1* *euros, ¿cuál es el porcentaje de subida del precio de la gasolina? C) ¿Es justa la subida del precio en el billete de autobús?*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos porcentuales. Tipo I y Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: PI: Valor económico inicial de los productos. Extensiva, discreta. S: Valor económico de la subida. Extensiva, discreta. PF: Valor económico final de la subida. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el valor económico de la subida y el precio inicial del producto.
Estructura funcional: $PF = PI + S$ $PF = (1+k) \cdot PI \qquad S = k \cdot PI$	**Estructura numérica:** $(\square{:}\, 4{,}5 + 100) \leftrightarrow (x_1{:}\, \square + 1{,}10)$ $(1{,}1{:}\, \square + 0{,}98) \leftrightarrow (\square{:}\, x_2 + 100)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

V.1.3.11. Undécima sesión: Repaso

La última sesión antes de la prueba escrita se dedica a resolver problemas que abarcan una gran parte de los contenidos trabajados durante la propuesta. Se trata de una sesión diseñada como taller de problemas, con un abanico de problemas suficientemente amplio como para que las parejas de alumnos trabajen sobre aquellos aspectos en los que crean que tienen más dudas. Así el profesor-investigador puede ir atendiendo dichas dudas de forma individual a lo largo de la sesión. Se pretende en el diseño que la actividad no sea excesivamente larga para dar la oportunidad a que la acabe el mayor número de parejas posible y reservar unos minutos finales para la puesta en común.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla V - 12.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Afianzar los contenidos adquiridos. • Resolver dudas sobre los conceptos trabajados. • Adquirir una visión global y unificada de los contenidos.	• Resolución de situaciones problemáticas asociadas a contextos de proporcionalidad.

Tabla V - 12. Objetivos didácticos y contenidos de la undécima sesión (Ciclo II-1).

Esquema de la sesión:

- La sesión comienza con la puesta en común de los problemas sobre cálculo con porcentajes contenidos en TC10. (10 min)
- Las parejas trabajan los problemas de repaso de F11.1 (30 min)

- Se realiza la puesta en común con todo el grupo de F11.1 para corregir los problemas y aclarar las posibles dudas conceptuales que pudieran tener los alumnos antes de la prueba escrita. (10 min)

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de esta sesión se estructuran en una sola ficha de trabajo, F11.1. En el primer grupo de problemas, F11.1.1, F11.1.2, F11.1.3, los alumnos deben analizar tres contextos para decidir si podría plantearse una situación de proporcionalidad simple directa entre las magnitudes que aparecen y determinar, en caso de que sea posible, las condiciones de regularidad que deberían imponerse. Estas situaciones son similares a las trabajadas en las sesiones 2 y 3. En ninguna de ellas puede considerarse una relación de proporcionalidad directa, pero en cada una de ellas por un motivo diferente.

RAZONA si en las siguientes situaciones hay una pareja de magnitudes directamente proporcionales o no (tienes que explicar por qué).

F11.1.1: *Un equipo de 20 trabajadores ha terminado una obra en 7 días.*

F11.1.2: *En la planta 5 del edificio viven 15 personas.*

F11.1.3: *Lleva trabajando 20 años en la empresa y gana 2000 €.*

F11.1.1 **Tipo de problema:** Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
F11.1.2 **Tipo de problema:** Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes
F11.1.3 **Tipo de problema:** Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación funcional.

El problema de comparación cuantitativa F11.1.4 es similar a los planteados durante las sesiones 4 y 5. Los alumnos deben realizar un cambio de unidades de semanas a días o viceversa para poder resolver el problema. La estructura numérica favorece el uso de estrategias funcionales frente a escalares, ya que las razones externas "número de páginas por día" son enteras, frente a las razones internas que no lo son.

F11.1.4: *Eduardo se ha leído un libro de 350 páginas en 2 semanas, mientras que Andréi se ha leído un libro de 260 páginas en 10 días. ¿Quién lee más rápido Eduardo o Andréi?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de páginas. Extensiva, discreta. B: Tiempo (semana/día). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, velocidad de lectura (cantidad de páginas por unidad de tiempo)

Estructura funcional: $$\frac{A}{B} = k$$	**Estructura numérica:** $$(350: 2 \cdot 7) \sim (260: 10)$$
Razones externas: $k_1 = 25$ páginas/día y $k_2 = 26$ páginas/día, enteras.	**Razones internas:** No enteras.

El problema de valor perdido F11.1.5 se plantea en una situación de proporcionalidad compuesta como las trabajadas en la sesión 8. Se favorece la amalgamación por producto con la presencia de la magnitud intensiva "tiempo diario de trabajo". Tras la amalgamación, el problema se reduce a un problema de valor perdido en una situación simple directa como los trabajados en las sesiones 6 y 7.

F11.1.5: *Para embaldosar 20 m² de mi piso he necesitado trabajar 4 días durante 2 horas y media cada día. ¿Qué superficie habría podido embaldosar si hubiera trabajado 5 días durante 3 horas al día?*

Tipo de problema: Valor perdido. **Magnitudes involucradas:** V. dependiente, X: superficie (m²). Extensiva, continua. V. independiente, A: Cantidad de jornadas. Extensiva, discreta. V. independiente, B: Duración de la jornada (h). Extensiva, continua.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta. **Constante de proporcionalidad:** k, velocidad a la que se embaldosa (superficie embaldosada por unidad de tiempo). **Amalgamaciones parciales:** $A \cdot B$, tiempo total trabajado. X/A, superficie embaldosada por jornada. X/B, superficie embaldosada por cada hora de duración de la jornada.
Estructura funcional: $$X = k \cdot A \cdot B$$	**Estructura numérica:** $$(20: 4: 2{,}5) \leftrightarrow (x: 5: 3)$$
Razones externas: $k = 2$ m²/h, entera. X/A y X/B enteras. Previo cambio de unidades a minutos. $k^{-1} = 30$ min/m², entera.	**Razones internas:** No enteras.

La ficha de trabajo termina con dos situaciones asociadas al concepto el porcentaje. En el problema de Tipo II, F11.1.6, debe calcularse el tanto por ciento asociado a una situación que relaciona dos cantidades de magnitud. Este tipo de problemas se trabajaron durante la sesión 9. La estructura numérica con razones internas enteras y razón externa no entera podría favorecer estrategias escalares.

F11.1.6: *En las rebajas de una tienda una camisa que cuesta 20 euros tiene un descuento de 3 euros. ¿Qué porcentaje de descuento han hecho?*

Tipo de problema: Valor perdido. Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Valor económico descontado (€). Extensiva, discreta. V. independiente, A: Valor económico inicial (€). Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa del valor económico descontado respecto al valor económico inicial.
Estructura funcional: $X = k \cdot A$	**Estructura numérica:** $(3{:}\,20) \leftrightarrow (x{:}\,100)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** $r_A^{-1} = 5$, entera.

En F11.1.7 aparece un problema de Tipo III en el primer apartado, con un contexto similar a los trabajados en la sesión 10. En los dos siguientes apartados se trabaja el concepto de complementario.

F11.1.7: *En una clase ha aprobado el 80% de los alumnos. A) Sabiendo que han aprobado 26 personas, ¿cuántos alumnos hay en clase? B) ¿Qué porcentaje de alumnos ha suspendido? C) ¿Cuántos alumnos han suspendido?*

Tipo de problema: Valor perdido. Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de aprobados. Extensiva, discreta. P_2 : Cantidad de suspensos. Extensiva, discreta. T: Cantidad de alumnos. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el total de aprobados respecto al total de alumnos (análogamente para $(1-k)$ con los suspensos).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \frac{k}{1-k}\, P_2$	**Estructura numérica:** $(100{:}\,80 + \square) \leftrightarrow$ $(x_a{:}\,26 + x_c), (100{:}\,80 + x_b)$
Razones externas: No enteras. $(1-k)^{-1} = 5$ alumnos/suspenso, entera. $\frac{k}{1-k} = 4$ aprobados/suspenso, entera. El resto no enteras.	**Razones internas:** No enteras.

V.1.4. Diseño de la prueba escrita

La prueba escrita se diseña para ser realizada de forma individual durante una sesión de clase. Consta de 8 problemas PE.1-PE.8. En los problemas PE.1, PE.2, PE.7 y PE.8 hemos distinguido diferentes apartados. Los problemas cubren la totalidad de los contenidos trabajados durante las sesiones de clase.

Así, en PE.1 los alumnos deben analizar cuatro contextos en los que aparecen cantidades numéricas de magnitud para determinar si puede suponerse una relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes. Este contenido se trabajó específicamente en las sesiones 2 y 3 de la propuesta. El problema presenta tres contextos en los que no puede suponerse una relación de proporcionalidad simple directa y uno en el que sí puede suponerse dicha relación.

PE.1: *En las siguientes situaciones RAZONA si hay alguna pareja de magnitudes directamente proporcionales o no.*

PE.1.1: *Tiene 40 años y cobra 1.000€ al mes.*
PE.1.2: Lucía tiene 3 semanas y pesa 3,6 kg.
PE.1.3: Para trasladar unos ladrillos, 8 obreros han tenido que mover 40 ladrillos cada uno.
PE.1.4: En 5 litros de agua ha echado 2 litros de zumo.

PE.1.1	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación funcional.
PE.1.2	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No puede suponerse relación proporcional.
PE.1.3	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
PE.1.4	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Volumen de zumo (l). Extensiva, continua. B: Volumen de agua (l). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el volumen de zumo respecto al volumen de agua en la mezcla.
Estructura funcional: $\frac{A}{B} = k$	**Estructura numérica:** $(2:5)$
Razones externas: No enteras, ambas con expresión decimal exacta.	

En PE.2 aparecen tres cuestiones de respuesta cerrada, las dos últimas inciden sobre la interpretación, cálculo y reconocimiento de razones externas, contenidos que se trabajaron en las sesiones 2 y 3. El problema PE.2.1 es un problema de comparación cualitativa (sesión 5) extraído del trabajo de Cramer y Post (1993). La respuesta a dicho problema es que no existe información suficiente para poder responder a la pregunta.

PE.2: *Elige la opción que consideres correcta en cada caso:*

PE.2.1: *Bill y Greg, dos hermanos, clavan clavos en dos tablas de madera. Bill clava más clavos que Greg, pero la tabla de Bill es más grande. ¿En qué tabla estarán más apretados los clavos?*

1) En la de Bill.
2) En la de Greg.
3) Los clavos están igual de apretados.
4) No tienes bastante información para responder.

Tipo de problema: Comparación cualitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Constante de proporcionalidad:**
A: Cantidad de clavos. Extensiva, discreta.	k, densidad de clavos (cantidad de clavos por unidad de superficie).
B: Superficie del tablón. Extensiva, continua.	
Estructura funcional:	**Estructura numérica:**
$\frac{A}{B} = k$	$(a+: b+) \sim (a: b)$

En PE.2.2 se combina la necesidad de interpretar razones externas con la de calcular las razones asociadas con diferentes representaciones. De la razón $125/300$ aparece su representación fraccionaria irreducible, pero asociada con la interpretación de su razón inversa (Opción 1). De $300/125$ aparece una representación verbal a partir de la fracción irreducible, pero en la que las magnitudes aparecen intercambiadas (Opción 3) y dos representaciones decimales, una asociada a la interpretación de la razón inversa (Opción 4) y otra correctamente asociada a su interpretación (Opción 2). Las magnitudes que aparecen son ambas continuas y la estructura numérica favorece el cálculo de la razón en notación decimal. Aunque hay una errata en las respuestas 1 y 3 (debería aparecer 12 en vez de 8), esta se detectó en el análisis de las producciones y se corrigió en los siguientes ciclos, por lo que presentamos aquí la redacción tal y como se presentó a los alumnos en este ciclo.

PE.2.2: *Para hacer una crema para los pasteles se echan 125 gr de mantequilla y 300 gr de azúcar. Por tanto:*

1) Hay 5/8 gr de azúcar por cada gr de mantequilla.
2) Hay 2,4 gr de azúcar por cada gr de mantequilla.
3) Hay 8 gr de mantequilla por cada 5 gr de azúcar.
4) Hay 2,4 gr de mantequilla por cada gr de azúcar.

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Constante de proporcionalidad:**
A: Masa de azúcar (g). Extensiva, continua.	k, comparación multiplicativa entre la masa de azúcar respecto a la masa de mantequilla.
B: Masa de mantequilla (g). Extensiva, continua.	
Estructura funcional:	**Estructura numérica:**
$\frac{A}{B} = k$	$(300: 125)$
Razones externas: No enteras.	

El problema PE.2.3 es similar a PE.2.2, en este caso la respuesta correcta presenta la razón externa mediante una fracción irreducible correctamente asociada a su interpretación (Opción 4). En el problema aparece una magnitud discreta y la estructura numérica y las opciones entre las que deben elegir los alumnos son menos cómodas para trabajar con la representación decimal. Se busca, por tanto, una interpretación de la fracción como razón.

PE.2.3: *En 40 min ha leído 15 páginas del libro. Por tanto:*

1) Ha leído 8/3 de página por minuto.
2) Ha tardado 3/8 de minuto por página.
3) Ha leído 2,67 páginas por minuto.
4) Ha leído 3/8 de página por minuto.

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Constante de proporcionalidad:**
A: Cantidad de páginas. Extensiva, discreta.	k, velocidad de lectura (cantidad de páginas
B: Tiempo (h). Extensiva, continua.	por unidad de tiempo).
Estructura funcional:	**Estructura numérica:**
$\frac{A}{B} = k$	$(15:40)$

Razones externas: No enteras. Previo cambio a segundos $k^{-1} = 160$ segundos/página, entera.

El tercer problema de la prueba escrita es de comparación cuantitativa (sesiones 4 y 5), en el que la razón aparece ligada al concepto de espesor. Una de las razones externas es entera, al igual que una de las razones internas. Por lo que no se favorece ninguna estrategia concreta a partir de la estructura numérica.

PE.3: *Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Constante de proporcionalidad:**
A: Masa de fideos (kg). Extensiva, continua.	k, densidad de fideos, masa de fideos por
B: Volumen de caldo (l). Extensiva, continua.	unidad de volumen de caldo.
Estructura funcional:	**Estructura numérica:**
$\frac{A}{B} = k$	$(0{,}9:3) \sim (0{,}5:1{,}5)$
Razones externas:	**Razones internas:**
$k_2^{-1} = 3$ l/kg, entera, el resto no enteras.	$r_B = 2$ entera. El resto no enteras.

El problema PE.4 es de valor perdido en una situación simple directa (sesiones 7 y 8). La posición de la variable dependiente hace que, para resolver el problema mediante cálculo de una razón externa y multiplicación, haya que considerar la razón externa inversa a la que podría parecer más natural, que son los metros cuadrados que pueden pintarse con cada bote. La estructura numérica es más compleja que la de los problemas anteriores. No aparecen razones enteras y solo una razón externa y una interna tienen representación decimal exacta (con tres cifras decimales).

PE.4: *Para pintar una pared de 16 m^2 un pintor ha necesitado 6 botes de pintura. ¿Cuántos botes necesitará para pintar una pared de 22 m^2?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Cantidad de botes de pintura. Extensiva, discreta. V. independiente, A: Superficie pintada (m²). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, cantidad de botes de pintura necesarios por unidad de superficie pintada.
Estructura funcional: $X = k \cdot A$	**Estructura numérica:** $(6{:}\,16) \leftrightarrow (x{:}\,22)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En PE.5 encontramos otro problema de valor perdido, esta vez en una situación de proporcionalidad compuesta (sesión 8). Se favorecen, tanto la amalgamación por producto al incluir una magnitud intensiva, como el cálculo de la constante de proporcionalidad, al ser una cantidad entera, por lo que las amalgamaciones parciales por cociente también son enteras.

PE.5: *La máquina que pone el plástico a las cajas de galletas ha terminado 12.000 cajas en 4 días trabajando 6 horas al día. ¿Cuántas cajas habría terminado si hubiera trabajado 5 días durante 7 horas cada día?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Cantidad de cajas. Extensiva, discreta. V. independiente, A: Cantidad de jornadas de trabajo. Extensiva, discreta. V. independiente, B: Duración de la jornada de trabajo. Intensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, velocidad de empaquetamiento (cantidad de cajas por unidad de tiempo). **Amalgamaciones parciales:** $A \cdot B$, tiempo (total) de trabajo. X/A, cajas por jornada de trabajo. X/B, cajas por cada unidad de tiempo de duración de la jornada de trabajo.
Estructura funcional: $X = k \cdot A \cdot B$	**Estructura numérica:** $(12000{:}\,4{:}\,6) \leftrightarrow (x{:}\,5{:}\,7)$
Razones externas: $k = 500$ cajas/h, entera. X/A y X/B enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En PE.6 se presenta un falso problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta. No se puede considerar como tal por varios motivos. En primer lugar, la calificación de un examen no es una magnitud. Además, es poco razonable pensar que se va a obtener una cantidad constante en la calificación por cada hora de estudio aun suponiendo que pueda existir algún tipo de relación funcional creciente. A pesar de pensar una estructura similar a la del problema PE.5, se espera que los alumnos sean capaces de razonar la imposibilidad de responder a esta cuestión esgrimiendo una o varias de las razones anteriores.

PE.6: *Julia, estudiando 4 días durante 2 horas al día ha sacado un 8 en el examen. ¿Cuánto habría sacado si hubiera estudiado 2 días durante 3 horas al día?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación proporcional.

El problema PE.7 trata de evaluar el conocimiento de los alumnos sobre los conceptos de porcentaje y razón. A partir de un contexto numérico, se plantea un problema de Tipo II (sesión 9), tras el que se pide calcular el porcentaje complementario. Tras ello, se solicita establecer dos razones externas parte-parte.

PE.7: *En una clase hay 18 mujeres y 6 hombres.*

PE.7.1. *¿Qué porcentaje del total de la clase son mujeres?*
PE.7.2. *¿Qué porcentaje son hombres?*
PE.7.3. *¿Cuál es la razón entre mujeres y hombres?*
PE.7.4. *¿Y entre hombres y mujeres?*

Para los apartados PE.7.1 y PE.7.2 analizamos las variables didácticas como un problema de valor perdido de Tipo II y búsqueda del complementario.

Tipo de problema: Valor perdido. Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de mujeres. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de hombres. Extensiva, discreta. T: Cantidad de personas. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el total de mujeres respecto al total de personas. Análogamente para $(1-k)^{-1}$ con los hombres.
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \dfrac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(\square: 18 + 6) \leftrightarrow (100: x_a + x_b)$
Razones externas: $\frac{k}{1-k} = 3$ mujeres/hombre, entera. El resto no enteras.	**Razones internas:** No enteras.

Para los apartados PE.7.3 y PE.7.4 analizamos las variables didácticas como un problema de cálculo de razones. Para ser coherentes con las etiquetas dadas a las variables seguimos utilizando la notación de los apartados anteriores.

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de mujeres. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de hombres. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** $\frac{k}{1-k}$, comparación multiplicativa entre la cantidad de mujeres respecto a la de hombres.
Estructura funcional: $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{k}{1-k}$	**Estructura numérica:** $(18: 6)$
Razones externas: $\frac{k}{1-k} = 3$ mujeres/hombre, entera.	

En el problema PE.8 se combina un problema de Tipo I (primer apartado) y un problema de Tipo III (segundo apartado). Estos contenidos se trabajaron a lo largo de las sesiones 9 y 10. La estructura numérica es más compleja que en otros ejercicios.

PE.8: *Se sabe que aproximadamente el 15% de las personas es alérgica.*

PE.8.1. *¿Cuántos alérgicos debería haber en una ciudad de 22.000 habitantes?*
PE.8.2. *¿Cuántas personas debería haber en una ciudad si sabemos que hay 34.000 personas no alérgicas?*

Tipo de problema: Valor perdido. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de alérgicos. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de no alérgicos. Extensiva, discreta. T: Cantidad de personas. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el total de alérgicos respecto al total de personas (análogamente para $(1-k)$ con los no alérgicos).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \dfrac{k}{1-k}\, P_2$	**Estructura numérica:** $(100: 15 + \square) \leftrightarrow$ $(22000: x_a + \square), (x_b: 34000 + \square)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

V.2. Fase de acción

Una vez presentado el diseño de la propuesta didáctica, concretamos las características de la implementación en este ciclo de investigación-acción. En el Capítulo III presentamos las principales características de los participantes en cada ciclo y de la temporalización de la intervención. En esta sección concretamos los detalles de la muestra en este ciclo, el calendario de actuación en cada uno de los grupos de intervención y, para dar cuenta de la acción, desarrollamos la información obtenida a partir del diario de clase del profesor-investigador.

V.2.1. Participantes

Como ya se ha comentado, la fase de acción del ciclo II-1 se realizó durante el curso 2013-2014 en el IES Leonardo de Chabacier de Calatayud (Zaragoza). Durante dicho curso se contaba con 4 vías para 1º de ESO con un total de 86 alumnos en cuatro grupos ordinarios (A, B, C y D) más otros 15 alumnos en el Programa de Aprendizaje Básico (PAB) y 4 en la Unidad de Intervención Educativa

Específica[49] (UIEE). El profesor-investigador impartía clase en los grupos ordinarios B y D. Además de intervenir en estos dos grupos se eligió el grupo A para intervenir y el grupo C se propuso como grupo de control. La elección se basó en la facilidad para compatibilizar el horario lectivo del profesor-investigador con la intervención en un grupo del que no era el profesor responsable.

En la Tabla V - 13 se observa el número de alumnos que participaron en la experimentación en este ciclo de investigación-acción. Además, el grupo de control contaba con 21 alumnos.

	Grupo A	Grupo B	Grupo D	Total
Alumnos	21	23	21	65
Equipos	10	11	10	31

Tabla V - 13. Número de participantes y de equipos de trabajo (Ciclo II-1).

De esta forma en las tareas de clase se dispone de 31 producciones diferentes (una por equipo), mientras que en las tareas para casa y la prueba escrita tenemos 65 producciones diferentes (una por alumno).

Para hacer referencia a los equipos en este trabajo usaremos la codificación, Xi, donde X representa la letra del grupo e i el ordinal de este según la disposición espacial que había en las aulas. La elección de los grupos se hizo en coordinación con los tutores de los grupos para aquellas aulas en las que los alumnos trabajaban de forma individual y se respetaron las parejas en aquellas en las que ya existía este tipo de agrupación. Los alumnos se codifican añadiendo al código de su equipo el ordinal que le correspondía en él según el orden de las mesas. Al tener un número impar de alumnos en todos los grupos se creó un equipo con tres alumnos en cada grupo. Así en los equipos A4, B9 y D1 trabajaban colaborativamente tres personas, por ejemplo, A4 lo componían A4.1, A4.2 y A4.3.

V.2.2. Calendario de actuación

En la Tabla V - 14 aparece el calendario de actuación y el horario en el que se llevaron a cabo las sesiones. La planificación tuvo en consideración los festivos locales y las actividades extraescolares que tenían los alumnos, de forma que se hicieron coincidir las sesiones 4 y 8 y la prueba escrita con la última sesión de las semanas correspondientes. En los grupos B y D se llevó a cabo la propuesta simultáneamente. Como dijimos en el Capítulo III, la propuesta se ubica dentro del bloque de números, después de trabajar el racional positivo y antes de trabajar los números enteros e introducir el álgebra. En el grupo A, para poder compatibilizar los horarios del profesor-investigador con la intervención, la experimentación comenzó al finalizar la de los grupos B y D, por

[49] PPPSE en la nomenclatura actual (Programa para la Permanencia y Promoción en el Sistema Educativo). En estos grupos no ordinarios se incluyen alumnos que por su perfil académico y personal sufren riesgo de abandono escolar prematuro.

lo que se ubicó al final del bloque de números, tras trabajar los números enteros y antes de introducir el álgebra.

	Grupo A		Grupo B		Grupo D	
Sesión 1	14-03-14	10:35 – 11:25	20-02-14	13:35 – 14:25	21-02-14	08:30 – 09:20
Sesión 2	17-03-14	12:40 – 13:30	24-02-14	08:30 – 09:20	24-02-14	13:35 – 14:25
Sesión 3	18-03-14	13:35 – 14:25	25-02-14	11:30 – 12:20	25-02-14	09:25 – 10:15
Sesión 4	19-03-14	09:25 – 10:15	26-02-14	12:40 – 13:30	26-02-14	08:30 – 09:20
Sesión 5	24-03-14	12:40 – 13:30	03-03-14	08:30 – 09:20	03-03-14	13:35 – 14:25
Sesión 6	25-03-14	13:35 – 14:25	04-03-14	11:30 – 12:20	04-03-14	09:25 – 10:15
Sesión 7	26-03-14	09:25 – 10:15	05-03-14	12:40 – 13:30	05-03-14	08:30 – 09:20
Sesión 8	28-03-04	10:35 – 11:25	06-03-14	13:35 – 14:25	07-03-14	08:30 – 09:20
Sesión 9	31-03-14	12:40 – 13:30	10-03-14	08:30 – 09:20	10-03-14	13:35 – 14:25
Sesión 10	01-04-14	13:35 – 14:25	11-03-14	11:30 – 12:20	11-03-14	09:25 – 10:15
Sesión 11	02-04-14	09:25 – 10:15	12-03-14	12:40 – 13:30	12-03-14	08:30 – 09:20
Prueba	04-04-14	10:35 – 11:25	13-03-14	13:35 – 14:25	14-03-14	08:30 – 09:20

Tabla V - 14. Calendario de actuación (Ciclo II-1).

V.2.3. Desarrollo de las sesiones

En este apartado resumimos el desarrollo de las sesiones a partir de la información recogida en el diario de clases por el profesor-investigador. Destacaremos diferencias entre el diseño inicial de las sesiones y la puesta en práctica en cada uno de los grupos. Comentaremos las incidencias sobre la asistencia y los aspectos actitudinales de los alumnos y resumiremos las apreciaciones sobre la comprensión y el funcionamiento de las sesiones. Dichas apreciaciones se contrastarán posteriormente con los datos obtenidos de las producciones de los alumnos. Haremos especial énfasis en estas secciones sobre aquellas incidencias que provocaron cambios en el diseño o la secuenciación durante la intervención.

V.2.3.1. Primera sesión

No asisten los alumnos A4.2, A4.3 y B4.2.

En los grupos A y D se ejecuta la sesión según el diseño. Sin embargo, en el grupo B falta tiempo para la puesta en común final y no se llegan a nombrar diferentes magnitudes que conocen los alumnos ya que la actividad de la ficha F1.2 se alarga más de lo esperado. Por ello, en el grupo B, se decidió posponer la corrección de F1.2 y el repaso de magnitudes habituales para la siguiente sesión.

En el grupo A, en el que el profesor-investigador imparte docencia por primera vez se registra un comportamiento muy bueno. Los alumnos se muestran muy participativos y reciben bien los cambios metodológicos y el cambio de profesor.

En el grupo B, en cambio, el comportamiento es peor que el habitual, y aunque hay una buena aceptación del material manipulable, la incorporación de preguntas abiertas en F1.1 desconcierta e incluso molesta a los alumnos que demuestran poca autonomía de trabajo. Por contra, en el grupo D el comportamiento es mucho mejor que el habitual, los estudiantes responden adecuadamente al trabajo con material y a las preguntas abiertas.

En la actividad F1.1 solo se observan problemas de comprensión en la comparación de las cantidades de valor económico medidas en euros y dólares. En cambio, las indicaciones para F1.2 no son entendidas por varios alumnos, especialmente del grupo B, que no saben lo que se espera de ellos en esta actividad. En el grupo B se invierte más tiempo del esperado explicando esta actividad. En general, se observa que los alumnos detectan exclusivamente las cantidades correspondientes al valor económico.

La impresión general es que la sesión ha funcionado satisfactoriamente con pequeños inconvenientes en el grupo B que pueden llevar a una reflexión para mejorar el planteamiento de la sesión. Sin embargo, parece que la mayor parte de los inconvenientes han sido provocados por el cambio metodológico y la presencia de actividades abiertas. Por ejemplo, varios equipos no se adaptan bien al trabajo colaborativo en parejas.

V.2.3.2. Segunda sesión

No asisten los alumnos B6.1, B10.1 y B11.1.

El diseño de la segunda sesión resultó excesivamente amplio. La realización de F2.1 y su puesta en común y la posterior institucionalización de los conceptos de razón y condición de regularidad llevó más tiempo del previsto. La ficha F2.2 no pudo completarse en ninguno de los tres grupos, y no llegó a repartirse en el grupo B. En los grupos A y D se repartió la ficha, pero no hubo el tiempo suficiente para que los alumnos la trabajaran y poder realizar una puesta en común. Ante la falta de tiempo, el profesor-investigador realizó ejemplos añadidos sobre el cálculo de razones con el grupo clase y se pospuso la realización de la ficha F2.2 para la tercera sesión. De este modo, se decidió eliminar de la propuesta la ficha F3.1, pasando a ser la ficha F2.2 el material de trabajo durante la sesión 3.

El comportamiento durante la sesión se normalizó, mejorando sustancialmente en el grupo B y empeorando en el grupo D. En este último grupo se constató un mal comportamiento generalizado y falta de interés durante todo el curso. El número de alumnos de este grupo que durante la sesión 2 no quieren realizar las tareas propuestas es elevado.

Hubo un buen resultado con el trabajo de la situación introductoria en la ficha F2.1. Bastantes alumnos fueron capaces de calcular las razones y en todos los grupos apareció de forma natural la idea de condición de regularidad en alguno de los equipos. La puesta en común permitió introducir e institucionalizar las ideas de razón, existencias de dos razones inversas y la condición de regularidad de forma natural a partir de las aportaciones de los alumnos.

V.2.3.3. Tercera sesión

No asisten los alumnos B4.2, B6.1 y B10.2.

Tras las modificaciones hechas a partir de la sesión 2, el nuevo diseño de la sesión 3 se ajustó al tiempo planificado. La actividad F3.1 se repartió como ampliación al equipo A4, que demostró un trabajo sobresaliente durante toda la propuesta.

Los aspectos metodológicos de la investigación vuelven a causar algunos problemas en el grupo B. El grupo D mantiene su mal comportamiento y el elevado número de alumnos “objetores”.

La sucesiva complicación de las situaciones a analizar provoca la aparición de más dudas sobre el concepto de razón y de condición de regularidad. Los alumnos del grupo B manifiestan no entender el concepto de razón por lo que el profesor interviene en este sentido con un refuerzo en la institucionalización y se constata una mejora de la comprensión con el desarrollo de la sesión. Una buena parte de los alumnos trabaja con soltura, especialmente en el grupo A, y parece haber alcanzado una buena comprensión de los conceptos.

V.2.3.4. Cuarta sesión

No asisten los alumnos A10.1, A10.2, B6.1, B8.2 y B11.1.

La ejecución de la sesión varía mucho entre los tres grupos. En el grupo A la sesión se ejecuta según el plan previsto y se ajusta correctamente al tiempo planificado. En cambio, en los grupos B y D el ajuste temporal no es el adecuado. En el grupo D la puesta en común de F4.2 es muy escasa y en el grupo B se tiene que posponer esta puesta en común al comienzo de la siguiente sesión.

La actitud de los alumnos varía en el mismo sentido. Mientras que en el grupo A se registra una buena actitud y un compromiso especialmente bueno durante esta sesión, los grupos B y D no terminan de tener un comportamiento adecuado. De hecho, el diseño de las actividades enfada a muchos alumnos del grupo B al incluirse problemas que no tienen relación de proporcionalidad y por tanto “no pueden resolverse”.

En cuanto a la comprensión, se detectan problemas en algunos alumnos para relacionar la “mejor situación” con “el mayor (o menor) tanto por 1” y siguen persistiendo algunos problemas a la hora de interpretar las razones externas. Una buena parte de los alumnos prefiere trabajar con las razones en su representación decimal. Con la notación decimal los alumnos se sienten más cómodos comparando e incluso interpretando las razones externas como tanto por uno. La interpretación de la razón externa cuando la escriben en forma de fracción es en muchos casos “verbal” es decir, no interpretan la razón como cantidad de magnitud sino como una relación entre el numerador y el denominador.

El funcionamiento general de la sesión se valora positivamente y la situación introductoria parece una manera adecuada de comenzar con los problemas de comparación cuantitativa.

V.2.3.5. Quinta sesión

No asisten los alumnos B6.2, B11.1, D3.1 y D3.2.

La ejecución de esta sesión tiene unos resultados similares en los tres grupos, se ajusta al plan previsto y al tiempo del que se disponía. Además, se registra un comportamiento adecuado de los alumnos en todos los grupos.

En cuanto al desempeño de los alumnos, el profesor-investigador detecta una mejora en el manejo de las razones y su interpretación. Aparecen algunas dificultades ya que algunos alumnos calculan las razones inversas a las que podrían ser naturales para resolver los problemas de comparación. Sin embargo, tras una pequeña reflexión, son capaces de razonar adecuadamente con la razón calculada, invirtiendo el sentido de la frase en la que se solicita la comparación.

Se aprecia, por tanto, que tras esta sesión mejora notablemente la comprensión del concepto de razón y de los problemas de comparación. La familiaridad de los alumnos con los conceptos que se introducen en la propuesta y con las herramientas metodológicas de la investigación promueve un clima de clase adecuado para el trabajo.

V.2.3.6. Sexta sesión

No asisten los alumnos A9.2, B2.2 y B7.2.

La sesión se desarrolla según el plan previsto en los grupos B y D, pero el tiempo resulta insuficiente para la puesta en común de F6.2 en el grupo A. Por ello, se pospone la puesta en común de esta actividad para el grupo A hasta la séptima sesión.

Este desajuste de tiempo en el grupo A se debe principalmente a que los alumnos de este grupo han tenido un comportamiento algo peor al habitual y a que se ha alargado la fase de puesta en común e institucionalización tras la realización de la actividad F6.1. En el grupo A es en el único grupo en el que los alumnos han mencionado de forma expresa la existencia de un “método para resolver fácil estos problemas” que los alumnos decían conocer desde la etapa de primaria, en clara alusión a la regla de tres. Se genera así un pequeño debate con el equipo A4 sobre la conveniencia de poder dar significado a las operaciones realizadas y no aprenderse métodos mecánicos para resolver un problema en concreto.

En el grupo D el profesor-investigador registra, como en otras sesiones, un muy mal comportamiento de los alumnos. Alrededor de la mitad de los alumnos de este grupo no realiza habitualmente ningún trabajo a lo largo de la sesión.

En cuanto a las tareas presentadas se observa que, en general, los alumnos utilizan razones externas para calcular los valores faltantes y aceptan bien este procedimiento tras la institucionalización. Aunque algunos alumnos aislados siguen presentado dificultades para interpretar las razones. Aparecen algunas estrategias por factor de cambio, generalmente en las situaciones con razones internas enteras. Más allá de los conceptos relacionados con la proporcionalidad, el cálculo de las operaciones aritméticas[50], especialmente las divisiones con números decimales, supone un importante obstáculo para varios alumnos.

Se observa en los alumnos, una despreocupación creciente por escribir condiciones de regularidad y por justificar la relación de proporcionalidad existente.

V.2.3.7. Séptima sesión

No asiste el alumno A9.2.

Mientras que en el grupo A la sesión se realiza según la estructura y el tiempo planificados, en los grupos B y D falta tiempo para acabar la sesión convenientemente. En el grupo B muchos alumnos no consiguen acabar los problemas de la actividad F7.1 y en el grupo D se tiene que posponer la puesta en común de la actividad para el principio de la siguiente sesión.

El comportamiento y la implicación en el trabajo han sido óptimos en los grupos A y B. Por el contrario, el grupo D mantiene su mal comportamiento y el bajo número de alumnos que trabajan a lo largo de la sesión.

Algunos alumnos tienen bastantes dificultades en el problema F7.1.3 para calcular la razón inversa de la ya dada en forma decimal en el enunciado cuando intentan resolver el problema mediante una estrategia funcional acabando con multiplicación. Muchos alumnos resuelven el problema mediante una división con sentido de agrupación en este ejercicio.

Aparecen también dificultades en el problema F7.1.4 en el que se introduce una relación proporcional parte-parte-todo. Los alumnos aventajados tienden a resolver este problema mediante técnicas de factor de cambio ya que la estructura numérica genera razones internas enteras.

En general, se valora de forma positiva esta sesión articulada como un taller de problemas, aunque cabría replantearse su duración y la dificultad de algunos problemas.

V.2.3.8. Octava sesión

Asisten todos los alumnos.

[50] El departamento didáctico del centro donde se realiza la experiencia de investigación-acción acordaba que durante los temas aritméticos de 1º y 2º de ESO no se permitiera el uso de calculadora, ni en clase ni en las pruebas escritas. En la propuesta nos decantamos por no modificar esta decisión didáctica del departamento de matemáticas del centro.

La cantidad de actividades para la sesión es excesiva. En el grupo A solo se reparte F8.3 a 3 equipos. En el grupo B se reparte la actividad F8.3 como ampliación para que la trabajen individualmente y en el grupo D no se llega a repartir.

Por otro lado, el comportamiento de los tres grupos ha sido especialmente bueno en esta sesión y la motivación de los alumnos hacia el trabajo ha sido adecuada.

Se constata que la comprensión de la situación introductoria F8.1 causa muchos más problemas que la comprensión de los problemas de la actividad F8.2. Los alumnos invierten mucho tiempo en la situación introductoria y el profesor-investigador debe intervenir en el grupo B y D para realizar aclaraciones sobre en el enunciado.

Casi todas las parejas encuentran finalmente estrategias para la resolución de la situación introductoria. Aparecen de forma natural estrategias de amalgamación y de paso a paso. La aparición de estas estrategias provoca que los alumnos estén despistados durante la institucionalización del método de amalgamación.

El profesor-investigador expresa que quizá una sesión es insuficiente para un adecuado trabajo de este tipo de situaciones. Además, hay que replantearse la situación introductoria y el número de actividades.

V.2.3.9. Novena sesión

No asisten los alumnos B4.1, B5.2, B10.2 y D8.2.

La sesión no se ajusta adecuadamente al tiempo disponible. Aunque en los grupos B y D puede ejecutarse la sesión según el plan previsto, la puesta en común de la actividad F9.1 se hace con premura sin dedicarle el tiempo necesario. En el grupo A no llega a terminarse esta actividad por lo que se decide retomarla y posponer su puesta en común al principio de la décima sesión.

Como en sesiones anteriores, el comportamiento e implicación con el trabajo son adecuados en los grupos A y B, al contrario de lo que sucede en el grupo D.

Los alumnos muestran muchas dificultades en el cálculo e interpretación de las razones asociadas a un porcentaje, especialmente al calcular la razón inversa. Además, se constata la aparición de técnicas que los alumnos conocían de la etapa de Educación Primaria. El profesor-investigador tiene que intervenir abundantemente con las parejas de alumnos durante la sesión.

Tras la sesión el profesor-investigador concluye la necesidad de trabajar durante más tiempo los conceptos relacionados al porcentaje y realizar un trabajo más dirigido para salvar los obstáculos relacionados con los conocimientos previos de los alumnos. Además, habría que reducir el número de problemas introducidos en esta sesión.

V.2.3.10. Décima sesión

Asisten todos los alumnos. Aunque los alumnos pueden trabajar las dos actividades preparadas para la sesión F10.1 y F10.2, no da tiempo de realizar una puesta en común adecuada de F10.2 en ninguno de los grupos por lo que se pospone esta puesta en común para el principio de la undécima sesión.

Los grupos mantienen su perfil de comportamiento e implicación con el trabajo. Se aprecia cierto empeoramiento del comportamiento en el grupo A, probablemente provocado por la falta de comprensión de los aspectos relacionados con el porcentaje durante la novena sesión y que se repiten de nuevo en esta sesión.

La situación introductoria no funciona satisfactoriamente debido a la falta de comprensión de los contenidos de la sesión anterior. Los alumnos no consiguen conectar las situaciones relacionadas con porcentajes con situaciones conocidas de proporcionalidad directa. Aparecen diversas técnicas asentadas en conocimientos anteriores sobre el porcentaje. En esta sesión, de nuevo, el profesor-investigador tiene que intervenir abundantemente durante la sesión con las parejas de alumnos.

El profesor-investigador estima como muy escaso el tiempo dedicado al concepto de porcentaje en la propuesta por lo que propone ralentizar la adquisición de conceptos y ampliar el número de sesiones que se deben dedicar en posteriores ciclos.

V.2.3.11. Undécima sesión

No asisten los alumnos B4.2 y A1.2.

La sesión se ejecuta con normalidad, al ser una sesión de repaso el profesor se adapta al ritmo de cada equipo y corrige individualmente muchos de los problemas. Persisten los problemas de comportamiento en el grupo D.

En general, se constata una mejora en el desempeño de los alumnos. Sin embargo, hay un número importante de alumnos en el grupo D que no sigue la propuesta al mismo ritmo que sus compañeros. Se detecta que el alumno A4.2 realiza estrategias totalmente automatizadas que intenta camuflar.

Varios alumnos muestran su preocupación por la prueba escrita. Dichos alumnos están especialmente preocupados por los problemas relativos a porcentajes ya que parece que la comprensión en la novena y décima sesión sobre estas situaciones ha sido escasa. Los alumnos B3.1 B6.1 y B7.2 solicitan aclaraciones adicionales sobre los problemas de porcentaje al finalizar la clase por lo que el profesor-investigador se queda con ellos durante el recreo para proporcionárselas.

V.2.3.12. Prueba escrita

Asisten todos los alumnos.

Esta sesión transcurre con normalidad en todos los grupos. Muchos alumnos terminan la prueba escrita más de 15 minutos antes del final de la sesión. Ningún alumno requiere de tiempo adicional para concluir la prueba.

Durante el desarrollo de la prueba escrita varios alumnos de diferentes grupos pidieron explicaciones sobre el significado del término ‘espeso’ que aparece en el problema de comparación cuantitativa PE.3.

V.3. Fase de observación

En esta sección presentamos los resultados de la observación para el segundo ciclo en 1º de ESO a partir de la información recogida a través de las producciones de los estudiantes de todos los problemas realizados durante la propuesta y en la prueba escrita final, las producciones de los estudiantes del grupo de control en la prueba escrita, las entrevistas semiestructuradas realizadas a algunos de los estudiantes de los grupos experimentales y los informes realizados por el observador externo.

V.3.1. Análisis de las producciones escritas

En esta sección se analizan las producciones escritas de los alumnos que se escanearon al finalizar cada una de las sesiones de clase y al final de la prueba escrita. Todas las producciones previas a la prueba escrita se recogieron de forma inmediatamente anterior a la puesta en común e institucionalización.

Dividimos el análisis en dos fases. En primer lugar, se analiza la situación introductoria en cada foco de interés. Los alumnos se enfrentan a las situaciones introductorias sin haber recibido instrucción previa sobre los contenidos de ese foco. En segundo lugar, se analizan el resto de las producciones para los problemas realizados durante la secuencia y durante la prueba escrita. De esta forma, puede analizarse la posible influencia de la instrucción en las producciones de los alumnos.

En la mayor parte de los focos de interés, cada fase del análisis se realiza a dos niveles de concreción. En primer lugar, se estudian las producciones según cuatro categorías generales: no entrega o no asiste (N), entrega en blanco (B), resolución incorrecta (I) y resolución correcta (C). En segundo lugar, se estudian las producciones según las categorías específicas descritas en el Capítulo III para cada foco de interés. En este nivel se analizan diferentes estrategias correctas e incorrectas a la hora de resolver los problemas, errores cometidos, sistemas de representación empleados y otras peculiaridades de las respuestas asociadas a la especificidad de los problemas en cada foco. Además, dentro de cada nivel, el análisis cuantitativo según las categorías establecidas se acompaña de un análisis cualitativo de las respuestas.

V.3.1.1. Reconocimiento de magnitudes y uso del vocabulario asociado

A diferencia de la forma de proceder en el análisis de las producciones de los alumnos en otros focos de interés, para el reconocimiento de magnitudes y uso del vocabulario asociado (foco transversal) no se han establecido categorías específicas. Las producciones se analizarán de forma cualitativa y, algunas de las producciones, de forma cuantitativa solo para las categorías generales.

Para este foco de interés se diseñaron actividades introductorias específicas para la primera sesión y la tarea para casa TC1 tras esta primera sesión. Además, se incorporaron problemas en la tarea para casa TC4 para hacer un seguimiento de la evolución en el uso del vocabulario asociado a las magnitudes más habituales. Analizaremos por un lado las situaciones introductorias, F1.1 y F1.2, y por otro el resto de las tareas específicas para este foco de interés, TC1.1-TC1.6 y TC4.5-TC4.9.

Análisis de la situación introductoria.

Recordamos el enunciado de las situaciones introductorias. Para responder a las preguntas F1.1.3 y F1.1.6 los alumnos disponían del material que se presentó en la Imagen V - 1. Las preguntas de F1.2 se realizan a partir de la observación de la factura telefónica de la Imagen V - 2.

F1.1.1: *¿Quién es más alegre de los dos? ¿Cuánto más?*
F1.1.2: *¿Quién pesa más de los dos? ¿Cuánto más?*
F1.1.3: *Tenéis dos tiras de papel encima de la mesa, ¿cuál es más larga? ¿Cuánto más?*
F1.1.4: *¿A quién le gusta más el jamón? ¿Cuánto más?*
F1.1.5: *¿Quién tiene más hermanos? ¿Cuántos más?*
F1.1.6: *Tenéis dos sobres con dinero (falso ☹) encima de la mesa, ¿en qué sobre hay más dinero? ¿Cuánto más?*

F1.2.1: *Encontrad números en esta factura que se utilicen para medir y explicad qué miden.*
F1.2.2: *Encontrad números en esta factura que NO se utilicen para medir y explicad para qué se utilizan.*

En F1.1.1 y F1.1.4 se requiere que los alumnos comparen y cuantifiquen propiedades que no son magnitudes. Las respuestas de los equipos en ambas situaciones son parecidas. Solo un equipo, A6, en una de las situaciones, expresa que la pregunta no puede ser respondida porque el gusto por el jamón es "incontable". Los demás equipos se decantan por uno de los miembros de la pareja como el que presenta en mayor grado la cualidad y a la petición de cuantificar responden usando adverbios como "mucho", "poco", "algo", "bastante", … Algunas parejas utilizan expresiones más propias de magnitudes cuantificables, como que los dos son "igual de alegres" o les gusta el jamón "por igual". Aunque ningún equipo otorga una cantidad absoluta para medir estas cualidades, destaca la aparición de tres comparaciones multiplicativas: "es un 100 % más alegre", "le gusta un 50 % el jamón", "le gusta 5 veces más el jamón".

En F1.1.2, F1.1.3, F1.1.5 y F1.1.6 se solicitaba comparar y cuantificar la diferencia entre los valores de una cierta magnitud que presentaban dos objetos.

- La situación F1.1.5, de cardinalidad, no contiene producciones reseñables, todos los equipos cuantifican el número de hermanos que tienen y lo comparan.
- En la situación F1.1.2, de peso, la mayor parte de los alumnos cuantifica sin dificultad la diferencia expresando esta cantidad en kilogramos. Aparece adecuadamente en una gran parte de las producciones la cantidad numérica asociada a la unidad de medida, aunque tres producciones cuantifican exclusivamente con un valor numérico. La unidad de medida "kilogramo" se abrevia de múltiples formas "kg", "k", "kl", "kilo", … Una minoría de producciones compara los pesos mediante adverbios como en las situaciones en las que la cualidad no era cuantificable.
- En la situación F1.1.3, de longitud, una mayoría de los equipos expresa la diferencia de longitud entre las tiras de papel en centímetros. Sorprende la cantidad de valores diferentes que varían entre los 6 y los 9 centímetros que dan los alumnos como respuesta. Además de con las unidades del Sistema Internacional, aparecen medidas con unidades antropométricas (dedos). La presencia de cantidades numéricas no asociadas a una unidad es mayor que en el caso del peso, pero muchas de ellas parecen estar asociadas a comparaciones multiplicativas entre las tiras de papel expresadas en forma de fracción, "mide un tercio", "mide la mitad". Algunos alumnos hacen explícita esta relación multiplicativa en la que se usa una de las tiras como unidad de medida, "la tira pequeña mide las tres cuartas partes de la grande". Todas estas medidas obedecen a estimaciones, no a procesos de medida reales.
- En la situación F1.1.6, de valor económico medido en euros y libras, la inmensa mayoría de los equipos responde que ambos sobres contienen la misma cantidad de dinero, obviando la diferencia de unidad empleada. Solo cinco equipos responden que la cantidad de dinero es diferente. Algunos expresan que el valor de las libras es mayor y un equipo afirma que 1 libra equivale a 1 euro, conjeturando de este modo el valor de la razón externa en la situación de proporcionalidad directa que se genera en los cambios monetarios.

Para los problemas de la situación introductoria F1.2.1 y F1.2.2 sí se realizó un análisis cuantitativo para las categorías generales que puede observarse en la Tabla V - 15. Dado el porcentaje de éxito, se comprueba que los alumnos no tuvieron dificultades para reconocer algunos de los números que se utilizaban para medir y algunos de los que tenían otro tipo de uso. Las respuestas clasificadas como incorrectas suelen contener algunos números bien identificados y otros identificados de forma errónea. La mayor parte de las producciones para F1.2.1 contiene como número que se usa para medir el identificador de la fecha, por ejemplo, el equipo D9 expresa que la fecha sirve para "medir en qué día estamos", confundiendo el significado de identificador con el de medida. Otras producciones identifican el código de factura o de la cuenta bancaria con el número de facturas emitidas o número de cuentas.

		N	**B**	**I**	**C**
F1.2.1	N.º de respuestas	0	0	5	26
	Porcentaje	-	-	16,1 %	83,9 %
F1.2.2	N.º de respuestas	0	1	1	29
	Porcentaje	-	3,2 %	3,2 %	93,5 %

Tabla V - 15. Resultados generales en los problemas F1.2.1 y F1.2.2 (Ciclo II-1).

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Tras el análisis de la situación introductoria, analizamos el desempeño de los estudiantes en el resto de los problemas de identificación de magnitudes y uso del vocabulario asociado diseñados explícitamente para tal fin en la propuesta. Los resultados cuantitativos para estas categorías pueden observarse en la Tabla V - 16. Las categorías I y C, se desdoblan para analizar si se ha detectado de forma incorrecta o correcta tanto las magnitudes como las unidades empleadas. Se observa un elevado número de producciones no entregadas, especialmente alto en los problemas contenidos en la tarea para casa TC4 (el doble que en TC1).

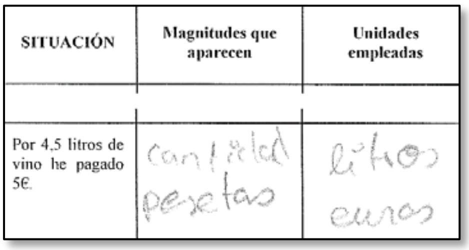
El porcentaje de respuestas en blanco es bajo. Con carácter general, se observa que el porcentaje de éxito en los problemas de TC1 y TC4 es similar. Sin embargo, teniendo en cuenta que el número de alumnos que no entregó la tarea TC4 es mucho mayor y que el porcentaje de respuestas incorrectas es ostensiblemente inferior en los problemas de TC4, sugiere que la competencia de los alumnos implicados para identificar y nombrar correctamente tanto las magnitudes como las unidades empleadas en los contextos que se les presentan mejoró con el paso de las sesiones.

				Magnitud		**Unidad**	
		N	**B**	**I**	**C**	**I**	**C**
TC1.1	N.º de respuestas	11	3	23	28	23	28
	Porcentaje	16,9 %	4,6 %	35,4 %	43,1 %	35,4 %	43,1 %
TC1.2	N.º de respuestas	11	3	33	18	22	29
	Porcentaje	16,9 %	4,6 %	50,8 %	27,7 %	33,8 %	44,6 %
TC1.3	N.º de respuestas	11	3	38	13	36	15
	Porcentaje	16,9 %	4,6 %	58,5 %	20,0 %	55,4 %	23,1 %
TC1.4	N.º de respuestas	11	3	24	27	25	26
	Porcentaje	16,9 %	4,6 %	36,9 %	41,5 %	38,5 %	40,0 %
TC1.5	N.º de respuestas	11	4	33	17	23	27
	Porcentaje	16,9 %	6,2 %	50,8 %	26,2 %	35,4 %	41,5 %
TC1.6	N.º de respuestas	11	4	28	22	22	28
	Porcentaje	16,9 %	6,2 %	43,1 %	33,8 %	33,8 %	43,1 %
TC4.5	N.º de respuestas	22	4	18	21	11	28
	Porcentaje	33,8 %	6,2 %	27,7 %	32,3 %	16,9 %	43,1 %
TC4.6	N.º de respuestas	22	4	28	11	9	30
	Porcentaje	33,8 %	6,2 %	43,1 %	16,9 %	13,8 %	46,2 %
TC4.7	N.º de respuestas	22	4	22	17	22	17
	Porcentaje	33,8 %	6,2 %	33,8 %	26,2 %	33,8 %	26,2 %
TC4.8	N.º de respuestas	22	6	16	21	8	29
	Porcentaje	33,8 %	9,2 %	24,6 %	32,3 %	12,3 %	44,6 %
TC4.9	N.º de respuestas	22	8	12	23	3	32
	Porcentaje	33,8 %	12,3 %	18,5 %	35,4 %	4,6 %	49,2 %

Tabla V - 16. Resultados generales en los problemas de identificación de magnitudes (Ciclo II-1).

Los alumnos han presentado mayores dificultades en los problemas TC1.3 y TC1.4 en los que aparecía un número usado como identificador, no como el valor de una cantidad de magnitud. Así mismo, también se observan mayores dificultades en el reconocimiento de las magnitudes presentes en los problemas TC1.3, TC1.5 y TC4.2. De manera general, se han identificado dos tipos de errores en la denominación de las magnitudes que se han clasificado como respuestas incorrectas:

- Identificación de la magnitud como cardinalidad de unidades. Este hecho es evidente en el caso de la magnitud volumen o capacidad presente en el problema TC4.2. Una gran mayoría de las producciones en este problema etiquetan dicha magnitud mediante el término 'cantidad' (Imagen V - 3). Este fenómeno también sucede en menor medida cuando aparece la magnitud valor económico. Los alumnos etiquetan la magnitud como "cantidad de euros".
- Identificación de la magnitud con la unidad. En algunos casos los alumnos utilizan simplemente el nombre de la unidad para denominar a la magnitud. Es curiosa la producción del alumno B1.1 (Imagen V - 3) que para etiquetar la magnitud valor económico utiliza el término 'pesetas' para después nombrar correctamente la unidad de medida con el término 'euro'.



SITUACIÓN	Magnitudes que aparecen	Unidades empleadas
Por 4,5 litros de vino he pagado 5€.	cantidad pesetas	litros euros

Imagen V - 3. Producción del alumno B1.1 para el problema TC4.6.

V.3.1.2. Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones

El análisis de las relaciones entre magnitudes, el cálculo y reconocimiento de razones (externas) en situaciones de proporcionalidad y el establecimiento de condiciones de regularidad son los contenidos principales relativos al Foco 1. En esta sección analizamos las producciones de los alumnos en las tareas específicas diseñadas para este foco de atención y también la repercusión de estos contenidos en el resto de la propuesta en el análisis de los siguientes focos prioritarios.

Las sesiones 2 y 3 (tanto las actividades de trabajo en clase, como las actividades de trabajo para casa) se dedicaron íntegramente a estos contenidos. Además, se incluyeron problemas específicos en las tareas TC4 y TC8 en las que se incluía un pequeño repaso de contenidos, en la tarea final de repaso, F11.1, y en la prueba escrita. Incluiremos en esta sección algunos apartados de los problemas de porcentajes en las tareas F9.1 y F10.2 en los que se pide explícitamente el cálculo de una razón concreta.

Procederemos, como en otros focos, realizando el análisis en dos fases, primero la situación introductoria y luego el resto de las producciones. Dado el carácter de los problemas asociados a este foco de interés, no haremos un estudio de las estrategias de resolución, sino que analizaremos la interpretación de las razones externas y la adecuación de las condiciones de regularidad que establecen los estudiantes. Por tanto, en este foco de interés, cobra especial importancia el análisis cualitativo de las respuestas.

Análisis de la situación introductoria.

La situación introductoria para este foco de interés tenía el siguiente enunciado:

F2.1.1: *Hemos ido de compras al supermercado y hemos comprado 30 productos y nos han cobrado 15€ ¿Cuánto cuesta 1 producto? ¿Cuántos productos puedo comprar con 1 €?*

F2.1.2: *Unos amigos fueron al supermercado el día 30 y les cobraron 15 € ¿Cuánto hubieran pagado el día 1? ¿En qué día se paga 1€?*

En la situación introductoria se pide calcular las razones externas en una situación de proporcionalidad y también se solicita el equivalente a una razón externa en una situación que no es de proporcionalidad y en la que no tiene sentido dicho cálculo. En la Tabla V - 17 presentamos los resultados para las categorías generales.

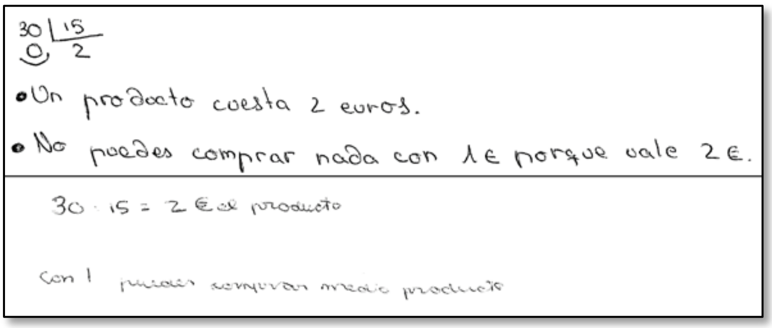
		N	**B**	**I**	**C**
F2.1.1	N.º de respuestas	0	0	10	21
	Porcentaje	-	-	32,3 %	67,7 %
F2.1.2	N.º de respuestas	0	5	7	19
	Porcentaje	-	16,1 %	22,6 %	61,3 %

Tabla V - 17. Resultados generales en la situación introductoria de análisis de situaciones de proporcionalidad y cálculo de razones (Ciclo II-1).

Todos los equipos entregaron la tarea y en el primer problema todos los equipos emitieron una respuesta. Sin embargo, cinco equipos dejaron en blanco la respuesta al segundo problema de la situación. Este hecho es una constante en la propuesta, los alumnos sienten desconcierto inicialmente por los problemas sin solución, o cuya solución es argumentar que no pueden resolverse o no tienen sentido. En torno a dos tercios de los equipos respondieron correctamente a las preguntas en ambos problemas.

Para clasificar una respuesta al primer problema como correcta se ha tenido en cuenta que se contestara correctamente a las dos preguntas que se planteaban, es decir, que se calcularan las dos razones externas de la situación de proporcionalidad. No se ha tenido en cuenta en este nivel si los alumnos establecen o no condiciones de regularidad previas al cálculo de las razones.

En el problema F2.1.1, las diez producciones clasificadas como incorrectas cometen el mismo error, al realizar el reparto de los 30 productos entre los 15 euros que han costado, interpretan el resultado como el precio de cada artículo, es decir, asocian a la razón $30/15$ el significado de la razón inversa (Imagen V - 4). De estas diez producciones incorrectas, nueve tienen en consideración el carácter discreto de la magnitud cardinalidad de artículos y responden que no pueden comprar nada con 1 €, ya que cada artículo cuesta 2 €. El equipo D7 responde que con 1 € se puede comprar medio artículo (Imagen V - 4 , abajo).


30 |15
0 2

• Un producto cuesta 2 euros.

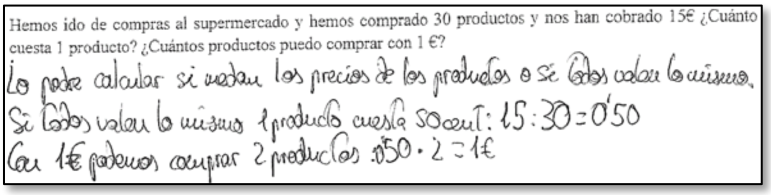
• No puedes comprar nada con 1€ porque vale 2€.

30 · 15 = 2 € el producto

con 1 puedes comprar medio producto

Imagen V - 4. Producción del equipo A3 (arriba) y del equipo D7 (abajo) para el problema F2.1.1 (Ciclo II-1).

Todas las producciones que calculan bien una de las razones, de hecho, presentan las dos razones correctamente. De las 21 respuestas correctas al problema de la situación introductoria F2.1.1, cinco de ellas (16,1 %) hacen mención a la necesidad de saber si los productos son iguales, o si todos los productos comprados tiene el mismo precio, es decir, establecen condiciones de regularidad en el problema para que tenga sentido el reparto y la relación entre el número de productos y el precio total de compra sea de proporcionalidad directa (Imagen V - 5). Cabe destacar que encontramos este tipo de argumentos al menos en un equipo de cada grupo (A1, A4, B5, B9 y D4).


Hemos ido de compras al supermercado y hemos comprado 30 productos y nos han cobrado 15€ ¿Cuánto cuesta 1 producto? ¿Cuántos productos puedo comprar con 1 €?

Lo podes calcular si sabes los precios de los productos o si todos valen lo mismo.

Si todos valen lo mismo 1 producto cuesta 50 cent: 15:30=0'50

Con 1€ podemos comprar 2 productos 0'50 · 2 = 1€

Imagen V - 5. Producción del equipo B9 para el problema F2.1.1 (Ciclo II-1).

En el problema F2.1.2, las producciones clasificadas como incorrectas dan respuesta numérica al menos a una de las dos “falsas” razones solicitadas. Por ejemplo, el equipo B8 contesta que el día uno el producto costará 0,25 € y que el día en el que se pagará 1 € es el 15. Si nos fijamos en las respuestas correctas, 4 equipos (el 12,9 % del total de producciones) no exponen ningún tipo de argumento para justificar que no tenga sentido lo solicitado o que no se pueda calcular, mientras que 15 equipos (48,4 % del total) sí justifican su respuesta. De entre las respuestas clasificadas como correctas, observamos que muchos de los equipos (12 de los 15) alegan que el precio de compra no es una magnitud que dependa del número del día en que estemos y que, por tanto, si compras lo mismo, el precio será el mismo. Otros equipos, como A6 y A7, argumentan que el número de día es un identificador, no una magnitud, y que, por tanto, no puede utilizarse para calcular razones.

Es decir, entre los dos problemas de la situación introductoria, emergen con cierta naturalidad las siguientes tres condiciones necesarias, que constituyen un conjunto de condiciones suficientes, para que dos magnitudes tengan una relación de proporcionalidad directa:

- Debemos disponer de, al menos, dos magnitudes en un problema.

- Las magnitudes deben estar relacionadas (covariación).
- A cada unidad de una de las magnitudes le debe corresponder siempre la misma cantidad de la otra (constancia).

Análisis de las producciones tras la institucionalización.

Dada la variedad de problemas planteados en este foco de interés, para poder realizar un análisis más detallado hemos clasificado dichos problemas en cuatro tipologías: problemas en los que se solicita determinar si existe una relación de proporcionalidad (directa), problemas en los que se solicita calcular las razones (externas) asociadas a una situación de proporcionalidad directa, problemas en los que se pide identificar o calcular concretamente una de las razones externas y detectar "falsos" problemas de proporcionalidad.

Problemas en los que se solicita determinar si existe relación de proporcionalidad (directa).

Como hemos comentado con anterioridad, en la propuesta de 1º de ESO no se trabajan específicamente las relaciones de proporcionalidad inversa, por lo que en los problemas de esta categoría se solicitaba determinar si existía o no una relación de proporcionalidad directa, argumentando la respuesta. Sin embargo, sí que se introducen situaciones de proporcionalidad inversa, TC2.6, TC4.8, F11.1.1 y PE.1.2, para comprobar si los alumnos son capaces de detectar que no hay relación de proporcionalidad directa (aunque sean situaciones que involucran dos magnitudes relacionadas y con una cierta condición de regularidad). Junto a ellas se introdujeron situaciones en las que no podía suponerse una relación de proporcionalidad, bien porque no hubiera dos magnitudes (alguno de los números del enunciado no era un valor de una cantidad de magnitud), TC2.3, F2.2.3, TC4.7 y F11.1.2, bien porque las magnitudes no estuvieran relacionadas o porque tuvieran una relación no proporcional, TC2.2, TC4.5, F11.1.3, PE.1.1 y PE.1.2.

	N	B	I	C		N	B	I	C
TC2.1	27,7 (18)	10,8 (7)	0 (0)	61,5 (40)	**TC4.5**	33,8 (22)	6,2 (4)	16,9 (11)	43,1 (28)
TC2.2	27,7 (18)	12,3 (8)	41,5 (27)	18,5 (12)	**TC4.6**	33,8 (22)	6,2 (4)	3,1 (2)	56,9 (37)
TC2.3	27,7 (18)	18,5 (12)	16,9 (11)	36,9 (24)	**TC4.7**	33,8 (22)	6,2 (4)	3,1 (2)	56,9 (37)
TC2.4	27,7 (18)	21,5 (14)	18,5 (12)	32,3 (21)	**TC4.8**	33,8 (22)	9,2 (6)	23,1 (15)	33,8 (22)
TC2.5	27,7 (18)	18,5 (12)	6,2 (4)	47,7 (31)	**TC4.9**	33,8 (22)	12,3 (8)	1,5 (1)	52,3 (34)
TC2.6	27,7 (18)	21,5 (14)	32,3 (21)	18,5 (12)	**F11.1.1**	0 (0)	9,7 (3)	12,9 (4)	77,4 (24)
F2.2.1	3,2 (1)	0 (0)	0 (0)	96,8 (30)	**F11.1.2**	0 (0)	6,5 (2)	3,2 (1)	90,3 (28)
F2.2.2	3,2 (1)	0 (0)	3,2 (1)	93,5 (29)	**F11.1.3**	0 (0)	9,7 (3)	19,4 (6)	71,0 (22)
F2.2.3	3,2 (1)	22,6 (7)	12,9 (4)	61,3 (19)	**PE.1.1**	0 (0)	1,5 (1)	6,2 (4)	92,3 (60)
F2.2.4	3,2 (1)	22,6 (7)	6,5 (2)	67,7 (21)	**PE.1.2**	0 (0)	1,5 (1)	30,8 (20)	67,7 (44)
F2.2.5	3,2 (1)	29,0 (9)	3,2 (1)	64,5 (20)	**PE.1.3**	0 (0)	1,5 (1)	61,5 (40)	36,9 (24)
TC3.1	38,5 (25)	7,7 (5)	7,7 (5)	46,2 (30)	**PE.1.4**	0 (0)	1,5 (1)	16,9 (11)	81,5 (53)
TC3.2	38,5 (25)	10,7 (7)	4,6 (3)	46,2 (30)					

Tabla V - 18. Resultados generales en los problemas de detección de relaciones de proporcionalidad (Ciclo II-1).

Como se observa en la Tabla V - 18, dentro de las situaciones en las que no encontramos una relación de proporcionalidad directa, los alumnos presentan mayores dificultades a la hora de razonar que una relación de proporcionalidad inversa no es de proporcionalidad directa, que a la hora de detectar situaciones en las que no hay una pareja de magnitudes relacionadas. Aunque la tasa de respuestas correctas en este tipo de problemas aumenta desde el inicio de la propuesta (18,5 % en TC2.6), la tasa de respuestas que caracterizan como de no proporcionalidad directa una relación de proporcionalidad inversa es baja en la prueba final (36,9 % en PE.1.3).

Los alumnos también presentan, inicialmente, problemas en situaciones con magnitudes que pueden considerarse relacionadas, pero no con una relación proporcional, en TC2.2 un 18,5 % de respuestas correctas. Sin embargo, parecen mejorar en este aspecto hacia el final de la propuesta como indica el 67,7 % de éxito en la situación PE.1.2, similar a la anterior. Aunque no se incorporaron a la prueba escrita, los porcentajes de éxito en las situaciones con presencia de distractores que provocaban que en las situaciones planteadas por los alumnos no hubiera dos magnitudes, aunque apareciesen dos números, también mejoran a lo largo de la propuesta, llegando al 90,3 % en F11.1.2, frente al 32,3 % de éxito en el problema TC2.4 y el 61,3 % de acierto en F2.2.3. En general, los alumnos detectan correctamente las situaciones en las que sí hay una situación de proporcionalidad directa manteniendo valores altos en el desempeño desde el principio de la propuesta.

Parece, por tanto, que la existencia de una relación entre las magnitudes genera una mayor dificultad a la hora de rechazar una situación como directamente proporcional. Este hecho se pone en evidencia en la prueba escrita. Solo un 36,9 % de los alumnos detecta que la situación inversa, PE.1.3, no es de proporcionalidad directa, un 67,7 % detecta que no es directa una relación entre la edad en semanas y peso de un bebé, PE.1.2, y un 92,3 % tiene éxito determinando que no existe relación de proporcionalidad directa en la situación PE.1.1 en la que no debería suponerse relación entre las magnitudes involucradas (edad de un trabajador y sueldo mensual).

Pasemos a analizar de forma específica los argumentos empleados por los alumnos para caracterizar la situación de proporcionalidad o la no existencia de esta. Para ello, utilizaremos las categorías específicas que ya presentamos en el Capítulo III y que recordamos en la Tabla V - 19.

Cód.	Argumento	Cód.	Argumento
D0	Sin argumentación.	**D5**	Implícitamente funcional. Multiplicativa.
D1	Por razones internas.	**D6**	Multiplicativa. Doble, triple, mitad, …
D2	Por razones externas.	**D7**	Cualitativa. Aumentos y disminuciones.
D3	Explícitamente funcional.	**D8**	Existencia de relación.
D4	Implícitamente funcional. Aditiva.	**D9**	Número de magnitudes.

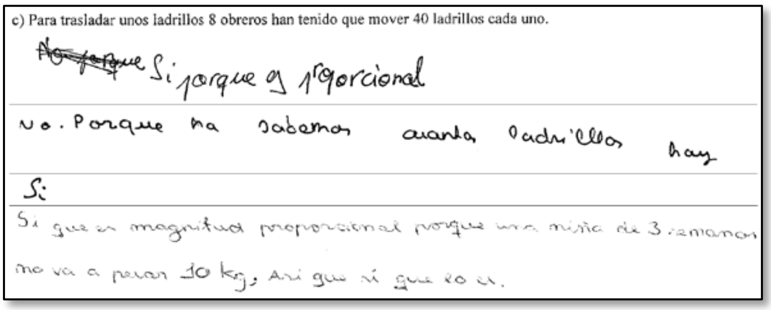
Tabla V - 19. Categorías específicas para el análisis de las caracterizaciones de relaciones de proporcionalidad simple.

En la Tabla V - 20 se han clasificado los argumentos utilizados para razonar la existencia o no de la relación de proporcionalidad directa, se hayan aplicado de forma correcta o incorrecta (columnas I y C de la Tabla V - 18). En los problemas TC4.5, TC4.6, TC4.7, TC4.8 y TC4.9 no se solicitaba argumentar la decisión, por lo que no aparecen en la Tabla V - 20.

Dentro de la categoría D0 se han clasificado las respuestas que, o bien no dan ningún argumento para decidir si una relación es de proporcionalidad directa o no, o los argumentos que dan simplemente parafrasean el contexto que analizan, o no se ha podido encontrar una lógica en la justificación que permite incluirla en alguna de las demás categorías. En la Imagen V - 6 se pueden observar algunas de las producciones escritas incluidas en esta categoría para el problema PE.1.3 de la prueba escrita. Aunque no se observan patrones claros en la variabilidad del número de respuestas no justificadas, parece que la no inclusión de argumentaciones es algo mayor en los problemas en los que sí existe, y los alumnos la detectan, una relación de proporcionalidad simple directa. Especialmente relevante es el porcentaje de respuestas sin argumentar en la tarea F2.2.2, un 41,9 %, cuando un 93,5 % de los alumnos habían detectado correctamente la relación de proporcionalidad simple directa. Este efecto baja en la prueba escrita final, pero aun así se observa un porcentaje ligeramente mayor de respuestas no argumentadas en el problema en el que sí había una relación de proporcionalidad directa (PE.1.4) que en los que no existía tal relación (PE.1.1, PE.1.2 y PE.1.3). Parece, por tanto, que los alumnos sienten una mayor necesidad de argumentar las respuestas negativas que las positivas.

	D0	D2	D5	D6	D7	D8	D9
TC2.1	12,3 (8)	49,2 (32)	-	-	-	-	-
TC2.2	10,8 (7)	43,1 (28)	-	-	-	-	6,2 (4)
TC2.3	7,7 (5)	12,3 (8)	-	-	-	4,6 (3)	29,2 (19)
TC2.4	9,2 (6)	30,8 (20)	-	-	-	6,2 (4)	4,6 (3)
TC2.5	12,3 (8)	41,5 (27)	-	-	-	-	-
TC2.6	7,7 (5)	40 (26)	-	-	-	-	3,1 (2)
F2.2.1	29,0 (9)	67,7 (21)	-	-	-	-	-
F2.2.2	41,9 (13)	15,8 (17)	-	-	-	-	-
F2.2.3	22,6 (7)	16,1 (5)	-	-	-	3,2 (1)	32,3 (10)
F2.2.4	25,8 (8)	48,4 (15)	-	-	-	-	-
F2.2.5	25,8 (8)	41,9 (13)	-	-	-	-	-
TC3.1	24,6 (16)	26,2 (17)	1,5 (1)	-	1,5 (1)	-	-
TC3.2	21,5 (14)	26,2 (17)	-	1,5 (1)	1,5 (1)	-	-
F11.1.1	25,8 (8)	48,4(15)	-	-	-	12,9 (4)	3,2 (1)
F11.1.2	12,9 (4)	19,4 (6)	-	-	-	12,9 (4)	48,4 (15)
F11.1.3	29,0 (9)	41,9 (13)	-	-	-	19,4 (6)	-
PE.1.1	18,5 (12)	26,2 (17)	-	-	1,5 (1)	49,2 (32)	3,1 (2)
PE.1.2	24,6 (16)	53,8 (35)	-	1,5 (1)	1,5 (1)	15,4 (10)	1,5 (1)
PE.1.3	24,6 (16)	67,7 (44)	-	1,5 (1)	1,5 (1)	1,5 (1)	1,5 (1)
PE.1.4	27,7 (18)	61,5 (40)	-	1,5 (1)	3,1 (2)	4,6 (3)	-

Tabla V - 20. Argumentos empleados por los alumnos en el análisis de relaciones de proporcionalidad (Ciclo II-1).


c) Para trasladar unos ladrillos 8 obreros han tenido que mover 40 ladrillos cada uno.

~~No porque~~ Si porque es proporcional

No. Porque no sabemos cuanto ladrillos hay

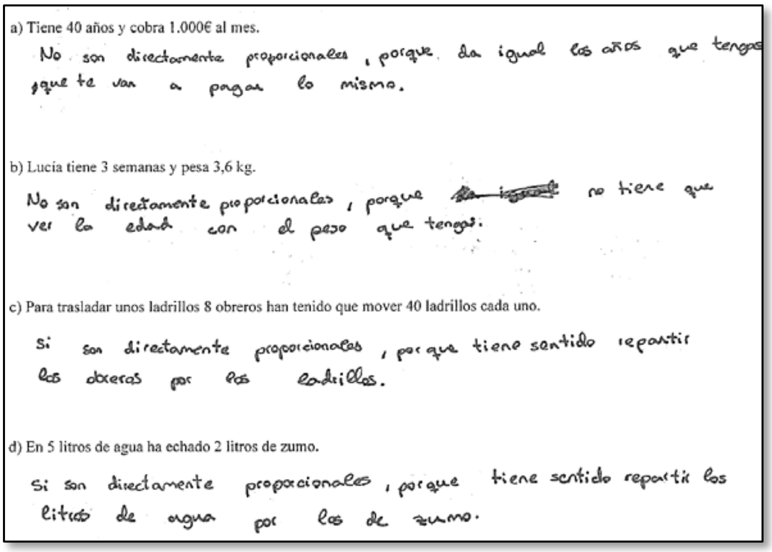
Si

Si que es magnitud proporcional porque una niña de 3 semanas no va a pesar 10 kg, Así que sí que lo es.

Imagen V - 6. De arriba abajo, producciones de los alumnos B11.1, B9.1, D3.1 y D7.2 para el problema PE.1.3.

Como observamos en la Tabla V - 20 el razonamiento mayoritariamente empleado en las argumentaciones gira en torno a la condición de regularidad de la razón externa, categoría D2. Estos argumentos han sido los predominantes en todos los problemas salvo en TC2.3, F2.2.3, F11.1.2 y PE.1.1 (problemas en los que había un distractor o no había relación entre las magnitudes que se presentaban en el contexto). Como ya hemos dicho, los argumentos se han clasificado independientemente de la corrección en las respuestas. Por ejemplo, el alumno A1.1, que es uno de los alumnos entrevistados (ver V.3.3.1. Análisis de la entrevista a A1.1) argumenta que sí son directamente proporcionales la edad de una persona y su altura, estableciendo una condición de regularidad coherente para que lo fuera "se puede si empieza desde cero y siempre crece lo mismo" (ver Imagen V - 73).

Dentro de las respuestas clasificadas en D2 existe un amplio abanico de argumentos con distintos grados de corrección y formalismo, y con diferentes interpretaciones de la razón externa. Desde producciones en las que solo se argumenta que sí o que no "se pueden dividir las magnitudes" en alusión a la posibilidad de establecer las razones externas entre las magnitudes (ver Imagen V - 7, apartados c y d correspondientes a los problemas PE.1.3 y PE.1.4), hasta producciones en las que se presentan condiciones de regularidad y constancia más elaboradas (ver Imagen V - 8, apartados b, c y d, correspondientes a los problemas PE.1.2, PE.1.3 y PE.1.4).


a) Tiene 40 años y cobra 1.000€ al mes.

No son directamente proporcionales, porque da igual los años que tengas que te van a pagar lo mismo.

b) Lucia tiene 3 semanas y pesa 3,6 kg.

No son directamente proporcionales, porque ~~da igual~~ no tiene que ver la edad con el peso que tengas.

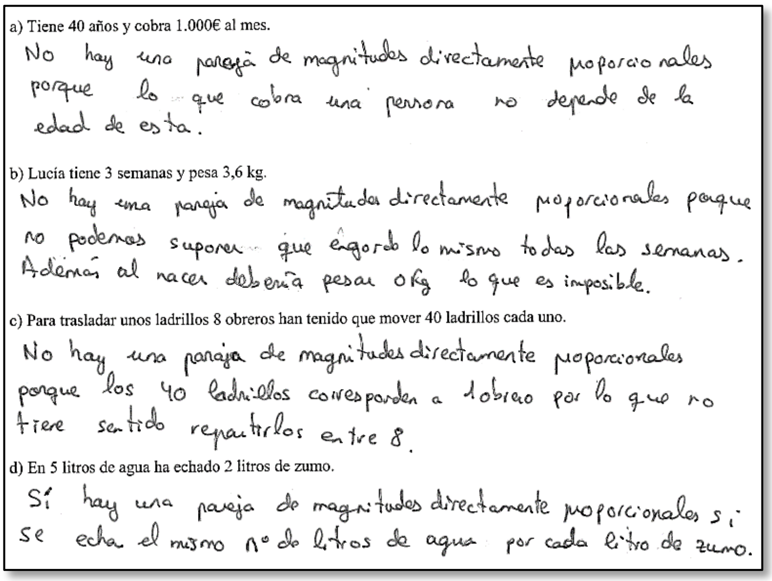
c) Para trasladar unos ladrillos 8 obreros han tenido que mover 40 ladrillos cada uno.

Si son directamente proporcionales, porque tiene sentido repartir los obreras por los ladrillos.

d) En 5 litros de agua ha echado 2 litros de zumo.

Si son directamente proporcionales, porque tiene sentido repartir los litros de agua por los de zumo.

Imagen V - 7. Producciones del alumno B7.2 a los problemas PE.1.1, PE.1.2, PE.1.3 y PE.1.4.


a) Tiene 40 años y cobra 1.000€ al mes.

No hay una parejá de magnitudes directamente proporcionales porque lo que cobra una persona no depende de la edad de esta.

b) Lucía tiene 3 semanas y pesa 3,6 kg.

No hay una pareja de magnitudes directamente proporcionales porque no podemos suponer que engorde lo mismo todas las semanas. Además al nacer debería pesar 0 kg lo que es imposible.

c) Para trasladar unos ladrillos 8 obreros han tenido que mover 40 ladrillos cada uno.

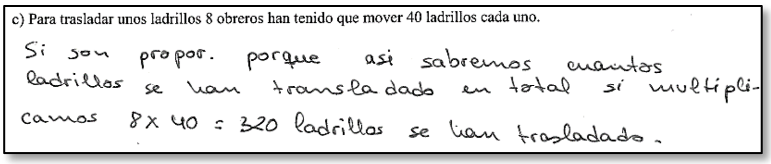
No hay una pareja de magnitudes directamente proporcionales porque los 40 ladrillos corresponden a 1 obrero por lo que no tiene sentido repartirlos entre 8.

d) En 5 litros de agua ha echado 2 litros de zumo.

Sí hay una pareja de magnitudes directamente proporcionales si se echa el mismo nº de litros de agua por cada litro de zumo.

Imagen V - 8. Producciones del alumno A4.1 a los problemas PE.1.1, PE.1.2, PE.1.3 y PE.1.4.

Es destacable el amplio uso de argumentos de tipo D2 que los alumnos utilizan para considerar erróneamente que una situación de proporcionalidad inversa se puede etiquetar como de proporcionalidad directa. Dentro de este tipo de respuestas podemos diferenciar dos tipos. Aquellos alumnos que detectan condiciones de regularidad para poder establecer razones y los que, aun considerando que la operación binaria que puede hacerse entre las magnitudes del contexto sea un producto, etiquetan la relación como de proporcionalidad directa. Parece razonable pensar que los alumnos que argumentan de esta segunda manera tienen una adecuada comprensión del fenómeno que se presenta en el contexto, pero parecen haber identificado "ser de proporcionalidad directa" con el hecho de que pueda realizarse una operación entre las magnitudes que aparecen en el enunciado, sea esta un producto o una razón (ver Imagen V - 9).


c) Para trasladar unos ladrillos 8 obreros han tenido que mover 40 ladrillos cada uno.

Si son propor. porque así sabremos cuantos ladrillos se han translado en total si multiplicamos 8 x 40 = 320 ladrillos se han trasladado.

Imagen V - 9. Producción del alumno A7.2 para el problema PE.1.3.

Una gran parte de los alumnos que identifican como de proporcionalidad directa una relación de proporcionalidad inversa esboza argumentaciones similares a la que puede verse en la Imagen V - 10. La condición de regularidad que establece el alumno A6.2 es correcta, sin embargo, parece identificar la magnitud intensiva "número de ladrillos por obrero" con la magnitud extensiva "número de ladrillos", que sería la magnitud producto en la que recae la constante de proporcionalidad inversa. Por tanto, parece que la posibilidad de considerar las razones entre la magnitud producto y una de las magnitudes "factor" y la confusión entre la magnitud intensiva y la "magnitud numerador" extensiva, son los hechos que llevan a estos alumnos a etiquetar como directamente proporcional esta relación inversa.

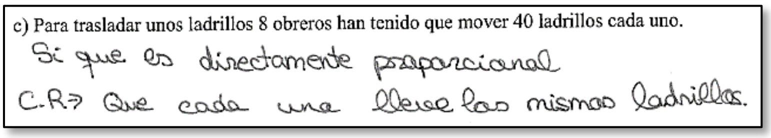

c) Para trasladar unos ladrillos 8 obreros han tenido que mover 40 ladrillos cada uno.
Si que es directamente proporcional
C.R⇒ Que cada una lleve los mismos ladrillos.

Imagen V - 10. Producción del alumno A6.2 para el problema PE.1.3.

En la Imagen V - 7, apartado b, (problema PE.1.2), y en la Imagen V - 8, apartado a, (problema PE.1.1) encontramos producciones clasificadas en la categoría D8. En esta categoría se incluyen las respuestas que justifican la no existencia de una relación de proporcionalidad directa (o la existencia de forma incorrecta o imparcial), aludiendo a la no existencia de una relación funcional entre las magnitudes que se presentan. Por ejemplo, el alumno B7.2 usa este tipo de argumento ("no tiene que ver") para justificar que el peso de un bebé y las semanas de vida no son magnitudes directamente proporcionales (aunque sí podría suponerse una dependencia entre ambas no proporcional). El alumno A4.1 usa una terminología más precisa para el problema PE.1.4 expresando que "lo que cobra una persona no depende de la edad de esta". Es precisamente en el problema PE.1.4 en el único en el que este tipo de argumentaciones ha sido mayoritario, siendo no despreciable su incidencia en otros problemas como F11.1.1, F11.1.2, F11.1.3 y PE.1.2, en los que este tipo de argumento no resulta del todo adecuado.

En la categoría D9 se han clasificado las respuestas que detectan que el número de magnitudes que aparecen en el contexto es insuficiente para considerar una relación. Este argumento se emplea de forma correcta y mayoritaria en TC2.3, F2.2.3 y F11.1.2, ya que en dichos problemas aparecían distractores, o expresiones numéricas que no podían asociarse con una cantidad de magnitud. El uso de este argumento de forma errónea tiene una baja incidencia.

Las argumentaciones implícitamente funcionales mediante argumentos multiplicativos de tipo D5 tienen una aparición testimonial. Solo el alumno D10-1 en la tarea para casa TC3.1 incluye esta caracterización (ver Imagen V - 11). Este hecho es un posible ejemplo de influencia externa, ya que este alumno no volvió a utilizar este tipo de caracterización en toda la propuesta. Además, su texto es prácticamente idéntico al que suele aparecer en los libros de texto. Por lo que, probablemente, sea una transcripción literal.

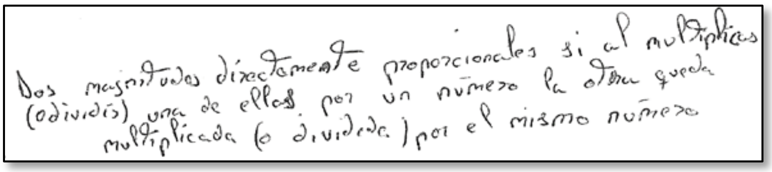

Dos magnitudes directamente proporcionales si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número

Imagen V - 11. Caracterización implícitamente funcional mediante argumentos multiplicativos presentada por el alumno D10.1 en el problema TC3.1.

Las argumentaciones multiplicativas parcialmente correctas de tipo D6 (dobles, triples, mitades, …) y las aditivas de tipo D7 (incorrectas para argumentar la existencia de relación de proporcionalidad directa, pero correctas cuando la relación no es creciente para argumentar que no existe relación de proporcionalidad directa) también tienen una baja presencia. Además, este tipo de argumentación se concentra en las tareas para casa y en la prueba escrita. Podemos ver un ejemplo para cada una de estas categorías en la Imagen V - 12 (D7 arriba, D6 abajo).

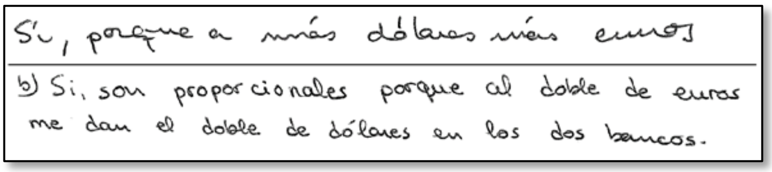

Sí, porque a más dólares más euros
b) Si, son proporcionales porque al doble de euros me dan el doble de dólares en los dos bancos.

Imagen V - 12. Caracterización por aumentos y disminuciones dada por el alumno A2.1 (arriba) y caracterización por dobles dada por el alumno A7.2 (abajo) pare el problema TC3.2.

Problemas en los que se pide calcular las razones externas asociadas a una situación de proporcionalidad (directa).

Analizamos ahora aquellos problemas en los que, a partir de un contexto que presenta dos magnitudes directamente proporcionales, los alumnos debían calcular las dos razones asociadas y dar la interpretación como tanto por uno de dichas razones.

En la Tabla V - 21 pueden verse los resultados para las categorías generales diferenciando si los alumnos han establecido numéricamente las dos razones asociadas a la situación proporcional y si las han interpretado de forma correcta. Solo se han tenido en cuenta las respuestas de aquellos alumnos que sí que supusieron una relación de proporcionalidad simple directa entre las magnitudes (columna C de la Tabla V - 18). Las categorías C1 y C2 se han introducido para distinguir las respuestas correctas parciales de las respuestas totalmente correctas. La abreviatura C1 indica que solo se ha calculado o interpretado una razón y la abreviatura C2 que se han calculado o interpretado ambas razones.

Como observamos en la Tabla V - 21, la gran mayoría de los alumnos que detecta correctamente la relación de proporcionalidad simple directa establece numéricamente las dos razones asociadas. Muy pocos alumnos obvian responder a esta cuestión o lo hace de manera incorrecta y son pocos también los alumnos que establecen solo una de las dos razones externas que pueden considerarse. Se han unido las categorías B e I en el cálculo de la razón ya que no encontramos respuestas esencialmente incorrectas entre los alumnos. Alguna respuesta incorrecta como la del alumno B7.2 al problema TC4.9 en la que presenta como razones las cantidades de cada una de las magnitudes que aparecen en el contexto de forma separada ha sido clasificada en dicha categoría.

			Valor numérico			Interpretación			
		N	**B/I**	**C1**	**C2**	**B**	**I**	**C1**	**C2**
TC2.1	N.º de respuestas	18	2	0	38	5	8	0	27
	Porcentaje	27,7 %	3,1 %	-	58,5 %	7,7 %	12,3 %	-	41,5 %
TC2.4	N.º de respuestas	18	2	0	19	4	6	0	11
	Porcentaje	27,7 %	3,1 %	-	29,2 %	6,2 %	9,2 %	-	16,9 %
TC2.5	N.º de respuestas	18	3	0	28	4	10	0	17
	Porcentaje	27,7 %	4,6 %	-	43,1 %	6,2 %	15,4 %	-	26,2 %
F2.2.1	N.º de respuestas	1	0	2	28	1	0	2	27
	Porcentaje	3,2 %	-	6,5 %	90,3 %	3,2 %	-	6,5 %	87,1 %
F2.2.2	N.º de respuestas	1	0	3	25	4	3	1	20
	Porcentaje	3,2 %	-	9,7 %	80,6 %	12,9 %	9,7 %	3,2 %	64,5 %
F2.2.4	N.º de respuestas	1	0	2	19	2	1	1	17
	Porcentaje	3,2 %	-	6,5 %	61,3 %	6,5 %	3,2 %	3,2 %	54,8 %
F2.2.5	N.º de respuestas	1	0	2	18	2	0	3	15
	Porcentaje	3,2 %	-	6,5 %	58,1 %	6,5 %	-	9,7 %	48,4 %
TC3.1	N.º de respuestas	24	1	5	24	3	7	7	13
	Porcentaje	36,9 %	1,5 %	7,7 %	36,9 %	4,6 %	10,8 %	10,8 %	20 %
TC3.2	N.º de respuestas	24	3	3	24	4	7	2	17
	Porcentaje	36,9 %	4,6 %	4,6 %	36,9 %	6,2 %	10,8 %	3,1 %	26,2 %
TC4.6	N.º de respuestas	22	2	1	34	1	3	2	31
	Porcentaje	33,8 %	3,1 %	1,5 %	52,3 %	1,5 %	4,6 %	3,1 %	47,7 %
TC4.9	N.º de respuestas	22	1	1	32	2	2	0	30
	Porcentaje	33,8 %	1,5 %	1,5 %	49,2 %	3,1 %	3,1 %	-	46,2 %

Tabla V - 21. Resultados generales para los problemas en los que se solicitaba calcular las razones asociadas a una situación de proporcionalidad directa (Ciclo II-1).

Por otro lado, en general, el número de alumnos que interpreta correctamente las razones (como tanto por uno) es menor que el número de alumnos que las calcula numéricamente. En la interpretación de la razón vemos que aumenta significativamente el número de respuestas en blanco e incorrectas y que, en general, el porcentaje de respuestas parcialmente correctas también es ligeramente superior. Este efecto parece disminuir al avanzar la propuesta.

Los errores cometidos por los alumnos a la hora de interpretar las razones son mayoritariamente dos: dar el significado de la razón inversa o interpretar verbalmente la razón[51]. En la Imagen V - 13 (arriba) podemos ver una producción en la que se interpreta cada razón como su razón inversa. En la Imagen V - 13 (centro) se puede apreciar un ejemplo típico de interpretación

[51] Una razón externa, por ejemplo, una razón $(3\colon 5)$ entre el número de mujeres y el número de alumnos de una clase, puede interpretarse correctamente de forma verbal como “3 mujeres por cada 5 alumnos” (equivalentemente para otras razones sin esquema parte-todo). Sin embargo, en las tareas de clase se pide a los alumnos que interpreten como tanto por uno las dos razones que aparecen. De esta forma, se espera que el alumno de un significado diferente al número $3/5$ y al número $5/3$ (que no son el mismo número). Una interpretación de la razón que otorgue significado de cantidad de una magnitud al numerador y al denominador por separado no distingue el significado como cantidades diferentes de diferentes magnitudes intensivas de las dos razones externas que pueden considerarse.

verbal. Otros errores aparecen de forma no sistemática, como el mostrado en Imagen V - 13 (abajo) en el que la razón se interpreta como una cantidad de la magnitud numerador.

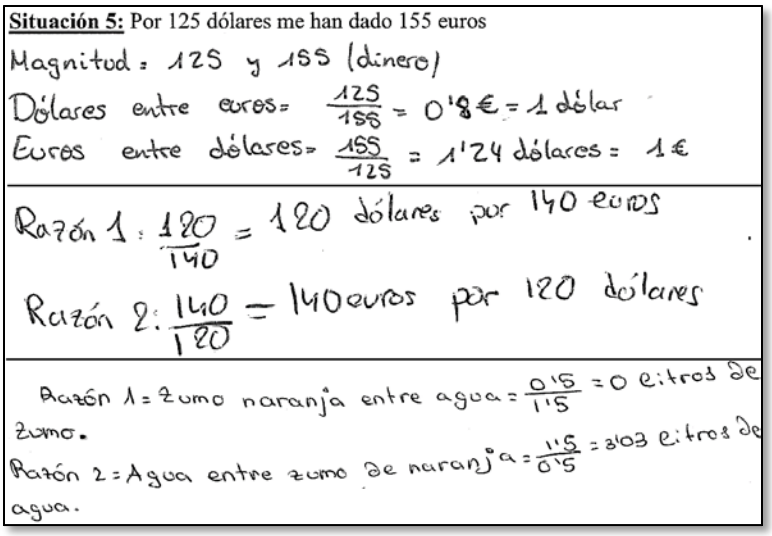


Imagen V - 13. De arriba a abajo, producciones de los alumnos A4-3, D7-1 y A3-2 para los problemas TC2.5, TC3.2 y TC3.1, respectivamente (Ciclo II-1).

Problemas en los que se pide identificar/calcular una razón concreta en una situación de proporcionalidad (directa).

Los problemas que se muestran en la Tabla V - 22 abordan el cálculo e interpretación de la razón externa mediante una actividad de sentido contrario a las presentadas anteriormente.

En este caso el enunciado aporta el significado de la razón y el alumno debe calcular (o seleccionar en los de respuesta cerrada) la razón que puede interpretarse de dicha manera. Los resultados muestran que los problemas planteados en este sentido resultan más complicados que en los que se pide calcular e interpretar ambas razones. En ninguno de los problemas el porcentaje de éxito llega al 50 %. Especialmente bajos son los porcentajes de respuestas correctas en los problemas de respuesta cerrada (entre el 26,2 % y el 38,5 % en la actividad TC8 y ligeramente superiores, entre 36,9 % y el 40 %, en la prueba escrita).

		N	B	I	C
TC8.1	N.º de respuestas	28	4	14	19
	Porcentaje	43,1 %	6,2 %	21,5 %	29,2 %
TC8.2	N.º de respuestas	28	1	11	25
	Porcentaje	43,1 %	1,5 %	16,9 %	38,5 %
TC8.3	N.º de respuestas	28	2	18	17
	Porcentaje	43,1 %	3,1 %	27,7 %	26,2 %
F9.1.2.3	N.º de respuestas	0	11	8	12
	Porcentaje	-	35,5 %	25,8 %	38,7 %
TC9.1.1	N.º de respuestas	22	0	22	21
	Porcentaje	33,8 %	-	33.8 %	32,3 %
F10.2.1.2	N.º de respuestas	0	9	8	14
	Porcentaje	-	29,0 %	25,8 %	45,2 %
PE.2.2	N.º de respuestas	0	0	39	26
	Porcentaje	-	-	60,0 %	40,0 %
PE.2.3	N.º de respuestas	0	1	40	24
	Porcentaje	-	1,5 %	61,5 %	36,9 %
PE.7.3	N.º de respuestas	0	19	14	32
	Porcentaje	-	29,2 %	21,5 %	49,2 %
PE.7.4	N.º de respuestas	0	19	15	31
	Porcentaje	-	29,2 %	23,1 %	47,7 %

Tabla V - 22. Resultados generales para los problemas en los que solicitaba identificar o calcular una razón concreta en una situación de proporcionalidad directa (Ciclo II-1).

Si nos centramos en los dos problemas de la prueba escrita en los que los alumnos debían elegir la opción correcta de las cuatro que se planteaban en cada problema (PE.2.2 y PE.2.3), observamos que, en ambos problemas (Tabla V - 23), la opción elegida de forma mayoritaria es la correcta (aunque haya un mayor número global de respuestas incorrectas). En PE.2.2 las respuestas incorrectas se han distribuido uniformemente entre las tres opciones incorrectas (una en notación simbólica-fraccionaria, otra simbólica-decimal y otra verbal, mientras que la respuesta correcta estaba en notación decimal). En PE.2.3, la opción incorrecta mayoritaria es la única de las cuatro opciones que presentaba una cantidad numérica en notación decimal. Este hecho podría estar influido por la mayor comodidad que sienten los alumnos al trabajar con este tipo de representación numérica para el racional.

		I_1	I_2	I_3	C
PE.2.2	N.º de respuestas	14	13	11	26
	Porcentaje	21,5 %	20 %	16,9 %	40 %
PE.2.3	N.º de respuestas	10	10	20	24
	Porcentaje	1,5 %	15, 4 %	30,8 %	36,9 %

Tabla V - 23. Desglose de respuestas para los problemas de opción múltiple PE.2.2 y PE.2.3 (Ciclo II-1).

Es destacable el elevado número de respuestas en blanco en los problemas de la prueba escrita PE.7.3 y PE.7.4 y en los problemas F9.1.2.3 y F10.2.1.2. Todos estos problemas constituyen apartados dentro de problemas en un contexto de porcentajes. Este hecho pone de manifiesto la dificultad de los alumnos en relacionar el concepto de porcentaje con el de razón, incluso al final de la propuesta didáctica. Los errores en este tipo de tareas son variados, aunque, en general, los podemos agrupar en dos categorías: se presenta la razón inversa a la solicitada (por lo que los alumnos tienen una cierta comprensión del concepto de razón externa, pero fallan al asignarle significado a la cantidad numérica) o se manifiesta una escasa o nula comprensión del término 'razón'. Por ejemplo, alumnos como B5.1 y B7.2 presentan la razón inversa a la que se solicita en PE.7.3 y PE.7.4. Por su parte, el alumno B2.2 confunde el concepto de razón con el de condición de regularidad, y responde "que haya las mismas mujeres por un hombre" en PE.7.3 y responde de forma similar a PE.7.4. Otros alumnos, como D4.1, responden "que son más mujeres que hombres" y "que son menos hombres que mujeres" a las preguntas en PE7.3 y PE.7.4 respectivamente.

Detección de "falsos" problemas de proporcionalidad.

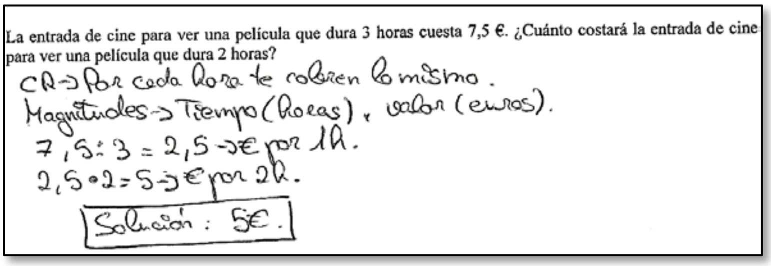
		N	B	I	C
F4.2.2	N.º de respuestas	2	5	9	15
	Porcentaje	6,5 %	16,1 %	29,0 %	48,4 %
F4.2.4	N.º de respuestas	2	10	7	12
	Porcentaje	6,5 %	32,3 %	22,6 %	38,7 %
TC4.3	N.º de respuestas	24	5	20	16
	Porcentaje	36,9 %	7,7 %	30,8 %	24,6 %
TC6.2	N.º de respuestas	22	4	4	35
	Porcentaje	33,8 %	6,2 %	6,2 %	53,8 %
TC6.4	N.º de respuestas	22	3	6	34
	Porcentaje	33,8 %	4,6 %	9,2 %	52,3 %
F7.1.2	N.º de respuestas	1	1	2	27
	Porcentaje	3,2 %	3,2 %	6,5 %	87,1 %
F7.1.5	N.º de respuestas	1	8	3	19
	Porcentaje	3,2 %	25,8 %	9,7 %	29,2 %
TC8.6	N.º de respuestas	28	2	21	13
	Porcentaje	43,1 %	3,1 %	32,3 %	20 %
PE.6	N.º de respuestas	0	4	17	44
	Porcentaje	-	6,2 %	26,2 %	67,7 %

Tabla V - 24. Resultados generales en la detección de falsos problemas de proporcionalidad (Ciclo II-1).

En la Tabla V - 24 resumimos los resultados en las categorías generales para la detección de "falsos problemas de proporcionalidad". Como hemos dicho, se trata de situaciones que semántica y numéricamente mantienen una estructura similar a la de un problema de valor perdido o de comparación. Sin embargo, no puede determinarse una relación funcional explícita entre las magnitudes involucradas (o bien no existe o no tiene sentido considerarla por la inclusión de distractores que no se corresponden con cantidades de magnitud), por lo que no puede resolverse el problema. Una excepción a la estructura anterior es el problema TC4.3 en el que sí tiene sentido calcular las razones en el contexto, pero la pregunta planteada en el problema no guarda relación con el significado de dichas razones.

No se observan patrones claros en los porcentajes en la Tabla V - 24. Sin embargo, parece que el porcentaje de acierto aumenta tras la primera semana de instrucción. Es decir, los alumnos se van acostumbrando a que en la propuesta deben analizar las situaciones antes de abordar numéricamente los problemas. Salvo en los problemas F7.1.5 y TC8.6, el porcentaje de acierto tras la primera semana de instrucción es superior al 50 %. El bajo porcentaje de aciertos en F7.1.5

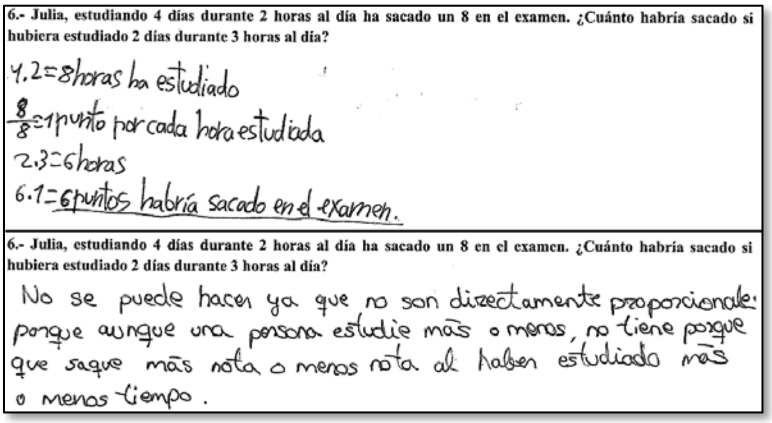
puede deberse a la extensión de la actividad F7.1 que explicaría el 25,8 % de respuestas en blanco. En el problema TC8.6, en cambio, encontramos un alto porcentaje de respuestas incorrectas. Los alumnos que responden incorrectamente en esta actividad responden de forma numéricamente correcta a un problema de valor perdido en el que suponen una relación de proporcionalidad entre el tiempo que dura una película de cine y el precio de la entrada (ver Imagen V - 14). La respuesta del alumno B6.2 que se ve en la Imagen V - 14 es correcta bajo la suposición que él mismo plantea en su resolución, es decir que "por cada hora te cobren lo mismo". Sin embargo, el sistema de precios en los cines no se corresponde a dicho patrón.


La entrada de cine para ver una película que dura 3 horas cuesta 7,5 €. ¿Cuánto costará la entrada de cine para ver una película que dura 2 horas?

CR → Por cada hora te cobren lo mismo.
Magnitudes → Tiempo (horas), valor (euros).
7,5 : 3 = 2,5 → € por 1h.
2,5 · 2 = 5 → € por 2h.
Solución: 5€.

Imagen V - 14. Producción del alumno B6.2 para el problema TC8.6 (Ciclo II-1).

En general, todas las respuestas categorizadas como incorrectas para falsos problemas de proporcionalidad obedecen al mismo patrón de la Imagen V - 14. Es decir, resuelven el problema como si fuera de proporcionalidad. Así en la prueba escrita el 26,2 % de los alumnos resolvieron el problema PE.6, como si fuera un problema de proporcionalidad compuesta mediante una estrategia de amalgamación por producto, de forma similar a como se observa en la Imagen V - 15 (arriba). El porcentaje de éxito en la prueba escrita es similar al obtenido en otros problemas y los alumnos, en general, intentan argumentar por qué no puede resolverse dicho problema (Imagen V - 15, abajo).


6.- Julia, estudiando 4 días durante 2 horas al día ha sacado un 8 en el examen. ¿Cuánto habría sacado si hubiera estudiado 2 días durante 3 horas al día?

4.2 = 8 horas ha estudiado
8/8 = 1 punto por cada hora estudiada
2.3 = 6 horas
6.1 = 6 puntos habría sacado en el examen.

6.- Julia, estudiando 4 días durante 2 horas al día ha sacado un 8 en el examen. ¿Cuánto habría sacado si hubiera estudiado 2 días durante 3 horas al día?

No se puede hacer ya que no son directamente proporcionales porque aunque una persona estudie más o menos, no tiene porque que saque más nota o menos nota al haber estudiado más o menos tiempo.

Imagen V - 15. Producción del alumno A7.1 (arriba) y del alumno A4.2 (abajo) para el problema PE.6 (Ciclo II-1).

V.3.1.3. Problemas de comparación cuantitativa de proporcionalidad simple directa

Además de las categorías generales, para analizar los problemas de comparación cuantitativa se han utilizado las categorías específicas que se recogen en la Tabla V - 25 y que ya presentamos en el Capítulo III.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
C0	Sin razonamiento	**C3**	Resuelve problema de valor perdido
C1	Funcional por razones externas	**C4**	Operaciones sin sentido
C2	Escalar por razones internas	**C5**	Razonamientos aditivos erróneos

Tabla V - 25. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Los problemas de comparación cuantitativa para situaciones de proporcionalidad simple se trabajaron durante las sesiones 4 y 5. Además, se introdujo un problema de estas características en la sesión de repaso (sesión 11) y otro en la prueba escrita.

En esta sección analizamos de forma cuantitativa y cualitativa las respuestas de los alumnos de los grupos sobre los que se experimentó exclusivamente para los problemas en los que podía suponerse efectivamente una relación de proporcionalidad simple directa. Los falsos problemas de comparación cuantitativa, es decir, aquellos que tenían una estructura semántica similar a estos, pero en los que no podía suponerse una relación de proporcionalidad han sido analizados en la sección V.3.1.2. Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones.

Análisis de la situación introductoria.

Recordamos el enunciado de la situación introductoria para este foco de interés:

A la vista de los resultados de la Tarea para Casa…

F4.1.1: *¿Qué naranjada tendrá un sabor más fuerte a naranja, la de Pedro o la de María? ¿Por qué?*

F4.1.2: *¿A qué banco irías si tuvieras que cambiar de euros a dólares? ¿Por qué?*

	Receta de María	Receta de Pedro
Razón entre zumo de naranja y agua	$\frac{0,5}{1,5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ litros de zumo por cada litro de agua	$\frac{1,5}{5} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3$ litros de zumo por cada litro de agua
Razón entre agua y zumo de naranja	$\frac{1,5}{0,5} = \frac{15}{5} = 3$ litros de agua por cada litro de zumo.	$\frac{5}{1,5} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$ litros de agua por cada litro de zumo.

Tabla V - 26. Información proporcionada a los alumnos para responder a la situación introductoria F4.1.1 (Ciclo II-1).

La actividad se introduce tras la corrección de la tarea para casa TC3. En el debate se institucionalizó la solución y se dejaron escritas en la pizarra las tablas con los resultados numéricos de las actividades que componían TC3, y que suponían el punto de inicio para la situación introductoria F4.1. La información suministrada a los alumnos en dichas tablas puede observarse en la Tabla V - 26 y en la Tabla V - 27.

	Banco A	**Banco B**
Razón entre dólares y euros	$\frac{120}{140}=\frac{6}{7}$ dólares por cada euro.	$\frac{150}{180}=\frac{5}{6}$ dólares por cada euro.
Razón entre euros y dólares	$\frac{140}{120}=\frac{7}{6}$ euros por cada dólar.	$\frac{180}{150}=\frac{6}{5}$ euros por cada dólar.

Tabla V - 27. Información proporcionada a los alumnos para responder a la situación introductoria F4.1.2 (Ciclo II-1).

Por tanto, no tiene sentido analizar las estrategias utilizadas por los alumnos en esta tarea, así que nos centraremos exclusivamente en las categorías generales (ver Tabla V - 28) para comprobar si los alumnos son capaces de elegir correctamente la opción más ventajosa en la comparación con la información sobre las razones externas suministrada. Si bien, dentro de las respuestas que dan la opción correcta haremos un análisis de los argumentos empleados.

		N	**B**	**I**	**C**
F4.1.1	N.º de respuestas	2	0	6	23
	Porcentaje	6,5 %	-	19,4 %	74,2 %
F4.1.2	N.º de respuestas	2	2	10	17
	Porcentaje	6,5 %	6,5 %	32,3 %	54,8 %

Tabla V - 28. Resultados generales en la situación introductoria de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-1).

En comparación con F4.1.1 es llamativo el menor número de respuestas correctas en el problema de contexto monetario F4.1.2. Como se comprueba en las producciones de los alumnos, muchos de ellos necesitaron transformar la notación fraccionaria en notación decimal para responder a las preguntas. Sin embargo, los errores no vinieron exclusivamente provocados por esta primera dificultad. Aparecen errores por no saber interpretar la pregunta que se planteaba en términos de la comparación relativa entre las magnitudes a través de la razón externa, o por una mala interpretación de dichas razones.

Para F4.1.1 aunque hay una variedad de argumentos en las respuestas erróneas, dichos argumentos, o bien hacen referencia a que sabe más fuerte la naranjada de Pedro porque hay más zumo de naranja que en el de María, "La de Pedro porque hay más" (Equipo B10), "La receta de Pedro porque 3 litros es más que los demás" (Equipo B11 en referencia a la razón $3/10 = 1{,}5/5$); o bien hacen una mala interpretación de las razones o de la pregunta en términos de las mismas, "La de Pedro porque hay 3,33 l" (Equipo D8 que utiliza la razón inversa a la natural identificando el mayor valor de esta razón con el sabor más fuerte), "La de Pedro porque tiene más porcentaje de naranja" (Equipo D3).

En F4.1.2 la estructura numérica del problema parece haber influido en la baja tasa de respuestas correctas. Si se reducen las razones externas aparece un 6 en cada situación, uno correspondiente a dólares y otro a euros, lo que puede haber confundido a los alumnos. Además de la dificultad habitual para el trabajo con fracciones, la presencia de los denominadores 7 y 6 puede haber sido un impedimento para el paso a la notación decimal. Así, muchos de los equipos presentan un argumento como el siguiente para justificar la respuesta incorrecta "Al B porque te dan más $ por cada €" (Equipo A4). En estos argumentos se evidencia la comprensión del problema pero que la comparación se ha hecho incorrectamente, de hecho, ningún equipo presenta evidencias de haber intentado realizar la comparación de fracciones y solo dos equipos han pasado las razones a notación decimal.

En cuanto a las respuestas correctas, 8 de las 23 respuestas correctas para F4.1.1 presentan, además, argumentos correctos y completos en términos de las razones externas y evidencian la necesidad del pensamiento relativo. Por ejemplo, el equipo D10 expresa en su respuesta "Tiene más [sabor] la de María porque tiene más cantidad de zumo por litro de agua". En el resto de las respuestas correctas, o bien no se presentan argumentos, o bien se presentan argumentos incorrectos, "La de María porque se le añade más cantidad de zumo de naranja y menos de agua" (Equipo B4); o bien la redacción de los argumentos se hace en términos absolutos por lo que no se han considerado totalmente correctos, "La de María porque lleva más naranja" (Equipo A8).

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Tras el análisis de la situación introductoria, pasamos a analizar el desempeño de los estudiantes en el resto de los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa. Los resultados en las categorías generales pueden observarse en la Tabla V - 29.

El número de alumnos que no asiste a las sesiones es bajo y circunstancial. Esto provoca que las tareas de clase sean entregadas por la gran mayoría de los alumnos. Solo encontramos un porcentaje significativo de producciones no entregadas (categoría N) en los problemas incluidos en la tarea para casa (TC4.1, TC4.2 y TC4.4). Como se observa a lo largo de la propuesta durante este primer ciclo el porcentaje de alumnos que no entregó las tareas que debían realizar fuera del horario lectivo fue muy alto, alrededor del 40 %. Además, en la tarea para casa se observa un gran número de producciones copiadas literalmente por lo que, si bien es interesante el estudio cualitativo de las mismas, hay que tener precauciones con el análisis cuantitativo.

Además de entregar sus producciones, la mayoría de los alumnos intenta realizar los problemas propuestos, como se corrobora con los bajos porcentajes de producciones en blanco (categoría B). Salvo en los problemas F4.2.3 y F4.2.5, el porcentaje de producciones en blanco es inferior al 10%. En los problemas de la ficha F4.2, se observa que el porcentaje de respuestas en blanco aumenta al avanzar en la ficha, lo que puede ser indicativo de que esta propuesta de aula resultó excesivamente larga para la mayoría de los alumnos. De hecho, el problema F4.2.5 tiene cerca de un 50 % de respuestas en blanco.

		N	B	I	C
F4.2.1	N.º de respuestas	2	1	1	27
	Porcentaje	6,5 %	3,2 %	3,2 %	87,1 %
F4.2.3	N.º de respuestas	2	5	1	23
	Porcentaje	6,5 %	16,1 %	3,2 %	74,2 %
F4.2.5	N.º de respuestas	2	15	4	10
	Porcentaje	6,5 %	48,4 %	12,9 %	32,3 %
TC4.1	N.º de respuestas	24	3	6	32
	Porcentaje	39,3 %	4,6 %	9,2 %	49,2 %
TC4.2	N.º de respuestas	24	3	7	31
	Porcentaje	39,3 %	4,6 %	10,8 %	47,7 %
TC4.4	N.º de respuestas	24	4	5	32
	Porcentaje	39,3 %	6,2 %	7,7 %	49,2 %
F5.1.1	N.º de respuestas	2	2	4	23
	Porcentaje	6,5 %	6,5 %	12,9 %	74,2 %
F5.1.2	N.º de respuestas	2	2	6	21
	Porcentaje	6,5 %	6,5 %	19,4 %	67,7 %
F11.1.2	N.º de respuestas	0	2	6	23
	Porcentaje	-	6,5 %	19,4 %	74,2 %
PE.3	N.º de respuestas	0	6	25	34
	Porcentaje	-	9,2 %	38,5 %	52,3 %

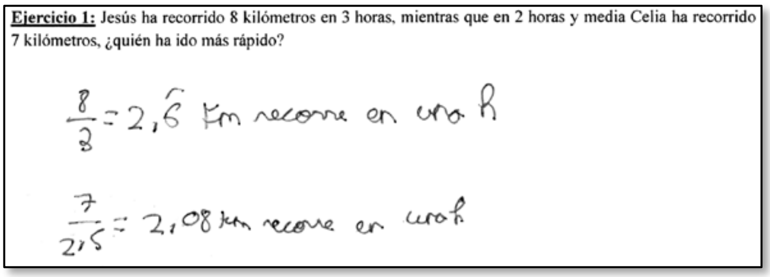
Tabla V - 29. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-1).

El número de alumnos que no asiste a las sesiones es bajo y circunstancial. Esto provoca que las tareas de clase sean entregadas por la gran mayoría de los alumnos. Solo encontramos un porcentaje significativo de producciones no entregadas (categoría N) en los problemas incluidos en la tarea para casa (TC4.1, TC4.2 y TC4.4). Como se observa a lo largo de la propuesta durante este primer ciclo el porcentaje de alumnos que no entregó las tareas que debían realizar fuera del horario lectivo fue muy alto, alrededor del 40 %. Además, en la tarea para casa se observan un gran número de producciones copiadas literalmente por lo que, si bien es interesante el estudio cualitativo de las mismas, hay que tener precauciones con el análisis cuantitativo.

Además de entregar sus producciones, la mayoría de los alumnos intenta realizar los problemas propuestos, como se corrobora con los bajos porcentajes de producciones en blanco (categoría B). Salvo en los problemas F4.2.3 y F4.2.5, el porcentaje de producciones en blanco es inferior al 10%. En los problemas de la ficha F4.2, se observa que el porcentaje de respuestas en blanco aumenta al avanzar en la ficha, lo que puede ser indicativo de que esta propuesta de aula resultó excesivamente larga para la mayoría de los alumnos. De hecho, el problema F4.2.5 tiene cerca de un 50 % de respuestas en blanco.

Como en otros focos, para clasificar las respuestas de los alumnos entre correctas o incorrectas, no se han tenido en cuenta errores en los resultados de operaciones aritméticas, siempre que el planteamiento del problema fuera correcto.

Otra de las dificultades encontradas en la clasificación de las respuestas entre correctas e incorrectas es la presencia de varias producciones en las que se realizan cálculos y razonamientos compatibles con una resolución adecuada, pero en las que no se da una respuesta explícita a cuál de las dos opciones presentadas en el problema es "mejor". Se decidió clasificar dichas respuestas como correctas e introducir la aclaración de estas respuestas como uno de los focos prioritarios en la elaboración de las entrevistas semiestructuradas de este ciclo en 1º de ESO. Un ejemplo de producción clasificada como correcta en la que no se da una respuesta explícita al problema y en la que además hay un error aritmético es la que se observa en la Imagen V - 16. Producción del equipo A1 en el problema F4.2.1.


<u>Ejercicio 1:</u> Jesús ha recorrido 8 kilómetros en 3 horas, mientras que en 2 horas y media Celia ha recorrido 7 kilómetros, ¿quién ha ido más rápido?

$\frac{8}{3} = 2,\hat{6}$ Km recorre en una h

$\frac{7}{2,5} = 2,08$ km recorre en una h

Imagen V - 16. Producción del equipo A1 en el problema F4.2.1.

Si excluimos el problema F4.2.5 por su alta tasa de respuestas en blanco, observamos que todos los problemas realizados en el aula por parejas tienen un porcentaje de acierto (categoría C) muy elevado, en torno al 70 % (del total de las producciones), entre 21 y 24 parejas, de un total de 31, responden correctamente. Por tanto, no se observan diferencias significativas en la tasa de éxito según las diferentes variables de los problemas consideradas. Por otro lado, los problemas realizados de forma individual, bien en la tarea para casa TC4 o bien en la prueba escrita, tienen una tasa de respuestas correctas inferior, alrededor del 50 %. Entre 31 y 34 alumnos del total de 65, responden correctamente. Tampoco en las respuestas individuales se observan diferencias significativas que puedan ser achacables a los diferentes valores de las variables didácticas de los problemas.

Cabe destacar que, aunque las tareas para casa tienen un alto porcentaje de producciones no entregadas y la prueba escrita fue completada por todos los alumnos, el porcentaje de respuestas correctas es muy similar. Este dato podría apuntar hacia una correlación entre los alumnos que no han hecho las tareas y los alumnos que no han tenido un buen desempeño en la prueba escrita en este tipo de problemas.

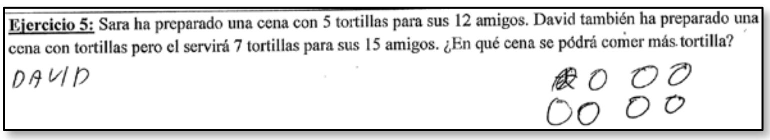
Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Para el siguiente nivel de análisis, no se tienen en cuenta las producciones de los alumnos correspondientes a las categorías N y B (no entregados y en blanco). En la Tabla V - 30 se recogen los porcentajes de aparición de cada una de las estrategias consideradas para los problemas de comparación cuantitativa. A pesar de que no se tienen en cuenta dichas categorías, los porcentajes están calculados sobre el total de equipos, para las tareas por equipos, o sobre el total de alumnos, para las tareas individuales.

		C0	C1	C2	C3	C4	C5
F4.2.1	N.º de respuestas	2	26	0	0	0	0
	Porcentaje	6,5 %	83,9 %	-	-	-	-
F4.2.3	N.º de respuestas	3	21	0	0	0	0
	Porcentaje	9,7 %	67,7 %	-	-	-	-
F4.2.5	N.º de respuestas	3	11	0	0	0	0
	Porcentaje	9,7 %	35,5 %	-	-	-	-
TC4.1	N.º de respuestas	0	38	0	0	0	0
	Porcentaje	-	58,5 %	-	-	-	-
TC4.2	N.º de respuestas	3	35	0	0	0	0
	Porcentaje	4,6 %	53,8 %	-	-	-	-
TC4.4	N.º de respuestas	2	35	0	0	0	0
	Porcentaje	3,1 %	53,8 %	-	-	-	-
F5.1.1	N.º de respuestas	0	27	0	0	0	0
	Porcentaje	-	87,1 %	-	-	-	-
F5.1.2	N.º de respuestas	1	24	0	0	0	2
	Porcentaje	3,2 %	77,4 %	-	-	-	6,5 %
F11.1.2	N.º de respuestas	0	29	0	0	0	0
	Porcentaje	-	93,5 %	-	-	-	-
PE.3	N.º de respuestas	7	45	0	1	4	2
	Porcentaje	10,8 %	69,2 %	-	1,5 %	6,2 %	3,1 %

Tabla V - 30. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-1).

Observamos que la aparición de respuestas sin ningún argumento que las apoye (C0) es minoritaria, con una incidencia algo mayor en las tareas F4.2.3 y F4.2.5 y en la prueba escrita (problema PE.3). La presencia de este tipo de respuestas en las que se elige una opción de las propuestas en el enunciado sin argumentos que apoyen dicha elección (ver Imagen V - 17) refuerza la idea de que los alumnos no tuvieron el tiempo suficiente para realizar la ficha de clase F4 convenientemente.


Ejercicio 5: Sara ha preparado una cena con 5 tortillas para sus 12 amigos. David también ha preparado una cena con tortillas pero el servirá 7 tortillas para sus 15 amigos. ¿En qué cena se pódrá comer más tortilla?

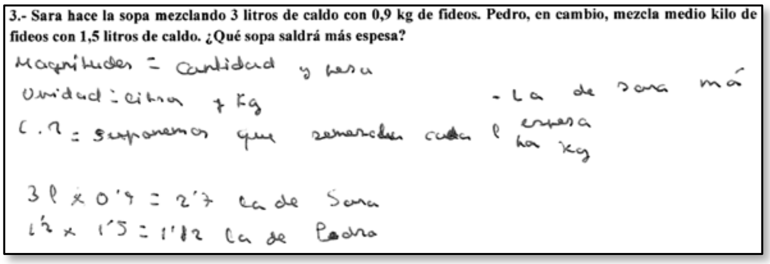
DAVID

Imagen V - 17. Producción del equipo B8 en el problema F4.2.5.

Es decir, la práctica totalidad de las respuestas están basadas en alguna estrategia que los alumnos hacen explícita con mayor o menor detalle (categorías C1 a C5). Además, prácticamente la totalidad de los alumnos que realizan el problema lo hacen mediante una estrategia potencialmente correcta (C1 a C3). Encontramos solo 7 producciones de las 446 analizadas, en las que aparezcan estrategias incorrectas (C4 o C5), concentrándose dichas producciones en la prueba escrita.

Producciones que siguen una estrategia errónea.

De las estrategias incorrectas, las 4 en las que se realizan operaciones sin sentido corresponden al problema PE.3. Las 4 producciones son muy similares, en ellas los alumnos realizan alguna combinación de operaciones entre los datos propuestos en el enunciado que no tiene sentido. En concreto, en todas ellas, aparece alguna multiplicación entre cantidades correspondientes de las magnitudes involucradas, en vez de establecer una razón entre dichas cantidades. Esta estrategia errónea puede observarse en la Imagen V - 18.


3.- Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?

Magnitudes = cantidad y peso
Unidad = litros y kg
C.R = suponemos que se mezcla cada l ha kg
- La de Sara más espesa
3 l x 0'9 = 2'7 la de Sara
1'2 x 1'5 = 1'82 la de Pedro

Imagen V - 18. Producción del alumno B9.1 en el problema PE.3.

En dicha imagen observamos que el alumno ha multiplicado el volumen de caldo por el peso de los fideos para ambas situaciones sin interpretar el resultado obtenido (carece de significado). Finalmente, B8.1 responde que la sopa más espesa es aquella en la que se ha obtenido un valor mayor en el producto anterior. Observamos que, además de realizar estas operaciones carentes de sentido, el alumno comete otros fallos e imprecisiones en la resolución. Por ejemplo, para la situación de Pedro realiza el producto $1{,}2 \cdot 1{,}5$, probablemente identificando la notación fraccionaria $1/2$, con la notación decimal $1{,}2$, para modelizar numéricamente la expresión del enunciado "medio kilo". Otros problemas de comprensión de las situaciones proporcionales se evidencian en el establecimiento de la condición de regularidad "suponemos que se mezcla cada l ha [sic.] kg".

Las producciones categorizadas en C5, usan argumentos aditivos erróneos. Como por ejemplo el que observamos en la Imagen V - 19. El equipo D8 calcula la diferencia entre las personas que se tienen que repartir las tortillas y las tortillas disponibles para cenar, concluyendo que se cena más en el que la diferencia es mayor, "sobra más por lo que se puede comer más". Los alumnos evidencian dos problemas de comprensión en su argumentación. Por un lado, no se ha comprendido la necesidad de realizar una comparación multiplicativa entre las cantidades, es decir, la necesidad de aplicar un razonamiento proporcional. Por otro, los alumnos parecen no dotar correctamente al resultado de la diferencia realizada, ya que no "sobran" tortillas, para decidir en qué cena sobran más tortillas (si cada uno comiese una), sino que lo que sobran son comensales. En esta categoría, también se han incluido aquellas producciones en las que se da la respuesta comparando de forma absoluta las cantidades de una de las magnitudes. Un ejemplo de lo anterior lo encontramos en la respuesta que se observa en la Imagen V - 20.

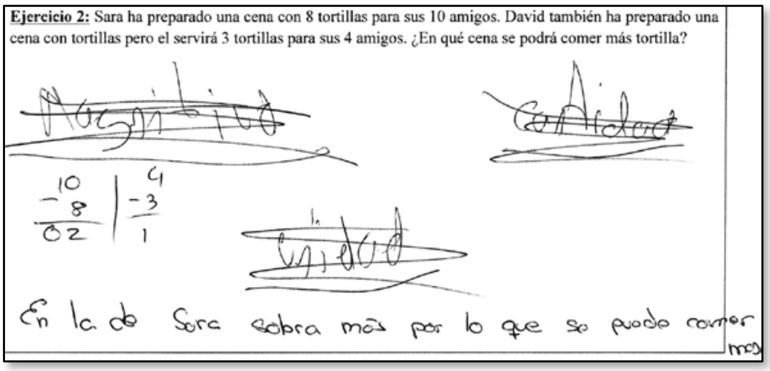


Imagen V - 19. Producción del equipo D8 en el problema F5.1.2.

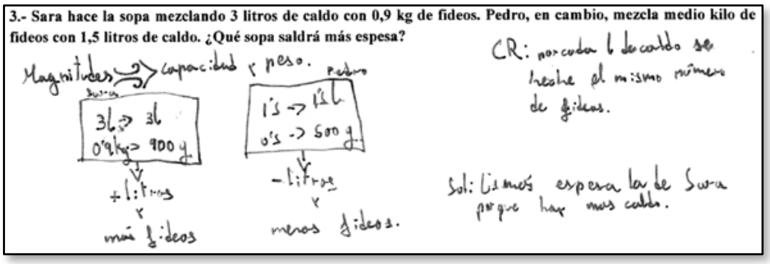


Imagen V - 20. Producción del alumno B3.2 en el problema PE.3.

En la imagen se observa que el alumno parece intentar un argumento de tipo cualitativo, comparando de forma aditiva las cantidades de la misma magnitud en cada situación. Dicha comparación cualitativa no es viable ya que son mayores los dos términos de la razón externa para la situación de Sara que sus correspondientes para la situación de Pedro, si bien, el alumno no deja evidencia de que realice dicho razonamiento. En cualquier caso, el alumno concluye que será más espesa la sopa de Sara "porque hay más caldo". Respuesta en la que, como en el caso anterior, se evidencia tanto una falta de razonamiento proporcional como una mala comprensión de la situación.

Tanto la producción del equipo D8 como la del alumno B3.2 parecen enmarcarse en una línea de razonamiento aditivo erróneo. En una de las situaciones se realizan comparaciones aditivas entre cantidades correspondientes de las dos magnitudes dentro de cada situación (un equivalente a las razones externas), mientras que en la otra se realizan comparaciones aditivas entre cantidades de una misma magnitud en las dos situaciones (un equivalente a las razones internas).

Producciones que siguen una estrategia correcta.

Si centramos la atención en las estrategias potencialmente correctas, vemos que prácticamente en la totalidad de las producciones se utiliza una estrategia basada en la comparación de razones externas (C1) y ningún alumno usa una estrategia escalar basada en razones internas (C2). Se ha clasificado una única producción (ver Imagen V - 21) en la categoría C3. Para establecer dicha categoría en el Capítulo II planteamos el siguiente esquema:

- Problema Inicial: $S1: (a_1: a_2) \sim S2: (b_1: b_2)$.

- Plantear problema de valor perdido en la primera situación (los papeles de ambas situaciones son reversibles): $S1: (a_1 : a_2) \leftrightarrow (x : b_2)$
- Calcular x.
- Inferir el resultado de comparar $S1: (x : b_2) \sim S2: (b_1 : b_2)$ mediante la comparación aditiva de x y b_1.

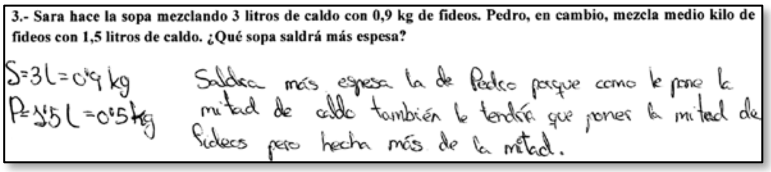

3.- Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?

Imagen V - 21. Producción del alumno B5.2 en el problema PE.3.

La producción del alumno B5.2 se ajusta a este esquema de razonamiento. El alumno no llega a plantear las razones entre volumen y masa en ningún momento de la resolución y da la respuesta argumentando sobre la comparación (aditiva) entre la cantidad de la magnitud peso que establece el enunciado para la situación de Pedro y aquella hipotética que se obtendría para Pedro suponiendo que hace la sopa con la misma razón que Sara. Este hecho se refuerza por el uso del condicional que hace el alumno en la explicación de su respuesta.

Sin embargo, para este mismo problema se han encontrado producciones similares y cuya principal diferencia se encuentra en la utilización de diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, la respuesta del alumno D2.2 (ver Imagen V - 22), se ha clasificado en la categoría C1, que incluye aquellas respuestas en las que se establecen razones entre los datos implicados y se comparan dichas razones. La falta de detalles en la argumentación genera dificultades en la clasificación de esta producción. El alumno establece ambas razones. Al establecer la equivalencia entre $\frac{0,5}{1,5}$ y $\frac{1}{3}$, aunque no sabemos si el alumno está buscando una razón equivalente a $\frac{0,5}{1,5}$ para compararla con $\frac{0,9}{3}$, o está buscando la cantidad de la magnitud peso en la situación de Pedro que se correspondería con el volumen de caldo de Sara en dicha situación.

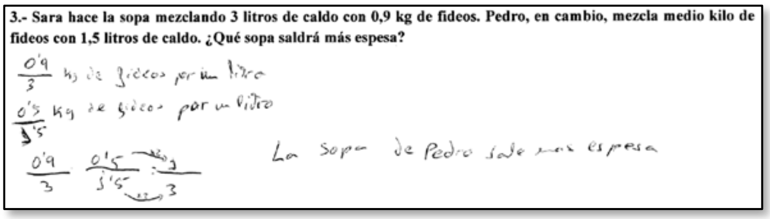

3.- Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?

Imagen V - 22. Producción del alumno D2.2 en el problema PE.3.

Esta dificultad en la clasificación se debe, en gran parte, a la estructura numérica del problema. La comparación multiplicativa entre los volúmenes de caldo en una y otra situación es sencilla, por lo que es posible realizar estimaciones y resolver el problema utilizando otras estrategias.

Como se ha dicho, la mayor parte de producciones, tanto correctas como incorrectas, sigue una estrategia de cálculo y comparación de razones para encontrar la solución. Entre los alumnos o equipos que siguen esta estrategia y dan una respuesta correcta encontramos una gran variedad de producciones teniendo en cuenta la riqueza de las argumentaciones realizadas, el tipo de razones empleadas en la resolución y los sistemas de representación para la razón puestos en práctica.

Soluciones calculando el tiempo por unidad de distancia	**Soluciones calculando la distancia por unidad de tiempo**

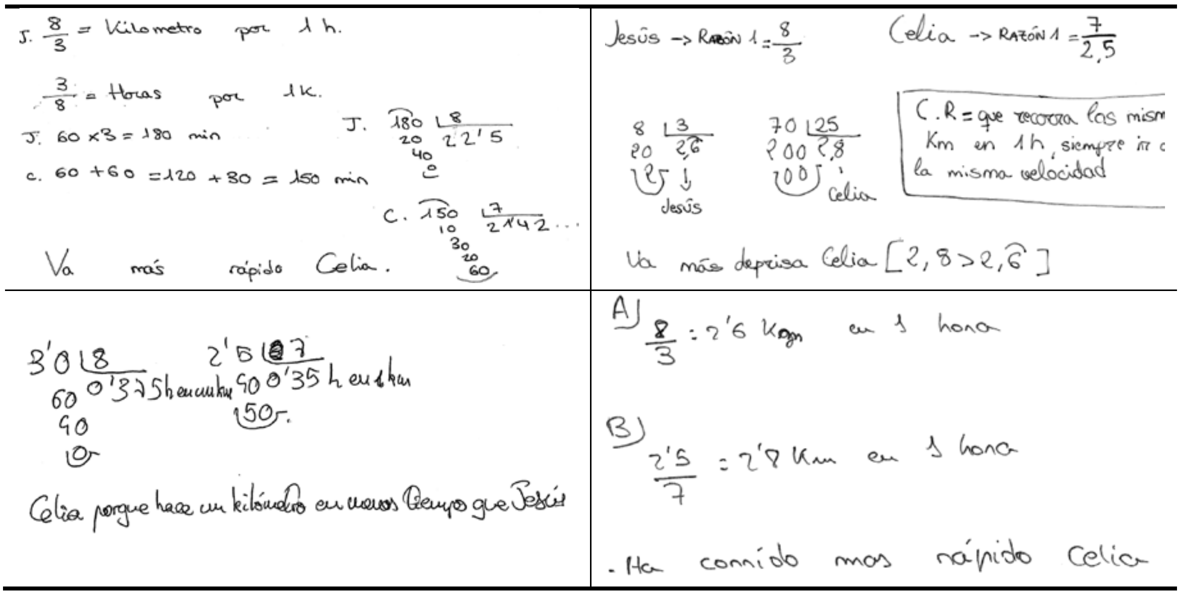
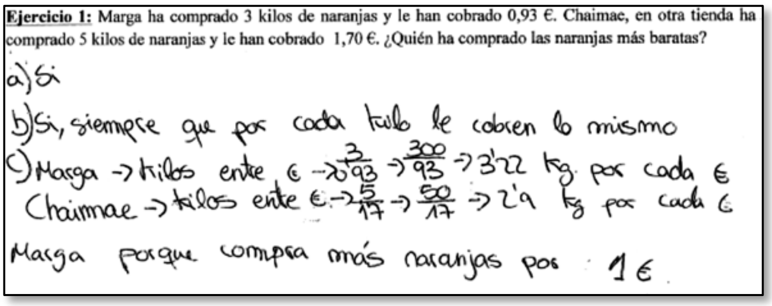


Tabla V - 31. Distintas producciones para el ejercicio F4.2.1 (de izquierda a derecha y de arriba a abajo, equipos B3, A4, B9 y D1)

A pesar de que en las situaciones de comparación, establecida la pregunta del problema, una de las dos razones externas aparece como “más natural” para responder al problema, en la mayor parte de los problemas planteados hay producciones que responden utilizando correctamente la “razón inversa a la natural”, aun cuando aparecen razones bien compactadas como la velocidad. Por ejemplo, en el problema F4.2.1 se pregunta por cuál de entre dos personas ha ido más rápido dando como datos la distancia recorrida y el tiempo empleado en el recorrido. Parece natural esperar que las respuestas utilizando razones externas se hagan a partir del cálculo de la velocidad (imágenes en la columna izquierda de la Tabla V - 31), sin embargo, encontramos respuestas calculando el tiempo empleado por unidad de distancia para responder correctamente al problema (columna de la derecha de la Tabla V - 31).

Esta situación se mantiene en el resto de los problemas. Por ejemplo, para el rendimiento goleador en el problema F4.2.3, hay alumnos que calculan los partidos necesarios para marcar un gol. También en el problema F5.1.1, en el que se pide comparar el coste unitario, aunque de forma minoritaria, aparecen respuestas correctas calculando la cantidad de producto que podemos obtener por unidad de valor económico (ver Imagen V - 23). Esta tendencia solo se rompe en el problema F11.1.2 en el que se pide comparar la velocidad de lectura proporcionando las páginas leídas por dos alumnos en un tiempo expresado en días. En este caso, en el que la razón natural es bien compactada, entera y las magnitudes involucradas discretas, solo aparece la razón “páginas por día” en las producciones de los alumnos.


Ejercicio 1: Marga ha comprado 3 kilos de naranjas y le han cobrado 0,93 €. Chaimae, en otra tienda ha comprado 5 kilos de naranjas y le han cobrado 1,70 €. ¿Quién ha comprado las naranjas más baratas?

a) Si

b) Si, siempre que por cada kilo le cobren lo mismo

c) Marga → kilos entre € → $\frac{3}{0'93}$ → $\frac{300}{93}$ → 3'22 kg. por cada €
Chaimae → kilos entre € → $\frac{5}{1'7}$ → $\frac{50}{17}$ → 2'9 kg por cada €

Marga porque compra más naranjas por 1 €

Imagen V - 23. Producción del equipo A3 en el problema F5.1.1.

Se observa, en general, una creciente despreocupación por establecer las condiciones de regularidad necesarias para determinar si una situación es proporcional o no. Sin embargo, es mayoritario el número de producciones que interpretan de forma conveniente las razones obtenidas. El trabajo con las razones suele centrarse en la obtención de la representación decimal de la misma mediante el algoritmo de la división para números decimales.

	Notación y algoritmos de las fracciones	**Notación y algoritmos de los decimales**
Se interpretan las razones	$\frac{18}{22} = \frac{9}{11} = \frac{63}{77}$ goles marca por partido $\frac{25}{35} = \frac{5}{7} = \frac{55}{77}$ " " " "	18:22 0,8 goles por partido ↓ C 25:35 0,7 goles por partido ↓ M Ha marcado más goles el C. C.R. → Hayan marcado el mismo nº de goles por partido.
No se interpretan las razones	C ⇒ Razón = $\frac{18}{22} = \frac{9}{11}$ M ⇒ Razón = $\frac{25}{35} = \frac{5}{7}$ $\frac{9}{11} > \frac{5}{7}$ $\frac{63}{77} > \frac{55}{77}$ = El jugador C	25'0 | 35 050 0'71 15 18'0 | 22 040 0'81 El futbolista C ofrece un mayor rendimiento

Tabla V - 32. Distintas producciones para el ejercicio F4.2.3 (de izquierda a derecha y de arriba a abajo, equipos B3, A6, A4 y B9).

En determinados problemas, en los que se complica dicho cálculo, aparecen de forma minoritaria resoluciones que utilizan la notación fraccionaria y los algoritmos de fracciones equivalentes. Así, por ejemplo, en el problema F4.2.3 en el que la resolución natural pasa por comparar las razones $\frac{18}{22}$ y $\frac{25}{35}$, encontramos producciones que realizan el trabajo con fracciones, además de aquellas que emplean la notación decimal, mayoritarias en todos los problemas (ver Tabla V - 32).

Errores cometidos en estrategias correctas.

Pasemos a describir los errores cometidos por los alumnos que, empleando una estrategia de cálculo de razones, C1, resuelven de forma incorrecta el problema. Del análisis inductivo de las producciones hemos clasificado los errores en las siguientes cuatro categorías:

- Error C.1: Se evidencia el uso de la estrategia, pero el problema está inacabado por lo que no se puede constatar si el alumno puede terminar el desarrollo correctamente.
- Error C.2: El alumno evidencia problemas asociados a la comprensión del número racional y sus representaciones simbólicas.
- Error C.3: Se identifica alguna de las razones con la interpretación, en términos de magnitud intensiva, de su inversa.
- Error C.4: Se proporciona la solución incorrecta pese a que el alumno ha calculado las razones y las ha interpretado correctamente. Es decir, se produce un fallo al conectar el significado de las operaciones obtenidas y la interpretación del problema.

La naturaleza del primero es difícilmente detectable ya que puede combinar aspectos ambientales, como el tiempo disponible, con aspectos cognitivos sobre los conocimientos que se deben poner en juego. El segundo tipo de error conecta con los conocimientos previos que debe tener el alumno de cursos o unidades didácticas anteriores. El tercer tipo de error está relacionado con los conocimientos adquiridos en las sesiones previas de la unidad y, por último, el cuarto error evidencia dificultades en la interpretación de problemas contextualizados de comparación cuantitativa.

Como ejemplo del primer tipo de error podemos ver cómo en la Imagen V - 24 el equipo no completa la solución, pero se evidencia una estrategia mediante cálculo de razones externas.

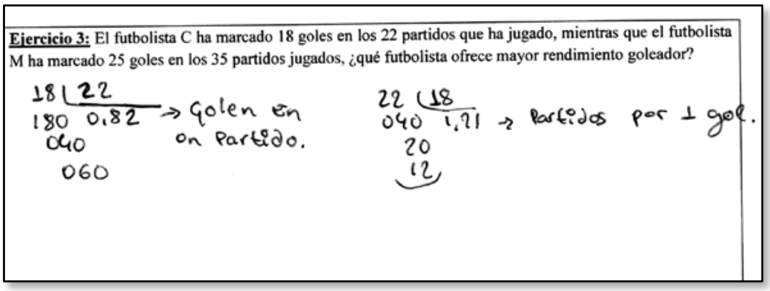
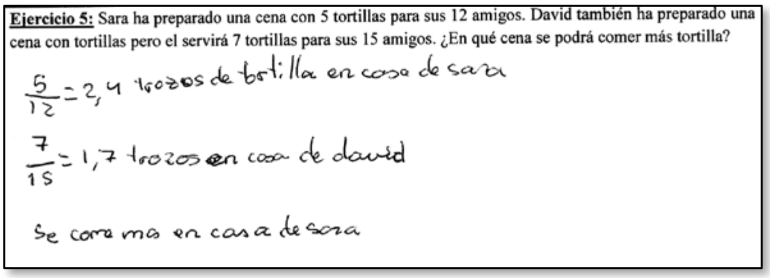

Ejercicio 3: El futbolista C ha marcado 18 goles en los 22 partidos que ha jugado, mientras que el futbolista M ha marcado 25 goles en los 35 partidos jugados, ¿qué futbolista ofrece mayor rendimiento goleador?

Imagen V - 24. Producción del equipo A9 en el problema F4.2.3.

El siguiente tipo de error es achacable a los conocimientos previos del alumno sobre los conceptos relacionados con las fracciones y los decimales, sus operaciones, propiedades y cambios entre ambos sistemas de representación. Por ejemplo, el equipo A8 resuelve el problema F4.2.5 (ver Imagen V - 25) de modo que la interpretación de las razones inicialmente planteadas podría considerarse correcta (aunque los alumnos al dividir las tortillas no consideran oportuno mantener la unidad tortilla y hablan de "trozos de tortilla"), pero para comparar necesitan establecer las razones en representación decimal. Para ello dividen el denominador entre el numerador, aunque con algún error aritmético cuya procedencia no se evidencia. Probablemente, los alumnos sienten la necesidad de que el dividendo de la división sea mayor que el divisor.



Ejercicio 5: Sara ha preparado una cena con 5 tortillas para sus 12 amigos. David también ha preparado una cena con tortillas pero el servirá 7 tortillas para sus 15 amigos. ¿En qué cena se podrá comer más tortilla?

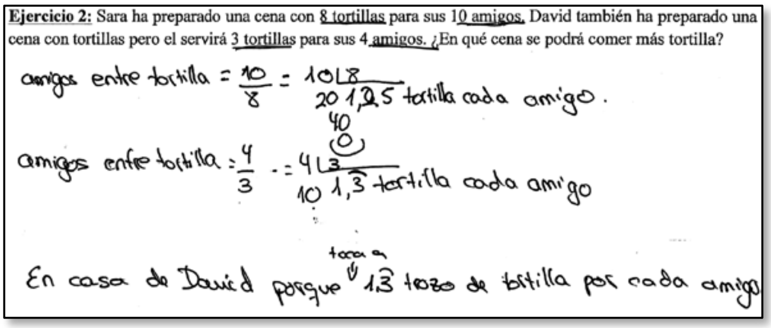
$\frac{5}{12} = 2,4$ trozos de tortilla en casa de sara

$\frac{7}{15} = 1,7$ trozos en casa de david

Se come mas en casa de sara

Imagen V - 25. Producción del equipo A8 en el problema F4.2.5.

Uno de los errores con mayor ocurrencia es el error C.3. Los alumnos cometen uno o varios errores por asociar a una razón la interpretación en términos de magnitud intensiva de la razón inversa. Este error lleva a proporcionar una respuesta incorrecta al problema como se observa, por ejemplo, en la Imagen V - 26. En dicha producción se percibe una adecuada elección de la estrategia y una adecuada interpretación del problema, sin embargo, se evidencian dificultades asociadas al concepto de razón externa y su interpretación.



Ejercicio 2: Sara ha preparado una cena con 8 tortillas para sus 10 amigos. David también ha preparado una cena con tortillas pero el servirá 3 tortillas para sus 4 amigos. ¿En qué cena se podrá comer más tortilla?

amigos entre tortilla $= \frac{10}{8} =$ 10|8 20 1,25 tortilla cada amigo. 40 0

amigos entre tortilla $= \frac{4}{3} =$ 4|3 10 1,3 tortilla cada amigo

En casa de David porque toca a 1,3 trozo de tortilla por cada amigo

Imagen V - 26. Producción del equipo A9 al problema F5.1.2.

Por último, encontramos producciones en las que se calculan e interpretan correctamente las razones externas equivalentes en cada una de las situaciones que plantea el problema de comparación, para posteriormente dar la respuesta equivocada. Probablemente la naturaleza de dichos errores radique en la interpretación de los términos del enunciado en lenguaje de razones. Por ejemplo, en la Imagen V - 27, se observa como el alumno calcula la razón "litros de caldo por cada kilogramo de fideos" sin embargo, para determinar qué sopa es más espesa, debería haber seleccionado la situación en la que dicha razón fuera menor, es decir, la sopa saldrá más espesa si hay menos caldo por cada kilogramo de fideos. Quizá, el alumno haya relacionado el término 'más' de la pregunta con la razón mayor, sin interpretar correctamente el concepto de espesor como relación multiplicativa entre las magnitudes involucradas (recordemos que en la prueba escrita varios alumnos pidieron explicaciones sobre el significado del término 'espesor').

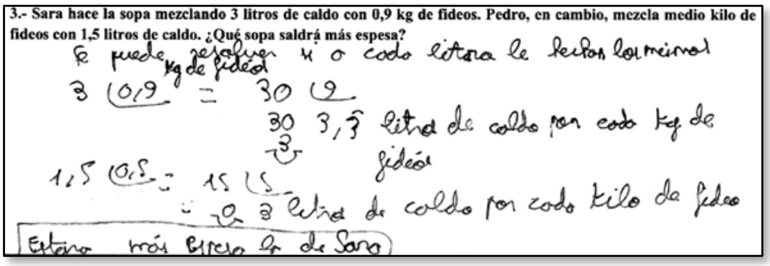

3.- Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?

Imagen V - 27. Producción del alumno A1.1 al problema PE.3.

V.3.1.4. Problemas de comparación cualitativa de proporcionalidad simple directa

Los problemas de comparación cualitativa se trabajaron durante parte de la sesión 5, enmarcados dentro del trabajo con problemas de comparación para situaciones de proporcionalidad simple. Además, se introdujo un problema de estas características en la tarea para casa TC8 y otro en la prueba escrita. Estos dos últimos se presentaron en forma de pregunta con respuestas de opción múltiple. Así, los problemas F5.1.3 y F5.1.4 constituyen la situación introductoria para este foco de interés y los únicos problemas a los que se enfrentaron los alumnos mediante trabajo en parejas. En esta sección, debido al menor número de problemas propuestos, analizaremos conjuntamente todos los problemas, aunque prestaremos una mayor atención a los problemas de la situación introductoria.

F5.1.3: *María ha echado más zumo de naranja que Pedro para preparar naranjada. Sin embargo, Pedro ha echado más agua que María al preparar la naranjada. ¿Cuál de las dos naranjadas proporciona un sabor a naranja más fuerte?*

F5.1.4: *En la clase de 1º B hay más alumnos que en la de 1º D. Por otro lado, la clase de 1ºD es más pequeña que la de 1ºB. ¿En cuál de las dos clases los alumnos están más apretados?*

Para el análisis cuantitativo de las respuestas de los alumnos usaremos, además de las categorías generales, las categorías específicas para identificar el tipo de argumento usado por los alumnos que pueden verse en la Tabla V - 33, y que se presentaron en el Capítulo III, y el análisis de la respuesta concreta dada por los alumnos de entre las cuatro opciones de respuesta posible (solo una correcta). Además del análisis cuantitativo, en este foco de interés tiene especial relevancia el análisis cualitativo de los argumentos empleados por los alumnos.

Código	Tipo de argumento	Código	Tipo de argumento
CL0	Sin razonamiento	**CL2**	Gráfico
CL1	Escrito/verbal	**CL3**	Ejemplo numérico

Tabla V - 33. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.

En la Tabla V - 34 se presenta el análisis cuantitativo para las categorías generales en las que podemos observar el grado de éxito de los alumnos en cada uno de los problemas. Solo en la tarea para casa, al igual que en el resto de la propuesta, el porcentaje de producciones no entregadas es significativo. Sin embargo, se observa que el número de producciones en blanco en la situación introductoria es ligeramente superior al que se observa en otros focos de interés. Este hecho puede deberse, bien a que la situación introductoria no se abordaba al principio de la sesión como en el resto de los focos de interés, bien al desconcierto que provoca en los alumnos la aparición de problemas sin datos numéricos.

		N	B	I	C
F5.1.3	N.º de respuestas	2	5	4	20
	Porcentaje	6,5 %	16,1 %	12,9 %	64,5 %
F5.1.4	N.º de respuestas	2	4	11	14
	Porcentaje	6,5 %	12,4 %	35,5 %	45,2 %
TC8.1	N.º de respuestas	28	0	4	33
	Porcentaje	43,1 %	-	6,2 %	50,8 %
PE.2.1	N.º de respuestas	0	0	20	45
	Porcentaje	-	-	31,8 %	69,2 %

Tabla V - 34. Resultados generales en los problemas comparación cualitativa (Ciclo II-1).

El número de respuestas correctas e incorrectas (categorías C e I) apunta hacia la menor dificultad que han tenido los alumnos para resolver el problema F5.1.3 que para resolver el problema F5.1.4. Es decir, en el problema en el que se podía decidir qué opción era más ventajosa según la información del enunciado, los resultados han sido mejores que en el problema en el que la respuesta era que las comparaciones proporcionadas eran insuficientes para decidir entre una de las situaciones y la situación más ventajosa dependería de los valores concretos de cada magnitud en cada situación. Sin embargo, tras el debate y corrección de la situación introductoria, se observa que en los problemas TC8.1 y especialmente en PE.2.1, con una estructura similar a F5.1.4, el porcentaje de respuestas correctas aumenta significativamente, desde un 45 % en el problema introductorio F5.1.4 a casi un 70 % en el problema de la prueba escrita.

Para el siguiente nivel de análisis estudiaremos la respuesta concreta dada por los alumnos que no han dejado en blanco sus producciones, es decir, no tenemos en cuenta las producciones clasificadas como N o B. En la Tabla V - 35 observamos el porcentaje de alumnos que ha respondido que una de las dos situaciones es más ventajosa que la otra ($S_1 > S_2$ o $S_1 < S_2$ según si es más ventajosa la primera situación que aparece en el enunciado o la segunda), si las dos situaciones son igual de ventajosas ($S_1 = S_2$), o no puede decidirse cuál de las dos opciones es más ventajosa ($S_1 ¿?\, S_2$). En dicha tabla se ha sombreado la opción correcta en cada uno de los problemas cuyos datos coinciden con los de la categoría C en la Tabla V - 33. La suma del número de respuestas en las casillas no sombreadas coincide con el dato en la categoría I de la Tabla V - 33.

Para F5.1.3, que tiene una estructura $(x_1^+, : x_2) \sim (x_1 : x_2^+)$, se observa que la opción incorrecta mayoritaria es expresar que la situación no puede resolverse. Posiblemente, algunos de los equipos que han dejado en blanco el problema se hubieran decantado por esta opción de haberse tratado de un problema de opción múltiple. Para F5.1.4, con estructura $(x_1^+, : x_2) \sim (x_1 : x_2^-)$, la opción incorrecta mayoritaria es expresar que ambas situaciones son igual de ventajosas (los alumnos están igual de apretados en ambas clases), aunque el porcentaje de este tipo de respuestas disminuye ligeramente tras la instrucción como se observa en el porcentaje correspondiente para PE.2.1.

		$S_1 > S_2$	$S_1 < S_2$	$S_1 = S_2$	$S_1 ¿? S_2$
F5.1.3	N.º de respuestas	20	1	0	4
	Porcentaje	64,5 %	3,2 %	-	12,9 %
F5.1.4	N.º de respuestas	0	4	7	14
	Porcentaje	-	12,9 %	22,6 %	45,2 %
TC8.1	N.º de respuestas	4	0	0	33
	Porcentaje	6,2 %	-	-	50,8 %
PE.2.1	N.º de respuestas	4	5	11	45
	Porcentaje	6,2 %	7,7 %	16,9 %	69,2 %

Tabla V - 35. Respuesta a los problemas de comparación cualitativa (Ciclo II-1).

En general, los alumnos intentan justificar y argumentar sus respuestas. Como se observa en la Tabla V - 36[52], el número de producciones en las que no se presenta ningún tipo de justificación (categoría CL0) es minoritario. El resto de los equipos y alumnos presenta justificaciones verbales (CL1) para sus respuestas. No aparecen, por tanto, justificaciones gráficas o el empleo de ejemplos numéricos para argumentar la respuesta (categorías CL2 y CL3). La presencia de argumentos se ha registrado independientemente de que las respuestas fueran correctas.

		CL0	**CL1**	**CL2**	**CL3**
F5.1.3	N.º de respuestas	1	23	0	0
	Porcentaje	3,2 %	74,2 %	-	-
F5.1.4	N.º de respuestas	3	22	0	0
	Porcentaje	9,7 %	71,0 %	-	-
TC8.1	N.º de respuestas	6	27	0	0
	Porcentaje	9,2 %	41,5 %	-	-

Tabla V - 36. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa (Ciclo II-1).

En la Imagen V - 28 se muestran cuatro ejemplos de argumentos dados para justificar la respuesta correcta al problema F5.1.3. Se observa que el grado de corrección de dichos argumentos es variable. En las dos justificaciones superiores observamos que los alumnos basan su respuesta en la comparación de una sola de las magnitudes. Es decir, se esgrimen argumentos del tipo “el sabor de la naranjada es más fuerte porque lleva más zumo de naranja” o “el sabor de la naranjada es más fuerte porque lleva menos agua”, lo que supone argumentos, al menos, incompletos. La mayor parte de las justificaciones que aportan los equipos son similares a la del equipo A3 (tercera desde arriba en la Imagen V - 28). En ella los alumnos utilizan las comparaciones de las dos magnitudes para responder. El argumento no se limita a parafrasear el enunciado del problema, sino que transforma el sujeto de la segunda comparación para que este sea el mismo en las dos comparaciones. Es decir, si el enunciado tenía una estructura $(x_1^+ : x_2) \sim (x_1 : x_2^+)$, los alumnos argumentan que S_1 es más ventajosa tras traducir el problema a una estructura $(x_1^+ : y_2^-) \sim (x_1 : y_2)$.

[52] En la Tabla V - 36 no aparece el problema PE.2.1 ya que en la prueba escrita se solicitó a los alumnos que señalaran la opción que considerasen correcta sin necesidad de argumentarla.

Algunos equipos, como A8 (Imagen V - 28 abajo), hacen una doble traducción del problema, una para que las dos comparaciones tengan como sujeto al individuo de la primera situación y otra para que éstas tengan como sujeto al de la segunda. Es decir, desde $(x_1^+ : x_2) \sim (x_1 : x_2^+)$, traducen a $(x_1^+ : y_2^-) \sim (x_1 : y_2)$ y a $(y_1, : x_2) \sim (y_1^- : x_2^+)$. En cualquier caso, parece obvio que, para responder, los alumnos necesitan traducir el enunciado de forma que las comparaciones tengan como sujeto al mismo individuo envuelto en la comparación. Cabe destacar que ninguna producción hace referencia al concepto de razón ni a ningún otro concepto relacionado (reparto, división, fracción, proporción, porcentaje, …).

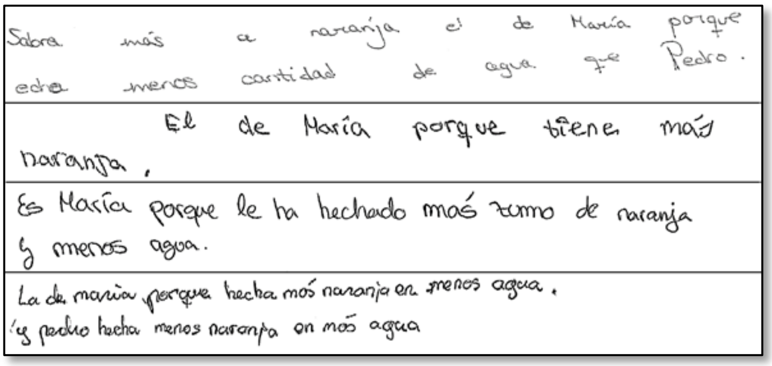

Sabra más a naranja el de María porque echa menos cantidad de agua que Pedro.
El de María porque tiene más naranja,
Es María porque le ha hechado más zumo de naranja y menos agua.
La de maria porque hecha más naranja en menos agua.
y pedro hecha menos naranja en más agua

Imagen V - 28. De arriba a abajo, producciones de los equipos B3, A10, A3 y A8 para el problema F5.1.3.

Las pocas producciones incorrectas en la situación F5.1.3 que se decantaban por la imposibilidad de decidir la situación más ventajosa utilizan argumentos similares a "no se puede decidir porque faltan las cantidades".

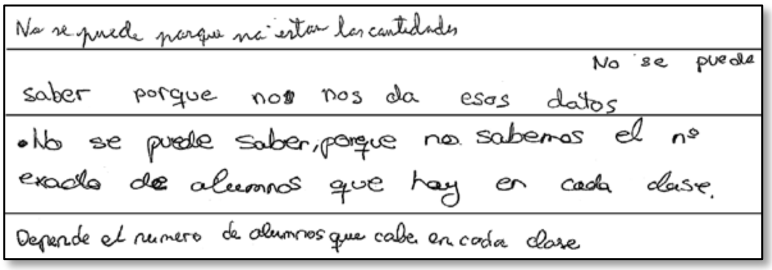

No se puede porque no estan las cantidades
No se puede saber porque nos nos da esos datos
•No se puede saber, porque no sabemos el nº exacto de alumnos que hay en cada clase.
Depende el numero de alumnos que cabe en cada clase

Imagen V - 29. De arriba a abajo, producciones de los equipos B5, A10, A2 y A8 para el problema F5.1.4.

Este último tipo de argumentos es el más utilizado para responder correctamente al problema F5.1.4 (Imagen V - 29 arriba). La falta de precisión en el uso del lenguaje hace complicado discernir si los alumnos están pensando que un problema que no tiene datos numéricos no puede resolverse o si las comparaciones que se proporcionan como dato en el enunciado son insuficientes para decidir qué situación es más ventajosa. Otros equipos precisan más sus justificaciones (segunda, tercera y cuarta producciones en la Imagen V - 29) lo que sugiere, junto con el éxito en F5.1.3, que una buena parte de los alumnos comprende la influencia de las comparaciones en la posibilidad o no de decantarse por qué situación es más favorable. De hecho, algunos equipos como A8 (Imagen V - 29 abajo) establecen que diferentes respuestas podrían ajustarse a las comparaciones proporcionadas en el enunciado.

Entre los argumentos esgrimidos por los alumnos en este problema encontramos la única referencia al concepto de razón. El equipo B6 (Imagen V - 30) explica que no puede calcularse la solución porque no tiene los datos, si los tuviera tendría que calcular la razón de alumnos por metro cuadrado para poder dar una respuesta.

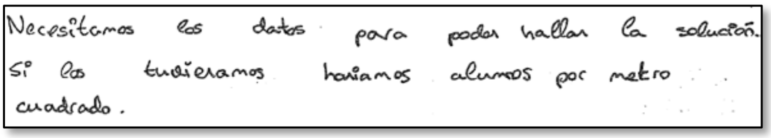

Necesitamos los datos para poder hallar la solución. si los tuvieramos haríamos alumnos por metro cuadrado.

Imagen V - 30. Producción del equipo B7 para el problema F5.1.4.

Aunque en los problemas numéricos no encontramos un número significativo de alumnos que procedan mediante estrategias aditivas erróneas, en las respuestas incorrectas al problema F5.1.4 y, en menor medida, a PE.2.1, que se decantan por la opción $S_1 = S_2$ quedan reflejadas estas dificultades. El proceso que lleva a razonar que las dos situaciones son igual de ventajosas y, por tanto, establecer implícitamente que las dos razones son iguales se refleja explícitamente en los argumentos escritos por los alumnos (Imagen V - 31).

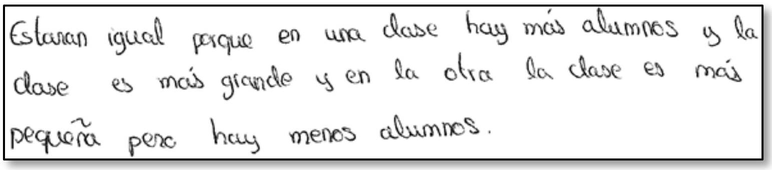
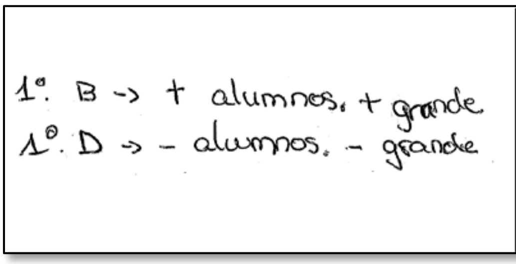
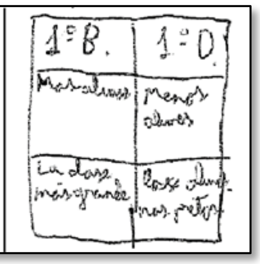

Estaran igual porque en una clase hay más alumnos y la clase es más grande y en la otra la clase es más pequeña pero hay menos alumnos.

Imagen V - 31. Producción del equipo D8 para el problema F5.1.4.

Al igual que ocurría en la situación F5.1.3, varios equipos traducen la situación planteada en el enunciado eligiendo uno de los individuos como sujeto para las dos comparaciones. También, como en el caso anterior, algunos equipos exploran todas las combinaciones posibles para establecer las comparaciones usando a los dos individuos como sujetos. Varios de estos alumnos utilizan espontáneamente representaciones simbólicas similares a la que utilizamos en esta memoria para codificar la estructura de un problema de comparación cualitativa o representaciones tabulares para resumir esta información (Imagen V - 32).


1º. B -> + alumnos. + grande
1º. D -> - alumnos. - grande



1ºB.	1ºD.
Mas alumnos	Menos alumnos
La clase más grande	[illegible]

Imagen V - 32. Producción del equipo A6 (izquierda) y del equipo B11 (derecha) para el problema F5.1.4.

V.3.1.5. Problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa

Además de las categorías generales, para analizar los ejercicios, se utilizan las categorías específicas que se recogen en la Tabla V - 37 y que ya se presentaron en el Capítulo III.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
VPd0	Sin razonamiento	**VPd5**	Proporción
VPd1	Construcción de patrones	**VPd6**	Construcción sucesiva
VPd2	Factor de cambio	**VPd7**	Uso de una fórmula
VPd3	Razón externa con multiplicación	**VPd8**	Operaciones sin sentido
VPd4	Razón externa con división	**VPd9**	Razonamientos aditivos erróneos

Tabla V - 37. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa.

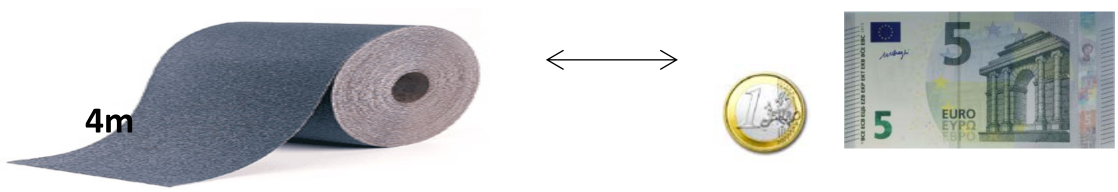
Los problemas de valor perdido para situaciones de proporcionalidad simple se trabajaron durante las sesiones 6 y 7. Además, se introdujeron dos problemas de estas características en las actividades de trabajo para casa tras la sesión 8 y otro más en la prueba escrita.

En esta sección analizamos de forma cuantitativa y cualitativa las respuestas de los alumnos de los grupos sobre los que se experimentó exclusivamente para los problemas en los que podía suponerse efectivamente una relación de proporcionalidad simple directa. Los falsos problemas de valor perdido, es decir, aquellos que tenían una estructura semántica similar a estos, pero en los que no podía suponerse una relación de proporcionalidad, ya han sido analizados previamente (ver sección V.3.1.2. Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones).

Análisis de la situación introductoria.

Estudiamos la situación introductoria independientemente del resto de problemas. En esta actividad, que tenía un sencillo soporte gráfico, se introduce explícitamente en la propuesta un sistema de representación tabular por primera vez en una situación que permite observar la covariación entre las magnitudes involucradas. No incluimos como apartado la primera fila de la tabla ya que en esta fila los alumnos tenían que copiar los datos proporcionados gráficamente. Los dos primeros apartados podrían analizarse como situaciones de cálculo de razones, los incluimos en este apartado por la importancia en el posterior estudio de las respuestas de la situación introductoria y por tener el matiz de no solicitar exactamente la razón (cantidad de magnitud intensiva), sino el valor de una magnitud que se corresponde con una unidad de la otra.

F6.1.1: *Imagínate que vas a comprar tela para hacer un traje y en el escaparate de la tienda ves el siguiente cartel anunciando una tela que está a un precio especial:*



Completa la siguiente tabla explicando bien el razonamiento que usas para realizar el cálculo en cada caso.

Precio (€)	*Longitud de la tela (m)*	*Razonamiento*
6		
	1	
1		
8		
	12	
15		
21		
	10	

En la Tabla V - 38 se observan los resultados para las categorías generales de análisis. El cálculo de las razones no supone para los alumnos ningún problema, obteniéndose un 100 % de respuestas correctas en el caso del precio unitario (por metro de tela) y algo menor, pero elevado, en la cantidad de producto por unidad monetaria. Esta tendencia parece mantenerse en el resto del ejercicio, los equipos se desenvuelven mejor tomando como variable independiente la cantidad de producto y como variable dependiente el precio. Ordenadas de ese modo las magnitudes, la constante de proporcionalidad de la función de proporcionalidad asociada sería el precio unitario. Además de ser una razón bien compactada, el precio unitario tiene una representación decimal exacta en este problema, mientras que la razón que da cuenta de la cantidad de producto por unidad monetaria tiene una representación decimal periódica.

		N	**B**	**I**	**C**
F6.1.1.1	N.º de respuestas	0	0	0	31
	Porcentaje	-	-	-	100 %
F6.1.1.2	N.º de respuestas	0	3	2	26
	Porcentaje	-	9,7 %	6,5 %	83,9 %
F6.1.1.3	N.º de respuestas	0	2	8	21
	Porcentaje	-	6,5 %	25,8 %	67,7 %
F6.1.1.4	N.º de respuestas	0	1	3	27
	Porcentaje	-	3,2 %	9,7 %	87,1 %
F6.1.1.5	N.º de respuestas	0	6	4	21
	Porcentaje	-	19,4 %	12,9 %	67,7 %
F6.1.1.6	N.º de respuestas	0	8	4	19
	Porcentaje	-	25,8 %	12,9 %	61,3 %
F6.1.1.7	N.º de respuestas	0	9	4	18
	Porcentaje	-	29,0 %	12,9 %	58,1 %

Tabla V - 38. Resultados generales en la situación introductoria de problemas de proporcionalidad simple de valor perdido (Ciclo II-1).

Se observa que el número de producciones en blanco aumenta hacia el final de la tarea, lo que da cuenta de que algunos equipos no pudieron completarla en el tiempo reservado.

Precio (€)	Longitud de tela (m)	Razonamiento
6	4	Había un billete de 5€ y una moneda de 1€.
1,50	1	6 : 4 = 1,5.
1	0,67	$4 : 6 = 0,\hat{6} \simeq 0,67$
8	5,36	0,67 · 8 = 5,36
18	12	1,5 · 12 = 18.
15	10,05	0,67 · 15 = 10,05.
21	14,07	0,67 · 21 = 14,07.
15	10	1,5 · 10 = 15.

Imagen V - 33. Producción del equipo B8 para el problema F6.1 (Ciclo II-1).

Como en otras ocasiones, se han categorizado como correctas las respuestas con errores de cálculo aritmético. Además, en los problemas de valor perdido la estructura numérica influye en la obtención de respuestas exactas. La aparición de razones sin representación decimal exacta provoca que los alumnos no obtengan soluciones exactas aun cuando la solución pueda ser incluso entera. Es el caso de los apartados F6.1.1.5 y F6.1.1.6 cuyos resultados eran $10\,m$ y $14\,m$ respectivamente. Una mayoría de alumnos evita el uso de fracciones por lo que utiliza la expresión decimal para la razón externa cuyo valor, $0,\hat{6}$, debía calcularse en F6.1.1.2. Los alumnos usan mayoritariamente los valores $0{,}6$, o $0{,}66$, o $0{,}67$, en vez de la fracción $2/3$, o cualquiera de sus equivalentes. De las 21 respuestas señaladas como correctas para F6.1.1.5, 5 dan la respuesta entera exacta y 16 una aproximación decimal. En el caso de F6.1.1.6, 3 dan la respuesta exacta y 15 una aproximación decimal. En la Imagen V - 33 puede verse un ejemplo de producción que utiliza aproximaciones decimales en sus respuestas.

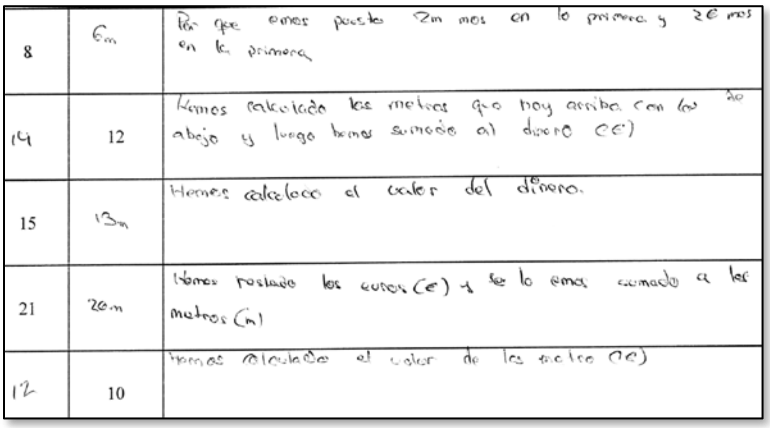
Los resultados para las categorías de análisis específicas de esta situación introductoria pueden observarse en la Tabla V - 39. Como siempre, en este nivel de análisis solo se tienen en cuenta las respuestas de las categorías I y C del nivel anterior.

Aunque en la tabla de la tarea F6.1 se reserva una columna para que los alumnos indiquen el razonamiento que siguen para dar la respuesta numérica, se observa que un porcentaje significativo de los equipos no esgrime ningún tipo de argumento en sus respuestas. Dentro de estas respuestas sin argumentación (ni ningún rastro de las operaciones realizadas para llegar a la solución), categorizadas en VPd0, se encuentran tanto respuestas correctas como incorrectas.

		VPd0	VPd1	VPd2	VPd3	VPd4	VPd5	VPd6	VPd7	VPd8	VPd9
F6.1.1.1	N.º de resp.	5	0	1	25	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	16,1 %	-	3,2 %	80,6 %	-	-	-	-	-	-
F6.1.1.2	N.º de resp.	5	0	1	22	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	16,1 %	-	3,2 %	71,0 %	-	-	-	-	-	-
F6.1.1.3	N.º de resp.	6	0	1	20	0	0	1	0	0	1
	Porcentaje	19,4 %	-	3,2 %	64,5 %	-	-	3,2 %	-	-	3,2 %
F6.1.1.4	N.º de resp.	6	0	6	17	0	0	0	0	0	1
	Porcentaje	19,4 %	-	19,4 %	54,8 %	-	-	-	-	-	3,2 %
F6.1.1.5	N.º de resp.	6	0	1	17	0	0	1	0	0	0
	Porcentaje	19,4 %	-	3,2 %	54,8 %	-	-	3,2 %	-	-	-
F6.1.1.6	N.º de resp.	4	0	1	16	0	0	1	0	0	1
	Porcentaje	12,9 %	-	3,2 %	51,6 %	-	-	3,2 %	-	-	3,2 %
F6.1.1.7	N.º de resp.	5	0	0	16	0	0	1	0	0	0
	Porcentaje	16,1 %	-	-	51,6 %	-	-	3,2 %	-	-	-

Tabla V - 39. Estrategias empleadas en la situación introductoria de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-1).

El número de equipos que siguen una estrategia incorrecta (VPd1, VPd8, VPd9) es muy bajo. No se aprecian resoluciones a partir de la búsqueda de patrones, ni dentro de la categoría de operaciones sin sentido y solo aparecen explícitamente tres estrategias aditivas, todas ellas pertenecientes al mismo equipo, D8 (ver Imagen V - 34). En la resolución de F6.1.1.3 cuya estructura numérica es $(6{:}\,4) \leftrightarrow (8{:}\,x)$, el equipo D8 da como respuesta $6\ m$ y argumenta lo siguiente “Por que emos [sic.] puesto $2\ m$ mas en la primera y 2 € mas en la primera”. La respuesta $6\ m$ para este apartado aparece en otras dos producciones en las que no se aportan argumentos. Además, el equipo D8, aunque sin especificar de manera clara sus argumentos parece razonar de forma aditiva en otros de los subapartados de la situación introductoria. Así, puede que la presencia de argumentos aditivos (ver Imagen V - 34) sea algo mayor que la reflejada en la Tabla V - 39.



8	6m	Por que emos puesto 2m mas en la primera y 2€ mas en la primera
14	12	Hemos calculado los metros que hay arriba con los de abajo y luego hemos sumado al dinero (€)
15	13m	Hemos calculado el valor del dinero.
21	26m	Hemos restado los euros (€) y se lo emos sumado a los metros (m)
12	10	Hemos calculado el valor de los metros (€)

Imagen V - 34. Producción del equipo D8 para el problema F6.1 (Ciclo II-1).

En cuanto al uso de estrategias potencialmente correctas (VPd2-VPd7), cabe destacar la aparición predominante de la estrategia VPd3 basada en el uso de la razón externa que permite calcular la solución mediante multiplicación. Por ejemplo, no aparece ninguna estrategia en la que se utilice la razón externa en una división (VPd4), tampoco aparece el uso de proporciones o fórmulas. Como en el caso de la estrategia aditiva errónea, las estrategias de construcción progresiva (VPd6) aparecen muy concentradas, solo encontramos dos equipos que presenten este tipo de argumentos en algún apartado del ejercicio: B8 y D1. El uso de esta estrategia parece estar ligado al del factor de cambio (VPd2). Por ejemplo, el equipo D1 (ver Imagen V - 35) utiliza en algunos apartados una estrategia de factor de cambio, pero en algunos apartados en los que la razón interna con la pareja inicial de valores no es entera combina estos argumentos con argumentos aditivos. Cabe destacar que, aunque solo una pareja, A1, utiliza de forma sistemática el factor de cambio para resolver todos los apartados, el número de respuestas que utilizan factor de cambio en el apartado F6.1.1.4 es significativamente mayor al del resto de apartados. Muy probablemente, este hecho se deba a que este apartado es el único que presenta una razón interna entera en la comparación con la pareja de valores relacionados que proporciona el enunciado (su estructura numérica es $(6:4) \leftrightarrow (x:12)$).

La alta tasa de éxito entre los equipos que completan la tarea y aportan argumentos hace que la situación introductoria no proporcione información sobre errores asociados a estrategias potencialmente correctas. Solo se ha detectado un fenómeno destacable en el equipo A7 que resuelve de forma incorrecta cuatro de los apartados utilizando una estrategia VPd3. Este equipo utiliza la razón externa inversa a la adecuada y acaba los cálculos mediante una multiplicación.

Precio (€)	Longitud de tela (m)	Razonamiento
6	4	lo pone arriba
1'5	1	4 m 6 16 entre 4 cuesta 1 m
1	0'67	6 € 4 m 1€ 4 entre 6 = 0'67
8	5'4	6 € 4 m mas 1€ = 0'67 = 0'67 x 2 = 1'4 4 m 4 = 5'4 m
18	12	4 m 6 € 4x3=12 m = 6x3=18€ 12 m
15	10	6€ 4 m = 12€ 8 m + 3€ 2 m = 8 m + 2 m 10 m
21	14	6€ x 3 = 18 + 3 que es la mitad de 6 4 : 2 = 2 + 4 x 3 = 12 = 12+2 = 14 m por 21 €
15	10	1 m vale 1'5 € 10 euros 1'5 x 10 = 15€

Imagen V - 35. Producción del equipo D1 para el problema F6.1 (Ciclo II-1).

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Tras el análisis de la situación introductoria, analizamos el desempeño de los estudiantes en el resto de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa. Los resultados en las categorías generales pueden observarse en la Tabla V - 40.

Observamos que el número de alumnos que no entrega las tareas para casa es alto, como en otros focos analizados, si bien se constata una bajada en el número de producciones plagiadas. El número de respuestas en blanco en las tareas hechas en clase es bajo salvo en el caso de los problemas de F7.1 en los que vemos que el número de respuestas en blanco va en aumento, apuntando este hecho a que un porcentaje de equipos no ha podido acabar todos los problemas proporcionados.

Como siempre, no se han tenido en cuenta errores en los algoritmos de las operaciones básicas o el uso de aproximaciones decimales para categorizar las respuestas como correctas o incorrectas. Las respuestas correctas en las tareas por equipos son superiores al 70 %. Solo en el problema F7.1.4, en el que el número de respuestas en blanco es más elevado, este porcentaje baja hasta el 51,6 %. El número de producciones correctas, apoyado por el de producciones incorrectas que desciende desde los problemas de la ficha F6.2 a los de la ficha F7.1, parece indicar una mejora en el desempeño en la sesión séptima respecto a la sexta. En la prueba escrita final, a la que los alumnos se enfrentan de forma individual, el porcentaje de éxito es del 64,6 %. Además, el número de respuestas correctas en la prueba escrita es mayor que el número de respuestas correctas en las tareas para casa, a diferencia de lo que pasaba en otros focos de interés. Por ejemplo, en los problemas de comparación cuantitativa, el número de respuestas correctas en la prueba escrita era similar al de las tareas para casa.

		N	B	I	C
F6.2.1	N.º de respuestas	0	2	3	26
	Porcentaje	-	6,5 %	9,7 %	83,9 %
F6.2.2	N.º de respuestas	0	2	7	22
	Porcentaje	-	6,5 %	22,6 %	71,0 %
TC6.1	N.º de respuestas	24	2	16	23
	Porcentaje	36,9 %	6,5 %	24,6 %	35,4 %
TC6.3	N.º de respuestas	22	6	10	27
	Porcentaje	33,8 %	9,2 %	15,4 %	41,5 %
TC6.5	N.º de respuestas	22	4	5	34
	Porcentaje	33,8 %	6,2 %	7,7 %	51,3 %
F7.1.1	N.º de respuestas	1	0	1	29
	Porcentaje	3,2 %	-	3,2 %	93,5 %
F7.1.3	N.º de respuestas	1	6	1	23
	Porcentaje	3,2 %	19,4 %	3,2 %	74,2 %
F7.1.4	N.º de respuestas	1	10	4	16
	Porcentaje	3,2 %	32,3 %	12,9 %	51,6 %
TC8.5	N.º de respuestas	28	4	3	30
	Porcentaje	43,1 %	6,2 %	4,6 %	46,2 %
TC8.7	N.º de respuestas	28	6	6	25
	Porcentaje	43,1 %	9,2 %	9,2 %	38,5 %
PE.4	N.º de respuestas	0	4	19	42
	Porcentaje	-	6,2 %	29,2 %	64,6 %

Tabla V - 40. Resultados generales en los problemas de proporcionalidad simple de valor perdido (Ciclo II-1).

Los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas parecen apuntar hacia una mayor dificultad de los problemas F6.2.2, TC6.1, TC6.3, F7.1.4, TC8.7 y PE.4 respecto del resto de problemas de valor perdido planteados. Como se señaló anteriormente (sección V.1.3. Diseño curricular de las sesiones de clase y sección V.1.4. Diseño de la prueba escrita), para resolver los problemas F6.2.2, TC6.1, TC6.3 y PE.4 mediante razón externa y multiplicación, hay que plantear la razón externa inversa a la que parece más natural en la situación y en el problema F7.1.4 los alumnos se enfrentan por primera vez a una situación de mezcla con estructura parte-parte-todo. En TC8.7 los alumnos tenían que realizar un cambio de unidades para poder resolver el problema.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Para el siguiente nivel de análisis, no se tienen en cuenta las producciones de los alumnos correspondientes a las categorías N y B (no entregados y en blanco). En la Tabla V - 41 se recogen los porcentajes de aparición de cada una de las estrategias consideradas para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa. Dichos porcentajes están calculados sobre el total de equipos, para las tareas por equipos, o sobre el total de alumnos, para las tareas individuales.

		VPd0	**VPd1**	**VPd2**	**VPd3**	**VPd4**	**VPd5**	**VPd6**	**VPd7**	**VPd8**	**VPd9**
F6.2.1	N.º de resp.	2	0	0	26	0	0	1	0	0	0
	Porcentaje	6,5 %	-	-	83,9 %	-	-	3,2 %	-	-	-
F6.2.2	N.º de resp.	3	0	0	18	8	0	1	0	0	0
	Porcentaje	9,7 %	-	-	58,1 %	25,8 %	-	3,2 %	-	-	-
TC6.1	N.º de resp.	7	0	0	29	2	0	0	0	0	0
	Porcentaje	10,8 %	-	-	44,6 %	3,1 %	-	-	-	-	-
TC6.3	N.º de resp.	7	0	0	13	8	0	3	2	4	0
	Porcentaje	10,8 %	-	-	20,0 %	12,3 %	-	4,6 %	3,1 %	6,2 %	-
TC6.5	N.º de resp.	2	0	0	35	0	0	0	1	1	0
	Porcentaje	3,1 %	-	-	53,8 %	-	-	-	1,5 %	1,5 %	-
F7.1.1	N.º de resp.	1	0	0	23	0	0	6	0	0	0
	Porcentaje	3,2 %	-	-	74,2 %	-	-	19,4 %	-	-	-
F7.1.3	N.º de resp.	0	0	0	11	13	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	35,5 %	41,9 %	-	-	-	-	-
F7.1.4	N.º de resp.	1	0	13	3	0	0	0	0	3	0
	Porcentaje	3,2 %	-	41,9 %	9,7 %	-	-	-	-	9,7 %	-
TC8.5	N.º de resp.	2	0	3	26	0	0	1	0	0	1
	Porcentaje	3,1 %	-	4,6 %	40,0 %	-	-	1,5 %	-	-	1,5 %
TC8.7	N.º de resp.	1	0	0	29	0	0	0	0	1	0
	Porcentaje	1,5 %	-	-	44,6	-	-	-	-	1,5 %	-
PE.4	N.º de resp.	1	0	0	47	4	0	0	2	6	1
	Porcentaje	1,5 %	-	-	72,3 %	6,2 %	-	-	3,1 %	9,2 %	1,5 %

Tabla V - 41. Estrategias empleadas en la resolución de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-1).

Como puede comprobarse en la Tabla V - 41 el número de respuestas clasificadas coincide con la suma de las categorizadas en las columnas I y C de la Tabla V - 40, a excepción de la fila correspondiente al problema TC6.1 en la que se ha dejado una respuesta sin incluir. En esta tarea para casa, el alumno, probablemente debido a una influencia externa, establece una fracción correspondiente a una razón externa, pero la utiliza con significado de operador (ver Imagen V -

36). La respuesta parece intentar camuflar una regla de tres mediante un procedimiento que podría asemejarse al institucionalizado en clase.

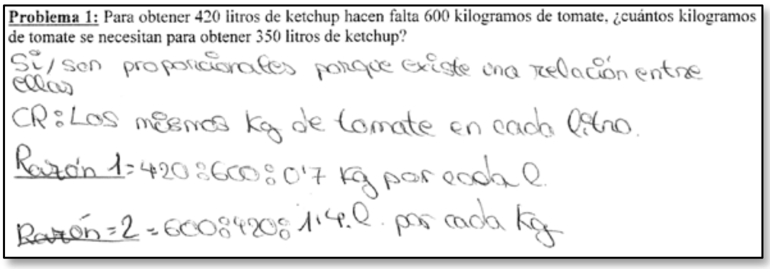

Problema 1: Para obtener 420 litros de ketchup hacen falta 600 kilogramos de tomate, ¿cuántos kilogramos de tomate se necesitan para obtener 350 litros de ketchup?

420/600 de 350 : 420 × 350 = 21000 + 1260 = 147000

147000 | 350 → 420

Imagen V - 36. Producción no clasificada del alumno D5.1 para el problema TC6.1.

Fijándonos en las respuestas categorizadas en la Tabla V - 41, el número de respuestas sin argumentos (VPd0) es bajo. Además de las producciones en las que solo aparece una respuesta numérica sin ningún argumento u operaciones que respalden el proceso seguido, se han incluido en esta categoría algunas producciones en las que los alumnos calculan las dos razones posibles entre la pareja de valores relacionados proporcionada por el enunciado como respuesta al problema (ver Imagen V - 37) y alguna producción en la que no se da respuesta numérica argumentando que no puede realizarse el problema. Este tipo de producciones las encontramos en las respuestas a F6.2.2 y los problemas de TC6, y desaparecen en los problemas de F7, TC8 y PE.4. Esto parece indicar que algunos alumnos no comprendían inicialmente el propósito de los problemas de valor perdido, pero con el paso de las sesiones se ha solucionado este problema.


Problema 1: Para obtener 420 litros de ketchup hacen falta 600 kilogramos de tomate, ¿cuántos kilogramos de tomate se necesitan para obtener 350 litros de ketchup?

Sí, son proporcionales porque existe una relación entre ellas

CR: Los mismos kg de tomate en cada litro.

Razón 1: 420 : 600 : 0'7 kg por cada l.

Razón 2 = 600 : 420 : 1'4 l. por cada kg

Imagen V - 37. Producción del alumno B9.2 para el problema TC6.1.

Producciones que siguen una estrategia errónea.

Muy pocas producciones siguen una estrategia errónea (VPd1, VPd8 y VPd9). En todos los casos el porcentaje de aparición es inferior al 10 % y casi en la mitad de los problemas dicho porcentaje es nulo. En concreto, cabe destacar el bajísimo porcentaje de razonamientos aditivos erróneos, de las 545 producciones analizadas solo 2 presentan este tipo de argumentos. En la parte superior de Imagen V - 38 el alumno A10.2 para dar una respuesta (que se aproxima correctamente a la solución) argumenta que si hay que pintar más metros se necesitan más botes de pintura. En la parte inferior de la Imagen V - 38 el alumno B10.1 calcula la solución considerando constante la razón aditiva, es decir, si hay un kilo más de harina de un tipo, hay que echar un kilo más de harina del otro tipo.

4.- Para pintar una pared de 16 m² un pintor ha necesitado 6 botes de pintura. ¿Cuántos botes necesitará para pintar una pared de 22 m²? 9 botes de pintura necesitaran por que es 22 m² y entonces pues mas pintura.

Para la masa de tortas de maíz se deben mezclar 3 kilos de harina de trigo por cada 2 kilos de harina de maíz. ¿Qué cantidad de harina de trigo debo mezclar para hacer tortas si he echado 3 kilos de harina de maíz a la masa?

Tendríamos que echar 4 Kilos de harina de trigo porque si en el ejemplo de harina de maíz hay que hechar 1K menos que en el de trigo si hay 3K de harina de maíz habrá 4K de harina de trigo.

Imagen V - 38. Alumnos que emplean argumentos aditivos en la resolución de problemas de valor perdido.

Producciones que siguen una estrategia correcta.

Como hemos visto, la mayor parte de los alumnos que realizan los ejercicios siguen una estrategia potencialmente correcta (VPd2-VPd7). De las estrategias establecidas como categorías, la única que no ha aparecido es la de proporciones (VPd5). Se observan algunos fenómenos en las producciones de las tareas para casa, también en la prueba escrita, que no ocurren en las realizadas en clase. Además del plagio entre alumnos, aparecen estrategias no institucionalizadas en clase y que no surgen de forma espontánea en los alumnos y que son evidencias de influencia externa. Por ejemplo, el uso de la regla de tres (VPd7) solo tiene lugar en 5 producciones, 3 correspondientes a tareas para casa y 2 en la prueba escrita. En la Imagen V - 39 se aprecia la producción de un alumno en la prueba escrita que, aunque plantea una proporción, convierte esta proporción a un sistema tabular para obtener directamente la operación combinada que deber realizar para obtener la solución.

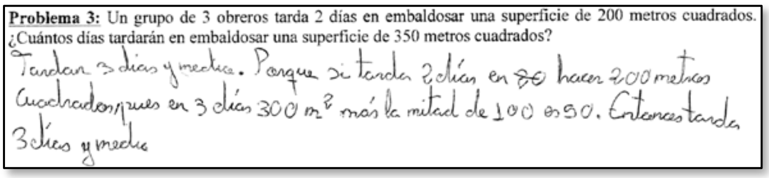
4.- Para pintar una pared de 16 m² un pintor ha necesitado 6 botes de pintura. ¿Cuántos botes necesitará para pintar una pared de 22 m²?

$\frac{6}{16} = \frac{x}{22}$: $\begin{matrix} 6 - 16 \\ x - 22 \end{matrix}$ = $\frac{6 \cdot 22}{16}$: $132 \,|\, 16$ = 8'25

8'25 botes necesitare

Imagen V - 39. Producción del alumno D10.1 para el problema PE.4.

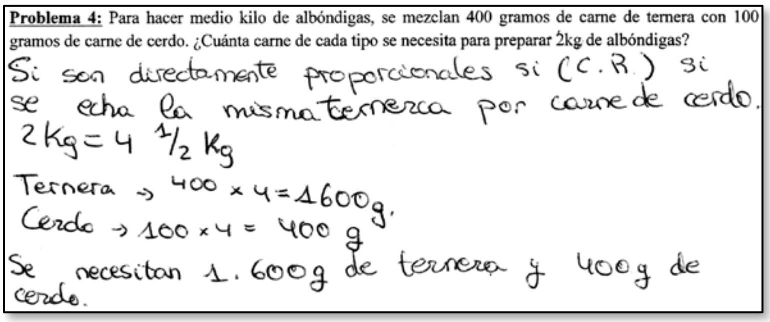
Se observa también un escaso empleo de estrategias de construcción progresiva (VPd6). Solo encontramos una presencia significativa de esta estrategia en el problema F7.1.1 en la que el enunciado proporcionaba el dato cuyo valor homólogo debía calcularse mediante un aumento aditivo de una de las cantidades de la pareja de datos homólogos proporcionada por el enunciado $(4{:}\,5) \leftrightarrow (4+3{:}\,x)$. Aún así, solo 6 parejas construyen la solución calculando la cantidad de leche que deben consumir los 3 gatos nuevos (mediante una estrategia VPd3) para luego sumar dicha cantidad a los 5 litros que consumen los 4 gatos que ya tenía. Fuera de este problema, la pareja B11 estudia una descomposición aditiva de los datos para intentar dar una solución a los problemas F6.2.1 y F6.2.2 sin éxito y encontramos cuatro producciones correctas usando construcción progresiva en TC6.5 y TC8.5. Por ejemplo, en el problema TC6.3 que tiene una sencilla estructura numérica, $(2{:}\,200) \leftrightarrow (x{:}\,350)$, encontramos tres soluciones correctas siguiendo esta estrategia (Imagen V - 40).


Problema 3: Un grupo de 3 obreros tarda 2 días en embaldosar una superficie de 200 metros cuadrados. ¿Cuántos días tardarán en embaldosar una superficie de 350 metros cuadrados?

Tardan 3 días y medio. Porque si tarda 2 días en ~~80~~ hacer 200 metros cuadrados, pues en 3 días 300 m² más la mitad de 100 es 50. Entonces tarda 3 días y medio

Imagen V - 40. Producción del alumno D1.1 para el problema TC6.3.

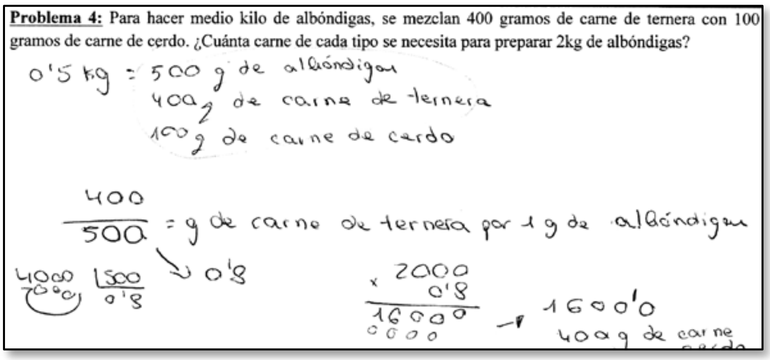
La estrategia por factor de cambio o razón interna (VPd2) solo es mayoritaria en uno de los problemas y no aparece prácticamente en ninguna otra producción. El problema F7.1.4, en el que es mayoritaria la estrategia por razón interna, es el primero con estructura parte-parte-todo al que se enfrentaban los alumnos y además tiene una estructura numérica que favorece hallar las cantidades solicitadas usando el cuádruple de las cantidades proporcionadas en el enunciado $(100\ g + 400\ g: 500\ g) \leftrightarrow (x + y: 2\ kg)$. Un ejemplo típico de esta forma de proceder en este problema lo podemos ver en la producción del equipo A6 (Imagen V - 41).


Problema 4: Para hacer medio kilo de albóndigas, se mezclan 400 gramos de carne de ternera con 100 gramos de carne de cerdo. ¿Cuánta carne de cada tipo se necesita para preparar 2kg de albóndigas?

Si son directamente proporcionales si (C.R.) si se echa la misma ternerza por carne de cerdo.
2 Kg = 4 ½ Kg
Ternera → 400 × 4 = 1600 g.
Cerdo → 100 × 4 = 400 g
Se necesitan 1.600 g de ternera y 400 g de cerdo.

Imagen V - 41. Producción del equipo A6 para el problema F7.1.4.

El problema F7.1.4. es el único en el que las estrategias por razón externa (VPd3 o VPd4) han resultado minoritarias. Los equipos que razonaron por razón externa en dicho problema lo hicieron estableciendo razones externas entre la parte y el todo y terminando el problema mediante una multiplicación, es decir una estrategia VPd3 con una razón parte-todo (ver Imagen V - 42).

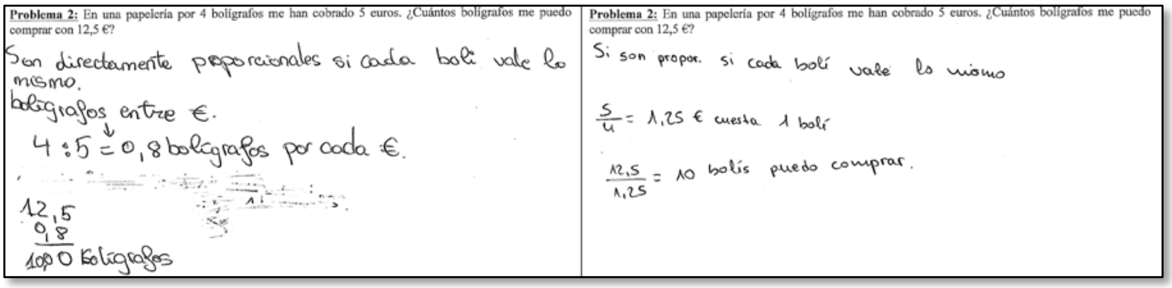

Problema 4: Para hacer medio kilo de albóndigas, se mezclan 400 gramos de carne de ternera con 100 gramos de carne de cerdo. ¿Cuánta carne de cada tipo se necesita para preparar 2kg de albóndigas?

0'5 kg = 500 g de albóndigas
400 g de carne de ternera
100 g de carne de cerdo

$\frac{400}{500}$ = g de carne de ternera por 1 g de albóndigas
→ 0'8
4000 | 500
000 | 0'8
× 2000
0'8
16000
0000
→ 1600'0
400 g de carne cerdo

Imagen V - 42. Producción del equipo D5 para el problema F7.1.4.

De entre las estrategias por razón externa la estrategia institucionalizada, VPd3, ha resultado mayoritaria en el resto de los problemas menos en F7.1.3. En dicho problema, el enunciado proporciona explícitamente la razón externa apropiada para terminar el problema mediante una división, por lo que una mayoría de alumnos se ha decantado por la estrategia más económica en cuanto a número de operaciones. También es destacable el porcentaje significativo de respuestas que usan VPd4 en vez de VPd3 en los problemas F6.2.2 y TC6.3. Este hecho puede deberse a la presencia de razones bien compactadas, precio unitario en F6.2.2 y velocidad de trabajo (metros cuadrados embaldosados por día) en TC6.3, que podían usarse para llevar a cabo la estrategia VPd4 (Imagen V - 43 derecha), mientras que para poder ejecutar con éxito la estrategia VPd3 (Imagen V - 43 izquierda), debían usarse las inversas de las anteriores razones, que tienen un significado menos natural.



Problema 2: En una papelería por 4 bolígrafos me han cobrado 5 euros. ¿Cuántos bolígrafos me puedo comprar con 12,5 €?

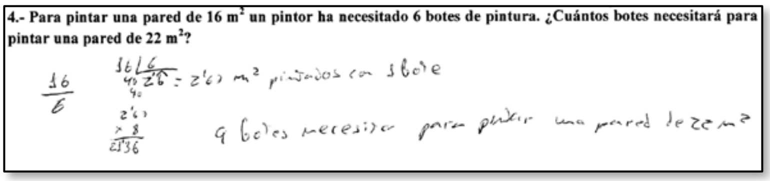
Son directamente proporcionales si cada boli vale lo mismo.
bolígrafos entre €.
4 : 5 = 0,8 bolígrafos por cada €.
12,5
0,8
10,0 0 bolígrafos

Problema 2: En una papelería por 4 bolígrafos me han cobrado 5 euros. ¿Cuántos bolígrafos me puedo comprar con 12,5 €?

Si son propor. si cada bolí vale lo mismo
$\frac{5}{4}$ = 1,25 € cuesta 1 bolí
$\frac{12,5}{1,25}$ = 10 bolís puedo comprar.

Imagen V - 43. Producciones de los equipos A6 (izquierda) y A7 (derecha) para el problema F6.2.2.

También se han categorizado como VPd4 dos producciones que calculan la razón externa necesaria para aplicar VPd4 pero que en vez de realizar la división de forma directa estiman el resultado de la división indirectamente buscando el factor que multiplicado por la razón externa produce el resultado deseado a una aproximación al mismo (ver Imagen V - 44). El alumno D2.2 calcula la razón "metros cuadrados por bote" y busca el número de botes necesario para poder pintar 22 metros cuadrados, como al multiplicar la razón por 8 encuentra una buena aproximación a 22 por defecto, concluye que el número de botes necesario debe ser 9. El alumno A2.2 sigue una estrategia similar con errores en los algoritmos que le llevan a deducir que el número de botes debe ser 10. Los dos casos anteriores pertenecen a las producciones del problema PE.4 de la prueba escrita. Precisamente, en el problema PE.4 se ha detectado una mayor variedad de estrategias empleadas. Esta variabilidad, probablemente, se debe al mayor esfuerzo que algunos alumnos realizan por encontrar una solución al problema en la prueba escrita.

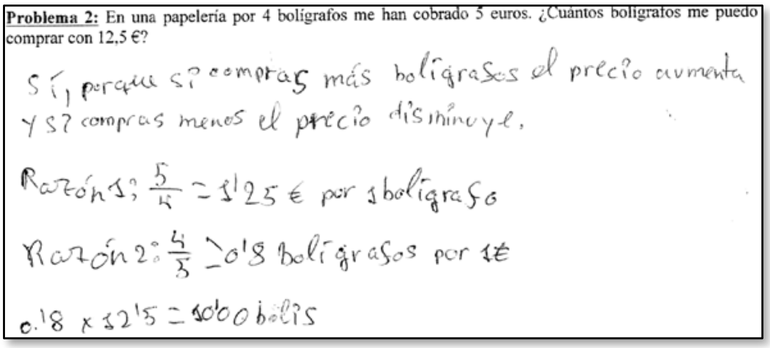


4.- Para pintar una pared de 16 m² un pintor ha necesitado 6 botes de pintura. ¿Cuántos botes necesitará para pintar una pared de 22 m²?

$\frac{16}{6}$
16 | 6
40 2'6 = 2'6 m² pintados con 1 bote
2'6
× 8
21'36
9 botes necesito para pintar una pared de 22 m²

Imagen V - 44. Producción del alumno D2.2 para el problema PE.4.

La influencia de la estrategia institucionalizada, VPd3, se observa no solo en su presencia predominante, sino también en el proceso de reflexión que realizan los alumnos para determinar la razón externa que les permita concluir el problema mediante una multiplicación. Por ejemplo, en la Imagen V - 45 vemos que el equipo D9 establece las dos razones externas explicitando su significado para determinar cuál es la adecuada para implementar la estrategia VPd3. Este hecho apunta a que los alumnos no memorizan acríticamente los procesos para alcanzar la solución, sino que reflexionan sobre el significado de las operaciones que realizan.


Problema 2: En una papelería por 4 bolígrafos me han cobrado 5 euros. ¿Cuántos bolígrafos me puedo comprar con 12,5 €?

Sí, porque si compras más bolígrafos el precio aumenta y si compras menos el precio disminuye.

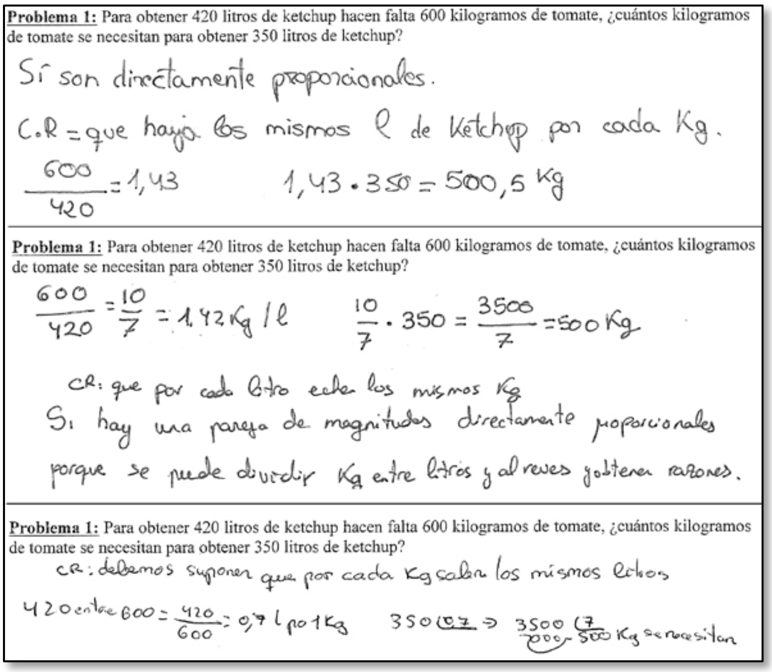
Razón 1: $\frac{5}{4}$ = 1'25 € por 1 bolígrafo

Razón 2: $\frac{4}{5}$ = 0'8 bolígrafos por 1€

0'8 × 12'5 = 10'00 bolis

Imagen V - 45. Producción del equipo D9 para el problema F6.2.2.

Se constata que, en general, los alumnos prefieren realizar operaciones con la representación decimal de las razones a operar con las razones en forma de fracción. Este hecho provoca, como hemos dicho, la aparición de muchos resultados inexactos (ver Imagen V - 46 arriba), sobre todo cuando la razón utilizada no tiene una representación decimal finita.


Problema 1: Para obtener 420 litros de ketchup hacen falta 600 kilogramos de tomate, ¿cuántos kilogramos de tomate se necesitan para obtener 350 litros de ketchup?

Sí son directamente proporcionales.

C.R = que haya los mismos l de Ketchup por cada Kg.

$\frac{600}{420}$ = 1,43   1,43 · 350 = 500,5 Kg

Problema 1: Para obtener 420 litros de ketchup hacen falta 600 kilogramos de tomate, ¿cuántos kilogramos de tomate se necesitan para obtener 350 litros de ketchup?

$\frac{600}{420} = \frac{10}{7}$ = 1,42 Kg / l $\frac{10}{7} \cdot 350 = \frac{3500}{7}$ = 500 Kg

CR: que por cada litro eche los mismos Kg

Si hay una pareja de magnitudes directamente proporcionales porque se puede dividir Kg entre litros y al reves y obtener razones.

Problema 1: Para obtener 420 litros de ketchup hacen falta 600 kilogramos de tomate, ¿cuántos kilogramos de tomate se necesitan para obtener 350 litros de ketchup?

CR: debemos suponer que por cada Kg salen los mismos litros

420 entre 600 = $\frac{420}{600}$ = 0,7 l po 1Kg   350 : 0,7 ⇒ 3500 : 7 / 500 Kg se necesitan

Imagen V - 46. Producciones de los alumnos A4.2 (arriba), A4.1 (centro) y A8.1 (abajo) para el problema T6.1.

Este fenómeno es claramente observable en los tres problemas en los que era la razón externa que permitía aplicar la estrategia VPd3, la que tenía representación decimal periódica (T6.1, F7.1.3 y T8.7). Por ejemplo, en T6.1, de las 23 respuestas correctas solo 7 son exactas. Estas respuestas exactas se obtienen bien por trabajar en forma de fracción (ver Imagen V - 46 centro) o por utilizar la estrategia VPd4 en la que la razón externa puesta en juego tenía una representación decimal exacta (ver Imagen V - 46 abajo). En el problema F7.1.3, de las 23 respuestas correctas, hay 19 exactas. La mayor parte de las respuestas exactas en este problema se obtienen al utilizar una estrategia VPd4 con la razón externa que ya proporcionaba el enunciado y era exacta. En el problema T8.7, en el que el precio unitario no tenía una representación decimal exacta, de las 25 respuestas correctas, solo han aparecido 2 respuestas exactas. Este fenómeno puede ser indicador de la influencia de la estructura numérica en la estrategia puesta en juego por los alumnos.

Son minoritarias las producciones en las que encontramos argumentos erróneos, como el que se observa en la Imagen V - 45, en los que se identifique una relación creciente entre las magnitudes involucradas con una relación de proporcionalidad directa. En concreto, solo se han encontrado cuatro producciones con este tipo de argumentos. Es decir, la mayor parte de los alumnos que se preocupan por argumentar el tipo de relación de proporcionalidad, independientemente de la estrategia utilizada para la resolución, lo hace mediante el establecimiento de una condición de regularidad adecuada (Imagen V - 37, Imagen V - 41, Imagen V - 43, Imagen V - 46). Sin embargo, alrededor de dos tercios de los alumnos no incorporan argumentos sobre la relación de proporcionalidad en la resolución de problemas de valor perdido (Imagen V - 36, Imagen V - 39, Imagen V - 40, Imagen V - 42, Imagen V - 44). Por ejemplo, en la prueba escrita el 36,9 % de los alumnos caracterizaron correctamente la relación de proporcionalidad estableciendo condiciones de regularidad adecuadas.

Errores cometidos en estrategias correctas.

Como hemos visto, los alumnos usan mayoritariamente la estrategia correcta institucionalizada VPd3, es decir, calcular la razón externa que permite terminar el problema mediante multiplicación. El uso de VPd2 y VPd4 aparece de forma espontánea en problemas concretos en los que el uso de estas estrategias supone una ventaja computacional a los alumnos. Por ello, no hemos detectado errores en la aplicación de estas dos estrategias en las producciones. Tampoco se han detectado errores asociados al uso de la regla de tres en las 5 producciones que la emplean. Así los errores detectados se han clasificado en las siguientes cuatro familias:

- Error VP.1: Se evidencia el uso de una estrategia correcta (por lo que no se ha categorizado el problema dentro de estrategias incorrectas), pero el problema está inacabado por lo que no se puede constatar si el alumno puede terminar el desarrollo correctamente o realiza para finalizar el problema alguna operación sin sentido.
- Error VP.2: El alumno evidencia problemas asociados a la comprensión del número racional y sus representaciones simbólicas.
- Error VP.3: Se identifica alguna de las razones con la interpretación, en términos de magnitud intensiva, de su inversa.
- Error VP.4: Se utiliza una estrategia VPd3 o VPd4 operando con una razón diferente a la pertinente.

Estos errores tienen un claro paralelismo con los establecidos en la sección dedicada al análisis de las producciones escritas para problemas de comparación cuantitativa (V.3.1.3. Problemas de comparación cuantitativa de proporcionalidad simple directa). Como dijimos en aquella sección, la naturaleza del primer tipo de error puede combinar tanto aspectos ambientales, como el tiempo para resolver la tarea, como aspectos cognitivos. El segundo tipo de error conecta con los conocimientos previos que debe tener el alumno de cursos o unidades didácticas anteriores y el tercer tipo de error está relacionado con los conocimientos adquiridos en las sesiones previas de la unidad. El último tipo de error está asociado directamente con la estrategia institucionalizada y puede deberse bien a la aplicación no reflexiva de la estrategia o a dificultades cognitivas relacionadas con los significados de la multiplicación entre cantidades de magnitud. Cabe destacar que no es posible categorizar todos los errores encontrados en una de las anteriores tipologías, ya que no dependen exclusivamente de la secuencia de operaciones que realiza el alumno, sino también de la interpretación en términos de cantidades de magnitud que el alumno da a los resultados parciales, y dicha interpretación no siempre está reflejada en las producciones escritas.

Los errores detectados con mayor presencia son los de tipo 3 y 4. En la Imagen V - 47 podemos ver cuatro producciones para el problema PE.4. Las cuatro siguen la misma secuencia de operaciones para llegar hasta la solución, dividir 16 entre 6 y multiplicar el resultado por 22. Las diferentes respuestas se deben a diferencias en el redondeo del primer resultado y a algún error en los algoritmos de la división y multiplicación. Sin embargo, el tipo de error es diferente en cada caso. El alumno A3.2 plantea e interpreta bien la razón necesaria para aplicar el método VPd3, pero yerra al convertir la fracción 6/16 a su notación decimal (hace la división inversa), es decir, es un error del segundo tipo. El alumno A7.2 utiliza la razón 16/6 convirtiéndola correctamente a decimal, pero interpretándola de forma incorrecta, es decir, busca la razón “botes por cada metro cuadrado” que le permitiría aplicar correctamente VPd3 pero utiliza la razón inversa a la que debería. Este error es el expuesto en la tercera categoría. Por su parte, el alumno D5.1, utiliza la razón 16/6 interpretándola correctamente, pero la utiliza multiplicando “los metros cuadrados por bote” por “el número total de metros cuadrados”, multiplicación que carece de sentido (error del cuarto tipo). Por último, destacar que la ausencia de interpretaciones de los resultados en la producción de B10.1 hace imposible categorizar el error cometido según la tipología anterior.

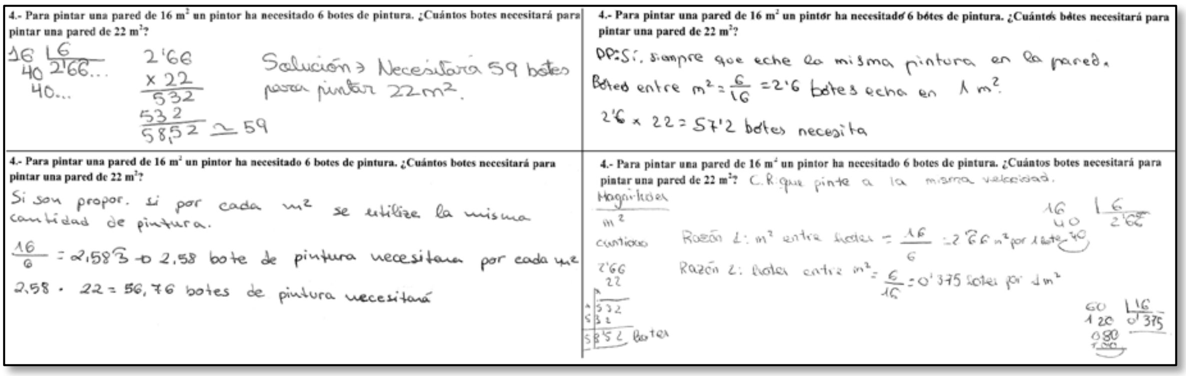


Imagen V - 47. Producciones de los alumnos B10.1 (arriba izquierda), A3.2 (arriba derecha), A7.2 (abajo izquierda) y D5.1 (abajo derecha) para el problema PE.4.

V.3.1.6. Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta

Además de las categorías generales, para el análisis de las producciones de los alumnos en problemas en contextos de proporcionalidad compuesta utilizaremos las categorías específicas que se recogen en la Tabla V - 42 para problemas de valor perdido y las recogidas en la Tabla V - 43 para problemas de comparación cualitativa. Dichas categorías se han desarrollado previamente en el Capítulo III.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
VPC0	Sin razonamiento	**VPC6**	Proporciones
VPC1	Construcción de patrones	**VPC7**	Uso de una fórmula
VPC2	Amalgamación de magnitudes	**VPC8**	Operaciones sin sentido
VPC3	Paso a paso pasando por la unidad	**VPC9**	Razonamientos aditivos erróneos
VPC4	Se mezcla el uso de **VPC2** y **VPC3**	**VPC10**	Trabajo con las magnitudes independientes por separado
VPC5	Paso a paso sin pasar por la unidad	**VPC11**	Omisión de una de las magnitudes independientes

Tabla V - 42. Códigos asignados a las estrategias de resolución de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
CC0	Sin razonamiento	**CC4**	Operaciones sin sentido
CC1	Cálculo de las constantes de proporcionalidad mediante amalgamación	**CC5**	Razonamientos aditivos erróneos
CC2	Cálculo de las constantes de proporcionalidad mediante otros procedimientos	**CC6**	Omisión de alguna magnitud
CC3	Se resuelve un problema de valor perdido		

Tabla V - 43. Códigos asignados a las estrategias de resolución de los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Las situaciones de proporcionalidad compuesta se trabajaron durante la sesión 8. Además, se introdujo un problema de estas características en la sesión de repaso (sesión 11) y otro en la prueba escrita.

En esta sección analizamos de forma cuantitativa y cualitativa las respuestas de los alumnos de los grupos sobre los que se experimentó, exclusivamente para los problemas en los que podía suponerse efectivamente una relación de proporcionalidad compuesta. Los falsos problemas de proporcionalidad compuesta, es decir, aquellos que tenían una estructura semántica similar a estos, pero en los que no podía suponerse una relación de proporcionalidad, han sido analizados previamente (ver sección V.3.1.2. Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones). Además, como se recoge en el diario de clase (sección V.2.3. Desarrollo de las sesiones), la ficha F8.3, que contenía los problemas F8.3.1 y F8.3.2, no pudo entregarse a la mayor parte de los alumnos por falta de tiempo, por lo que no se dispone de los datos asociados a dichos problemas.

Comenzaremos fijando la atención en primer lugar en la situación introductoria en la que se presenta un problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad compuesta para después realizar un análisis conjunto del resto de problemas asociados a este foco de interés.

Análisis de la situación introductoria.

La situación introductoria suponía la resolución del siguiente problema de valor perdido de tipo Directa-Directa:

F8.1.1: *En una frutería ponen el mismo tipo de naranjas en dos tamaños de bolsa. En el tamaño grande de bolsa cada una tiene 15 naranjas, mientras que en el tamaño pequeño hay 7 naranjas. Al comprar 4 bolsas grandes me han cobrado 6 €, ¿cuánto me cobrarían si comprara 8 bolsas pequeñas?*

En la Tabla V - 44 se recogen los resultados para las categorías generales de análisis. La tasa de éxito junto con las respuestas incorrectas y en blanco hacen suponer que los alumnos han tenido una mayor dificultad para resolver esta situación introductoria que las propuestas en los focos analizados anteriormente. Pese a esta dificultad, más de la mitad de los equipos resuelve correctamente el problema. Como siempre, los fallos en la aplicación de los algoritmos de las operaciones elementales no se han tenido en cuenta para clasificar las respuestas como correctas o no.

		N	B	I	C
F8.1.1	N.º de respuestas	0	4	10	17
	Porcentaje	-	12,9 %	32,3 %	54,8 %

Tabla V - 44. Resultados generales en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1).

De los 31 equipos, 14 presentan como condición de regularidad que permite asegurar la existencia de una relación proporcional “que cada naranja cueste lo mismo” (ver Imagen V - 48 derecha), es decir, identifican la constante de proporcionalidad del problema. Algunos equipos establecen condiciones de regularidad poco precisas como “que todas las bolsas cuesten lo mismo” (ver Imagen V - 48 izquierda). La detección de la constante de proporcionalidad parece favorecer la búsqueda de una estrategia de resolución ya que, de los 17 equipos que resuelven correctamente, 11 hacen explícita esta condición de regularidad. Aunque algunos equipos no hacen explícita ninguna condición de regularidad, la existencia de una constante en el problema parece estar detrás de las 17 producciones correctas, ya que en todas ellas se calcula la constante de proporcionalidad bien compactada “precio de cada naranja” (16 de los equipos, Imagen V - 48 derecha) o su inversa “naranjas por unidad monetaria” (1 único equipo, Imagen V - 48 izquierda).

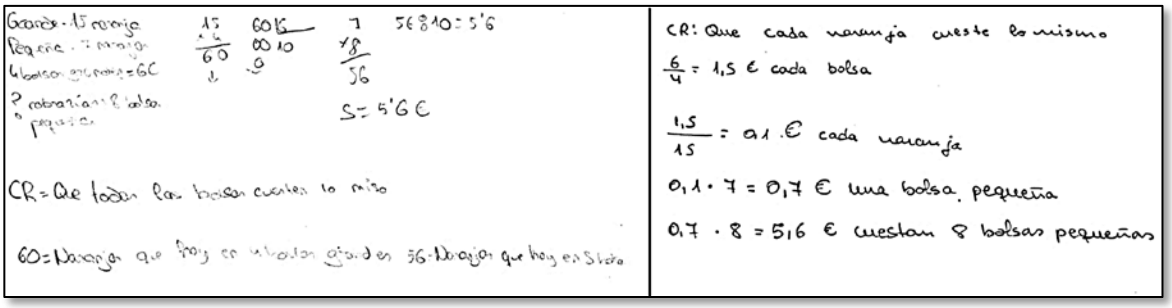


Imagen V - 48. Producciones de los equipos B10 (izquierda) y A7 (derecha) para la situación introductoria de situaciones de proporcionalidad compuesta.

El análisis cuantitativo del tipo de estrategia puesta en juego por los alumnos que presentaron la tarea y no la dejaron en blanco puede observase en las siguientes tablas. Por razones de espacio hemos presentado las categorías de estrategias incorrectas en la Tabla V - 45 y las de estrategias potencialmente correctas en la Tabla V - 46. Como se observa, casi las tres cuartas partes de las producciones emplean una estrategia potencialmente correcta y solo 5 producciones han sido categorizadas en VPC8, única estrategia incorrecta encontrada, ya que presentan operaciones sin posible interpretación en términos del enunciado del problema.

		VPC0	**VPC1**	**VPC8**	**VPC9**	**VPC10**	**VP11**
F8.1.1	N.º de respuestas	0	0	5	0	0	0
	Porcentaje	-	-	16,1 %	-	-	-

Tabla V - 45. Estrategias incorrectas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1).

		VPC2	**VPC3**	**VPC4**	**VPC5**	**VPC6**	**VP7**
F8.1.1	N.º de respuestas	10	8	4	0	0	0
	Porcentaje	32,8 %	25,8 %	12,9 %	-	-	-

Tabla V - 46. Estrategias potencialmente correctas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1).

No encontramos, por tanto, ni estrategias de paso a paso sin pasar por la unidad, VPC5, ni proporciones, VPC6, ni uso de una fórmula, VPC7, lo que refuerza la idea de que estas estrategias son menos naturales en alumnos sin experiencia ni instrucción previa en la resolución de este tipo de problemas. Todas las estrategias potencialmente correctas se basan en el cálculo de la constante de proporcionalidad del problema. En VPC2 se han clasificado aquellas respuestas que calculan el número total de naranjas para después calcular el precio unitario de cada naranja (o la razón externa inversa, Imagen V - 48 izquierda). En VPC3 se han clasificado las respuestas que resuelven el problema en una secuencia de cuatro pasos como los que se observan en la parte derecha de la Imagen V - 48, es decir, se calcula el precio de una bolsa grande, luego se calcula el precio de una naranja, este dato se usa para calcular el precio de una bolsa pequeña y finalmente se calcula el precio de las 8 bolsas pequeñas. Sin embargo, aparecen resoluciones que mezclan ambos métodos. Por ejemplo, como se observa en la Imagen V - 49, el equipo D2 calcula el total de naranjas contenidas en las bolsas grandes (pero no el total en bolsas pequeñas), después calcula el precio de cada naranja, después el precio de cada bolsa pequeña y después el precio de todas las bolsas pequeñas. Es decir, comienza igual que en VPC2 y tras calcular la constante de proporcionalidad termina el problema como en una producción de VPC3. Este tipo de respuestas mixtas son las que se han clasificado en la categoría VPC4.

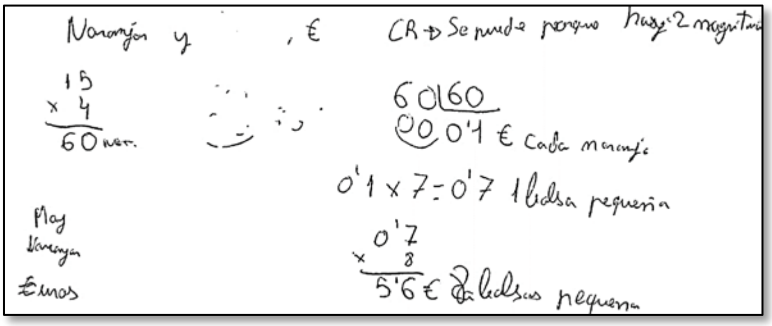


Imagen V - 49. Producción del equipo D2 para la situación introductoria de situaciones de proporcionalidad compuesta.

Observamos, por tanto, que no hay una preferencia clara entre las estrategias VPC2 y VPC3, ya que el número de producciones que usa una y otra es muy cercano y encontramos un número importante de producciones que mezcla ambas estrategias.

Los errores encontrados en las producciones que siguen una estrategia correcta parecen estar más ligados al dominio de los conocimientos previos que a la especificidad de las situaciones de proporcionalidad compuesta. Encontramos mayoritariamente la realización de operaciones sin sentido o el establecimiento incorrecto de razones tras comenzar una estrategia de amalgamación o de paso a paso. Por ejemplo, el equipo A8 emplea lo que parece una estrategia de paso a paso queriendo calcular el precio de cada bolsa grande y luego el precio de cada naranja, pero plantea ambas razones en el sentido inverso al adecuado (ver Imagen V - 50).

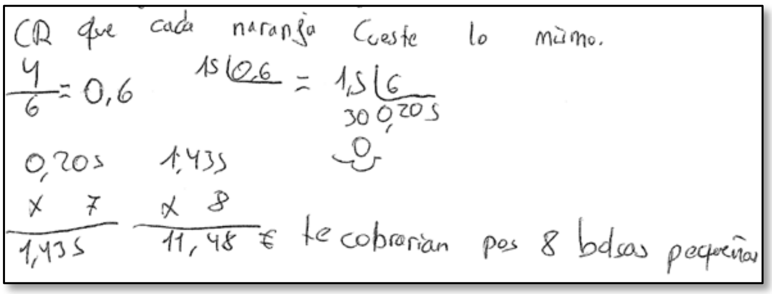


Imagen V - 50. Producción del equipo A8 para la situación introductoria de situaciones de proporcionalidad compuesta.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Tras el análisis de la situación introductoria, analizamos el desempeño de los alumnos en el resto de los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta. Presentamos separadamente el análisis cuantitativo de las categorías generales para los problemas de valor perdido (Tabla V - 47) y para los problemas de comparación cuantitativa (Tabla V - 48).

		N	B	I	C
F8.2.1	N.º de respuestas	0	2	3	26
	Porcentaje	-	6,5 %	9,7 %	83,9 %
TC8.8	N.º de respuestas	28	7	5	25
	Porcentaje	43,1 %	10,8 %	7,7 %	38,5 %
F11.1.5	N.º de respuestas	0	11	2	18
	Porcentaje	-	35,5 %	6,5 %	58,1 %
PE.5	N.º de respuestas	0	10	12	43
	Porcentaje	-	15,4 %	18,5 %	66,2 %

Tabla V - 47. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1).

		N	B	I	C
F8.2.2	N.º de respuestas	0	2	8	21
	Porcentaje	-	6,5 %	25,8 %	67,7 %
TC8.9	N.º de respuestas	28	8	8	21
	Porcentaje	43,1 %	12,3 %	12,3 %	32,3 %

Tabla V - 48. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1).

El porcentaje de alumnos que no entrega las tareas para casa es muy alto. Además, de los que las entregan, alrededor de un 10 % lo hacen en blanco. Por tanto, los resultados para los problemas TC8.8 y TC8.9 no son significativos. El número de respuestas en blanco en las tareas resueltas en clase y en la prueba escrita es similar al que encontramos en otros focos de interés analizados, salvo para el problema F11.1.5 en el que el porcentaje de respuestas en blanco es muy elevado. Este hecho puede deberse a la mayor preocupación que mostraron los alumnos por reforzar los problemas de porcentajes en la sesión de repaso (ver sección V.2.3. Desarrollo de las sesiones).

Las tasas de respuestas correctas apuntan hacia una mayor dificultad de los problemas de comparación frente a los problemas de valor perdido al igual que en las situaciones de proporcionalidad simple.

En general, no se constata que las estructuras compuestas generen mayor dificultad que las simples. El problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad compuesta en la prueba escrita, PE.5, tiene una tasa de éxito muy similar (incluso ligeramente superior) al análogo para la proporcionalidad simple PE.4, alrededor de los dos tercios de los alumnos resuelven dichos problemas satisfactoriamente.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Para el siguiente nivel de análisis solo se han tenido en cuenta las producciones que hacen una propuesta de resolución de los problemas (categorías I y C). En la Tabla V - 49 se presenta el análisis cuantitativo de las producciones que siguen una estrategia errónea para los problemas de valor perdido, en la Tabla V - 50 las que siguen una estrategia potencialmente correcta para este tipo de problemas y en la Tabla V - 51 el análisis cuantitativo de todas las estrategias (erróneas y potencialmente correctas) empleadas en los problemas de comparación cuantitativa.

		VPC0	VPC1	VPC8	VPC9	VPC10	VP11
F8.2.1	N.º de respuestas	0	0	2	0	0	0
	Porcentaje	-	-	6,5 %	-	-	-
TC8.8	N.º de respuestas	1	0	4	0	0	1
	Porcentaje	1,5 %	-	6,2 %	-	-	1,5 %
F11.1.5	N.º de respuestas	1	0	0	0	0	0
	Porcentaje	3,2 %	-	-	-	-	-
PE.5	N.º de respuestas	0	0	10	0	0	2
	Porcentaje	-	-	15,4 %	-	-	3,1 %

Tabla V - 49. Estrategias incorrectas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1).

		VPC2	VPC3	VPC4	VPC5	VPC6	VP7
F8.2.1	N.º de respuestas	24	2	1	0	0	0
	Porcentaje	77,4 %	6,5 %	3,2 %	-	-	-
TC8.8	N.º de respuestas	3	20	1	0	0	0
	Porcentaje	4,6 %	30,8 %	1,5 %	-	-	-
F11.1.5	N.º de respuestas	17	2	0	0	0	0
	Porcentaje	54,8 %	6,5 %	-	-	-	-
PE.5	N.º de respuestas	33	8	2	0	0	0
	Porcentaje	50,8 %	12,3 %	3,1 %	-	-	-

Tabla V - 50. Estrategias potencialmente correctas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1).

		CC0	CC1	CC2	CC3	CC4	CC5	CC6
F8.2.2	N.º de respuestas	2	9	15	0	2	0	1
	Porcentaje	6,5 %	29,0 %	48,4 %	-	6,5 %	-	3,2 %
TC8.9	N.º de respuestas	1	4	19	0	1	0	4
	Porcentaje	1,5 %	6,2 %	29,2 %	-	1,5 %	-	6,2%

Tabla V - 51. Estrategias de resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-1).

Como en otros focos de interés, el número de respuestas sin argumentos (VPC0 y CC0, ver Imagen V - 51) es muy bajo. Además, el porcentaje de respuestas que usan alguna estrategia potencialmente correcta (VPC2-VPC7 o CC1-CC3) es mayoritario, estando el porcentaje de respuestas que emplean estrategias incorrectas generalmente por debajo del 10 %. Como sucedía en los problemas de proporcionalidad simple, muchas de estas producciones se concentran en el problema de la prueba escrita.

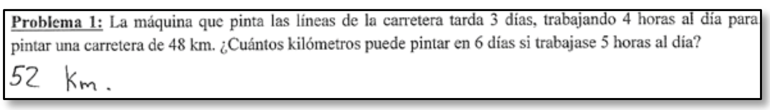

Problema 1: La máquina que pinta las líneas de la carretera tarda 3 días, trabajando 4 horas al día para pintar una carretera de 48 km. ¿Cuántos kilómetros puede pintar en 6 días si trabajase 5 horas al día?
52 Km.

Imagen V - 51. Producción del equipo B8 para el problema F8.2.1.

Producciones que siguen una estrategia errónea.

Además de la baja presencia general de estrategias erróneas, destaca la ausencia de estrategias aditivas erróneas (VPC9 y CC5), la aparición esporádica de operaciones sin sentido (VPC8 y CC8) y la baja presencia de resoluciones en las que se omite alguna de las magnitudes involucradas (VPC11 y CC6). En la Imagen V - 52 pueden verse dos ejemplos típicos de este tipo de errores propios de las situaciones con más de dos magnitudes. En la resolución del alumno D2.1 del problema de la prueba escrita se aprecia la omisión de la magnitud que indica el tiempo diario que trabajan las máquinas (aunque se confunde eligiendo el dato del número de días) para calcular el número de cajas producidas al día y con ello calcular la cantidad que se produciría en 5 días. El equipo A9 omite el tiempo en el que los gatos han consumido la cantidad de leche que indica el problema (además de interpretar incorrectamente las razones que plantea).

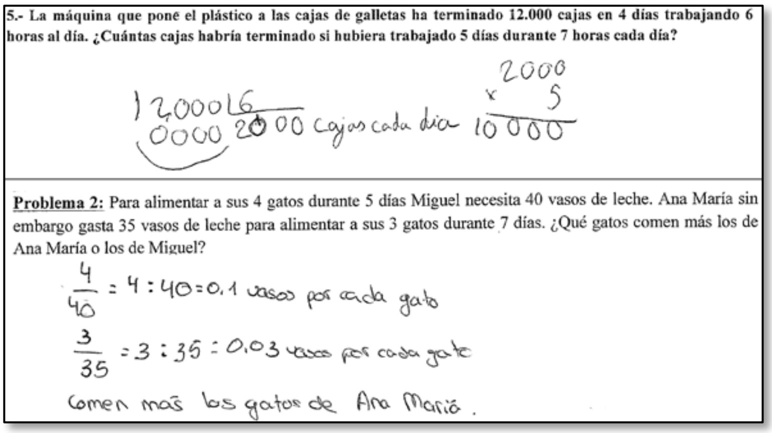


Imagen V - 52. Producción del alumno D2.2 para el problema PE.5 (arriba) y del equipo A9 para el problema F8.2.2 (abajo).

En general, se constata que, al igual que ocurre con la producción que puede verse en la parte inferior de la Imagen V - 52, la aparición de una estrategia errónea para un problema de proporcionalidad compuesta viene seguida de algún fallo o estrategia errónea para la proporcionalidad simple.

Producciones que siguen una estrategia correcta.

Las únicas estrategias potencialmente correctas detectadas en las producciones son VPC2, VPC3 y VPC4 en el caso de problemas de valor perdido, y CC1 y CC2 en el caso de los problemas de comparación cuantitativa. Como sucedía en la situación introductoria, casi todas estas estrategias pasan por el cálculo de la constante (o constantes en el caso de comparaciones) de proporcionalidad, tanto para problemas de valor perdido como para problemas de comparación cuantitativa. La propia definición de las estrategias CC1, CC2, VPC3 y VPC4 obliga a construir dichas constantes.

En el caso de la estrategia de amalgamación en los problemas de valor perdido, VPC2, que es la estrategia institucionalizada, la mayor parte de los alumnos usa una razón externa para resolver el problema de valor perdido de proporcionalidad simple al que se traduce el problema tras amalgamar y así construir la constante de proporcionalidad del problema inicial. Es decir, los alumnos que usan VPC2, después utilizan generalmente VP3 para resolver el problema. Por ejemplo, en la Imagen V - 53, el equipo D9, realiza una estrategia VPC2 convirtiendo el problema de proporcionalidad compuesta en uno de proporcionalidad simple y resolviendo dicho problema por la estrategia VP3 (cálculo de la razón externa que permite terminar el problema mediante multiplicación) estrategia institucionalizada para los problemas de valor perdido de proporcionalidad simple.

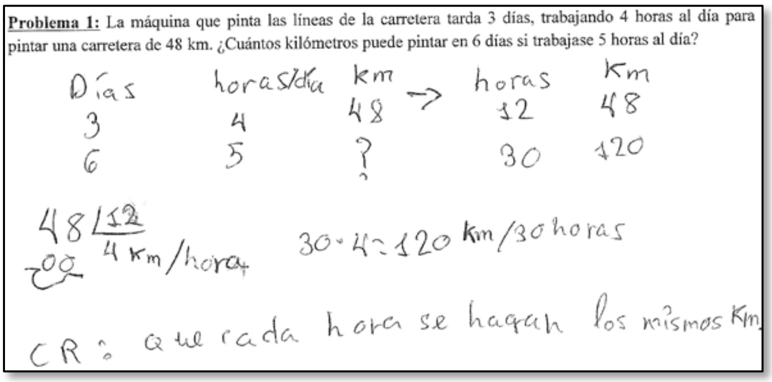


Imagen V - 53. Producción del equipo D9 para el problema F8.2.1.

Este tipo de resolución aparece incluso en alumnos que no utilizaban el método VP3 en los problemas simples. Por ejemplo, el alumno D10.1 (Imagen V - 54) usó la regla de tres sistemáticamente en los problemas simples de la prueba escrita (ver Imagen V - 39),. Sin embargo, en el problema PE.5, tras amalgamar, termina el problema calculando la razón externa y multiplicando.

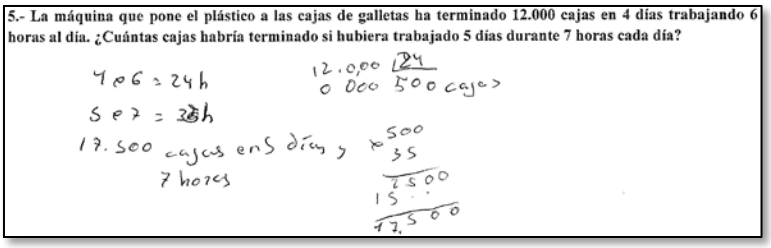
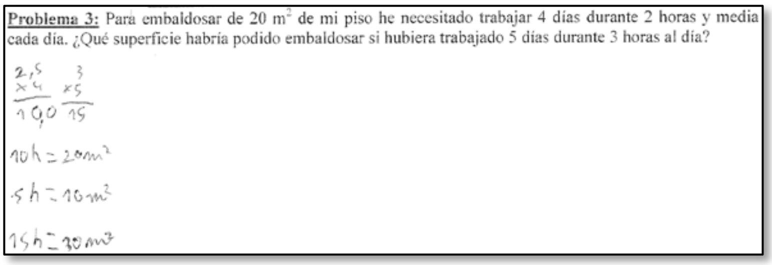


Imagen V - 54. Producción del alumno D10.1 para el problema PE.5.

Encontramos una única excepción al hecho descrito anteriormente en la resolución del equipo B5 para el problema F11.1.3. Este equipo tras amalgamar no calcula la constante de proporcionalidad, sino que emplea un proceso de unitización mediante razón interna calculando el trabajo realizado no por cada hora sino en paquetes de $5\ h$ (ver Imagen V - 55).



Problema 3: Para embaldosar de 20 m² de mi piso he necesitado trabajar 4 días durante 2 horas y media cada día. ¿Qué superficie habría podido embaldosar si hubiera trabajado 5 días durante 3 horas al día?

$2{,}5 \times 4 = 10{,}0$ $\quad 3 \times 5 = 15$

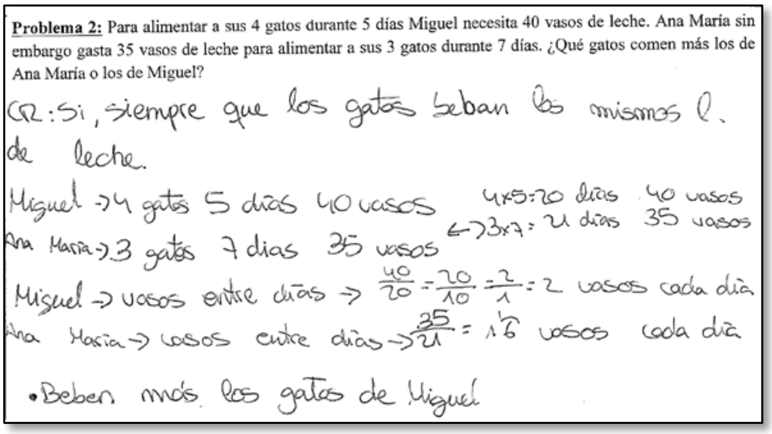
10h = 20m²

5h = 10m²

15h = 30m²

Imagen V - 55. Producción del equipo B5 para el problema F11.1.3.

Análogamente, para los problemas de comparación, la estrategia de amalgamación, CC1, desemboca en la traducción del problema a un problema de comparación de proporcionalidad simple que los alumnos resuelven mediante la estrategia institucionalizada para ese tipo de problemas, C1, basada en el cálculo y comparación de dos razones externas. En la Imagen V - 56 puede observarse un ejemplo de este tipo de producciones.



Problema 2: Para alimentar a sus 4 gatos durante 5 días Miguel necesita 40 vasos de leche. Ana María sin embargo gasta 35 vasos de leche para alimentar a sus 3 gatos durante 7 días. ¿Qué gatos comen más los de Ana María o los de Miguel?

C2: Si, siempre que los gatos beban los mismos l. de leche.

Miguel → 4 gatos 5 días 40 vasos   4×5=20 días 40 vasos

Ana María → 3 gatos 7 dias 35 vasos   ↔ 3×7 = 21 días 35 vasos

Miguel → vasos entre días → $\frac{40}{20} = \frac{20}{10} = \frac{2}{1} = 2$ vasos cada día

Ana María → vasos entre días → $\frac{35}{21} = 1'6$ vasos cada día

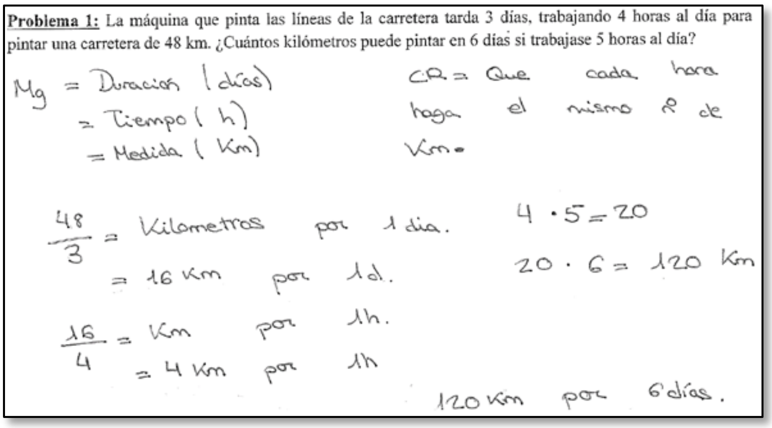
• Beben más los gatos de Miguel

Imagen V - 56. Producción del equipo A3 para el problema F8.2.2.

En el caso de las estrategias VPC3, VPC4 y CC2, los alumnos también utilizan, generalmente, razones externas para el cálculo de las razones necesarias en las que se divide la secuencia de resolución. Por ejemplo, en la Imagen V - 57 se observa como el equipo B3 utiliza una estrategia VPC3 mediante el establecimiento de razones externas para calcular en dos pasos la constante de proporcionalidad.

Aunque muchos alumnos se preocupan por establecer condiciones de regularidad en los problemas para asegurar la existencia de una relación proporcional y buscar la constante de la situación proporcional, el número de producciones con este tipo de argumentos baja conforme se avanza en la secuencia. En el primer problema, tras la institucionalización, F8.2.1, más de la mitad de las producciones establece condiciones de regularidad más o menos precisas (ver por ejemplo la Imagen V - 53 o la Imagen V - 57). Sin embargo, en el problema F11.1.3, solo el 19 % de las producciones presenta este tipo de argumentos.

Es destacable cómo la presencia de la estrategia de amalgamación es considerablemente mayor en los problemas F8.2.1, F11.1.5 y PE.5 que en el resto de los problemas. En todos ellos, esta estrategia tiene una presencia mayor que en la situación introductoria, apareciendo en F8.2.1 en más del doble de producciones que en F81.1.1. Este hecho no se explica exclusivamente por la influencia de la institucionalización, ya que en los problemas F8.2.2, TC8.8 y TC8.9 los alumnos no eligen mayoritariamente amalgamar. Prácticamente la totalidad de los alumnos que amalgama para reducir el problema a un problema simple lo hace mediante un producto de magnitudes (las magnitudes que en el problema compuesto tienen una relación inversa). Además, en la pareja de magnitudes con relación inversa en los problemas F8.2.1, F11.1.5 y PE.5 encontramos una magnitud intensiva y otra extensiva con estructura producto del tipo, $M_1 \cdot M_2/M_1$, mientras que en los problemas F8.2.2, TC8.8 y TC8.9 las magnitudes con relación inversa son ambas extensivas. Por lo que parece que el tipo de magnitudes empleadas influye más en la elección de la estrategia utilizada por los alumnos que la instrucción recibida.


Problema 1: La máquina que pinta las líneas de la carretera tarda 3 días, trabajando 4 horas al día para pintar una carretera de 48 km. ¿Cuántos kilómetros puede pintar en 6 días si trabajase 5 horas al día?

Mg = Duración (días)
= Tiempo (h)
= Medida (Km)

CR = Que cada hora haga el mismo nº de Km.

$\frac{48}{3}$ = Kilometros por 1 día.
= 16 Km por 1d.

$\frac{16}{4}$ = Km por 1h.
= 4 Km por 1h

4 · 5 = 20
20 · 6 = 120 Km

120 Km por 6 días.

Imagen V - 57. Producción del equipo B3 para el problema F8.2.1.

Errores cometidos en estrategias correctas.

Como se observa en los datos recogidos en la Tabla V - 47, la Tabla V - 48, la Tabla V - 49, la Tabla V - 50 y la Tabla V - 51, el número de respuestas correctas y el número de alumnos que eligen una estrategia potencialmente correcta es muy similar. Este hecho se debe a que encontramos muy pocas producciones que cometan errores (diferentes a los de aplicación de la ejecución de los algoritmos de cálculo) una vez elegida una estrategia correcta para la resolución del problema. Las pocas producciones con errores que han planteado una estrategia correcta para el problema compuesto eligen una estrategia incorrecta para el problema simple o cometen alguno de los errores tipificados en las secciones anteriores para problemas simples. Por ejemplo, el equipo D9 para el problema F11.1.3 (ver Imagen V - 58) utiliza una estrategia de amalgamación VP2, pero comete un Error VP.4 (multiplica por la razón externa inversa a la pertinente) al solucionar el problema simple.

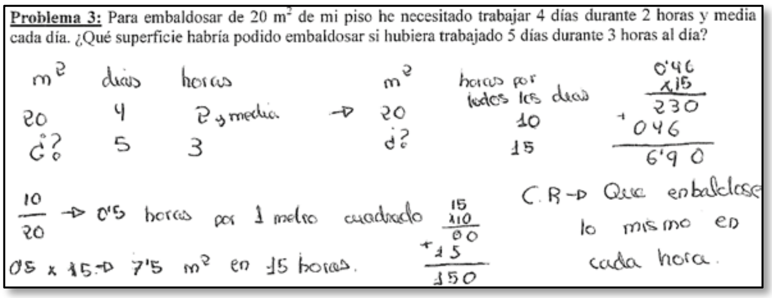


Imagen V - 58. Producción del equipo D9 para el problema F11.1.3.

Otras observaciones.

En la resolución de problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta aparecen de forma mucho más frecuente que en los de proporcionalidad simple sistemas de representación tabular para organizar la información sobre las magnitudes. Dichas representaciones tabulares aparecen especialmente para apoyar estrategias de amalgamación (ver Imagen V - 53 e Imagen V - 58).

V.3.1.7. Porcentajes

Como ya hemos mencionado en varias ocasiones, el trabajo con porcentajes se separa del resto de la propuesta para darle una atención específica durante las últimas sesiones de clase. Presentamos en esta sección los resultados cualitativos y cuantitativos del análisis de contenido realizado para este foco de interés a partir de las producciones de los alumnos. Además de las categorías generales, en la Tabla V - 52 y en Tabla V - 53 recordamos las categorías específicas para los problemas de porcentajes que ya presentamos en el Capítulo III.

Código	Interpretación	Código	Interpretación
IP0	No se evidencia	**IP2**	Razón
IP1	Parte-todo	**IP3**	Operador

Tabla V - 52. Categorías específicas de análisis para las interpretaciones del concepto de porcentaje.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
VPp0	Sin razonamiento	**VPp7**	Uso de una fórmula
VPp1	Construcción de patrones	**VPp8**	Operaciones sin sentido
VPp2	Factor de cambio/Análisis unitario	**VPp9**	Razonamientos aditivos erróneos
VPp3	Razón externa con multiplicación	**VPp10**	Cálculo y comprobación
VPp4	Razón externa con división	**VPp11**	Fracción unitaria/puntos referencia
VPp5	Proporción	**VPp12**	Estimaciones/Ensayo y error
VPp6	Construcción sucesiva	**VPp13**	Argumento basado en gráficos

Tabla V - 53. Categorías específicas de análisis de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje.

Los problemas de porcentajes se trabajaron de forma específica en las sesiones 9 y 10 (y sus correspondientes actividades de trabajo para casa). Además, se introdujo un problema de porcentajes en la sesión de repaso (sesión 11) y dos en la prueba escrita. Ya hemos introducido algunos resultados en tareas relacionadas con el porcentaje en el estudio del primer foco de atención (ver sección V.3.1.2. Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones). Estos resultados hacían referencia al cálculo de razones en contextos de porcentajes. Por tanto, en esta sección omitimos los apartados de los problemas en los que se solicitaba el cálculo o la interpretación de una razón y nos centraremos en los problemas de valor perdido de Tipo I, Tipo II y Tipo III y en las tareas de cálculos de complementarios (estructura aditiva parte-parte-todo). Al igual que en el resto del análisis, para los problemas que tenían varias preguntas a partir de un mismo contexto se ha añadido un índice al final del código del problema para diferenciar estos apartados.

Análisis de las situaciones introductorias.

Recordamos los enunciados de los problemas de las situaciones introductorias:

F9.1.1: *En cierta población, en las últimas elecciones municipales, votaron 2400 personas de las 3000 que podían hacerlo. A) ¿Qué porcentaje de personas votó? B) ¿Qué porcentaje de personas se abstuvo (no votó)?*

F9.1.2: *En una ciudad hay un 52% de mujeres. Si la población total es de 725.000 habitantes: A) ¿Cuántas mujeres viven en esa ciudad? B) ¿Cuántos hombres viven en la ciudad? C) ¿Cuál es la razón entre hombres y mujeres? D) ¿Cuál es el porcentaje de hombres respecto de la población total de la ciudad?*

F10.1.1: *Un profesor del instituto ha hecho un resumen de los resultados de la primera evaluación. En el resumen para 3º A aparece lo siguiente:*

3ºA Total de alumnos: 17

Alumnos con …

…0 suspensos: 6 25%

¿Estás de acuerdo con el anterior resumen? ¿Por qué? Sabiendo que el error está en el total de alumnos, corrige el anterior resumen para que sea correcto.

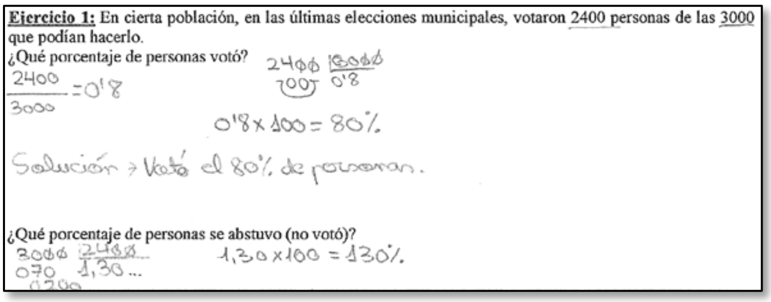
En la Tabla V - 54 se presentan los resultados en las categorías generales para los problemas introductorios. Se han sombreado los problemas de valor perdido. El problema F9.1.1.1 es de Tipo II, el problema F9.1.2.1 es de Tipo I y el problema F10.1.1 es de Tipo III. Los problemas no sombreados en la tabla corresponden a preguntas sobre complementarios en la estructura aditiva.

			N	B	I	C
F9.1.1.1	Tipo II	N.º de respuestas	0	1	2	28
		Porcentaje	-	3,2 %	6,5 %	90,3 %
F9.1.1.2	Comp.	N.º de respuestas	0	3	4	24
		Porcentaje	-	9,7 %	12,9 %	77,4 %
F9.1.2.1	Tipo I	N.º de respuestas	0	3	7	21
		Porcentaje	-	9,7 %	22,6 %	67,7 %
F9.1.2.2	Comp.	N.º de respuestas	0	9	2	20
		Porcentaje	-	29,0 %	6,5 %	64,5 %
F9.1.2.4	Comp.	N.º de respuestas	0	12	0	19
		Porcentaje	-	38,7 %	-	61,3 %
F10.1.1	Tipo III	N.º de respuestas	0	8	5	18
		Porcentaje	-	25,8 %	16,1 %	58,1 %

Tabla V - 54. Resultados generales en los problemas F9.1.1, F9.1.2 y F10.1.1 (Ciclo II-1).

Se observa un buen desempeño general de los equipos de alumnos en estas primeras situaciones (recordamos que, como se comentó en el diario de clase, el gran número de alumnos que tenían dudas la hora de abordar las tareas provocó que el profesor-investigador interviniera frecuentemente con las parejas durante las sesiones 9 y 10). En cuanto a los diferentes tipos, se observa un porcentaje de acierto decreciente desde el problema F9.1.1.1 (Tipo II) al problema F10.1.1 (Tipo III). Sin embargo, parte de la diferencia en el porcentaje de aciertos entre el Tipo II y Tipo I puede ser debida a la extensión excesiva de la actividad que se comentó en el diario de clase. Los datos apuntan, por tanto, hacia una mayor dificultad al abordar la situación introductoria F10.1.1 (problema de Tipo III). Además, es llamativo que, pese a ser la primera actividad de la sesión 10, una cuarta parte de los equipos dejara en blanco la respuesta al problema F10.1.1, lo que podría apuntar bien a la ya referida mayor dificultad, bien a un diseño inadecuado que impide que los alumnos comprendan lo que se les solicita e intenten abordar el problema.

La búsqueda de cantidades complementarias no parece causar dificultades a los alumnos. El menor porcentaje de respuestas correctas respecto a los problemas de Tipo I y Tipo II se debe a que para responder correctamente a estos apartados los alumnos debían haber realizado correctamente el apartado anterior (o realizar un nuevo problema de valor perdido). Así, todas las parejas que habían resuelto correctamente el primer apartado de los problemas, respondieron correctamente a las preguntas sobre complementarios, salvo dos excepciones (además del efecto de las respuestas en blanco en la ficha F9.1). Una de estas excepciones aparece en la producción del equipo D10 para el problema F9.1.2.2, en el que tras calcular el número de mujeres que hay en la población (y conocer el total de habitantes) da una respuesta sin justificar y, aparentemente carente de lógica para el número de hombres. La otra, que puede verse en la Imagen V - 59, es la respuesta del equipo B10 al problema F9.1.1.2 que, en vez de calcular el complementario del porcentaje de voto que habían calculado correctamente en F9.1.1.1 (el 80 % había votado), calcula el porcentaje que supondría la población total respecto al número de votantes. Es decir, en el segundo apartado proceden de forma análoga al primer apartado, pero utilizando la razón inversa.


Ejercicio 1: En cierta población, en las últimas elecciones municipales, votaron 2400 personas de las 3000 que podían hacerlo.

¿Qué porcentaje de personas votó?

$\frac{2400}{3000} = 0'8$

$0'8 \times 100 = 80\%$

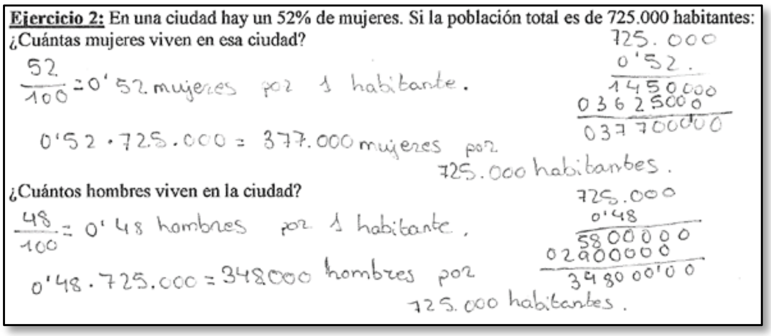
Solución → Votó el 80% de personas.

¿Qué porcentaje de personas se abstuvo (no votó)?

$1{,}30 \times 100 = 130\%$

Imagen V - 59. Producción del equipo B10 para el problema introductorio F9.1.1 (Ciclo II-1).

Las producciones que, como en el caso de la Imagen V - 59, abordan el cálculo de complementarios haciendo uso de la estructura proporcional y no de la estructura aditiva son anecdóticas. Además del ejemplo anterior (incorrectamente calculado) encontramos solo una producción para F9.1.2.2 (ver Imagen V - 60) que no hace uso de la estructura aditiva (y responde correctamente).


Ejercicio 2: En una ciudad hay un 52% de mujeres. Si la población total es de 725.000 habitantes:

¿Cuántas mujeres viven en esa ciudad?

$\frac{52}{100} = 0'52$ mujeres por 1 habitante.

$0'52 \cdot 725.000 = 377.000$ mujeres por 725.000 habitantes.

¿Cuántos hombres viven en la ciudad?

$\frac{48}{100} = 0'48$ hombres por 1 habitante.

$0'48 \cdot 725.000 = 348000$ hombres por 725.000 habitantes.

Imagen V - 60. Producción del equipo B6 para el problema F9.1.1 (Ciclo II-1).

Análisis según las categorías específicas de las situaciones introductorias.

Entre las producciones correctas e incorrectas y en las que se ha podido estudiar el planteamiento del problema que hacen los alumnos (respuestas que no se pueden incluir en la categoría IP0: "no se evidencia la interpretación") no aparecen respuestas que se ajusten a una interpretación clara del porcentaje como partes de un todo (categoría IP1). Por ejemplo, ningún equipo, para el problema de Tipo I, F9.1.2.1, resuelve repartiendo la cantidad en 100 partes iguales y tomando 52 de estas partes. Todos los equipos en los que se ha podido determinar la estrategia utilizada usan un planteamiento del porcentaje como razón u operador. En ocasiones, es complicado distinguir, con la información suministrada por los estudiantes, si su interpretación era de una clase o de otra. Por ejemplo, en un problema de Tipo I, en el que haya que calcular el p % de una cantidad M, un planteamiento del problema mediante la operación $\frac{p}{100} \cdot M$, podría ajustarse a una interpretación de operador o a una estrategia mediante razón externa. Además, en los problemas de Tipo II, el numeral del porcentaje aparece como resultado y, por tanto, "no actúa" por lo que tampoco se evidencia la interpretación que otorgan los alumnos. Así, el equipo investigador optó por estudiar la interpretación solo en los problemas de Tipo I y Tipo III y clasificar (ver Tabla V - 55) con significado de razón solo aquellas producciones en las que se adjuntaba la interpretación como tanto por uno de la razón asociada al porcentaje.

			IP0	IP1	IP2	IP3
F9.1.2.1	Tipo I	N.º de respuestas	6	0	8	13
		Porcentaje	16,1 %	-	25,8 %	41,9 %
F10.1.1	Tipo III	N.º de respuestas	12	0	5	4
		Porcentaje	38,7 %	-	16,1 %	12,9 %

Tabla V - 55. Resultados sobre la interpretación del porcentaje en las situaciones introductorias (Ciclo II-1).

En la Imagen V - 61 se observan cuatro diferentes resoluciones correctas para la situación introductoria F9.1.2.1 de problemas de Tipo I. La primera de ellas, del equipo B6, se ha clasificado en la categoría IP2 (interpretación de porcentaje como una razón), el resto se han clasificado en la categoría IP3 (operador). La producción del equipo B5 se ha clasificado en la categoría IP3, aunque podría corresponder a una interpretación como razón en la que no se ha hecho explícita dicha interpretación. Observamos, además, que las tres primeras producciones siguen un esquema de resolución idéntico que clasificaremos como una estrategia funcional (VPp3) en la Tabla V - 56. Las dos últimas producciones parecen expresar de forma clara una concepción del porcentaje como operador, pero, al mismo tiempo, evidencian el uso de estrategias diferentes para el cálculo del resultado. El equipo A5, parece obtener el resultado mediante la aplicación de una fórmula o patrón de cálculo, en el que, para calcular el $p\,\%$ de una cantidad M, saben que deben multiplicar la cantidad por el numeral (resultado parcial carente de significado) y dividir el resultado para 100. Este tipo de producciones (como la del equipo A5) ha sido clasificada como una estrategia de uso de una fórmula (VPp7) en la Tabla V - 56.

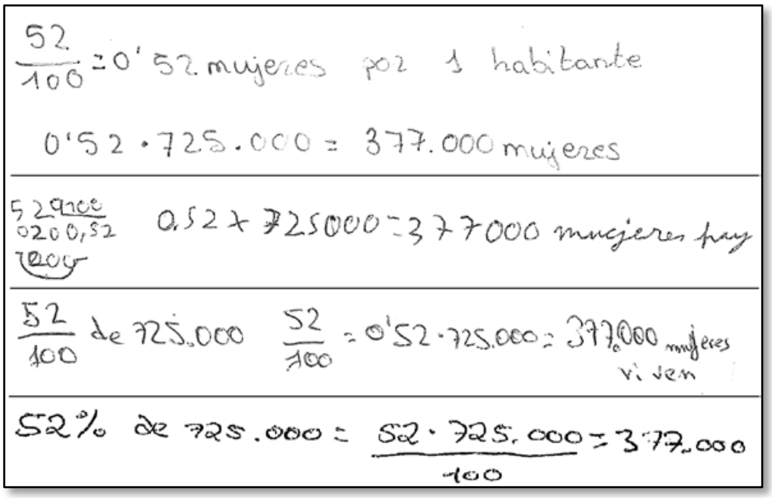


Imagen V - 61. De arriba a abajo, producciones de los equipos B6, B5, D1 y A5 para el problema F9.1.2.1 (Ciclo II-1).

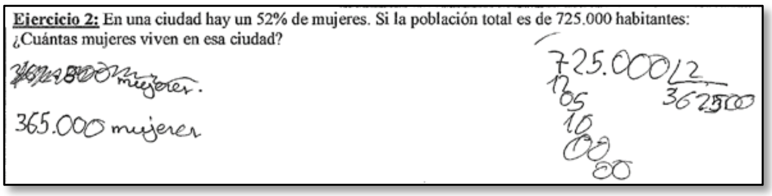
			VPp0	VPp1	VPp2	VPp3	VPp4	VPp5	VPp6
F9.1.1.1	Tipo II	N.º de resp.	2	0	0	27	0	0	0
		Porcentaje	3,1 %	-	-	41,5 %	-	-	-
F9.1.2.1	Tipo I	N.º de resp.	1	0	0	19	0	0	0
		Porcentaje	1,5 %	-	-	29,2 %	-	-	-
F10.1.1	Tipo III	N.º de resp.	7	0	1	10	0	0	0
		Porcentaje	10,8 %	-	1,5 %	15,4 %	-	-	-

			VPp7	VPp8	VPp9	VPp10	VPp11	VPp12	VPp13
F9.1.1.1	Tipo II	N.º de resp.	0	1	0	0	0	0	0
		Porcentaje	-	1,5 %	-	-	-	-	-
F9.1.2.1	Tipo I	N.º de resp.	4	2	0	0	0	2	0
		Porcentaje	6,2 %	3,1 %	-	-	-	3,1 %	-
F10.1.1	Tipo III	N.º de resp.	0	2	0	0	2	1	0
		Porcentaje	-	3,1 %	-	-	3,1 %	1,5 %	-

Tabla V - 56. Estrategia empleada por los alumnos en la resolución de las situaciones introductorias de porcentajes (Ciclo II-1).

Con las consideraciones anteriores, en la Tabla V - 55 observamos los resultados sobre la interpretación de los porcentajes que aparecen en las situaciones introductorias F9.1.2.1 y F10.1.1. La simplicidad de la estructura numérica en F10.1.1 provoca la aparición de estrategias informales o sin justificar por lo que también resulta difícil clasificar la interpretación del porcentaje que ponen en juego los alumnos. En cualquier caso, se observa que el número de alumnos que interpreta explícitamente el porcentaje como una razón externa es bajo y menor que el observado en focos anteriores.

En la en la Tabla V - 56 se observa el análisis de las estrategias empleadas por los alumnos para responder a los problemas de valor perdido de las situaciones introductorias. Para los problemas de Tipo I y Tipo II se observa que predominan las resoluciones que siguen una estrategia funcional (VPp3). Para el problema F9.1.1.1 de Tipo II, esta es prácticamente la única estrategia presente. Para el problema F9.1.2.1 de Tipo I, observamos que aparecen estrategias por uso de una fórmula (VPp7, como la ejemplificada en la Imagen V - 61, abajo) que son una clara influencia de la instrucción previa recibida sobre el porcentaje. Además, en este problema, encontramos dos producciones clasificadas en la categoría VPp12, añadida explícitamente para los problemas de valor perdido con porcentajes, que se corresponde con el uso de estimaciones y estrategias de ensayo y error. De hecho, aunque se han clasificado en la categoría VPp12, estas producciones usan rasgos de la categoría VPp11 (Uso de fracciones unitarias y puntos de referencia) ya que los alumnos intentan llegar al resultado haciendo uso de que el porcentaje que aparece en el problema, 52 %, es cercano al 50 %. En el ejemplo que se presenta en la Imagen V - 62, el equipo B8 calcula la mitad del total y le añaden una cantidad estimada (sin justificar dicha estimación) para intentar acercarse al 52 % solicitado.



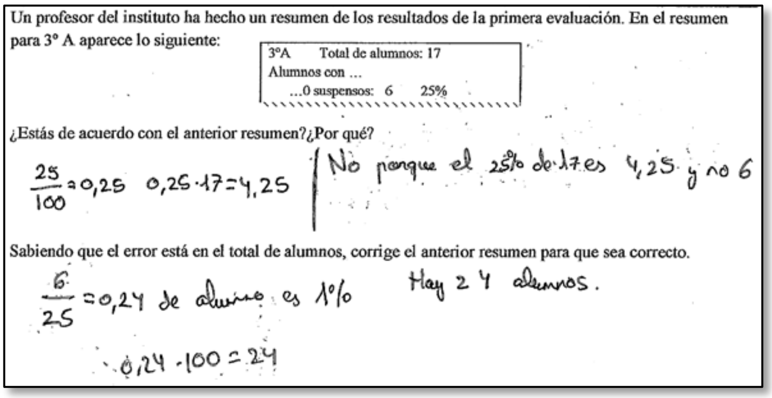
Ejercicio 2: En una ciudad hay un 52% de mujeres. Si la población total es de 725.000 habitantes: ¿Cuántas mujeres viven en esa ciudad?

365.000 mujeres

725.000 | 2
362500

Imagen V - 62. Producción del equipo B8 para el problema F9.1.2.1 (Ciclo II-1).

En el problema F10.1.1 aparece un número elevado de respuestas sin argumentar. Este hecho se debe probablemente a la aparición del porcentaje $25\ \%$, que es fácilmente asociable con la cuarta parte. De hecho, dos equipos, A8 y D1, evidencian el uso de estas estrategias de fracción unitaria o puntos de referencia (VPp11) en este problema. El equipo A8, por ejemplo, explicita "25 es una 4ª parte de 100" para terminar calculando el total de alumnos multiplicando la parte por cuatro. El equipo D1 asocia la cantidad 6 al $25\ \%$ para ir construyendo posteriormente las cantidades asociadas al $50\ \%$, $75\ \%$ y $100\ \%$ (razonamiento que también encaja en una estrategia de construcción progresiva). Aparece también en este problema una producción clasificada como de estrategia escalar o análisis unitario (ver Imagen V - 63). El equipo A4 calcula la razón interna $6/25$ que interpreta como alumnos en un $1\ \%$. Posteriormente, utilizan este hecho para calcular el total de alumnos multiplicando esta cantidad por 100.



Un profesor del instituto ha hecho un resumen de los resultados de la primera evaluación. En el resumen para 3º A aparece lo siguiente:

3ºA Total de alumnos: 17
Alumnos con ...
...0 suspensos: 6 25%

¿Estás de acuerdo con el anterior resumen?¿Por qué?

$\frac{25}{100} = 0{,}25 \quad 0{,}25 \cdot 17 = 4{,}25$

No porque el 25% de 17 es 4,25 y no 6

Sabiendo que el error está en el total de alumnos, corrige el anterior resumen para que sea correcto.

$\frac{6}{25} = 0{,}24$ de alumno es 1%

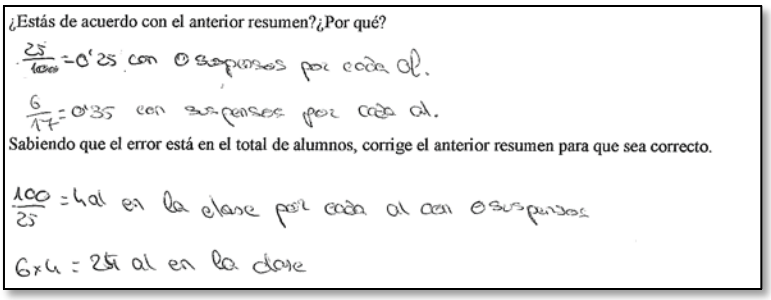
Hay 24 alumnos.

$0{,}24 \cdot 100 = 24$

Imagen V - 63. Producción del equipo A4 para el problema F10.1.1 (Ciclo II-1).

Junto a este tipo de respuestas minoritarias, encontramos un $15{,}4\ \%$ de equipos que utilizan estrategias funcionales e interpretan la razón externa $100/25$ como "alumnos de la clase por cada alumno con 0 suspensos". En la Imagen V - 64 se observa la producción del equipo B10, que no solo usa la razón anterior para resolver el problema, sino también para evaluar que no era correcta la afirmación que se hacía al principio del enunciado.

No aparecen apenas errores en la aplicación de una estrategia correcta para responder a las situaciones introductorias. La mayor parte de las estrategias correspondientes a respuestas incorrectas se concentran en la categoría VPp8 (operaciones sin sentido) o en VPp0 (sin razonamiento). Las respuestas incorrectas clasificadas en VPp3 (estrategia funcional) son en su mayoría respuestas parciales a los problemas (error VP.1). Los alumnos comienzan calculando (e incluso interpretando) la razón externa pero no completan el problema. Excepcionalmente, encontramos errores aislados en esta estrategia como el del equipo D9 para el problema F10.1.1. Para calcular el total de alumnos de la clase, el equipo D10 calcula el porcentaje sobre la parte, dando como respuesta para el total un número de alumnos menor que la parte.


¿Estás de acuerdo con el anterior resumen?¿Por qué?

$\frac{25}{100}$ = 0'25 con 0 suspensos por cada al.

$\frac{6}{17}$ = 0'35 con suspensos por cada al.

Sabiendo que el error está en el total de alumnos, corrige el anterior resumen para que sea correcto.

$\frac{100}{25}$ = 4 al en la clase por cada al con 0 suspensos

6x4 = 25 al en la clase

Imagen V - 64. Producción del equipo B10 para el problema F10.1.1 (Ciclo II-1).

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Después de analizar las situaciones introductorias, en la Tabla V - 57 presentamos los resultados para las categorías generales del resto de problemas de porcentajes realizados en la propuesta. Como en el caso de las situaciones introductorias, hemos sombreado los problemas de valor perdido de Tipo I, Tipo II y Tipo III, para distinguirlos de las preguntas relacionadas con el cálculo de complementarios (filas no sombreadas).

	N	B	I	C
TC9.1.2	33,8 (22)	12,3 (8)	36,9 (24)	16,9 (11)
TC9.2.1	33,8 (22)	3,1 (2)	9,2 (6)	53,8 (35)
TC9.2.2	33,8 (22)	7,7 (5)	9,2 (6)	49,2 (32)
F10.2.1.1	0 (0)	6,5 (2)	19,4 (6)	74,2 (23)
F10.2.1.2	0 (0)	19,4 (6)	0 (0)	80,6 (25)
F10.2.2.1	0 (0)	35,5 (11)	16,1 (5)	48,4 (15)
F10.2.2.2	0 (0)	54,8 (17)	25,8 (8)	19,4 (6)
TC10.1.1	33,8 (22)	1,5 (1)	7,7 (5)	56,9 (37)

	N	B	I	C
TC10.1.2	33,8 (22)	16,9 (11)	30,8 (20)	18,5 (12)
F11.5.1	0 (0)	45,2 (14)	19,4 (6)	35,5 (11)
F11.5.2	0 (0)	45,2 (14)	0 (0)	54,8 (17)
F11.5.3	0 (0)	61,3 (19)	9,7 (3)	29,0 (9)
PE.7.1	0 (0)	15,4 (10)	40 (26)	44,6 (29)
PE.7.2	0 (0)	18,5 (12)	40 (26)	41,5 (27)
PE.8.1	0 (0)	18,5 (12)	21,5 (14)	60 (39)
PE.8.2	0 (0)	40 (26)	49,2 (32)	10,8 (7)

Tabla V - 57. Resultados generales en los problemas de porcentajes (Ciclo II-1).

Analizamos, en primer lugar, los porcentajes de éxito según el tipo de tarea de porcentaje que representan. Se observa que los problemas de búsqueda del complementario (TC9.2.1, F10.2.1.2, F11.5.2, F11.5.3 y PE.7.2), bien complementarios a 100 en un porcentaje, o complementarios de una cantidad que representa una parte conocidos el total y el resto de las partes, tienen tasas de éxito elevadas (y tasas de respuestas incorrectas bajas). Solo en el problema de la prueba escrita PE.7.2 y en el problema F11.5.3, el porcentaje de éxito es inferior al 50 %. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, en estos problemas, una respuesta correcta dependía de resultados anteriores. Así, en la prueba escrita contestaron correctamente a PE.7.2, 27 de los 29 alumnos que respondieron correctamente a PE.7.1. Análogamente, F11.5.3 tiene nueve respuestas correctas de entre los 11 que respondieron correctamente a F11.5.1, resultado del que dependía. Como en las situaciones introductorias, los alumnos abordan mayoritariamente el cálculo de complementarios a partir de la estructura aditiva, aunque el complementario pueda calcularse haciendo uso de la estructura multiplicativa. Destacamos también, la alta tasa de éxito del "falso problema de complementario" F10.2.1.2 en el que no podía calcularse la cantidad solicitada pues correspondía a una parte disjunta pero no complementaria sobre el total a la parta conocida.

En cuanto a los problemas de valor perdido, los resultados apuntan hacia un mejor desempeño de los alumnos en los problemas de Tipo I, que en los problemas de Tipo II y Tipo III. Si sumamos todas las producciones disponibles (incluidas las situaciones introductorias) para cada uno de los tipos, observamos que la tasa global de éxito en las tareas de Tipo I es del $52,5\ \%$ (135 producciones de las 257 registradas), para Tipo II un $35,4\ \%$ (80 producciones de las 226) y para Tipo III un $39,2\ \%$ (74 producciones de las 189). Cabe destacar que hay un mayor número de producciones en las tareas para casa en los problemas de Tipo II que en el resto de los problemas lo que puede lastrar el porcentaje de éxito en estos problemas por el alto número de producciones no entregadas (categoría N). Además, el problema TC10.1.2 es un problema de Tipo II en una situación de aumento, y el problema TC9.1.2 en una situación de mezcla. Estos problemas pueden resultar de mayor complejidad para los alumnos. Aunque, el análisis desprende un (ligero) mejor desempeño de los alumnos en los problemas de Tipo III que en los problemas de Tipo II, los hechos anteriores junto con los resultados de las situaciones introductorias y los resultados de la prueba escrita apuntan en sentido contrario (PE.7.1 es un problema de Tipo II con un $44,6\ \%$ de éxito mientras que el problema de Tipo III de esta misma prueba, PE.8.2, tiene un bajo porcentaje de éxito, $10,8\ \%$).

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Nos centramos ahora en las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje, de Tipo I, Tipo II y Tipo III. Los porcentajes en los que aparecen cada una de las estrategias en las producciones de los alumnos pueden verse en la Tabla V - 58. Observamos que no hemos encontrado respuestas que se ajusten a las categorías VPp1 (construcción de patrones), VPp5 (proporciones), VPp10 (cálculo y comprobación) y VPp13 (estrategias apoyadas en gráficos).

Las estrategias VPp4 (estrategia funcional terminando con división), VPp6 (construcción sucesiva) y VPp11 (fracción unitaria y puntos de referencia) tienen una aparición anecdótica. Tanto la construcción sucesiva, como el uso de fracción unitaria y puntos de referencia, son estrategias que aparecen solo en problemas en los que intervienen los porcentajes $25\ \%$ y $75\ \%$. Algunos alumnos utilizan estos porcentajes, que indican el cuarto o los tres cuartos del total, para contestar a los problemas, aunque estas estrategias tienen muy baja incidencia. La estrategia VPp4 en cambio, aparece usada de forma incorrecta en dos problemas. Por ejemplo, el alumno D9.1 calcula la razón, $0,15$, asociada al porcentaje $15\ \%$ en el problema de Tipo I, PE.8.1, pero termina el problema intentando calcular la parte correspondiente al total de 22000 habitantes, dividiendo por dicha razón, en vez de multiplicando (por lo que obtiene una parte de la población mayor al total de la población) (ver Imagen V - 65).

	VPp0	VPp1	VPp2	VPp3	VPp4	VPp5	VPp6
TC9.1.2	13,8 (9)	0 (0)	0 (0)	30,8 (20)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC9.2.2	7,7 (5)	0 (0)	1,5 (1)	12,3 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.2.1.1	0 (0)	0 (0)	6,5 (2)	83,9 (26)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.2.2.1	0 (0)	0 (0)	6,5 (2)	51,6 (16)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.2.2.2	9,7 (3)	0 (0)	3,2 (1)	19,4 (6)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC10.1.1	0 (0)	0 (0)	1,5 (1)	32,3 (21)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC10.1.2	3,1 (2)	0 (0)	3,1 (2)	13, 8 (9)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F11.5.1	0 (0)	0 (0)	3,2 (1)	45,2 (14)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
PE.7.1	15,4 (10)	0 (0)	0 (0)	44,6 (29)	3,1 (2)	0 (0)	1,5 (1)
PE.8.1	0 (0)	0 (0)	1,5 (1)	23,1 (15)	6,2 (4)	0 (0)	0 (0)
PE.8.2	16,9 (11)	0 (0)	1,5 (1)	9,2 (6)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

	VPp7	VPp8	VPp9	VPp10	VPp11	VPp12	VPp13
TC9.1.2	1,5 (1)	7,7 (5)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC9.2.2	30,8 (20)	3,1 (2)	0 (0)	0 (0)	3,1 (2)	0 (0)	0 (0)
F10.2.1.1	0 (0)	3,2 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.2.2.1	0 (0)	6,5 (2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.2.2.2	9,7 (3)	3,2 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC10.1.1	23,1 (15)	6,2 (4)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1,5 (1)	0 (0)
TC10.1.2	4,6 (3)	12,3 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	12,3 (8)	0 (0)
F11.5.1	0 (0)	6,5 (2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
PE.7.1	13, 8 (9)	6,2 (4)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
PE.8.1	33,8 (22)	16,9 (11)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
PE.8.2	6,2 (4)	12,3 (8)	13,8 (9)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

Tabla V - 58. Estrategias utilizadas en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo II-1).

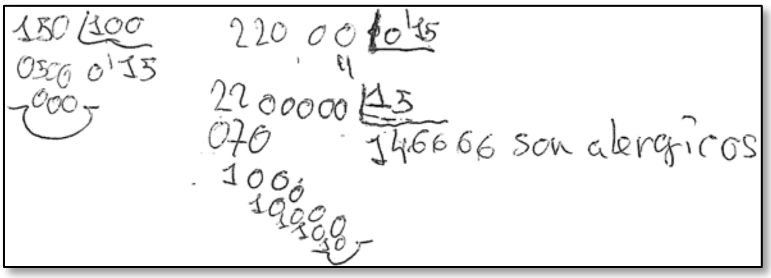


Imagen V - 65. Producción del alumno D9-1 para el problema PE.8.1 (Ciclo II-1).

Las categorías VPp9 (argumentos aditivos erróneos) y VPp12 (uso de estimaciones) tienen un peso global bajo, pero su uso es significativo en dos problemas concretos. Hemos clasificado nueve producciones de PE.8.2 en la categoría de argumentos aditivos erróneos. Estas nueve respuestas obedecen todas a un mismo patrón que no se ha observado en el resto de los problemas de la propuesta. Los alumnos utilizan el porcentaje como operador sobre la parte complementaria y después suman a dicha parte la cantidad obtenida para calcular el total (ver Imagen V - 66). Esta estrategia errónea parece fuertemente influida por el hecho de que en el problema de Tipo III de la prueba escrita el porcentaje y la cantidad asociada a la parte correspondían a partes complementarias (hecho que no sucedía en el resto de los problemas de Tipo III trabajados en los que el porcentaje y la cantidad se referían a una misma parte).

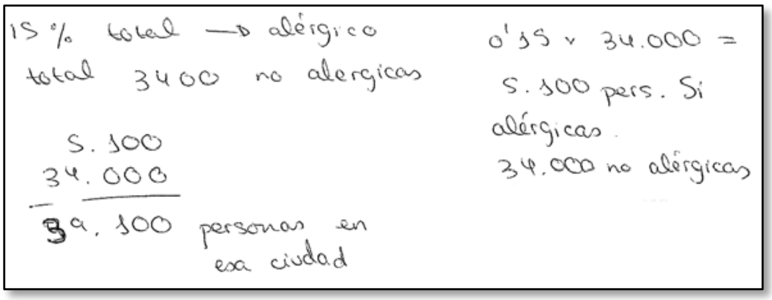


Imagen V - 66. Producción del alumno D1.1 para el problema PE.8.2 (Ciclo II-1).

Las estrategias clasificadas en VPp12 se concentran en el problema TC10.1. En este problema aparecían aumentos porcentuales sobre precios que estaban muy cercanos a 1 €. Encontramos para este problema nueve producciones que asocian la diferencia en euros entre los precios como la razón de aumento (En TC10.1.2 los precios son de 1,10 € y 0,98 € y su diferencia 0,12 €). Posteriormente multiplican por 100 dicha razón y dan ese producto como el porcentaje de aumento. Las respuestas así calculadas, se aproximan convenientemente a la solución real. Aunque esta estrategia podría haberse clasificado como de operaciones sin sentido, el debate de la puesta en común puso de manifiesto que al menos una buena parte de los alumnos había razonado que como los precios se acercaban a 1 €, los 0,12 € de aumento se aproximaban a los “euros de aumento por cada euro del precio del producto”. Por tanto, se clasificaron estas respuestas en la categoría VPp12.

De forma muy minoritaria, pero con una presencia constante a lo largo de la propuesta, encontramos las estrategias de análisis unitario (estrategia escalar en situaciones de porcentaje, VPp2). Esta estrategia se basa en el cálculo de la cantidad relacionada con un 1 %. De hecho, las producciones incluidas en esta categoría no presentan los numerales del porcentaje como cantidades absolutas asociadas a una cantidad de 100 unidades, sino que trabajan con el numeral y el símbolo de forma conjunta sistemáticamente. Un ejemplo de esta forma de proceder en un problema de Tipo III lo expusimos en la Imagen V - 63 para la situación introductoria F10.1.1.

Así, de forma general, las producciones de los alumnos se agrupan alrededor de las categorías VPp0 (sin argumentos), VPp3 (estrategia funcional que termina mediante multiplicación), VPp7 (uso de una fórmula) y VPp8 (operaciones sin sentido). La falta de argumentación, aunque es minoritaria, aparece con porcentajes no despreciables en TC9.1.2, PE.7.1 y PE.8.2. En TC9.1.2, al tratarse de una tarea para casa se debe probablemente al plagio entre alumnos. En PE.7.1 la sencillez de la estructura numérica puede haber hecho aparecer estrategias de puntos de referencia que los alumnos no hayan plasmado en la producción escrita. El mayor porcentaje en PE.8.2 en esta categoría se debe a que hemos incluido una respuesta recurrente “No se puede hacer” que muchos alumnos han dado al ejercicio sin aportar más argumentaciones. La presencia de operaciones sin sentido (VPp8) se incrementa en los problemas que suponen una mayor dificultad para los alumnos y en los problemas de la prueba escrita. Las producciones clasificadas en esta categoría realizan divisiones o multiplicaciones entre cantidades que no pueden operarse y el equipo investigador no ha podido deducir el uso de una estrategia concreta. Así, las respuestas correctas se deben, mayoritariamente al uso de una fórmula (VPp7) o al empleo de la estrategia funcional institucionalizada (VPp3).

A pesar de que en las situaciones introductorias la presencia de técnicas que pueden achacarse a la instrucción previa o externa de los alumnos en tareas de porcentaje era mínima, a lo largo de la propuesta aparece de forma recurrente el uso de fórmulas para el cálculo del porcentaje. Especialmente relevante es el uso de esta técnica en los problemas que se enviaban para trabajar en casa y en los problemas de la prueba escrita. Debido a este efecto, la estrategia VPp3 es mayoritaria en todos los problemas menos en TC9.2.2, TC10.1.1, PE.8.1 y PE.8.2.

La mayor parte de los fallos que hemos encontrado en la aplicación de una estrategia VPp3 han sido ya comentados en la sección correspondiente al análisis de los problemas de valor perdido (V.3.1.5. Problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa). Destacan especialmente el error VP.1 correspondiente a producciones inacabadas (generalmente se calcula la razón asociada al porcentaje que proporciona el enunciado y no se prosigue) y el error VP.4 en el que los alumnos desarrollan una estrategia VPp3, pero calculando de forma inadecuada la razón pertinente. Este error se agrava en las situaciones de porcentaje al entrar en juego la estructura aditiva parte-parte-todo en la que, considerando el todo formado por dos partes disjuntas, una pareja de datos relacionados da lugar a seis razones externas diferentes.

V.3.2. Comparativa con los resultados del grupo de control

En esta sección comparamos los resultados para los problemas de la prueba escrita final obtenidos en los grupos experimentales (GE) con los obtenidos en el grupo de control (GC) en los diferentes niveles de análisis que hemos realizado en la sección anterior. Es decir, analizaremos los resultados en las categorías generales en términos de respuestas en blanco, incorrectas y correctas, y analizaremos las categorías específicas sobre estrategias de resolución empleadas.

Los datos para los grupos experimentales ya se han presentado en la sección anterior, los volveremos a introducir en esta sección para que el lector pueda comparar directamente estos resultados con los del grupo de control. Además de la comparación, otro propósito de esta sección es sintetizar los resultados obtenidos por los alumnos de los grupos experimentales al finalizar la propuesta en cada curso.

V.3.2.1. Análisis comparativo según las categorías generales

En la Tabla V - 59 se presentan las tablas de contingencia[53] con las frecuencias relativas en cada problema de la prueba escrita para las variables dicotómicas "Corrección en la respuesta: Correcta / No correcta", y la variable "Grupo de procedencia del alumno: Experimental / Control". Como ya hemos comentado, las respuestas de las categorías generales N: "no entrega o no asiste", B: "en blanco o sin sentido" e I: "incorrecta" se agrupan para obtener tablas 2×2. En estas condiciones, aplicamos un test exacto de Fisher (ver Capítulo III, sección III.3.8.4. Análisis cuantitativo de datos). Así, junto a cada tabla de contingencia aparece una columna en la Tabla V - 59 con el p-valor obtenido en el test de Fisher para contrastar la hipótesis nula de independencia entre las dos variables. Es decir, la hipótesis nula del test (bilateral) es que la corrección en la respuesta es independiente del grupo de procedencia.

Cabe destacar que el profesor responsable del grupo de control confirmó que había impartido todos los conocimientos necesarios para que sus alumnos pudiesen abordar la prueba escrita que, de hecho, se utilizó como prueba de evaluación de la unidad didáctica en el grupo de control. Si bien, se constató que los alumnos del grupo de control no habían trabajado situaciones compuestas durante la propuesta y sí habían trabajado situaciones de proporcionalidad simple inversa.

Los resultados de la Tabla V - 59 (también presentados en la Figura V - 2) muestran que el porcentaje de respuestas correctas en el grupo experimental es mayor que en el del grupo de control excepto en dos ítems PE.1.3 y PE.8.1, que se corresponden respectivamente con la detección como no directamente proporcional de una situación de proporcionalidad inversa y con un problema de porcentaje de Tipo I.

El estudio del p-valor obtenido en el test exacto de Fisher para un nivel de confianza del $95\ \%$ muestra diferencias significativas a favor del grupo experimental (mayor porcentaje de respuestas correctas) en los ítems PE.1.1, PE.1.2, PE.1.4, PE.2.1, PE.5, PE.6, PE.7.3 y PE.7.4. Estos ítems corresponden al análisis de situaciones que no son de proporcionalidad (salvo el caso inverso), a la detección de una situación de proporcionalidad simple directa, al problema de comparación cualitativa, al problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta, al falso problema de proporcionalidad y al cálculo de razones en contextos de porcentajes. A este nivel de confianza, ningún resultado muestra diferencias significativas a favor del grupo de control. Además, a un nivel de confianza del $90\ \%$ también aparecen diferencias significativas a favor del grupo experimental para el problema de comparación cuantitativa PE.3.

[53] En la Tabla V - 59 aparecen las tablas de contingencia presentando los datos relativos. El test exacto de Fisher se elabora a partir de la tabla de contingencia con las frecuencias absolutas.

		N+B+I	C	p-valor
PE.1.1	GE	7,7 %	92,3 %	0,0000
	GC	61,9 %	38,1 %	
PE.1.2	GE	32,3 %	67,7 %	0,0096
	GC	66,7 %	33,3 %	
PE.1.3	GE	63,1 %	36,9 %	0,7968
	GC	57,1 %	42,9 %	
PE.1.4	GE	18,5 %	81,5 %	0,0005
	GC	61,9 %	38,1 %	
PE.2.1	GE	30,8 %	69,2 %	0,0189
	GC	61,9 %	38,1 %	
PE.2.2	GE	60 %	40 %	0,4399
	GC	71,4 %	28,6 %	
PE.2.3	GE	63,1 %	36,9 %	0,3029
	GC	76,2 %	23,8 %	
PE.3	GE	47,7 %	52,3 %	0,0788
	GC	71,4 %	28,6 %	
PE.4	GE	35,4 %	64,6 %	0,6073
	GC	42,9 %	57,1 %	
PE.5	GE	33,8 %	66,2 %	0,0001
	GC	81,0 %	19,0 %	
PE.6	GE	32,3 %	67,7 %	0,0000
	GC	95,2 %	4,8 %	
PE.7.1	GE	55,4 %	44,6 %	0,1244
	GC	76,2 %	23,8 %	
PE.7.2	GE	58,5 %	41,5 %	0,1961
	GC	76,2 %	23,8 %	
PE.7.3	GE	50,8 %	49,2 %	0,0465
	GC	76,2 %	23,8 %	
PE.7.4	GE	52,3 %	47,7 %	0,0231
	GC	81,0 %	19,0 %	
PE.8.1	GE	40 %	60 %	0,2032
	GC	23,8 %	76,2 %	
PE.8.2	GE	89,2 %	10,8 %	0,1868
	GC	100 %	0 %	

Tabla V - 59. Comparativa del grado de éxito entre el grupo experimental ($N = 65$) y el grupo de control ($N = 21$) en el ciclo II-1.

En los ítems PE.7.1, PE.7.2, PE.8.2, encontramos unas diferencias considerables (aunque no estadísticamente significativas) a favor del grupo experimental. Estos ítems se corresponden a los problemas de Tipo II y Tipo III y cálculo de complementarios en situaciones de porcentaje.

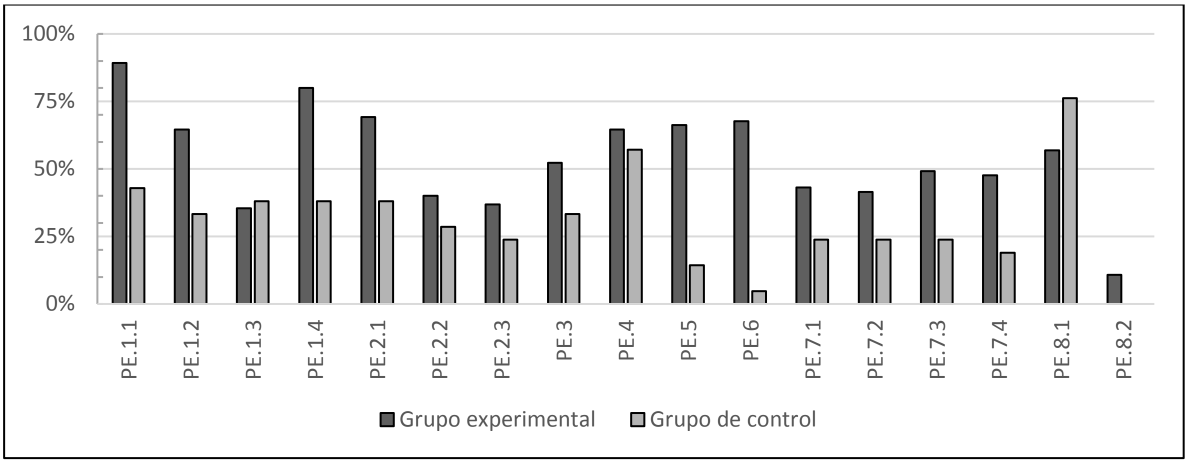


Figura V - 2. Gráfico comparativo con los porcentajes de respuestas correctas en la prueba escrita en entre los grupos experimentales y el grupo de control (Ciclo II-1).

En resumen, los datos apuntan a que los alumnos del grupo experimental tienen mejores resultados en las tareas de reconocimiento de situaciones de proporcionalidad (salvo en el caso de la relación inversa en el que no se pueden asumir diferencias), en los problemas de comparación cuantitativa y cualitativa, en los problemas de proporcionalidad compuesta, en identificar la relación entre porcentaje y razón y en los problemas de porcentajes de Tipo II y Tipo III. Los resultados apuntan, además, a que el grupo de control obtiene mejores resultados en el problema de porcentaje de Tipo I.

Una vez analizadas las diferencias en las categorías generales realizamos un análisis comparativo en las categorías específicas que ya se han utilizado en la sección anterior, siguiendo un esquema similar en la descomposición de los focos de interés.

V.3.2.2. Análisis comparativo según las categorías específicas

En el análisis de las categorías específicas tomamos los mismos criterios que en la sección anterior para la clasificación de las respuestas de los estudiantes. De forma general, el estudio de las estrategias y otras categorías específicas se hace para las respuestas incorrectas (I) y correctas (C) por lo que las frecuencias absolutas en el desglose de las categorías específicas suman la misma cantidad que las frecuencias absolutas en estas categorías generales. Los porcentajes asociados a cada categoría en las tablas se hacen sobre el total de alumnos (por lo que, generalmente, no suman 100). Para favorecer la comparación visual en los gráficos de barras se presentan los porcentajes relativos al total de respuestas consideradas en el análisis específico en vez del porcentaje relativo al total de alumnos en cada grupo.

Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones.

En la Tabla V - 60 y en la Figura V - 3 se presentan los resultados obtenidos para las categorías de análisis de los argumentos empleados por los estudiantes para decidir si una relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa o no. De entre los hechos que podemos observar a partir de este análisis comparativo destacamos los siguientes:

- En el grupo de control aparecen más respuestas sin argumentos que en el grupo experimental. Mientras que los porcentajes de respuestas no argumentadas en el grupo experimental se mueven entre el $18\ \%$ y el $28\ \%$, en el grupo de control estos porcentajes se sitúan entre $38\ \%$ y el $48\ \%$.
- El reparto de las estrategias empleadas en el grupo de control es similar en cada una de las tareas. Una alta frecuencia relativa de respuestas sin argumentar y de respuestas que emplean argumentos por aumentos y disminuciones (menor que la anterior). Por otro lado, el grupo experimental presenta unos patrones más versátiles dependiendo del tipo de relación al que responden. Mientras que en PE.1.2, PE.1.3 y PE.1.4 es mayoritaria la categoría D2 (argumentos por constante de proporcionalidad) en PE.1.1 (contexto en el que las magnitudes no estaban relacionadas) es mayoritaria la categoría D8 (no existe relación entre las magnitudes).

			D0	D2	D6	D7	D8	D9
PE.1.1	GE	N.º de respuestas	12	17	0	1	32	2
		Porcentaje	18,5 %	26,2 %	-	1,5 %	49,2 %	3,1 %
	GC	N.º de respuestas	10	0	2	5	2	0
		Porcentaje	47,6%	-	9,5%	23,8%	9,5%	-
PE.1.2	GE	N.º de respuestas	16	35	1	1	10	1
		Porcentaje	24,6 %	53,8 %	1,5 %	1,5 %	15,4 %	1,5 %
	GC	N.º de respuestas	8	1	1	7	1	0
		Porcentaje	38,1%	4,8%	4,8%	33,3%	4,8%	-
PE.1.3	GE	N.º de respuestas	16	44	1	1	1	1
		Porcentaje	24,6 %	67,7 %	1,5 %	1,5 %	1,5 %	1,5 %
	GC	N.º de respuestas	9	1	1	7	1	0
		Porcentaje	42,9%	4,8%	4,8%	33,3%	4,8%	-
PE.1.4	GE	N.º de respuestas	18	40	1	2	3	0
		Porcentaje	27,7 %	61,5 %	1,5 %	3,1 %	4,6 %	-
	GC	N.º de respuestas	9	0	3	5	1	0
		Porcentaje	42,9%	-	14,3%	23,8%	4,8%	-

Tabla V - 60. Comparativa de los tipos de argumentos empleados para justificar las relaciones de proporcionalidad entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema PE.1 (Ciclo II-1).

- La baja argumentación (D0) y el uso del argumento por aumentos y disminuciones (D7) hace que la mayoría de los alumnos del grupo de control que detectan correctamente la relación de proporcionalidad directa en PE.1.4 no argumenten adecuadamente su elección.
- El abuso del argumento por aumentos y disminuciones (D7) provoca que los alumnos del grupo de control contesten incorrectamente a PE.1.2 en el que podía suponerse una relación creciente no proporcional. En cambio, los alumnos del grupo experimental tienen una tasa de éxito mucho mayor en esta tarea usando los conceptos de razón y condición de regularidad (D2).
- El uso de la condición de regularidad y concepto de razón (D2) genera problemas en el grupo experimental para detectar que una relación de proporcionalidad inversa no es de proporcionalidad directa. En cambio, el uso de argumentos basados en aumentos y disminuciones (D7) se muestra más eficaz para el grupo de control al detectar que la relación es decreciente y por tanto no es de proporcionalidad directa.
- El uso de una argumentación de tipo D2 resulta mucho más beneficiosa para el grupo experimental a la hora de detectar la relación proporcional PE.1.4, que la estrategia por aumentos y disminuciones (D7) utilizada por el grupo de control. En esta tarea parece haber sido determinante el hecho de razonar sobre la posibilidad de establecer la razón y su constancia, ya que, en muchos de los argumentos del grupo de control, los alumnos expresan que no por echar más zumo "tiene" que echar más agua. Aunque pudiéramos encontrar la lógica de estos argumentos, estos ilustran que los alumnos del grupo de control no reflexionan sobre las condiciones bajo las que podría suponerse una relación de proporcionalidad simple directa.

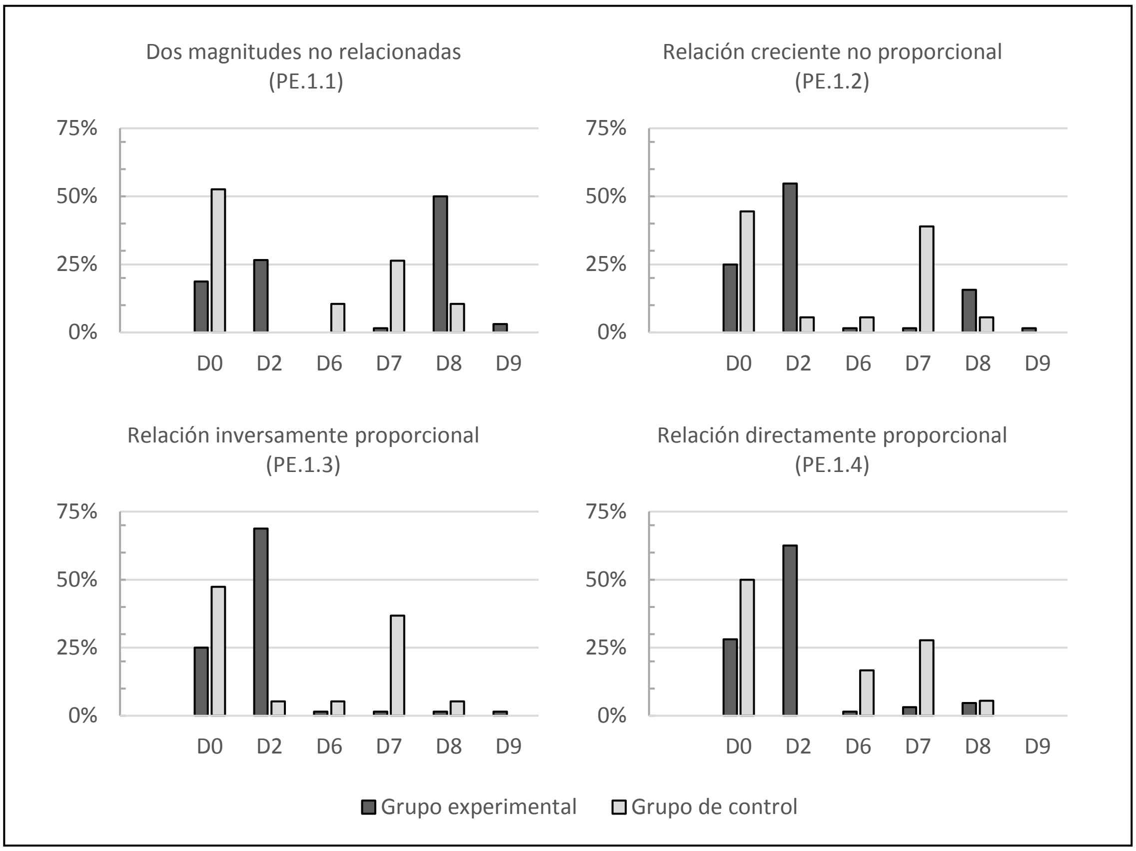


Figura V - 3. Distribución de los diferentes argumentos empleados por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la detección de relaciones proporcionales en PE.1 (Ciclo II-1).

En los problemas PE.2.2 y PE.2.3 los alumnos no debían argumentar sobre la relación de proporcionalidad, sino que, a partir de un contexto numérico que relacionaba dos cantidades de magnitud directamente proporcionales, debían elegir entre cuatro posibles respuestas aquella que presentaba una razón interpretada como tanto por uno correcta. Ya hemos presentado los porcentajes de acierto en la Tabla V - 59, para analizar más en detalle las respuestas presentamos en la Tabla V - 61 los porcentajes que se obtuvieron para cada una de las cuatro posibles respuestas.

			I_1	I_2	I_3	C
PE.2.2	**GE**	N.º de respuestas	14	13	11	26
		Porcentaje	21,5 %	20 %	16, 9 %	40 %
	GC	N.º de respuestas	4	5	4	6
		Porcentaje	19,0 %	23,8 %	19,0 %	28,6 %
PE.2.3	**GE**	N.º de respuestas	10	10	20	24
		Porcentaje	15,4 %	15,4 %	30,8 %	36,9 %
	GC	N.º de respuestas	1	6	7	4
		Porcentaje	4,8 %	28,6 %	33,3 %	23,8 %

Tabla V - 61. Comparativa de las respuestas para los problemas de respuesta cerrada PE.2.2 y PE.2.3 entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo II-1).

Como vemos, los alumnos del grupo de control presentan un patrón de respuestas bastante uniforme. Es decir, parecen responder de forma aleatoria. Por otra parte, las respuestas del grupo experimental se concentran alrededor de la respuesta correcta en el primer ejercicio y alrededor de dos de las respuestas en el segundo ejercicio.

Para el falso problema de proporcionalidad PE.6 se detectan, como hemos dicho, diferencias significativas en el desempeño a favor del grupo experimental. Estas diferencias no se explican por la estructura semántica en forma de problema de proporcionalidad compuesta (contenido que no habían trabajado los alumnos del grupo de control). De hecho, el 57,1 % de los alumnos del grupo de control (12 de los 21 alumnos) da como respuesta que “el alumno habría sacado un 6 en el examen”. Esta respuesta es la correcta para la estructura numérica $(8:4:2) \leftrightarrow (x:2:3)$ en un problema de proporcionalidad compuesta Directa-Directa al que se asemejaba el enunciado. Además, 10 de estos 12 alumnos utilizan correctamente la amalgamación por producto “horas/día · número de días”, para responder de forma incorrecta al problema. Por tanto, los alumnos parecen capaces de enfrentarse mediante la amalgamación a un problema de proporcionalidad compuesta de estas características, pero yerran al considerar tal relación en el problema que se les plantea. Solo 1 alumno, responde sin argumentar que el problema no puede realizarse. Un ejemplo típico de respuesta al problema PE.6 por los alumnos del grupo de control es el que se observa en la Imagen V - 67. En la imagen se observa cómo el alumno amalgama correctamente y plantea una representación tabular para la falsa relación de proporcionalidad simple directa entre el “tiempo de estudio” y la “nota obtenida”, que resuelve mediante regla de tres.

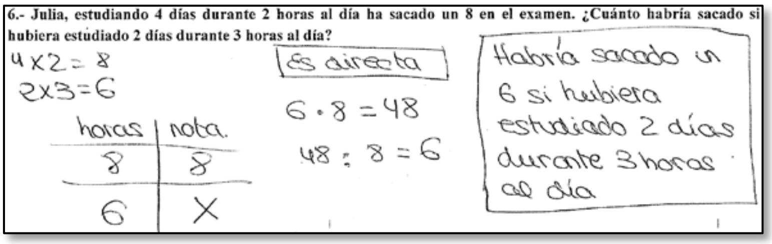


Imagen V - 67. Producción de un alumno del grupo de control para PE.6 (Ciclo II-1).

Problemas de comparación cuantitativa de proporcionalidad simple directa.

El problema PE.3 es el único de comparación cuantitativa introducido en la prueba escrita. En la Tabla V - 59, vimos que la tasa de éxito en el grupo de control era significativamente inferior a la tasa de éxito en el grupo experimental. En cuanto a las categorías específicas para este problema, en la Tabla V - 62 y en la Figura V - 4 podemos observar que, en el grupo de control, además de las respuestas sin argumentar (C0) parecen tener una mayor incidencia las respuestas clasificadas en las categorías C2 (escalar), C3 (resuelve problema de valor perdido) y C1 (funcional). Esta última es la estrategia claramente mayoritaria en el grupo experimental y su uso, que permite modelizar el concepto de “espesor” a una cantidad numérica asociada a la magnitud “peso de fideos por unidad de volumen de caldo”, parece estar ligado a la mayor tasa de éxito en el grupo experimental.

			C0	C1	C2	C3	C4	C5
PE.3	GE	N.º de respuestas	7	45	0	1	4	2
		Porcentaje	10,8 %	69,2 %	-	1,5 %	6,2 %	3,1 %
	GC	N.º de respuestas	5	4	2	2	1	2
		Porcentaje	23,8 %	19,0 %	9,5 %	9,5 %	4,8 %	9,5 %

Tabla V - 62. Comparativa de las estrategias de resolución empleadas en el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo II-1).

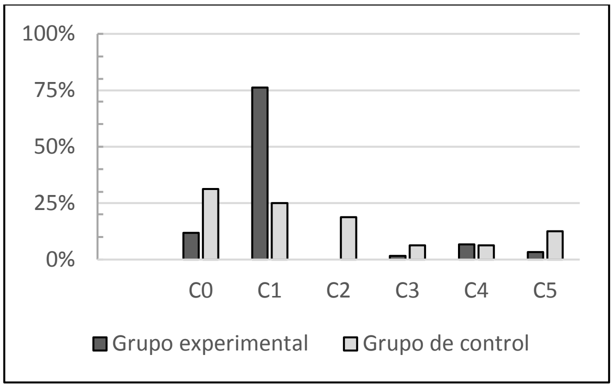


Figura V - 4. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución del problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo II-1).

Además, entre las respuestas clasificadas en la categoría C1 (funcional) en el grupo de control, no encontramos ninguna producción que interprete las razones externas, a diferencia de lo que ocurre en el grupo experimental en el que una buena parte de las producciones clasificadas en C1 sí lo hace. En la Imagen V - 68 se contraponen dos producciones clasificadas en C1, la de la izquierda supone un ejemplo paradigmático de respuesta en el grupo experimental y la de la derecha la equivalente en el grupo de control.

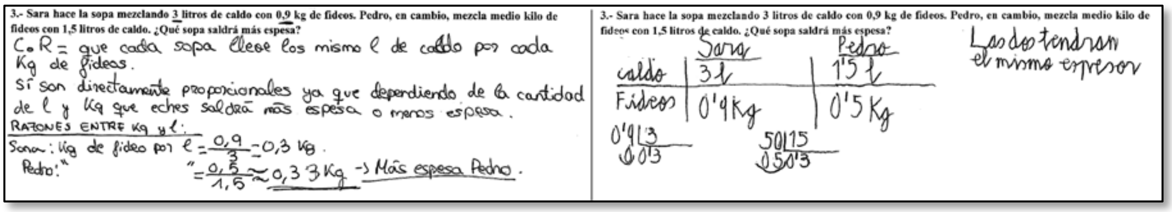


Imagen V - 68. Producción del alumno A4.2 y de un alumno del grupo de control para PE.3 (Ciclo II-1).

Las respuestas correctas del grupo de control aparecen en mayor medida unidas al uso de las estrategias C2 y C3, cuya correcta aplicación parece depender en mayor medida de la estructura numérica que de la interpretación en términos de magnitud intensiva del concepto "espesor". Recordamos que en PE.3 una de las razones internas es entera e igual a 2, por lo que algunos alumnos utilizan la comparación multiplicativa asociada a esta razón ("Sara echa el doble de caldo que Pedro") y estiman en la otra magnitud que la razón multiplicativa es menor que 2 ("Sara no echa menos del doble de fideos que Pedro"). Los ejemplos encontrados en el grupo de control se ajustan a esquemas similares al ya discutido alrededor de la Imagen V - 21 (dentro del análisis de las producciones del grupo experimental en la sección V.3.1.3. Problemas de comparación cuantitativa de proporcionalidad simple directa).

Problemas de comparación cualitativa de proporcionalidad simple directa.

En el problema de comparación cualitativa de la prueba escrita, PE.2.1, no se solicitaba a los alumnos que argumentaran su respuesta, sino que debían seleccionar la opción que considerasen correcta de entre cuatro proporcionadas. Por tanto, no disponemos de datos sobre los argumentos utilizados por los alumnos del grupo de control para responder a este tipo de tareas. En la Tabla V - 63 se presentan los resultados sobre el porcentaje de alumnos que eligieron cada una de las opciones, la opción sombreada es la correcta ("no hay bastante información para responder").

			$S_1 > S_2$	$S_1 < S_2$	$S_1 = S_2$	$S_1¿?S_2$
PE.2.1	**GE**	N.º de respuestas	4	5	11	45
		Porcentaje	6,2 %	7,7 %	16,9 %	69,2 %
	GC	N.º de respuestas	2	4	5	8
		Porcentaje	9,5 %	19,5 %	23,8 %	38,1 %

Tabla V - 63. Comparativa de respuestas entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cualitativa PE.2.1 (Ciclo II-1).

Salvo la mayor concentración de respuestas correctas en el grupo experimental, no encontramos patrones claros en la forma en las respuestas incorrectas. Entre las respuestas incorrectas encontramos una mayor tasa de respuestas en la opción $S_1 = S_2$, tanto en el grupo experimental, como en el grupo de control. Esta respuesta puede ser indicativa de esquemas de pensamiento aditivos erróneos.

Problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa.

Los problemas de valor perdido habían formado parte de la instrucción tanto en el grupo experimental como en el grupo de control. En la Tabla V - 64 y en la Figura V - 5 observamos que las estrategias de resolución están claramente polarizadas. Mientras que en el grupo experimental se usa mayoritariamente VPd3 (funcional, razón externa y multiplicación), en el grupo de control se utiliza mayoritariamente una estrategia VPd7 (uso de una fórmula). Aunque el porcentaje de respuestas correctas es superior en el grupo experimental usando VPd3 que en el grupo de control usando VPd7, las diferencias no son significativas por lo que no se pueden inferir relaciones entre el tipo de estrategia empleada y la tasa de éxito conseguida.

			VPd0	VPd1	VPd2	VPd3	VPd4	VPd5	VPd6	VPd7	VPd8	VPd9
PE.4	**GE**	N. resp.	1	0	0	47	4	0	0	2	6	1
		Porcent.	1,5 %	-	-	72,3 %	6,2 %	-	-	3,1 %	9,2 %	1,5 %
	GC	N. resp.	3	0	0	0	1	0	0	13	0	1
		Porcent.	14,3 %	-	-	-	4,8 %	-	-	61,9 %	-	4,8 %

Tabla V - 64. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido PE.4 (Ciclo II-1).

Además de estas estrategias mayoritarias, en el grupo experimental se observa un mayor porcentaje de producciones categorizadas en VPd8 (operaciones sin sentido), mientras que en el grupo de control aparecen con más frecuencia las respuestas desprovistas de argumentos u operaciones que permitan inferir la estrategia utilizada para resolverlos.

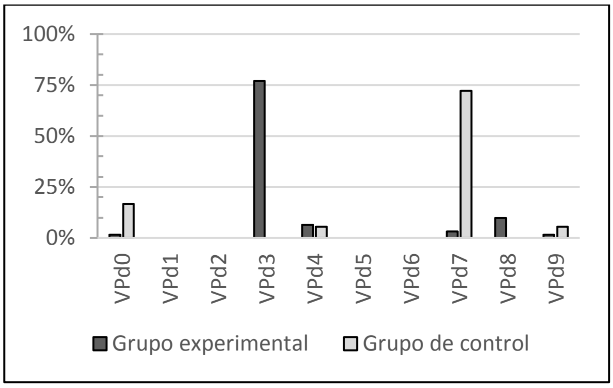


Figura V - 5. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos de los grupos experimental y de control en la resolución del problema de valor perdido PE.4 (Ciclo II-1).

En el grupo de control, los fallos provienen en su mayoría del mal uso de la fórmula. En cambio, en el grupo experimental los fallos provienen de interpretar la razón utilizada con el significado como tanto por uno de su inversa (error VP.3) o de proceder incorrectamente en la segunda etapa de la estrategia VPd3, dividiendo por la razón externa cuando debía procederse por multiplicación (error VP.4). La discusión de los errores en el grupo experimental en torno al problema PE.4 se ejemplificó mediante la Imagen V - 47 (ver sección V.3.1.5. Problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa). En la Imagen V - 69 observamos dos producciones del grupo de control para PE.4, a la izquierda ejecutada de forma correcta y a la derecha de forma incorrecta. Cabe destacar que ningún alumno del grupo de control presenta argumentos para justificar la relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes y solo la producción de la Imagen V - 69 (izquierda) expresa que la relación “es directa”.

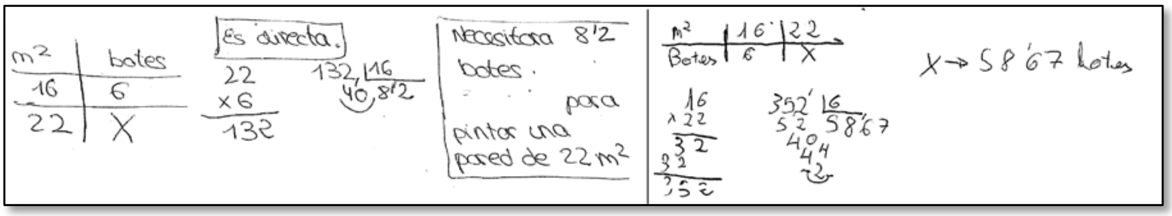


Imagen V - 69. Producción correcta (izquierda) y producción incorrecta (derecha) de alumnos del grupo de control para PE.4 (Ciclo II-1).

Situaciones de proporcionalidad compuesta.

En la Tabla V - 65 y en la Figura V - 6 se resumen los resultados para el análisis de las estrategias de resolución puestas en juego por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en el problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad compuesta de la prueba escrita (PE.5). En la Tabla V - 65 hemos eliminado aquellas categorías que han tenido frecuencia absoluta nula en ambos grupos.

			VPC2	VPC3	VPC4	VPC8	VPC10	VPC11
PE.5	GE	N.º de respuestas	33	8	2	10	0	2
		Porcentaje	50,8 %	12,3 %	3,1 %	15,4 %	-	3,1 %
	GC	N.º de respuestas	6	3	0	2	1	4
		Porcentaje	28,6 %	14,3 %	-	9,5 %	4,8 %	19,0 %

Tabla V - 65. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo II-1).

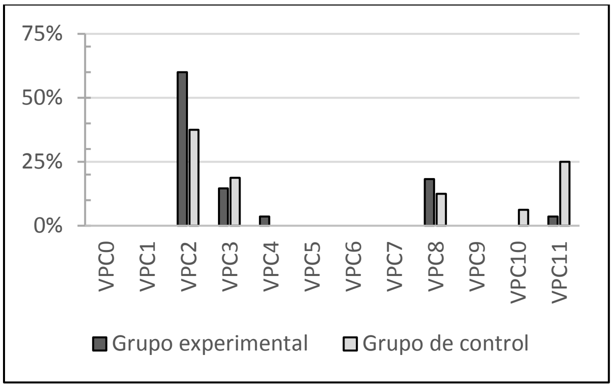


Figura V - 6. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos de los grupos experimental y de control en la resolución del problema de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo II-1).

Observamos que entre los alumnos del grupo de control hay una mayor incidencia de las estrategias incorrectas VPC10 (trabajo con las magnitudes independientes por separado) y VPC11 (omisión de una magnitud). Este hecho se explica en gran medida por la instrucción recibida por los alumnos del grupo de control, que no incluía situaciones compuestas. En este tipo de producciones los alumnos del grupo de control realizan una tabla de doble entrada que incluye la magnitud dependiente y una de las independientes, y terminan el problema mediante la aplicación de una fórmula para el problema simple. El mismo esquema se mantiene para la estrategia incorrecta VPC10 salvo que, en este caso, se plantean dos problemas simples uno con cada magnitud independiente. En el ejemplo de la Imagen V - 70 vemos la forma de proceder de un alumno del grupo de control que, al encontrar que los dos problemas simples le proporcionan la misma información, da esta como respuesta al problema.

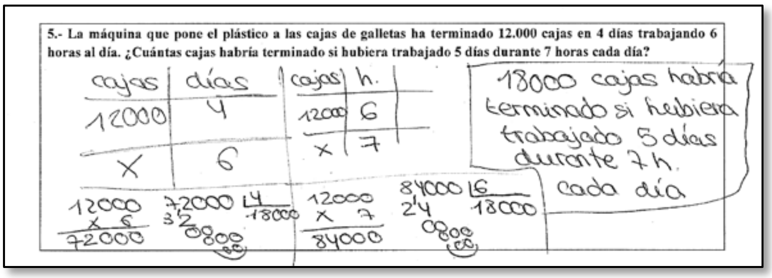


Imagen V - 70. Producción de un alumno del grupo de control para PE.5 usando la estrategia VPC10 (Ciclo II-1).

Si nos centramos en las estrategias potencialmente correctas, en el grupo de control se observa que la estrategia de amalgamación (VPC2, con una frecuencia relativa del 28,6 %) tiene un mayor peso que la estrategia de paso a paso pasando por la unidad (VPC3, con una frecuencia relativa del 14,3 %). Además, de las cuatro producciones correctas del grupo de control, tres usan amalgamación y solo una de ellas usa una estrategia de paso a paso. Las producciones para el falso problema de proporcionalidad compuesta PE.6 que ya comentamos anteriormente, apuntan también al hecho de que los alumnos del grupo de control podían realizar de forma natural la amalgamación "horas al día · número de días". En la Imagen V - 71 vemos dos ejemplos de respuestas correctas de alumnos del grupo de control, una utilizando la estrategia de amalgamación (VPC2, izquierda) y otra mediante una estrategia de paso a paso (VPC3, derecha).

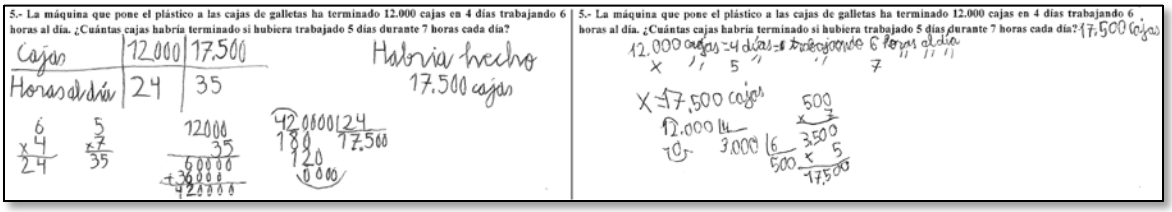


Imagen V - 71. Producciones correctas de alumnos del grupo de control para PE.5 usando la estrategia VPC2 (izquierda) y VPC3 (derecha) respectivamente (Ciclo II-1).

Estos hechos apuntan un peor desempeño de los alumnos del grupo de control interpretando las razones y productos de magnitudes, y un mayor apego hacia las técnicas institucionalizadas, ya que, a pesar de disponer de las herramientas necesarias para realizar el problema de proporcionalidad compuesta, no logran abordarlo con éxito de forma mayoritaria en la prueba escrita.

Porcentajes y problemas asociados.

En la Tabla V - 66 y en la Figura V - 7 se resumen los resultados para el análisis de las estrategias de resolución de los problemas de porcentajes de la prueba escrita para los alumnos del grupo experimental y del grupo de control. En ellas, hemos eliminado las categorías que han tenido frecuencia absoluta nula en ambos grupos. Ninguna de las producciones ha sido clasificada por tanto en las categorías VPp1, VPp5, VPp10, VPp11, VPp12 y VPp13.

			VPp0	VPp2	VPp3	VPp4	VPp6	VPp7	VPp8	VPp9
PE.7.1	**GE**	N. respuestas	10	0	29	2	1	9	4	0
		Porcentaje	15,4 %	-	44,6 %	3,1 %	1,5 %	13,8 %	6,2 %	-
	GC	N. respuestas	5	0	2	0	0	8	2	0
		Porcentaje	23,8 %	-	9,5 %	-	-	38,1 %	9,5 %	-
PE.8.1	**GE**	N. respuestas	0	1	15	4	0	22	11	0
		Porcentaje	-	1,5 %	23,1 %	6,2 %	-	33,8 %	16,9 %	-
	GC	N. respuestas	0	0	1	0	0	15	0	0
		Porcentaje	-	-	4,8 %	-	-	71,4 %	-	-
PE.8.2	**GE**	N. respuestas	11	1	6	0	0	4	8	9
		Porcentaje	16,9 %	1,5 %	9,2 %	-	-	6,2 %	12,3%	13,8 %
	GC	N. respuestas	0	0	0	0	0	3	4	4
		Porcentaje	-	-	-	-	-	14, 3%	19,0 %	19,0 %

Tabla V - 66. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para problemas de Tipo I, II y III de porcentajes (Ciclo II-1).

En general observamos que los alumnos del grupo de control son más homogéneos en el uso de una estrategia de resolución: Las respuestas correctas del grupo de control se concentran en el uso de una estrategia VPp7, mientras que las respuestas correctas en el grupo experimental se dividen entre las que utilizan una estrategia VPp7 y una estrategia VPp3.

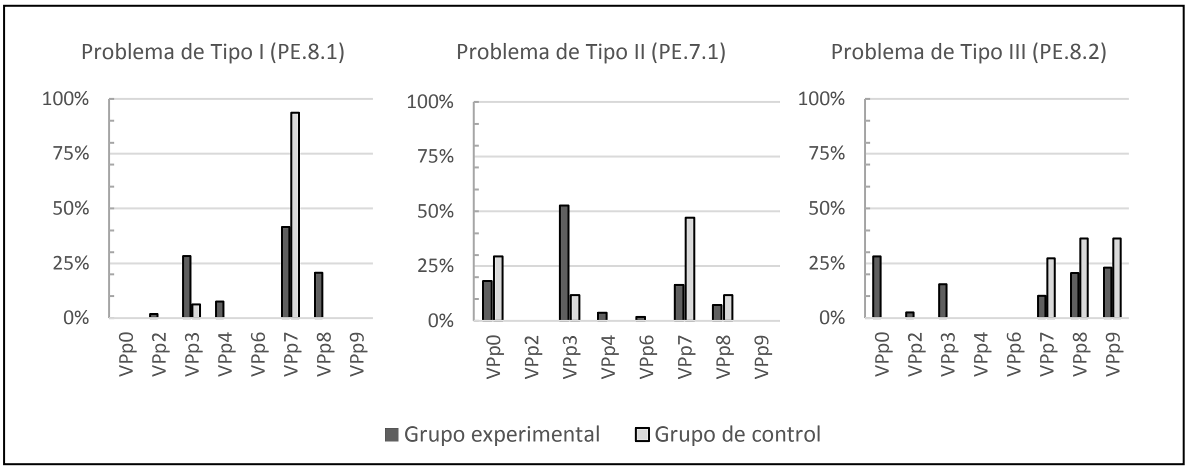


Figura V - 7. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo II-1).

Al igual que sucedía para el problema de valor perdido PE.4, observamos una marcada polaridad en el problema de cálculo de la parte conocidos el porcentaje y el total (cálculo directo o problema de Tipo I). En el problema de Tipo I, aunque la estrategia de una fórmula es la mayoritaria en el grupo experimental, la frecuencia relativa en esta categoría para el grupo de control es mucho mayor. En la sección dedicada al análisis de las producciones escritas de los alumnos del grupo experimental en problemas de porcentajes (V.3.1.7. Porcentajes) describimos las posibles influencias externas o de conocimientos previos de los alumnos detectadas en los problemas de porcentaje. Los alumnos conocían un método para realizar cálculos directos de porcentaje (problemas de Tipo I), de manera que para calcular el p % de T, sabían que debían multiplicar $p \cdot T$ y dividir el resultado por 100. Esta técnica, que es útil en los problemas de Tipo I, pero no resulta de fácil aplicación en los problemas de Tipo II y Tipo III, estaba detrás de las producciones del grupo experimental clasificadas en VPp7. Este hecho provoca que las producciones correctas del grupo experimental se repartan casi exclusivamente entre las categorías VPp3 (estrategia institucionalizada) y VPp7. En cambio, en el grupo de control, observamos que aparecen dos formas de proceder que han sido clasificadas en la categoría VPp7. Una de ellas coincide con la relatada para el grupo experimental. La otra, probablemente la técnica institucionalizada, conecta los problemas de porcentaje con la estrategia detectada para los problemas de valor perdido. Consiste en usar una representación tabular para disponer los datos y marcar la cantidad desconocida mediante una incógnita y proceder por regla de tres. En la Imagen V - 72 vemos dos ejemplos de cada una de estas técnicas algorítmicas detectadas en el grupo de control, mediante regla de tres (arriba) y mediante el empleo de una fórmula para el cálculo directo con porcentajes (abajo). Destacamos que, aparentemente, el uso de la regla de tres en los problemas de porcentaje no resuelve las dificultades que encuentran los alumnos en los problemas de Tipo II y Tipo III, siendo significativamente mejores los resultados en el grupo experimental en el que no aparece el uso de la regla de tres.

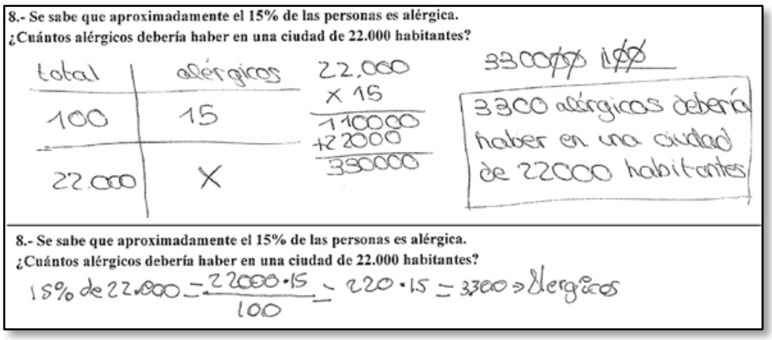


Imagen V - 72. Diferentes estrategias de resolución empleando una fórmula de alumnos del grupo de control para el problema PE.8.1 (Ciclo II-1).

V.3.3. Entrevistas semiestructuradas

En este ciclo de investigación-acción se decidió centrar las entrevistas semiestructuradas en los focos de la investigación que se consideraron más relevantes para evaluar la propuesta en 1º de ESO. Se seleccionaron los dos primeros focos de contenido, posponiendo el estudio del resto de focos para los siguientes ciclos. De esta manera, los guiones de las entrevistas se elaboran en torno al Foco 1: "Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad" y al Foco 2: "Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa". Se establecieron de forma general cinco fases en cada una de las entrevistas, una primera con preguntas descontextualizadas sobre los conceptos principales relacionados con la razón y la condición de regularidad y, posteriormente, cuatro fases en las que los alumnos aclaraban algunas de sus producciones sobre problemas concretos. En concreto, el contenido de cada una de las fases es el siguiente:

- **FASE 1:** Preguntas descontextualizadas sobre el concepto de razón y condición de regularidad.
- **FASE 2:** Análisis de algunas respuestas dadas por los alumnos ante tareas de análisis de situaciones de proporcionalidad, condiciones de regularidad y cálculo de razones.
- **FASE 3:** Análisis de algunas respuestas dadas por los alumnos en problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.
- **FASE 4:** Análisis de algunas respuestas dadas por los alumnos en problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.
- **FASE 5:** Análisis de algunas respuestas dadas por los alumnos en problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa.

A partir de las observaciones del profesor-investigador recogidas en el diario de clase y del análisis de la prueba escrita se seleccionaron tres alumnos que, aparentemente, tenían diferentes niveles en la comprensión de los conceptos. Los estudiantes seleccionados fueron A4.1, que presentó un buen nivel de comprensión durante toda la propuesta, A1.1, estudiante con un nivel medio que presentó dificultades en la comprensión de algunos conceptos concretos y A3.2, que demostró una baja comprensión de los conceptos y varias dificultades a lo largo de la propuesta. Se seleccionaron los tres alumnos del mismo grupo ya que fue el último en el que se intervino en este ciclo y, por tanto, el profesor-investigador disponía de mayor disponibilidad horaria para entrevistar a los alumnos en horario lectivo.

Para cada estudiante se revisaron las producciones de clase, las tareas de casa y la prueba escrita en torno a los focos seleccionados. Tras esta revisión se diseñó una entrevista semiestructurada personalizada en la que el profesor-investigador presentaba a los estudiantes sus producciones en diferentes ejercicios y, a partir de ellas, realizaba una serie de preguntas sobre la comprensión de los diferentes conceptos. El diseño concreto de las entrevistas puede consultarse en el Anexo IV.

Se exponen aquí los resultados de dichas entrevistas, estructurándolos en las cinco fases de las que se componían. Para cada fase se indica el intervalo temporal de la grabación en el que tiene lugar. Se ha transcrito parte de las entrevistas para ilustrar los resultados más significativos.

V.3.3.1. Análisis de la entrevista a A3.2

El alumno A3.2, de bajo desempeño, se muestra temeroso y tímido a lo largo de toda la entrevista. Da síntomas de incomodidad, por lo que la entrevista se acortó, sin ahondar en las dificultades que se hacían patentes y finalizó cuando el alumno lo solicitó explícitamente.

FASE 1 [00:00 – 00:45]: La entrevista comienza con dos preguntas descontextualizadas en las que se solicita que el alumno explique con sus propias palabras el significado de razón y de condición de regularidad y que, a ser posible los ejemplifique. El alumno A3.2 no sabe responder a las preguntas del profesor-investigador sobre el concepto de razón y de condición de regularidad. Tampoco sabe poner ningún ejemplo relacionado.

FASE 2 [00:50 – 03:00]: Ante las preguntas del profesor-investigador el alumno no sabe aclarar las respuestas que ha dado en cada problema. Si se le insiste en por qué en algunas situaciones calcula las razones y en otras no, responde que cuando hay magnitudes se pueden calcular las razones y cuando no hay magnitudes no. Este argumento lo repite en varias situaciones (en las que sí se relacionaban magnitudes). Ante la pregunta del profesor-investigador respecto a qué entiende por magnitudes responde que las magnitudes son cosas que se pueden repartir. El alumno muestra una clara confusión entre el concepto general de magnitud y el de magnitudes ligadas por una relación de proporcionalidad directa.

FASE 3 [03:00 – 04:35]: El profesor-investigador le pide al alumno que lea un problema de comparación cuantitativa que ha resuelto correctamente, pero para el que no ha establecido condiciones de regularidad.

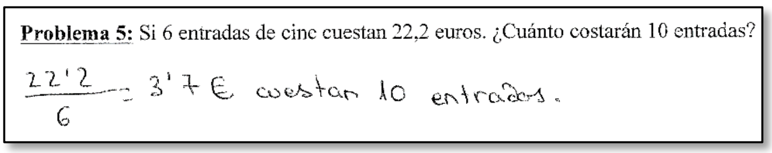
P-I: Muy bien, ¿podrías decirme cuál es la condición de regularidad en este problema?
A3.2: Que cada caricatura tenga el mismo tiempo.
P-I: Vale, y entonces, ¿Íker "hace" el mismo tiempo en cada caricatura que Thais?

A3.2: Sí.
P-I: ¿Sí? (El alumno asiente) Vale, vuelve a leerme esto que has puesto aquí (señala las razones que el alumno ha calculado en cada situación).
A3.2: 6 coma 5 caricaturas en una hora.
P-I: ¿Y aquí?
A3.2: 6 coma 3 periodo caricaturas en una hora
P-I: Entonces, ¿tardan el mismo tiempo Íker y Thais en hacer cada caricatura?
A3.2: Ah, no, no.
P-I: Entonces, la condición de regularidad, … ¿me la podrías decir otra vez de nuevo?
A3.2: Que cada caricatura sea en el mismo tiempo.

El alumno parece poder manejarse con los conceptos asociados a esta situación, sin embargo, es incapaz de verbalizarlos y de asignar significado a los términos específicos que el profesor-investigador utiliza.

FASE 4 [04:35 – 06:15]: Se pretende profundizar sobre los razonamientos que emplea A3.2 para resolver los problemas de comparación cualitativa. La respuesta de este alumno al problema TC8.4 es idéntica a la proporcionada por A1.1 que veremos en la siguiente sección. El alumno marca la opción "*No puedo saber qué chicles son más caros*" y argumenta que ha elegido esa opción porque "*No hay magnitudes*". Durante la entrevista no puede concretarse a qué se refiere el alumno con la supuesta falta de magnitudes ya que no es capaz de explicar cuál es su concepción del término magnitud. Concretamente, el profesor-investigador no consigue poder distinguir si el alumno está haciendo referencia a la falta de valores numéricos o a la falta de relación de proporcionalidad. Parece que el alumno está pensando en esta última opción ya que vuelve a alegar que las magnitudes son "cosas que se pueden repartir".

FASE 5 [06:15 – 08:29]: La entrevista concluye presentándole al alumno algunas de sus producciones en problemas de valor perdido. No puede obtenerse información relevante de esta parte de la entrevista ya que el alumno no proporciona más información que la escrita en sus producciones. Ante las peticiones de aclaración o explicación el alumno vuelve a leer lo que tiene escrito o contesta sin aportar información. Por ejemplo, en el problema TC6.5 (que puede verse en Imagen V - 73), el alumno sólo había calculado una razón externa con la que se obtenía el precio de una entrada. Sin embargo, en la producción escrita se observa que el alumno interpreta dicha razón como la cantidad correspondiente a 10 entradas respondiendo así al problema.


Problema 5: Si 6 entradas de cinc cuestan 22,2 euros. ¿Cuánto costarán 10 entradas?

$\frac{22'2}{6}$ = 3'7 € cuestan 10 entradas.

Imagen V - 73. Producción del alumno A3.2 en el problema TC6.5.

Se muestra la parte de la entrevista donde el profesor-investigador intenta que el alumno explique su respuesta:

P-I: Y, entonces, ¿son directamente proporcionales?

A3.2: Sí.
P-I: ¿Sí? ¿Por qué?
A3.2: Pues porque se pueden repartir.
P-I: Se pueden repartir… y entonces lo que te sale al hacer el reparto, … ¿Qué es?
A3.2: Pues la solución.
P-I: Vale, la solución…
A3.2: ¿Me puedo ir?

Ante la petición del alumno A3.2, el profesor-investigador da por finalizada la entrevista. La escasa participación del alumno en la entrevista, que no se corresponde con la actitud general del alumno en el grupo clase, hace que no se haya podido ahondar su comprensión. Una observación posterior y más detallada de todas las producciones del alumno hace pensar al profesor-investigador que sus producciones durante la propuesta han estado muy influidas por otros compañeros de clase. Dos cursos después de la propuesta, el alumno fue incluido en el Programa para la Mejora del Aprendizaje y el Rendimiento (PMAR) debido a que se confirmaron sus necesidades específicas de aprendizaje. Por lo que la elección del alumno A3.2 para realizar la entrevista semiestructurada pudo no ser una buena elección.

V.3.3.2. Análisis de la entrevista a A1.1

FASE 1 [00:00 – 01:05]: La entrevista comienza con dos preguntas descontextualizadas en las que se solicita que el alumno explique con sus propias palabras el significado de razón y de condición de regularidad y que, a ser posible, los ejemplifique. El alumno expresa que la razón es una relación entre magnitudes. Cuando se le solicita un ejemplo el alumno propone una situación de proporcionalidad directa en la que calcula e interpreta la razón y expresa de forma espontánea la condición de regularidad que debería exigírsele a la situación.

FASE 2 [01:05 – 06:10]: El profesor-investigador le muestra al alumno una tarea en la que el alumno había calculado las razones externas en una situación que relacionaba la edad y la altura de una persona (ver Imagen V - 73).

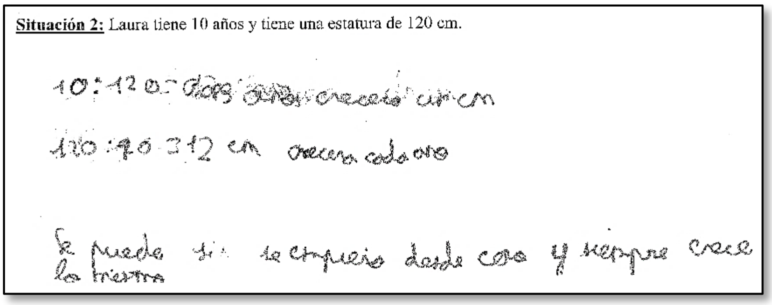


Imagen V - 74. Producción del alumno A1.1 en el problema TC2.2.

Pese a calcular las razones, el alumno expresa una interesante condición de regularidad que hace referencia a las propiedades de la función lineal: “Se puede si se empieza desde cero y siempre crece lo mismo.” El profesor-investigador propone una serie de reflexiones al alumno a partir de esta situación.

A1.1: Pues porque no siempre vas a crecer lo mismo, entonces no tiene sentido. Además, cuando nazca… ya tienes una estatura.
P-I: O sea, que esta condición de regularidad que has escrito no tiene sentido, ¿no?
A1.1: No.
P-I: Vale, muy bien. Entonces, ¿aquí eran directamente proporcionales las magnitudes?
A1.1: 10 años y, … hombre, en la situación esta no, pero yo pienso que en cualquier otra… que alguna otra situación sí que podrían ser directamente proporcionales.
P-I: ¿Se te ocurre alguna?
A1.1: Pues, … a ver que piense, … pues igual, pues igual un girasol, bueno un girasol no, alguna planta de estas que empiezan así pequeñas sí que podría ser más o menos.

El alumno demuestra una buena comprensión de las relaciones de proporcionalidad y propone una situación realista en la que (al menos en algún intervalo de tiempo) tendría sentido que las magnitudes “Edad” y “Estatura” fueran directamente proporcionales.

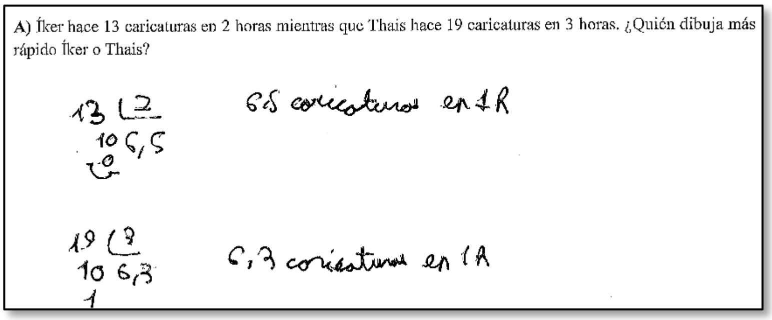


Imagen V - 75. Producción del alumno A1.1 en el problema TC4.1.

FASE 3 [6:10 – 07:30]: La entrevista continúa presentando al alumno su producción para el problema TC4.1 de comparación cuantitativa (ver Imagen V - 74). El alumno, tras calcular las constantes de proporcionalidad, no responde a la pregunta y, además, no expresa condiciones de regularidad. Se pretende comprobar si el alumno tiene una adecuada comprensión de este tipo de situaciones.

P-I: Explícame lo que has hecho.
A1.1: Pues aquí, he dividido 13 para 2, que me daría a las caricaturas que hace en una hora, que me da 6 y media. Y aquí he dividido 19 para 3 para hacer las… también las caricaturas que hace en cada hora.
P-I: Y entonces, ¿cuál sería la respuesta al ejercicio?
A1.1: Eso es lo que me ha faltado. Pues que Íker hace más caricaturas en… Íker ha hecho más caricaturas… O sea, Íker dibuja más rápido.
P-I: Muy bien. ¿Cuál sería la condición de regularidad en ese ejercicio?
A1.1: Que cada hora dibujen los dos las mismas caricaturas.
P-I: Entonces, ¿los DOS dibujan cada hora las mismas?

A1.1: Pues…según he hecho el ejercicio… si hubiera puesto la condición de regularidad, sí.
P-I: Entonces, ¿los dos dibujarían la… a la misma velocidad?
A1.1: No. A ver, espera. No si cada uno hace… Me refería a que cada uno hiciera cada hora los mismos. Pero no que lo hicieran los dos lo mismo cada hora.

Se comprueba que el alumno es capaz de responder a la cuestión que había dejado sin responder y que, además, hace un buen análisis de la situación planteando la necesidad de establecer dos condiciones de regularidad, una para cada situación, en un problema de comparación cuantitativa.

FASE 4 [07:30 – 12:20]: Durante esta fase de la entrevista se pretende profundizar sobre los razonamientos que emplea el alumno para resolver los problemas de comparación cualitativa. En concreto se toma el problema TC8.4 en donde la respuesta correcta era "*No puedo saber qué chicles son más caros*". El alumno había respondido correctamente razonando su respuesta con el argumento "*Falta de magnitudes*". Se pretende aclarar en esta parte de la entrevista si el alumno considera que un problema sin datos no puede ser resuelto o que, con los datos suministrados por el enunciado no puede determinarse qué opción es más barata y la respuesta dependería de los valores concretos de las magnitudes.

TC8.4: *En la marca T de chicles hay más chicles en cada paquete que en los de la marca D. Por otro lado, cada paquete de la marca D es más barato que los paquetes de la marca T. Por tanto: (elige la opción correcta)*

1) Los chicles de T son más caros.
2) Los chicles de D son más caros.
3) Los chicles de T y D cuestan lo mismo.
4) No puedo saber qué chicles son más caros.

Se transcribe una parte de la entrevista en este punto, que no solo muestra la comprensión del alumno en esta tarea, sino que proporciona indicios muy interesantes de cómo aplica el razonamiento proporcional este alumno en diferentes situaciones, empleando razonamientos de unitización y construcción progresiva.

P-I: Y me has puesto que no lo puedes saber, eh, por falta de magnitudes, ¿no?, aquí en el razonamiento. ¿Qué significa eso?
A1.1: Pues que no tienes nada que te demuestre que uno sea más mayor que, uno sea más barato que otro. No tienes números ni factores que te demuestren que sea más barato uno o más caro el otro.
P-I: Y, ¿podrías poner números y resolverlo?
A1.1: Sí, podríamos poner que la marca T de chicles… (el alumno empieza a razonar sin escribir)
P-I: Ponme un ejemplo, escríbemelo, por favor, [nombre de A1.1]. (El profesor-investigador le acerca una hoja de papel).
A1.1: En la marca T hay, por ejemplo, 10 chicles… ¿Chicles se escribe así verdad?
P-I: Sí.

A1.1: Y en la marca D hay… pues 5 chicles. Y entonces luego la marca T cuesta, el… cada paquete cuesta 5 euros y la marca cinco, la marca D, cuestan 2 coma 5 euros. Entonces aquí, en realidad, te daría que es igual, pero con cualquier otra magnitud lo que habría que hacer es… (el profesor-investigador le interrumpe)

P-I: Vale, explícame por qué ahí saldría igual.

A1.1: Pues porque lo que he hecho ha sido, bueno lo he puesto igual a posta, pero, pero por ejemplo porque divides 10 para… 10 para 5 que te da a 2, que sería a 2 chicles por cada euro. Y aquí, 5 chicles para 2 coma 5 que también te da a 2, que sería también 2 chicles por cada euro. Pero por eso he puesto 2 con 5 porque son 2, 2 y luego 1, que sería la mitad.

P-I: Vale, ¿y podrías poner OTRO ejemplo en el que el resultado fuera diferente?

A1.1: Sí.

P-I: Venga, pues pónmelo, por favor.

A1.1: Bueno o puedo cambiar, o puedo cambiarlo ya directamente, pues pongo aquí esto, y puedo poner… no sé… 3 (el alumno escribe sobre su producción anterior tachando el valor 2,5 en el precio de la marca D y poniendo un 3 al lado). Y entonces aquí si divides 5 para 3 que te da (el alumno hace cuentas en la hoja) … a 1 coma 67…

P-I: ¿El qué?

A1.1: Chicles por cada euro.

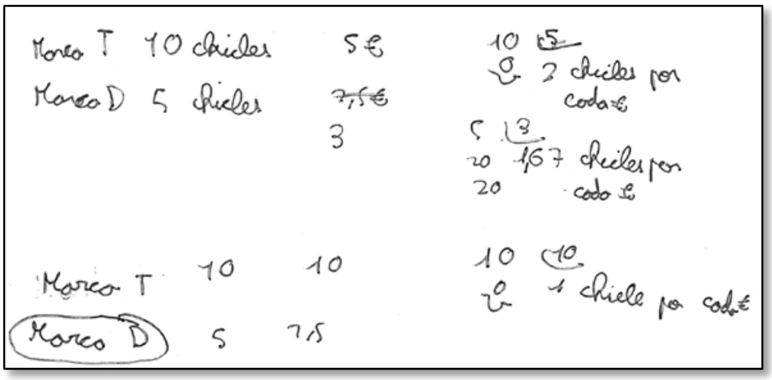


Imagen V - 76. Ejemplos propuestos por el alumno A1.1 durante la entrevista.

Tras una primera confusión interpretando los resultados obtenidos el alumno concluye qué marca es más barata en el último ejemplo que ha puesto (en este caso la T) y el profesor-investigador le propone que encuentre un tercer ejemplo, cumpliendo las condiciones del ejercicio, y en el que el resultado fuera que la marca más cara fuera la D. El alumno propone también en este caso un ejemplo correcto. Las producciones del alumno durante esta fase de la entrevista pueden verse en la Imagen V - 75.

Resaltamos la estrategia que ha seguido A1.1 para proponer el primer ejemplo y que ha hecho explícita durante la entrevista. El alumno propone una estructura numérica para la primera situación, Marca T: 10 chicles, 5 €, a partir de la que calcula la razón externa, 2 chicles/€, a pesar de ser más natural su razón inversa. En ese momento, para proponer la siguiente situación considera en la magnitud “cantidad de chicles” la unidad compuesta por 2 chicles (realiza un razonamiento por unitización), y plantea un paquete formado por $2+2+\frac{1}{2}\cdot 2=5$ chicles, para el que propone como precio (deliberadamente como expresa el propio alumno) $1+1+\frac{1}{2}\cdot 1=2{,}5$ €, realizando un problema de valor perdido mediante una estrategia de construcción progresiva.

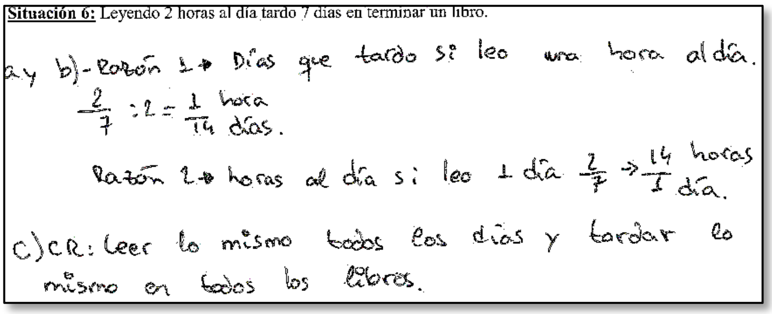
FASE 5 [12:20 – 19:51]: El alumno A1.1 utilizó durante la propuesta una amplia variedad de métodos diferentes en la resolución de las tareas. Esta variedad se observa también en los problemas específicos de valor perdido. En esta fase de la entrevista se le presentan al alumno dos de sus resoluciones para problemas de valor perdido en las que emplea estrategias diferentes. Concretamente, en la situación introductoria F6.1 el alumno había utilizado el método de factor de cambio, mientras que en el problema TC6.3 el alumno había utilizado el cálculo de la razón externa que resuelve el problema por multiplicación (aunque su inversa tenía una interpretación más sencilla en términos de velocidad). Durante la entrevista se le solicitan explicaciones al alumno, pero este no aclara el motivo de su elección de técnicas diferentes en cada ejercicio. El profesor-investigador le solicita entonces al alumno que resuelva cada uno de los problemas utilizando la técnica que ha empleado en el otro. El alumno no es capaz de hacer ninguno de los dos problemas cambiando su técnica de resolución. Es muy probable que la estructura numérica y los sistemas de representación (en F6.1 se presentaban los datos en una tabla) influyan de forma determinante en este alumno para la elección de una u otra técnica de resolución.

La entrevista a A1.1 ejemplifica el potencial de los problemas de comparación cualitativa para trabajar el razonamiento proporcional pudiendo convertirse en tareas ricas y generadoras de actividades de elaboración de enunciados que se ajusten al patrón inicial, pero produzcan diferentes resultados finales. Además, pone de manifiesto que dentro de las respuestas sintéticas "no se puede hacer porque faltan datos" pueden encontrarse respuestas que esconden una verdadera comprensión del fenómeno. En este mismo sentido el alumno A1.1 muestra una buena comprensión en algunas de sus producciones que el equipo investigador clasificó como incorrectas e inacabadas porque no respondía de forma explícita a la pregunta planteada. El alumno A1.1 desarrolló diferentes estrategias en la resolución de problemas a lo largo de la propuesta basadas en el factor de cambio y la construcción progresiva. A lo largo de la propuesta, el alumno abandona paulatinamente estas técnicas en favor de las estrategias por razón externa. De hecho, salvo en el problema PE.8, en el que emplea una fórmula para el cálculo del porcentaje, es la única estrategia utilizada por el alumno en A1.1. El empleo de las estrategias que surgen de manera natural en el alumno, como la de construcción progresiva o el factor de cambio, parece estar ligado a la estructura numérica concreta de los problemas en los que las aplica, ya que el alumno no se muestra capaz de aplicar estrategias similares en problemas con una estructura numérica menos propicia.

V.3.3.3. Análisis de la entrevista a A4.1

FASE 1 [00:00 – 01:15]: La entrevista comienza con dos preguntas descontextualizadas en las que se solicita que el alumno explique con sus propias palabras el significado de razón y de condición de regularidad y que, a ser posible, los ejemplifique. El alumno demuestra soltura expresando verbalmente el significado de estos conceptos y es capaz de proponer situaciones de proporcionalidad directa y de concretar el significado de estos conceptos en la situación.

FASE 2 [01:15 – 04:52]: Se realizan preguntas sobre el reconocimiento de situaciones de proporcionalidad directa, condiciones de regularidad exigibles y cálculo de razones. Durante las sesiones de clase el alumno había realizado comentarios especialmente interesantes sobre las situaciones de proporcionalidad inversa que se habían introducido (ver Imagen V - 77). Recordamos que en este curso no se trabajó como contenido la proporcionalidad inversa, pero sí se analizaron situaciones con este tipo de proporcionalidad como ejemplo de situaciones que no son de proporcionalidad directa.


Situación 6: Leyendo 2 horas al día tardo 7 días en terminar un libro.

a y b)- Razón 1→ Días que tardo si leo una hora al día.
$\frac{2}{7} : 2 = \frac{1 \text{ hora}}{14 \text{ días}}$.
Razón 2→ horas al día si leo 1 día $\frac{2}{7} \rightarrow \frac{14 \text{ horas}}{1 \text{ día}}$.
c) CR: Leer lo mismo todos los días y tardar lo mismo en todos los libros.

Imagen V - 77. Respuesta del alumno A4.1 al problema TC2.6 (Ciclo II-1).

El alumno había interpretado como razón la constante de proporcionalidad inversa calculándola de forma correcta e interpretándola, aparentemente, de dos formas diferentes. Al alumno se le solicitan aclaraciones al respecto y además se le propone que resuelva un problema de valor perdido de proporcionalidad inversa y generalizar argumentaciones a otras situaciones de proporcionalidad inversa. El alumno demuestra una profunda comprensión de este tipo de situaciones. Se transcribe a continuación el contenido de esta parte de la entrevista:

P-I: Explícame lo que has hecho.
A4.1: Averigüé que, por ejemplo, si en vez de leer dos horas leemos una, cuántos días tardamos. Sería, pues, multiplicar 7 por 2. Y luego la otra razón, las horas que tenemos que leer en un día si…, si…, si solo…, si solamente leemos un día, sería 14 horas en un día.
P-I: Vale, y entonces, ¿son directamente proporcionales las magnitudes que aparecen?
A4.1: No, porque hay que dividir.
P-I: Vale. Venga, te voy a proponer un problema con esto. ¿Vale? Entonces, imagínate, en esta misma situación te voy a pedir que calcules cuántas horas al día habría que leer para acabar el libro en 4 días.
A4.1: Pues…, yo dividiría 14 horas que es lo que lees en total entre 4 días.
P-I: Vale.
A4.1: (El alumno realiza cuentas en el papel) Eh…, 3 con 5, 3 horas y media.
P-I: Vale escríbeme lo que significa eso.
A4.1: Bueno 3 horas, bueno 3 con 5 horas… (el alumno escribe en el papel).
P-I: Vale, dime lo que has puesto.
A4.1: Pues, 14 entre 4, que da 3 con 5 horas al día, para acabar el libro en 4 días.

P-I: Perfecto, muy bien. Entonces, vamos a mirar, esto que me pusiste... Léelo, léelo en alto.

A4.1: Para transportar la mercancía al aeropuerto se han necesitado 7 camiones y cada uno ha realizado 4 viajes

P-I: Vale, me pusiste que no eran directamente proporcionales, ¿por qué no son directamente proporcionales?

A4.1: Porque ya está repartido.

P-I: ¿El qué está repartido?

A4.1: Eh…, la…, pues los viajes entre los camiones.

P-I: Esos 4 viajes, ¿qué son?

A4.1: Los 4 viajes que, 4 viajes que realiza cada uno de los camiones

P-I: Vale, perfecto. Entonces, ¿se parece en algo esta de aquí a esta de aquí? (el profesor-investigador señala las dos situaciones de proporcionalidad inversa)

A4.1: Pues…, sí, porque en ésta también está repartido. Eh…, y aquí es 4 viajes cada uno de los 7 camiones y aquí es 2 horas cada uno de los 7 días.

P-I: Muy bien. Eh… y ¿qué diferencias encuentras entre éstas y las que sí son de proporcionalidad directa?

A4.1: Pues que…, aquí te pone que… eh… 7 camiones CADA uno de los 4 viajes y en los otros te pone por ejemplo que se han hecho 15 viajes y hay 3 camiones.

P-I: Vale…

A4.1: No te ponen CADA, no está repartido ya.

Se comprueba que el alumno es capaz de interpretar la constante de proporcionalidad inversa como la cantidad de una magnitud que se corresponde con una unidad de su inversa. Esta analogía con el concepto de razón como tanto por uno es la que provocó que el alumno pusiera la etiqueta de razón a la constante de proporcionalidad inversa. Los argumentos que emplea para obtener e interpretar la constante de proporcionalidad de las situaciones inversas son especialmente interesantes.

Para dotar de significado al producto de magnitudes $M_1 \cdot M_2$, el alumno interpreta M_1 como una magnitud intensiva que expresa la cantidad de magnitud por cada unidad de la otra, por lo que repitiendo esa cantidad de M_1 el número de veces que marca la cantidad de M_2, se obtiene la "cantidad total de M_1" interpretando en este caso la magnitud como extensiva. Además, realiza dicho argumento indistintamente, en las situaciones planteadas, con una u otra magnitud.

FASE 3 [04:52 – 05:50]: Se solicitan al alumno aclaraciones sobre la o las condiciones de regularidad que deberían exigirse en una situación de comparación cuantitativa. El alumno explica que deberían exigirse dos condiciones de regularidad, una por cada situación para que pudiera tener sentido calcular las razones y comparar, posteriormente, el valor de estas razones.

FASE 4 [05:50 – 11:30]: El alumno aclara por qué en el problema de comparación cualitativa TC8.4 ha señalado la respuesta "*No puedo saber qué chicles son más caros*". Explica que la respuesta podría ser una u otra dependiendo de los datos concretos. El entrevistador le solicita que "ponga datos" al problema de forma que la respuesta sea una u otra marca de chicles. El alumno propone dos estructuras numéricas que cumplen las comparaciones del enunciado y en el que las respuestas son diferentes. En una resulta más económica una marca de chicles y en otra la contraria. El alumno solicitó poder escribir para generar estos ejemplos, su producción puede verse en la Imagen V - 78.

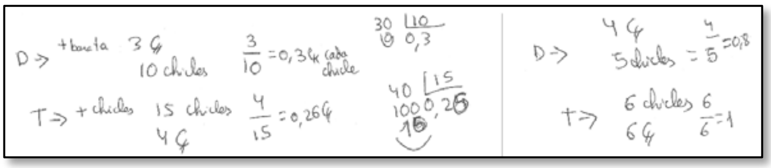


Imagen V - 78. Ejemplos propuestos por el alumno A4.1 durante la entrevista

FASE 5 [11:30 – 15:04]: Igual que ocurría con el alumno A1.1, el alumno A4.1 había utilizado dos métodos diferentes de resolución en los problemas de valor perdido. Concretamente, en el problema F7.1.4 (con razones internas enteras y fácilmente calculables) el alumno había utilizado el método de factor de cambio, mientras que en el problema TC6.3 había utilizado el cálculo de la razón externa que resuelve el problema mediante multiplicación (pese a que ésta no era entera y la interpretación de la razón inversa era más sencilla). Estas producciones pueden verse en la Imagen V - 79.

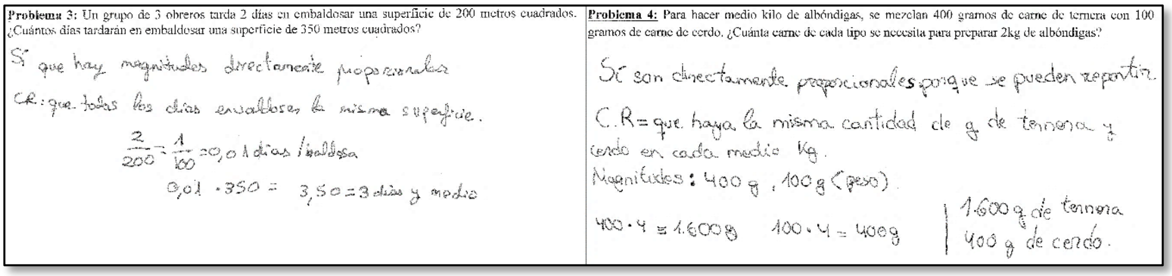


Imagen V - 79. Producciones para TC6.3 (izquierda) y F7.1.4 (derecha) del alumno A4.1.

El profesor-investigador le solicita que explique lo que ha hecho en ambos problemas y tras ello le invita a resolver cada uno de ellos por el método que había utilizado para resolver el otro. El alumno no encuentra dificultad en realizar F7.1.4 calculando razones externas. Sin embargo, alega que la estructura numérica de TC6.3 le resulta complicada para aplicar el método de factor de cambio en este problema. Se presenta la transcripción de la entrevista en este punto. Después de que el alumno hubiera realizado el problema de valor perdido F7.1.4 mediante cálculo de la razón externa que resuelve por multiplicación, el profesor-investigador le solicita que intente resolver el problema TC6.3 por factor de cambio.

P-I: Muy bien, y ahora te lo pregunto al revés, este método que has usado aquí (señalando su producción inicial por factor de cambio para F7.1.4), ¿podrías utilizarlo en este problema? (señalando TC6.3).
A4.1: Sí, pero… es más complicado porque se ve peor, es que en este se veía muy claro que 2 kilos son 4 medios kilos.
P-I: Y entonces, aunque se vea peor, ¿cómo sería en este problema? (por TC6.3).
A4.1: Pues… (suena el timbre de final de clase). 350 entre 200 y lo que me da por… por 2.
P-I: Vale, entonces, ¿por qué aquí eliges este método y por qué aquí eliges este método? (señalando a TC6.3 y F7.1.4 respectivamente).

A4.1: Pues…, en este elegí este método porque se veía muy claro… que… 2 kilos son 4 medios kilos y entonces como se veía tan claro pues me resultaba más fácil multiplicar por 4. Y en este como no se veía tan claro pues lo hice averiguando la razón.

Los razonamientos utilizados por el alumno A4.1 para las situaciones de proporcionalidad inversa muestran una posible vía de acercamiento a dichas situaciones. A saber, considerar una de las magnitudes involucradas como intensiva argumentando que es la cantidad que le corresponde a cada unidad de la otra magnitud. De esta manera, podría abordarse la interpretación del producto de magnitudes para construir la constante de proporcionalidad o para detectar el tipo de relación proporcional y diferenciarla de la relación simple directa. Al igual que A1.1, A4.1, muestra una comprensión completa del fenómeno involucrado en las situaciones de comparación cualitativa en las que no puede determinarse la respuesta, y es capaz de establecer enunciados numéricos concretos que se ajustan a la situación inicial y que dan respuestas finales diferentes. Además, A4.1 explicita que su elección sobre una estrategia u otra en la resolución de problemas de valor perdido está condicionada por la estructura numérica. El alumno se decanta por la estrategia de razón externa (funcional) de forma general, pero en casos en los que la estructura numérica es sencilla, aplica una estrategia escalar si esta le resulta más económica. Parece que A4.1 se decanta por las estrategias escalares cuando las razones internas son enteras o puede hacer una descomposición escalar por múltiplos enteros y mitades (construcción progresiva).

V.3.4. Observador externo

A continuación, presentamos los resultados obtenidos para este ciclo de investigación-acción en 1º de ESO recogidos en el protocolo que cumplimentó el observador externo para cada una de las sesiones de clase tras visionar las grabaciones.

V.3.4.1. Tratamiento de los contenidos y metodología

En la Tabla V - 67 se recogen las respuestas del observador externo para este primer bloque durante toda la propuesta. En la misma tabla se recoge la explicación del significado del código asignado a cada categoría y que ya se explicitó en el Capítulo III (ver sección III.3.7.4. Grabación de las sesiones y observadores externos).

El observador externo valora como completamente adecuados la mayor parte los elementos curriculares planteados en la propuesta y la viabilidad de su tratamiento. Se observa que la valoración es algo menor en la sesión 8 donde se introduce la proporcionalidad compuesta y en la sesión 9 donde se introduce el concepto de porcentaje.

	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.2	1.3
Sesión 1	5	5	5	5	SÍ
Sesión 2	5	5	5	4	-
Sesión 3	5	5	5	5	SÍ
Sesión 4	5	5	5	5	SÍ
Sesión 5	5	5	5	5	SÍ
Sesión 6	5	5	5	5	SÍ
Sesión 7	5	5	5	5	SÍ
Sesión 8	4	4	4	5	SÍ
Sesión 9	-	-	4	4	SÍ
Sesión 10	5	5	5	4	SÍ
Sesión 11	5	5	5	5	-

1.1 Grado de adecuación de la sesión de clase al diseño teórico.
- **1.1.1** Objetivos. (1-5)
- **1.1.2** Contenidos. (1-5)
- **1.1.3** Metodología. (1-5)

1.2 Viabilidad del tratamiento de los contenidos. (1-5)
1.3 Ajuste de la sesión al tiempo previsto. (SÍ/NO)

Tabla V - 67. Respuestas del observador externo en el primer bloque de preguntas (Ciclo II-1).

Además, el observador externo realizó una serie de comentarios adicionales en los campos de respuesta abierta. Concretamente:

- Sesión 2: El observador apunta que la sesión va justa de tiempo para fomentar una reflexión en profundidad.
- Sesión 6: El observador muestra su satisfacción con el reparto de tiempos entre las diferentes tareas.
- Sesiones 7 y 9: El observador indica que, dado que el tiempo suele ser suficiente se debería dotar de mayor protagonismo a los alumnos en los procesos de corrección e institucionalización.

V.3.4.2. Actuación del profesor-investigador

En la Tabla V - 68 se recogen las respuestas del observador externo para este segundo bloque durante toda la propuesta.

Se comprueba que el observador externo valora como buenos o excelentes todos los indicadores sobre la actitud y el comportamiento del profesor-investigador (veintinueve valoraciones de 5 y cuatro valoraciones de 4, en la escala de 1 a 5). Cabe destacar que los ítems valorados con 4 coinciden con las sesiones 6, 8, 9 y 10. En las sesiones 8, 9 y 10 se realiza la introducción de la proporcionalidad compuesta y de los problemas de porcentajes, y en estas sesiones también la puntuación otorgada por el observador externo al grado de adecuación de las sesiones al diseño teórico y la viabilidad del tratamiento de los contenidos era algo menor que en el resto de la propuesta.

Los ítems sobre participación en el proceso docente son valorados todos de forma positiva y la calidad y claridad expositiva del profesor-investigador con la máxima puntuación. Así mismo, el observador externo valora como adecuados los tiempos de intervención del profesor-investigador a lo largo de todas las sesiones.

	2.1.1	2.1.2	2.1.3	2.2.1	2.2.2	2.2.3	2.2.4	2.3.1	2.3.2	2.4
Sesión 1	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 2	5	5	5	-	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 3	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 4	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 5	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 6	5	4	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 7	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 8	5	4	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 9	5	4	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 10	5	4	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 11	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad

2.1 Actitud y comportamiento. (1-5)
2.1.1 Actitud del profesor.
2.1.2 Interés por el aprendizaje de los alumnos.
2.1.3 Atención a las necesidades de los alumnos.
2.2 Participación en el proceso docente.
2.2.1 Fomenta participación. (SÍ/NO)
2.2.2 Reconoce avances y progresos. (SÍ/NO)
2.2.3 Identifica dificultades. (SÍ/NO)
2.2.4 Promueve la reflexión. (SÍ/NO)
2.3 Calidad y claridad expositiva en las intervenciones.
2.3.1 Calidad expositiva. (1-5)
2.3.2 Claridad expositiva. (1-5)
2.4 Tiempo intervención. (Escaso/Adecuado/Excesivo)

Tabla V - 68. Respuestas del observador externo en el segundo bloque de preguntas (Ciclo II-1).

Además, el observador externo realizó otras consideraciones en los campos de respuesta abierta que recogemos a continuación:

- Sesión 1: El observador indica que las intervenciones son relativamente largas pero adecuadas al ser formuladas como diálogo.
- Sesión 2, 3 y 4: El observador solicita que las demandas de intervención a los alumnos se personalicen y no sean solo generales y planteadas al grupo-clase. También insiste en que se aumenten dichas intervenciones.
- Sesión 6: Al observador le habría parecido conveniente que el profesor-investigador hubiera explicado a todo el grupo-clase por qué no se enseña la regla de tres en la propuesta. Dicha intervención se realizó al equipo A4 a demanda de este.

V.3.4.3. Actuación de los alumnos

En laTabla V - 69 se recogen las respuestas para las once sesiones de la propuesta dadas por el observador externo a los indicadores centrados en el alumno.

En general, la observación pone de manifiesto que los alumnos trabajan y realizan las tareas encomendadas, atienden a las explicaciones y participan para aclarar dudas en mayor medida que para ampliar contenidos. Así mismo, la actitud general es positiva. Entre las sesiones 1 y 7, el observador externo constata la asimilación y comprensión de los contenidos, también lo hace en la sesión 11 de repaso. Entre las sesiones 8 y 10 el observador externo no tiene información suficiente para constatar si los alumnos han comprendido o no los contenidos abordados. Además, se pone de manifiesto una peor actitud y mayor pasividad durante estas sesiones.

	3.1	3.2	3.3.1	3.3.2	3.3.3	3.4
Sesión 1	Realizan tareas. Intervienen para responder o preguntar.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 2	Pasividad y silencio en las explicaciones. Realizan tareas.		SÍ	-	-	+
Sesión 3	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	
Sesión 4	Silencio durante las explicaciones. Realizan tareas.		SÍ	SÍ	SÍ	
Sesión 5	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 6	Realizan tareas.	C	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 7	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 8	Pasividad. Realizan tareas.	D	-	-	-	
Sesión 9	Pasividad y silencio (principio). Realizan tareas.	D/C	-	-	-	+/-
Sesión 10	Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+/-
Sesión 11	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+

3.1 Tipo de participación.
3.2 Tipo de preguntas de los alumnos.
D: aclarar dudas
C: ampliar contenidos.
3.3 Atención y asimilación. (SÍ/NO)
3.3.1 Atienden a las intervenciones.
3.3.2 Comprenden las intervenciones.
3.3.3 Comprenden los contenidos.
3.4 Actitud: Positiva (+), Negativa (-)
Neutra (+/-)

Tabla V - 69. Respuestas del observador externo en el tercer bloque de preguntas (Ciclo II-1).

Otras consideraciones sobre la actuación de los alumnos que realizó el observador externo en los campos de respuesta abierta fueron las siguientes:

- Sesión 1: El observador indica que presumiblemente lo entienden bien ya que no protestan demasiado y se ven alumnos con un interés medio-alto.
- Sesión 3: Se observan más protestas y más dudas que en las sesiones anteriores.
- Sesión 6: El observador indica que alguno de los equipos empieza a mostrar desinterés.
- Sesión 5 y 7: El observador verifica que los alumnos están cómodos con esta metodología y están dispuestos a participar.
- Sesión 9: Se observan dudas y errores al principio de la sesión.
- Sesión 10: El observador destaca que los alumnos empiezan a hacer los ejercicios del modo “tradicional”.

V.3.4.4. Interacciones profesor-alumno

En la Tabla V - 70 se recogen las respuestas dadas por el observador externo a los indicadores para analizar las interacciones entre el profesor-investigador y los alumnos.

El observador externo cuantifica como constantes las interacciones en todas las sesiones, menos en la 7, la 8 y la 11 que las cuantifica como frecuentes. Dichas interacciones son mayoritariamente con el grupo clase y con las parejas de alumnos y, en menor medida con alumnos individuales, y se realizan tanto a instancia del profesor-investigador como de alguno de los alumnos. En las sesiones en las que el observador externo registra si la comunicación es principalmente unidireccional o bidireccional, este se decanta por calificar como “diálogo fluido” estos procesos de comunicación.

	4.1	4.2.1	4.2.2	4.2.3
Sesión 1	Cte.	GC / E / A	P/A	D
Sesión 2	Cte.	GC / E	A	-
Sesión 3	Cte.	GC / E / A	P/A	D
Sesión 4	Cte.	GC / E		-
Sesión 5	Cte.	GC / E		-
Sesión 6	Cte.	E	A	D
Sesión 7	Fre.	E	P	U/D
Sesión 8	Fre.	GC / E		-
Sesión 9	Cte.	GC / E		-
Sesión 10	Cte.	GC / E	P/A	-
Sesión 11	Fre.	GC / E	A	D

4.1 Frecuencia de las interacciones:
Nunca (Nun.)
A menudo (Fre.)
Constantemente (Cte.)
4.2 Tipo de interacciones
4.2.1 Dirigidas al grupo clase (GC), a los equipos de alumnos (E) o alumnos particulares (A).
4.2.2 Se producen a instancia del profesor (P) o de algún alumno (A).
4.2.3 La comunicación es unidireccional (U) o se establece un diálogo fluido (D).

Tabla V - 70. Respuestas del observador externo en el cuarto bloque de preguntas (Ciclo II-1).

Otras consideraciones sobre las interacciones entre el profesor-investigador y los alumnos que realizó el observador externo en los campos de respuesta abierta fueron las siguientes:

- Sesión 1 y 4: El observador pone la atención en que las intervenciones que realiza el profesor para solicitar a los alumnos que participen se hacen de forma general sin personalizar en ningún alumno y opina que sería mejor dirigir las preguntas a alumnos concretos.
- Sesión 3 y 5: El observador considera las interacciones como muy adecuadas, concisas y precisas. Además, indica que en las intervenciones se promueve la reflexión y la argumentación de las respuestas.
- Sesión 9: Se observa que la falta de trabajo en la tarea para casa anterior hace que los alumnos estén más perdidos, menos implicados y más despistados.
- Sesión 10: Se considera que esta sesión ha sido “más intensa” que las anteriores. Las numerosas dudas han provocado un intenso debate en las parejas que forman los equipos.

V.3.4.5. Otras incidencias y comentarios generales sobre la sesión

Al final del protocolo de observación en cada sesión, se incluía un campo abierto para que el observador externo anotara cuestiones o reflexiones al margen de los cuatro bloques anteriores. Estas son los comentarios registrados en este ciclo:

- Sesión 1: El observador reflexiona sobre si los ordinales miden. Reflexiona también, sobre si las fichas de trabajo diario deberían puntuar en la calificación del alumno en la unidad didáctica o solo se debe puntuar el examen.
- Sesión 2: Se pone el énfasis en que ha habido más dudas que el día anterior y en que se ha realizado un ejercicio no programado.
- Sesión 5: El observador resalta que la secuencia hasta ese momento es muy adecuada.
- Sesión 8: Se han observado muchas más llamadas de atención a los alumnos por el comportamiento durante la sesión.
- Sesión 10: El observador considera que los alumnos están implicados en el trabajo en parejas.

- Sesión 11: Se apunta, sin indicar los motivos que llevan a realizar esta consideración, que la intervención con el grupo-clase puede ser mejor aprovechada.

V.4. Fase de reflexión

Como se comentó en el Capítulo III, la fase de reflexión no puede identificarse con un punto temporal concreto ya que tiene un carácter continuo. El profesor-investigador reflexiona sobre la práctica durante la actuación y comparte algunas de estas reflexiones con el equipo investigador para tomar decisiones. Así mismo, el proceso de observación, análisis y síntesis de los datos obtenidos implica reflexionar sobre los resultados de la acción. En esta sección presentamos la recapitulación de este proceso continuo de reflexión, que incluye las reflexiones personales del profesor-investigador, y las conclusiones colectivas obtenidas tras los debates con el resto de los miembros del equipo investigador.

Estructuramos esta sección atendiendo a las relaciones del triángulo didáctico, comenzando con las reflexiones sobre el diseño de la propuesta (relación entre profesor-investigador y el contenido) y que suponen conclusiones parciales en torno al objetivo de investigación II.1. Posteriormente reflexionamos sobre la relación entre los alumnos y el contenido, es decir, sobre la comprensión de los alumnos que se relaciona con el objetivo de investigación II.2. La tercera relación sobre la que reflexionaremos es la que se establece entre el profesor-investigador y los alumnos. Para ello, separaremos los roles del profesor-investigador y analizaremos las relaciones entre el profesor y los alumnos, reflexionando sobre la instrucción (metodología de aula), y reflexionaremos sobre las relaciones investigador e individuos del grupo en el que se actúa (metodología de investigación). Por último, añadiremos algunas consideraciones y reflexiones de carácter general.

V.4.1. Sobre el diseño de la propuesta

La información analizada en la sección anterior parece indicar que el diseño es muy satisfactorio desde la sesión 1 hasta la sesión 7. Tanto el profesor-investigador, como el observador externo han valorado de esta forma esta fase de la propuesta que trabaja los focos de contenidos prioritarios 1 y 2: detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad y problemas de proporcionalidad simple directa. El profesor-investigador está especialmente satisfecho por el funcionamiento de las situaciones introductorias en esta parte de la propuesta que consiguen hacer emerger los elementos necesarios para realizar debates ricos que permiten institucionalizar los contenidos planificados.

Sin embargo, parece necesario mejorar el diseño de estas primeras sesiones en algunos aspectos:

- La actividad F1.2 ha parecido confusa a algunos alumnos. Aunque la idea del diseño se mantenga, cabría replantearse cambiar la imagen real de la factura telefónica por una factura realista pero simplificada, elaborada explícitamente para dicha actividad.
- Los cambios que se introdujeron de forma paralela a la acción referentes a las fichas de trabajo de la sesión 2 y 3 deben quedar reflejados en un nuevo diseño de estas sesiones. El nuevo diseño debería incluir una nueva ficha de trabajo breve posterior a la institucionalización de los conceptos de razón y condición de regularidad. Además, sería conveniente plantear la sesión 3 como un taller de problemas que permita afianzar los nuevos conceptos introducidos en la sesión 2.
- Se ha confirmado, tanto por el diario de clases, como por el número de respuestas en blanco de los alumnos en los problemas finales de algunas fichas de trabajo, y también por el observador externo que algunas fichas de trabajo contienen un número excesivo de problemas. Conviene hacer una revisión de la cantidad de problemas que se presentan a los alumnos. Si bien, esta revisión debe contemplar la conveniencia de que las fichas contengan suficientes ejercicios para que los alumnos o equipos que presentan un mejor desempeño puedan aprovechar el tiempo de las sesiones.
- Los contextos en los que aparecen magnitudes relacionadas de forma inversamente proporcional aparecen en estas primeras sesiones en las tareas para casa. Parece necesario introducir alguno de estos contextos en las tareas de clase, ya que permitiría que los alumnos pudieran debatir entre ellos sobre estas situaciones, y se podría obtener un mejor aprovechamiento tras la puesta en común.
- Las estructuras numéricas de algunos de los problemas causan dificultades excesivas para la realización de operaciones aritméticas sin calculadora. Aunque sería conveniente que los alumnos trabajasen de forma más cómoda con la representación fraccionaria de la razón, y durante la propuesta se fomenta, y se ha detectado mejoría en este aspecto, este no es uno de los objetivos prioritarios de la propuesta. Por tanto, habría que hacer una revisión general de las estructuras numéricas para que el tiempo de los alumnos se invierta en establecer estrategias correctas de resolución y argumentarlas adecuadamente, y no en aplicar algoritmos de cálculo.
- El primer problema de la propuesta, en el que es necesario desenvolverse de forma específica con los esquemas de razonamiento parte-parte-todo en una situación de mezcla, F7.1.4, tiene una estructura numérica que favorece excesivamente la aparición de estrategias escalares. Dada la importancia de los esquemas parte-pare-todo para el trabajo en contextos de porcentaje, sería conveniente plantear una estructura numérica más neutra con la que podamos evaluar las dificultades de los alumnos en el planteamiento de razones externas en este tipo de situaciones.

Durante la sesión 8 se trabajó el foco de contenido 4 sobre resolución de problemas de proporcionalidad compuesta. El diseño planificado de tres fichas de trabajo se mostró excesivo. La dinámica de clase que provocó este continuo reparto y recogida de fichas de trabajo pudo influir en el peor comportamiento y mayor desinterés recogido en el diario de clase. Esta observación fue constatada con las valoraciones algo inferiores del observador externo en esta sesión. Por tanto, es necesario reconstruir las fichas de trabajo para esta sesión concreta, para diferenciar una primera parte con la situación introductoria y la institucionalización y una segunda parte estructurada como taller de problemas. Además, dadas las dificultades en la comprensión del contexto de la situación introductoria F8.1.1, y el mejor desempeño e interpretación en otros de los problemas planteados en la sesión, se valora conveniente reordenar los problemas de esta sesión y presentar como situación introductoria en posteriores implementaciones el problema F8.2.1. La estructura numérica de los problemas no genera dificultades para el trabajo sin calculadora. Sin embargo, cabría replantearse la estructura numérica de TC8.9 ya que provoca una complejidad operativa que distrae de los objetivos didácticos (la constante de proporcionalidad "precio de la habitación de un hotel por persona y noche" tiene expresión decimal periódica en una de las situaciones).

El diseño de las sesiones 9 y 10, dedicadas a porcentajes, es el que peores valoraciones obtiene tanto en los comentarios (recogidos en el diario de clase por el profesor-investigador y en el protocolo cumplimentado por el observador externo) y, posteriormente, en los resultados asociados a este foco de contenido en la prueba escrita. A pesar del tratamiento diferenciado y específico, la propuesta no consigue conectar de forma satisfactoria el concepto de porcentaje con el de razón y, por tanto, la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje con la resolución de problemas de valor perdido en otro tipo de situaciones de proporcionalidad simple directa. Los primeros problemas en contextos de porcentajes que se plantean en la propuesta relacionan varios aspectos del concepto de forma simultánea lo que provoca muchas dificultades en los alumnos. Estas dificultades provocan inseguridad e incluso ansiedad en los alumnos ya que, además, se tratan de sesiones cercanas a la prueba escrita. Esta actitud provocó un peor comportamiento y la aparición de técnicas algorítmicas que pueden deberse a influencias externas o a conocimientos previos. El equipo de investigación y, en concreto, el profesor-investigador, estiman conveniente realizar cambios en el diseño en tres sentidos:

- Aumentar el número de sesiones dedicadas a los problemas en contextos de porcentaje para poder trabajar los mismos contenidos, pero de forma más pausada.
- Estructurar las primeras situaciones de porcentaje a las que se enfrentan los alumnos para trabajar específicamente la relación del porcentaje con el concepto de razón e interpretar dicha razón como una cantidad de magnitud intensiva.
- Reducir, en la medida de lo posible, la dificultad de los primeros problemas en contextos de porcentajes a los que se enfrentan los alumnos.

Por otro lado, el profesor-investigador estima conveniente mejorar la situación introductoria F10.1 como aproximación a los problemas de Tipo III (cálculo del total) ya que se han constatado dificultades en la comprensión del enunciado propuesto a los alumnos. Como en otros focos, debe replantearse la estructura numérica de algunos problemas para minimizar el tiempo que los alumnos invierten en realizar los cálculos aritméticos. Además, en el problema TC10.1 sería conveniente separar los precios de la unidad para que no se identifique la diferencia aditiva con la razón.

En la sesión de repaso sería conveniente reforzar el concepto de porcentaje ya que solo uno de los problemas lo trabaja y, durante la propuesta, se constató que la mayor parte de las dudas que planteaban los alumnos durante esta sesión se referían a este foco de contenido.

El diseño de la prueba escrita parece pertinente y el grupo investigador decide mantenerlo e incorporar, en la medida de lo posible, algunos de los problemas en la prueba escrita de 2º de ESO para poder analizar la evolución de los alumnos entre 1º y 2º de ESO. Sin embargo, se ha detectado una errata en la redacción de las opciones para el problema PE.2 que debería ser corregida y cabe replantearse el contexto del problema de comparación cuantitativa PE.3, ya que un buen número de alumnos manifestó no conocer el significado del término 'espeso'.

V.4.2. Sobre la comprensión de los alumnos

Estructuramos las reflexiones sobre la comprensión de los alumnos alrededor de los focos de contenido trabajados durante la experimentación en 1º de ESO.

V.4.2.1. Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad

Como se observa en el análisis de las producciones escritas, la propuesta consigue que los alumnos identifiquen mayoritariamente la existencia de dos razones externas (inversas la una respecto de la otra) en las situaciones de proporcionalidad simple directa. Además, aunque con un mayor número de errores, los alumnos son capaces de interpretar dichas razones externas como tanto por uno. Este hecho permite a los alumnos del grupo experimental detectar relaciones de proporcionalidad directa bajo la suposición de condiciones de regularidad con una muy buena tasa de éxito (del 80 % en la prueba escrita y significativamente mayor que la de los alumnos del grupo de control). Además, parece ser una pieza fundamental para abordar con éxito y poca instrucción el resto de los problemas de la propuesta contenidos en los demás focos de interés.

Los alumnos también han mostrado un buen desempeño detectando números que no representan una cantidad de magnitud y con los que, por tanto, no puede establecerse una razón; evaluando previamente la covariación entre las magnitudes como condición necesaria para que puedan establecerse las razones.

Por otro lado, el trabajo con la condición de regularidad debe afinarse y mejorarse en futuras implementaciones en varios sentidos:

- Se detecta que algunos alumnos entienden la condición de regularidad en términos de incrementos (por cada unidad que aumenta una cantidad aumenta el mismo número de unidades la otra magnitud). Este hecho puede provocar dificultades a la hora de analizar situaciones afines y puede estar detrás del peor desempeño de los alumnos en la prueba escrita en PE.1.2, respecto a PE.1.1 y PE.1.4. Sin embargo, cabe destacar que el análisis en términos de condición de regularidad provoca un desempeño significativamente mejor en el grupo experimental en dicha tarea (PE.1.2) que el uso de argumentos cualitativos (a más, más) detectado en el grupo de control.
- El apego de los alumnos del grupo experimental al análisis en términos de condiciones de regularidad provoca que se detecten como directamente proporcionales las situaciones inversamente proporcionales. El análisis de las producciones escritas y las indagaciones

hechas en las entrevistas semiestructuradas ponen de manifiesto que al menos una parte de los alumnos que etiquetan como directamente proporcional una relación inversamente proporcional, sí comprenden el fenómeno inverso, y están detectando las condiciones de regularidad que se establecen entre la magnitud producto constante y cada una de las magnitudes involucradas en la situación. Así, por un lado, es necesario mejorar en la detección de las magnitudes intensivas que aparecen en situaciones inversas para que los alumnos no consideren solo la magnitud "numerador" y, por otro, es necesario insistir no solo en la conveniencia de calcular o no razones entre magnitudes (y su relación con el cociente), sino de calcular productos de magnitudes que aparecen en un contexto realista e interpretar dichos productos. Para este trabajo, es clarificador el análisis del fenómeno de la proporcionalidad inversa que hace el alumno A4.1, tratando como intensivas las magnitudes que intervienen en un producto, aunque estas sean extensivas.

Por último, se detecta una mayor dificultad de los alumnos cuando se les pide calcular o identificar una razón concreta de entre las que se pueden establecer en una situación concreta por lo que habría que prestar una mayor atención a este aspecto en los siguientes ciclos.

V.4.2.2. Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionad simple directa

Dentro de las situaciones de proporcionalidad simple directa, diferenciaremos las reflexiones en torno a la comprensión de los contenidos según la clasificación de los problemas en problemas de comparación cuantitativa, comparación cualitativa y valor perdido.

Problemas de comparación cuantitativa.

Los problemas de comparación cuantitativa, en general, tienen unas altas tasas de acierto desde el comienzo de la propuesta. Una mínima institucionalización permite a los alumnos conectar los conocimientos adquiridos sobre razón y condición de regularidad en las sesiones anteriores con la resolución de este tipo de problemas. De hecho, durante los talleres de problemas se afianza tanto el hecho de la existencia de dos razones inversas en una situación de proporcionalidad como su interpretación. Además, se conecta la interpretación de las razones como tanto por uno con términos de uso cotidiano como el sabor, el espesor, el rendimiento, la velocidad, el coste unitario, cambio de divisas, … a través de situaciones realistas en las que los alumnos deben decantarse por la "opción más ventajosa". Los debates generados a raíz de las producciones de los alumnos son muy interesantes y el profesor-investigador los valora como muy enriquecedores.

Precisamente, la baja experiencia o relación de los alumnos con términos asociados a magnitudes intensivas bien compactadas parece estar detrás de las dificultades mostradas en algunos ejercicios. Este parece ser el caso del problema PE.3 de la prueba escrita en el que los alumnos solicitaron aclaraciones sobre el significado del término 'espesor'. Por tanto, es interesante seguir trabajando con este tipo de problemas tanto en proporcionalidad simple directa, como en proporcionalidad inversa y compuesta, para incrementar el conocimiento de los alumnos en este tipo de situaciones modelizables mediante conceptos asociados a la proporcionalidad.

Las técnicas funcionales, a partir de la razón externa, parecen estar relacionadas con una mayor tasa de éxito en estos problemas. Solo en estructuras numéricas muy concretas aparecen otras estrategias. Además, es muy minoritaria la presencia de argumentos cualitativos erróneos, especialmente de aquellos que aluden a la mayor cantidad de solo una de las magnitudes para contestar el problema. Cabe destacar que los alumnos del grupo de control, con un aprendizaje de la proporcionalidad basado en técnicas algorítmicas, no son capaces de abordarla con éxito de manera generalizada a pesar de la simplicidad de la estructura numérica que permitía enfrentar el problema desde diferentes enfoques.

Las entrevistas semiestructuradas han puesto de manifiesto que, aunque se detecta una menor preocupación por la descripción de las condiciones de regularidad que deben suponerse, en general los alumnos tienen una buena comprensión del fenómeno y distinguen la existencia de dos constantes de proporcionalidad diferenciadas, una asociada a cada una de las situaciones.

Problemas de comparación cualitativa.

Los alumnos del grupo experimental, salvado el desconcierto inicial ante un problema sin datos numéricos, han tenido un buen desempeño en la resolución de problemas de comparación cualitativa. La tasa de éxito en la primera tarea a la que se enfrentaron los equipos del grupo experimental, $65\ \%$, se ha visto refrendada por el desempeño individual en la prueba escrita, cercano al $70\ \%$, que es significativamente superior a la tasa de acierto de los alumnos del grupo de control, inferior al $40\ \%$. Estos resultados indican que el trabajo con el concepto de razón y condición de regularidad y el trabajo con los problemas de comparación numérica ayudan a los alumnos a desenvolverse en los problemas de comparación cualitativa.

Pese a que las argumentaciones de los alumnos en estos problemas, en ocasiones, son pobres y no permiten profundizar en los razonamientos que les han llevado a producir la respuesta emitida, las entrevistas semiestructuradas han mostrado que, tras las escuetas respuestas, puede haber una buena comprensión del fenómeno que se estudia. Además, las entrevistas han ejemplificado el potencial de este tipo de problemas para trabajar el razonamiento proporcional cuando se solicita a los alumnos que generen estructuras numéricas que se adapten a la información suministrada en el problema y que generen diferentes respuestas finales al mismo.

Entre las producciones de los alumnos se ha detectado la necesidad de establecer el mismo referente en cada una de las comparaciones que se establecen y la conveniencia de establecer sistemas de representación adecuados para resumir y organizar la información suministrada por el enunciado para emitir una respuesta. Estas formas de proceder, de forma espontánea por los alumnos, pueden aprovecharse en futuras implementaciones en los debates generados para la puesta en común de las respuestas.

Problemas de valor perdido.

Respecto a otros contenidos, en los problemas de valor perdido, se ha detectado una mayor influencia de algunas variables didácticas como la estructura numérica (especialmente la aparición de razones externas o internas enteras) y el tipo de magnitudes (especialmente la aparición de magnitudes homogéneas ligadas a estructuras parte-parte-todo), tanto en la tasa de éxito como en la estrategia empleada por los estudiantes para responder al problema. Además, también se ha detectado una mayor influencia externa, lo que provoca la aparición de métodos algorítmicos basados en la regla de tres. Si bien, el empleo de estas estrategias ha sido bajo.

A pesar de estos efectos, los alumnos del grupo experimental usan de forma mayoritaria las estrategias funcionales y han tenido una tasa de éxito superior (no significativa estadísticamente) a los alumnos del grupo de control cuya instrucción se concentra en la resolución de este tipo de problemas abordados mediante regla de tres.

Aunque desciende el número de alumnos que se preocupan por analizar y justificar el tipo de relación proporcional que presentan las magnitudes en cada problema, hay indicios de que los alumnos aplican las estrategias funcionales de forma reflexiva y no automatizada. Quizá en ciclos posteriores hay que hacer un mayor énfasis en que los alumnos expliciten los argumentos empleados en la resolución.

El trabajo sin calculadora y la preferencia de los alumnos por utilizar la notación decimal del número racional frente al uso de la fracción hacen que muchos alumnos no alcancen las respuestas numéricas exactas, aun en problemas que tienen una solución entera. A pesar de este inconveniente, parece interesante confrontar dichas respuestas con los alumnos para valorar el uso de una u otra notación al establecer una razón externa. Con el paso de las sesiones, algunos alumnos muestran indicios de mejorar en la elección de notaciones adecuadas en cada problema.

El análisis de las producciones escritas ha permitido establecer cuatro categorías de errores en la implementación de una estrategia funcional que presentan un paralelismo claro con los errores encontrados en la aplicación de dicha estrategia en los problemas de comparación cuantitativa. El estudio de dichos errores pone de manifiesto la necesidad de profundizar en los significados de las operaciones relacionadas con la estructura multiplicativa, en la comprensión de las diferentes representaciones del número racional y en la interpretación de las razones externas como cantidades de magnitud intensiva, para mejorar el desempeño de los alumnos en este tipo de tareas.

V.4.2.3. Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta

El análisis de las producciones escritas confirma la percepción del profesor-investigador durante la sesión 8 sobre la comprensión de los alumnos en los problemas de proporcionalidad compuesta. Así, parece que la introducción de la proporcionalidad compuesta en 1º de ESO no supone un gran obstáculo. Los alumnos del grupo experimental relacionan los nuevos problemas de forma natural con los contenidos de la propuesta desarrollados en las sesiones previas. Además, los porcentajes de respuestas correctas son generalmente altos y similares en cada tipo de problema a los obtenidos en los problemas de tipo análogo en las situaciones de proporcionalidad simple directa. De hecho, en la prueba escrita, el problema de valor perdido tiene una tasa de éxito ligeramente superior en la situación de proporcionalidad compuesta que en la de proporcionalidad simple directa.

A pesar de la tasa de éxito, se detecta una preocupación decreciente (en comparación con los problemas de proporcionalidad simple) por argumentar las respuestas y caracterizar las relaciones proporcionales, debido quizás a la mayor complejidad operativa de este tipo de problemas. En posteriores ciclos es necesario realizar un mayor esfuerzo en este sentido ya que una adecuada caracterización de la constante de proporcionalidad del problema parece ir ligada al éxito en este tipo de tareas.

Las estrategias institucionalizadas para la resolución de problemas de proporcionalidad simple directa, basadas en la razón externa, dotan a los alumnos de mecanismos para abordar los problemas de proporcionalidad compuesta. Los alumnos del grupo experimental encuentran de forma espontánea estrategias de amalgamación y de paso a paso sin necesidad de recurrir a estrategias específicas o algorítmicas desde el principio de la propuesta. Este hecho contrasta con el bajo éxito en la tarea de la prueba escrita de los alumnos del grupo de control, cuya enseñanza para la resolución de los problemas simples se basaba en la regla de tres.

Aunque en el grupo experimental se detectan algunas estrategias basadas en fórmulas o secuencias acríticas de cálculo, estas tienen una escasa incidencia ligada a las tareas realizadas fuera del horario escolar.

La inclusión de magnitudes intensivas en la pareja de magnitudes que permite la amalgamación por producto en los problemas de tipo Directa-Directa parece favorecer dicha estrategia.

V.4.2.4. Foco 6: Interpretación del porcentajes y problemas asociados

En comparación con los contenidos relativos al resto de los focos de interés de la propuesta, los problemas en los que aparece el concepto de porcentaje resultan más complicados para los alumnos. En la prueba final se han obtenido resultados bajos en algunos de los problemas.

Dentro de los diferentes tipos, los de Tipo I y Tipo II parecen causar menos dificultades a los alumnos que los de Tipo III, es decir, aquellos en los que los alumnos deben calcular el total conocido el porcentaje y la cantidad absoluta asociada a una parte.

La aparición de estrategias basadas en una fórmula, debida a la influencia de los conocimientos previos y de las intervenciones externas, ha tenido una presencia mucho más significativa en este foco que en los anteriores. Ante las primeras dificultades conceptuales, los alumnos se refugian en los conocimientos previos o piden ayuda externa. El efecto de las variables didácticas asociadas al tipo de magnitud y la estructura parte-parte-todo también han sido mucho más acusado en los problemas relacionados con porcentajes.

Si bien el trabajo con la estructura aditiva parte-parte-todo no supone un problema para el cálculo de complementarios cuando este se pregunta de forma explícita, sí supone un obstáculo cuando los alumnos deben realizar dichos cálculos de forma intermedia para la resolución de un problema (como en PE.8.2) o cuando deben calcular una razón concreta y disponen de las cantidades absolutas asociadas a varias partes.

Aunque consideramos que no se ha alcanzado completamente el objetivo de relacionar las situaciones de porcentaje con las de proporcionalidad simple directa, caben señalar algunos avances positivos.

- Los alumnos del grupo experimental tienen unos porcentajes de éxito más homogéneos entre los diferentes tipos de problemas que los del grupo de control. Los alumnos del grupo de control tienen una mejor tasa de éxito en los problemas de Tipo I, pero tienen resultados muy pobres en los problemas de Tipo II y Tipo III. Este hecho, puede apuntar a que la propuesta favorece la comprensión del fenómeno acercando las tasas de éxito entre los diferentes tipos de problema de valor perdido que se obtienen variando la posición de la incógnita.
- La tasa de éxito de los alumnos del grupo experimental en el problema directo de Tipo I en la prueba escrita (calcular la cantidad absoluta asociada a la parte conocidos el porcentaje y el total), aunque inferior, no difiere significativamente de la obtenida para el grupo de control. Además, mientras los alumnos del grupo de control basan sus producciones exclusivamente en fórmulas de cálculo, una parte importante del grupo experimental analiza el significado de las razones establecidas a partir de un porcentaje, lo que supone un avance hacia la integración del porcentaje dentro de las relaciones de proporcionalidad simple directa.

V.4.3. Sobre la metodología y la labor del profesor-investigador

Resumimos en esta sección las reflexiones realizadas por el profesor-investigador y el equipo de investigación relativas a aspectos metodológicos. Distinguiremos para ello, aquellos aspectos relacionados con la metodología de aula o modelo de enseñanza y los aspectos relacionados con la metodología de investigación.

V.4.3.1. Reflexiones sobre la instrucción y la metodología de enseñanza

Como se desarrolló en el Capítulo III, las conclusiones sobre la interacción del triángulo didáctico entre profesor y alumnos se estructuran en torno a las categorías: gestión del trabajo en el aula, gestión del desarrollo del contenido y gestión de la construcción del conocimiento.

Gestión del trabajo en el aula.

En general, como indican las observaciones realizadas por el profesor-investigador en el diario de clase y las realizadas por el observador externo, la motivación e implicación de los alumnos en las diferentes actividades de clase es buena, así como la actitud general observada. Esta apreciación general, debe matizarse en varios aspectos:

- En uno de los subgrupos del grupo experimental la motivación, la implicación y el comportamiento de un buen número de alumnos no han sido adecuados. No obstante, esta actitud no parece achacable ni a la propuesta didáctica, ya que el profesor-investigador fue el profesor de matemáticas de referencia durante todo el curso y el comportamiento se mantuvo estable durante todo el curso, ni a la actuación general del profesor-investigador, ya que el grupo mostró problemas de comportamiento similares en todas las materias.

- La introducción de problemas sin datos numéricos y de "falsos problemas de proporcionalidad" generó algunos problemas actitudinales en la primera semana de la propuesta, especialmente en los grupos en los que el profesor-investigador era el profesor de referencia. Los alumnos mostraban desagrado por la inclusión de este tipo de actividades. Conforme avanzó la propuesta, los alumnos se acostumbraron a este tipo de problemas abiertos en los que debían centrar sus esfuerzos en analizar y reflexionar en vez de en calcular.
- Se observa que varios equipos no se adaptan completamente al trabajo cooperativo en parejas. En algunos equipos con diferencias acusadas de nivel de desempeño entre los componentes, el miembro con mayor nivel se centraba en realizar correctamente los problemas en vez de ayudar a su compañero a comprender el problema. Es necesario un mayor esfuerzo del profesor-investigador en los siguientes ciclos en mejorar el trabajo colaborativo dentro de los equipos.
- Por otro lado, se detecta un alto número de producciones plagiadas en las producciones de los alumnos en las tareas para casa. Este aspecto debe ser tenido en cuenta para las siguientes implementaciones, insistiendo en el valor del trabajo personal para la obtención de buenos resultados.

Gestión del desarrollo del contenido.

Como en la anterior categoría para el análisis de la gestión de aula, las apreciaciones tanto del profesor-investigador, como del observador externo alrededor del desarrollo del contenido son positivas. Las sesiones se desarrollan convenientemente según las estructuras presentadas en la Figura IV – 8 del Capítulo IV, con una metodología de enseñanza basada en el aprendizaje a través de la resolución de problemas.

En dicha metodología, como dijimos, tienen un papel fundamental los debates generados después de que los alumnos aborden la resolución de los problemas y previos a la institucionalización de los contenidos. Dada la importancia de estos debates y la poca experiencia previa del profesor-investigador en su gestión, destacamos algunos puntos que consideramos mejorables en los siguientes ciclos:

- Se debe hacer un esfuerzo por repartir las intervenciones de diferentes alumnos de forma equitativa. Como indica el observador externo, en algunos debates no se reparten de manera adecuada los tiempos de intervención o se centra el debate en un pequeño subgrupo de alumnos.
- Aunque en algunas sesiones se valora como muy adecuado el tiempo dedicado a los debates, en otras, el excesivo tiempo dedicado a la resolución de los problemas contenidos en las fichas de trabajo hace que este tiempo sea escaso. Se debe intentar corregir este hecho en dos sentidos: aligerando algunas fichas de trabajo excesivamente largas y dando por finalizado el tiempo de realización de las fichas de trabajo, aunque no todos los alumnos

hayan acabado. Se ha constatado que dar por finalizada una actividad de resolución de problemas (momento en el que el profesor-investigador retiraba una copia del trabajo que habían realizado los equipos) generaba ansiedad en algunos alumnos que no habían podido concluir todos los problemas. El profesor-investigador debe intervenir con los alumnos haciendo énfasis en que los ejercicios en blanco en las fichas de trabajo de aula no suponen penalizaciones en la calificación y es necesario debatir sobre los intentos de resolución para construir adecuadamente la comprensión sobre los conceptos que se trabajan.

- Los tiempos dedicados a las puestas en común de las tareas para casa deben reducirse. La alta tasa de tareas no entregadas hace que estos debates sean poco útiles para una buena parte de los alumnos. En este sentido, el profesor-investigador debería elaborar un mayor número de presentaciones para proyectar en la pizarra digital para agilizar estas puestas en común y algunos momentos de institucionalización.

Gestión de la construcción del conocimiento.

El profesor-investigador valora como muy positivo el papel de las situaciones introductorias y de los debates con los alumnos en la construcción del conocimiento. En un tiempo relativamente corto se ha conseguido implementar una secuencia de constructivismo guiado que abarca más contenidos que las secuencias tradicionales.

Esta percepción se ve refrendada por el observador externo que, como hemos dicho, indica que, en general, las interacciones del profesor-investigador con los alumnos son muy adecuadas, concisas y precisas, y que en las intervenciones se promueve la reflexión y la argumentación de las respuestas.

Como en otros aspectos comentados anteriormente, el cambio de paradigma instruccional provoca inicialmente desconcierto y malestar en algunos alumnos. Los alumnos no están acostumbrados a que se les pida resolver problemas para los que no se les ha instruido previamente. Sin embargo, se observa que este efecto negativo se diluye a lo largo de la propuesta.

Cabría plantearse la conveniencia de hacer en los siguientes ciclos intervenciones generales explicando por qué trabajamos los contenidos de la proporcionalidad desde este punto de vista y sin utilizar la regla de tres. Además, otros aspectos ya mencionados anteriormente como procurar dar un mayor protagonismo a los alumnos en la institucionalización y realizar un mayor esfuerzo en repartir las intervenciones de diferentes alumnos de forma equitativa podrían redundar en una mejora en la construcción del conocimiento.

V.4.3.2. Reflexiones sobre la metodología de investigación

El efecto de los cambios introducidos en la metodología de aula y en algunos aspectos propios de la investigación causan cierto desconcierto en las sesiones iniciales. La presencia de una cámara de video o que el profesor investigador retire la ficha de trabajo de forma previa a la puesta en común son elementos que los alumnos tardan varias sesiones en asumir.

Las grabaciones de video recogen cómo en las primeras sesiones muchos alumnos están pendientes de la cámara de video e interactúan con ella, sin embargo, tras unas cuantas sesiones se acostumbran a la presencia de dicho aparato y deja de ser un elemento distractor.

Al recoger el profesor-investigador las fichas de trabajo de forma previa a que los alumnos puedan "corregirlas" tras la puesta en común, los alumnos piensan que van a ser calificados por sus producciones en dichas fichas. Este hecho provoca hostilidad cuando el profesor-investigador quiere dar por finalizado el trabajo por equipos para dar paso al debate en aquellos equipos que no han podido concluir todos los problemas. Como comentamos anteriormente, este inconveniente debe intentar mejorarse en siguientes ciclos.

Estas disrupciones generadas por la introducción de herramientas metodológicas no solo se perciben en el comportamiento de los alumnos, sino que también afectan al del profesor-investigador. A pesar de su experiencia docente, la introducción de la cámara de video, la gestión del desarrollo del contenido para ajustarse al esquema planificado y la gestión de las fichas de trabajo de los alumnos, provocan una cierta tensión en el docente. Esta tensión también se mitiga a lo largo de las sesiones, sobre todo en lo referente al cumplimiento de la planificación, tomándose decisiones "sobre la marcha" en la actuación. Sin embargo, el profesor-investigador cree que su intervención no se ha desarrollado de forma natural y debe intentar mejorar este aspecto en los siguientes ciclos.

V.4.4. Sobre el funcionamiento general de la propuesta

En esta sección presentamos un resumen de las reflexiones y conclusiones desde un punto de vista global tras este primer ciclo. De forma general, el equipo de investigación valora como exitosa la propuesta ya que abre el abanico de problemas que los estudiantes son capaces de resolver sin disminuir la tasa de éxito en los tipos de problemas que la propuesta tiene en común con las secuencias tradicionales. Además, los alumnos que la han recibido elaboran respuestas más argumentadas que los del grupo de control y dotan de significado a las operaciones que realizan.

Algunos puntos fuertes de la propuesta:

- El número de sesiones asignadas a la proporcionalidad aritmética no varía sustancialmente el previsto por la programación que seguía el centro.
- Se implementa un modelo de enseñanza de enfoque constructivista basado en la enseñanza a través de la resolución de problemas.
- Con la propuesta se contribuye a que los alumnos profundicen y hagan un mejor uso de sus conocimientos sobre el significado de las operaciones aritméticas con números naturales y racionales.
- Se evita el recurso a técnicas algorítmicas que, además de requerir una memorización, hacen que el alumno identifique la resolución de problemas con la aplicación acrítica de algoritmos. La necesidad de reflexionar sobre las condiciones en que es necesario aplicar la técnica de

resolución de problemas de valor perdido consigue evitar, en parte, fenómenos como la llamada "ilusión de linealidad".

- Se ha aumentado la tipología de situaciones problemáticas planteadas a los alumnos y que los alumnos son capaces de resolver frente a la enseñanza tradicional.
- Los cambios propuestos en cuanto a la secuenciación tradicional (por ejemplo, con la inclusión de la proporcionalidad compuesta) no plantean dificultades.
- El trabajo con las situaciones introductorias hace que surjan de manera espontánea estrategias de resolución que no habían sido presentadas previamente. Destacamos en este aspecto la resolución de problemas de proporcionalidad compuesta sin necesidad de recibir instrucción específica.
- Se detecta una mejora en los procesos de argumentación que realizan los alumnos para justificar sus respuestas en cuanto a cantidad y calidad.
- Los resultados de la resolución de problemas de valor perdido mediante regla de tres que se llevó a cabo con el grupo de control no son mejores (de hecho, son ligeramente peores, aunque no de forma significativa) que los resultados obtenidos por los alumnos del grupo experimental.

Algunos puntos débiles de la propuesta:

- Hemos detectado que el número racional se entiende principalmente como decimal. Los alumnos muestran dificultades al aplicar los algoritmos para operar con fracciones y evitan en lo posible su uso. Como consecuencia surgen multitud de situaciones en las que los alumnos obtienen resultados inexactos a pesar de que el procedimiento seguido es adecuado.
- El trabajo con los porcentajes ha resultado especialmente complejo. Los alumnos no consiguen conectar de forma adecuada este concepto con los asociados a la proporcionalidad simple directa. Además, se observa una fuerte influencia de la instrucción previa en las producciones de muchos alumnos. Esta instrucción previa supone un gran obstáculo para los alumnos a la hora de enfrentarse a las tareas propuestas.
- Los cambios en la metodología de aula (trabajo en parejas, ausencia de libro de texto, institucionalización posterior a la resolución de situaciones problemáticas) provocan un cierto desconcierto inicial en los alumnos, ya que se aparta del modelo de enseñanza para la resolución de problemas al que están acostumbrados.
- La propia naturaleza investigadora del experimento de enseñanza que conlleva la recogida diaria de fichas de trabajo y, especialmente, el uso de una cámara para la grabación de las sesiones de clase, suponen novedades que también distraen inicialmente la atención de los alumnos.

Capítulo VI: Primer ciclo de investigación-acción en 2º de ESO

En este capítulo se exponen las cuatro fases de la investigación-acción del primer ciclo de la propuesta didáctica en 2º de ESO. Se trata, por tanto, de un ciclo exploratorio y, al igual que en el capítulo anterior, se presta una especial atención al diseño curricular de la propuesta. Algunos de los problemas en los que se basa la propuesta en 2º de ESO coinciden con los utilizados en el diseño de 1º de ESO, por lo que estos problemas recibirán una menor atención. Con el diseño de la propuesta para 2º de ESO que presentaremos en la primera sección se completa esencialmente el Objetivo de Investigación I que introdujimos en el Capítulo I. No obstante, en los capítulos VII, VIII y IX, introduciremos algunos cambios en el diseño tras la observación del funcionamiento de la propuesta. Al igual que en el capítulo anterior, tras el diseño daremos cuenta de la implementación realizada, analizaremos los resultados obtenidos y expondremos las reflexiones realizadas y las conclusiones obtenidas por el profesor-investigador y el equipo de investigación. Estas conclusiones suponen resultados parciales para el Objetivo de Investigación II.

VI.1. Fase de planificación

A pesar de tratarse de un primer ciclo de investigación-acción en 2º de ESO, la planificación se apoya en los resultados obtenidos en los ciclos de investigación-acción realizados anteriormente en 1º de ESO, tanto el ciclo exploratorio realizado por Oller-Marcén (2012) como el ciclo relatado en el Capítulo V de la memoria. Por un lado, el conjunto del ciclo II-1 (Capítulo V) y el ciclo I-2 nos proporciona información longitudinal sobre el grupo experimental. Los alumnos del ciclo I-2, al que se dedica este capítulo, participaron (en su mayoría) en el grupo experimental del ciclo II-1, por lo que recibieron instrucción sobre proporcionalidad aritmética según nuestra propuesta. Así, el análisis y las reflexiones que realizamos en el capítulo anterior nos sirven para determinar los conocimientos previos de los alumnos alrededor del Foco 1 “Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad”, Foco 2 “Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa”, Foco 4 “Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta” y Foco 6 “Porcentajes y problemas asociados”. Por otro, en este ciclo introducimos los contenidos relacionados con el Foco 3 “Problemas en situaciones de proporcionalidad inversa” que, aunque no fue trabajado en nuestra propuesta en 1º de ESO, sí que se introdujo en la propuesta de Oller-Marcén (2012), por lo que ese primer ciclo en 1º de ESO también nos proporciona información relevante para afrontar el diseño de este foco de interés. Para el Foco 5 "Repartos proporcionales" no tenemos referentes experimentales con nuestra propuesta, por lo que el diseño para este foco de interés es de carácter experimental en este ciclo.

VI.1.1. Decisiones tomadas tras las observaciones de los ciclos anteriores

En primer lugar, presentamos las decisiones tomadas por el profesor-investigador y el equipo de investigación tras las reflexiones de los ciclos previos en 1º de ESO y que afectan a la planificación de la propuesta para 2º de ESO.

VI.1.1.1. Sobre el diseño

En general, el diseño de la propuesta para 2º de ESO sigue unos patrones similares a los de la propuesta para 1º de ESO. Destacamos algunas diferencias:

- En los ciclos de investigación-acción para 1º de ESO se presentan los problemas de comparación en sesiones diferentes a los de valor perdido. Además, en el ciclo de Oller-Marcén (2012) no se introducen problemas de comparación para la proporcionalidad inversa, y los de valor perdido (y su análisis) en situaciones de proporcionalidad simple inversa se presentan en sesiones diferentes de las de los contenidos correspondientes en situaciones de proporcionalidad simple directa. En este ciclo, los alumnos ya tienen experiencia con los problemas de comparación, tanto cuantitativa como cualitativa, y con los problemas de valor perdido. Además, se observó que en el ciclo II-1 los alumnos tenían dificultades para detectar como no directa una situación de proporcionalidad inversa. Por tanto, en el diseño de 2º de ESO se reservan tres sesiones a realizar sendos talleres de problemas que mezclan los tres diferentes tipos de problemas y las dos relaciones de proporcionalidad simple. Consideramos que de esta manera los alumnos se ven en la necesidad de reflexionar tanto sobre la tarea matemática que se solicita en el problema como sobre el tipo de relación proporcional involucrada. De esta forma, en los debates se pueden comparar las diferencias y similitudes entre los diferentes tipos de problemas y las dos relaciones de proporcionalidad simple y generar una mejor comprensión de los fenómenos involucrados.
- Se reserva un mayor tiempo a la proporcionalidad compuesta y se abre el abanico de problemas respecto a la propuesta en 1º de ESO. Así, se trabajan diferentes estructuras funcionales y las tres tipologías de problemas (comparación cuantitativa, comparación cualitativa y valor perdido).
- Recogiendo las reflexiones sobre la comprensión del porcentaje en los ciclos anteriores, se reservan más sesiones al trabajo con este concepto (el doble que en el ciclo II-1) y se introduce la relación entre los conceptos de porcentaje y razón de manera más estructurada.
- Se incorporan al diseño problemas de los ciclos anteriores. De la propuesta de Oller-Marcén, se incorporan algunos de los problemas de análisis de situaciones de proporcionalidad inversa y problemas de valor perdido en dichas situaciones contenidos en las Actividades de Aula 7 y 8 y las Tareas para Casa 6 y 7 (Oller-Marcén, 2012, pp. 549-552). De la propuesta de

1º de ESO, se utilizan problemas de proporcionalidad simple directa contenidos entre las sesiones 2 y 7, principalmente. También en el diseño de la prueba escrita de 2º de ESO se incorporan ítems utilizados en la correspondiente de 1º de ESO para poder hacer una comparativa longitudinal. Se realizan algunos cambios en la estructura numérica de los problemas reutilizados apuntados en las reflexiones del ciclo II-1. En particular, se corrige la errata detectada en la redacción de las respuestas de opción múltiple para el problema de la prueba escrita PE.2.2.

VI.1.1.2. Sobre aspectos cognitivos

Las caracterizaciones y argumentaciones sobre los principales conceptos involucrados en la propuesta se mantienen respecto a los presentados en el Capítulo IV. No obstante, las reflexiones sobre la experimentación realizada en 1º de ESO hacen que el profesor-investigador matice algunas de las ideas que sobre el tratamiento de los conceptos y contenidos clave se planificaron inicialmente (ver sección IV.2 del Capítulo IV).

En primer lugar, la caracterización de las relaciones de proporcionalidad inversa mediante doble relación de proporcionalidad directa (entre la magnitud producto y las dos magnitudes factor) puede provocar confusiones en los alumnos. En el ciclo II-1 se constató que los alumnos detectan dichas relaciones y las condiciones de regularidad asociadas provocando que caractericen las relaciones de proporcionalidad inversa como de proporcionalidad directa. Esta relación entre la magnitud producto y las magnitudes factor, que pone el énfasis en la posibilidad de calcular razones externas cuyo “numerador” es la cantidad de la magnitud producto sigue siendo esencial, sobre todo, para abordar los problemas de valor perdido. Sin embargo, en la caracterización de la relación de proporcionalidad inversa y en los problemas de comparación en situaciones inversas es esencial que los alumnos puedan construir numéricamente e interpretar la magnitud producto. Además, los alumnos en el ciclo II-1 mostraron dificultades a la hora de detectar magnitudes intensivas en las situaciones inversas, ya que estas se interpretaban como una cantidad de magnitud extensiva asociada a la “magnitud numerador”. Por tanto, en este ciclo el enfoque para el tratamiento de la proporcionalidad inversa se centra esencialmente en detectar la posibilidad de establecer un producto de medidas entre las magnitudes involucradas que en el contexto de la situación que se analiza debe mantenerse constante. Además, se hará énfasis en la detección de magnitudes intensivas y se utilizarán argumentos similares a los que obtuvimos en las entrevistas semiestructuradas en el ciclo II-1, concretamente los argumentos utilizados por el alumno A4.1 del ciclo II-1 (ver sección V.3.3.3. Análisis de la entrevista a A4.1 Capítulo V), para interpretar como intensivas las magnitudes que aparecen en una situación de producto de medidas.

Por otro lado, a pesar de que la propuesta didáctica parece exitosa introduciendo e interpretando el concepto de razón externa entre magnitudes relacionadas de forma directamente proporcional, en el ciclo II-1 se han confirmado las dificultades de los alumnos para conectar el concepto de porcentaje con su naturaleza como razón normalizada que ya se apuntaron en el ciclo I-1 (Oller-Marcén, 2012). Para la propuesta didáctica implementada en este ciclo I-2, se propone un trabajo más estructurado en las situaciones iniciales para incidir en esta relación entre el concepto de razón y porcentaje. En concreto, los problemas de Tipo II (calcular un porcentaje que representa una parte respecto al total) ponen el énfasis en esta relación, por lo que el trabajo inicial se centrará en este tipo de problemas. La mayor estructuración de estas tareas (ver actividad F9.1 en la sección VI.1.3.9. Novena sesión: Porcentajes I) incidirá, además, en que los alumnos planteen numéricamente la razón correspondiente a una interpretación concreta como tanto por uno que se proporciona en el problema. Los alumnos del ciclo II-1 mostraron peor desempeño en este tipo de tareas que, como se expuso en la fase de reflexión anterior, se trabajaron poco en las actividades de clase. Así, la inclusión de estas actividades en tareas de clase pretende paliar estas deficiencias observadas en el ciclo II-1. Además, los alumnos del ciclo II-1 mostraron conocer procedimientos algorítmicos para proceder en los problemas de Tipo I, por lo que parece aconsejable que no sean estos los primeros problemas a los que se enfrenten en la propuesta.

VI.1.1.3. Sobre la metodología de aula y de investigación

No se introducen cambios sustanciales ni en el modelo de enseñanza ni en el método de investigación. Se mantiene el modelo de enseñanza a través de la resolución de problemas y los elementos metodológicos del ciclo II-1 relacionados con el paradigma de investigación-acción.

Tras las sugerencias del observador externo en el ciclo II-1, se procura reservar el tiempo necesario a las puestas en común y debates en cada sesión. Además, en la dinamización de los debates se tratará de repartir las intervenciones entre todos los alumnos de clase para que estas no se concentren en unos pocos alumnos.

VI.1.2. Secuenciación y temporalización

La propuesta de enseñanza para la proporcionalidad aritmética en 2º de ESO en este primer ciclo de investigación-acción se estructuró inicialmente en once sesiones de clase y otras dos sesiones para realizar un repaso de todos los contenidos y la prueba escrita. Sin embargo, esta planificación a priori se modificó durante la acción tras la realización de la sesión 9, primera de la propuesta dedicada al concepto de porcentaje. Daremos cuenta de este cambio en la siguiente sección centrada en el desarrollo de la implementación (ver VI.2. Fase de acción).

En la Tabla VI - 1 presentamos esta planificación inicial. Recordamos la codificación de las fichas de trabajo que ya introdujimos en el capítulo anterior:

- F$i.j$: Ficha de trabajo en el aula entregada en el orden j durante la sesión i-ésima.
- TCi: Ficha de trabajo para casa entregada al finalizar la sesión i-ésima.

Como se observa, hay una sesión dedicada a la introducción del porcentaje. En esta sesión se planificaba la realización de una situación introductoria contenida en la ficha de trabajo en el aula F9.1, una ficha con ejercicios de refuerzo F9.2 y una ficha de trabajo para casa. Tras el cambio realizado en el transcurso de la acción, se decidió que la ficha de trabajo F9.2 se realizara en casa tras la sesión 9 e introducir una nueva sesión para afianzar los conceptos básicos sobre el porcentaje. Esta sesión se diseñó en forma de taller de problemas mediante la realización en el aula de la ficha TC9. Para dejar constancia de este cambio y unificar criterios de codificación en el análisis de los resultados y para el protocolo del observador externo, se modificaron las codificaciones de las dichas de trabajo F9.2 y TC9, que pasaron a ser TC9 y F10.1 respectivamente. Además, se modificó la codificación de las fichas de trabajo de las siguientes sesiones.

	Breve descripción de los contenidos	Fichas de trabajo
Sesión 1	Razones y condición de regularidad.	F1.1, TC1
Sesión 2	Situaciones de proporcionalidad simple inversa.	F2.1, F2.2, TC2
Sesión 3	Problemas de proporcionalidad simple I.	F3.1, TC3
Sesión 4	Problemas de proporcionalidad simple II.	F4.1, TC4
Sesión 5	Problemas de proporcionalidad simple III.	F5.1
Sesión 6	Problemas de proporcionalidad compuesta I.	F6.1, F6.2, TC6
Sesión 7	Problemas de proporcionalidad compuesta II.	F7.1
Sesión 8	Repartos proporcionales.	F8.1, F8.2, TC8
Sesión 9	Porcentajes.	F9.1, F9.2, TC9
Sesión 10	Aumentos y disminuciones porcentuales I.	F10.1, F10.2, TC10
Sesión 11	Aumentos y disminuciones porcentuales II.	F11.1, TC11
Sesión 12	Repaso de la unidad.	F12.1
Sesión 13	Prueba escrita.	PE

Tabla VI - 1. Secuencia temporal de la propuesta inicialmente planificada para 2º de ESO (Ciclo I-2).

Con los cambios descritos anteriormente, la secuencia implementada para 2º de ESO en este primer ciclo de investigación-acción consta de doce sesiones para el desarrollo de los contenidos y otras dos sesiones para realizar un repaso de la unidad y realizar la prueba escrita (ver Tabla VI - 2).

En la Tabla VI - 2 se refleja la secuencia temporal de la propuesta finalmente implementada. Observamos que la estructura de las actividades en este ciclo se adapta al modelo de enseñanza a través de la resolución de problemas, de forma que en las sesiones 2, 6, 8, 9 y 11 se realizan situaciones introductorias para las situaciones de proporcionalidad inversa, las situaciones de proporcionalidad compuesta, los repartos proporcionales, el concepto de porcentaje, y los aumentos y disminuciones porcentuales, respectivamente. En la sesión 1 se repasan los conceptos de razón y condición de regularidad y las sesiones 3, 4, 5, 7, 10, 12 y 13 se planifican como talleres de problemas.

Como en el ciclo II-1, cuando describamos el diseño de las sesiones de clase, codificaremos los problemas contenidos en cada ficha de trabajo añadiendo el ordinal correspondiente al código de la ficha, y si un problema tiene varios apartados añadiremos al código anterior el ordinal del apartado.

	Breve descripción de los contenidos	Fichas de trabajo
Sesión 1	Razones y condición de regularidad	F1.1, TC1
Sesión 2	Situaciones de proporcionalidad simple inversa	F2.1, F2.2, TC2
Sesión 3	Problemas de proporcionalidad simple I	F3.1, TC3
Sesión 4	Problemas de proporcionalidad simple II	F4.1, TC4
Sesión 5	Problemas de proporcionalidad simple III	F5.1
Sesión 6	Problemas de proporcionalidad compuesta I	F6.1, F6.2, TC6
Sesión 7	Problemas de proporcionalidad compuesta II	F7.1
Sesión 8	Repartos proporcionales	F8.1, F8.2, TC8
Sesión 9	Porcentajes I	F9.1, TC9
Sesión 10	Porcentajes II	F10.1
Sesión 11	Aumentos y disminuciones porcentuales I	F11.1, F11.2, TC11
Sesión 12	Aumentos y disminuciones porcentuales II	F12.1, TC12
Sesión 13	Repaso de la unidad	F13.1
Sesión 14	Prueba escrita	PE

Tabla VI - 2. Secuencia temporal de la propuesta efectivamente implementada para 2º de ESO (Ciclo I-2).

VI.1.3. Diseño curricular de las sesiones de clase

VI.1.3.1. Primera sesión: Razones y condición de regularidad

En la primera sesión de este ciclo se trabajan los conceptos relacionados con la razón entre magnitudes y la relación de proporcionalidad simple directa, a través del análisis de contextos en los que aparecen magnitudes con diferentes tipos de relación (o no relacionadas). Se pretende que los alumnos evidencien los conocimientos adquiridos en 1º de ESO. A partir de dichos conocimientos previos se volverán a institucionalizar los conceptos de razón, razón inversa, condición de regularidad y relación de proporcionalidad directa.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 3.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Calcular la razón externa asociada a una situación de proporcionalidad. • Conocer la existencia de dos razones. • Interpretar la razón como tanto por uno y asociarla al resultado de un reparto igualitario. • Identificar condiciones de regularidad asociadas a una situación de proporcionalidad. • Reconocer en qué situaciones puede calcularse una razón entre las magnitudes involucradas.	• Razón (externa) asociada a una situación en la que se ven involucradas dos magnitudes (proporcionales). • Razón inversa. • Condición de regularidad. • Magnitudes directamente proporcionales. • Vocabulario asociado a las situaciones de proporcionalidad directa.

Tabla VI - 3. Objetivos didácticos y contenidos de la primera sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- La sesión comienza con una pequeña breve puesta en común de los conceptos que se trabajaron en 1º de ESO de forma que sirva para repasar la terminología básica: razón, condición de regularidad y magnitudes directamente proporcionales. (10 min)
- Se realiza la ficha de trabajo F1.1 por equipos. Esta actividad se centra en la identificación de magnitudes directamente proporcionales, cálculo e interpretación de razones externas y establecimiento de condiciones de regularidad. (30 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F1.1. (10 min)
- Entrega de TC1. En esta actividad de trabajo fuera del aula se refuerzan los problemas de la actividad F1.1 analizando la existencia de relaciones de proporcionalidad directa y estableciendo las razones pertinentes en nuevos contextos.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de esta sesión pertenecen a la ficha de trabajo en el aula F1.1 y a la ficha de trabajo para casa TC1.

Las situaciones planteadas en la ficha de trabajo por parejas en el aula, F1.1, son las mismas que las que componían la ficha de trabajo F.2.2 del ciclo II-1. Además, se ha añadido una situación en la que puede suponerse una relación de proporcionalidad inversa entre las magnitudes involucradas (F1.1.3) y que no estaba contenida en le ficha de trabajo del ciclo II-1. De esta manera se confronta a los alumnos desde el principio con las situaciones inversas que se trabajan de forma amplía en la propuesta de 2º de ESO. Como se comentó en el análisis del diseño de la propuesta en el Capítulo V, en esta ficha de trabajo, las situaciones de proporcionalidad directa se presentan en orden creciente de dificultad para interpretar las razones obtenidas. Se comienza con una situación (F1.1.1) que presenta una magnitud discreta y otra continua, de forma que la razón entre la magnitud discreta y la continua es entera, y su inversa admite una expresión entera tras un cambio de unidades (de horas a minutos). Posteriormente se presenta una situación con dos magnitudes continuas en la que la aparición de razones no enteras no debería obstaculizar su interpretación. En la penúltima situación de proporcionalidad directa (F1.1.4) los alumnos deben interpretar una cantidad no entera que se corresponde con el número de personas por unidad de peso de comida y en F1.1.6, deben interpretar otra cantidad no entera como "el número de personas necesarias para realizar una pulsera".

La situación de proporcionalidad inversa (F1.1.3) que aparece por primera vez, se construye incorporando una magnitud intensiva junto con la magnitud "denominador" de dicha magnitud intensiva, para favorecer la interpretación del producto.

F1.1.1: *Un pintor hace 28 retratos en 7 horas.*

F1.1.2: *En un restaurante se mezclan, para hacer arroz con leche, 2 kg de arroz con 5 litros de leche.*

F1.1.3: *Para vaciar una estantería cada persona de los 30 de clase han tenido que transportar 20 libros.*

F1.1.4: *Entre 3 personas se han comido 2 kilogramos de guisantes.*

F1.1.5: *En el año 2000 había 6000 millones de personas en el mundo.*

F1.1.6: *Un grupo de 5 amigas ha realizado 25 pulseras para un mercadillo solidario.*

F1.1.1. Problema F2.2.1 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
F1.1.2. Problema F2.2.2 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
F1.1.3 **Tipo de problema:** Análisis de situaciones. **Magnitudes involucradas:** A: Cantidad de alumnos. Extensiva, discreta. B: Libros transportados por cada alumno. Intensiva, discreta. **Estructura funcional:** $A \cdot B = k$	 **Relación de proporcionalidad:** Inversa. **Constante de proporcionalidad:** k, total de libros transportados. **Estructura numérica:** $(30: 20)$
F1.1.4. Problema F2.2.4 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
F1.1.5. Problema F2.2.3 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes.
F1.1.6. Problema F2.2.5 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.

La actividad que deben realizar los alumnos de forma individual fuera del horario lectivo se ha diseñado siguiendo una estructura similar a la de la ficha F1.1. Aparecen seis situaciones en las que se alternan situaciones de proporcionalidad directa, situaciones de proporcionalidad inversa, situaciones en las que las magnitudes no están relacionadas y situaciones sin suficientes magnitudes como para plantearse una relación de proporcionalidad. Se incrementa el número de situaciones inversas para que los alumnos se acostumbren a detectar que dichas situaciones no son de proporcionalidad directa (no se ha institucionalizado todavía el concepto de relación inversamente proporcional).

La situación inversamente proporcional que se presenta en TC1.1 es muy similar a la trabajada en clase (F1.1.3) ya que se construye a partir de una magnitud intensiva. Es decir, teniendo en cuenta un isomorfismo de medidas entre dos magnitudes, se presenta un contexto en el que se relacionan una de estas magnitudes y la razón (magnitud intensiva) asociada al isomorfismo, cuando la otra magnitud debe permanecer constante. Así, el número de personas que viajan en un autobús alquilado y lo que deben pagar cada una tienen una relación inversa bajo el supuesto de que el precio del alquiler del autobús (producto entre las magnitudes que se presentan) es constante.

TC1.1: *Para pagar el autobús de una excursión, cada uno de los 34 pasajeros tiene que pagar 45 euros.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones. **Magnitudes involucradas:** A: Cantidad de pasajeros. Extensiva, discreta. B: Valor económico por persona (€/pers.). Intensiva, discreta.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa. **Constante de proporcionalidad:** k, valor económico del alquiler del autobús.
Estructura funcional: $A \cdot B = k$	**Estructura numérica:** $(34{:}\,45)$

En TC1.2 se presenta un contexto en el que se puede suponer una relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes continuas equivalente a F1.1.2.

TC1.2: *Los 120 kilogramos de café, después de tostarlos, pesan 96 kilogramos.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones. **Magnitudes involucradas:** A: Masa café sin tostar (kg). Extensiva, continua. B: Masa café tostado (kg). Extensiva, continua.	**Relación de proporcionalidad:** Directa. **Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre la masa del café sin tostar y la masa del café tostado. k^{-1}, comparación multiplicativa entre la masa de café tostado y la mas de café sin tostar.
Estructura funcional: $\frac{A}{B} = k$	**Estructura numérica:** $(120{:}\,96)$

El contexto presentado en TC1.3 puede analizarse como un contexto en el que solo aparece una magnitud (cardinalidad de pelotas de tenis que caben en una caja) y en el que, por tanto, no tendría sentido considerar una relación entre dos magnitudes, o como la relación entre el número de pelotas amarillas y pelotas verdes que caben en la caja. En todo caso, dicha relación sería lineal decreciente, por lo que no cabría suponerse una relación proporcional.

TC1.3: *En una caja caben 120 pelotas de tenis, tanto si son de color amarillo como si son de color verde.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes / No relacionadas proporcionalmente.

En TC1.4 se presenta un contexto en el que puede suponerse una relación de proporcionalidad directa bajo el supuesto de velocidad de emanación constante, por lo que la situación es similar a F1.1.1 pero entre dos magnitudes continuas (volumen de agua emanado y tiempo que permanece abierto el grifo).

TC1.4: *Abriendo el grifo 8 minutos se llena una bañera de 225 litros.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Volumen de la bañera (l). Extensiva, continua. B: Tiempo de llenado (min). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, volumen de agua que emana el grifo por unidad de tiempo (velocidad de llenado). k^{-1}, tiempo necesario para que el grifo emane una unidad de volumen de agua.
Estructura funcional: $\frac{A}{B} = k$	**Estructura numérica:** $(225: 8)$

En TC1.5 volvemos a presentar un contexto en el que puede suponerse una relación de proporcionalidad inversa construido de forma similar a F1.1.3 y TC1.1.

TC1.5: *Con los bocadillos que hemos preparado, si van los 60 alumnos a la excursión, cada uno puede comerse 3 bocadillos a lo largo del día.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de alumnos. Extensiva, discreta. B: Bocadillos que puede comerse cada alumno. Intensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, total de bocadillos disponibles.
Estructura funcional: $A \cdot B = k$	**Estructura numérica:** $(60: 3)$

En la situación que se plantea en TC1.6 no puede suponerse una condición de regularidad que asegure una relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes “tiempo diario de estudio” y “cardinalidad de asignaturas”. El contexto introduce un posible distractor con el uso del ordinal “4º”.

TC1.6: *Estudio 5 horas diarias para preparar los exámenes finales de las 7 asignaturas que hay en 4º curso.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No relacionadas proporcionalmente.

VI.1.3.2. Segunda sesión: Situaciones de proporcionalidad simple inversa

Tras el repaso de los conceptos asociados a las relaciones de proporcionalidad simple directa realizado en la primera sesión, se aborda la institucionalización de las relaciones de proporcionalidad inversa entre una pareja de magnitudes. Para ello, se diseña una situación introductoria cuyo propósito es hacer emerger las principales características definitorias de este tipo de relaciones en las producciones de los alumnos.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 4.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Reconocer magnitudes inversamente proporcionales. • Reconocer magnitudes que no son inversamente proporcionales. • Identificar la constante de proporcionalidad en una situación de proporcionalidad inversa. • Reforzar el concepto de condición de regularidad.	• Magnitudes inversamente proporcionales en una situación dada. • La constante de proporcionalidad en situaciones de proporcionalidad inversa. • La razón entre magnitudes en situaciones cualesquiera. • La condición de regularidad.

Tabla VI - 4. Objetivos didácticos y contenidos de la segunda sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- Recogida y puesta en común de la actividad TC1. (5 min).
- Realización en parejas de la situación introductoria sobre magnitudes inversamente proporcionales y constante de proporcionalidad inversa, F2.1. (10 min)
- Puesta en común e institucionalización, con todo el grupo, de la caracterización de relaciones de proporcionalidad simple inversa y del cálculo e interpretación de la constante de proporcionalidad inversa. Condiciones de regularidad asociadas. (15 min)
- Realización en parejas de la actividad F2.2 sobre reconocimiento de situaciones de proporcionalidad inversa. (15 min)
- Puesta en común con todo el grupo de los resultados de la actividad F2.2. (5 min)
- Entrega de TC2. En esta actividad los alumnos deben seleccionar, de un grupo de magnitudes en tres contextos (no numéricos) diferentes, una pareja de magnitudes para las que pueda suponerse una relación directa, otra para la que pueda suponerse una relación inversa y otra para la que no pueda suponerse relación de proporcionalidad.

Diseño y análisis de las actividades:

Al tratarse de una sesión en la que se institucionaliza un nuevo concepto, los problemas abordados en el aula durante esta sesión están divididos en dos fichas de trabajo por parejas, F2.1 y F2.2. Además de estos problemas, en TC.2 se incorporan problemas similares para que los alumnos refuercen este concepto fuera del horario escolar.

La situación introductoria, F2.1, recupera dos situaciones analizadas previamente (TC1.5 y F1.1.5). En una de ellas puede suponerse una relación inversa y en la otra no puede suponerse relación entre las magnitudes involucradas. Previamente se ha puesto en común con el grupo clase que estas situaciones no eran de proporcionalidad directa y que carecía de sentido calcular las razones entre las magnitudes involucradas en cada situación. La tarea en esta sesión consiste en determinar si en alguna de las situaciones tiene sentido efectuar alguna otra operación y, en caso afirmativo, interpretar el significado del resultado de dicha operación. A partir de la puesta en común con los alumnos de esta tarea se institucionalizará el concepto de relación inversamente proporcional y constante de proporcionalidad inversa, y se analizará la relación entre las magnitudes que originan la situación y la magnitud producto.

Analiza las siguientes situaciones en las que NO se puede calcular la razón entre las magnitudes involucradas y decide si es posible realizar ALGUNA OTRA OPERACIÓN entre ellas. En dicho caso, explica por qué realizas la operación y lo que significa el resultado.

F2.1.1: *Con los bocadillos que hemos preparado, si van los 60 alumnos a la excursión, cada uno puede comerse 3 bocadillos a lo largo del día.*

F2.1.2: *En el año 2000 había 6000 millones de personas en el mundo.*

F2.1.1. Problema TC1.5 de la sesión 1.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
F2.1.2. Problema F1.1.5 de la sesión 1.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes.

Tras la institucionalización, las situaciones que componen la ficha F2.2 se utilizan para analizar diferentes situaciones directa e inversamente proporcionales, estableciendo las condiciones de regularidad necesarias para poder considerar dicha relación y calculando e interpretando las razones o la constante de proporcionalidad inversa, según convenga.

La ficha de trabajo comienza con una relación inversamente proporcional, F2.2.1. Para su elaboración hemos seguido un esquema de construcción idéntico al de las relaciones inversas presentadas en las fichas de trabajo anteriores.

F2.2.1: *Para pagar el regalo de Victoria, cada uno de sus 8 amigos ha tenido que poner 6€.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de amigos. Extensiva, discreta. B: Valor económico por persona (€/pers.). Intensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, valor económico del regalo.
Estructura funcional: $A \cdot B = k$	**Estructura numérica:** $(8{:}\,6)$

Intercalada entre las relaciones inversas, se introduce una situación susceptible de modelizarse mediante una relación directa, en un contexto de “velocidad” (volumen de agua por unidad de tiempo).

F2.2.2: *En mi terraza han caído 20 litros de agua durante las 5 horas que ha durado la tormenta.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Constante de proporcionalidad:**
A: Volumen de agua caído en la terraza (l). Extensiva, continua.	k, volumen de agua caído en la terraza por unidad de tiempo.
B: Tiempo desde que empieza la tormenta (h). Extensiva, continua.	k^{-1}, tiempo necesario para que caiga una unidad de volumen de agua.
Estructura funcional:	**Estructura numérica:**
$\frac{A}{B} = k$	$(20{:}\,5)$

La última situación que deben analizar los alumnos presenta una pareja de magnitudes extensivas que pueden suponerse ligadas por una relación de proporcionalidad inversa. El hecho de que las magnitudes involucradas sean extensivas dificulta la interpretación de las cantidades obtenidas mediante el producto de medidas. Los alumnos deben interpretar "personas·días", como noches, o jornadas, de hotel que deben pagar de forma conjunta todos los amigos.

F2.2.3: *Con el dinero que han ganado en la lotería se han ido 6 amigos a un hotel durante 10 días.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas:	**Estructura funcional:**
A: Cantidad de amigos. Extensiva, discreta.	$A \cdot B = k$
B: Cantidad de días de estancia. Extensiva, discreta.	
Constante de proporcionalidad:	**Estructura numérica:**
k, total de pernoctaciones que deben pagarse.	$(6{:}\,10)$

La ficha de trabajo para casa TC2 se ha elaborado de forma similar a las actividades que constituían la ficha F3.1 del ciclo II-1 y que no llegó a repartirse en la tercera sesión de dicho ciclo en 1º de ESO por falta de tiempo. A partir de una lista de cuatro magnitudes contextualizadas sin valores numéricos asociados, los alumnos deben señalar una pareja de magnitudes en las que pueda suponerse una relación directa, otra en la que pueda suponerse una relación inversa y otra en la que no pueda suponerse una relación proporcional.

El listado de magnitudes que se presenta en TC2.1 hace referencia a un contexto de compra-venta de naranjas. Las cuatro magnitudes tienen un carácter intensivo. La primera magnitud es la inversa de la tercera ("naranjas por kilo" y "peso por naranja") por lo que con la magnitud "precio por naranja" puede considerarse una relación directa con una de ellas e inversa con la otra si consideramos constante el "precio del kilo de naranjas".

TC2.1: *Número de naranjas en un kilo. Precio de cada naranja. Peso de cada naranja. Número de gajos de una naranja.*

TC2.1.1: *Inversamente proporcionales:*

TC2.1.2: *Directamente proporcionales*

TC2.1.3: *No proporcionales*

Tipo de problema: Análisis de situaciones. **Magnitudes involucradas:** A: Cantidad de naranjas por kilo. Intensiva, discreta. B: Valor económico de cada naranja. Intensiva, discreta. C: Masa de cada naranja. Intensiva, continua. D: Cantidad de gajos en cada naranja. Intensiva, discreta.	**Relación de proporcionalidad:** Precio de cada naranja y peso de cada naranja. *Directamente proporcionales*. Constantes: Valor económico de las naranjas por unidad de masa, o masa de naranjas por unidad de valor económico. Número de naranjas en un kilo y precio de cada naranja. *Inversamente proporcionales.* Constante: Valor económico de las naranjas por unidad de masa.

En TC2.2 las magnitudes se asocian a un contexto de grifos en el que los grifos trabajan de forma cooperativa en un tiempo determinado para llenar una piscina. Este contexto volverá a aparecer con cantidades numéricas asociadas en los problemas de proporcionalidad compuesta, asociado a una estructura $\mathbb{p} = (1, -1, -1)$. Así, bajo adecuadas condiciones de regularidad, pueden suponerse dos relaciones directas diferentes, entre la capacidad de la piscina y el tiempo que permanecen abiertos los grifos, y entre el volumen de la piscina y el número de grifos, y una relación de proporcionalidad inversa entre el número de grifos y el tiempo que permanecen abiertos. La temperatura del agua no guarda relación de proporcionalidad con ninguna de las otras tres magnitudes.

TC2.2: *Número de grifos. Temperatura del agua. Cantidad de agua en la piscina. Tiempo de apertura de los grifos.*

TC2.2.1: *Inversamente proporcionales:*

TC2.2.2: *Directamente proporcionales*

TC2.2.3: *No proporcionales*

Tipo de problema: Análisis de situaciones. **Magnitudes involucradas:** A: Número de grifos. Extensiva, discreta. B: Temperatura del agua. Intensiva, continua. C: Volumen de agua en la piscina. Extensiva, continua. D: Tiempo de apertura de los grifos. Extensiva, continua.	**Relación de proporcionalidad:** Número de grifos y volumen de agua en la piscina. *Directamente proporcionales.* <u>Constantes:</u> Volumen de agua emanado por cada grifo, o grifos para emanar una unidad de volumen de agua. Volumen de agua en la piscina y tiempo de apertura de los grifos. *Directamente proporcionales.* <u>Constante:</u> Volumen de agua por unidad de tiempo (velocidad de llenado) o tiempo para llenar una unidad de volumen. Número de grifos y tiempo de apertura de estos. *Inversamente proporcionales.* <u>Constante:</u> Capacidad de la piscina en grifos·horas. Tiempo de llenado con un único grifo o grifos necesarios para llenar en una unidad de tiempo.

En TC.3 se presenta un contexto físico de movimiento dentro de un coche, en el que puede suponerse un isomorfismo de medidas entre la distancia recorrida y la duración del viaje de forma que la razón asociada es la velocidad (supuesta esta constante durante el viaje). De este isomorfismo de medidas puede deducirse una relación de proporcionalidad directa entre la distancia y el tiempo. Así mismo, bajo determinadas condiciones de regularidad, cabe plantearse una relación de proporcionalidad directa entre la velocidad y la distancia recorrida, y una relación de proporcionalidad inversa entre la velocidad y la duración del viaje. No puede suponerse ninguna relación de proporcionalidad de la magnitud “número de pasajeros” con el resto de las magnitudes.

TC2.3: *Distancia recorrida. Duración del viaje. Número de pasajeros. Velocidad del coche.*

TC2.3.1: *Inversamente proporcionales*

TC2.3.2: *Directamente proporcionales*

TC2.3.3: *No proporcionales*

Tipo de problema: Análisis de situaciones. **Magnitudes involucradas:** A: Longitud, distancia, recorrida. Extensiva, continua. B: Tiempo de viaje. Extensiva, continua. C: Número de pasajeros. Extensiva, discreta. D: Velocidad del coche. Intensiva, continua.	**Relación de proporcionalidad:** Distancia recorrida y tiempo de viaje. *Directamente proporcionales.* <u>Constantes:</u> Velocidad o tiempo para recorrer una unidad de longitud. Distancia recorrida y velocidad del coche. *Directamente proporcionales.* <u>Constante:</u> Tiempo de viaje o su inversa. Velocidad del coche y tiempo de viaje. *Inversamente proporcionales.* <u>Constante:</u> Distancia recorrida.

VI.1.3.3. Tercera sesión: Problemas de proporcionalidad simple I

Los problemas de comparación cuantitativa y los de cualitativa, y los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple (tanto directa como inversa) se trabajan en tres sesiones de clase diseñadas como un taller de problemas. Las diferentes tipologías de problemas se mezclan en cada sesión. Sin embargo, se ha secuenciado la primera aparición de cada uno de los tipos de problemas siguiendo el orden de la propuesta para 1º de ESO, primero los problemas de comparación cuantitativa, después los de valor perdido y el último tipo en aparecer es el de comparación cualitativa. Dentro de cada tipología un contexto de proporcionalidad simple directa y más tarde uno de proporcionalidad simple inversa.

Para los problemas de proporcionalidad simple inversa, a los que se enfrentan los alumnos inicialmente, se han diseñado estructuras numéricas que no incluyen razones internas enteras para favorecer las estrategias de cálculo de la constante de proporcionalidad inversa.

En concreto, en esta primera sesión de problemas de proporcionalidad simple, aparecen problemas de comparación cuantitativa en situaciones directas e inversas y problemas de valor perdido en situaciones directas. No se diseña, por tanto, una situación introductoria como en otras ocasiones para estos problemas. Las diferentes tipologías de problemas se trabajaron en el ciclo II-1 y las relaciones de proporcionalidad inversa se introducen en la sesión 2 de la propuesta para este curso.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 5.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Resolver razonadamente problemas de comparación y valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple (tanto directa como inversa).	• Magnitudes directamente proporcionales. • Magnitudes inversamente proporcionales. • La constante de proporcionalidad en situaciones de proporcionalidad inversa. • La razón entre magnitudes en situaciones cualesquiera. • Condiciones de regularidad. • Identificación, análisis y resolución de problemas de comparación cuantitativa y de valor perdido.

Tabla VI - 5. Objetivos didácticos y contenidos de la tercera sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- Recogida y puesta en común de la actividad TC2. (10 min)
- Resolución en equipos de los problemas contenidos en la actividad F3.1 sobre problemas de comparación y valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple (tanto directa como inversa). (25 min)
- Puesta en común con todo el grupo de la resolución de los problemas de la actividad F3.1. (15 min).

- Entrega de la actividad TC3 que refuerza la resolución de problemas de tipología similar a la trabajada en la actividad F3.1.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas que se abordan en esta sesión de clase se estructuran en una ficha de trabajo por parejas en el aula, F3.1, y una ficha con problemas de refuerzo para realizar fuera del horario escolar, TC3.

Los problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa que se incorporan en ambas fichas coinciden con problemas tomados del ciclo II-1. Entre ellos, se incorporan dos problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (uno en la ficha F3.1 y otro en TC3).

Se han seleccionado problemas de proporcionalidad simple directa que tuvieron una alta tasa de éxito en el ciclo II-1 y que favorecen el uso de estrategias de razón externa. El problema F3.1.1 de comparación cuantitativa en una situación de proporcionalidad simple directa, que se construye a partir de un contexto de velocidad (razón bien compactada), tuvo una tasa de éxito del $87{,}1\ \%$ en el ciclo II-1 (ver Tabla V - 29) y en el $83{,}9\ \%$ de las producciones se utilizó una estrategia por razón externa (ver Tabla V- 30).

F3.1.1: *Jesús ha recorrido 8 kilómetros en 3 horas, mientras que en 2 horas y media Celia ha recorrido 7 kilómetros, ¿quién ha ido más rápido?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Problema F4.2.1 del ciclo II-1.	

El primer problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad simple inversa se ha construido a partir del mismo contexto usado en el problema TC1.1. Se utiliza la relación entre una magnitud intensiva que se puede calcular como la razón entre dos magnitudes extensivas y la magnitud extensiva "denominador" $\left(\frac{X}{Y}\cdot Y\right)$.

F3.1.2: *En el colegio A, para pagar el autobús de una excursión, cada uno de los 34 alumnos que va a la excursión tiene que pagar 15 euros. Por otro lado, en el colegio B, para pagar el autobús de su excursión, cada uno de los 31 alumnos que va a la excursión tiene que pagar 17 euros. ¿En qué colegio ha sido más cara la excursión?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas:	**Constante de proporcionalidad:**
A: Cantidad de alumnos. Extensiva, discreta.	k, valor económico del alquiler del autobús.
B: Valor económico por alumno (€/pers.). Intensiva, discreta.	
Estructura funcional:	**Estructura numérica:**
$A \cdot B = k$	$(34{:}\,15)\sim(31{:}\,17)$
	Razones internas: No enteras.

Como en la propuesta para 1º de ESO, se intercalan falsos problemas de proporcionalidad en los que no puede suponerse una relación proporcional entre las magnitudes que se presentan.

F3.1.3: *En una clase de 25 alumnos hay 14 teléfonos móviles, ¿cuántos teléfonos móviles habrá en una clase de 18 alumnos?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones. Problema TC6.2 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación proporcional.

El primer problema de valor perdido en una relación simple directa que se presenta en la propuesta para 2º de ESO, F3.1.4, también aparecía en la propuesta para 1º de ESO y tuvo una elevada tasa de éxito. Además, la presencia de dos magnitudes continuas y la elección de la estructura numérica favorecen el uso de estrategias de resolución basadas en el cálculo de una razón externa. En el ciclo II-1 se obtuvo tanto una tasa de éxito como de uso de la estrategia VPd3 del 83,9 %, ver Tabla - 40 y Tabla - 41).

F3.1.4: *Para hacer arroz con leche una receta dice que hay que echar 2 kg de arroz por cada 5 litros de leche. ¿Cuánto arroz tendré que echar si solo dispongo de 3 litros de leche?*

Tipo de problema: Valor perdido. Problema F6.2.1 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.

Tras la puesta en común, se diseña una actividad de refuerzo para realizar en casa en la que se incorporan problemas de la propuesta para 1º de ESO que tuvieron una tasa de éxito más baja. En concreto, el problema TC3.1 de valor perdido y el problema TC3.2 de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.

TC3.1: *Para obtener 420 litros de kétchup hacen falta 600 kilogramos de tomate, ¿cuántos kilogramos de tomate se necesitan para obtener 350 litros de kétchup?*

Tipo de problema: Valor perdido. Problema TC6.1 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.

TC3.2: *Sara ha preparado una cena con 8 tortillas para sus 10 amigos. David también ha preparado una cena con tortillas, pero él servirá 3 tortillas para sus 4 amigos. ¿En qué cena se podrá comer más tortilla?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa. Problema F5.1.2 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.

Además, se diseña un problema de comparación cuantitativa en una situación de proporcionalidad simple inversa en el que las magnitudes involucradas son extensivas. Este hecho puede dificultar la interpretación del producto para dar significado a la constante de proporcionalidad inversa.

TC3.3: *Para terminar la obra de la calle Alta 7 obreros tienen que trabajar durante 8 días. Sin embargo, para la obra que se está haciendo en la calle Baja trabajarán solo 4 obreros, pero durante dos semanas. ¿Qué obra requiere más trabajo?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de obreros. Extensiva, discreta. B: Tiempo para terminar la obra (día, semana). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, trabajo necesario para terminar la obra medido en obreros·días / obreros para terminar en la unidad de tiempo / tiempo para terminar si trabaja un obrero.
Estructura funcional: $A \cdot B = k$	**Estructura numérica:** $(7{:}\,8)\sim(4{:}\,14)$ **Razones internas:** No enteras.

El falso problema de proporcionalidad TC3.4 también aparece en la propuesta de 1º de ESO.

TC3.4: *En el hospital A en la planta 5 trabajan 25 médicos. En el hospital B en la planta 7 hay 20 médicos, ¿qué hospital ofrece una mayor atención a sus pacientes?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones. Problema F4.2.2 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** No hay suficientes magnitudes

VI.1.3.4. Cuarta sesión: Problemas de proporcionalidad simple II

En esta sesión se continúa con la resolución de problemas en situaciones de proporcionalidad simple. Aparecen por primera vez los problemas de valor perdido en situaciones inversas y los problemas de comparación cualitativa (en situaciones de proporcionalidad simple directa e inversa).

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 6.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Ampliar la resolución razonada de problemas de comparación y valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple (tanto directa como inversa).	• Magnitudes directamente proporcionales. • Magnitudes inversamente proporcionales. • La constante de proporcionalidad en situaciones de proporcionalidad inversa. • La razón entre magnitudes en situaciones cualesquiera. • Condiciones de regularidad. • Identificación, análisis y resolución de problemas de comparación cuantitativa y cualitativa y de valor perdido.

Tabla VI - 6. Objetivos didácticos y contenidos de la cuarta sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- Recogida y puesta en común de la actividad TC3. (10 min)
- Resolución, en equipos, de los problemas contenidos en la actividad F4.1 sobre problemas de comparación cuantitativa y cualitativa y problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple (tanto directa como inversa). (25 min)
- Puesta en común con todo el grupo de la resolución de los problemas de la actividad F4.1. (15 min).
- Entrega de la actividad TC4 que refuerza la resolución de problemas de tipología similar a la trabajada en la actividad F4.1.

Diseño y análisis de las actividades:

El primer problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad inversa al que se enfrentan los alumnos se ha construido a partir de una magnitud intensiva. Los alumnos se habrán enfrentado en varias ocasiones a este tipo de situaciones inversas en este punto de la propuesta. Se ha incorporado un elemento que puede generar una pequeña dificultad, ya que las unidades en las que se presentan las cantidades de la "magnitud denominador" son diferentes en la magnitud intensiva, "teclas por minuto", que en la extensiva, "horas que tarda en escribir". Para resolver el problema no es necesario realizar un cambio de unidades, pero, si no se realiza este cambio, la interpretación del producto se complica. Para poder dotar de un significado "amable" al producto es necesario realizar un cambio de unidades en la magnitud tiempo, entre horas y minutos.

F4.1.1: *Un secretario, que es capaz de pulsar 380 teclas por minuto cuando copia un informe, tarda 4 horas en escribirlo. ¿Cuánto tiempo tardará en escribir el informe si fuera más rápido y pulsase 400 teclas por minuto?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Tiempo para terminar (h). Extensiva, continua. V. independiente, A: Velocidad de escritura, pulsaciones por minuto (teclas/min). Intensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, cantidad de caracteres que tiene el informe.
Estructura funcional: $$X = \frac{k}{A}$$	**Estructura numérica:** $$(4{:}\,380) \leftrightarrow (x{:}\,400)$$ **Razones internas:** No enteras.

El primer problema de comparación cualitativa que introducimos en la propuesta para 2º de ESO, F4.1.2, es el mismo al que se enfrentaron por primera vez los alumnos en la propuesta de 1º de ESO. En dicho problema, no puede determinarse el sentido de la comparación a partir de la información proporcionada en el enunciado.

F4.1.2: *María ha echado más zumo de naranja que Pedro para preparar naranjada. Sin embargo, Pedro ha echado menos agua que María al preparar la naranjada. ¿Cuál de las dos naranjadas proporciona un sabor a naranja más fuerte?*

Tipo de problema: Comparación cualitativa. Problema F5.1.3 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.

Tras el problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad directa, se introduce un problema del mismo tipo, pero en el que debe suponerse una relación de proporcionalidad inversa entre las magnitudes. El contexto es equivalente al del problema de comparación cuantitativa F3.1.2 que resuelven los alumnos en la sesión anterior. En este caso, el sentido de las comparaciones sí permite determinar la comparación entre las constantes de proporcionalidad inversa involucradas.

F4.1.3: *En la clase de 2ºB hay menos alumnos que en la de 2ºA. Además, para comprar un regalo a su tutor, cada alumno de 2ºA pone más dinero del que pone cada alumno de 2ºB. ¿Qué regalo es más caro?*

Tipo de problema: Comparación cualitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de alumnos. Extensiva, discreta. B: Valor económico por alumno. Intensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, valor económico del regalo.
Estructura funcional: $A \cdot B = k$	**Estructura numérica:** $(a: b^{+}) \sim (a^{-}: b)$

El problema F4.1.4 se diseña como un falso problema de proporcionalidad. Sin embargo, se espera que el problema genere cierto debate sobre las condiciones de regularidad que deberían tenerse en cuenta para poder considerar una relación de proporcionalidad simple directa.

F4.1.4: *De los 350 participantes en una maratón han terminado 260 atletas, ¿cuántos hubiesen finalizado la maratón si se presentan 200 atletas?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación proporcional.

En el problema de valor perdido F4.1.5 aparecen dos magnitudes extensivas ligadas por una relación de proporcionalidad simple inversa. Se espera que dicha situación genere ciertas dificultades, tanto en la identificación de la relación inversa como en la interpretación de la constante de proporcionalidad inversa.

F4.1.5: *Un ganadero tiene pienso para alimentar a 300 terneros durante 3 meses. Si tuviese 200 terneros, ¿durante cuántos días los podría alimentar?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.

Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Tiempo que los puede alimentar (mes, día). Extensiva, continua. V. independiente, A: Cantidad de terneros. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, cantidad de raciones que se pueden dar con el pienso del que dispone.
Estructura funcional: $X = \frac{k}{A}$	**Estructura numérica:** $(90: 300) \leftrightarrow (x: 200)$ **Razones internas:** No enteras.

En la ficha de problemas para que trabajen fuera del horario lectivo de forma individual se introducen problemas del mismo tipo que los trabajados en clase. El problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad inversa, TC4.1, incluye una magnitud intensiva que favorece la obtención e interpretación de la constante de proporcionalidad.

TC4.1: *Para trasladar la tierra producida al hacer un desmonte se necesitaron 100 viajes de camión en cada uno de los cuales se transportó 12 metros cúbicos de tierra. ¿Cuántos viajes de camión se hubiesen necesitado si la capacidad de los camiones fuese de 15 metros cúbicos?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Cantidad de viajes. Extensiva, discreta. V. independiente, A: Volumen de tierra transportado en cada viaje (m^3/viaje). Intensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, volumen de tierra que se necesita transportar.
Estructura funcional: $X = \frac{k}{A}$	**Estructura numérica:** $(100: 12) \leftrightarrow (x: 15)$ **Razones internas:** No enteras.

En el falso problema de proporcionalidad, TC4.2, los valores numéricos que aparecen hacen referencia a magnitudes ligadas por una relación afín decreciente, sin embargo, como no se proporciona la ordenada en el origen (capacidad de la bañera) no puede contestarse a la pregunta. Este problema permite diferentes grados de profundidad en el análisis del contexto. Por un lado, la relación decreciente entre las magnitudes puede hacer pensar en una relación de proporcionalidad inversa. Por otro, es posible detectar una relación de proporcionalidad directa considerando que se desagua el mismo volumen de agua por cada unidad de tiempo, sin embargo, la cantidad numérica asociada al volumen de agua no hace referencia al volumen de agua que se desagua sino al volumen de agua que queda en la bañera.

TC4.2: *Si dejamos el desagüe abierto durante 2 minutos quedan en la bañera 80 litros de agua. ¿Cuánta agua quedará si lo dejamos abierto 4 minutos?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación proporcional (relación afín decreciente que no puede determinarse por desconocer la ordenada en el origen).

El problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad simple inversa se ha construido utilizando el mismo contexto que en el problema TC3.3 pero cambiando los valores numéricos por comparaciones cualitativas.

TC4.3: *En la obra de la calle Alta hay trabajando más obreros que en la de la calle Baja. Por otro lado, los obreros de la calle Baja van a tardar más días en acabar que los de la calle Alta. ¿Qué obra requiere más trabajo?*

Tipo de problema: Comparación cualitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de obreros. Extensiva, discreta. B: Tiempo para terminar una obra. Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, trabajo necesario para terminar la obra.
Estructura funcional: $A \cdot B = k$	**Estructura numérica:** $(a^{+}: b) \sim (a: b^{+})$

En TC4.4 presentamos el mismo problema de comparación cuantitativa en una situación de proporcionalidad simple directa que en la prueba final de la propuesta para 1º de ESO. La presencia de razones internas enteras puede provocar la aparición de diversas estrategias de resolución.

TC4.4: *Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa. Problema PE.3 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.

Se completa la ficha de trabajo con otro falso problema de proporcionalidad.

TC4.5: *Por la tarifa plana de datos me han cobrado en enero (que tiene 31 días) 40 €. ¿Cuánto me cobrarán en febrero (que tiene 28 días)?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación proporcional (función constante).

VI.1.3.5. Quinta sesión: Problemas de proporcionalidad simple III

En las dos primeras sesiones de resolución de problemas en situaciones de proporcionalidad simple, se han trabajado problemas de cada una de las tipologías. En esta sesión se pretende consolidar la resolución de dichos problemas. Se hace especial énfasis en las situaciones de proporcionalidad simple inversa en las que las magnitudes involucradas son extensivas y, por tanto, puede tener una mayor dificultad interpretar la constante de proporcionalidad inversa. Se añade un problema en el que, a partir de un mismo contexto, se solicitan diferentes valores para hacer un mayor énfasis en los procesos de covariación.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 7.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Consolidar la resolución razonada de problemas de comparación y valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple (tanto directa como inversa).	• Magnitudes directamente proporcionales. • Magnitudes inversamente proporcionales. • La constante de proporcionalidad en situaciones de proporcionalidad inversa. • La razón entre magnitudes en situaciones cualesquiera. • Condiciones de regularidad. • Identificación, análisis y resolución de problemas de comparación cuantitativa y cualitativa y de valor perdido.

Tabla VI - 7. Objetivos didácticos y contenidos de la quinta sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- Recogida y puesta en común de la actividad TC4. (10 min)
- Resolución en equipos de los problemas contenidos en la actividad F5.1 sobre problemas de comparación cuantitativa y cualitativa, y problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple (tanto directa como inversa). (25 min)
- Puesta en común con todo el grupo de la resolución de los problemas de la actividad F5.1. (15 min).

Diseño y análisis de las actividades:

Las tres situaciones de proporcionalidad simple inversa que se presentan en esta ficha de trabajo hacen referencia a contextos de trabajo colaborativo, en el que varios “individuos”, se reparten un trabajo, pero “actúan” de forma simultánea. De esta forma, las magnitudes “número de individuos” y “tiempo para terminar el trabajo” son inversamente proporcionales y el producto de medidas da cuenta del trabajo total necesario para terminar la tarea. Por tanto, la constante de proporcionalidad inversa puede interpretarse como “volumen necesario de trabajo” o a través de algunas de las parejas de valores homólogos $(k: 1)$, $(1: k)$. Es decir, “individuos necesarios para acabar el trabajo en una unidad de tiempo” o “tiempo necesario para concluir la tarea si solo trabajase un individuo”. En el problema F5.1.1 se construye el contexto a partir de una situación en la que un conjunto de grifos emana agua simultáneamente durante un determinado periodo de tiempo para llenar un depósito. La constante de proporcionalidad inversa dará cuenta, por tanto, del volumen del depósito.

F5.1.1: *Un grifo que vierte 18 litros por minuto emplea 28 horas en llenar un depósito, ¿qué tiempo emplearía si su caudal fuese de 42 litros por minuto?*

Tipo de problema: Valor perdido. **Relación de proporcionalidad:** Inversa.

Magnitudes involucradas:	Constante de proporcionalidad:
V. dependiente, X: Tiempo de llenado (h). Extensiva, continua. V. independiente, A: Velocidad de emanación del grifo (l/min). Intensiva, continua.	k, capacidad del depósito o trabajo realizado por los grifos, medidos en grifos·horas / cantidad de grifos para llenar el depósito en una unidad de tiempo / tiempo para llenar el depósito con un grifo.
Estructura funcional: $$X = \frac{k}{A}$$	**Estructura numérica:** $$(28: 18) \leftrightarrow (x: 42)$$ **Razones internas:** No enteras.

En el falso problema de proporcionalidad F5.1.2 no puede suponerse una relación funcional entre las magnitudes involucradas.

F5.1.2: *En un campamento de 15 días de duración la edad media de los campistas es de 13 años, ¿cuál es la edad media de los campistas de otro campamento que va a durar 21 días?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación funcional.

En el problema F5.1.3 (que pertenece a la propuesta de 1º de ESO), se proporciona directamente la razón externa entre las magnitudes involucradas. Sin embargo, dicha razón es la inversa de la que permite acabar el problema mediante una multiplicación (estrategia VPd3). Este hecho puede provocar alguna dificultad en la aplicación de la estrategia institucionalizada y la aparición de otras estrategias como la VPd4 en la que se usa la razón externa que permite acabar el problema mediante división.

F5.1.3: *Hoy el euro se cambia por 1,20 dólares. Si vas al banco y quieres que te den 450 dólares para un viaje, ¿cuántos euros tienes que llevar?*

Tipo de problema: Valor perdido. Problema F7.1.3 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.

En F5.1.4 se presenta otro de los contextos de trabajo colaborativo en el que un grupo de personas se reparte la limpieza de un edificio y trabaja simultáneamente para terminar dicha tarea en la misma cantidad de tiempo. En este caso, el contexto se utiliza para generar un problema de comparación cuantitativa.

F5.1.4: *Para limpiar los cristales del edificio A una empresa de limpieza lleva a 15 personas y tardan 6 horas en hacer la limpieza. Para limpiar los cristales del edificio B la misma empresa lleva a 11 personas y tardan 8 horas en terminar. ¿En qué edificio es más laborioso limpiar los cristales?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.

Magnitudes involucradas: A: Cantidad de limpiadores. Extensiva, discreta. B: Tiempo para terminar la limpieza (h). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, trabajo necesario para terminar la limpieza medido en limpiadores·días / limpiadores para terminar en la unidad de tiempo / tiempo para terminar si trabaja un limpiador.
Estructura funcional: $A \cdot B = k$	**Estructura numérica:** $(15:6) \sim (11:8)$ **Razones internas:** No enteras.

Por último, a partir de otro contexto de trabajo colaborativo en el que un grupo de máquinas (iguales) trabaja simultáneamente para realizar un número fijo de productos durante una cantidad de tiempo, se construyen dos problemas de valor perdido. En cada problema se solicita el valor correspondiente a una cantidad de magnitud distinta.

F5.1.5: *Para atender un pedido de refrescos una fábrica tarda 8 horas utilizando 12 máquinas embotelladoras.*

F5.1.5.1: *Si se estropean 4 máquinas, ¿cuánto tiempo tardará en hacerse el pedido?*

F5.1.5.2: *Si se quiere hacer el pedido en 3 horas, ¿cuántas máquinas harán falta?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: X: Tiempo para acabar el pedido (h). Extensiva, continua. (Dependiente en apartado A, dependiente en apartado B) Y: Cantidad de máquinas embotelladoras. Extensiva, discreta. (Independiente en apartado A, dependiente en apartado B)	**Constante de proporcionalidad:** k, trabajo necesario para acabar el pedido medido en máquinas·horas / cantidad de máquinas para hacer el pedido en una unidad de tiempo / tiempo para hacer el pedido con una máquina.
Estructura funcional: $X = \frac{k}{Y}$	**Estructura numérica:** $(8:12) \leftrightarrow (x:8), (3:y)$ **Razones internas:** No enteras.

VI.1.3.6. Sexta sesión: Problemas de proporcionalidad compuesta I

Después de trabajar los diferentes tipos de problemas en situaciones de proporcionalidad simple, tanto directa como inversa, los alumnos se enfrentan por primera vez en este ciclo con problemas que involucran tres magnitudes ligadas por una relación de proporcionalidad compuesta. Como en el ciclo II-1, a partir de la situación introductoria se espera que surja en alguna pareja la estrategia de amalgamación, para ser posteriormente institucionalizada. No obstante, cualquier estrategia que implique una manipulación significativa de las operaciones binarias entre cantidades de magnitud será trabajada en clase y tratada como una estrategia válida.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 8.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Reconocer situaciones de proporcionalidad en las que intervienen tres magnitudes. • Resolver problemas de proporcionalidad en los que intervienen tres magnitudes. • Reducir los problemas de proporcionalidad con tres magnitudes a un problema de proporcionalidad simple realizando operaciones con las magnitudes involucradas.	• Identificación, análisis y resolución de problemas de valor perdido con tres magnitudes. • Identificación, análisis y resolución de problemas de comparación con tres magnitudes. • Amalgamación de magnitudes para reducir problemas de tres magnitudes a problemas con dos magnitudes.

Tabla VI - 8. Objetivos didácticos y contenidos de la sexta sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- Se comienza la sesión con la resolución por equipos de la situación introductoria contenida en F6.1. En ella se plantea un problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta tipo Directa-Directa. (10 min)
- Puesta en común de los resultados de la situación introductoria e institucionalización del método de amalgamación. (15 min)
- Tras la institucionalización, las parejas de alumnos abordan la resolución de los problemas de la actividad F6.2, uno de valor perdido de tipo Inversa-Inversa que proviene de la estructura $\mathbb{p} = (1,1,1)$, y otro de comparación con estructura $\mathbb{p} = (-1,-1,1)$. (15 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F6.2. (10 min).
- Entrega de la actividad TC6 de refuerzo en la resolución de problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de proporcionalidad compuesta tienen un contexto realista. En esta sesión, además de intercalar problemas de valor perdido y de comparación cuantitativa, también se intercalan las dos estructuras multiplicativas posibles que pueden formarse con tres magnitudes. Dentro de las estructuras cociente, también se alternan problemas que varían la posición de la incógnita para trabajar los problemas de valor perdido Directa-Directa y Directa-Inversa. Las anteriores variaciones de las variables didácticas arrojan un total de cinco tipos de problemas de proporcionalidad compuesta con tres magnitudes, tres de valor perdido (D-D, D-I, I-I) y dos de comparación (estructura cociente y estructura producto).

Así, el diseño de esta sesión recoge un problema de cada uno de los tipos anteriores, salvo en el caso de los problemas de valor perdido Directa-Directa que se presentan dos, ya que la situación introductoria es un problema de este tipo. Estos seis problemas se distribuyen en dos fichas de trabajo en clase, F6.1 (valor perdido D-D) y F6.2 (valor perdido I-I y comparación con estructura cociente), y una ficha de trabajo para casa TC6 (valor perdido D-D y D-I, y comparación con estructura producto). Los primeros problemas facilitan la amalgamación por producto con la presencia de una magnitud intensiva y su "magnitud denominador", posteriormente se dificulta esta amalgamación por producto variando la posición de la incógnita e introduciendo productos de magnitudes extensivas. A continuación, analizamos individualmente cada uno de los ejercicios propuestos.

La actividad introductoria F6.1.1 tiene una estructura funcional y numérica idéntica a la situación introductoria de la propuesta de 1º de ESO en el ciclo II-1. Sin embargo, a la vista de algunas de las dificultades que tuvieron los alumnos en el ciclo II-1 se decidió cambiar el contexto, dejando inalteradas el resto de las variables, incluso el orden de aparición de los datos.

La estructura numérica favorece el trabajo con la constante de proporcionalidad "6 bizcochos por euro" o "10 céntimos por bizcocho" ya que tanto k como k^{-1} admiten expresiones enteras (realizando el cambio de unidades en el valor económico). El significado de las amalgamaciones parciales hace previsible que los alumnos se decanten por amalgamar por producto el número de bizcochos en cada caja y el número de cajas para calcular la cantidad total de bizcochos. La otra amalgamación parcial con significado "sencillo" involucra a la magnitud incógnita.

F6.1.1: *He ido a comprar bizcochos a una famosa pastelería de Calatayud. Me han dicho que pueden ponerme los bizcochos en cajas grandes o en cajas pequeñas. En las cajas grandes caben 15 bizcochos, y en las pequeñas caben 7 bizcochos. Me he llevado 4 cajas grandes y me han cobrado 6€. ¿Cuánto me hubieran cobrado por 8 cajas pequeñas?*

Tipo de problema: Valor perdido, Directa-Directa. **Relación de proporcionalidad:** Compuesta
Problema F8.1.1 del ciclo II-1, con un cambio de contexto.

Tras la institucionalización, nos hemos decantado en este ciclo por presentar un problema con una estructura funcional diferente. En el problema F6.2.1 los alumnos se enfrentan por primera vez a una situación compuesta con estructura producto, $\mathbb{p} = (1,1,1)$, en un problema de valor perdido. La variable dependiente "número de días que alimentamos a las vacas" se puede amalgamar fácilmente con la variable independiente "veces que comen las vacas al día". Esta amalgamación usando la variable dependiente también se favorece al introducir una razón interna entera entre las cantidades de la magnitud que queda fuera de esta amalgamación. Así, los alumnos podrían calcular el número de veces que se puede alimentar a las vacas en la primera situación y razonar que, al tener la mitad de vacas, dispondrán de comida para alimentar a las vacas el doble de veces. Sin embargo, para amalgamar las variables independientes entre sí, los alumnos deben interpretar el producto "veces que comen las vacas al día·número de vacas".

F6.2.1: *Con el alimento que tiene un granjero acumulado puede dar de comer a 300 vacas 2 veces al día durante 42 días. Si tuviera la mitad de vacas y les diera de comer 3 veces al día, ¿durante cuánto tiempo podría alimentarlas?*

Tipo de problema: Valor perdido, Inversa-Inversa.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Tiempo que los puede alimentar (día). Extensiva, continua. V. independiente, A: Cantidad de vacas. Extensiva, discreta. V. independiente, B: Raciones diarias por vaca. Intensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, cantidad total de raciones. **Amalgamaciones parciales:** $A \cdot B$, total de raciones por día. $X \cdot A$, vacas a las que puede alimentar gastando el pienso en un día. $X \cdot B$, raciones por vaca.
Estructura funcional: $$X = \frac{k}{A \cdot B}$$	**Estructura numérica:** $$(42{:}\,300{:}\,2) \leftrightarrow (x{:}\,150{:}\,3)$$ **Razones internas:** $r_A = 2$, entera.

El siguiente problema de la actividad F6.2, se corresponde exactamente con el problema de comparación cuantitativa en una estructura cociente al que se enfrentaron los alumnos en el ciclo II-1 tras la institucionalización. Como destacamos entonces, parece razonable que las estrategias que empleen los alumnos se basen en la construcción de la constante de proporcionalidad “vasos por ración” o “vasos por cada gato cada día” y no en la de su inversa.

F6.2.2: *Para alimentar a sus 4 gatos durante 5 días, Miguel necesita 40 vasos de leche. Ana María, sin embargo, gasta 35 vasos de leche para alimentar a sus 3 gatos durante 7 días. ¿Qué gatos comen más los de Ana María o los de Miguel?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa. Problema F8.2.2 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta.

Con los problemas contenidos en TC6 se completan las diferentes tipologías de problemas de valor perdido y de comparación cuantitativa que involucran a tres magnitudes. Como en el caso de los problemas simples, se pretende homogeneizar las estrategias de resolución para los diferentes tipos de problemas en vez de dar estrategias específicas para cada tipo, por lo que no se ha considerado necesario presentar cada tipo de problema en el aula.

En TC6.1, tras una misma situación con una estructura cociente, se presentan dos problemas de valor perdido (TC6.1.1 y TC6.1.2) variando la posición de la variable dependiente. El problema TC6.1.1 es exactamente el mismo problema de valor perdido de tipo Directa-Directa que se presentó en el ciclo II-1. Para TC6.1.2, problema de valor perdido Directa-Inversa, se esperan mayores dificultades que para TC6.1.1. Además de ser el primer problema de tipo Directa-Inversa al que se enfrentan los alumnos, la posición de la incógnita en TC6.1.2 es la de una de las magnitudes que se deben utilizar para proceder mediante una estrategia de amalgamación por producto entre “tiempo trabajado en cada jornada” y “cantidad de jornadas”. Se ha procurado una estructura numérica sencilla con la constante de proporcionalidad entera y alguna de las razones internas también entera para que dicha estructura numérica no introduzca mayores dificultades en el problema.

TC6.1: *La máquina que pinta las líneas de la carretera tarda 3 días, trabajando 4 horas al día para pintar una carretera de 48 km.*

TC6.1.1: *¿Cuántos kilómetros puede pintar en 6 días si trabajase 5 horas al día?*

TC6.1.2: *¿Cuántas horas al día debería estar en funcionamiento la máquina para pintar en 9 días 36 km?*

TC6.1.1	
Tipo de problema: Valor perdido, Directa-Directa. Problema F8.2.1 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta.
TC6.1.2	
Tipo de problema: Valor perdido, Directa-Inversa.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Duración de la jornada de trabajo (h/día). Intensiva, continua. V. independiente, A: Distancia pintada (km). Extensiva, continua. V. independiente, B: Cantidad de jornadas de trabajo. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, velocidad a la que pinta. **Amalgamaciones parciales:** $X \cdot B$, tiempo (total) de trabajo. A/B, velocidad, distancia pintada por jornada de trabajo. A/X, distancia total pintada por cada hora de trabajo diaria.
Estructura funcional: $$X = k^{-1} \cdot \frac{A}{B}$$	**Estructura numérica:** $$(4:48:3) \leftrightarrow (x_b:36:9)$$
Razones externas: $k = 12$ km/h. Entera. A/B y X/A enteras. Previo cambio de unidades a minutos: $k^{-1} = 5$ min/km. Entera.	**Razones internas:** $r_B^{-1} = 3$ Entera. El resto no enteras.

En el problema TC6.2 los alumnos se enfrentan por primera vez a un problema de comparación en una estructura producto de tres magnitudes. La amalgamación por producto del “tiempo diario” y “cantidad de jornadas” reduce la situación a un problema de proporcionalidad inversa en el que hay que dar significado al producto de dos magnitudes extensivas “cantidad de grifos” y “tiempo de apertura de los grifos”.

TC6.2: *Para llenar la piscina del pueblo A se han abierto 7 grifos, 4 horas al día, durante una semana. Para llenar la piscina del pueblo B se han abierto 10 grifos, 5 horas al día, durante 4 días. ¿Qué piscina tiene una capacidad mayor?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa. **Magnitudes involucradas:** A: Cantidad de grifos. Extensiva, discreta. B: Duración de la jornada (h/día). Intensiva, continua. C: Cantidad de jornadas (día). Extensiva, discreta. **Estructura funcional:** $A \cdot B \cdot C = k$ **Estructura numérica:** $(7{:}\,4{:}\,7) \sim (10{:}\,5{:}\,4)$ **Razones internas:** No enteras.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta. **Constante de proporcionalidad:** k, volumen de la piscina o trabajo total realizado por los grifos, medidos en grifos·horas / cantidad de grifos para llenar la piscina en una unidad de tiempo / tiempo para llenar la piscina con un grifo. **Amalgamaciones parciales:** $A \cdot B$, volumen de llenado diario, o trabajo realizado por los grifos diario. $A \cdot C$, Cantidad de grifos para llenar la piscina en una jornada, o cantidad de jornadas para llenar la piscina con un grifo. $B \cdot C$, tiempo de llenado.

VI.1.3.7. Séptima sesión: Problemas de proporcionalidad compuesta II

En esta sesión, por un lado, se consolida la resolución de problemas de valor perdido y de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta y, por otro, se introduce un problema de comparación cualitativa. La sesión se estructura como un taller de problemas, por lo que la intervención del profesor-investigador con el grupo clase se reduce a la puesta en común de la tarea para casa al comienzo de la sesión y a la puesta en común de los problemas de la actividad F7.1 en los últimos minutos de la sesión.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 9.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Consolidar la resolución problemas de proporcionalidad en los que intervienen tres magnitudes. • Reducir los problemas de proporcionalidad con tres magnitudes a un problema de proporcionalidad simple realizando operaciones con las magnitudes involucradas.	• Identificación, análisis y resolución de problemas de valor perdido con tres magnitudes. • Identificación, análisis y resolución de problemas de comparación con tres magnitudes. • Amalgamación de magnitudes para reducir problemas de tres magnitudes a problemas con dos magnitudes.

Tabla VI - 9. Objetivos didácticos y contenidos de la séptima sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- Recogida y puesta en común de TC6. (10 min)
- Realización de la actividad de clase F7.1, en la que los alumnos deben resolver problemas de proporcionalidad compuesta con diferentes estructuras multiplicativas y tipologías (valor perdido y comparación cualitativa y cuantitativa). (30 min)
- Puesta en común de los resultados obtenidos en la actividad F7.1. (10 min)

Diseño y análisis de las actividades:

La actividad comienza con el problema F7.1.1 de comparación cualitativa. La estructura funcional y el contexto son los mismos que para el problema de comparación numérica F6.2.2 de la anterior sesión. La disposición de las comparaciones hace imposible determinar quién da de comer una mayor cantidad de leche a sus gatos. Esta indeterminación puede analizarse centrándonos en las dos magnitudes que se pueden amalgamar por producto. En este producto se especifica que uno de los factores es mayor en la primera situación mientras que el otro factor es menor en dicha situación, por lo que no puede determinarse la comparación del producto en ambas situaciones. Para no añadir una mayor complejidad a la situación se ha optado por utilizar la misma situación como referente en las tres comparaciones.

F7.1.1: *Para alimentar a sus gatos, Miguel necesita más leche que Ana María en menos tiempo. Sabemos también que Miguel tiene más gatos que Ana María ¿Qué gatos comen más los de Ana María o los de Miguel?*

Tipo de problema: Comparación cualitativa. **Magnitudes involucradas:** A: Volumen de leche. Extensiva, continua. B: Cantidad de gatos. Extensiva, discreta. C: Tiempo que se alimentan. Extensiva, continua. **Estructura funcional:** $\frac{A}{B \cdot C} = k$ **Estructura numérica:** $(a^{+}: b^{+}: c^{-}) \sim (a: b: \mathrm{c})$	**Relación de proporcionalidad:** Inversa. **Constante de proporcionalidad:** k, volumen de leche por ración. **Amalgamaciones parciales:** $B \cdot C$, cantidad de raciones necesarias. A/B, volumen total de leche que consume cada gato. A/C, volumen diario de leche necesario para alimentar a todos gatos.

El problema de comparación cuantitativa F7.1.2 es el problema TC8.9 del ciclo II-1 en el que, tras las reflexiones del ciclo II-1, se ha modificado ligeramente la estructura numérica para que la constante de proporcionalidad "precio por persona y noche" sea entera en ambas situaciones.

F7.1.2: *En el hotel A han cobrado 1750 € a 5 amigos por dormir 10 noches. En el hotel B, a 7 amigos les han cobrado 1120 € por dormir 4 noches. ¿Qué hotel es más barato?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta.
Magnitudes involucradas: A: Valor económico total del alojamiento (€). Extensiva, discreta. B: Cantidad de personas que se han alojado. Extensiva, discreta. C: Tiempo de alojamiento[54] (día): Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad** k, coste unitario del día de alojamiento (por persona). **Amalgamaciones parciales:** $B \cdot C$, días de alojamiento que deben pagar entre todos. A/B, valor económico del alojamiento (de toda la estancia) por persona. A/C, valor económico del alojamiento (para todo el grupo) por noche.
Estructura funcional: $$\frac{A}{B \cdot C} = k$$	**Estructura numérica:** $$(1750{:}\,5{:}\,10) \sim (1120{:}\,7{:}\,4)$$
Razones externas: A/B, A/C y $A/(B \cdot C)$ enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En el problema de valor perdido F7.1.3 los alumnos se enfrentan por primera vez a un problema en una situación compuesta con cuatro magnitudes. Para generarlo se ha introducido una magnitud intensiva “masa de pintura por bote” junto con la magnitud “cantidad de botes” y dos magnitudes de longitud cuyo producto genera la magnitud superficie. De esta manera, la posición de la incógnita deja libre uno de los productos (en este caso el producto que genera la superficie). Además, la constante de proporcionalidad del problema (superficie pintada con cada kilogramo de pintura) es entera.

F7.1.3: *Para pintar un muro de 40 m de largo y 3 m de alto, se han empleado 6 botes de 2 kg de pintura. ¿Cuántos botes de 5 kg del mismo tipo de pintura se necesitarán para pintar un muro de 75 m de largo y 2 m de alto?*

Tipo de problema: Valor perdido, Directa-Directa-Inversa.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Cantidad de botes. Extensiva, discreta. V. independiente, A: Masa de pintura en cada bote (kg/bote). Intensiva, continua. V. independiente, B: Longitud, anchura del muro (m). Extensiva, continua. V. independiente, C: Longitud, altura del muro (m). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, masa de pintura necesaria para pintar una unidad de superficie. k^{-1}, superficie que puede pintarse por unidad de masa de pintura.

[54] El tiempo de alojamiento en un hotel se mide por días, noches o jornadas de forma discreta por lo que hemos considerado la magnitud “tiempo de alojamiento” como una cantidad cardinal (discreta) y no como una magnitud de tiempo (continua).

Estructura funcional: $$X = k \cdot \frac{B \cdot C}{A}$$ **Estructura numérica:** $$(6:2:40:3) \leftrightarrow (x:5:75:2)$$ **Razones internas:** No enteras. **Razones externas:** $k^{-1} = 10\ m^2/kg$. Entera. B/A, entera en ambas tuplas. $(B \cdot C)/A$, entera en ambas tuplas.	**Amalgamaciones parciales:** $X \cdot A$, masa de pintura utilizada. $B \cdot C$, superficie del muro. A/B, masa de pintura por cada unidad de anchura del muro y por cada bote. A/C, masa de pintura por cada unidad de altura del muro y por cada bote. X/B, botes por cada unidad de anchura del muro. X/C, botes por cada unidad de altura del muro. $A/(B \cdot C)$, masa de pintura por cada unidad de superficie del muro y por cada bote. $X/(B \cdot C)$, botes por cada unidad de superficie.

La actividad concluye con el problema de valor perdido de tipo Inversa-Inversa F7.1.4. En dicho problema se presenta una situación con dos magnitudes intensivas y una magnitud extensiva, de forma que el producto de las dos magnitudes intensivas (problema Razón-Razón-Razón) genera una magnitud intensiva que tiene a la magnitud extensiva como "denominador" y, por tanto, la constante de proporcionalidad es una cantidad de la "magnitud numerador". Es decir, una situación que puede esquematizarse como sigue:

$$C \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = A$$

A pesar de que la estructura anterior facilita las amalgamaciones por producto, la posición de la variable dependiente se ha elegido en la "magnitud central" (A/B en el esquema anterior) de forma que el producto entre las variables independientes no tiene una interpretación directa.

F7.1.4: *Victoria ha terminado un libro en 10 días, leyendo 4 horas diarias a razón de 15 páginas por hora. ¿Cuántas horas diarias habría tenido que dedicar a la lectura para acabar el libro en 5 días leyendo 20 páginas a la hora?*

Tipo de problema: Valor perdido, Inversa-Inversa. **Magnitudes involucradas:** V. dependiente, X: Tiempo de lectura diario (h/día). Intensiva, continua. V. independiente, A: Cantidad de jornadas de lectura (día). Extensiva, discreta. V. independiente, B: Velocidad de lectura (páginas/h). Intensiva, discreta.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta. **Constante de proporcionalidad:** k, cantidad de páginas que tiene el libro. **Amalgamaciones parciales:** $A \cdot B$, total de páginas del libro que lee por cada unidad de tiempo que dedica a la lectura al día. $X \cdot A$, tiempo que tarda en leer el libro. $X \cdot B$, cantidad de páginas leídas por jornada de lectura.

Estructura funcional: $$X = \frac{k}{A \cdot B}$$	**Estructura numérica:** $$(4:10:15) \leftrightarrow (x:5:20)$$ **Razones internas:** $r_A = 2$. Entera. El resto no enteras.

VI.1.3.8. Octava sesión: Repartos proporcionales

La octava sesión es la única dedicada a la resolución de problemas de repartos directa e inversamente proporcionales. A partir de la situación introductoria en la que se plantea un problema de cada tipo, se espera que surjan en algunos equipos las ideas suficientes para poder generalizar métodos de resolución para cada uno de los problemas. Tras la institucionalización se realizará un problema de cada tipo como actividad de clase y otro más de cada tipo se enviará como tarea para casa.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 10.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Reconocer situaciones de proporcionalidad en contextos de repartos “justos” en los que hay que compensar o reflejar una situación inicial a través del reparto. • Justificar las técnicas de reparto proporcional mediante el uso de razones, constantes de proporcionalidad y condiciones de regularidad.	• Identificación, análisis y resolución de problemas de repartos directamente proporcionales. • Identificación, análisis y resolución de problemas de repartos inversamente proporcionales (con 2 “individuos” en el reparto).

Tabla VI - 10. Objetivos didácticos y contenidos de la octava sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- La sesión comienza con la resolución en parejas de la situación introductoria F8.1 que contiene un problema susceptible de ser resuelto mediante un modelo de reparto directamente proporcional y otro mediante un modelo de reparto inversamente proporcional. (15 min)
- Puesta en común con todo el grupo de los resultados de la actividad F8.1 e institucionalización de repartos directa e inversamente proporcionales. (10 min)
- Realización en parejas de los problemas contenidos en la actividad de aula F8.2 (un reparto directo y otro inverso). (15 min)
- Puesta en común de los resultados de los problemas de la actividad F8.2. (10 min)
- Entrega de la actividad TC8.

Diseño y análisis de las actividades:

La actividad de aula F8.1 es la situación introductoria para este foco de contenido. Se compone de dos problemas en los que hay que repartir una cantidad de dinero entre una serie de individuos. En ninguno de los dos problemas se especifica la forma en la que debe repartirse el dinero, sino que se pregunta a los alumnos cómo creen ellos que debería hacerse. En el problema F8.1.1 se espera que aparezcan respuestas que sigan un modelo de reparto directamente proporcional, de forma que el reparto del premio refleje las comparaciones relativas entre las cantidades que cada individuo ha puesto para comprar el billete de lotería.

F8.1.1: *Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4€, Bea 6€ y Carmen 10€. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?*

Tipo de problema: Reparto. **Número de participantes en el reparto:** 3. **Magnitudes involucradas:** Magnitud de reparto, X: Valor económico premio (€). Extensiva, discreta. Pesos, magnitud según la cual se reparte, W: Valor económico billete (€). Extensiva, discreta.	**Relación de proporcionalidad:** Directa. **Constante de proporcionalidad:** k, valor económico del premio por cada unidad de valor económico del billete. k^{-1}, valor económico del billete por cada unidad de valor económico del premio.
Estructura funcional: $X = k \cdot W$ $X_A + X_B + X_C = X_T$	**Estructura numérica:** $(3000\colon 20) \leftrightarrow (x_A\colon 4), (x_B\colon 6), (x_C\colon 10),$
Razones externas: $k = 150$ euros de premio por cada euro del billete. Entera.	**Razones internas:** $r_W = 5$ para Alba. Entera. $r_W = 2$ para Carmen. Entera.

El segundo problema introductorio, F8.1.2, presenta una situación de reparto que podría modelizarse mediante un reparto inversamente proporcional. Se pretende que surja de forma natural que la comparación multiplicativa entre los sueldos debe compensarse con el reparto de la herencia, de forma que la comparación multiplicativa de la herencia repartida a cada nieto sea la inversa que la de los sueldos. Se presenta una estructura numérica que se pueda normalizar fácilmente, además, al normalizar, el peso asignado a uno de los nietos es la unidad.

F8.1.2: *Una abuela tiene 60 000 € que quiere repartir entre sus dos únicos nietos. Uno de ellos tiene un sueldo de 1 000 € al mes, mientras que el otro gana 3. 00 €. La abuela ha decidido que el reparto debe hacerse de forma que se compense la diferencia de sueldos de sus nietos. ¿Cómo debería repartir su dinero?*

Tipo de problema: Reparto. **Número de participantes en el reparto:** 2.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa. **Constante de proporcionalidad:** k, sin interpretación realista en el problema.

Magnitudes involucradas: Magnitud de reparto, X: Valor económico premio (€). Extensiva, discreta. Pesos, magnitud según la cual se reparte, W: Valor económico billete (€). Extensiva, discreta. **Razones internas:** $r_W^{-1} = 4$ para el nieto que gana 3000 €/mes. Entera.	**Estructura funcional:** $X = \frac{k}{W}$ $X_A + X_B = X_T$ **Estructura numérica:** $\left(60000: \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{3000}}\right) \leftrightarrow (x_A: 1000), (x_B: 3000)$

Los problemas F8.2.1 y F8.2.2 son similares a los contenidos en la ficha F8.1. Los alumnos se enfrentarán a ellos tras la institucionalización de las estrategias de resolución de los problemas de la situación inicial.

En el problema F8.2.1, modelizable mediante una estructura de reparto directamente proporcional, se cambia (respecto a F8.1.1) la magnitud según la cual se reparte, que pasa a ser el tiempo trabajado. Se mantiene el cardinal de individuos entre los que repartir (tres individuos), pero se introducen variaciones en la estructura numérica que no favorecen el trabajo con las razones internas. Además, las horas trabajadas no se proporcionan directamente sino que deben calcularlas los alumnos a partir de la hora de inicio y la hora de finalización de la jornada.

F8.2.1: *Han venido 3 pintores a pintar mi casa. El primero ha llegado a las 8:00, el segundo 1 hora más tarde y el tercero ha llegado a las 12:00. Todos ellos se han ido a las 16:00 cuando han acabado de pintar. Si les he pagado 304 €, ¿cómo deberían repartirse el dinero?*

Tipo de problema: Reparto. **Número de participantes en el reparto:** 3.	**Relación de proporcionalidad:** Directa. **Constante de proporcionalidad:** k, valor económico del sueldo por cada unidad de tiempo trabajado. k^{-1}, tiempo trabajado por cada unidad de valor económico del sueldo.
Magnitudes involucradas: Magnitud de reparto, X: Valor económico del sueldo (€). Extensiva, discreta. Pesos, magnitud según la cual se reparte, W: Tiempo trabajado (h). Extensiva, continua. **Razones externas:** $k = 16$ euros por hora trabajada. Entera.	**Estructura funcional:** $X = k \cdot W$ $X_A + X_B + X_C = X_T$ **Estructura numérica:** $(304: 19) \leftrightarrow (x_A: 8), (x_B: 7), (x_C: 4),$ **Razones internas:** No enteras.

En el problema F8.2.2 se pide explícitamente realizar un reparto inversamente proporcional a la edad de los individuos. El número de individuos sigue siendo dos (como en F8.1.2) y se varía la estructura numérica para no favorecer la normalización de los pesos de forma que uno de los individuos tenga peso 1. Este hecho puede provocar dificultades para implementar la estrategia institucionalizada.

F8.2.2: *Tengo dos sobrinos, uno de 4 años y otro de 7. Quiero repartirles 121 caramelos de forma inversamente proporcional a sus edades. ¿Cuántos caramelos le daré a cada uno?*

Tipo de problema: Reparto. **Número de participantes en el reparto:** 2.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa. **Constante de proporcionalidad:** k, sin interpretación realista en el problema.
Magnitudes involucradas: Magnitud de reparto, X: Cantidad de caramelos. Extensiva, discreta. Pesos, magnitud según la cual se reparte, W: Edad (año). Extensiva, discreta.	**Estructura funcional:** $X = \frac{k}{W}$ $X_A + X_B = X_T$
Razones internas: No enteras.	**Estructura numérica:** $\left(121 : \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{7}}\right) \leftrightarrow (x_A : 4), (x_B : 7)$

La ficha de trabajo para casa supone un refuerzo de lo visto en clase durante esta sesión y contiene un problema modelizable mediante una estructura de reparto inversamente proporcional, TC8.1, y otro según una estructura de reparto directamente proporcional TC8.2.

En TC8.1 se recupera la ausencia de indicación del modelo según el cual debe realizarse el reparto, y se espera que los alumnos compensen la comparación multiplicativa entre los pesos (razón entre los días que sí han asistido dos alumnos con problemas de absentismo) con un reparto en el que la comparación multiplicativa entre las cantidades repartidas (razón entre los días de castigo por no asistir a clase) sea la inversa de la de los pesos. La diferencia entre este problema y los anteriores es que los pesos no se dan con valores absolutos, sino que se proporciona la razón entre los mismo, con un sistema de representación verbal (“tres por cada dos”).

TC8.1: *Jesús y Roberto han sido castigados por faltar a clase. El castigo consiste en que durante cada uno de los siguientes 35 recreos uno de ellos tiene que ir a recoger papeles que estén por el suelo. Si por cada 3 días que ha ido Roberto a clase, Jesús ha ido 2, ¿cuántos días debería ir cada uno a limpiar el patio?*

Tipo de problema: Reparto. **Número de participantes en el reparto:** 2.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa. **Constante de proporcionalidad:** k, sin interpretación realista en el problema.
Magnitudes involucradas: Magnitud de reparto, X: Cantidad de periodos de recreo de castigo. Extensiva, discreta. Pesos, magnitud según la cual se reparte, W: Cantidad de días que han asistido a clase. Extensiva, discreta.	**Estructura funcional:** $X = \frac{k}{W}$ $X_A + X_B = X_T$

Razones internas:	**Estructura numérica:**
No enteras.	$\left(35{:}\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}}\right) \leftrightarrow (x_A{:}\,3),(x_B{:}\,2)$

En TC8.2 se aumenta el número de individuos que participa en el reparto (cinco). Pese a que este hecho puede incorporar alguna dificultad, se plantea una estructura numérica sencilla. Así, aunque hay que considerar los cinco pesos para hallar la suma de estos, tres individuos tienen por peso la unidad y dos individuos tienen peso asociado 2, por lo que el proceso de resolución es similar al de un reparto según una estructura directamente proporcional con dos individuos.

TC8.2: *Cinco compañeros de piso comparten el único ordenador que tienen en casa. Se han puesto de acuerdo en que dos de ellos lo usan durante dos días a la semana cada uno y los otros tres lo usan solo un día a la semana. Si la tarifa de internet es 100,80 €, calcula cuánto debería pagar cada uno.*

Tipo de problema: Reparto. **Número de participantes en el reparto:** 5.	**Relación de proporcionalidad:** Directa. **Constante de proporcionalidad:** k, valor económico de la factura por día de uso. k^{-1}, días de uso por cada unidad de valor económico de la factura.
Magnitudes involucradas: Magnitud de reparto, X: Valor económico de la factura (€). Extensiva, discreta. Pesos, magnitud según la cual se reparte, W: Tiempo de uso (día). Extensiva, discreta.	**Estructura funcional:** $X = k \cdot W$ $X_A + X_B + X_C + X_D + X_E = X_T$ **Estructura numérica:** $(100{,}80{:}\,7)$ $\leftrightarrow (x_A{:}\,2),(x_B{:}\,2),(x_C{:}\,1)(x_D{:}\,1),(x_E{:}\,1),$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** $r_W = 7$ (para los que usan el ordenador 1 día). Entera.

VI.1.3.9. Novena sesión: Porcentajes I

Como en la propuesta para 1º de ESO, en la tercera semana de clase (novena sesión) comienza el trabajo con porcentajes. El objetivo principal de la primera sesión es conectar la noción de porcentaje con los conceptos estudiados sobre proporcionalidad simple directa. Para intentar solucionar algunas de las deficiencias observadas en el primer ciclo, se introducen ejercicios que hacen énfasis en el cálculo e interpretación de razones en situaciones de porcentaje. En concreto, se insiste en la interpretación de un porcentaje como una pareja de valores asociados a dos magnitudes ligadas por una relación de proporcionalidad, las razones asociadas a un porcentaje y la interpretación de los complementarios de un porcentaje dado.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 11.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Reconocer e interpretar las diferentes razones que pueden asociarse a un porcentaje. • Calcular el porcentaje que representa una cantidad respecto de otra, asociando el proceso al cálculo de una razón.	• Porcentajes. • Significado de las diferentes razones asociadas a un porcentaje. • Cálculo del porcentaje que una cantidad representa respecto de otra. Problemas de Tipo II.

Tabla VI - 11. Objetivos didácticos y contenidos de la novena sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- Puesta en común con todo el grupo de los resultados obtenidos en los problemas de repartos proporcionales de la actividad TC8. (10 min)
- Realización de la actividad F9.1 que supone la situación introductoria para el concepto de porcentaje y trabaja la obtención del porcentaje asociado a una parte respecto de un total (Tipo II) y la interpretación de las razones asociadas a una situación de porcentaje. (20 min)
- Puesta en común de los resultados de la actividad F9.1 e institucionalización del concepto de porcentaje y su relación con el concepto de razón. (20 min)
- Reparto de la actividad TC9 en donde se trabajan problemas de valor perdido asociados al concepto de porcentaje (Tipo I y Tipo III).

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas F9.1.1 y F9.1.2 se diseñan como situación introductoria para el concepto de porcentaje.

En el problema F9.1.1, a partir de una situación en la que aparecen las cantidades absolutas asociadas a dos magnitudes, se proponen diferentes interpretaciones de razones relacionadas con dichas cantidades y los alumnos deben proponer la cantidad numérica que correspondería a estas razones. Entre las interpretaciones de las diferentes razones, se propone a los alumnos averiguar la cantidad de una de las magnitudes que se correspondería con 100 unidades del total. La sencillez de la estructura numérica con la presencia de la razón $\frac{1}{4}$ puede favorecer el uso de puntos de referencia.

F9.1.1: *En una clase hay 6 chicos de un total de 24 alumnos.*

F9.1.1.1: *En la clase hay* *chicas por cada alumno.*

F9.1.1.2: *En la clase hay* *chicos por cada alumno.*

F9.1.1.3: *En la clase hay* *alumnos por cada chico.*

F9.1.1.4: *En la clase hay* *alumnos por cada chica.*

F9.1.1.5: *En la clase hay* *chicas por cada 100 alumnos.*

F9.1.1.6: *En la clase hay* *chicos por cada 100 alumnos.*

F9.1.1.7: *En la clase hay* *chicas por cada chico.*

F9.1.1.8: *En la clase hay* *chicos por cada chica.*

Tipo de problema: Valor perdido.
Magnitudes involucradas:
P_1: Cantidad de chicos. Extensiva, discreta.
P_2: Cantidad de chicas. Extensiva, discreta.
T: Total de alumnos. Extensiva, discreta.

Estructura funcional:

$$T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$$
$$P_2 = (1 - k) \cdot T \qquad P_1 = \frac{k}{1 - k}\, P_2$$

Razones externas: $k^{-1} = 4$ (Entera).

Relación de proporcionalidad: Directa / %.
Constante de proporcionalidad:
k, comparación multiplicativa entre el número de chicos y el total de personas en clase (análogamente para $(1 - k)$ con la cantidad de chicas).
Estructura numérica:
$(24 : 6 + \square) \leftrightarrow (1 : \square + x_1)$, $(1 : x_2 + \square)$, $(x_3 : 1 + \square)$, $(x_4 : \square + 1)$, $(100 : \square + x_5)$, $(100 : x_6 + \square)$, $(\square : 1 + x_7)$, $(\square : x_8 + 1)$.

El problema F9.1.2 es similar al anterior, sin embargo, la información inicial es un porcentaje interpretado como cantidad de una magnitud relacionada con 100 unidades de otra. A partir de esta situación se proporcionan diferentes interpretaciones de razones relacionadas para las que los alumnos deben proporcionar el valor numérico.

F9.1.2: *En una ciudad hay 10 personas alérgicas por cada 100 habitantes.*

F9.1.2.1: *En la ciudad hay* *alérgicos por cada habitante.*

F9.1.2.2: *En la ciudad hay* *no alérgicos por cada habitante.*

F9.1.2.3: *En la ciudad hay* *habitantes por cada alérgico.*

F9.1.2.4: *En la ciudad hay* *habitantes por cada no alérgico.*

F9.1.2.5: *En la ciudad hay* *alérgicos por cada no alérgico.*

F9.1.2.6: *En la ciudad hay* *no alérgicos por cada alérgico.*

F9.1.2.7: *En la ciudad hay* *no alérgicos por cada 100 personas.*

Tipo de problema: Valor perdido.
Magnitudes involucradas:
P_1: Cantidad de alérgicos. Extensiva, discreta.
P_2: Cantidad de no alérgicos. Extensiva, discreta.
T: Total de habitantes. Extensiva, discreta.
Estructura funcional:

$$T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$$
$$P_2 = (1 - k) \cdot T \qquad P_1 = \frac{k}{1 - k}\, P_2$$

Razones externas: $k^{-1} = 10$ (Entera).

Relación de proporcionalidad: Directa / %.
Constante de proporcionalidad:
k, comparación multiplicativa entre el número de alérgicos y el total de habitantes (análogamente para $(1 - k)$ con la cantidad de no alérgicos).
Estructura numérica:
$(100 : 10 + \square) \leftrightarrow (1 : x_1 + \square)$, $(1 : \square + x_2)$, $(x_3 : 1 + \square)$, $(x_4 : \square + 1)$, $(\square : x_5 + 1)$, $(\square : 1 + x_6)$, $(100 : \square + x_7)$.

Una vez institucionalizado el concepto de porcentaje asociándolo con una pareja de valores homólogos unidos mediante una relación de proporcionalidad simple directa, se proponen diferentes problemas de valor perdido utilizando este concepto como tarea para casa. Los problemas que componen esta ficha de trabajo TC9 están extraídos de la ficha homónima del primer ciclo. Solo se han realizado unos pequeños cambios semánticos y de estructura numérica en uno de ellos.

El problema de valor perdido de Tipo I, TC9.1, es exactamente el problema TC9.2 que se realizó en la propuesta de 1º de ESO. En el ciclo II-1 dicho problema obtuvo unas muy buenas tasas de éxito.

TC9.1: *En el instituto hay 460 alumnos repartidos de la siguiente forma: en primer ciclo está el 45 % de los alumnos, en segundo ciclo el 30 %, y el resto está en bachiller.*

TC9.1.1 *¿Qué porcentaje de alumnos hay en bachiller?*

TC9.1.2 *¿Cuántos alumnos hay en bachiller?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo de la parte conocidos el porcentaje y el total. Tipo I. Problema TC9.2 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.

El segundo problema, TC9.2, está inspirado en el problema TC9.1 de la propuesta para 1º de ESO, pero se han realizado algunos cambios en el enunciado, por lo que presentamos de nuevo el análisis de sus variables didácticas. Los resultados del problema análogo en el ciclo II-1 fueron considerablemente peores que los resultados del problema anterior. Es previsible que, pese a los cambios introducidos, este problema de Tipo III genere más dificultades a los alumnos que el problema de Tipo I anterior.

TC9.2: *En una botella de refresco se lee que el 18 % del contenido es zumo de limón. Sabiendo que en la caja hay 0,27 litros de zumo de limón, ¿cuántos litros de refresco tiene la botella?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo del total conocidos el porcentaje y la parte. Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Volumen de zumo. Extensiva, continua. T: Volumen de refresco. Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el volumen de zumo y el volumen de refresco
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$	**Estructura numérica:** $(100 : 18 + \square) \leftrightarrow (x: 0{,}27 + \square)$.
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

VI.1.3.10. Décima sesión: Porcentajes II

Tras la introducción del porcentaje en la sesión anterior, la sesión 10 se diseña como un taller de problemas relacionados con el porcentaje. Se diseñan problemas de Tipo I y III y se introducen preguntas de comparación y de cálculo de complementarios.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 12.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Profundizar en el concepto de porcentaje como tanto por cien. • Consolidar la relación entre los problemas de porcentajes y los de proporcionalidad directa previamente estudiados. • Calcular razonadamente el total conocidos la parte y el porcentaje asociado a la parte.	• Porcentajes. • Cálculo de la parte conocido el total y el porcentaje asociado (Problemas de Tipo I). • Cálculo de la cantidad total conocidos la parte y el porcentaje asociado a ella (Problemas de Tipo III).

Tabla VI - 12. Objetivos didácticos y contenidos de la décima sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- Recogida y puesta en común de los resultados de la actividad TC9. (10 min)
- Realización en parejas de los problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje contenidos en la actividad F10.1. La actividad contiene esencialmente dos problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje de Tipo III y Tipo I, respectivamente. (25 min)
- Puesta en común de los resultados de la actividad F10.1 e institucionalización de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje. (15 min)

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas planteados para esta sesión de trabajo se corresponden con los de la ficha F10.2 del ciclo II-1 (de 1º de ESO). Sin embargo, se ha modificado ligeramente la estructura numérica e introducido alguna pregunta adicional en el primero de ellos, y en el segundo hemos modificado los datos proporcionados para convertirlo en un problema de Tipo I en vez de en uno de Tipo III. Por tanto, presentamos de nuevo el análisis de los valores de las variables didácticas. En cualquier caso, la estructura numérica que presentan estos problemas es más complicada que la utilizada en los problemas de la sesión anterior ya que no favorecen el uso de puntos de referencia.

El problema F10.2.1 (análogo al problema homónimo del ciclo II-1) es un problema esencialmente de Tipo III. Además, se pregunta por un falso complementario, es decir, se pregunta por la cantidad de magnitud asociada a una parte que no es necesariamente la complementaria de la parte sobre la que informa el enunciado. Por último, la tercera pregunta insiste en la conexión entre los conceptos de razón y porcentaje. El cambio introducido en la estructura numérica permite dar una respuesta entera a la segunda pregunta.

F10.1.1: *Se sabe que en un determinado pueblo sólo el 3 % de la gente es pelirroja. Si en ese pueblo hay exactamente 621 pelirrojos:*

F10.1.1.1 *¿Cuántas personas viven en ese pueblo?*

F10.1.1.2 *¿Cuántas personas rubias viven allí?*

F10.1.1.3 *¿Cuántos pelirrojos hay por cada habitante?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo del total conocidos el porcentaje y la parte. Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de personas pelirrojas. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de personas no pelirrojas. Extensiva, discreta. T: Total de personas en la población. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el número de pelirrojos y el total de personas en la población (análogamente para $(1-k)$ con la cantidad de no pelirrojos).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \qquad P_1 = \frac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(100 : 3 + \square) \leftrightarrow (x_1 : 621 + \square), (1 : x_3 + \square),$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** $r_{P_2}^{-1} = 207$ Entera.

El problema F10.2.2 está inspirado en el problema homónimo del cilo II-1, pero convertido en un problema de Tipo I. Además, se introduce una primera pregunta en la que se pide comparar dos cantidades absolutas (la de chopos y la de fresnos). Se espera que los alumnos respondan a esta pregunta aludiendo a que el porcentaje de una de las partes es mayor que el de otra, por tanto si de cada 100 árboles hay más de un tipo que de otro, también será mayor la cantidad absoluta de árboles.

F10.1.2: *En el parque hay un total de 616 árboles de muchos tipos. El 7 % de ellos son olmos y el 11 % fresnos.*

F10.1.2.1 *¿Qué hay más olmos o fresnos?¿Por qué?*

F10.1.2.2 *¿Cuántos fresnos hay?*

F10.1.2.3 *¿Cuántos chopos hay?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa / Valor perdido. Cálculo de la parte conocidos el porcentaje y el total. Tipo I.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de olmos. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de fresnos. Extensiva, discreta. P_3: Cantidad de árboles que no son ni fresnos ni olmos. Extensiva, discreta. T: Total de árboles. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k_1, comparación multiplicativa entre el número de olmos y el total de árboles (análogamente para k_2 con la cantidad de fresnos y para k_3 con la cantidad de árboles que no son ni fresnos ni olmos).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 + P_3$ $P_1 = k_1 \cdot T \qquad P_2 = k_2 \cdot T \qquad P_3 = k_3 \cdot T$ $k_1 + k_2 + k_3 = 1$	**Estructura numérica:** $(100 : 7 + 11 + \square) \leftrightarrow (\square : 468 + x_3 + \square)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

VI.1.3.11. Undécima sesión: Aumentos y disminuciones porcentuales I

En la sesión undécima se comienza el trabajo con aumentos y disminuciones porcentuales. El diseño de los problemas durante la sesión es similar al planteado en la novena sesión, intentando enfatizar las relaciones entre las cantidades iniciales y finales involucradas en una situación de aumento y disminución. De esta manera se priorizará el trabajo con las razones entre las cantidades finales e iniciales para intentar evitar argumentos aditivos erróneos en los problemas de Tipo III, como, por ejemplo, disminuir la cantidad final en un porcentaje igual al incremento para encontrar la cantidad inicial.

Los problemas con los que se introducen las situaciones de aumentos y disminuciones (y casi todos los trabajados durante la propuesta en este foco de contenido) se contextualizan a partir de magnitudes de valor económico. Además de la cercanía con el origen histórico del concepto de porcentaje, el sistema monetario europeo (y el de la mayoría de los países) utiliza una subunidad de valor económico que se corresponde con la centésima parte de la unidad. Este hecho, permite interpretar como tanto por uno las razones normalizadas asociadas al porcentaje de manera intuitiva y operativamente sencilla. Así, por ejemplo, un descuento del $5\,\%$, se traduce en un descuento de 5 unidades monetarias por cada 100 unidades monetarias del precio final, o un precio final de 95 unidades monetarias por cada 100 unidades monetarias del precio inicial. Si usamos el céntimo como unidad monetaria, la anterior se traduce fácilmente a que el precio final es de “0,95 € por cada € del precio inicial”.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 13.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Interpretar aumentos y disminuciones porcentuales como cantidades de magnitudes relacionadas (inicial y final). • Calcular las razones asociadas a una situación de incremento o disminución porcentual que relacionan la magnitud inicial y la magnitud final (disminuida o aumentada). • Interpretar las razones asociadas a una situación de incremento o disminución porcentual.	• Aumentos y disminuciones porcentuales. • Razones asociadas a una situación de aumento o disminución porcentual.

Tabla VI - 13. Objetivos didácticos y contenidos de la undécima sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- La sesión comienza con la resolución de la situación introductoria contenida en la ficha F11.1 sobre la interpretación, en términos de razones externas de aumentos y disminuciones porcentuales. (15 min)
- Puesta en común de los resultados de la actividad F11.1 e institucionalización de las razones asociadas a una situación de aumento o disminución porcentual, haciendo especial énfasis en las razones externas que relacionan las cantidades inicial y final. (10 min)
- Realización de los dos problemas (uno de aumento y otro de disminución porcentual) contenidos en la actividad de aula F11.2. Cada uno de los problemas presenta un apartado con un problema de valor perdido de Tipo I y otro con uno de Tipo III. (15 min)
- Puesta en común de los resultados de la actividad F12.1 e institucionalización de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales. (10 min)
- Entrega de la actividad TC11 que contiene una selección de problemas de las tipologías trabajadas a lo largo de la propuesta para que los alumnos refuercen de forma individual fuera del horario lectivo los contenidos.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas F11.1.1 y F11.1.2 se diseñan como situación introductoria para aumentos y disminuciones porcentuales. Ambos problemas presentan una estructura numérica que puede favorecer el uso de puntos de anclaje o de referencia (se usa el $10\ \%$ el F11.1.1 y el $5\ \%$ en F11.1.2).

En el problema F11.1.1, a partir de una situación en la que se informa de un aumento del valor económico en forma de porcentaje, se proponen diferentes interpretaciones de razones relacionadas con los valores económicos inicial y final y con el valor económico del aumento, y los alumnos deben proponer la cantidad numérica que correspondería a estas razones. La secuencia de preguntas guía a los alumnos hacia la interpretación de las razones que relacionan la cantidad inicial y la final, es decir, la interpretación de las razones

$$k = \frac{100+p}{100}\ ,\quad k^{-1} = \frac{100}{100+p}.$$

F11.1.1: *Debido a la subida del precio de la gasolina, los billetes de autobús también van a subir de precio. En concreto la subida va a ser del 10 %.*

F11.1.1.1. *El billete subirá   € por cada 100 € que costaba antes.*

F11.1.1.2. *El billete subirá   € por cada euro que costaba antes.*

F11.1.1.3. *El billete costará después de la subida   € por cada 100 € que costaba antes.*

F11.1.1.4. *El billete costará después de la subida   € por cada euro que costaba antes.*

F11.1.1.5. *El billete costaba antes   € por cada euro que costará después de la subida.*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k = \frac{100+p}{100}$ $CF = CI + V \qquad CF = k \cdot CI$ $V = (k-1) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square : 100 + 10) \leftrightarrow (\square : 1 + x_2), (x_3 : 100 + \square)$, $(x_4 : 1 + \square), (1 : x_5 + \square)$.
Razones externas: $100/p = 10$. Entera.	

El problema F11.1.2 sigue una estructura análoga al problema anterior, pero en una situación de disminución porcentual del valor económico. El principal objetivo de este problema es que los alumnos lleguen a interpretar las razones,

$$k = \frac{100-p}{100} \ , \quad k^{-1} = \frac{100}{100-p} .$$

F11.1.2: *En las rebajas de una tienda nos hacen un 20 % de descuento.*

F11.1.2.1. *Cada artículo bajará   € por cada 100 € que costaba antes.*

F11.1.2.2. *Cada artículo bajará   € por cada euro que costaba antes.*

F11.1.2.3. *Cada artículo costará después de la bajada   € por cada 100 € que costaba antes.*

F11.1.2.4. *Cada artículo costará después de la bajada   € por cada euro que costaba antes.*

F11.1.2.5. *Cada artículo costaba antes   € por cada euro que costará después de la bajada.*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k = \frac{100-p}{100}$ $CF = CI - V \quad CF = k \cdot CI$ $V = (1-k) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square: 100-20) \leftrightarrow (\square: 1-x_2), (x_3: 100-\square)$, $(x_4: 1-\square)$, $(1: x_5-\square)$.
Razones externas: $100/p = 5$. Entera.	

Tras la institucionalización de las situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales se proponen a los alumnos dos contextos de variaciones porcentuales de valor económico, uno de aumento (F11.2.1) y otro de disminución (F11.2.2). En ambos se proporciona como dato inicial el porcentaje de variación y posteriormente se proponen dos preguntas, en una se pide calcular el precio final, conocido el precio inicial (Tipo I) y en la otra se pide calcular el precio inicial conocido el precio final (Tipo III).

F11.2.1: *Un comerciante decide subir el precio de todos sus productos un 5 %.*

F11.2.1.1 *¿Cuál será el nuevo precio de algo que antes costaba 30 €?*

F11.2.1.2 *Si con la subida un artículo cuesta 21 €, ¿cuánto costaba anteriormente?*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k = \frac{100+p}{100}$ $CF = CI + V \qquad CF = k \cdot CI$ $V = (k-1) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square : 100+5) \leftrightarrow (x_1: 30+), (21: x_2+\square)$.
Razones externas: $100/p = 20$. Entera.	**Razones internas:** No enteras.

F11.2.2: *El precio de la vivienda ha descendido un 40 % en los últimos siete años.*

F11.2.2.1 *¿Cuál debería ser el precio actual de un piso que antes costaba 135.000 €?*

F11.2.2.2 *¿Cuál debería ser el precio de hace 7 años de una vivienda que actualmente cuesta 135.000 €?*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k = \frac{100-p}{100}$ $CF = CI - V \quad CF = k \cdot CI$ $V = (1-k) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square: 100 - 40) \leftrightarrow (x_1: 135000 - \square)$, $(135000: x_2 - \square)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** $r_{CI}^{-1} = 1350$, entera.

La ficha de trabajo TC11 se ha diseñado como una ficha de refuerzo y repaso de los diferentes conceptos trabajados a lo largo de toda la propuesta. Se ha introducido al final de la undécima sesión porque la planificación temporal del ciclo I-2 preveía que la undécima sesión fuera la última antes del fin de semana previo a la semana en la que se realiza la prueba escrita. Sin embargo, esta ficha de repaso podría repartirse en otra sesión diferente si se estimase favorable.

El primer problema que se plantea se corresponde con el primer foco de contenido "Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad". Y es similar a los trabajados en las sesiones 1 y 2.

TC11.1: *En cada situación razona si aparece una pareja de magnitudes proporcionales o no hay proporcionalidad.*

TC11.1.1. *Descendiendo una montaña después de andar 3h me encuentro a 1500 m de altura.*

TC11.1.2. *Para hacer limonada echo 6 cucharadas de azúcar en medio litro de agua.*

TC11.1.3. *Un chico de 12 años mide 1,60 de altura.*

TC11.1.4. *Con el dinero que teníamos nos hemos podido montar 4 personas 5 veces en la montaña rusa.*

TC11.1.1	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación de proporcionalidad (es una relación afín decreciente de la que no se conoce la ordenada en el origen).

TC11.1.2	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Masa de azúcar (cucharada). Extensiva, continua. B: Volumen de agua (l). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, masa de azúcar por cada unidad de volumen de agua. k^{-1}, volumen de agua por cada unidad de masa de azúcar.
Estructura funcional: $\frac{A}{B} = k$ **Razones externas:** k entera.	**Estructura numérica:** $(6: 0{,}5)$
TC11.1.3	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación de proporcionalidad.
TC11.1.4	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de viajes en la montaña rusa. Extensiva, discreta. B: Cantidad de personas que pueden montarse en cada viaje. Intensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, tickets de la montaña rusa que pueden comprarse.
Estructura funcional: $A \cdot B = k$	**Estructura numérica:** $(5: 4)$

El problema TC11.2 es un problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad simple inversa, similar a los ya trabajados durante las sesiones 3, 4 y 5.

TC11.2: *Hemos puesto en funcionamiento 4 impresoras durante 6 horas y media para imprimir toda la publicidad de una pizzería. Si hubiéramos tenido una impresora más, ¿cuánto habríamos tardado?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Tiempo de trabajo. Extensiva, continua. V. independiente, A: Cantidad de impresoras. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, trabajo medido en impresoras·horas / impresoras necesarias para acabar el trabajo en una unidad de tiempo / tiempo para que acabe el trabajo una sola impresora.
Estructura funcional: $X = \frac{k}{A}$	**Estructura numérica:** $(6: 4) \leftrightarrow (x: 5)$ **Razones internas:** No enteras.

El problema TC11.3 es un problema de comparación cuantitativa en una situación de proporcionalidad compuesta con tres magnitudes y estructura $\mathbb{p} = (1, -1, -1)$. Este tipo de problemas se trabajaron durante las sesiones 6 y 7.

TC11.3: *Pedro ha necesitado 4 horas para embaldosar una habitación de 6 m de ancho por 4 de largo. En cambio, Juan, ha necesitado 3 h para embaldosar una habitación de 3,5 m de ancho por 5 de largo. ¿Quién ha trabajado a más velocidad, Juan o Pedro?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa. **Magnitudes involucradas:** A: Tiempo de trabajo. Extensiva, continua. B: Longitud, anchura de la habitación (m). Extensiva, continua. C: Longitud, largo de la habitación (m). Extensiva, continua.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta. **Constante de proporcionalidad:** k, tiempo para embaldosar una unidad de superficie. k^{-1}, velocidad a la que se embaldosa / superficie por unidad de tiempo. **Amalgamaciones parciales:** $B \cdot C$, superficie de la habitación. B/A, anchura embaldosada por unidad de tiempo. C/A, largura embaldosada por unidad de tiempo.
Estructura funcional: $\frac{A}{B \cdot C} = k$	**Estructura numérica:** $(4{:}\,6{:}\,4) \sim (3{:}\,3{,}5{:}\,5)$
Razones externas: k^{-1} y C/A, enteras en la primera situación.	**Razones internas:** No enteras.

El problema TC11.4 es un problema susceptible de ser resuelto mediante un problema de reparto directamente proporcional, con tres individuos involucrados. Este tipo de problemas se trabajó durante la sesión 8.

TC11.4: *Tres amigas han montado una empresa. Al principio, cada socia puso el dinero que pudo para comenzar con el negocio. Ana puso 20.000 €, Beatriz puso 15.000 € y Clara 10.000 €. Este año la empresa ha tenido unos beneficios de 9.000 €. ¿Cómo deberían repartirse esos beneficios?*

Tipo de problema: Reparto. **Número de participantes en el reparto:** 3. **Magnitudes involucradas:** Magnitud de reparto, X: Valor económico del sueldo (€). Extensiva, discreta. Pesos, magnitud según la cual se reparte, W: Tiempo trabajado (h). Extensiva, continua.	**Relación de proporcionalidad:** Directa. **Constante de proporcionalidad:** k, valor económico del beneficio por cada unidad de valor económico de la inversión. k^{-1}, valor económico de la inversión por cada unidad de valor económico de beneficio.
Estructura funcional: $X = k \cdot W$ $X_A + X_B + X_C = X_T$	**Estructura numérica:** $(9000{:}\,45000)$ $\leftrightarrow (x_A{:}\,20000), (x_B{:}\,15000), (x_C{:}\,10000),$
Razones externas: k^{-1}, entera.	**Razones internas:** No enteras.

Por último, el problema TC11.5 es un problema de aumentos y disminuciones porcentuales, como los que se han trabajado en la propia sesión 11. A pesar de ser similar a los trabajados en clase, este es el primer problema de variaciones porcentuales al que se enfrentan los alumnos que no está contextualizado mediante magnitudes de valor económico.

TC11.5: *El Gobierno ha anunciado que en enero de 2015 hubo un 45 % más de víctimas en accidentes de tráfico que en enero de 2014. Si en enero de 2015 han muerto 87 personas en accidentes de tráfico. ¿Cuántos muertos hubo en enero de 2014?*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Número de víctimas en enero de 2014. Extensiva, discreta. V: Variación del número de víctimas. Extensiva, discreta. CF: Número de víctimas en enero de 2015. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el número de víctimas en accidentes de tráfico en enero de 2015 y el correspondiente en enero de 2014.
Estructura funcional: $k = \frac{100 + p}{100}$ $CF = CI + V \qquad CF = k \cdot CI$ $V = (k - 1) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square : 100 + 45) \leftrightarrow (87 : x + \square)$.
Razones externas: No enteras.	

VI.1.3.12. Duodécima sesión: Aumentos y disminuciones porcentuales II

Durante la duodécima sesión se completan los contenidos relacionados con el sexto foco prioritario de contenido, ampliando el campo de problemas trabajado. Se trabajan para ello diferentes problemas de Tipo II (cálculo del porcentaje), tanto en situaciones de variaciones porcentuales, usando como referente la cantidad inicial, como en otras estructuras parte-parte-todo, en donde se solicitan porcentajes usando como referente el total o una de las partes involucradas. Además, se introduce la no aditividad de las variaciones porcentuales que se aplican de forma consecutiva. La sesión está diseñada como un taller de problemas con una ficha de trabajo en el aula además de otra ficha de trabajo individual fuera del aula.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 14.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Calcular el porcentaje de variación conocidas las cantidades inicial y final. • Calcular el porcentaje que supone una cierta cantidad usando como referente el total o su parte complementaria. • Comprender la no aditividad de los aumentos o disminuciones que se aplican de forma consecutiva.	• Aumentos y disminuciones porcentuales, variaciones encadenadas. • Cálculo del porcentaje de aumento o disminución en una situación de aumento o disminución (Tipo II). • Cálculo del porcentaje que una parte supone respecto del total o respecto de otra parte (Tipo II).

Tabla VI - 14. Objetivos didácticos y contenidos de la duodécima sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- Recogida de la actividad TC11, reparto de una propuesta de solución para los problemas que contenía y resolución de las principales dudas que planteen los alumnos en la realización de dicha actividad. (5 min)
- Realización de los dos problemas contenidos en la ficha F12.1. En el primero de ellos se refuerza la resolución de problemas de valor perdido en una situación de disminución porcentual y en el segundo se trabaja el concepto de porcentaje que relaciona dos partes complementarias. (30 min)
- Puesta en común de los resultados de la actividad F12.1. (15 min)
- Entrega de la actividad TC12 que contiene problemas de valor perdido en situaciones de aumento y disminución porcentual para que los alumnos de forma individual refuercen estos contenidos fuera del horario lectivo.

Diseño y análisis de las actividades:

En el problema F12.1.1 se plantea un contexto económico en el que los precios han sufrido una rebaja y se solicita que los alumnos traduzcan dicha información en forma de variación porcentual. Este es el primer problema de Tipo II en una situación de variaciones porcentuales al que se enfrentan los alumnos en la propuesta. Se espera que los alumnos interpreten como tanto por uno una de las siguientes razones:

$$\frac{CF}{CI} \qquad \frac{CF-CI}{CI}=\frac{V}{CI}$$

Y que, a partir de este significado como tanto por uno, calculen el tanto por cien solicitado.

F12.1.1: *Debido al descenso del precio de la gasolina el autobús para ir a Madrid ha bajado su precio. Antes costaba 24 € y ahora cuesta 20,40 €. ¿Cuál ha sido el porcentaje de rebaja en el precio?*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k=\frac{100-p}{100}$ $CF=CI+V \qquad CF=k\cdot CI$ $V=(k-1)\cdot CI$	**Estructura numérica:** $(20{,}4 : 24-\square) \leftrightarrow (\square{:}\, 100-x)$.
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

El problema F12.1.2 no está contextualizado en una situación de aumento o disminución porcentual, sino que presenta una estructura parte-parte-todo. A partir de las cantidades absolutas asociadas a una parte y su complementario, se solicita a los alumnos el cálculo de dos porcentajes. A saber, el porcentaje que una parte representa respecto del total, y el porcentaje que esa misma parte representa respecto de su parte complementaria. Este último es un porcentaje cuyo numeral es mayor que 100, lo que puede generar algún problema de interpretación a los alumnos.

F12.1.2: *En una empresa hay 24 trabajadores que fuman y 36 que no.*

F12.1.2.1 *¿Cuál es el porcentaje de trabajadores que NO fuman respecto al total de trabajadores de la empresa?*

F12.1.2.2 *¿Cuál es el porcentaje de trabajadores que NO fuman respecto a los trabajadores que SÍ fuman?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo del porcentaje conocidos el total y la parte. Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de trabajadores fumadores. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de trabajadores no fumadores. Extensiva, discreta. T: Total de trabajadores. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el número de trabajadores que fuman y el número total de trabajadores (análogamente para $(1-k)$ con la cantidad de no fumadores).
Estructura funcional: $T=P_1+P_2 \qquad P_1=k\cdot T$ $P_2=(1-k)\cdot T \qquad P_1=\frac{k}{1-k}\,P_2$	**Estructura numérica:** $(\square : 24+36) \leftrightarrow (100{:}\,\square+x_1), (\square{:}\,100+x_2)$.
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

Tras las cuatro sesiones trabajando los contenidos relacionados con el concepto de porcentaje se espera que los alumnos puedan abordar con cierta soltura problemas asociados a dicho concepto, aunque no reproduzcan los mismos contextos que los problemas trabajados en clase. Así, como tarea para casa se diseña la ficha TC12 que incorpora dos problemas, esencialmente del mismo tipo de los trabajados durante la duodécima sesión, pero con pequeños cambios.

El problema TC12.1 se corresponde con un problema de Tipo II en una situación de aumento pero que no está contextualizado en una situación monetaria. La sencillez de la estructura numérica puede hacer aparecer estrategias basadas en puntos de referencia o de análisis unitario.

TC12.1: *El ayuntamiento ha decido incrementar el número de farolas en las calles. El año pasado había 800 farolas en todo Calatayud y este año hay 1000 farolas. ¿En qué porcentaje se ha incrementado el número de farolas?*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Cantidad inicial de farolas. Extensiva, discreta. V: Variación en el número de farolas. Extensiva, discreta. CF: Cantidad final de farolas. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el número final de farolas y el número inicial.
Estructura funcional: $k = \frac{100 - p}{100}$ $CF = CI + V \qquad CF = k \cdot CI$ $V = (k - 1) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(1000 : 800 + \square) \leftrightarrow (\square : 100 + x)$.
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** $r_{CI} = 8$.

En el problema TC12.2 se presenta la única situación en la que se encadenan variaciones porcentuales que se presenta en la propuesta. Los alumnos deben razonar a partir de un contexto monetario si una subida de un porcentaje del p % seguida de una aplicación de una rebaja del p % se compensan, es decir, si el precio inicial y final coinciden. Se espera que los alumnos puedan responder a dicha pregunta otorgando un valor arbitrario a la cantidad inicial y aplicando las variaciones de forma consecutiva. Se espera que algún alumno utilice 100 como referente para la cantidad inicial, lo cual puede permitir que se hable de variación equivalente en la puesta en común.

TC12.2: *Al precio de un producto le aplicamos una subida del 30 %, después, sobre el precio aumentado le aplicamos un descuento del 30 %. Razona si el precio final que obtenemos es mayor, menor o igual que el inicial.*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales encadenados.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V_1: Valor económico de la primera variación. Extensiva, discreta. CI_2: Valor económico intermedio. Extensiva discreta. V_2: Valor económico de la segunda variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k_1, comparación multiplicativa entre el precio intermedio y el precio inicial. k_2, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k_1 = \frac{100 + p_1}{100} \quad k_2 = \frac{100 - p_2}{100}$ $CI_2 = CI + V_1 \quad CF = CI_1 + V_2$ $CI_2 = k_1 \cdot CI \quad CF = k_2 \cdot CI_2 = k_2 \cdot k_1 \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square: 100 - 30) \leftrightarrow (x: 130 - \square)$.
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

VI.1.3.13. Decimotercera sesión: Repaso

Al igual que en la propuesta para 1º de ESO desarrollada en el Capítulo V, la última sesión antes de la prueba escrita se dedica a resolver problemas que abarcan una gran parte de los contenidos trabajados durante la propuesta. Se trata de una sesión diseñada como taller de resolución problemas, con un abanico de actividades suficientemente amplio como para que las parejas de alumnos trabajen sobre aquellos aspectos en los que creen que tienen más dudas. Así, el profesor-investigador puede atender dichas dudas de forma individual a lo largo de la sesión. Además, se reservan unos minutos finales para hacer una puesta en común con todo el grupo.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VI - 15.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Afianzar los contenidos adquiridos. • Resolver dudas sobre los conceptos trabajados. • Adquirir una visión global y unificada de los contenidos.	• Resolución de situaciones problemáticas asociadas a contextos de proporcionalidad.

Tabla VI - 15. Objetivos didácticos y contenidos de la decimotercera sesión (Ciclo I-2).

Esquema de la sesión:

- Recogida y puesta en común de los resultados de la actividad TC12. (10 min)
- Las parejas realizan los problemas de repaso contenidos en F13.1 (25 min)
- Se realiza una puesta en común con todo el grupo de los resultados de la actividad F13.1 para corregir los problemas y aclarar las posibles dudas que pudieran tener los alumnos antes de la prueba escrita. (15 min)

Diseño y análisis de las actividades:

Esta sesión se estructura en una única ficha de trabajo, F13.1. En el primer grupo de problemas, F13.1, F13.2, F13.3, los alumnos deben analizar tres contextos similares a los trabajados durante las sesiones 1 y 2. A partir de dicho análisis, deben decidir si en el contexto aparece una pareja de magnitudes relacionada de forma directa o inversamente proporcional, o no.

En cada situación razona si aparece una pareja de magnitudes proporcionales o no hay proporcionalidad:

F13.1.1 *Dedicando 15 horas a explicar un examen han aprobado 18 personas de clase.*

F13.1.2 *Con el alimento que tengo puedo dar de comer 15 días a mis dos perros.*

F13.1.3 *He tardado 2 horas en limpiar las 7 ventanas de mi casa.*

F13.1.1	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación de funcional.
F13.1.2	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas:	**Constante de proporcionalidad:**
A: Tiempo que puedo alimentar a los perros (día). Extensiva, continua.	k, raciones de las que dispongo (perro que puedo alimentar durante un día / días que podría alimentar a un perro)
B: Cantidad de perros. Extensiva, discreta.	
Estructura funcional:	**Estructura numérica:**
$A \cdot B = k$	$(15{:}\,2)$
F13.1.3	
Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas:	**Constante de proporcionalidad:**
A: Tiempo para limpiar las ventanas (h). Extensiva, continua.	k, tiempo invertido en limpiar cada ventana. k^{-1}, velocidad de limpieza (cantidad de ventanas limpiadas por unidad de tiempo).
B: Cantidad de ventanas. Extensiva, discreta.	
Estructura funcional:	**Estructura numérica:**
$\frac{A}{B} = k$	$(2{:}\,7)$
Razones externas: No enteras.	

El siguiente problema, F13.1.4, presenta una situación de proporcionalidad compuesta entre cuatro magnitudes con estructura $\mathbb{p} = (1,1,1,1)$, a partir de la cual se elabora un problema de valor perdido. Este problema tiene un contexto muy similar al del problema de proporcionalidad simple inversa F4.1.1 que se trabajó en la cuarta sesión. Los problemas de proporcionalidad compuesta se trabajaron durante las sesiones 5, 6 y 7.

F13.1.4: *Para escribir a ordenador el libro han estado trabajando dos personas que pulsan 15000 teclas a la hora durante 2 días trabajando 6 horas al día. Si hubieran trabajado 3 personas durante 3 días que pulsan 10000 teclas a la hora, ¿cuántas horas al día tendrían que haber trabajado?*

Tipo de problema: Valor perdido, Inversa-Inversa-Inversa.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Tiempo de trabajo diario (h/día). Intensiva, continua. V. independiente, A: Cantidad de trabajadores. Extensiva, discreta. V. independiente, B: Cantidad de jornadas de trabajo (día). Extensiva, discreta. V. independiente, C: Velocidad de escritura de cada trabajador(teclas/h). Intensiva, discreta. **Estructura funcional:** $$X = \frac{k}{A \cdot B \cdot C}$$ **Estructura numérica:** $$(6: 2: 2: 15000) \leftrightarrow (x: 3: 3: 10000)$$ **Razones internas:** No enteras.	**Constante de proporcionalidad:** k, cantidad de caracteres que tiene el libro. **Amalgamaciones parciales:** $A \cdot B$, jornadas de trabajo necesarias (si solo hubiera un trabajador). $A \cdot C$, velocidad conjunta de trabajo, teclas por hora que hacen todos los trabajadores juntos. $B \cdot C$, pulsaciones a lo largo de todo el trabajo por cada hora diaria de trabajo. $X \cdot A$, horas de trabajo diario conjuntas (horas de trabajo diario si solo hubiera un trabajador / trabajadores si tuvieran que terminar trabajando una hora diaria) $X \cdot B$, tiempo total de trabajo. $X \cdot C$, velocidad de escritura diaria, pulsaciones por día.

El siguiente problema contenido en la ficha de trabajo es un problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad simple directa. Se utiliza un contexto de mezcla de azúcar y líquido en el que la razón entre dichas magnitudes puede interpretarse como el dulzor de la mezcla. El sentido de las comparaciones hace posible determinar cuál de las dos recetas tendrá un sabor más dulce. Este tipo de problemas se trabajó dentro de las sesiones dedicadas a la proporcionalidad simple (3, 4 y 5).

F13.1.5: *Sergio tiene una receta para hacer limonada en la que se usa más azúcar para echar al agua que en la receta que tiene Adrián. También sabemos que en la receta de Sergio se utiliza menos agua que en la de Adrián. ¿Qué zumo saldrá más dulce, el de Sergio o el de Adrián?*

Tipo de problema: Comparación cualitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: A: Masa de azúcar. Extensiva, continua. B: Volumen de agua. Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, masa de azúcar por cada unidad de volumen de agua. k^{-1}, volumen de agua por cada unidad de masa de azúcar.
Estructura funcional: $$\frac{A}{B} = k$$	**Estructura numérica:** $$(a^{+}: b^{-}) \sim (a: b)$$

Por último, en F13.1.6, a partir de un contexto monetario de disminución porcentual se hacen dos preguntas independientes. En una, dado el precio inicial se solicita el precio final (Tipo I) y en la otra, dado el precio final se solicita el precio inicial (Tipo III). Este tipo de problemas se trabajó durante las sesiones 11 y 12.

F13.1.6: *En una tienda nos dicen que para rebajas hacen un 30 % de descuento en todos sus artículos.*

F13.1.6.1 *¿Cuánto costaba algo antes de las rebajas si ahora en rebajas me lo he llevado por 21 €?*

F13.1.6.2 *¿Cuánto me debería cobrar por un abrigo que antes de las rebajas costaba 80 €?*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k = \frac{100 - p}{100}$ $CF = CI + V \qquad CF = k \cdot CI$ $V = (k - 1) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square : 100 - 30) \leftrightarrow (21 : x_1 - \square), (x_2 : 80 - \square)$.
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

VI.1.4. Diseño de la prueba escrita

La prueba escrita se diseña para ser resuelta de forma individual durante una sesión de clase. Consta de 9 problemas PE.1 – PE.9. En los problemas PE.1, PE.2 y PE.9 hemos distinguido diferentes apartados. Los problemas cubren todos los focos prioritarios de contenido y un amplio abanico de las tipologías de problemas trabajadas durante las sesiones de clase.

El orden de los problemas es similar al utilizado en la prueba escrita de la propuesta en 1º de ESO. De hecho, se han incorporado varios ítems idénticos a los de dicha prueba escrita que presentamos en el Capítulo V. En concreto, los problemas PE.1.2, PE.1.3, PE.1.4, PE.2.1, PE.2.2, PE.5 y PE.6 coinciden literalmente con sus homónimos de la prueba escrita de la propuesta para 1º de ESO (salvo la corrección de una errata en una de las opciones del problema PE.2.2).

El primer subapartado (PE.1.1) del problema PE.1, que no coincide con el de la propuesta para 1º de ESO, se ha modificado para incorporar una relación lineal decreciente que pudiera confundirse con una relación de proporcionalidad inversa (en la prueba escrita para 1º de ESO en este subapartado aparecía un contexto con dos magnitudes sin relación funcional). Así, en PE.1 los alumnos deben analizar diferentes situaciones en las que aparecen dos magnitudes y determinar si existe una relación proporcional (directa o inversa) entre ellas, o no. Dichas situaciones se trabajaron específicamente en las sesiones 1 y 2 de la propuesta y corresponden con el primer foco de contenido prioritario de la propuesta "Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad".

PE.1: *En las siguientes situaciones RAZONA si hay alguna pareja de magnitudes directamente proporcionales, inversamente proporcionales o no hay relaciones de proporcionalidad.*

PE.1.1. *Si dedico 4 horas a ver la tele, solo me quedan 2 horas para hacer los deberes.*

PE.1.2. *Lucía tiene 3 semanas y pesa 3,6 kg.*

PE.1.3. *Para trasladar unos ladrillos, 8 obreros han tenido que mover 40 ladrillos cada uno.*

PE.1.4. *En 5 litros de agua ha echado 2 litros de zumo.*

PE.1.1 **Tipo de problema:** Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación de proporcionalidad (afín decreciente).
PE.1.2 **Tipo de problema:** Análisis de situaciones. Problema PE.1.2 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** No puede suponerse relación proporcional.
PE.1.3 **Tipo de problema:** Análisis de situaciones. **Magnitudes involucradas:** A: Cantidad de obreros. Extensiva, discreta. B: Cantidad de ladrillos que transporta cada obrero. Intensiva, discreta. **Estructura funcional:** $A \cdot B = k$	**Relación de proporcionalidad:** Inversa. **Constante de proporcionalidad:** k, cantidad de ladrillos que hay que trasladar. **Estructura numérica:** $(8:40)$
PE.1.4 **Tipo de problema:** Análisis de situaciones. Problema PE.1.4 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.

El problema PE.2 también es análogo a su homónimo en la propuesta para 1º de ESO, conservando invariados los subapartados PE.2.1 y PE.2.2 (salvo la corrección de una errata en una de las posibles respuestas en PE.2.2). En este problema aparecen tres cuestiones de respuesta cerrada, las dos últimas inciden en la interpretación, cálculo y reconocimiento de la constante de una relación proporcional, contenidos que se trabajan específicamente en las sesiones 1 y 2 y que se corresponden con el primer foco de contenido prioritario.

Por su parte, PE.2.1 es un problema de comparación cualitativa, extraído del trabajo de Cramer y Post (1993), en una situación de proporcionalidad simple directa (sesiones 3, 4 y 5). Este tipo de problemas se incluye dentro del segundo foco de contenido prioritario de la propuesta "Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa". La opción correcta es la cuarta, ya que el sentido de las comparaciones hace imposible determinar en cuál de las dos tablas hay una mayor densidad de clavos.

PE.2: *Elige la opción que consideres correcta en cada caso:*

PE.2.1: *Bill y Greg, dos hermanos, clavan clavos en dos tablas de madera. Bill clava más clavos que Greg, pero la tabla de Bill es más grande. ¿En qué tabla estarán más apretados los clavos?*

1) En la de Bill.

2) En la de Greg.

3) Los clavos están igual de apretados.

4) No tienes bastante información para responder.

Tipo de problema: Comparación cualitativa. **Relación de proporcionalidad:** Directa.
Problema PE.2.1 del ciclo II-1.

Como hemos dicho, el problema PE.2.2 se analizó en el diseño de la prueba escrita para la propuesta de 1º de ESO en el Capítulo V. Dicho problema presenta una situación de proporcionalidad simple directa a partir de la cual se presentan varias alternativas que hacen referencia a razones asociadas a dicha situación, solo la opción 2 asocia correctamente el valor de una de las razones con su interpretación como tanto por uno.

PE.2.2: *Para hacer una crema para los pasteles se echan 125 gr de mantequilla y 300 gr de azúcar. Por tanto:*

1) Hay $\frac{5}{12}$ gr de azúcar por cada gr de mantequilla.

2) Hay 2,4 gr de azúcar por cada gr de mantequilla.

3) Hay 12 gr de mantequilla por cada 5 gr de azúcar.

4) Hay 2,4 gr de mantequilla por cada gr de azúcar.

Tipo de problema: Análisis de situaciones. **Relación de proporcionalidad:** Directa.
Problema PE.2.2 del ciclo II-1.

En el subapartado PE.2.3 se ha incorporado una situación de proporcionalidad inversa en vez de la situación de proporcionalidad directa que contenía la prueba escrita de la propuesta para 1º de ESO en el subapartado homónimo. Como alternativas se presentan algunos de los errores previsibles que pueden cometer los alumnos, especialmente los relacionados con la confusión en la determinación de la relación proporcional que une a las magnitudes. Así, en la opción 1 y la opción 4 se presentan diferentes alternativas que podrían aparecer si se supone una relación directa en vez de inversa entre las magnitudes. La opción 2 plantea la posibilidad de que, de hecho, no haya ninguna relación de proporcionalidad entre las magnitudes involucradas. La opción 3 (opción correcta) asocia el valor numérico de la constante de proporcionalidad inversa con una de sus posibles interpretaciones.

PE.2.3: *Con 4 máquinas se ha terminado el pedido en 6 horas:*

1) Han trabajado $1{,}5$ *horas cada máquina.*

2) No hay proporcionalidad entre estas magnitudes.

3) Se necesitan 24 horas de trabajo para terminar el pedido.

4) Han trabajado $\frac{4}{6}$ *horas cada máquina.*

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de máquinas. Extensiva, discreta. B: Tiempo para terminar el trabajo. Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, trabajo necesario para terminar el pedido medido en máquinas·horas / máquinas necesarias pera terminar el pedido en una unidad de tiempo / tiempo para que termine el pedido una única máquina.
Estructura funcional: $A \cdot B = k$	**Estructura numérica:** $(4{:}\,6)$

En la prueba escrita para 1º de ESO el tercer ítem consistía en un problema de comparación cuantitativa en una situación de proporcionalidad simple directa. En la prueba para 2º de ESO hemos sustituido dicho ítem por uno de la misma tipología, pero en una situación de proporcionalidad simple inversa. Estos problemas se trabajaron durante las sesiones 3, 4 y 5 y se incluyen dentro del tercer foco de contenido “Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa”. El contexto elegido para el problema PE.3 es similar a otros trabajados en la propuesta en el que un grupo de “individuos” (en la mayoría de los problemas de la propuesta eran animales de algún tipo, en este caso son geranios) se “alimentan” (en este caso se riegan con un volumen de agua indeterminado) durante un cierto tiempo. Por tanto, se presentan dos magnitudes extensivas ligadas por una relación de proporcionalidad simple inversa, y los alumnos deben interpretar el producto de medidas como una cantidad que da cuenta del volumen de agua necesario para regar los geranios durante un periodo de tiempo.

PE.3: S*ara tiene una garrafa con la que puede regar sus 9 geranios durante 3 semanas. Marga tiene una garrafa con la que puede regar sus 14 geranios durante 2 semanas. ¿Qué garrafa tiene más agua la de Sara o la de Marga?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: A: Cantidad de geranios. Extensiva, discreta. B: Tiempo que se pueden regar (semana). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, geranios que podrían regarse durante una semana / tiempo que podría regarse un geranio.
Estructura funcional: $A \cdot B = k$	**Estructura numérica:** $(9{:}\,3)\sim(14{:}\,2)$ **Razones internas:** No enteras.

A continuación del problema de comparación cuantitativa, se presenta un problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad simple inversa, PE.4, cuya tipología también se incluye en el tercer foco de contenido. El problema homónimo en la propuesta para 1º de ESO era un problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad simple directa. Al igual que en el caso anterior, las magnitudes involucradas son ambas extensivas, número de personas que van al cine y número de veces que van. Los alumnos deben interpretar el producto de medidas como el número de entradas de cine que pueden comprar con el dinero que les ha dado su abuela (suponiendo previamente que todas las entradas de cine las compran al mismo precio). La forma en la que se presentan los datos puede generar alguna pequeña dificultad, ya que la cantidad de personas que van al cine en la segunda situación no se proporciona de forma absoluta, sino que se informa del incremento de personas respecto a la primera situación (primero van cuatro personas y luego van dos personas más).

PE.4: *Con el dinero que les dio su abuela por Navidad, pudieron irse 4 hermanos 9 veces al cine. Si hubieran invitado a sus dos primos, ¿cuántas veces podrían haber ido al cine?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa.
Magnitudes involucradas: V. dependiente, X: Cantidad de veces que pueden ir al cine. Extensiva, discreta. V. independiente, A: Cantidad de personas que pueden ir (cada vez) al cine. Intensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, entradas de cine que pueden comprarse.
Estructura funcional: $$X = \frac{k}{A}$$	**Estructura numérica:** $$(9{:}\,4) \leftrightarrow (x{:}\,6)$$ **Razones internas:** No enteras.

El problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad compuesta con tres magnitudes, PE.5, es el mismo que en la prueba escrita de la propuesta para 1º de ESO. Este tipo de problemas se trabajan en la propuesta de 2º de ESO en las sesiones 6 y 7.

PE.5: *La máquina que pone el plástico a las cajas de galletas ha terminado 12.000 cajas en 4 días trabajando 6 horas al día. ¿Cuántas cajas habría terminado si hubiera trabajado 5 días durante 7 horas cada día?*

Tipo de problema: Valor perdido. Problema PE.5 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta.

También el falso problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta PE.6 es el mismo que el presentado en este mismo lugar en la prueba escrita de 1º de ESO.

PE.6: *Julia, estudiando 4 días durante 2 horas al día ha sacado un 8 en el examen. ¿Cuánto habría sacado si hubiera estudiado 2 días durante 3 horas al día?*

Tipo de problema: Análisis de situaciones. Problema PE.6 del ciclo II-1.	**Relación de proporcionalidad:** No hay relación proporcional

Para completar la evaluación del cuarto foco de contenido prioritario de la propuesta, “Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta”, se introduce el problema de comparación cuantitativa en una situación compuesta con tres magnitudes y estructura $\mathbb{p} = (1,1,1)$. Todas las parejas de magnitudes involucradas tienen, por tanto, una relación inversa. Una de las tres magnitudes es intensiva, pero las otras dos son extensivas, por lo que puede generar dificultad la interpretación de la constante de proporcionalidad obtenida como producto de las tres magnitudes (los alumnos deben interpretar el producto de medidas, “número de mangueras·horas totales abiertas”, como una medida del volumen de la piscina, suponiendo que todas las mangueras emanan agua a la misma velocidad). Además, la estructura numérica, sin razones internas enteras, dificulta la aparición de estrategias que no pasen por calcular la constante de proporcionalidad.

PE.7: *En un parque acuático, para llenar la piscina “Tiburón” han enchufado 12 mangueras 6 horas al día durante una semana. Para llenar la piscina “Elefante” han enchufado 10 mangueras 5 horas al día durante 10 días. ¿Qué piscina contiene más agua: la “Tiburón” o la “Elefante”?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa. **Magnitudes involucradas:** A: Cantidad de mangueras. Extensiva, discreta. B: Duración de la jornada (h/día). Intensiva, continua. C: Cantidad de jornadas (día). Extensiva, discreta. **Estructura funcional:** $A \cdot B \cdot C = k$ **Estructura numérica:** $(12{:}\,6{:}\,7) \sim (10{:}\,5{:}\,10)$ **Razones internas:** No enteras.	**Relación de proporcionalidad:** Compuesta. **Constante de proporcionalidad:** k, volumen de la piscina o trabajo total realizado por las mangueras, medidos en mangueras·horas / cantidad de mangueras para llenar la piscina en una unidad de tiempo / tiempo para llenar la piscina con una manguera. **Amalgamaciones parciales:** $A \cdot B$, volumen de llenado diario, o trabajo realizado por las mangueras diario. $A \cdot C$, Cantidad de mangueras para llenar la piscina en una jornada, o cantidad de jornadas para llenar la piscina con una manguera. $B \cdot C$, tiempo de llenado.

Como ítem para valorar el quinto foco de contenido prioritario, “Repartos proporcionales”, se ha diseñado el problema PE.8, que es susceptible de ser resuelto mediante un modelo directamente proporcional. Este tipo de problemas se trabajaró durante la sesión 8. En este caso, se plantea un reparto con dos individuos involucrados en el que la magnitud a repartir es una cantidad económica de un bien, mientras que la magnitud según la cual se reparte es el tiempo de uso de dicho bien por parte de los individuos. La estructura numérica puede favorecer el cálculo de la constante de proporcionalidad del reparto “precio por mes de uso”.

PE.8: *Dos hermanos, Sergio y Susana, van a comprar un apartamento en la montaña. Han llegado al acuerdo de que Sergio lo va a utilizar durante 7 meses al año y Susana durante 5. El apartamento les ha costado 240.000 €, ¿cuánto debería pagar cada uno?*

Tipo de problema: Reparto.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Número de participantes en el reparto: 2. **Magnitudes involucradas:** Magnitud de reparto, X: Valor económico del apartamento (€). Extensiva, discreta. Pesos, magnitud según la cual se reparte, W: Tiempo de uso (mes). Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, valor económico pagado por cada unidad de tiempo de uso. k^{-1}, tiempo de uso por cada unidad de valor económico pagada.
Estructura funcional: $X = k \cdot W$ $X_A + X_B = X_T$	**Estructura numérica:** $(24000\colon 12) \leftrightarrow (x_A\colon 7), (x_B\colon 5)$
Razones externas: k, entera.	**Razones internas:** No enteras.

Dentro del último foco de contenido, "Porcentajes y problemas asociados", se ha seleccionado para la prueba escrita en este ciclo un problema contextualizado en una situación económica de disminución porcentual. A partir de la disminución porcentual los alumnos deben resolver un problema de Tipo I, calcular el precio final de un producto conocido el precio inicial, y un problema de Tipo III, calcular el precio inicial de un producto conocido el precio final.

PE.9: *Una tienda de coches ha decidido que va a subir un 40 % el valor de todos los coches que tiene a la venta.*

PE.9.1 *¿Cuánto costará un coche después de la subida que antes costaba 14.000 €?*

PE.9.2 *¿Cuánto costaba antes de la subida un coche que ahora se vende por 18.000 €?*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k = \frac{100+p}{100}$ $CF = CI + V \qquad CF = k \cdot CI$ $V = (k-1) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square : 100+40) \leftrightarrow (x_1\colon 14000 + \square)$, $(18000\colon x_2 + \square)$.
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** $r_{CI}^{-1} = 140$, entera.

VI.2. Fase de acción

Tras la presentación del diseño de la propuesta didáctica, concretamos las características de la implementación en este ciclo de investigación-acción. En el Capítulo III introdujimos las principales características de la muestra y la temporalización de la intervención. En esta sección concretamos los detalles de dicha muestra en este ciclo y el calendario de actuación en el grupo de intervención. Además, desarrollamos la información obtenida a partir del diario de clase del profesor-investigador para dar cuenta de la acción.

Como se ha comentado anteriormente, durante la fase de acción del ciclo II-1 el profesor-investigador tuvo que ser intervenido quirúrgicamente y permaneció de baja gran parte del curso. Este contratiempo provocó que la experimentación se viera truncada en la sesión 11 (de las doce para el desarrollo de los contenidos) y que solo se pudiera intervenir en un grupo, de los dos inicialmente previstos. A pesar de ello, el equipo de investigación consideró que se habían cubierto los objetivos e implementado las sesiones suficientes de este ciclo de la propuesta en 2º de ESO. Sobre todo, teniendo en cuenta que se trataba de un primer ciclo exploratorio.

VI.2.1. Participantes

La fase de acción del ciclo I-2 se realizó durante el curso 2014-2015 en el IES Leonardo de Chabacier de Calatayud (Zaragoza). En ese curso escolar, el centro contaba con cuatro vías en 2º de ESO con un total de 78 alumnos repartidos en cuatro grupos ordinarios (A, B, C y D). Además, alrededor de otros 20 alumnos de 2º de ESO formaban parte del Programa de Aprendizaje Básico (PAB) y de la la Unidad de Intervención Educativa Específica (UIEE) y recibían las clases de matemáticas fuera de los grupos ordinarios. A pesar de que el número de vías coincide con las de 1º de ESO en el curso anterior (en el que se desarrolló el ciclo II-1), los grupos en los que se dividían los alumnos no coincidían exactamente con los grupos de 1º de ESO sobre los que se experimentó. El grupo experimental, grupo B, (Tabla VI - 16) estaba formado por 20 alumnos, de los cuales tres eran repetidores de 2º de ESO, cuatro provenían del grupo de control del ciclo II-1 y los otros trece provenían de los diferentes grupos, A, B y D, que formaron el grupo experimental del ciclo II-1. De los tres alumnos repetidores, dos mantuvieron una actitud objetora ante cualquier actividad lectiva durante la mayor parte del curso. Además, uno de estos alumnos objetores tuvo un alto grado de absentismo durante el curso.

La elección del grupo B como grupo experimental fue incidental. La previsión inicial era intervenir en los grupos A y B, ya que eran los grupos que contenían un mayor número de alumnos que provenían del grupo experimental del ciclo II-1. Al profesor-investigador se le asignó el grupo B en el reparto de inicio de curso y no puedo intervenirse en el grupo A por las razones mencionadas anteriormente. Como grupo de control, se eligió el grupo C por ser el grupo en el que había un mayor número de alumnos provenientes del grupo de control del ciclo II-1 (11 de los 19).

	Grupo único - B
Alumnos	20
Equipos	10

Tabla VI - 16. Número de participantes y de equipos de trabajo (Ciclo I-2).

Por tanto, en este ciclo de investigación-acción, disponemos de una muestra de 20 alumnos, que se agruparon en 10 equipos de clase. Así, para las tareas de aula dispondremos de 10 producciones diferentes, mientras que en las tareas de casa y la prueba escrita dispondremos de 20 producciones.

Como en el Capítulo V, para hacer referencia a los equipos usaremos la codificación, Xi, donde X representa la letra del grupo e i el ordinal de este según la disposición espacial que había en las aulas. Los alumnos se codifican añadiendo al código de su equipo el ordinal que le correspondía en él según el orden de las mesas.

VI.2.2. Calendario de actuación

En la Tabla VI - 17 aparece el calendario de actuación y el horario en el que se llevaron a cabo las sesiones. La planificación tuvo en cuenta los festivos locales y las actividades extraescolares que tenían los alumnos, de forma que se hizo coincidir la actividad TC11 (de repaso individual de la propuesta) con el último día lectivo antes del fin de semana previo a la prueba escrita. Como dijimos en el Capítulo III, la propuesta se ubica al final del bloque de números y antes de trabajar el álgebra. Las sesiones sombreadas en la Tabla VI - 17 se corresponden con aquellas a las que no pudo asistir el profesor-investigador. Las sesiones de clase fueron impartidas por otros profesores del departamento didáctico, por lo que los alumnos trabajaron todos los problemas planificados. Al no estar presente el profesor-investigador, las sesiones de clase 12 y 13 no se grabaron y tampoco se escanearon las correspondientes producciones escritas de los alumnos. Otros profesores del departamento didáctico vigilaron, recogieron y escanearon la prueba escrita.

	Grupo único			**Grupo único**	
Sesión 1	26-01-15	10:35 – 11:25	**Sesión 8**	05-02-15	13:35 – 14:25
Sesión 2	27-01-15	10:35 – 11:25	**Sesión 9**	09-02-15	10:35 – 11:25
Sesión 3	28-01-15	09:25 – 10:15	**Sesión 10**	10-02-15	10:35 – 11:25
Sesión 4	29-01-15	13:35 – 14:25	**Sesión 11**	11-02-15	09:25 – 10:15
Sesión 5	02-02-15	10:35 – 11:25	**Sesión 12**	16-02-15	10:35 – 11:25
Sesión 6	03-02-15	10:35 – 11:25	**Sesión 13**	17-02-15	10:35 – 11:25
Sesión 7	04-02-15	09:25 – 10:15	**Prueba**	18-02-15	09:25 – 10:15

Tabla VI - 17. Calendario de actuación (Ciclo I-2).

VI.2.3. Desarrollo de las sesiones

En este apartado resumimos el desarrollo de las sesiones a partir de la información recogida en el diario de clases. Comentaremos las incidencias sobre la asistencia y los aspectos actitudinales de los alumnos, y resumiremos las apreciaciones sobre la comprensión y el funcionamiento de las sesiones. Dichas apreciaciones se contrastarán posteriormente con los datos obtenidos de las producciones de los alumnos. Haremos especial énfasis en estas secciones sobre aquellas incidencias que provocaron cambios en el diseño o en la secuenciación durante la intervención.

El diario de clase en este ciclo abarca las once primeras sesiones de clase ya que en el resto no estuvo presente el profesor-investigador.

VI.2.3.1. Primera sesión

Asisten todos los alumnos.

Se ejecuta la sesión según el diseño, sin embargo, el profesor-investigador tiene que dar por finalizado el tiempo para la realización de la actividad F1.1 cuando una gran parte de los equipos no ha completado la mitad de los problemas. En la puesta en común de los resultados no da tiempo de abordar el problema F1.1.6 cuya corrección se deja pendiente para la siguiente sesión.

El comportamiento general de los alumnos es muy bueno y con buena disposición para el trabajo. La clase comienza unos minutos más tarde de lo planificado ya que los alumnos se retrasan en la llegada al aula después del recreo. El profesor-investigador realiza una intervención al inicio de la clase para intentar que no se produzcan este tipo de retrasos en las siguientes sesiones.

El término ‘razón’ genera muchas dudas incluso en los alumnos que provienen del grupo experimental del ciclo II-1 por lo que hay que intervenir para aclarar el significado.

En general, los alumnos repetidores y que provienen del grupo de control se adaptan de forma adecuada a la metodología de trabajo.

El profesor-investigador estima escasa una sesión de clase para repasar los conceptos de razón, condición de regularidad y relaciones directamente proporcionales. Quizá sería conveniente, bien dividir los problemas en dos fichas de trabajo, bien realizar una intervención intermedia durante la clase para debatir los conceptos que aparecen en los primeros problemas de la actividad.

VI.2.3.2. Segunda sesión

No asiste el alumno B4.1.

Se ejecuta el plan previsto para la sesión de clase. Sin embargo, el profesor-investigador se apresura en exceso en dar por finalizada la actividad F2.2 y dedica menos tiempo del previsto en la institucionalización, por lo que el debate generado en torno a los resultados de la actividad F2.2 finaliza ocho minutos antes de la conclusión de la clase. El profesor-investigador decide entregar la actividad TC2 y que los alumnos comiencen a trabajar dichos problemas en clase.

El comportamiento y actitud para el trabajo de los alumnos son los habituales en el grupo.

Aparentemente, la comprensión de las situaciones que se presentan en los problemas F2.2.1 (magnitudes inversamente proporcionales) y F2.2.2 (magnitudes directamente proporcionales) es muy adecuada. Los alumnos encuentran más dificultades a la hora de analizar la situación contenida en F2.2.3 (*Con el dinero que han ganado en la lotería se han ido 6 amigos a un hotel durante 10 días*). Aparecen las primeras dificultades para interpretar el producto de medidas. Se genera una discusión interesante con el alumno B9.1 sobre el significado de dicha constante y sobre la pertinencia de realizar una multiplicación entre esas dos cantidades de magnitud.

La valoración de la sesión realizada por el profesor-investigador es muy positiva y cabría reflexionar sobre la conveniencia de ampliar el número de situaciones que se plantean a los alumnos durante esta sesión.

VI.2.3.3. Tercera sesión

No asiste el alumno B4.2 (alumno objetor que mantuvo un perfil absentista durante el curso).

Se cumple la planificación prevista, aunque el profesor-investigador estima como insuficiente el tiempo que ha dedicado a la puesta en común de la actividad F3.1.

El comportamiento y la implicación de los alumnos durante esta sesión de clase son bastante malos por lo que se producen muchas interrupciones para realizar llamadas de atención a los alumnos. El profesor-investigador achaca parte de este comportamiento a que los alumnos sienten cierto desconcierto al tener que resolver problemas para los que no se les ha dado previamente instrucción. Ante esta ruptura del contrato didáctico los alumnos se encuentran descolocados y el avance en la resolución de los problemas contenidos en la actividad es lento.

Sobre la comprensión de los alumnos, se detectan muchas dificultades para la realización de la actividad TC2 en la que los alumnos debían encontrar relaciones proporcionales entre magnitudes en contextos no numéricos. En la actividad de aula F3.1 se observa que los alumnos tienen, en general, menos dificultad para resolver los problemas de comparación que los problemas de valor perdido.

Ante el mal comportamiento de los alumnos, que puede haber venido provocado por el diseño de la sesión, el profesor-investigador pone en duda el diseño y reflexiona sobre si sería conveniente un diseño “más convencional” con mayor tiempo para la institucionalización y presentando los problemas agrupados según su tipología.

VI.2.3.4. Cuarta sesión

No asiste el alumno B4.2.

Ante las dudas generadas tras la sesión 3, la puesta en común de la actividad TC3 se alarga más allá del tiempo planificado. Este hecho provoca que el profesor-investigador tenga que dar por concluida la actividad F4.1 cuando una buena parte de los alumnos no ha podido llegar al problema F4.1.3 (la actividad contenía cinco problemas). El tiempo para la puesta en común de esta actividad también es escaso.

El comportamiento es muy malo y disruptivo. La implicación de los alumnos en el trabajo de clase es, en general, nula. Los alumnos trabajan a un ritmo muy lento y el profesor-investigador realiza muchas interrupciones para realizar llamadas de atención. Como posible motivo de la actitud de los alumnos, el profesor-investigador destaca en el diario de clase que se trata de la última sesión lectiva de la jornada previa a un puente festivo de cuatro días de duración.

El alumno B4.1 muestra una actitud desafiante y se queja de que su profesor de la academia no sabe resolver los problemas (en referencia a los problemas de comparación de la actividad para realizar fuera del horario lectivo TC3) y que, por tanto, no se le puede pedir a él que sepa resolverlos.

En cuanto a la comprensión de los alumnos, se detecta que el contexto del problema F4.1.1 genera problemas de comprensión. La necesidad de realizar un cambio de unidades en una de las magnitudes para poder interpretar de manera sencilla el producto de medidas añade mayor dificultad a este problema. También se detectan muchas dificultades para abordar el problema de comparación cualitativa.

Tras esta sesión el profesor-investigador reflexiona en torno a tres aspectos:

- Sería conveniente realizar un resumen de las tipologías de problemas trabajados al final de la siguiente sesión, en el que se ponga de manifiesto cómo, a partir de una situación numérica de proporcionalidad simple (directa e inversa) se construye un problema de valor perdido y un problema de comparación.
- Hay que replantearse el orden en el que se introducen los problemas de comparación cualitativa ya que quizá sería conveniente comenzar por un problema en el que pudiera determinarse la respuesta de forma unívoca.
- Hay que replantearse el contexto del problema F4.1.1 y el orden en el que se presenta. Además, en otros problemas de la propuesta ya se trabaja el cambio de unidades de minutos a horas, por lo que podría evitarse esa complicación en este problema.

No se toman medidas debidas a los aspectos actitudinales a la espera de ver cómo se desarrollan las siguientes sesiones de clase.

VI.2.3.5. Quinta sesión

Asisten todos los alumnos.

Se ejecuta el plan previsto, salvo por la falta de tiempo para la puesta en común del problema F5.1.5.

Mejora ostensiblemente la actitud de los alumnos y el nivel de implicación en el trabajo en esta tercera sesión de taller de problemas en situaciones de proporcionalidad simple.

Se evidencian muchos problemas para interpretar los productos de medida relacionados con el trabajo (número de objetos o individuos que realizan simultáneamente y de forma colaborativa un trabajo y tiempo que emplean en terminarlo), especialmente en los problemas F5.1.4 y F5.1.5.

Para los siguientes ciclos, cabe replantearse el número de problemas presentados en esta actividad de trabajo. La puesta en común del problema F5.1.5 se pospone para el comienzo de la siguiente sesión.

VI.2.3.6. Sexta sesión

No asiste el alumno B8.1.

Se ejecuta el plan previsto, pero se termina el debate en torno a la actividad F8.2 cinco minutos antes de finalizar la sesión.

El comportamiento general sigue mejorando. Hay una buena implicación en el trabajo salvo en el equipo B4 que permanece toda la sesión casi sin trabajar (el equipo B4 está compuesto por el alumno objetor y absentista y por el alumno que se muestra disconforme con el tipo de tareas que se le solicitan). También se detecta una falta de interés e implicación crecientes en el equipo B10.

Tras las tres sesiones de trabajo con los problemas simples se detecta una mejora en la interpretación de las operaciones binarias entre cantidades de magnitud. Los alumnos abordan sin grandes dificultades las estructuras compuestas con tres magnitudes, tanto la ya trabajada en 1º de ESO, $\mathbb{p} = (-1, -1,1)$, como la estructura de triple producto que aparece por primera vez, $\mathbb{p} = (1,1,1)$.

Surge por primera vez en este ciclo el empleo de argumentos cualitativos erróneos del tipo "a más a más" (alumno B4.1). Además, disminuye la preocupación de los alumnos por analizar de forma previa las relaciones entre las magnitudes que aparecen en los enunciados de los problemas.

El profesor-investigador realiza una autocrítica sobre la forma apresurada en la que ha institucionalizado el concepto de proporcionalidad compuesta y la estrategia de amalgamación. Para los siguientes ciclos debe prestarse mayor atención a este momento de la sesión.

VI.2.3.7. Séptima sesión

Asisten todos los alumnos.

Se ejecuta la estructura de la sesión correctamente y los tiempos dedicados a las diferentes actividades se ajustan a la planificación prevista.

El comportamiento sigue mejorando a la vez que mejora la implicación general con las actividades de aula (salvo la del equipo B4).

El profesor-investigador considera que ha mejorado la comprensión respecto a sesiones anteriores. Los alumnos incorporan la estrategia de amalgamación a sus producciones, aunque no traducen explícitamente el problema compuesto a uno simple como paso previo a la resolución. Algunos alumnos piden aclaraciones sobre el enunciado del problema F7.1.2 ya que tienen dudas sobre si la cantidad económica que aparece hace referencia a lo que ha pagado cada persona o a lo que han pagado en total todo el grupo de amigos.

El profesor-investigador valora positivamente el desarrollo de esta séptima sesión.

VI.2.3.8. Octava sesión

No asiste el alumno B4.2.

Respecto a la planificación prevista, no da tiempo a realizar la puesta en común de los resultados de la actividad F8.2. Del resto de actividades se modifican los tiempos previstos inicialmente. Principalmente se modifica el tiempo reservado para que los alumnos aborden los problemas de la situación introductoria. En esta actividad se invierten 25 minutos, en vez de los 15 previstos inicialmente.

El comportamiento y la actitud siguen normalizándose.

El profesor-investigador percibe que mientras para los repartos directos emergen estrategias de manera natural en casi todos los equipos, no aparecen de forma intuitiva estrategias para abordar los problemas de repartos inversamente proporcionales. Tampoco parece que la comprensión de dichas situaciones mejore tras la institucionalización. La baja presencia de producciones que realizan un reparto inversamente proporcional ha empobrecido el debate posterior a la situación introductoria respecto a este concepto. Se pone en común la única respuesta al problema de reparto inversamente proporcional que presenta un método correcto pero válido solo para repartos con dos individuos.

El profesor-investigador realiza una autocrítica sobre la forma en la que se han institucionalizado los repartos inversamente proporcionales ya que no ha conseguido proporcionar herramientas suficientes para que los alumnos puedan abordar este tipo de problemas. Se estima necesario replantear la forma en la que se introducen, se institucionalizan y se refuerzan los contenidos relacionados con los repartos inversamente proporcionales en siguientes ciclos de investigación-acción. Una institucionalización que coordine las ideas planteadas en el Capítulo IV, requeriría, por un lado, de una situación introductoria que haga emerger resoluciones proporcionales de forma natural y, por otro, de un mayor número de sesiones para trabajar este contenido.

VI.2.3.9. Novena sesión

Asisten todos los alumnos.

En esta sesión se arrastra la falta de tiempo para el desarrollo de las actividades planteadas para la sesión 8. La sesión comienza con la puesta en común de las actividades F8.2 y TC8, lo que consume veinte minutos del tiempo de la sesión. Así, el plan inicial se modifica sobre la marcha y se decide que solo se va a repartir la actividad F9.1 con la situación introductoria de porcentajes, pero no se repartirá la actividad F9.2. Tras esta decisión, el tiempo dedicado a la realización de F9.1 y el posterior se estiman adecuados.

Se mantienen un comportamiento adecuado y una implicación con el trabajo de aula dentro de lo habitual en este grupo.

Tras finalizar la sesión de clase, el profesor-investigador se puso en contacto con el resto de los componentes del equipo de investigación y se decidió ampliar la intervención en una sesión, de forma que en la sesión 10 se realizaría la actividad F9.2 y en las siguientes sesiones se realizarían las actividades planificadas en el orden previsto.

VI.2.3.10. Décima sesión

No asiste el alumno B4.2.

Aunque la clase comienza con unos minutos de retraso debido a una charla con la Policía Local que no estaba planificada, la sesión se desarrolla según la modificación al plan inicial.

Se mantienen un comportamiento adecuado y una implicación con el trabajo de aula dentro de lo habitual en este grupo.

La comprensión de los alumnos mejora respecto a la observada durante el ciclo II-1. Se asume de manera relativamente natural la conexión entre el porcentaje y la razón entre magnitudes y se utiliza convenientemente para resolver problemas de valor perdido de Tipo III y Tipo I.

Se valora adecuadamente la modificación del plan inicial que ha permitido desarrollar las sesiones de porcentaje con un ritmo más pausado.

VI.2.3.11. Undécima sesión

Asisten todos los alumnos.

Aunque se ejecuta el plan previsto, la falta de comprensión evidenciada por los alumnos tras la institucionalización de las situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales provocó que un número importante de alumnos fuera incapaz de abordar los problemas de la actividad F11.2, por lo que el profesor-investigador decidió realizar una puesta en común para cada problema de la F11.2 dejando un tiempo de cinco minutos para que los alumnos intentaran resolverlos.

Empeora el comportamiento respecto a las sesiones anteriores y se registran algunas faltas de respeto hacia el profesor por parte del alumno B4.1.

A pesar de que se han trabajado problemas de cálculo inverso (Tipo III) en las sesiones anteriores y en el ciclo II-1. Se observa, por primera vez en este ciclo de investigación-acción, la utilización de estrategias algorítmicas como la regla de tres o el cálculo directo de porcentajes mediante las fórmulas descritas en el ciclo II-1.

VI.3. Fase de observación

En esta sección presentamos los resultados de la observación para el primer ciclo en 2º de ESO a partir de la información recogida a través de: las producciones escaneadas de los estudiantes de todos los problemas realizados durante la propuesta y en la prueba escrita final, las producciones de los estudiantes del grupo de control en la prueba escrita y los informes realizados por el observador externo. Debido a la baja médica del profesor-investigador no se dispone de las producciones de los alumnos para las actividades TC11, F12.1, TC12 y F13.1, ni se realizaron entrevistas semiestructuradas en este ciclo. Al no haber finalizado las sesiones relativas al foco sexto de contenido (porcentajes y problemas asociados), al observador externo se le solicitó que rellenara los protocolos de observación para las sesiones de los cinco primeros focos de interés.

VI.3.1. Análisis de las producciones escritas

En esta sección se analizan las producciones escritas de los alumnos. Como se ha comentado anteriormente, las producciones previas a la prueba escrita se recogieron de forma inmediatamente anterior a la puesta en común e institucionalización.

Al igual que en el ciclo II-1 (ver sección V.3.1. Análisis de las producciones escritas), el análisis se divide en dos fases. En primer lugar, se analiza la situación introductoria en cada uno de los seis focos de interés y, en segundo lugar, se analizan el resto de las producciones para los problemas realizados durante la secuencia y durante la prueba escrita. Además, dentro de cada foco de interés, las fases del análisis se realizan en dos niveles de concreción. Un primer nivel general y común para todos los problemas que da cuenta de si la producción no se ha entregado, se ha entregado, pero está en blanco, o de si se da una respuesta incorrecta o correcta al problema. En el segundo nivel se analizan diferentes estrategias de resolución, errores cometidos, sistemas de representación empleados y otras peculiaridades de las respuestas. Dentro de cada nivel, el análisis cuantitativo se acompaña de un análisis cualitativo de las respuestas. Aunque presentaremos en este capítulo de nuevo las categorías específicas de análisis de las producciones para cada foco de interés, tanto estas como las categorías generales se presentaron y desarrollaron en el Capítulo III (ver sección III.3.8.2. Categorías de análisis de la comprensión del contenido).

VI.3.1.1. Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad

En esta sección analizamos las producciones de los alumnos en las tareas específicas diseñadas para el Foco 1. Las sesiones 1 y 2 (tanto las actividades de trabajo de clase, como las de casa) se dedicaron íntegramente a estos contenidos. Además, se incluyeron problemas específicos en las fichas de repaso TC11 y F13.1, pero que, como hemos dicho, no pudieron recogerse por lo que no serán tenidas en cuenta en el análisis de los resultados de este ciclo. Además, en la prueba escrita final se introdujo el problema PE.1 y los problemas PE.2.2 y PE.2.3 que evalúan la adquisición de estos contenidos.

Podemos distinguir tres fases diferentes relativas a la instrucción de estos contenidos. En este ciclo. En primer lugar, los problemas contenidos en la ficha F1.1 y TC1, se abordan sin haber recibido instrucción previa sobre proporcionalidad inversa. Estos problemas sirven como conexión con los conocimientos previos de los alumnos sobre caracterización de relaciones directamente proporcionales o no directamente proporcionales. A continuación, la ficha F2.1 supone la situación introductoria a las situaciones de proporcionalidad inversa. Tras su resolución se institucionaliza el concepto de magnitudes inversamente proporcionales. A partir de este momento, los alumnos deben distinguir entre relaciones directamente proporcionales, inversamente proporcionales o sin relación de proporcionalidad.

Análisis de la situación introductoria.

Consideramos como situación introductoria para este foco de interés la actividad F2.1 que tenía el siguiente enunciado:

Analiza las siguientes situaciones en las que NO se puede calcular la razón entre las magnitudes involucradas y decide si es posible realizar ALGUNA OTRA OPERACIÓN entre ellas. En dicho caso, explica por qué realizas la operación y lo que significa el resultado.

F2.1.1: *Con los bocadillos que hemos preparado, si van los 60 alumnos a la excursión, cada uno puede comerse 3 bocadillos a lo largo del día.*

F2.1.2: *En el año 2000 había 6000 millones de personas en el mundo.*

Los contextos que componen la situación introductoria provienen de la tarea para casa encomendada tras la sesión 1. En esta sesión se lanzaron situaciones de proporcionalidad directa, inversa y sin relación proporcional a los alumnos, para activar sus conocimientos previos derivados de la propuesta de 1º de ESO. Así, en dicha sesión no se distinguió entre relación proporcional directa e inversa, sino que se estudió si en determinadas situaciones podía suponerse o no (y bajo qué condiciones) una relación de proporcionalidad directa. Por tanto, los contextos planteados en esta situación introductoria han sido catalogados ya previamente como "no directamente proporcionales" y se solicita a los alumnos que evalúen si tiene sentido realizar alguna operación entre las cantidades de magnitud que aparecen en el enunciado.

Como se observa en la Tabla VI - 18 todos los alumnos detectaron que en la situación F2.1.1 tenía sentido considerar el producto de las magnitudes involucradas y la gran mayoría explicitó que en la situación F2.1.2 no tenía sentido considerar ninguna operación entre las cantidades de magnitud.

		N	B	I	C
F2.1.1	N.º de respuestas	0	0	0	10
	Porcentaje	-	-	-	100 %
F2.1.2	N.º de respuestas	0	3	0	7
	Porcentaje	-	30 %	-	70 %

Tabla VI - 18. Resultados generales en la situación introductoria de análisis de situaciones de proporcionalidad inversa y cálculo de la constante de proporcionalidad (Ciclo I-2).

La mayor parte de los alumnos interpretó la constante de proporcionalidad como una magnitud diferente a las proporcionadas por el enunciado. Algunos explicitaron "número total de bocadillos" y otros diferenciaron la magnitud intensiva nombrada en el enunciado "bocadillos por cada alumno" (Imagen VI - 1) de la magnitud extensiva que proporciona la constante de proporcionalidad.

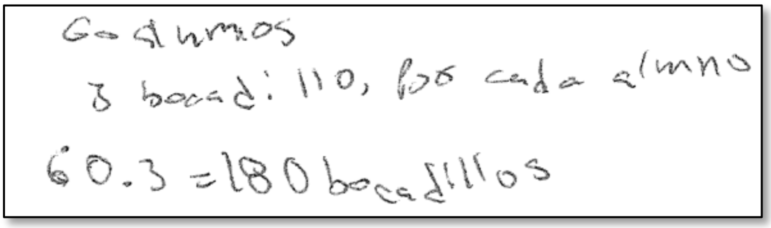


Imagen VI - 1. Producción del equipo B8 para el problema F2.1.1 (Ciclo I-2).

Así, la situación introductoria permitió introducir el concepto de relación inversamente proporcional a partir del debate generado en la puesta en común de esta actividad, no como contraposición a la relación de proporcionalidad directa, sino como un caso especial de relación entre magnitudes diferente a la de la proporcionalidad directa. En este tipo de relación puede encontrarse una tercera magnitud, producto de las dos anteriores, de forma que las magnitudes iniciales aparecen como razones de esta nueva magnitud y otra de las magnitudes iniciales.

Análisis de las producciones tras la institucionalización.

Como en el ciclo II-1, hemos distinguido cuatro tipologías de problemas para realizar el análisis en este foco de interés: problemas en los que se solicita determinar si existe una relación de proporcionalidad, problemas en los que se solicita calcular las constantes de proporcionalidad asociadas a una situación de proporcionalidad, problemas en los que se pide identificar o calcular concretamente una de las razones externas o la constante de proporcionalidad inversa, y detectar "falsos" problemas de proporcionalidad.

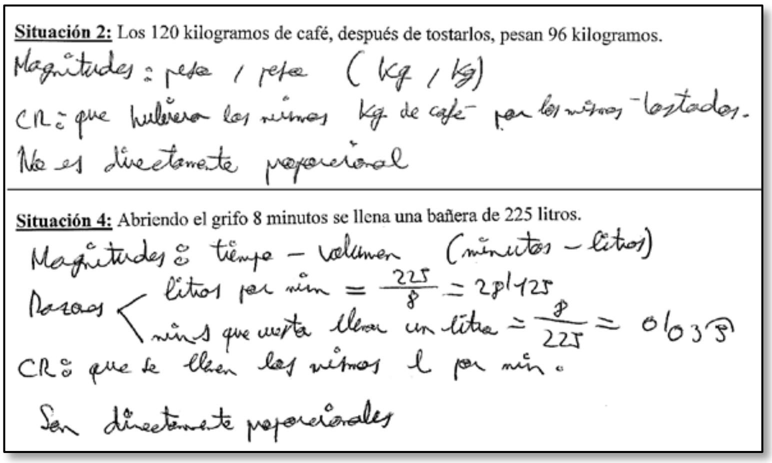
Problemas en los que se solicita determinar si existe relación de proporcionalidad.

En la Tabla VI - 19 se observan los resultados para las categorías generales para los problemas en los que se solicita determinar si existe relación de proporcionalidad. Distinguimos dos grupos, ya que los problemas contenidos en las fichas de trabajo F1.1 y TC1 son previos a la institucionalización de la proporcionalidad inversa. Para los problemas de estas fichas se pedía determinar si había o no una relación de proporcionalidad directa, en los siguientes problemas se pedía determinar si existía o no una relación proporcional y, en caso afirmativo, diferenciar si esta relación era directa o inversa. En la Tabla VI - 19 hemos sombreado de diferentes colores los problemas según el tipo de relación proporcional que presentaban. En blanco están las situaciones en las que puede suponerse una relación de proporcionalidad directa, en gris claro en las que puede suponerse una relación de proporcionalidad inversa, y en gris oscuro aquellas situaciones en las que no puede suponerse una relación proporcional.

	N	B	I	C		N	B	I	C
F1.1.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)	**F2.2.3**	0 (0)	30 (3)	50 (5)	20 (2)
F1.1.2	0 (0)	10 (1)	0 (0)	90 (9)	**TC2.1.1**	35 (7)	0 (0)	10 (2)	55 (11)
F1.1.3	0 (0)	40 (4)	10 (1)	50 (5)	**TC2.1.2**	35 (7)	0 (0)	10 (2)	55 (11)
F1.1.4	0 (0)	40 (4)	0 (0)	60 (6)	**TC2.1.3**	35 (7)	0 (0)	20 (4)	45 (9)
F1.1.5	0 (0)	70 (7)	0 (0)	30 (3)	**TC2.2.1**	35 (7)	5(1)	35 (7)	25 (5)
F1.1.6	0 (0)	60 (6)	10 (1)	30 (3)	**TC2.2.2**	35 (7)	5 (1)	10 (2)	50 (10)
TC1.1	20 (4)	5 (1)	35 (7)	40 (8)	**TC2.2.3**	35 (7)	10 (2)	0 (0)	55 (11)
TC1.2	20 (4)	15 (3)	40 (8)	25 (5)	**TC2.3.1**	35 (7)	15 (3)	35 (7)	15 (3)
TC1.3	20 (4)	5 (1)	25 (5)	50 (10)	**TC2.3.2**	35 (7)	15 (3)	5 (1)	45 (9)
TC1.4	20 (4)	5 (1)	0 (0)	75 (15)	**TC2.3.3**	35 (7)	10 (2)	5 (1)	50 (10)
TC1.5	20 (4)	5 (1)	15 (3)	60 (12)	**PE.1.1**	10 (2)	10 (2)	50 (10)	30 (6)
TC1.6	20 (4)	5 (1)	60 (12)	15 (3)	**PE.1.2**	10 (2)	5 (1)	20 (4)	65 (13)
F2.2.1	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)	**PE.1.3**	10 (2)	5 (1)	15 (3)	70 (14)
F2.2.2	0 (0)	10 (1)	0 (0)	90 (9)	**PE.1.4**	10 (2)	10 (2)	10 (2)	70 (14)

Tabla VI - 19. Resultados generales en los problemas de detección de relaciones de proporcionalidad (Ciclo I-2).

Como en el ciclo II-1, encontramos un alto número de alumnos que no entregan las tareas para casa (categoría N en las fichas TC1 y TC2) por lo que los porcentajes de corrección en dichas tareas son poco representativos. En las tareas contenidas en la ficha de trabajo F1.1 observamos que el número de respuestas en blanco va en aumento, lo que parece indicar que los alumnos no tuvieron tiempo suficiente para abordar todos los problemas de la ficha durante la sesión.


Situación 2: Los 120 kilogramos de café, después de tostarlos, pesan 96 kilogramos.

Magnitudes: peso / peso (kg / kg)

CR: que hubiera los mismos kg de café por los mismos tostados.

No es directamente proporcional

Situación 4: Abriendo el grifo 8 minutos se llena una bañera de 225 litros.

Magnitudes: tiempo – volumen (minutos – litros)

Razones: litros por min = $\frac{225}{8}$ = 28'125; mins que cuesta llenar un litro = $\frac{8}{225}$ = 0'035

CR: que se llenen los mismos l por min.

Son directamente proporcionales

Imagen VI - 2. Producción del alumno B2.1 para los problemas TC1.2 (arriba) y TC1.4 (abajo) en el Ciclo I-2.

Las tareas iniciales que se corresponden a situaciones de proporcionalidad directa de la ficha F1.1 y las tareas de proporcionalidad directa de la ficha F2.2 y de la prueba escrita, tienen un alto porcentaje de éxito, por lo que parece que en este ciclo los alumnos encuentran menos dificultades identificando las relaciones de proporcionalidad directa. En este sentido cabe destacar que dentro de la ficha TC1, la situación de proporcionalidad directa TC1.4 tiene un porcentaje de éxito mucho mayor que el de la situación (también directa) TC1.2. Parece que la aparición de dos magnitudes homogéneas en TC1.2 ha supuesto una mayor dificultad a la hora de poder establecer condiciones de regularidad que la pareja de magnitudes heterogéneas de la situación TC1.4, en donde los alumnos han interpretado con menor dificultad la razón externa lo que ha colaborado a incrementar el porcentaje de éxito (Imagen VI - 2).

Para las situaciones inversas, aunque no se aprecian tendencias claras, parece que en las situaciones previas a la institucionalización de la proporcionalidad inversa se obtienen unos porcentajes de éxito menores que en las situaciones después de la institucionalización. Por ejemplo, un 50 % de éxito en F1.1.3, mientras que en F2.2.1 y PE.1.3, que presentan contextos similares se alcanzan porcentajes de éxito del 90 % y 70 % respectivamente

El avance en la detección de las situaciones inversas se ve respaldado si comparamos el porcentaje de respuestas correctas obtenido en el problema PE.1.3 de la prueba escrita en el ciclo II-1 y en el actual ciclo I-2. En el primer ciclo se obtuvo un porcentaje de respuestas correctas del 36,9 % ($N = 65$) y en este ciclo el porcentaje de respuestas correctas es del 70 % ($N = 20$). Un test exacto de Fisher arroja un p-valor de $p = 0{,}0113$, por lo que la diferencia es significativa a favor de los resultados en el ciclo I-2 al 95 %.

Debe destacarse una excepción a la observación anterior, en la situación F2.2.3 el porcentaje de éxito es del 20 %. En esta situación los alumnos se enfrentaban por primera vez a un contexto de proporcionalidad inversa en el que las dos magnitudes eran extensivas, lo cual provocó muchas dificultades no solo para interpretar el producto, sino para identificar que debía calcularse dicho producto. Aunque en este foco no se introdujeron más contextos similares, sí que aparecieron en problemas de valor perdido y comparación, tanto en situaciones simples inversas como en situaciones compuestas. Por tanto, debemos remitirnos a los resultados obtenidos en estos focos para observar la progresión de los alumnos a lo largo de la propuesta en este aspecto ya que la tarea F2.2.3 se encuentra en la segunda sesión de la propuesta.

La mayor dificultad de la identificación de parejas de magnitudes inversamente proporcionales también se pone de manifiesto dentro de la tarea TC2. En esta tarea, que presentaba contextos no numéricos, encontramos porcentajes de éxito superiores en el reconocimiento de parejas de magnitudes directamente proporcionales o no proporcionales, que en el reconocimiento de parejas inversamente proporcionales.

En las situaciones que no son de proporcionalidad se obtienen resultados discretos a lo largo de toda la propuesta. Especialmente bajo es el porcentaje de éxito de los alumnos en el análisis de la situación PE.1.1 de la prueba escrita en la que se presentaba una relación decreciente afín entre las magnitudes involucradas.

Los argumentos empleados por los alumnos para discriminar los tipos de relaciones que encontraban entre las magnitudes de cada problema nos permiten analizar en mayor detalle su comprensión en este tipo de tareas. Para ello, utilizaremos las categorías específicas que ya presentamos en el Capítulo III y utilizamos en el Capítulo V y que volvemos a recordar en la Tabla VI - 20.

Cód.	Argumento	Cód.	Argumento
D0	Sin argumentación.	**D5**	Implícitamente funcional. Multiplicativa.
D1	Por razones internas.	**D6**	Multiplicativa. Doble, triple, mitad, …
D2	Por razones externas / Constante de proporcionalidad.	**D7**	Cualitativa. Aumentos y disminuciones.
D3	Explícitamente funcional.	**D8**	Existencia de relación.
D4	Implícitamente funcional. Aditiva.	**D9**	Número de magnitudes.

Tabla VI - 20. Categorías específicas para el análisis de las caracterizaciones de relaciones de proporcionalidad.

En la Tabla VI - 21 se han clasificado los argumentos utilizados para razonar la existencia de relaciones proporcionales y caracterizar dicha relación proporcional en el caso de que exista. Esta clasificación se ha hecho independientemente de que la respuesta haya sido correcta o incorrecta (columnas I y C de la Tabla VI - 19). Como antes, se han sombreado los problemas en función de si la relación es de proporcionalidad directa (en blanco), inversa (gris claro) o no existe relación (gris oscuro).

	D0	D2	D7	D8	D9
F1.1.1	10 (1)	90 (9)	-	-	-
F1.1.2	10 (1)	80 (8)	-	-	-
F1.1.3	10 (1)	50 (5)	-	-	-
F1.1.4	20 (2)	40 (4)	-	-	-
F1.1.5	-	30 (3)	-	-	-
F1.1.6	10 (1)	30 (3)	-	-	-
TC1.1	5 (1)	70 (14)	-	-	-
TC1.2	25 (5)	35 (7)	-	5 (1)	-
TC1.3	20 (4)	25 (5)	-	-	30 (6)
TC1.4	5 (1)	70 (14)	-	-	-
TC1.5	15 (3)	60 (12)	-	-	-
TC1.6	5 (1)	60 (12)	-	10 (2)	-
F2.2.1	-	100 (10)	-	-	-
F2.2.2	30 (3)	60 (6)	-	-	-

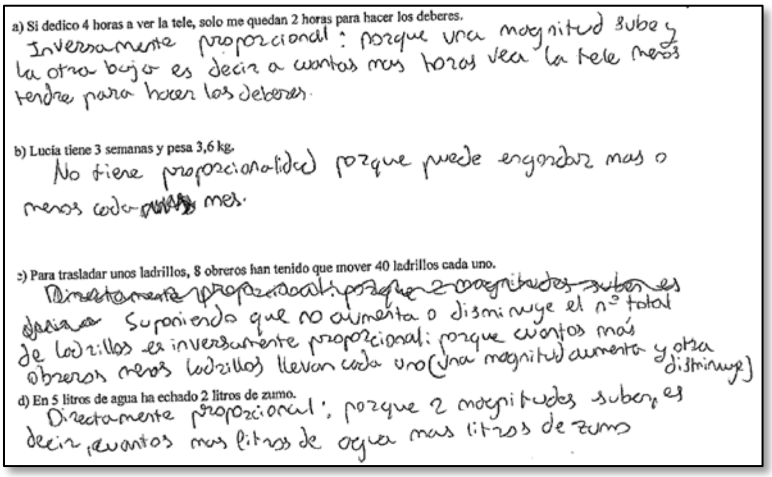
	D0	D2	D7	D8	D9
F2.2.3	60 (6)	10 (1)	-	-	-
TC2.1.1	10 (2)	50 (10)	-	-	-
TC2.1.2	-	60 (12)	5 (1)	-	-
TC2.1.3	15 (3)	20 (4)	-	30 (5)	-
TC2.2.1	25 (5)	25 (5)	5 (1)	-	-
TC2.2.2	-	55 (11)	5 (1)	-	-
TC2.2.3	-	5 (1)	-	50 (5)	-
TC2.3.1	25 (5)	20 (4)	5 (1)	-	-
TC2.3.2	-	45 (9)	5 (1)	-	-
TC2.3.3	-	25 (5)	-	30 (5)	-
PE.1.1	30 (6)	35 (7)	10 (2)	5 (1)	-
PE.1.2	25 (5)	40 (8)	10 (2)	10 (2)	-
PE.1.3	30 (6)	45 (9)	10 (2)	-	-
PE.1.4	30 (6)	45 (9)	5 (1)	-	-

Tabla VI - 21. Argumentos empleados por los alumnos en el análisis de relaciones de proporcionalidad (Ciclo I-2).

Los datos recogidos en la Tabla VI - 21 concuerdan en gran medida con lo observado en el ciclo II-1 para este mismo aspecto en la Tabla V - 20. El porcentaje de alumnos que no argumenta el tipo de relación que detecta es similar al del ciclo II-1 (entre el 20 % y el 30 % en muchos de los problemas). El argumento mayoritariamente empleado es el D2, haciendo uso de la razón externa, que es el argumento institucionalizado. Al igual que sucedía en el ciclo II-1 aparecen diferentes grados de corrección y formalismo en las respuestas correctas. Por otro lado, la incorporación de la institucionalización de la proporcionalidad inversa hace que no se encuentren producciones que caractericen como de proporcionalidad directa la relación calculando el producto de magnitudes, fenómeno que sí se observó en el ciclo II-1.

Las influencias externas parecen escasas, como ya sucedía en el ciclo II-1. No encontramos argumentos de tipo D5 o D6 (correctos, pero no institucionalizados) y la presencia del argumento erróneo por aumentos y disminuciones (D7) es baja. El uso de argumentos por aumentos y disminuciones se concentra en tres alumnos: B1.2 que en el ciclo II-1 pertenecía al grupo de control, B9.2 alumno repetidor y B5.2 que es un alumno del grupo experimental en el ciclo II-1 que no usa este tipo de argumentos en toda la propuesta, pero sí lo hace en la prueba escrita (Imagen VI - 3).

Como en el ciclo II-1, la argumentación institucionalizada D2 solo deja de ser la mayoritaria en algunos de los problemas en los que no puede suponerse relación de proporcionalidad, bien porque se presentan distractores o solo aparece una magnitud en el enunciado y los alumnos alegan este hecho (argumento D9), bien porque las magnitudes no están relacionadas y eso es lo que ponen los alumnos de manifiesto (argumento D8).


a) Si dedico 4 horas a ver la tele, solo me quedan 2 horas para hacer los deberes.
Inversamente proporcional: porque una magnitud sube y la otra baja es decir a cuantas mas horas vea la tele menos tendre para hacer los deberes.

b) Lucía tiene 3 semanas y pesa 3,6 kg.
No tiene proporcionalidad porque puede engordar mas o menos cada mes.

c) Para trasladar unos ladrillos, 8 obreros han tenido que mover 40 ladrillos cada uno.
~~Directamente proporcional: porque 2 magnitudes suben es decir~~ Suponiendo que no aumenta o disminuye el nº total de ladrillos es inversamente proporcional: porque cuantos más obreros menos ladrillos llevan cada uno (una magnitud aumenta y otra disminuye)

d) En 5 litros de agua ha echado 2 litros de zumo.
Directamente proporcional: porque 2 magnitudes suben, es decir, cuantos mas litros de agua mas litros de zumo

Imagen VI - 3. Producción del alumno B5.2 para el problema PE.1 (Ciclo I-2).

Problemas en los que se pide calcular las constantes de proporcionalidad asociadas a una situación de proporcionalidad.

Analizamos ahora aquellos problemas en los que, a partir de un contexto que presenta dos magnitudes directa o inversamente proporcionales, los alumnos debían calcular las dos razones externas asociadas en el caso directo o la constante de proporcionalidad en el caso inverso, e interpretar la solución como el valor de una nueva magnitud intensiva en el caso directo o la magnitud producto en el caso inverso. En la Tabla VI - 22 pueden verse los resultados para las categorías generales diferenciando si los alumnos han calculado numéricamente las razones o la constante de proporcionalidad y si las han interpretado de forma correcta. Como en las tablas anteriores se han sombreado de gris claro las filas correspondientes a contextos de proporcionalidad inversa. Como en la tabla análoga del capítulo anterior, las categorías C1 y C2 se han introducido para distinguir las respuestas correctas parciales de las respuestas totalmente correctas en las situaciones directamente proporcionales. Así, la abreviatura C1 indica que solo se ha calculado o interpretado una razón y la abreviatura C2 que se han calculado o interpretado ambas razones. En las situaciones inversamente proporcionales, en C1 se categorizan las respuestas correctas que calculan o interpretan correctamente la única constante de proporcionalidad y, por tanto, se deja vacía la columna C2. Solo se han tenido en cuenta las respuestas de aquellos alumnos que sí que supusieron una relación de proporcionalidad correcta entre las magnitudes (columna C de la Tabla VI - 19).

De los resultados que se observan en la Tabla VI - 22 se desprende que en este ciclo los porcentajes de estudiantes que calculan numéricamente las constantes de proporcionalidad son muy similares a los que las interpretan correctamente (en la sección V.3.1.2 del Capítulo V vimos que en 1º de ESO el porcentaje de interpretaciones correctas era menor que el de cálculo numérico correcto y que los porcentajes de respuestas incorrectas en la interpretación eran generalmente no nulos). Además, la escasa diferencia entre cálculo correcto e interpretación correcta en algunas preguntas se debe a que los alumnos no explicitan la interpretación de la constante, no a que hayan errado al describirla. En toda la Tabla VI - 22 solo encontramos una respuesta categorizada como incorrecta en la interpretación. Se trata de la producción de B7.2 (que provenía del grupo de control del ciclo II-1) que se observa en la Imagen VI - 4. También encontramos un bajo número de respuestas en blanco o parcialmente correctas para las situaciones directas, lo que implica que casi todos los equipos que detectan correctamente la relación de proporcionalidad son capaces de calcular e interpretar correctamente las constantes de proporcionalidad asociadas.

		Valor numérico			**Interpretación**			
		B/I	**C1**	**C2**	**B**	**I**	**C1**	**C2**
F1.1.1	N.º de respuestas	0	0	10	0	0	1	9
	Porcentaje	-	-	100 %	-	-	10 %	90 %
F1.1.2	N.º de respuestas	0	0	9	1	0	0	8
	Porcentaje	-	-	90 %	10 %	-	-	80 %
F1.1.4	N.º de respuestas	2	0	4	3	0	0	3
	Porcentaje	10 %	-	40 %	30 %	-	-	30 %
F1.1.6	N.º de respuestas	2	0	3	4	0	0	1
	Porcentaje	20 %	-	30 %	40 %	-	-	10 %
TC1.2	N.º de respuestas	1	0	4	1	1	0	3
	Porcentaje	5 %	-	20 %	5 %	5 %	-	15 %
TC1.4	N.º de respuestas	2	1	13	4	0	1	11
	Porcentaje	10 %	5 %	65 %	20 %	-	5 %	55 %
F2.2.1	N.º de respuestas	0	9		0	0	9	
	Porcentaje	-	90 %		-	-	90 %	
F2.2.2	N.º de respuestas	4	1	4	4	0	1	4
	Porcentaje	40 %	10 %	40 %	40 %	-	10 %	40 %
F2.2.3	N.º de respuestas	1	1		1	0	1	
	Porcentaje	10 %	10 %		10 %	-	10 %	

Tabla VI - 22. Resultados generales para los problemas en los que se solicitaba calcular las razones o la constante de proporcionalidad asociadas a una situación de proporcionalidad simple (Ciclo I-2).

En la actividad con la que comienza la propuesta en 2º de ESO, F1.1, extraída de la propuesta para 1º de ESO, se observa que el porcentaje de éxito (tanto del cálculo como de la interpretación) disminuye a lo largo de la actividad. Todos los alumnos calculan correctamente las razones en la situación F1.1.1, frente a un 30 % de éxito en el problema F1.1.6. Este decrecimiento de los porcentajes de éxito a lo largo de la actividad coincide con lo observado en el ciclo II-1, aunque de una manera más acusada. Como se comentó en el diseño del primer ciclo las situaciones de esta hoja de trabajo están secuenciadas de forma que la interpretación de las razones asociadas aumenta en dificultad conforme se avanza en la ficha. Observamos que el porcentaje de éxito es mayor en las situaciones en las que las razones están bien compactadas y se trabaja con magnitudes continuas que en las situaciones en las que las razones no están bien compactadas y se trabaja con magnitudes discretas. Además, en estas últimas situaciones aumenta el número de alumnos que no calculan o interpretan las razones a pesar de haber detectado correctamente la relación de proporcionalidad. Por otra parte, en los problemas de la ficha de trabajo para casa TC1, observamos que la situación con magnitudes homogéneas TC1.2 genera muchas más dificultades que la situación TC1.4 en la que las razones podían interpretarse en términos de velocidad de emanación de agua ("litros por minuto").

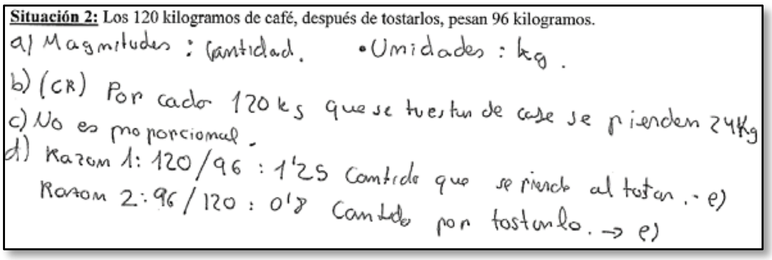

Situación 2: Los 120 kilogramos de café, después de tostarlos, pesan 96 kilogramos.
a) Magnitudes : Cantidad. •Unidades : kg.
b) (CR) Por cada 120 kg que se tuestan de cafe se pierden 24Kg
c) No es proporcional.
d) Razon 1: 120/96 : 1'25 Cantidad que se pierde al tostar. → e)
Razon 2: 96/120 : 0'8 Cantidad por tostarlo. → e)

Imagen VI - 4. Producción del alumno B7.2 para el problema TC1.2 (Ciclo I-2).

En las situaciones de proporcionalidad inversa F2.2.1 y F2.2.3 vemos una gran diferencia entre los porcentajes de éxito. El problema F2.2.1, en el que una de las magnitudes era intensiva y, por tanto, podía interpretarse de forma "sencilla" el producto, tiene unos porcentajes de éxito del 90 % tanto en el cálculo de la constante como en la correcta interpretación. Por el contrario, el problema F2.2.3 tiene unos porcentajes de éxito del 10 % tanto en el cálculo como en la interpretación, es decir, un único equipo ha respondido correctamente. Este hecho, no es sorprendente, ya que el 90 % de los equipos detectó correctamente la relación inversa en F2.2.1 y solo el 20 % de los equipos la detectó en F2.2.3. Estos datos podrían indicar que la facilidad con la que los alumnos son capaces de calcular e interpretar la constante de proporcionalidad influye de manera determinante en la capacidad para determinar si la relación es de proporcionalidad inversa y que, al menos en las primeras sesiones, los alumnos tienen dificultades interpretando el producto de magnitudes extensivas.

Problemas en los que se pide identificar/calcular una razón concreta o la constante de proporcionalidad inversa en una situación de proporcionalidad.

En el diseño de este ciclo se incrementó el número de problemas relativos al cálculo concreto de una razón en situaciones en las que aparece el porcentaje para intentar potenciar las relaciones entre porcentaje y razón. Así, en la Tabla VI - 23, la mayor parte de los problemas propuestos se corresponden con situaciones de proporcionalidad directa relacionadas con el porcentaje realizadas en las sesiones 9, 10 y 11. Además de estas actividades, en la prueba escrita se incorporan dos preguntas de respuesta cerrada, PE.2.2 y PE.2.3, en contextos de proporcionalidad directa e inversa respectivamente. En estas actividades se presenta una situación que involucra dos magnitudes y el alumno debe seleccionar la única opción correcta de entre cuatro frases que exponen diferentes valores e interpretaciones para constantes asociadas a dichas situaciones.

En la Tabla VI - 23 se observan tasas de éxito muy altas en la mayoría de los problemas relacionados con el porcentaje. Todas las razones parte-todo y sus inversas (problemas F9.1.1.1, F9.1.1.2, F9.1.1.3, F9.1.1.4, F9.1.2.1, F9.1.2.2, F9.1.2.3 y F9.1.2.4) tienen tasas de éxito del 100 % o del 90 % en la ficha de trabajo F9.1. En las razones parte-parte (problemas F9.1.1.7, F9.1.1.8, F9.1.2.5 y F9.1.2.6) bajan ligeramente las tasas de éxito. Sin embargo, en las actividades de la ficha de trabajo F11.1 sí observamos altas diferencias en las tasas de éxito dependiendo del tipo de razón solicitada. Las tasas de éxito son del 100 % cuando a los estudiantes se les solicita calcular la razón entre la subida o bajada y la cantidad inicial (F11.1.1.2 y F11.1.2.2), siguen siendo altas cuando se solicita que calculen la razón entre la cantidad final y la cantidad inicial (F11.1.1.4 y F11.1.24), pero bajan considerablemente cuando se solicita que calculen la razón entre la cantidad inicial y la cantidad final (F11.1.1.5 y F11.1.2.5). Se rompe en este caso la tendencia observada en otros problemas por la que los estudiantes tiene tasas de éxito similares al calcular e interpretar las dos razones inversas asociadas a una pareja de magnitudes. Analizaremos más en detalle la tasa de éxito de las actividades F9.1 y F11.1 en la sección VI.3.1.6 de este capítulo ya que dichas actividades son las situaciones introductorias del porcentaje y de los aumentos y disminuciones porcentuales.

	N	B	I	C
F9.1.1.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.1.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.1.3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.1.4	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F9.1.1.7	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (8)
F9.1.1.8	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (8)
F9.1.2.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.2.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.2.3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.2.4	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F9.1.2.5	0 (0)	20 (2)	10 (1)	70 (7)
F9.1.2.6	0 (0)	10 (1)	0 (0)	90 (9)
F10.1.1.3	0 (0)	30 (3)	10 (1)	60 (6)
F11.1.1.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F11.1.1.4	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F11.1.1.5	0 (0)	30 (3)	40 (4)	30 (3)
F11.1.2.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F11.1.2.4	0 (0)	10 (1)	30 (3)	60 (6)
F11.1.2.5	0 (0)	60 (6)	30 (3)	10 (1)
PE.2.2	10 (2)	10 (2)	30 (6)	50 (10)
PE.2.3	10 (2)	10 (2)	45 (9)	35 (7)

Tabla VI - 23. Resultados generales para los problemas en los que solicitaba identificar o calcular una razón concreta o la constante de proporcionalidad en una situación de proporcionalidad (Ciclo I-2).

En los problemas de la prueba escrita individual (PE.2.2 y PE.2.3) se han obtenido tasas de éxito discretas, algo más alta en la situación de proporcionalidad directa (PE.2.2) que en la de proporcionalidad inversa (PE.2.3). Además, para el ítem PE.2.2, que también se incorporaba en la prueba escrita al final del ciclo II-1, se obtiene una tasa de éxito ligeramente superior en este ciclo (50 % frente al 40 % del ciclo II-1). Esta mejora en el ítem PE2.2 entre ciclos se ve refrendada también por la tasa de respuestas incorrectas que se reduce a la mitad en el ciclo I-2. (30 % frente al 60 % del ciclo II-1).

Completamos el análisis de estos problemas de respuesta cerrada con el porcentaje de respuestas para cada una de las opciones que se proponían a los alumnos (Tabla VI - 24).

		I_1	I_2	I_3	C
PE.2.2	N.º de respuestas	4	0	2	10
	Porcentaje	20 %	-	10 %	50 %
PE.2.3	N.º de respuestas	6	1	2	7
	Porcentaje	30 %	5 %	10 %	35 %

Tabla VI - 24. Desglose de respuestas para los problemas de opción múltiple PE.2.2 y PE.2.3 (Ciclo I-2).

A diferencia de lo que ocurría en el ciclo II-1, las respuestas incorrectas se concentran claramente en una de las opciones propuestas. En el ítem PE.2.2 la respuesta incorrecta más común es una afirmación que presentaba una de las razones de la situación de proporcionalidad directa representada mediante una fracción reducida a partir de los datos del problema, pero asociada a la interpretación de la razón inversa. Dicho error puede venir provocado por una inadecuada comprensión del número racional en su representación en forma de fracción. En el ítem PE.2.3 los errores se concentran en la opción que presentaba el resultado de calcular la razón entre las cantidades de magnitud que aparecen en el enunciado cuando dichas magnitudes tienen una relación de proporcionalidad inversa. Es decir, los alumnos parecen errar al identificar la relación de proporcionalidad que liga a las magnitudes involucradas.

Detección de "falsos" problemas de proporcionalidad.

En la Tabla VI - 25 se muestran los resultados en las categorías generales para la detección de "falsos problemas de proporcionalidad". Como hemos dicho, se trata de actividades que semántica y numéricamente mantienen una estructura similar a la de un problema de valor perdido o de comparación. Sin embargo, no puede determinarse una relación entre las magnitudes involucradas porque no existe o no tiene sentido considerarla (por la inclusión de distractores que no se corresponden con cantidades de magnitud).

		N	B	I	C
F3.1.3	N.º de respuestas	0	1	1	8
	Porcentaje	-	10 %	10 %	80 %
TC3.4	N.º de respuestas	6	1	4	9
	Porcentaje	30 %	5 %	20 %	45 %
F4.1.4	N.º de respuestas	0	6	1	3
	Porcentaje	-	60 %	10 %	30 %
TC4.2	N.º de respuestas	5	1	10	4
	Porcentaje	25 %	5 %	50 %	20 %
TC4.5	N.º de respuestas	5	2	9	4
	Porcentaje	25 %	10 %	45 %	20 %
F5.1.2	N.º de respuestas	0	1	0	9
	Porcentaje	-	10 %	-	90 %
PE.6	N.º de respuestas	2	0	6	12
	Porcentaje	10 %	-	30 %	60 %

Tabla VI - 25. Resultados generales en la detección de falsos problemas de proporcionalidad (Ciclo I-2).

Si tenemos en cuenta el efecto de las producciones no entregadas (N) o en blanco (B) de las tareas que los alumnos deben responder individualmente fuera del horario lectivo, observamos que en la Tabla VI - 25 se muestra un mayor porcentaje de éxito para los problemas F3.1.3, TC3.4, F5.1.2 y PE.6. La característica común de estos problemas es que o bien contenían números usados como cardinales ("planta 5 del hospital") o bien presentaban una pareja de magnitudes claramente no relacionadas ("duración en un campamento" y "edad media de los campistas"). Así, los problemas que más dificultades han generado son aquellos en los que se presentaba una relación funcional no de proporcionalidad (TC4.2 presenta una relación afín decreciente y TC4.5 una relación funcional constante) o una relación "discutible" o no determinista (en F4.1.4 se relaciona el "número de atletas presentados a una carrera" y el "número de atletas que terminan dicha carrera"). Este tipo de situaciones se diseñan explícitamente para que pueda generarse controversia y debate en las puestas en común con los alumnos.

Por otra parte, el ítem PE.6 de la prueba escrita (el mismo que su homónimo en la prueba escrita del ciclo II-1) obtiene una tasa de éxito muy similar a la que observamos en el ciclo II-1 en el Capítulo V (60 % en este ciclo frente al 67,7 % del ciclo II-1).

Generalmente, como vimos en el ciclo II-1 en la sección V.3.1.2, las respuestas categorizadas como incorrectas en estos problemas calculan numéricamente una solución (incorrecta) suponiendo una relación proporcional entre las magnitudes. Sin embargo, el problema TC4.2 (que no tiene análogo en la propuesta para 1º de ESO) presenta una casuística diferente. De los alumnos que dan una respuesta numérica al problema, 5 suponen una relación de proporcionalidad directa entre "tiempo que está abierto el desagüe" y "volumen de agua que queda en la bañera" (Imagen VI - 5, izquierda), probablemente confundiendo la segunda magnitud con el "volumen de agua desalojado" (caso en el que sí podría suponerse una relación de proporcionalidad directa). Estos alumnos dan 160 como respuesta numérica. Otros 4 alumnos (Imagen VI - 5, centro) suponen una relación de proporcionalidad inversa, probablemente influidos por la relación decreciente entre las magnitudes, lo que daría la respuesta numérica 40, aunque no todos llegan a esta solución. Por último, un alumno (Imagen VI - 5, derecha) supone que el agua que contenía inicialmente la bañera es 100 y resuelve correctamente el problema suponiendo la relación afín decreciente junto con esta suposición extra. Esta producción pasa por calcular la razón de agua desalojada por minuto, establece correctamente la condición de regularidad para la pendiente negativa constante y da como respuesta numérica 60.

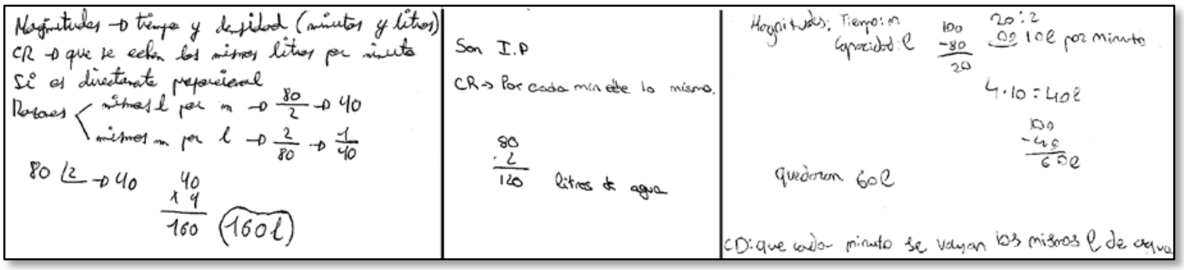


Imagen VI - 5. Producciones de los alumnos B2.1 (izquierda), B6.1 (centro) y B5.2 (derecha) para el problema TC4.2 (Ciclo I-2).

VI.3.1.2. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

A diferencia del Capítulo V, en este capítulo presentamos bajo una misma sección las diferentes tipologías de problemas que componen el segundo foco de interés del diseño y la investigación. Para el análisis especifico de las producciones de los alumnos en este foco de interés utilizamos las categorías específicas que desarrollamos en el Capítulo III y utilizamos en el Capítulo V y que volvemos a presentar para comodidad del lector en la Tabla VI - 26 (comparación cuantitativa), en la Tabla VI - 27 (valor perdido) y en la Tabla VI - 28 (comparación cualitativa).

Código	Estrategia	Código	Estrategia
C0	Sin razonamiento	**C3**	Resuelve problema de valor perdido
C1	Funcional por razones externas	**C4**	Operaciones sin sentido
C2	Escalar por razones internas	**C5**	Razonamientos aditivos erróneos

Tabla VI - 26. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
VPd0	Sin razonamiento	**VPd5**	Proporción
VPd1	Construcción de patrones	**VPd6**	Construcción sucesiva
VPd2	Factor de cambio	**VPd7**	Uso de una fórmula
VPd3	Razón externa con multiplicación	**VPd8**	Operaciones sin sentido
VPd4	Razón externa con división	**VPd9**	Razonamientos aditivos erróneos

Tabla VI - 27 . Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Código	Tipo de argumento	Código	Tipo de argumento
CL0	Sin razonamiento	**CL2**	Gráfico
CL1	Escrito/verbal	**CL3**	Ejemplo numérico

Tabla VI - 28. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.

En la propuesta para 2º de ESO los problemas asociados a este foco de interés se concentran esencialmente en las sesiones 3, 4 y 5. En las fichas de trabajo de estas sesiones, F3.1, TC3, F4.1, TC4 y F5.1, se entremezclan los problemas asociados a este Foco 2 y los asociados al Foco 3 (problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa). Además, se introdujo un problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad simple directa en la ficha de repaso, F13 (que no se llevó a cabo en este ciclo) y en la prueba escrita (ítem PE.2.1 que es el mismo que su homónimo en la prueba escrita del ciclo II-1). Estos problemas suponen un total de 120 producciones que analizaremos en esta sección.

Como se comentó en el diseño de la propuesta, no se diseñan situaciones introductorias específicas para este foco de interés en este curso (sí se hizo en la propuesta de 1º de ESO).

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Como en el resto de la propuesta, las producciones que no se han podido analizar por no haber sido entregadas (categoría N de la Tabla VI - 29, la Tabla VI - 30 y la Tabla VI - 31) se concentran en los problemas de las fichas de trabajo individual en casa y, en este ciclo, también encontramos un pequeño porcentaje de producciones no entregadas en la prueba escrita. Todos los equipos entregan las actividades de aula (aunque eventualmente algún alumno haya tenido que trabajar de forma individual por ausencia de su compañero).

		N	B	I	C
F3.1.1	N.º de respuestas	0	0	1	9
	Porcentaje	-	-	10 %	90%
TC3.2	N.º de respuestas	6	0	7	7
	Porcentaje	30 %	-	35 %	35 %
TC4.4	N.º de respuestas	6	2	5	7
	Porcentaje	30 %	10 %	25%	35 %

Tabla VI - 29. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2).

Las producciones en blanco (categoría B), se concentran en dos problemas el F3.1.4 (Tabla VI - 30, valor perdido) y el F4.1.2 (Tabla VI - 31, comparación cualitativa). Teniendo en cuenta la posición relativa de los problemas dentro de las fichas de trabajo que los contienen, y también el número de respuestas incorrectas para estos problemas (categoría I), parece que el número de respuesta en blanco para F3.1.4 puede deberse a que el problema se encuentre al final de la ficha de trabajo y los alumnos no hayan llegado a abordarlo. Sin embargo, el porcentaje de respuestas en blanco para F4.1.2 parece causado porque los alumnos no hayan sabido abordar dicho problema, ya que se encuentra al principio de la ficha de trabajo, el porcentaje de respuestas incorrectas es muy alto y era el primero de esta tipología que se introducía en la propuesta de 2º de ESO.

		N	B	I	C
F3.1.4	N.º de respuestas	0	3	2	5
	Porcentaje	-	30 %	20 %	50 %
TC3.1	N.º de respuestas	6	2	7	5
	Porcentaje	30 %	10 %	35 %	25 %
F5.1.3	N.º de respuestas	0	1	1	8
	Porcentaje	-	10 %	10 %	80 %

Tabla VI - 30. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2).

Observamos una mayor tasa de éxito en el trabajo por equipos en clase que en los problemas de trabajo individual para casa. Las tasas de éxito para los problemas realizados individualmente como tarea para casa alcanzan como máximo el 35 %. Además del efecto del número de producciones no entregadas o entregadas en blanco (N y B) el número de respuestas incorrectas también es mayor en las producciones de las fichas de trabajo individual.

Mientras que los alumnos no parecen tener dificultad al abordar de manera inicial los problemas de comparación cuantitativa (Tabla VI - 29), los problemas de valor perdido (Tabla VI - 30) y los de comparación cualitativa (Tabla VI - 31) sí parecen causar alguna dificultad inicial. En el caso de los problemas de valor perdido puede deberse, como hemos mencionado, a la posición final dentro de la ficha de trabajo del problema F3.1.4. En cualquier caso, el último problema de la propuesta de valor perdido en una situación de proporcionalidad simple directa, F5.1.3, tiene una tasa de éxito del 80 %.

		N	B	I	C
F4.1.2	N.º de respuestas	0	5	4	1
	Porcentaje	-	50 %	40 %	10 %
PE.2.1	N.º de respuestas	2	0	2	16
	Porcentaje	10 %	-	10 %	80 %

Tabla VI - 31. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2).

A pesar de que se habían trabajado los problemas de comparación cualitativa en la propuesta en 1º de ESO, el primer encuentro con este tipo de problemas en 2º de ESO arroja una tasa de éxito muy baja (del 10 %). Sin embargo, tras el desarrollo de la propuesta con los momentos de puesta en común y el trabajo con problemas de comparación cualitativa en situaciones inversas y compuestas, los alumnos parecen mejorar al abordar este tipo de problemas ya que la tasa de éxito en la prueba escrita del problema PE.2.1 es del 80 %.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

En este nivel de análisis, no se tienen en cuenta las producciones no entregadas o en blanco (N y B), es decir solo se tienen en cuenta las respuestas categorizadas en la etapa anterior del análisis como correctas o incorrectas. Los porcentajes están calculados sobre el total de equipos, para las tareas por equipos, o sobre el total de alumnos, para las tareas individuales. En la Tabla VI - 32 se recogen los porcentajes de aparición de cada una de las estrategias consideradas para los problemas de comparación cuantitativa. En la Tabla VI - 33 los correspondientes para las estrategias de resolución de problemas de valor perdido. El análisis específico para los problemas de comparación cualitativa se realiza presentando la respuesta concreta dada por los alumnos en la Tabla VI - 34 y el tipo de argumentos utilizados en la Tabla VI - 35[55].

[55] La diferencia entre el número de respuestas recogidas en la Tabla VI - 34 y Tabla VI - 35 y la suma de respuestas correctas e incorrectas recogidas para el problema F4.1.2 en la Tabla VI - 31, se debe a que las respuestas categorizadas como incorrectas en este problema explicitan que no hay relación de proporcionalidad y que por tanto no pueden resolver el problema. Por tanto, estas respuestas no aportan argumentos relacionados con el problema de comparación cualitativa y no se han clasificado en la Tabla VI - 35.

		C0	C1	C2	C3	C4	C5
F3.1.1	N.º de respuestas	0	10	0	0	0	0
	Porcentaje	-	100 %	-	-	-	-
TC3.2	N.º de respuestas	0	14	0	0	0	0
	Porcentaje	-	70 %	-	-	-	-
TC4.4	N.º de respuestas	2	9	0	0	0	1
	Porcentaje	10 %	45 %	-	-	-	5 %

Tabla VI - 32. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2).

		VPd0	VPd1	VPd2	VPd3	VPd4	VPd5	VPd6	VPd7	VPd8	VPd9
F3.1.4	N.º de resp.	1	0	0	6	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	10 %	-	-	60 %	-	-	-	-	-	-
TC3.1	N.º de resp.	0	0	0	7	0	1	0	1	3	0
	Porcentaje	-	-	-	35 %	-	5 %	-	5 %	15 %	-
F5.1.3	N.º de resp.	0	0	0	1	8	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	10 %	80 %	-	-	-	-	-

Tabla VI - 33. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2).

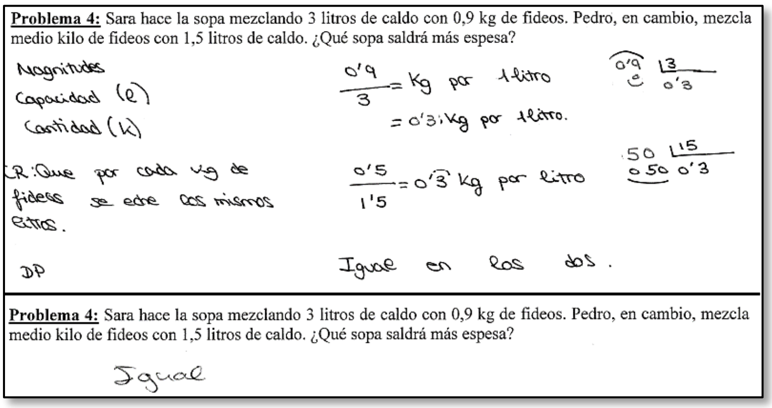
		$S_1 > S_2$	$S_1 < S_2$	$S_1 = S_2$	$S_1 ¿?S_2$
F4.1.2	N.º de respuestas	0	0	0	1
	Porcentaje	-	-	-	10 %
PE.2.1	N.º de respuestas	0	0	2	16
	Porcentaje	-	-	10 %	80 %

Tabla VI - 34. Respuesta a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2).

		CL0	CL1	CL2	CL3
F4.1.2	N.º de respuestas	0	1	0	0
	Porcentaje	-	10 %	-	-

Tabla VI - 35. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2).

El número de respuestas sin argumentos (C0, VPd0 y CL0) es anecdótico. Entre los alumnos que intentan responder a los problemas solo encontramos tres de estas producciones. Dos de ellas aparecen en el problema de comparación cuantitativa TC4.4 (ver Tabla VI - 32). En una de las producciones encontramos la respuesta correcta sin mayor argumentación (alumno B10.1), y en otra se responde que las dos situaciones a comparar "son iguales" (alumno B3.2, Imagen VI - 6 abajo).


Problema 4: Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?

Magnitudes
Capacidad (l)
Cantidad (k)

R: Que por cada kg de fideos se echa los mismos litros.

DP

$\frac{0'9}{3} = $ Kg por 1 litro
$= 0'3$ kg por 1 litro.

$\frac{0'5}{1'5} = 0'3$ kg por litro

Igual en los dos.

Problema 4: Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?

Igual

Imagen VI - 6. Producciones de los alumnos B5.1 (arriba) y B3.2 (abajo) para el problema TC4.4 (Ciclo I-2).

El porcentaje de respuestas que usan alguna estrategia correcta (C1-C3, VPd2-VPd7 y CL1-CL3) es claramente mayoritario. De las 120 producciones analizadas en este foco de interés, solo encontramos cuatro que siguen estrategias erróneas. Es decir, no se detectan prácticamente ni argumentos aditivos ni operaciones sin sentido.

Producciones que siguen una estrategia errónea.

De las cuatro producciones detectadas en este foco que siguen estrategias erróneas, una se ha categorizado como respuesta que usa argumentos aditivos (C5, Tabla VI - 32) en el problema de comparación cuantitativa TC4.4 y otras tres como uso de operaciones sin sentido (VPd8, Tabla VI - 33) en el problema de valor perdido TC3.1.

La única producción con un argumento aditivo (Imagen VI - 7) sigue un esquema de razonamiento totalmente análogo al que presentamos en el análisis del ciclo II-1 en la sección V.3.1.3 del capítulo anterior, ejemplificado en la Imagen V - 20. En este tipo de producción el alumno responde usando solo la comparación de las cantidades de una de las magnitudes involucradas.

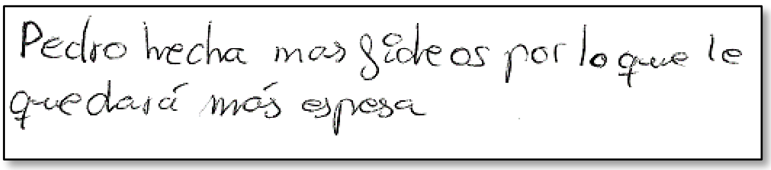
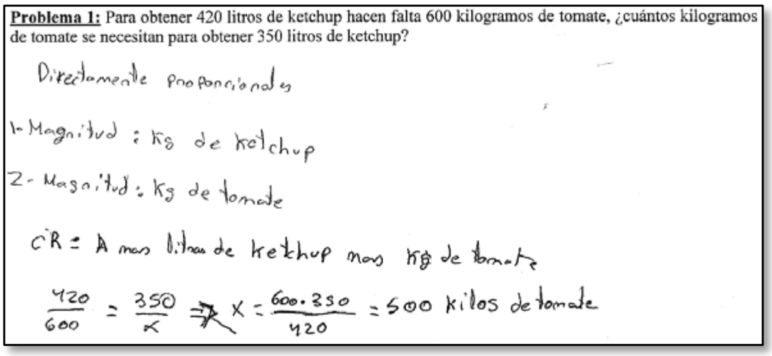

Pedro hecha mas fideos por lo que le quedará más espesa

Imagen VI - 7. Producción del alumno B6.2 para el problema TC4.4 (Ciclo I-2).

Producciones que siguen una estrategia correcta.

Como observamos en la Tabla VI - 32 todos los alumnos que siguen una estrategia correcta para resolver los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa, utilizan la estrategia basada en la comparación de razones externas. Dicha estrategia es la única utilizada incluso en el primer problema de estas características que aparece en la propuesta o en problemas como el TC4.4 cuya estructura numérica es propicia a que surjan otro tipo de estrategias basadas en razones internas (C2) o en resolución de problemas de valor perdido (C3).

En los problemas de valor perdido las estrategias basadas en el cálculo de una razón externa (VPd3 y VPd4) suponen la gran mayoría de las respuestas clasificadas en la Tabla VI - 33. Sin embargo, en este tipo de problemas, sí que encontramos, aunque de forma minoritaria, otras estrategias, ambas en el problema TC3.1. En concreto el uso de una proporción, VPd5, y el uso de una fórmula, VPd7. La aparición de estas estrategias precisamente en fichas de trabajo individual para casa hace suponer la existencia de alguna influencia externa. Hemos clasificado en VPd5 la producción del alumno B1.2 (Imagen VI - 8) a pesar de que, tras plantear la proporción, obtiene de forma directa el valor de la incógnita sin evidenciar el razonamiento empleado para obtener dicho valor, por lo que podría tratarse de un método mecanizado clasificable también en VPd7.


Problema 1: Para obtener 420 litros de ketchup hacen falta 600 kilogramos de tomate, ¿cuántos kilogramos de tomate se necesitan para obtener 350 litros de ketchup?

Directamente proporcionales

1- Magnitud : kg de ketchup

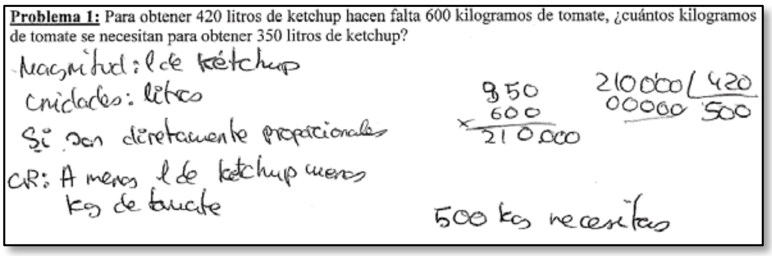
2- Magnitud : kg de tomate

CR = A mas litros de ketchup mas kg de tomate

$\frac{420}{600} = \frac{350}{x} \Rightarrow x = \frac{600 \cdot 350}{420} = 500$ kilos de tomate

Imagen VI - 8. Producción del alumno B1.2 para el problema TC3.1 (Ciclo I-2).

Por otro lado, hemos clasificado en VPd7 la producción del alumno B4.1 (Imagen VI - 9) a pesar de que dicha producción presenta un esquema de resolución aparentemente aritmético. Dicho alumno intenta mantener el esquema de resolución que se debatió en la puesta en común, pero la secuencia de operaciones binarias que realiza denota la utilización de la regla de tres. Ya que, en primer lugar, realiza el producto entre las cantidades de magnitudes diferentes, que pertenecen cada una a una pareja distinta de datos homólogos. Es decir, para resolver $(420\colon 600) \leftrightarrow (350\colon x)$, realiza primero la multiplicación, $350 \cdot 600$, para después dividir el resultado por 420.


Problema 1: Para obtener 420 litros de ketchup hacen falta 600 kilogramos de tomate, ¿cuántos kilogramos de tomate se necesitan para obtener 350 litros de ketchup?

Magnitud: l de kétchup

Unidades: litros

Si son diretamente proporcionales

CR: A menos l de ketchup menos kg de tomate

$350 \times 600 = 210000$

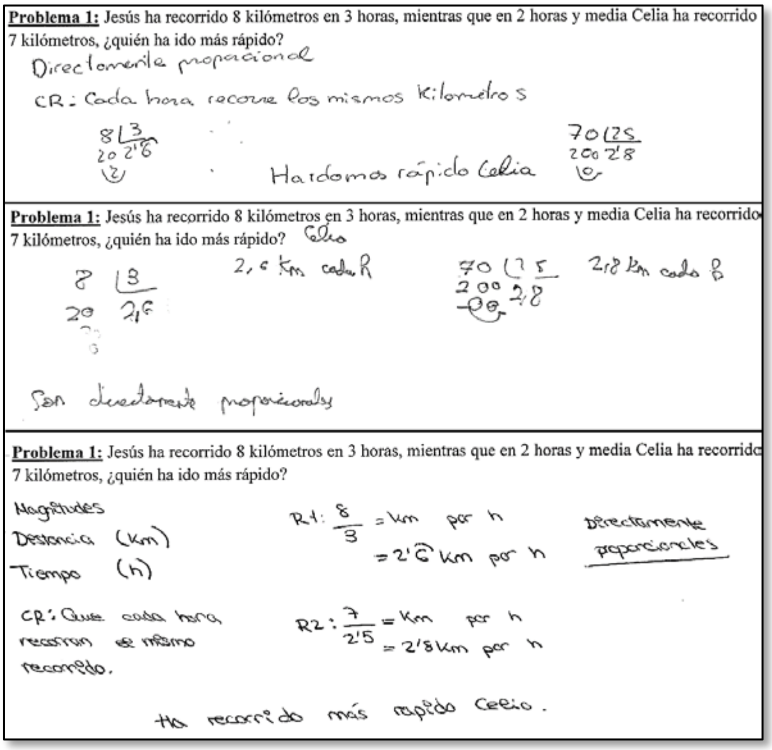
$210000 / 420 = 500$

500 kg necesitas

Imagen VI - 9. Producción del alumno B4.1 para el problema TC3.1 (Ciclo I-2).

Como observamos tanto en la Imagen VI - 8 como en la Imagen VI - 9, los alumnos que utilizan estas estrategias algoritmizadas, escriben como condición de regularidad argumentos erróneos para caracterizar la relación de proporcionalidad directa por aumentos y disminuciones (D7). Este tipo de argumentos son empleados exclusivamente por estos dos alumnos y en los problemas de las fichas de trabajo individual para casa TC3 y TC4. En el resto de las producciones o bien no se argumenta la relación de proporcionalidad, o bien se expresan argumentos en términos de condiciones de regularidad asociadas a las razones externas (D2). De hecho, a diferencia de lo registrado en el ciclo II-1 en 1º de ESO, en las respuestas a los problemas de este foco de interés se observa una mayor preocupación por establecer condiciones de regularidad para justificar la relación de proporcionalidad directa. De la misma forma, también se observa una preocupación mayoritaria por explicitar la interpretación de las operaciones binarias realizadas.

Por ejemplo, en el primer problema de este foco, F3.1.1, ninguna producción clasificada como correcta carece al mismo tiempo de condición de regularidad para justificar la relación proporcional y de interpretación de las operaciones binarias. En la Imagen VI - 10 vemos tres producciones correctas diferentes para este problema. En la parte superior, el equipo B9 justifica el cálculo de razones estableciendo que se deben recorrer los mismos kilómetros cada hora, pero no explicita que las razones calculadas expresan cantidades asociadas a dicha unidad. En la parte central, el equipo B1 no establece condiciones de regularidad, pero sí que interpreta las razones calculadas como "kilómetros cada hora". En la parte inferior, el equipo B5, hace una resolución en la que indica correctamente la condición de regularidad y el significado de las razones. Además, nombra correctamente las magnitudes diferenciando el nombre de la magnitud del nombre de la unidad empleada para medirla y presenta las razones calculadas mediante representación fraccionaria y decimal.


Problema 1: Jesús ha recorrido 8 kilómetros en 3 horas, mientras que en 2 horas y media Celia ha recorrido 7 kilómetros, ¿quién ha ido más rápido?

Directamente proporcional

CR: Cada hora recorre los mismos kilómetros

Ha ido más rápido Celia

Problema 1: Jesús ha recorrido 8 kilómetros en 3 horas, mientras que en 2 horas y media Celia ha recorrido 7 kilómetros, ¿quién ha ido más rápido?

2,6 km cada h

2,8 km cada h

Son directamente proporcionales

Problema 1: Jesús ha recorrido 8 kilómetros en 3 horas, mientras que en 2 horas y media Celia ha recorrido 7 kilómetros, ¿quién ha ido más rápido?

Magnitudes

Distancia (km)

Tiempo (h)

CR: Que cada hora recorran el mismo recorrido.

R1: $\frac{8}{3}$ = km por h = 2'6 km por h

R2: $\frac{7}{2'5}$ = km por h = 2'8 km por h

Directamente proporcionales

Ha recorrido más rápido Celia.

Imagen VI - 10. Producciones de los equipos B9 (arriba), B1 (centro) y B5 (abajo) para el problema F3.1.1 (Ciclo I-2).

A pesar del ejemplo mostrado en la producción del equipo B5 (Imagen VI - 10, abajo) destacamos que, en este ciclo, es mucho menor el uso de la representación fraccionaria para el trabajo con razones que en el ciclo II-1 de 1º de ESO. Además, cuando los alumnos utilizan la representación fraccionaria, suelen hacerlo para indicar la obtención del decimal asociado, es decir, no realizan manipulaciones con la representación fraccionaria para comparar razones u operar con ellas.

En cuanto a los argumentos utilizados por los alumnos en los problemas de comparación cualitativa, como hemos dicho anteriormente, en este foco solo se ha registrado un problema con una única respuesta en la Tabla VI - 35. El argumento utilizado por los alumnos utilizaba exclusivamente un registro verbal.

Errores cometidos en estrategias correctas.

A partir de las categorías de errores al resolver problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa inducidas del análisis del ciclo II-1 realizado en las secciones V.3.1.3 y V.3.1.5 podemos resumir de forma cuantitativa el análisis de errores encontrados en el presente ciclo. Las producciones analizadas en esta sección son aquellas que se encuentran en la categoría de respuestas incorrectas (I) del análisis de las categorías generales, pero en una categoría de estrategia correcta en la Tabla VI - 32 (C1-C3) o en la Tabla VI - 33 (VPd2-VPd7).

Recordamos que la clasificación de errores propuesta a partir del análisis del ciclo I-2 para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa es la siguiente:

- Error C.1: Se evidencia el uso de la estrategia, pero el problema está inacabado por lo que no se puede constatar si el alumno puede terminar el desarrollo correctamente.
- Error C.2: El alumno evidencia problemas asociados a la comprensión del número racional y sus representaciones simbólicas.
- Error C.3: Se identifica alguna de las razones con la interpretación, en términos de magnitud intensiva, de su inversa.
- Error C.4: Se produce un fallo al conectar el significado de las operaciones obtenidas y la interpretación del problema.

La clasificación de errores, análoga a la anterior, para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa, es la siguiente:

- Error VP.1: Se evidencia el uso de una estrategia correcta pero el problema está inacabado por lo que no se puede constatar si el alumno puede terminar el desarrollo correctamente.
- Error VP.2: El alumno evidencia problemas asociados a la comprensión del número racional y sus representaciones simbólicas.
- Error VP.3: Se identifica alguna de las razones con la interpretación, en términos de magnitud intensiva, de su inversa.
- Error VP.4: Se utiliza una estrategia VPd3 multiplicando por una razón diferente a la pertinente.

Esencialmente, ambas clasificaciones son equivalentes. Cabe destacar que, para poder distinguir el tercer error del cuarto es necesario que los alumnos expliciten la interpretación de las razones obtenidas.

En la Tabla VI - 36 se muestran los resultados para la clasificación de errores en los problemas de comparación cuantitativa y en la Tabla VI - 37 los propios de los problemas de valor perdido. La dificultad para distinguir entre los errores C.3 y C.4 y entre VP.3 y VP.4, cuando no se explicitan las interpretaciones de las razones, hace que hayamos decidido presentar los resultados en estas columnas en forma de intervalo.

		Error C.1	Error C.2	Error C.3	Error C.4
F3.1.1	N.º de respuestas	0	0	0	1
	Porcentaje	-	-	-	10 %
TC3.2	N.º de respuestas	2	0	0 - 4	1 - 5
	Porcentaje	10 %	-	0 % - 20 %	5 % - 25 %
TC4.4	N.º de respuestas	0	1	0 - 1	1 - 2
	Porcentaje	-	5 %	0 % - 5 %	5 % - 10 %

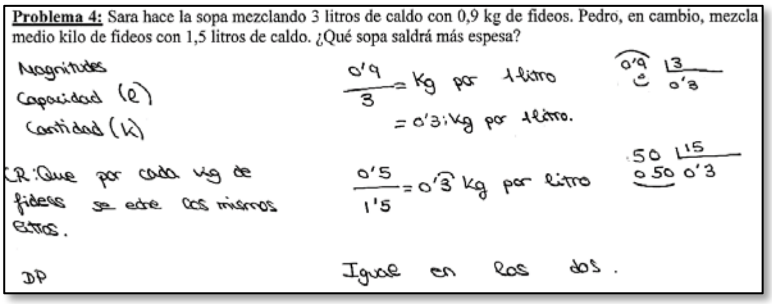
Tabla VI - 36. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2).

Observamos que prácticamente no hemos clasificado producciones incompletas (Error C.1, Error VP.1). Es especialmente significativa esta casi desaparición en las producciones de los problemas de comparación, ya que en el ciclo II-1 se registró un número mayor de respuestas que calculaban alguna razón asociada a cada una de las situaciones, pero no daban respuesta al problema.

		Error VP.1	Error VP.2	Error VP.3	Error VP.4
F3.1.4	N.º de respuestas	1	0	0	0
	Porcentaje	5 %	-	-	-
TC3.1	N.º de respuestas	0	0	0 - 3	1 - 4
	Porcentaje	-	-	0 % - 15 %	5 % - 20 %
F5.1.3	N.º de respuestas	0	0	0 - 1	0 - 1
	Porcentaje	-	-	0 % - 10 %	0 % - 10 %

Tabla VI - 37. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo I-2).

También desaparecen casi por completo los errores asociados a la comprensión del número racional y los algoritmos relacionados (Error C.2 y Error VP.2). En estas categorías se ha clasificado una única producción. En la Imagen VI - 11 vemos que el alumno concluye que las dos razones son iguales haciendo una mala gestión del resto obtenido en el algoritmo de la división para obtener la representación decimal de la fracción.



Problema 4: Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?

Magnitudes
Capacidad (l)
Cantidad (k)

C.R: Que por cada kg de fideos se echa los mismos litros.

DP

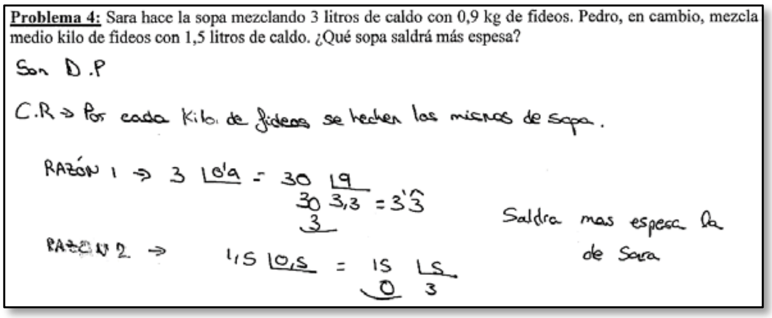
$\frac{0'9}{3}$ = Kg por 1 litro
= 0'3 kg por 1 litro.

$\frac{0'5}{1'5}$ = 0'$\hat{3}$ kg por litro

Igual en los dos.

Imagen VI - 11. *Producción del alumno B5.1 para el problema TC4.4 (Ciclo I-2).*

Los errores parecen concentrarse, por tanto, en la interpretación de las razones obtenidas y en su conexión con el contexto del problema o en la interpretación de determinados conceptos como magnitudes intensivas (Error C.3, Error C.4, Error VP.3 y Error VP.4). Sin embargo, el número de producciones con estos errores es bajo y aparecen principalmente en los problemas contenidos en las fichas de trabajo individual para realizar fuera del horario lectivo. Además, en estas producciones se observan plagios entre estudiantes, por lo que un error en una producción puede provocar la repetición de ese mismo error en las producciones de otros estudiantes. En la Imagen VI - 12 vemos un ejemplo de producción con error en el que no puede concretarse su clasificación entre Error C.3 y Error C.4 debido a que el alumno no especifica la interpretación de las razones obtenidas. Por tanto, no se puede diferenciar si el alumno ha respondido interpretando las razones calculadas como "kg de fideos por litro de caldo" (Error C.3) y, en consecuencia, ha respondido al revés, o si el alumno tiene alguna dificultad interpretando el concepto espesor y conectándolo con el cálculo de una magnitud intensiva (Error C.4).



Problema 4: Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?

Son D.P

C.R ⇒ Por cada Kilo de fideos se hechen los mismos de sopa.

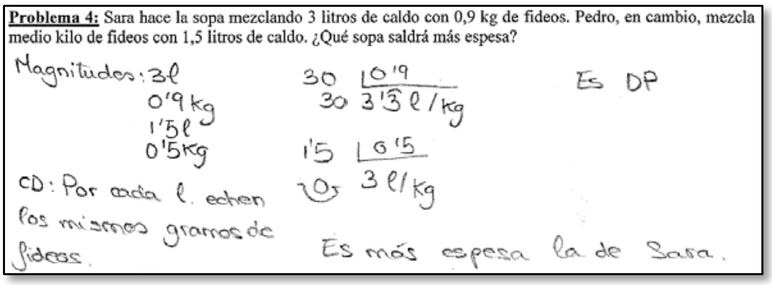
RAZÓN 1 ⇒ 3 / 0'9 = 30 / 9 = 3'$\hat{3}$

RAZÓN 2 ⇒ 1,5 / 0,5 = 15 / 5 = 3

Saldra mas espesa la de Sara

Imagen VI - 12. Producción del alumno B6.1 para el problema TC4.4 (Ciclo I-2).

Sin embargo, en la producción del alumno B3.2 para este mismo problema (Imagen VI - 13), observamos que el alumno interpreta correctamente las razones obtenidas, aunque responde mal al ejercicio. Por tanto, el fallo se puede achacar a la interpretación del término espesor (que ya supuso problemas a los estudiantes en el ciclo II-1) y su producción se ha clasificado de forma concreta como un Error C.4.


Problema 4: Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?

Magnitudes: 3l
0'9 kg
1'5l
0'5kg

30 | 0'9
30 3'3 l/kg
Es DP

1'5 | 0'5
10 3 l/kg

CD: Por cada l. echen los mismos gramos de fideos.

Es más espesa la de Sara.

Imagen VI - 13. Producción del alumno B3.2 para el problema TC4.4 (Ciclo I-2).

Análisis de los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa.

En cuanto a los problemas de comparación cualitativa, en la Tabla VI - 34, observamos que las dos únicas respuestas erróneas al problema PE.2.1 se concentran en la opción ‘$S_1 = S_2$’. Recordemos que PE.2.1 era un problema de comparación cualitativa en el que no podía determinarse el sentido de la comparación ya que la información disponible era que en una de las situaciones las cantidades de las magnitudes involucradas eran mayores que las cantidades de magnitud correspondientes en la segunda situación. Desaparecen, por tanto, respuestas erróneas del tipo ‘$S_i > S_j$’ que sí aparecían en el ciclo II-1 y que pueden estar relacionadas con argumentos en términos absolutos teniendo en cuenta solo una de las magnitudes relacionadas.

VI.3.1.3. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa

En esta sección presentamos las diferentes tipologías de problemas que componen el tercer foco de interés del diseño y la investigación. Este foco se introduce por primera vez en la propuesta de 2º de ESO y la tipología de problemas que analizaremos es análoga a la utilizada en el anterior foco. Además de las categorías generales, para el análisis especifico de las producciones de los alumnos utilizamos las categorías que desarrollamos en el Capítulo III. Volvemos a presentarlas aquí por comodidad del lector. En la Tabla VI - 38 recogemos las categorías de análisis para las estrategias de resolución de los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa, en la Tabla VI - 39 las propias para los problemas de valor perdido en este tipo de situación proporcional y en la Tabla VI - 40 las categorías utilizadas para clasificar el tipo de argumento utilizado al responder a problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
C0	Sin razonamiento	**C4**	Operaciones sin sentido
C1	Funcional, cte. proporcionalidad	**C5**	Razonamientos aditivos erróneos
C2	Escalar, razones internas	**C6**	Supone relación directa
C3	Resuelve problema de valor perdido		

Tabla VI - 38. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
VPi0	Sin razonamiento	**VPi5**	Uso de una fórmula
VPi1	Construcción de patrones	**VPi6**	Operaciones sin sentido
VPi2	Factor de cambio	**VPi7**	Razonamientos aditivos erróneos
VPi3	Constante de proporcionalidad	**VPi8**	Supone relación directa
VPi4	Proporción		

Tabla VI - 39. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

En la propuesta para 2º de ESO estos problemas se presentan mezclados con los análogos correspondientes al segundo foco durante las sesiones 3, 4 y 5. Es decir, en las fichas de trabajo F3.1, TC3, F4.1, TC4 y F5.1. Además, se introdujo un problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad simple inversa en la ficha de repaso, TC11, que no se llevó a cabo en este ciclo. Para evaluar los conocimientos adquiridos por los alumnos en este foco específico de la propuesta de 2º de ESO se incorporaron dos problemas a la prueba escrita. El problema PE.3 de comparación cuantitativa y el problema PE.4 de valor perdido (ambos en situaciones de proporcionalidad simple inversa). En total, analizaremos en esta sección 180 producciones de los estudiantes.

Código	Tipo de argumento	Código	Tipo de argumento
CL0	Sin razonamiento	**CL3**	Ejemplo numérico
CL1	Escrito/verbal	**CL4**	Supone relación directa
CL2	Gráfico		

Tabla VI - 40. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

Al igual que en el foco anterior, no se diseñan situaciones introductorias específicas para este foco de interés. Tras la situación introductoria, la institucionalización y el refuerzo posterior del concepto de relación de proporcionalidad simple inversa y del concepto de constante de proporcionalidad realizado en las sesiones previas, se espera que los alumnos sean capaces de generar sus propias estrategias para resolver problemas en los que estos conceptos juegan un papel principal.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

El número de producciones no entregadas (categoría N) que se puede observar en la Tabla VI - 41, en la Tabla VI - 42 y en Tabla VI - 43, coincide con lo observado en el foco anterior, ya que, como hemos dicho, los problemas de este foco se localizan en las mismas fichas de trabajo que los del foco anterior. También el porcentaje de producciones en blanco (categoría B) sigue el patrón que ya hemos analizado, aumentando en los problemas localizados en las últimas posiciones de las fichas de trabajo. Especialmente alto es el número de respuestas en blanco en los quintos problemas de las fichas F4.1 y F5.1 (Tabla VI - 42, problemas F4.1.5, F5.1.5.1 y F5.1.5.2). Además, aunque de forma menos acusada que en el foco anterior, el primer problema de comparación cualitativa F4.1.3 también tiene un alto porcentaje de respuestas en blanco.

		N	B	I	C
F3.1.2	N.º de respuestas	0	0	0	10
	Porcentaje	-	-	-	100 %
TC3.3	N.º de respuestas	6	0	5	9
	Porcentaje	30 %	-	25 %	45 %
F5.1.4	N.º de respuestas	0	3	3	4
	Porcentaje	-	30 %	30 %	40 %
PE.3	N.º de respuestas	2	2	6	10
	Porcentaje	10 %	10 %	30 %	50 %

Tabla VI - 41. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2).

Las tasas de éxito para los problemas de comparación cuantitativa en las situaciones de proporcionalidad simple inversa, que podemos ver en la Tabla VI - 41, parecen depender fuertemente del tipo de magnitudes utilizadas. Mientras que en el primer problema de proporcionalidad inversa al que se enfrentan los alumnos, F3.1.2, la tasa de éxito es del 100 %, en el problema de la prueba escrita, PE.3, la tasa de éxito es del 50 %. La diferencia entre ambos problemas es que en el primero una de las magnitudes involucradas es intensiva, siendo la otra magnitud la magnitud “denominador” de la primera. Por otro lado, en el último, las dos magnitudes son extensivas. Los problemas abordados durante la propuesta con un diseño similar al de la prueba escrita, TC3.3 y F5.1.4, obtienen tasas de éxito algo inferiores, del 45 % y el 40 % respectivamente, pero cercanas a las de la prueba escrita. Destacamos también que la tasa de éxito en este tipo de problemas no parece variar según las situaciones sean de proporcionalidad directa o de proporcionalidad inversa. Incluso es algo superior en las situaciones de proporcionalidad inversa (ver Tabla VI - 29 y Tabla VI - 41).

		N	B	I	C
F4.1.1	N.º de respuestas	0	2	3	5
	Porcentaje	-	20 %	30 %	50 %
F4.1.5	N.º de respuestas	0	7	1	2
	Porcentaje	-	70 %	10 %	20 %
TC4.1	N.º de respuestas	6	1	1	12
	Porcentaje	30 %	5 %	5 %	60 %
F5.1.1	N.º de respuestas	0	0	2	8
	Porcentaje	-	-	20 %	80 %
F5.1.5.1	N.º de respuestas	0	4	2	4
	Porcentaje	-	40 %	20 %	40 %
F5.1.5.2	N.º de respuestas	0	6	0	4
	Porcentaje	-	60 %	-	40 %
PE.4	N.º de respuestas	2	1	5	12
	Porcentaje	10 %	5 %	25 %	60 %

Tabla VI - 42. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2).

Las tasas de éxito que observamos en la Tabla VI - 42 para los problemas de valor perdido parecen depender más de la posición relativa del problema que del tipo de magnitudes empleadas. Así, las tasas de éxito más bajas son las de los problemas F4.1.5 y F5.1.5 que vienen acompañadas de porcentajes de respuestas en blanco altos. Además, según avanza la secuencia, los alumnos parecen ganar competencia a la hora de abordar este tipo de problemas tras las primeras puestas en común. El primer problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad inversa, F4.1.1, tiene una tasa de éxito del 50 %, a pesar de que las magnitudes presentadas son una intensiva y la otra su magnitud "denominador", mientras que problemas en los que se presentan dos magnitudes extensivas como en F5.1.1 y PE.4 tienen tasas de éxito superiores.

		N	B	I	C
F4.1.3	N.º de respuestas	0	5	1	4
	Porcentaje	-	50 %	10 %	40 %
TC4.3	N.º de respuestas	6	1	8	5
	Porcentaje	30 %	5 %	40 %	25 %

Tabla VI - 43. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2).

En los problemas de comparación cualitativa, observamos un fenómeno similar al detectado en los de comparación cuantitativa. La tasa de éxito para el problema que presenta dos magnitudes extensivas, TC4.3, es menor que la tasa de éxito que encontramos en el problema F4.1.3 con una magnitud intensiva y su magnitud "denominador" (ver Tabla VI - 43). Además, el problema TC4.3 presenta un porcentaje mayor de respuestas incorrectas. Esta diferencia también podría venir influida por el hecho de que en el problema F4.1.3 sí que podía determinarse la comparación entre las constantes de proporcionalidad con la información proporcionada en el enunciado, mientras que en el problema TC4.3 no puede determinarse dicha comparación.

La influencia de la posibilidad de dar una respuesta concreta al problema en la tasa de éxito podría observarse también comparando las tasas de éxito, 40 % y 10 %, de los problemas F4.1.3 y F4.1.2 (Tabla VI - 31), respectivamente. El problema F4.1.2 es de proporcionalidad directa, está en una posición inmediatamente anterior a F4.1.3 en la ficha de trabajo y en él no se puede determinar el sentido de la comparación. En cualquier caso, esta diferencia podría significar dos cosas: bien que los alumnos tienen una mayor facilidad para comparar productos a partir de información cualitativa sobre los factores que para comparar cocientes a partir de información cualitativa sobre el numerador y denominador; bien que los problemas de comparación cualitativa en los que puede determinarse la comparación entre las constantes resultan más asequibles que aquellos en los que debe responderse que no puede determinarse dicha comparación.

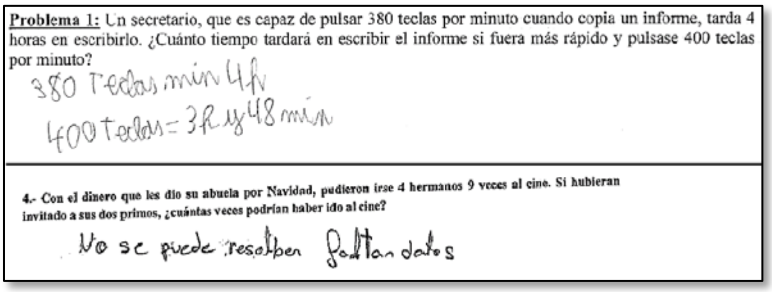
Análisis de las producciones según las categorías específicas.

En la información cuantitativa de los resultados según las categorías específicas que presentamos en la Tabla VI - 44 (problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad inversa), la Tabla VI - 45 (problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad inversa), y en la Tabla VI - 46 (problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad inversa) solo hemos tenido en cuenta las producciones de los alumnos que intentan resolver los problemas y que, por tanto, se han clasificado en el análisis general en las categorías I y C (respuestas incorrectas y respuestas correctas).

		C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
F3.1.2	N.º de respuestas	0	10	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	100 %	-	-	-	-	-
TC3.3	N.º de respuestas	1	9	0	0	0	1	3
	Porcentaje	5 %	45 %	-	-	-	5 %	15 %
F5.1.4	N.º de respuestas	1	5	0	0	0	0	1
	Porcentaje	10 %	50 %	-	-	-	-	10 %
PE.3	N.º de respuestas	1	9	0	0	0	0	6
	Porcentaje	10 %	45 %	-	-	-	-	30 %

Tabla VI - 44. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2).

Observamos que las respuestas sin argumentos tienen una frecuencia muy baja en el caso de los problemas de comparación cuantitativa y de valor perdido (categoría C0 en la Tabla VI - 44 y categoría VPi0 en la Tabla VI - 45). Sin embargo, el número de respuestas incluidas en estas categorías es ligeramente superior en este foco de interés que en el correspondiente a las situaciones de proporcionalidad simple directa. Como en el ciclo II-1 (ver sección V.3.1.5), además de las respuestas que solo dan una solución sin ningún tipo de argumentación u operaciones numéricas que la sustenten (Imagen VI - 14, arriba), hemos incluido en esta categoría algunas respuestas que argumentan que el problema no se puede resolver (Imagen VI - 14, abajo). Este tipo de respuestas no aparece en este ciclo para los problemas de proporcionalidad simple directa, pero sí encontramos varias de ellas en los problemas de valor perdido en las situaciones de proporcionalidad simple inversa.


Problema 1: Un secretario, que es capaz de pulsar 380 teclas por minuto cuando copia un informe, tarda 4 horas en escribirlo. ¿Cuánto tiempo tardará en escribir el informe si fuera más rápido y pulsase 400 teclas por minuto?

380 Teclas min 4h
400 teclas = 3h y 48 min

4.- Con el dinero que les dio su abuela por Navidad, pudieron irse 4 hermanos 9 veces al cine. Si hubieran invitado a sus dos primos, ¿cuántas veces podrían haber ido al cine?

No se puede resolber faltan datos

Imagen VI - 14. Producción del equipo B8 para el problema F4.1.1 (arriba) y del alumno B1.2 para el problema PE.4 (abajo) (Ciclo I-2).

		VPi0	VPi1	VPi2	VPi3	VPi4	VPi5	VPi6	VPi7	VPi8
F4.1.1	N.º de respuestas	2	0	0	6	0	0	0	0	0
	Porcentaje	20 %	-	-	60 %	-	-	-	-	-
F4.1.5	N.º de respuestas	0	0	0	2	0	0	0	0	1
	Porcentaje	-	-	-	20 %	-	-	-	-	10 %
TC4.1	N.º de respuestas	1	0	0	11	0	0	0	0	1
	Porcentaje	5 %	-	-	55 %	-	-	-	-	5 %
F5.1.1	N.º de respuestas	0	0	0	8	0	0	1	0	1
	Porcentaje	-	-	-	80 %	-	-	10 %	-	10 %
F5.1.5.1	N.º de respuestas	1	0	0	5	0	0	0	0	0
	Porcentaje	10 %	-	-	50 %	-	-	-	-	-
F5.1.5.2	N.º de respuestas	1	0	0	3	0	0	0	0	0
	Porcentaje	10 %	-	-	30 %	-	-	-	-	-
PE.4	N.º de respuestas	2	0	0	12	0	0	1	0	2
	Porcentaje	10 %	-	-	60 %	-	-	5 %	-	10 %

Tabla VI - 45. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2).

		CL0	CL1	CL2	CL3	CL4
F4.1.3	N.º de respuestas	3	1	0	0	0
	Porcentaje	30 %	10 %	-	-	-
TC4.3	N.º de respuestas	10	0	0	0	0
	Porcentaje	50 %	-	-	-	-

Tabla VI - 46. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2).

En cualquier caso, el número de respuestas sin argumentos solo es reseñable en este foco en los problemas de comparación cualitativa (categoría CL0 en la Tabla VI - 46), en los que, de hecho, es minoritario el número de alumnos que sí argumentan su respuesta. Los alumnos, o bien no encuentran herramientas para contestar a estos problemas, o bien no sienten la necesidad de hacerlo.

Como en el foco anterior, el porcentaje de respuestas que usan alguna estrategia correcta (C1-C3, VPd2-VPd7 y CL1-CL3) es mayoritario. Sin embargo, el número de respuestas que siguen una estrategia errónea es claramente superior (18 de las 180 producciones analizadas).

Analizamos en los siguientes apartados estas respuestas incluidas en categorías de estrategia errónea y las respuestas incluidas en categorías de respuestas correcta.

Producciones que siguen una estrategia errónea.

Hemos remarcado un incremento de respuestas que realizan una estrategia errónea para intentar resolver el problema. Sin embargo, casi todas estas respuestas se concentran en las categorías añadidas para este foco de interés para clasificar las respuestas que suponen una relación directa entre las magnitudes y resuelven el problema mediante una estrategia potencialmente correcta para ese tipo de relaciones (Categoría C6 de la Tabla VI - 44, VPi8 de la Tabla VI - 45 y categoría CL4 de la Tabla VI - 46).

Desaparecen casi por completo en este foco las respuestas que utilizan argumentos aditivos (una única respuesta en el problema TC3.3) y las respuestas que realizan operaciones sin sentido (una respuesta en el problema F.5.1.1 y otra en PE.4).

No obstante, las 15 respuestas detectadas en las categorías C6 y VPi8 podrían haberse considerado como operaciones sin sentido. La introducción de estas nuevas categorías permite detectar este fenómeno en el que los alumnos resuelven el problema como si fuera de proporcionalidad simple directa. Más de la mitad de las producciones clasificadas en estas categorías se concentran en la prueba escrita y tienen mayor frecuencia en los problemas de comparación cuantitativa que en los problemas de valor perdido. Especialmente relevante es el porcentaje de respuestas en la categoría C6 en el problema de comparación de la prueba escrita, PE.3. Ejemplificamos este tipo de producciones en la Imagen VI - 15, en donde hemos incorporado una producción para un problema de comparación cuantitativa (Imagen VI - 15, arriba) y otra para un problema de valor perdido (Imagen VI - 15, abajo). No hemos detectado este fenómeno en los problemas de comparación cualitativa.

Como vemos en las producciones de la prueba escrita del alumno B7.1 para este foco (Imagen VI - 15), los problemas se resuelven siguiendo un esquema similar a como se resolverían en una situación de proporcionalidad directa. En el primero de ellos se calculan las razones entre las magnitudes que, a pesar de ser operaciones sin sentido, siguen un "esquema correcto" para un problema $(9,3)\sim(14,2)$ que tuviera estructura directa, $\mathbb{p}=(-1,1)$. El alumno ha etiquetado además el problema como de proporcionalidad directa, pero sin argumentar dicha relación. En el problema PE.4 (Imagen VI - 15, abajo), el alumno sigue una secuencia de operaciones similar a la de un problema $(4,9)\leftrightarrow(6,x)$ que tuviera estructura directa $\mathbb{p}=(-1,1)$, ya que primero calcula una suerte de razón entre dos de las cantidades, intentando interpretar dicha razón, y después multiplica el valor obtenido por la cantidad restante, tratando de justificar e interpretar dicho producto. Sin embargo, aun suponiendo relación directa, la secuencia de operaciones sería incorrecta.

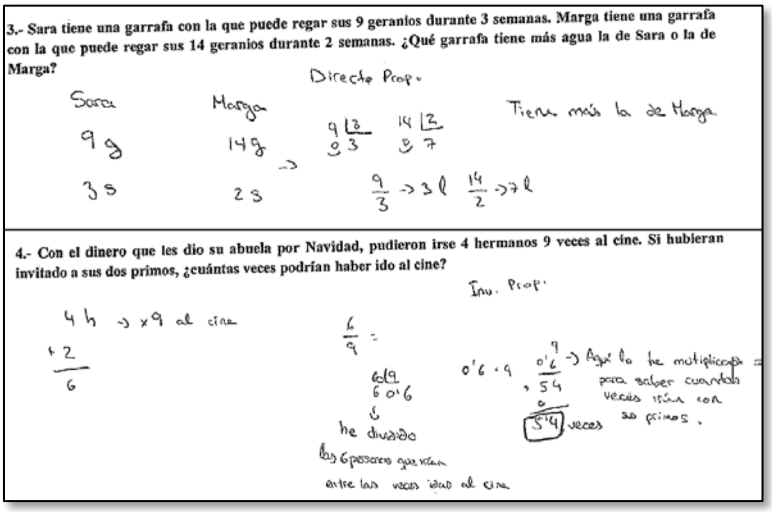


Imagen VI - 15. Producciones del alumno B7.1 para los problemas PE.3 (arriba) y PE.4 (abajo) respectivamente (Ciclo I-2).

Destacamos que el alumno B7.1 etiqueta el problema PE.4 como de proporcionalidad inversa, aunque no da argumentos para justificar dicha etiqueta. Este fenómeno se observa en diferentes producciones de este foco y del foco 2 en este ciclo, los alumnos resuelven el problema siguiendo una estrategia propia de una situación directa o inversa, pero etiquetan la situación de forma contraria.

Producciones que siguen una estrategia correcta.

El hecho singular en este foco de interés es que todas las producciones clasificadas en estrategias correctas en los problemas de comparación cuantitativa y de valor perdido se concentran en las categorías C1 y VPi3 respectivamente. Es decir, todas siguen una estrategia funcional basada en el cálculo de la constante (o constantes) de proporcionalidad inversa. No encontramos, aunque sea de forma puntual o en las producciones para casa estrategias basadas en proporciones o fórmulas que pudieran ser indicativas de influencias externas. Tampoco en los primeros problemas a los que se enfrentan los alumnos encontramos otras estrategias que pudieran surgir de forma espontánea como las basadas en argumentos escalares.

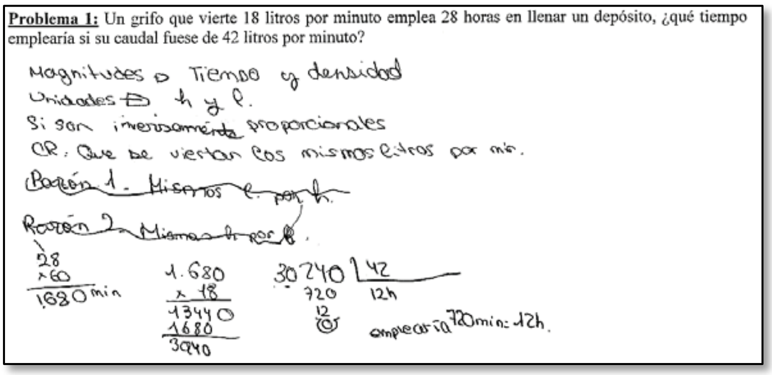
Además, la mayoría de las respuestas que siguen una estrategia correcta solucionan bien el problema. Por tanto, aunque los analizaremos en el siguiente apartado, encontramos muy pocos errores en estrategias correctas. En concreto, se han categorizado 6 respuestas incorrectas dentro de las categorías de estrategia correcta. Como siempre, los fallos achacables a errores aritméticos en las cuatro operaciones básicas no se han contabilizado como respuestas incorrectas.

En cualquier caso, como en otros focos, encontramos una amplia variedad en la calidad de las respuestas que siguen una estrategia correcta. En concreto, utilizamos para analizar esta calidad los tres siguientes descriptores:

- Explicita el tipo de relación proporcional que liga las magnitudes.
- Justifica la relación de proporcionalidad.
- Interpreta significado de las cantidades obtenidas al realizar operaciones entre los datos del problema, especialmente el de la constante de proporcionalidad.

En cuanto a la explicitación de la relación de proporcionalidad inversa en las producciones que siguen una estrategia correcta para los problemas de comparación cuantitativa, 17 lo hacen correctamente, 12 no dejan constancia escrita y 4 explicitan una relación de proporcionalidad directa (aunque escriben la etiqueta “DP”, generalmente resuelven según una estrategia de proporcionalidad inversa). En los problemas de valor perdido, la preocupación por explicitar la relación de proporcionalidad inversa es algo menor en términos relativos, ya que 21 la escriben correctamente, 23 no escriben ninguna etiqueta y 3 explicitan que es una relación directa, pero responden mediante una estrategia de proporcionalidad inversa.

En cuanto a la presencia de argumentos para justificar la relación proporcional, casi la mitad de las producciones, tanto en el caso de los problemas de comparación cuantitativa como en los de valor perdido, las presenta (16 y 23 producciones respectivamente) y la otra mitad no presenta argumentos (17 y 24 producciones respectivamente).

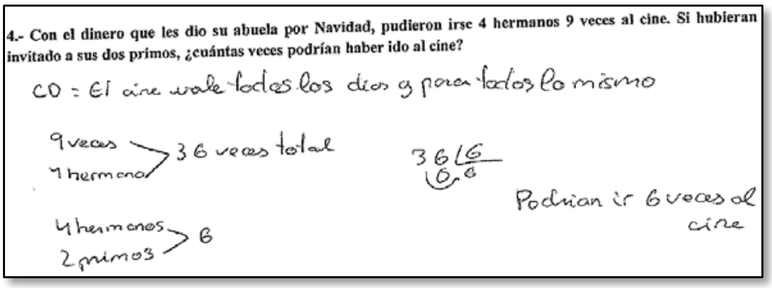

Problema 1: Un grifo que vierte 18 litros por minuto emplea 28 horas en llenar un depósito, ¿qué tiempo emplearía si su caudal fuese de 42 litros por minuto?

Magnitudes → Tiempo y densidad
Unidades → h y l.
Si son inversamente proporcionales
CR: Que se viertan los mismos litros por min.
Razón 1. Mismos l. por h.
Razón 2. Mismas h por l.
28 × 60 = 1680 min
1.680 × 18 = 13440 + 1680 = 30240
30240 : 42 = 720 → 12h
empleará 720 min = 12h.

Imagen VI - 16. Producción del equipo B2 para el problema F5.1.1 (Ciclo I-2).

Destacamos que entre aquellas que intentan justificar la relación proporcional encontramos solo dos producciones individuales que utilizan argumentos de tipo cualitativo por aumentos y disminuciones (D7). Se trata de los alumnos B2.1 y B4.1 de los que ya destacamos la utilización de este tipo de argumentos en el foco anterior en una de las tareas para casa. El resto de los alumnos intentan justificar la relación de proporcionalidad mediante condiciones de regularidad. Estas condiciones de regularidad no hacen referencia a la constancia del producto (generalmente implícita o explícita en el enunciado), sino a la relación directamente proporcional que puede considerarse entre el producto y alguna de las magnitudes involucradas (Imagen VI - 16).

De la misma forma, el porcentaje de producciones que siguen una estrategia correcta en las que se da una interpretación a la constante de proporcionalidad ronda el 50 %. En 38 producciones se interpreta mientras que en 42 no. No se observan diferencias entre problemas de comparación cuantitativa y problemas de valor perdido, sin embargo, sí se encuentran diferencias significativas según el tipo de magnitudes que involucra el problema. En el problema F3.1.2, 8 de las 10 producciones posibles interpretan la constante de proporcionalidad, mientras que, por ejemplo, en el problema TC3.3, con dos magnitudes extensivas, solo 1 producción de las 20 posibles da una interpretación del producto. Estos porcentajes mejoran ligeramente en la prueba escrita en donde 6 de las 20 producciones para PE.3 sí interpretan la constante de proporcionalidad y 12 lo hacen para PE.4 (Imagen VI - 17).


4.- Con el dinero que les dio su abuela por Navidad, pudieron irse 4 hermanos 9 veces al cine. Si hubieran invitado a sus dos primos, ¿cuántas veces podrían haber ido al cine?

CO = El cine vale todos los días y para todos lo mismo
9 veces, 4 hermanos → 36 veces total
36 : 6 = 6
4 hermanos, 2 primos → 6
Podrían ir 6 veces al cine

Imagen VI - 17. Producción del alumno B9.1 para el problema PE.4 (Ciclo I-2).

En el ejemplo de la Imagen VI - 17 vemos como el alumno B9.1 interpreta el producto como “veces total”. En general, los alumnos tienen dificultades para utilizar términos específicos para nombrar las constantes de proporcionalidad inversa que son producto de dos extensivas. Por ejemplo, en PE.4 no aparecen respuestas que podrían ser adecuadas como, “número total de entradas que pueden comprar con el dinero que tienen”. De manera puntual, aparece alguna de estas interpretaciones en la propuesta como la que se observa en la Imagen VI - 18, en la que el producto “nº de animales · nº de días que se les puede alimentar” se interpreta como “comidas que ha puesto [el ganadero]”.

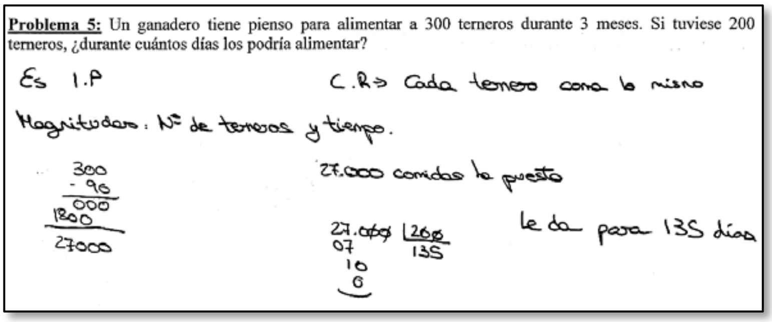
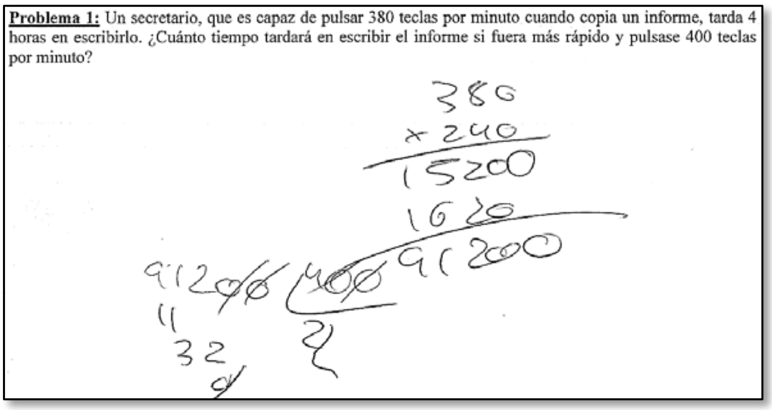


Imagen VI - 18. Producción del equipo B6 para el problema F4.1.5 (Ciclo I-2).

No es anecdótico el cambio de unidades que hace el equipo B6 y que observamos en la Imagen VI - 18. En esta producción se hace un cambio de meses a días, probablemente porque los alumnos interpretan que los animales no comen una vez al mes, sino que “se les ha puesto comida” cada día y, por tanto, tras ese cambio de unidades son capaces de interpretar de forma más adecuada el producto y, en consecuencia, la constante de proporcionalidad. Este hecho se observa también, de forma más acusada, en los problemas diseñados como puente entre una estructura con magnitud intensiva y la extensiva “denominador”, $M_1 = A/B$ y $M_2 = B$, en donde B se expresa con las mismas unidades en M_1 y M_2, y los problemas con dos magnitudes extensivas. Por ejemplo, en el problema F4.1.1 las unidades en las que se presentan las magnitudes son “teclas por minuto (que pulsa una persona escribiendo a máquina)” y “horas (en las que esa persona está escribiendo)”. El problema puede resolverse sin necesidad de realizar un cambio de unidades, pero todos los alumnos lo resuelven pasando las horas a minutos, para poder interpretar como “teclas totales pulsadas” el producto. Es decir, buscan poder dar sentido e interpretar las operaciones binarias que realizan. Esta búsqueda de interpretar las operaciones realizadas parece estar detrás incluso de las producciones en las que no se hace explícita dicha interpretación, ya que producciones sin ningún tipo de argumento más que los estrictamente numéricos también realizan este cambio de unidades. Por ejemplo, la producción del equipo B2 para F4.1.1 que vemos en la Imagen VI - 19 carece de cualquier tipo de razonamiento (también tiene una pequeña errata al no haber puesto la cifra de las unidades en el cociente de la división). Sin embargo, se observa que los alumnos han realizado el cambio de unidades de horas a minutos para hacer la primera multiplicación que proponen.



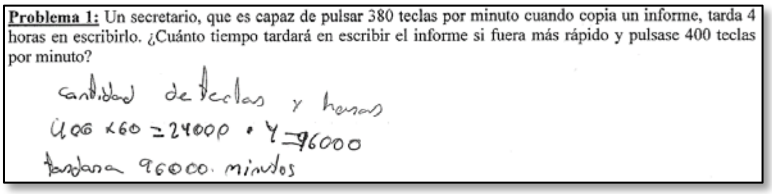
Problema 1: Un secretario, que es capaz de pulsar 380 teclas por minuto cuando copia un informe, tarda 4 horas en escribirlo. ¿Cuánto tiempo tardará en escribir el informe si fuera más rápido y pulsase 400 teclas por minuto?

380
× 240
15200
1620
91200

Imagen VI - 19. Producción del equipo B2 para el problema F4.1.1 (Ciclo I-2).

Errores cometidos en estrategias correctas.

Como hemos dicho, solo se han registrado cinco producciones en la intersección de respuestas incorrectas y respuestas que siguen una estrategia correcta. Además, en tres de estas producciones que están inacabadas, se aprecia la estrategia seguida, por lo que encajarían en las categorías inductivas de errores obtenidas para las situaciones de proporcionalidad directa, Error C0 y Error VP0. Por tanto, solo dos producciones contienen errores en estrategias correctas no clasificados como "respuestas incompletas". Este número de producciones es muy bajo para hacer un análisis inductivo de tipos de errores como el que hicimos en el capítulo anterior, sin embargo, vamos a analizar individualmente cada una de las producciones para constatar si podemos clasificarlos por analogía en los tipos de errores considerados para las situaciones directas.

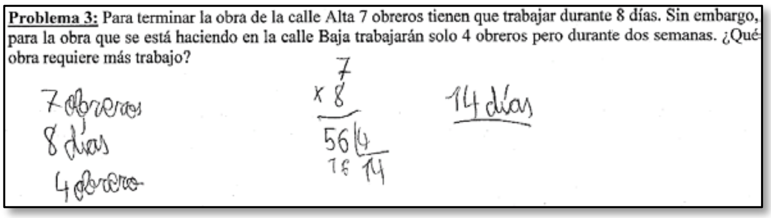


Problema 1: Un secretario, que es capaz de pulsar 380 teclas por minuto cuando copia un informe, tarda 4 horas en escribirlo. ¿Cuánto tiempo tardará en escribir el informe si fuera más rápido y pulsase 400 teclas por minuto?

cantidad de teclas y horas
400 x60 = 24000 · 4 = 96000
tardara 96000 minutos

Imagen VI - 20. Producción del equipo B1 para el problema F4.1.1 (Ciclo I-2).

En la Imagen VI - 20 vemos como el equipo B1 calcula la constante de proporcionalidad (haciendo un cambio de unidades de horas a minutos), pero la interpreta de forma incorrecta como la cantidad de magnitud solicitada en el problema de valor perdido F4.1.1. Parece por tanto un error relacionado con la interpretación de la constante de proporcionalidad, o más en general, con las operaciones entre magnitudes. Es decir, un error que guarda relación con el Error VP3 caracterizado en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa.


Problema 3: Para terminar la obra de la calle Alta 7 obreros tienen que trabajar durante 8 días. Sin embargo, para la obra que se está haciendo en la calle Baja trabajarán solo 4 obreros pero durante dos semanas. ¿Qué obra requiere más trabajo?

7 obreros
8 días
4 obrero
7 × 8 = 56 | 4
16 14
14 días

Imagen VI - 21. Producción del alumno B8.2 para el problema TC3.3 (Ciclo I-2).

En la Imagen VI - 21, vemos una producción errónea del alumno B8.2 para el problema de comparación cuantitativa difícilmente clasificable. El alumno calcula la constante de proporcionalidad correctamente en la primera situación. Sin embargo, después termina el problema como si fuera un problema de valor perdido. Esta producción podría haberse clasificado dentro de la estrategia C3, pero no parece que el resultado del problema de valor perdido se use para comparar las situaciones, sino que se marca la respuesta numérica como resultado. Podría tratarse por ejemplo de un error al leer parcialmente el problema y no detectar el último dato que no se da de forma numérica sino en lenguaje natural. En cualquier caso, no parece un error significativo teniendo en cuenta que no hemos encontrado ninguna otra producción similar.

Análisis de los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

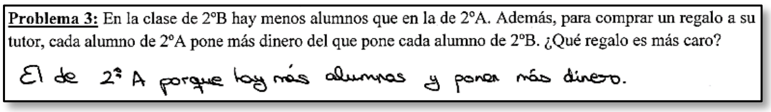
Analizamos de forma independiente los dos problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad inversa planteados en este foco. Para este análisis específico, además de los resultados de la Tabla VI - 46, usaremos los resultados de la Tabla VI - 47 en los que hemos marcado la respuesta específica dada por los alumnos de entre las cuatro posibles en los problemas en los que hay que comparar dos situaciones.

		$S_1 > S_2$	$S_1 < S_2$	$S_1 = S_2$	$S_1 ¿?S_2$
F4.1.3	N.º de respuestas	0	4	0	0
	Porcentaje	-	40 %	-	-
TC4.3	N.º de respuestas	2	2	1	5
	Porcentaje	10 %	10 %	5 %	25 %

Tabla VI - 47. Respuesta a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo I-2).

Como hemos observado, la Tabla VI - 46 nos proporciona poca información ya que solo encontramos una respuesta argumentada. Para este argumento, el equipo B6 utiliza una reformulación del problema F4.1.3, unificando los referentes en las dos frases de comparación, como los que ya explicamos en la sección V.3.1.4 del capítulo anterior en problemas de comparación cualitativa, pero en situaciones directas. En este caso, el equipo B6 traduce el esquema original del problema $(x_1^-, : x_2) \sim (x_1 : x_2^+)$, a un esquema $(y_1, : x_2) \sim (y_1^+ : x_2^+)$ expresado en lenguaje natural (Imagen VI - 22).

Por otro lado, los datos de la Tabla VI - 47 muestran que en el problema en el que se puede determinar la comparación todas las producciones que dan una respuesta se concentran en la respuesta correcta. Sin embargo, al igual que ocurría en el ciclo II-1, en el problema en el que no puede determinarse la comparación aparecen más respuestas incorrectas distribuidas por el resto de las opciones posibles.


Problema 3: En la clase de 2ºB hay menos alumnos que en la de 2ºA. Además, para comprar un regalo a su tutor, cada alumno de 2ºA pone más dinero del que pone cada alumno de 2ºB. ¿Qué regalo es más caro?

El de 2º A porque hay más alumnos y ponen más dinero.

Imagen VI - 22. Producción del equipo B6 para el problema F4.1.3 (Ciclo I-2).

VI.3.1.4. Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta

Como en el resto de los focos de interés, además de las categorías generales, para el análisis de las producciones de los alumnos en problemas en contextos de proporcionalidad compuesta utilizamos las categorías específicas que desarrollamos en el Capítulo III. Volvemos a presentar el listado y la codificación de las categorías para mayor comodidad del lector. En la Tabla VI - 48 se recogen las categorías específicas para el análisis de problemas de valor perdido y en la Tabla VI - 49 las establecidas para el análisis de problemas de comparación cuantitativa.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
VPC0	Sin razonamiento	**VPC6**	Proporciones
VPC1	Construcción de patrones	**VPC7**	Uso de una fórmula
VPC2	Amalgamación de magnitudes	**VPC8**	Operaciones sin sentido
VPC3	Paso a paso pasando por la unidad	**VPC9**	Razonamientos aditivos erróneos
VPC4	Se mezcla el uso de **VPC2** y **VPC3**	**VPC10**	Trabajo con las magnitudes independientes por separado
VPC5	Paso a paso sin pasar por la unidad	**VPC11**	Omisión de una de las magnitudes independientes

Tabla VI - 48. Códigos asignados a las estrategias de resolución de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Para el problema de comparación cualitativa F7.1.1 además del tipo de respuesta concreta dada a la comparación usaremos las categorías específicas que ya hemos usado en los focos de proporcionalidad simple y que recordamos en la Tabla VI - 50.

Las sesiones 6 y 7 de este ciclo se dedicaron a trabajar los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta, por tanto, las fichas de trabajo F6.1, F6.2, TC6.1 y F7.1 están dedicadas en exclusiva a este contenido. Además, se incorporaron dos problemas en las actividades de repaso TC11 y F13.1. Sin embargo, como hemos mencionado anteriormente, estas fichas no se recogieron debido a la baja del profesor-investigador. En la prueba escrita se incorporó un problema de valor perdido, PE.5, y uno de comparación cuantitativa, PE.7, que involucraban relaciones compuestas entre tres magnitudes. Además, el problema PE.6 que ya hemos analizado anteriormente, era un "falso problema" de proporcionalidad compuesta.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
CC0	Sin razonamiento	**CC4**	Operaciones sin sentido
CC1	Cálculo de las constantes de proporcionalidad mediante amalgamación	**CC5**	Razonamientos aditivos erróneos
CC2	Cálculo de las constantes de proporcionalidad mediante otros procedimientos	**CC6**	Omisión de alguna magnitud
CC3	Se resuelve un problema de valor perdido		

Tabla VI - 49. Códigos asignados a las estrategias de resolución de los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Código	Tipo de argumento	Código	Tipo de argumento
CL0	Sin razonamiento	**CL2**	Gráfico
CL1	Escrito/verbal	**CL3**	Ejemplo numérico

Tabla VI - 50. Categorías específicas para el análisis de la resolución de problemas de comparación cualitativa.

Comenzamos fijando la atención en la situación introductoria en la que se presentaba un problema con la misma estructura numérica y funcional que el de la situación introductoria de la propuesta en el ciclo II-1, pero con un cambio de contexto. Posteriormente realizaremos un análisis conjunto del resto de los problemas asociados a este foco de interés y que los alumnos realizaron tras la institucionalización.

Análisis de la situación introductoria.

La situación introductoria suponía la resolución del siguiente problema de valor perdido de tipo Directa-Directa:

F6.1.1: *He ido a comprar bizcochos a una famosa pastelería de Calatayud. Me han dicho que pueden ponerme los bizcochos en cajas grandes o en cajas pequeñas. En las cajas grandes caben 15 bizcochos, y en las pequeñas caben 7 bizcochos. Me he llevado 4 cajas grandes y me han cobrado 6 €. ¿Cuánto me hubieran cobrado por 8 cajas pequeñas?*

En la Tabla VI - 51 se recogen los resultados para las categorías generales de análisis. Destaca la alta tasa de éxito, mucho mayor que la obtenida en el ciclo II-1 (54,8 %). Además, la única respuesta que no da la solución correcta se corresponde con una producción inacabada, pero en la que no se observa ningún error. Por lo que, o bien el cambio de contexto, o bien la mayor madurez de los alumnos parecen haber influido en el mejor desempeño observado.

		N	B	I	C
F6.1.1	N.º de respuestas	0	0	1	9
	Porcentaje	-	-	10 %	90 %

Tabla VI - 51. Resultados generales en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2).

Sin embargo, los alumnos no muestran preocupación por argumentar sus respuestas y realizar un análisis detallado de la situación. Solo 3 de los 10 equipos establecen una condición de regularidad para asegurar la constancia de la constante de proporcionalidad ("que todos los bizcochos cuesten los mismo") y solo 4 de los equipos interpretan el significado de las operaciones binarias que realizan.

		VPC0	VPC1	VPC8	VPC9	VPC10	VP11
F6.1.1	N.º de respuestas	2	0	0	0	0	0
	Porcentaje	20 %	-	-	-	-	-

Tabla VI - 52. Estrategias incorrectas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2).

		VPC2	VPC3	VPC4	VPC5	VPC6	VP7
F6.1.1	N.º de respuestas	8	0	0	0	0	0
	Porcentaje	80 %	-	-	-	-	-

Tabla VI - 53. Estrategias potencialmente correctas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2).

A pesar de esta mayor despreocupación por la argumentación, todos los equipos parecen utilizar una técnica de amalgamación (VPC2, ver Tabla VI - 53) para responder al problema. Tras la amalgamación, la mayoría de los equipos calcula la constante de proporcionalidad y posteriormente el valor desconocido mediante una estrategia de proporcionalidad simple directa VPd3 (ver Imagen VI - 23). Debido probablemente a la sencillez de la estructura numérica del problema simple resultante tras amalgamar por producto, $(6:60) \leftrightarrow (x:56)$, algunos equipos presentan directamente la solución del problema simple sin realizar operaciones intermedias (VPd0 para el problema simple).

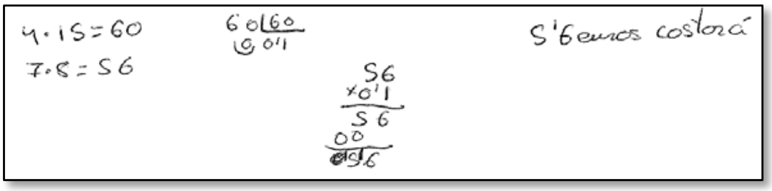


Imagen VI - 23. Producción del equipo B9 para el problema F6.1.1 (Ciclo I-2).

Por tanto, parece que la situación introductoria es adecuada para introducir la estrategia de amalgamación y los alumnos la conectan de forma natural con la estrategia institucionalizada para resolver problemas de proporcionalidad simple. Además, al igual que ocurría en el primer ciclo, a pesar de que no se explicite, la búsqueda del precio de cada bizcocho (constante de proporcionalidad) está detrás de todas las producciones observadas.

Una de las producciones clasificadas en VPC0 (sin argumentos, ver Tabla VI - 52) se corresponde con una producción inacabada (equipo B3, ver Imagen VI - 24) cuyo comienzo podría corresponderse con una estrategia VPC2, VPC3 o VPC4, por lo que hemos preferido clasificarla en VPC0 al no disponer de suficiente información para clasificarla. La otra producción clasificada como correcta presenta el resultado correcto y realiza una serie de operaciones formales sin interpretar los resultados. Algunas de estas operaciones son operaciones sin sentido, categoría VPC8, y otras podrían corresponderse con el uso de una estrategia VPC2, VPC3 o VPC4, por lo que también se ha clasificado en VPC0.

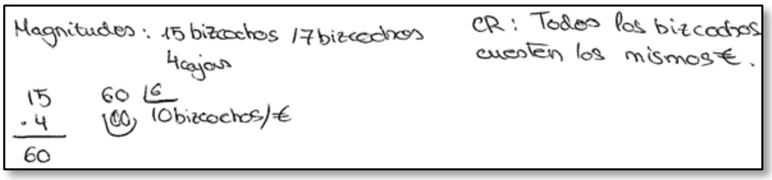


Imagen VI - 24. Producción del equipo B3 para el problema F6.1.1 (Ciclo I-2).

Por tanto, en esta situación introductoria, no encontramos estrategias de la categoría VPC1 ni de las categorías entre la VPC3 y la VPC11. Tampoco encontramos producciones incorrectas debidas a emplear de manera inadecuada una estrategia potencialmente correcta, por lo que no se puede realizar un análisis de errores.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Tras el análisis de la situación introductoria, analizamos el desempeño de los alumnos en el resto de los problemas realizados de forma posterior a la institucionalización de la estrategia de amalgamación. Presentamos los resultados en tablas independientes según la tipología de los problemas, es decir, según sean problemas de valor perdido (Tabla VI - 54), de comparación cuantitativa (Tabla VI - 55) o de comparación cualitativa (Tabla VI - 56). En dichas tablas hemos especificado el tipo de estructura multiplicativa que une las magnitudes en cada problema.

Comprobamos que el porcentaje de producciones no entregadas (categoría N) es inferior al registrado en este foco en el ciclo II-1, aunque es significativo el número de producciones entregadas en blanco para el problema TC6.1.2 (de la actividad para realizar en casa). Así, salvo en este problema, el número de alumnos o equipos que propone una solución al problema (categorías I y C) es superior al 80 %.

			N	**B**	**I**	**C**
F6.2.1	Inversa-Inversa	N.º de respuestas	0	1	2	7
		Porcentaje	-	10 %	20 %	70 %
TC6.1.1	Directa-Directa	N.º de respuestas	3	1	3	13
		Porcentaje	15 %	5 %	15 %	65 %
TC6.1.2	Directa-Inversa	N.º de respuestas	3	4	3	10
		Porcentaje	15 %	20 %	15 %	50 %
F7.1.3	Directa-Directa-Inversa	N.º de respuestas	0	1	4	5
		Porcentaje	-	10 %	40 %	50 %
F7.1.4	Inversa-Inversa	N.º de respuestas	0	1	1	8
		Porcentaje	-	10 %	10 %	80 %
PE.5	Directa-Directa	N.º de respuestas	2	1	2	15
		Porcentaje	10 %	5 %	10 %	75 %

Tabla VI - 54. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2).

La tasa de respuestas correctas (categoría C, Tabla VI - 54) en los problemas de valor perdido es, en general, alta y cercana al 75 %. Los peores resultados, se obtienen en los problemas TC6.1.2 y F7.1.3 en los que se mezclan relaciones directas e inversas entre la variable dependiente y las variables independientes. Además, F7.1.3 es el único problema con cuatro magnitudes al que se han enfrentado los alumnos (se incorporaba un problema más con cuatro magnitudes en la actividad F13.1). Aunque con el tamaño de la muestra del que disponemos las diferencias no resultan significativas, parece que las tipologías de problemas de valor perdido en las que las relaciones entre las variables independientes y la variable dependiente son todas del mismo tipo tienen una mayor tasa de éxito. Notemos que, si nos restringimos al caso de tres magnitudes, en los problemas Directa-Directa e Inversa-Inversa, una amalgamación por producto entre las variables independientes reduce el problema a un problema simple directo e inverso, respectivamente. Por otro lado, en un problema de valor perdido de tipo Directa-Inversa la amalgamación entre las variables independientes debe realizarse mediante una razón.

			N	**B**	**I**	**C**
F6.2.2	$\mathbb{p} = (1, -1, -1)$	N.º de respuestas	0	2	1	7
		Porcentaje	-	20 %	10 %	70 %
TC6.2	$\mathbb{p} = (1,1,1)$	N.º de respuestas	3	0	2	15
		Porcentaje	15 %	-	10 %	75 %
F7.1.2	$\mathbb{p} = (1, -1, -1)$	N.º de respuestas	0	0	0	10
		Porcentaje	-	-	-	100 %
PE.7	$\mathbb{p} = (1,1,1)$	N.º de respuestas	2	2	4	12
		Porcentaje	10 %	10 %	20 %	60 %

Tabla VI - 55. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2).

La tasa de respuestas correctas (categoría C, Tabla VI - 55) para los problemas de comparación cuantitativa es, en general, alta, algo más baja en el problema de la prueba escrita. Los resultados no indican diferencias significativas en la tasa de éxito entre las dos diferentes estructuras multiplicativas que pueden generarse con tres magnitudes (cociente de una magnitud entre el producto de otras dos, o producto de tres magnitudes).

El único problema de comparación cualitativa en una situación compuesta, F7.1.1, pedía comparar dos situaciones de proporcionalidad compuesta con una estructura cociente, de forma que, con la información suministrada en el enunciado, no podía determinarse dicha comparación. La tasa de respuestas correctas es la más baja de entre los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta y la única inferior al 50 %.

			N	**B**	**I**	**C**
F7.1.1	$\mathbb{p} = (1, -1, -1)$	N.º de respuestas	0	0	6	4
		Porcentaje	-	-	60 %	40 %

Tabla VI - 56. Resultados generales en el problema de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2).

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Como siempre, para el siguiente nivel de análisis solo se han tenido en cuenta las producciones incluidas en las categorías I y C del análisis general. De nuevo, presentamos de forma independiente los resultados según el problema sea de valor perdido (en la Tabla VI - 57 las categorías de estrategias incorrectas o sin argumentar y en la Tabla VI - 58 las categorías con las estrategias potencialmente correctas), de comparación cuantitativa (Tabla VI - 59) o de comparación cualitativa (Tabla VI - 60 para la respuesta concreta dada por los alumnos y Tabla VI - 61 con el tipo de argumentación).

		VPC0	VPC1	VPC8	VPC9	VPC10	VPC11
F6.2.1	N.º de respuestas	0	0	2	0	0	0
	Porcentaje	-	-	20 %	-	-	-
TC6.1.1	N.º de respuestas	0	0	2	0	0	0
	Porcentaje	-	-	10 %	-	-	-
TC6.1.2	N.º de respuestas	1	0	1	0	0	2
	Porcentaje	5 %		5 %	-	-	10 %
F7.1.3	N.º de respuestas	0	0	1	0	0	0
	Porcentaje	-	-	10 %	-	-	-
F7.1.4	N.º de respuestas	0	0	1	0	0	0
	Porcentaje	-	-	10 %	-	-	-
PE.5	N.º de respuestas	0	0	0	0	0	1
	Porcentaje	-	-	-	-	-	5 %

Tabla VI - 57. Estrategias incorrectas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2).

		VPC2	VPC3	VPC4	VPC5	VPC6	VPC7
F6.2.1	N.º de respuestas	5	1	1	0	0	0
	Porcentaje	50 %	10 %	10 %	-	-	-
TC6.1.1	N.º de respuestas	11	1	1	0	1	0
	Porcentaje	55 %	5 %	5 %	-	5 %	-
TC6.1.2	N.º de respuestas	3	5	0	0	1	0
	Porcentaje	15 %	25 %	-	-	5 %	-
F7.1.3	N.º de respuestas	8	0	0	0	0	0
	Porcentaje	80 %	-	-	-	-	-
F7.1.4	N.º de respuestas	1	7	0	0	0	0
	Porcentaje	10 %	70 %	-	-	-	-
PE.5	N.º de respuestas	12	3	1	0	0	0
	Porcentaje	60 %	15 %	5 %	-	-	-

Tabla VI - 58. Estrategias potencialmente correctas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2).

		CC0	CC1	CC2	CC3	CC4	CC5	CC6
F6.2.2	N.º de respuestas	0	1	7	0	0	0	0
	Porcentaje	-	10 %	70 %	-	-	-	-
TC6.2	N.º de respuestas	1	6	8	0	2	0	0
	Porcentaje	5 %	30 %	40 %	-	10 %	-	-
F7.1.2	N.º de respuestas	0	4	6	0	0	0	0
	Porcentaje	-	40 %	60 %	-	-	-	-
PE.7	N.º de respuestas	0	16	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	80 %	-	-	-	-	-

Tabla VI - 59. Estrategias de resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2).

Observamos que prácticamente no aparecen producciones sin argumentos que permitan caracterizar la estrategia empleada. Además, el uso de estrategias erróneas (categorías VPC8-VPC11 en los problemas de valor perdido y CC4-CC6 en los de comparación cuantitativa) es minoritario.

Pasamos a realizar los siguientes niveles de análisis para profundizar en el empleo de estrategias erróneas y potencialmente correctas y los errores cometidos en los problemas de valor perdido y de comparación cuantitativa. Tras estos análisis realizaremos el análisis del problema de comparación cualitativa.

Producciones que siguen una estrategia errónea.

Entre las estrategias incorrectas para los problemas de valor perdido (Tabla VI - 57), solo encontramos producciones clasificadas en VPC8, operaciones sin sentido, y en VPC11 (omisión de una de las magnitudes). La cantidad de producciones clasificadas en ambas categorías es muy baja. Al igual que ocurría en el ciclo II-1, las producciones clasificadas en VPC11 aparecen en la tarea para casa o en la prueba escrita, y pueden ser un reflejo de influencias externas ajenas a la propuesta. Por ejemplo, en la producción del alumno B1.2 para el problema de la prueba escrita PE.5 (Imagen VI - 25), vemos cómo el alumno intenta aplicar una fórmula basada en la regla de tres simple en un problema de valor perdido con tres magnitudes.

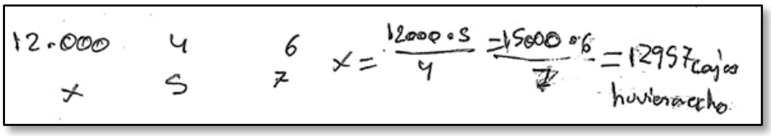


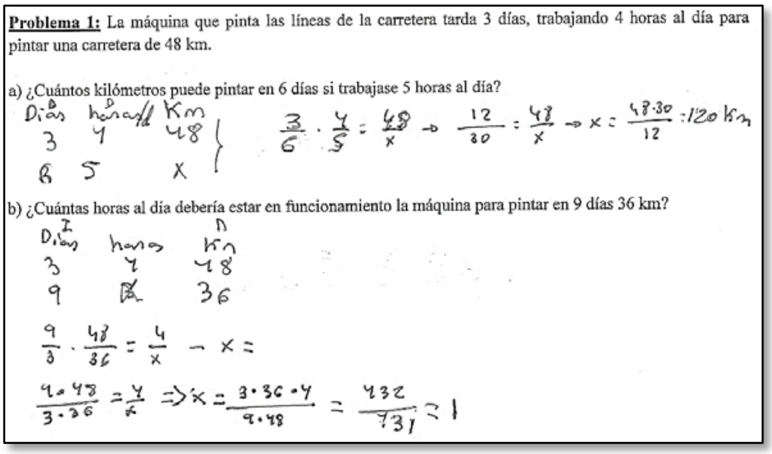
Imagen VI - 25. Producción del alumno B1.2 para el problema PE.5 (Ciclo I-2).

De manera similar, en los problemas de comparación cuantitativa encontramos solo un bajo número de producciones clasificadas en CC4 (operaciones sin sentido). No se ha clasificado ninguna producción en CC5 (razonamientos aditivos erróneos) ni, a diferencia de lo que ocurría en el ciclo II-1, en CC6 (omisión de alguna magnitud).

Producciones que siguen una estrategia correcta.

De forma análoga a lo ocurrido en el ciclo II-1, la mayor parte de las producciones que utilizan una estrategia correcta lo hace empleando las estrategias basadas en la amalgamación y cálculo de razones (VPC2, VPC3 y VPC4 para valor perdido, CC1 y CC2 para comparación cuantitativa), y, por tanto, es minoritario el uso de otro tipo de estrategias.

Destacamos la primera aparición en la propuesta de la estrategia VPC6 (proporción compuesta) para resolver los problemas de valor perdido TC6.1.1 y TC6.1.2 de la tarea para casa. En la Imagen VI - 26 observamos cómo el alumno B1.2 realiza una resolución prototípica mediante el empleo de una proporción compuesta. Dispone los datos tabularmente, incluye una incógnita en el lugar del valor solicitado, marca con una letra mayúscula la relación de proporcionalidad entre cada variable independiente y la variable dependiente, y establece la proporción entre la razón interna que contiene a la incógnita y el producto de las otras dos razones internas (invirtiendo aquellas en las que la relación es inversa), opera el producto de razones internas y despeja sin pasos intermedios la incógnita. Como vimos en la Imagen VI - 25, este mismo alumno empleó de forma errónea este método en la prueba escrita omitiendo variables independientes.


Problema 1: La máquina que pinta las líneas de la carretera tarda 3 días, trabajando 4 horas al día para pintar una carretera de 48 km.

a) ¿Cuántos kilómetros puede pintar en 6 días si trabajase 5 horas al día?

b) ¿Cuántas horas al día debería estar en funcionamiento la máquina para pintar en 9 días 36 km?

Imagen VI - 26. Producción del alumno B1.2 para los problemas TC6.1.1 y TC6.1.2 (Ciclo I-2).

Las producciones que usan amalgamación o paso a paso, siguen esquemas de resolución muy similares a los ya indicados en el ciclo II-1. Destacamos en este ciclo en 2º de ESO la mayor presencia de representaciones tabulares para resumir los datos proporcionados en el enunciado (ver Imagen VI - 26 o Imagen VI - 27).

La diferencia entre la elección de una estrategia de amalgamación (especialmente cuando se realiza por producto) o de una estrategia de paso a paso, no parece estar relacionadas con la mayor dificultad para interpretar el producto de medidas extensivas, ya que, por ejemplo, en F6.2.1 y PE.7, cuya estructura multiplicativa es un producto de tres magnitudes en las que hay que interpretar productos de magnitudes extensivas, es mayoritario el uso de una estrategia de amalgamación. La aparición de estructuras cocientes, especialmente en los problemas de comparación, hace que las estrategias de paso a paso tengan un mayor peso, siendo mayoritaria dicha estrategia en problemas como F6.2.2 y F7.1.2. Por otro lado, en los problemas de valor perdido, la posición de la incógnita influye en la elección de una u otra estrategia. Este hecho se comprueba claramente en los problemas TC6.1.2 y F7.1.4. En ambos problemas intervienen magnitudes intensivas de forma que "la magnitud denominador" es otra de las magnitudes puestas en juego en el problema y, por tanto, es sencillo amalgamar por producto estas magnitudes. Sin embargo, la incógnita se posiciona en una de estas dos magnitudes, lo que complica la amalgamación por producto. Cabe destacar, que ninguna de las producciones de la propuesta realiza amalgamación utilizando la variable dependiente. En la Imagen VI - 27 vemos las producciones del alumno B2.1 para TC6.1.1 y TC6.1.2. En el primer problema amalgama (VPC2), pero la posición de la incógnita en el segundo problema, con la misma estructura, hace que proceda "paso a paso" (VPC3).

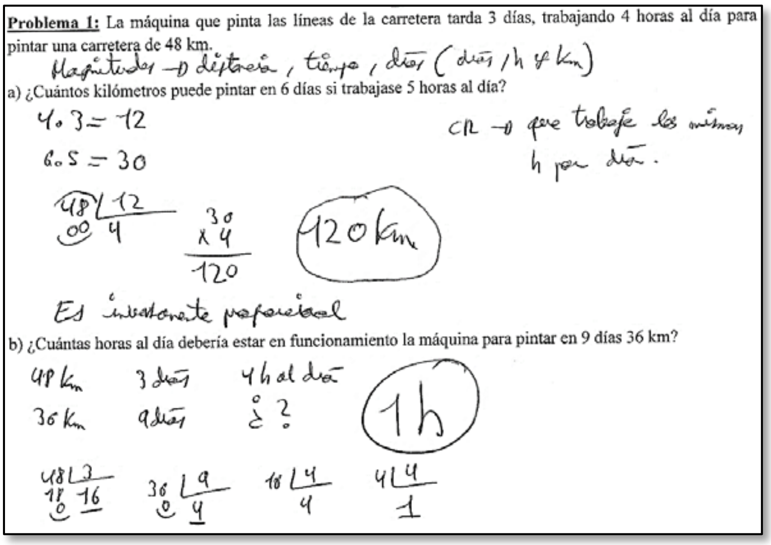


Imagen VI - 27. Producción del alumno B2.1 para los problemas TC6.1.1 y TC6.1.2 (Ciclo I-2).

Como vimos en el foco anterior, los alumnos no presentan en general problemas para asumir, e incluso interpretar, el producto de magnitudes extensivas que aparece en algunos de los problemas en situaciones compuestas. Por ejemplo, en la Imagen VI - 28 vemos diferentes interpretaciones, más o menos correctas o precisas, que hacen los alumnos del producto "mangueras vertiendo agua · tiempo al día que las mangueras están en funcionamiento · cantidad de jornadas que están en funcionamiento las mangueras". Mientras que el alumno B2.1 (Imagen VI - 28, izquierda) interpreta la constante de proporcionalidad (trabajo realizado por las mangueras) en términos del tiempo en el que debería estar abierta una sola manguera para hacer el mismo trabajo como las "h totales todas las mangueras", el alumno B6.2 (Imagen VI - 28, centro) lo hace fijando la atención en la cantidad de mangueras necesarias para llenar la piscina en una hora como "mangueras para terminar en una h". El alumno B3.2 (Imagen VI - 28, derecha) interpreta el trabajo realizado por las mangueras como el volumen de la piscina y asigna, erróneamente, a esta cantidad la unidad litro.

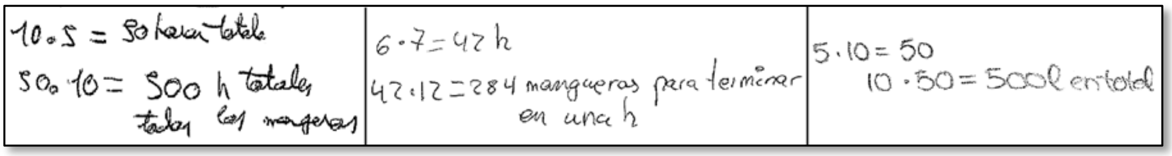


Imagen VI - 28. Detalle de las producciones de los alumnos B2.1 (izquierda), B6.2 (centro) y B3.2 (derecha) para el problema PE.7 (Ciclo I-2).

En general, los alumnos no incorporan de forma mayoritaria condiciones de regularidad ni análisis de las relaciones de proporcionalidad a sus producciones. Un ejemplo de análisis y establecimiento de una condición de regularidad parciales pueden observarse en la Imagen VI - 27.

Errores cometidos en estrategias correctas.

Al igual que ocurría en el ciclo II-1, el número de respuestas correctas en los problemas de proporcionalidad compuesta es prácticamente idéntico al número de respuestas que eligen una estrategia potencialmente correcta de resolución. En concreto, de las 111 producciones de este foco de interés clasificadas dentro de una estrategia potencialmente correcta, solo 10 se corresponden con respuestas incorrectas, es decir, han cometido un error en la aplicación de la estrategia. Estos 10 errores en la aplicación de una estrategia correcta se concentran en los problemas F7.1.3 y PE.7. El primero de ellos es un problema de valor perdido en una situación compuesta con cuatro magnitudes. Las tres producciones clasificadas como incorrectas, pero que han seguido una estrategia correcta, amalgaman dos de las magnitudes por producto (ancho y largo para generar la magnitud superficie), pero después realizan operaciones sin sentido para resolver el problema de tres magnitudes resultante. El problema PE.7 es de comparación cuantitativa con una estructura producto de tres magnitudes y se incluye en la prueba escrita. Las cuatro producciones clasificadas como incorrectas pero que seguían una estrategia correcta siguen el mismo patrón (ver Imagen VI - 29). Amalgaman por producto las magnitudes "tiempo diario" y "cantidad de días" y consideran una relación simple directa (en vez de simple inversa) entre la magnitud resultante de la amalgamación y la magnitud restante.

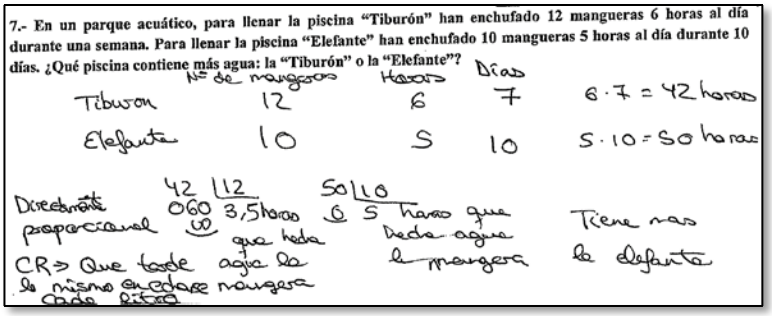

7.- En un parque acuático, para llenar la piscina "Tiburón" han enchufado 12 mangueras 6 horas al día durante una semana. Para llenar la piscina "Elefante" han enchufado 10 mangueras 5 horas al día durante 10 días. ¿Qué piscina contiene más agua: la "Tiburón" o la "Elefante"?

Imagen VI - 29. Producción del alumno B6.1 al problema PE.7 (Ciclo I-2).

Análisis del problema de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Analizamos de manera independiente el único problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad compuesta que se ha implementado en la propuesta. Como ya hemos dicho, el problema F7.1.1 tiene una estructura $\mathbb{p} = (1, -1, -1)$. La información suministrada establece que el "numerador" de la estructura es mayor en la primera situación que en la segunda, sin embargo, no puede determinarse la comparación entre los productos que determinan el "denominador" por lo que no puede determinarse concretamente la comparación. Probablemente el hecho de que el numerador sea mayor en la primera situación es el que provoca la respuesta predominante (incorrecta), $S_1 > S_2$, como vemos en la Tabla VI - 60.

		$S_1 > S_2$	$S_1 < S_2$	$S_1 = S_2$	$S_1¿?S_2$
F7.1.1	N.º de respuestas	5	1	0	4
	Porcentaje	50 %	10 %	-	40 %

Tabla VI - 60. Respuesta al problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2).

Además, las respuestas correctas no esgrimen argumentos que justifiquen su decisión, siguiendo la tendencia observada en los focos 2 y 3. Las respuestas que utilizan algún tipo de argumento escrito (CL1) que han sido clasificadas en la Tabla VI - 61 dan la respuesta incorrecta $S_1 > S_2$.

		CL0	**CL1**	**CL2**	**CL3**
F7.1.1	N.º de respuestas	6	4	0	0
	Porcentaje	60 %	40 %	-	-

Tabla VI - 61. Tipo de argumento utilizado para responder al problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad compuesta (Ciclo I-2).

Sin embargo, es significativo el aumento de este intento de resumir y transformar la información para justificar la respuesta en este problema de comparación cualitativa más complejo que los que se han introducido anteriormente en la propuesta. Por ejemplo, el equipo B9 (Imagen VI - 30) realiza un resumen tabular en el que exploran todas las posibilidades para establecer las comparaciones usando a los dos individuos como sujetos. De hecho, este equipo utiliza una representación tabular para resumir la información análoga a la analizada en la Imagen V - 32 del capítulo anterior.

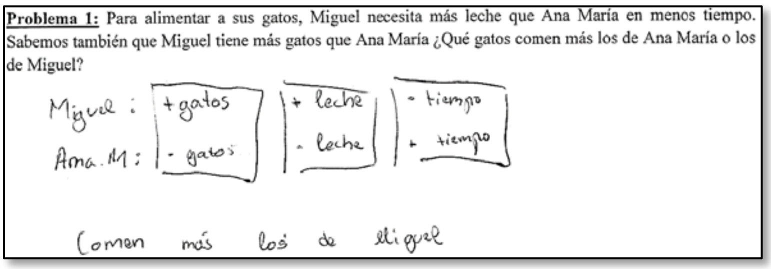


Imagen VI - 30. Producción del equipo B9 para el problema F7.1.1 (Ciclo I-2).

VI.3.1.5. Repartos proporcionales

Además de las categorías generales, para el análisis de las producciones de los alumnos en problemas de repartos, utilizamos las categorías específicas que se recogen en la Tabla VI - 62 para analizar el modelo de reparto empleado y las recogidas en la Tabla VI - 63 para analizar la estrategia empleada cuando el reparto se hace mediante un modelo proporcional. Dichas categorías se desarrollaron en el Capítulo III.

Código	Modelo	Código	Modelo
MR1	Equitativo	**MR3**	Proporcional
MR2	Compensación aditiva		

Tabla VI - 62. Categorías específicas de análisis para determinar el modelo empleado en un problema de reparto.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
RP0	Sin razonamiento	**RP3**	Aritmético mixto, normalización, parte-parte y parte-todo.
RP1	Emplean problemas de valor perdido parte-todo.	**RP4**	Uso de una fórmula
RP2	Algebraico planteando problemas de valor perdido parte-parte y aditividad.		

Tabla VI - 63. Categorías específicas de análisis de problemas de repartos proporcionales.

En este ciclo se dedicó una sesión (sesión 8) a trabajar de forma exclusiva los problemas de repartos proporcionales. Por tanto, las fichas de trabajo F8.1, F8.2 y TC.8 contienen solo este tipo de problemas. Además, se incorporó un problema de reparto directamente proporcional en la actividad de repaso tras la sesión 11 (problema TC11.4). Sin embargo, como hemos mencionado anteriormente, esta ficha no se recogió debido a la baja del profesor-investigador. En la prueba escrita se incluyó otro problema de reparto directamente proporcional (problema PE.8).

Análisis de la situación introductoria.

Para este foco de interés la situación introductoria se componía de dos problemas de reparto F8.1.1 y F8.1.2. En el primero se esperaba que los alumnos realizaran un reparto directamente proporcional y en el segundo un reparto inversamente proporcional. Esta condición del reparto no se explicita en ninguno de los enunciados.

F8.1.1: *Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4€, Bea 6€ y Carmen 10€. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?*

F8.1.2: *Una abuela tiene 60.000 € que quiere repartir entre sus dos únicos nietos. Uno de ellos tiene un sueldo de 1.000 € al mes, mientras que el otro gana 3.000 €. La abuela ha decidido que el reparto debe hacerse de forma que se compense la diferencia de sueldos de sus nietos. ¿Cómo debería repartir su dinero?*

En la Tabla VI - 64 se recogen los resultados para las categorías generales de análisis. Como observamos, en cada problema encontramos un equipo que deja el problema en blanco (se trata de equipos diferentes en cada problema). Por tanto, todos los equipos propusieron una forma de resolver alguno de los problemas de la situación introductoria.

		N	B	I	C
F8.1.1	N.º de respuestas	0	1	0	9
	Porcentaje	-	10 %	-	90 %
F8.1.2	N.º de respuestas	0	1	8	1
	Porcentaje	-	10 %	80 %	10 %

Tabla VI - 64. Resultados generales en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2).

Por otro lado, si nos centramos en el número de producciones que dan una respuesta correcta (entendida como respuesta correcta usando un modelo de reparto proporcional) vemos una gran diferencia entre los dos problemas. Mientras que los 9 equipos que responden a F8.1.1 lo hacen utilizando correctamente un modelo de reparto directamente proporcional, solo 1 de los 10 equipos responde de la forma esperada al problema de reparto inversamente proporcional.

Nos centramos ahora en el modelo de reparto utilizado por los alumnos (Tabla VI - 65) y en las estrategias proporcionales empleadas (Tabla VI - 66) para profundizar en el análisis de las diferencias detectadas entre los dos problemas de la situación introductoria.

En cuanto al modelo de reparto, observamos que no aparece ningún reparto equitativo (MR1) en ninguno de los dos problemas. Como ya hemos dicho, los nueve equipos que resolvieron el primer problema lo hicieron aplicando (correctamente) un modelo de reparto directamente proporcional (MR3). En el segundo problema, el modelo de reparto inversamente proporcional (MR3) fue utilizado solo por dos equipos. El resto utilizaron un modelo no proporcional que compensaba la situación inicial de forma aditiva (categoría MR2 de la Tabla VI - 65, ver Imagen VI - 31). Es decir, buscan compensar la diferencia de sueldo mensual entre los individuos involucrados en el reparto.

		MR1	MR2	MR3
F8.1.1	N.º de respuestas	0	0	9
	Porcentaje	-	-	90 %
F8.1.2	N.º de respuestas	0	7	2
	Porcentaje	-	70 %	20 %

Tabla VI - 65. Modelo de reparto empleado en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2).

Las respuestas que utilizan un modelo de compensación aditiva son esencialmente de dos tipos diferentes. En cuatro casos (aunque uno de ellos inacabado) se realiza esta secuencia de operaciones: dividir equitativamente el dinero a repartir, calcular la diferencia mensual entre los sueldos y concluir que al que más cobra hay que darle la mitad del dinero menos la diferencia de sueldos, y al que menos cobra la mitad del dinero más la diferencia de sueldos (Imagen VI - 31, izquierda). De esta forma, la diferencia total entre las cantidades recibidas es el doble de la diferencia absoluta de lo que cobran mensualmente, es decir, deben darse 28000 € al nieto que más cobra y 32000 € al nieto que menos.

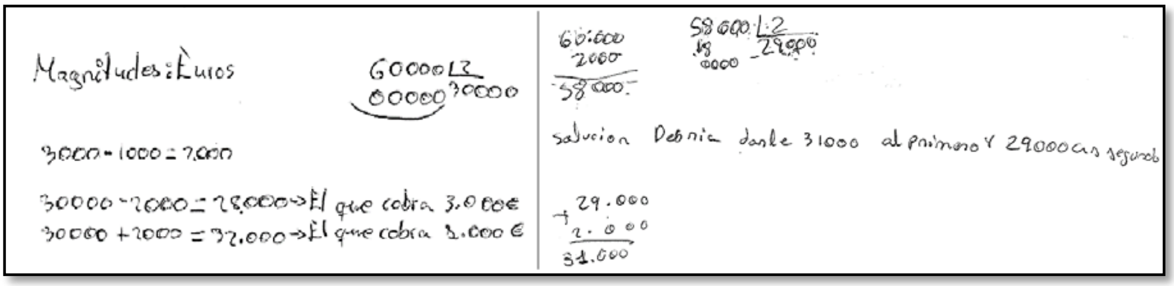


Imagen VI - 31. Producciones de los equipos B6 (izquierda) y B1 (derecha) para el problema F8.1.2 de la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2).

En el otro tipo de producción aditiva los tres equipos responden que los nietos deben cobrar 29000 € y 31000 €, según tienen el mayor o el menor sueldo. En este caso, los alumnos comienzan restando la diferencia de sueldos a la cantidad total a repartir, después reparten esta cantidad equitativamente y suman la diferencia extraída a la parte correspondiente al nieto con menor sueldo (Imagen VI - 31, derecha).

En el siguiente nivel de análisis, observamos en la Tabla VI - 66 cómo en el problema de reparto directamente proporcional todos los equipos basan su estrategia en la resolución de tres problemas aritméticos de valor perdido basados en las relaciones parte-todo (categoría RP1). En el segundo problema, encontramos una propuesta de solución sin argumentar (RP0) y una solución basada en una secuencia de operaciones que también hemos categorizado dentro de RP3 aunque, dada la falta de detalles y la simplicidad de la estructura numérica, podría categorizarse también en RP1. No aparecen, por tanto, otros métodos que basen la estrategia en el empleo de fórmulas o resolución de ecuaciones o planteamientos de valor perdido parte-parte.

		RP0	**RP1**	**RP2**	**RP3**	**RP4**
F8.1.1	N.º de respuestas	0	9	0	0	0
	Porcentaje	-	90 %	-	-	-
F8.1.2	N.º de respuestas	1	0	0	1	0
	Porcentaje	10 %	-	-	10 %	-

Tabla VI - 66. Estrategia proporcional utilizada en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2).

Dentro de las estrategias clasificadas en RP1, encontramos así mismo diferentes estrategias de resolución para los problemas de valor perdido intermedios. Tres equipos (probablemente debido a plagio entre ellos) presentan producciones que parecen combinar estrategias escalares (VPd2) y procesos de unitización. Así, a la persona que había puesto la mitad del precio del billete le dan la mitad del premio y para el resto calculan cuántos grupos de 2 €, han puesto para comprar el billete y cuánta cantidad del premio corresponde por cada 2 € invertidos (ver Imagen VI - 32)

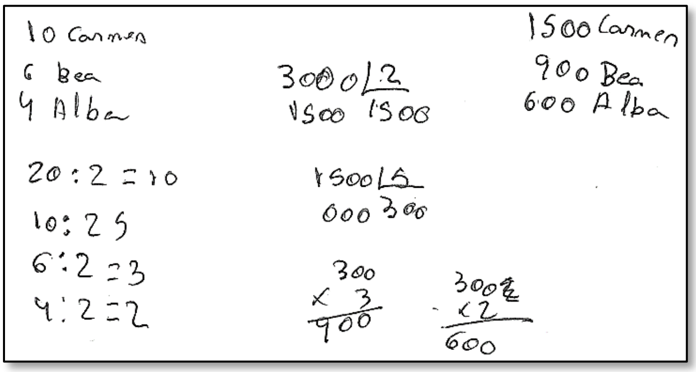


Imagen VI - 32. Producción del equipo B1 para el problema F8.1.1 de la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2).

Otros dos equipos usan también una estrategia de factor de cambio (VPd2) pero normalizando las razones. Dichas razones se establecen en una relación parte-todo dentro de la situación inicial de compra del billete. Estos equipos expresan esta razón mediante el porcentaje de billete que ha comprado cada una de las participantes en el reparto (ver Imagen VI - 33), para luego alegar que les toca el mismo porcentaje de premio.

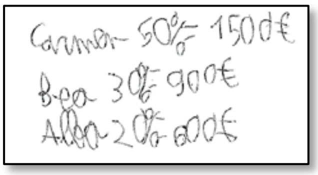


Imagen VI - 33. Producción del equipo B5 para el problema F8.1.1 de la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2).

La estrategia de resolución de los problemas de valor perdido parte-todo más utilizada es la VPd3, que consistía, en este caso, en calcular la cantidad de premio por unidad de valor económico del billete. Es decir, los alumnos calculan la constante de proporcionalidad del reparto, "euros de premio por cada euro puesto para el billete", para después calcular mediante multiplicación la cantidad que le corresponde a cada uno (ver Imagen VI - 34).

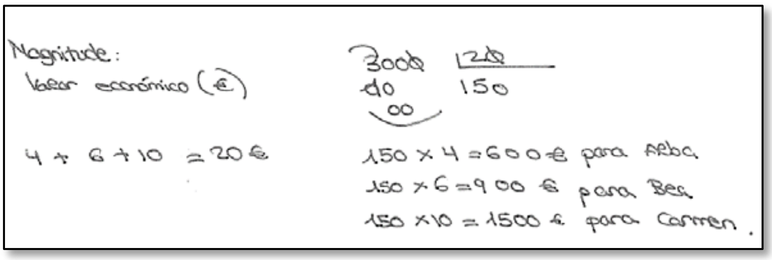


Imagen VI - 34. Producción del equipo B5 para el problema F8.1.1 de la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2).

En la Imagen VI - 35 se observan las producciones que para el problema F8.1.2 (reparto inversamente proporcional) intentan compensar de forma multiplicativa la comparación entre los sueldos de los nietos. Uno de los equipos da una solución incorrecta sin argumentar (RP0), de acuerdo con un modelo inversamente proporcional, ya que reparte el doble de dinero al nieto con menor sueldo que al nieto con mayor sueldo (Imagen VI - 35, izquierda). El otro equipo realiza correctamente el reparto inverso, al nieto que gana el triple le reparten la tercera parte (15000 €) de lo que reparten al nieto que gana la tercera parte (45000 €). Además, este equipo deja constancia de la secuencia de operaciones que realiza (Imagen VI - 35, derecha).

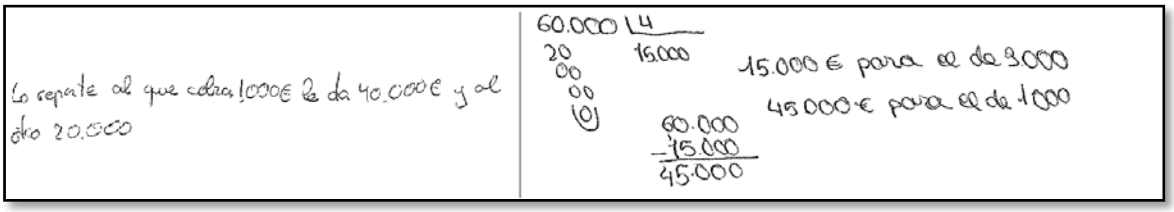


Imagen VI - 35. Producciones de los equipos B9 (izquierda) y B2 (derecha) para el problema F8.1.2 de la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo I-2).

Este último equipo, B2, realiza una secuencia de operaciones que podría generalizarse a una estrategia correcta para resolver los problemas de valor perdido parte-todo que se generan en los repartos inversamente proporcionales. Esta estrategia consistiría en, tras una opcional normalización de pesos (que el equipo B2 parece haber realizado para calcular la cantidad 4), sumar los pesos, $w_1 + w_2$ (en el ejemplo $1000 + 3000$, o normalizando $1 + 3 = 4$), dividir la cantidad a repartir entre dicha suma $K/(w_1 + w_2)$ (en el ejemplo $60000: 4 = 15000$) y repartir a cada individuo la cantidad anterior multiplicada por el peso contrario al que le corresponde, a x_i darle la cantidad $w_j \cdot K/(w_1 + w_2)$ (en el ejemplo al de 1000 €, o peso normalizado 1, se le da $3 \cdot 15000$). Recordad que al individuo x_i había que repartirle:

$$\frac{\left(\dfrac{K}{\dfrac{1}{w_1} + \dfrac{1}{w_2}}\right)}{w_i} = \frac{K w_1 w_2}{w_i(w_1 + w_2)} = w_j \cdot \frac{K}{w_1 + w_2}$$

Por lo que, como hemos dicho, la anterior secuencia de operaciones supone un método correcto general para repartos inversamente proporcionales, pero solo con dos individuos involucrados.

Para acabar el análisis de la situación introductoria, destacamos que, aparte de la elección de un modelo no proporcional, no podemos analizar errores en las producciones de los alumnos, ya que, salvo una producción sin argumentar, el resto de las producciones que siguen modelos proporcionales dan correctamente la solución dentro de este modelo.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Tras el análisis de la situación introductoria, analizamos el desempeño de los alumnos en el resto de los problemas realizados de forma posterior a la institucionalización. En la Tabla VI - 67 se presentan los resultados para las categorías generales, en la Tabla VI - 68 el modelo de reparto empleado por los alumnos y en la Tabla VI - 69 la estrategia elegida por aquellos alumnos que realizan un reparto proporcional. Dentro de cada tabla destacamos en gris las filas correspondientes a los repartos directamente proporcionales para distinguirlas de las correspondientes a repartos inversamente proporcionales.

		N	B	I	C
F8.2.1	N.º de respuestas	0	1	1	8
	Porcentaje	-	10 %	10 %	80 %
F8.2.2	N.º de respuestas	0	5	1	4
	Porcentaje	-	50 %	10 %	40 %
TC8.1	N.º de respuestas	7	2	6	5
	Porcentaje	35 %	10 %	30 %	20 %
TC8.2	N.º de respuestas	7	3	1	9
	Porcentaje	35 %	15 %	5 %	45 %
PE.8	N.º de respuestas	2	1	1	16
	Porcentaje	10 %	5 %	5 %	80 %

Tabla VI - 67. Resultados generales en los problemas de repartos proporcionales (Ciclo I-2).

Como se observa en la Tabla VI - 67, aunque tras la institucionalización aumenta notablemente el número de respuestas correctas en los problemas susceptibles de realizarse mediante un reparto inversamente proporcional, el porcentaje de respuestas correctas en este tipo de problemas es mucho menor que en los problemas de repartos directos. Estos últimos problemas mantienen altos porcentajes de respuestas correctas durante toda la propuesta.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Uno de los efectos de la institucionalización es la desaparición de las respuestas que usan un modelo de compensación aditiva en las respuestas (Tabla VI - 68). Recordemos que en la situación introductoria no habían aparecido modelos equitativos en ningún problema ni repartos con compensación aditiva en el problema directo, pero sí había una gran cantidad de respuestas que utilizaban la compensación aditiva en el problema de reparto inversamente proporcional.

		MR1	MR2	MR3
F8.2.1	N.º de respuestas	0	0	9
	Porcentaje	-	-	90 %
F8.2.2	N.º de respuestas	0	0	5
	Porcentaje	-	-	50 %
TC8.1	N.º de respuestas	0	0	11
	Porcentaje	-	-	55 %
TC8.2	N.º de respuestas	0	0	10
	Porcentaje	-	-	50 %
PE.8	N.º de respuestas	0	0	17
	Porcentaje	-	-	85 %

Tabla VI - 68. Modelo de reparto empleado (Ciclo I-2).

Salvo alguna producción sin argumentar o que presenta alguna operación difícilmente interpretable (categoría RP0, Tabla VI - 69), vemos que la mayoría de los alumnos utiliza una estrategia aritmética basada en la resolución de un problema de valor perdido utilizando las relaciones de cada individuo con el total (RP1). A diferencia de lo que sucede en otros focos de interés no detectamos influencias externas que se reflejen en la aparición de métodos basados en fórmulas o que dependan del uso del álgebra para su resolución (RP2 o RP4).

		RP0	RP1	RP2	RP3	RP4
F8.2.1	N.º de respuestas	0	9	0	0	0
	Porcentaje	-	90 %	-	-	-
F8.2.2	N.º de respuestas	0	0	0	5	0
	Porcentaje	-	-	-	50 %	-
TC8.1	N.º de respuestas	6	0	0	5	0
	Porcentaje	30 %	-	-	20 %	-
TC8.2	N.º de respuestas	0	10	0	0	0
	Porcentaje	-	50 %	-	-	-
PE.8	N.º de respuestas	0	17	0	0	0
	Porcentaje	-	85 %	-	-	-

Tabla VI - 69. Estrategias proporcionales empleadas en los problemas de reparto (Ciclo I-2).

Dentro de estas estrategias aritméticas, las resoluciones de los alumnos en los problemas de reparto directamente proporcional se dividen esencialmente en dos categorías, las que emplean una estrategia VPd2 para el problema de valor perdido (estrategia por factor de cambio que implica calcular la razón dentro de la primera situación entre el peso y la suma de los pesos) y los que emplean una estrategia VPd3 (se calcula la constante de proporcionalidad del problema planteando la razón entre la cantidad a repartir y la suma de los pesos). En la Imagen VI - 36 se pueden ver ejemplos de uno y otro tipo de producciones en el problema PE.8 de la prueba escrita. En dicho problema, de las 17 producciones que siguen un modelo proporcional, 4 utilizan una estrategia VPd2 y 13 calculan la constante de proporcionalidad del problema (VPd3).

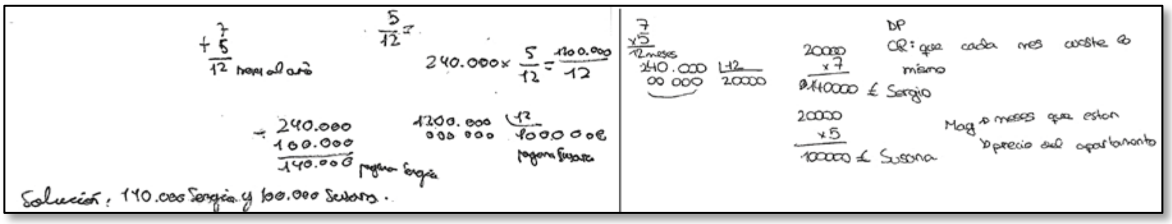
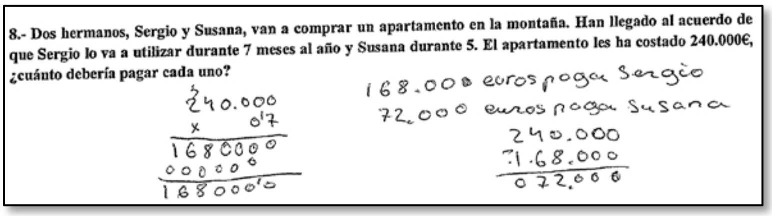


Imagen VI - 36. Producciones de los alumnos B1.1 (izquierda) y B3.2 (derecha) para el problema PE.8 (Ciclo I-2).

Para los problemas inversamente proporcionales, las resoluciones proporcionales siguen un esquema similar al que apareció en la situación introductoria y que se analizó a partir de la Imagen VI - 35 (derecha). Como dijimos entonces, las producciones se han clasificado en la estrategia RP3 por ser la más cercana a la que realizan los alumnos. Sin embargo, a tenor de lo observado en el debate de la situación introductoria (recogido en el diario de clase), y la falta de argumentación de los alumnos, las producciones parecen seguir un esquema mecánico, no basado en la interpretación de las operaciones, en el que los alumnos suman los pesos y dividen la cantidad a repartir entre dicha suma, para después asignar a cada individuo el resultado de ese cociente multiplicado por el peso del otro individuo que participa en el reparto.

Además de las operaciones sin sentido que denotan una pobre comprensión del fenómeno de reparto inverso en una buena parte de los alumnos, encontramos pocas producciones con errores que sigan una estrategia potencialmente correcta. En concreto, para los tres problemas de reparto directamente proporcional, encontramos una producción incorrecta en cada uno achacable a un error al aplicar una estrategia correcta. Por ejemplo, para PE.8, el alumno B9.1 (ver Imagen VI - 37) procede mediante una estrategia RP1, aplicando para resolver el problema de valor perdido lo que parece una estrategia VPd2 por factor de cambio. Sin embargo, establece como razón interna 0,7 en vez de $7/12$. Aunque es difícil interpretar la naturaleza de dicho error, podría deberse a problemas asociados con la comprensión del número racional y sus representaciones simbólicas (error VP.2).


8.- Dos hermanos, Sergio y Susana, van a comprar un apartamento en la montaña. Han llegado al acuerdo de que Sergio lo va a utilizar durante 7 meses al año y Susana durante 5. El apartamento les ha costado 240.000€, ¿cuánto debería pagar cada uno?

240.000 × 0'7 = 1680000 / 00000 / 168000'0

168.000 euros paga Sergio
72.000 euros paga Susana

240.000 − 168.000 = 072.000

Imagen VI - 37. Producción del alumno B9.1 para el problema PE.8 (Ciclo I-2).

VI.3.1.6. Interpretación del porcentaje y problemas asociados

Como en el resto de los focos, además de las categorías generales, para el análisis de las producciones de los alumnos en problemas relacionados con el concepto de porcentaje utilizamos las categorías específicas que desarrollamos en el Capítulo III. Volvemos a presentar el listado y la codificación de estas categorías en la Tabla VI - 70 para mayor comodidad del lector.

Código	Estrategia	Código	Estrategia
VPp0	Sin razonamiento	**VPp7**	Uso de una fórmula
VPp1	Construcción de patrones	**VPp8**	Operaciones sin sentido
VPp2	Factor de cambio/Análisis unitario	**VPp9**	Razonamientos aditivos erróneos
VPp3	Razón externa con multiplicación	**VPp10**	Cálculo y comprobación
VPp4	Razón externa con división	**VPp11**	Fracción unitaria/puntos referencia
VPp5	Proporción	**VPp12**	Estimaciones/Ensayo y error
VPp6	Construcción sucesiva	**VPp13**	Argumento basado en gráficos

Tabla VI - 70. Categorías específicas de análisis de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje.

Los problemas de porcentajes, incluidos los aumentos y disminuciones porcentuales se trabajaron de forma específica en las sesiones 9, 10 y 11. En concreto, las fichas de trabajo F9.1, TC9, F10.1, F11.1 y F11.2 se dedican en exclusiva a problemas relacionados con este foco de interés (también se trabaja el concepto de razón para conectarlo con el de porcentaje). Para evaluar este foco de interés se introdujeron los problemas PE.9.1 y PE.9.2 en la prueba escrita individual. En la planificación también estaba previsto dedicar la sesión 12 (fichas de trabajo F12.1 y TC.12) y los problemas TC11.5, F13.1.6.1 y F13.1.6.2 a este foco de interés, pero no pudieron llevarse a cabo, por lo que no se incorporan al análisis. Aunque en la sección VI.3.1.1. Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad, hemos incorporado problemas relacionados con situaciones de porcentajes que se centraban en el cálculo de razones, volvemos a incorporar dichos problemas al análisis en esta sección ya que la mayoría de ellos conformaban las situaciones introductorias para este foco. En concreto, las fichas de trabajo F9.1 y F11.1 contienen los problemas que se constituyen como situación introductoria para las situaciones relacionadas con porcentajes en general, y para las situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales respectivamente.

Análisis de las situaciones introductorias.

En las sesiones dedicadas al concepto del porcentaje, se diseñan dos fichas con situaciones introductorias. La primera de ellas, F9.1, para introducir la referencia 100 e interpretar el porcentaje en situaciones de proporcionalidad parte-todo, y la segunda, F11.1, para introducir específicamente los aumentos y disminuciones porcentuales.

En la ficha de trabajo F9.1, se incorporaban dos contextos y diferentes preguntas relacionadas, la primera de ellas con el fin de obtener el porcentaje asociado a la situación (problema de Tipo II) y la segunda con el fin de interpretar el concepto de referencia y relacionarlo con el cálculo e interpretación de las razones externas asociadas a una situación de porcentaje. Volvemos a presentar aquí estas actividades:

F9.1.1: *En una clase hay 6 chicos de un total de 24 alumnos.*

F9.1.1.1: *En la clase hay   chicas por cada alumno.*

F9.1.1.2: *En la clase hay   chicos por cada alumno.*

F9.1.1.3: *En la clase hay   alumnos por cada chico.*

F9.1.1.4: *En la clase hay   alumnos por cada chica.*

F9.1.1.5: *En la clase hay   chicas por cada 100 alumnos.*

F9.1.1.6: *En la clase hay   chicos por cada 100 alumnos.*

F9.1.1.7: *En la clase hay   chicas por cada chico.*

F9.1.1.8: *En la clase hay   chicos por cada chica.*

F9.1.2: *En una ciudad hay 10 personas alérgicas por cada 100 habitantes.*

F9.1.2.1: *En la ciudad hay   alérgicos por cada habitante.*

F9.1.2.2: *En la ciudad hay   no alérgicos por cada habitante.*

F9.1.2.3: *En la ciudad hay   habitantes por cada alérgico.*

F9.1.2.4: *En la ciudad hay   habitantes por cada no alérgico.*

F9.1.2.5: *En la ciudad hay   alérgicos por cada no alérgico.*

F9.1.2.6: *En la ciudad hay   no alérgicos por cada alérgico.*

F9.1.2.7: *En la ciudad hay   no alérgicos por cada 100 personas.*

En las actividades anteriores no se pedía a los alumnos elaborar la respuesta ni justificarla y son, en su mayoría, cuestiones que no requieren de cálculos intermedios, por lo que no haremos análisis específico de estas actividades y nos centraremos en la corrección de la respuesta de cada apartado. En la Tabla VI - 71 se presentan estos resultados.

	N	B	I	C
F9.1.1.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.1.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.1.3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.1.4	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F9.1.1.5	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (8)
F9.1.1.6	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (8)
F9.1.1.7	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (8)
F9.1.1.8	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (8)

	N	B	I	C
F9.1.2.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.2.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.2.3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.2.4	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F9.1.2.5	0 (0)	20 (2)	10 (1)	70 (7)
F9.1.2.6	0 (0)	10 (1)	0 (0)	90 (9)
F9.1.2.7	0 (0)	30 (3)	0 (0)	70 (7)

Tabla VI - 71. Resultados generales en la situación introductoria de porcentajes (Ciclo I-2).

Una parte de estos resultados ya fueron analizados en la sección VI.3.1.1 ya que, en su mayoría, se trata de problemas en los que se pide calcular una razón concreta. Hemos añadido aquí los ítems en los que se trabaja con la normalización a 100 para calcular porcentajes (F9.1.1.5, F9.1.1.6 y F9.1.2.7).

Como ya hicimos notar en la sección VI.3.1.1, se han obtenido porcentajes de éxito (categoría C) muy altos en la mayoría de los problemas relacionados con el porcentaje. Todas las razones parte-todo y sus inversas (problemas F9.1.1.1, F9.1.1.2, F9.1.1.3, F9.1.1.4, F9.1.2.1, F9.1.2.2, F9.1.2.3 y F9.1.2.4) tienen tasas de éxito del 100 % o del 90 %. Algo menor es el porcentaje de éxito en las razones parte-parte (problemas F9.1.1.7, F9.1.1.8, F9.1.2.5 y F9.1.2.6) y en los problemas en los que se pedía la normalización a 100 (F9.1.1.5, F9.1.1.6 y F9.1.2.7), aunque observamos porcentajes de éxito también altos.

La situación introductoria parece, por tanto, adecuada para acercar la interpretación del porcentaje y relacionar el concepto de porcentaje con el de razón externa. Incluso los problemas en los que se pedía calcular las razones inversas a las "naturales", es decir, las razones del todo respecto a cada una de las partes (F9.1.1.3, F9.1.1.4, F9.1.2.3 y F9.1.2.4) tienen unos porcentajes de éxito muy altos.

En la ficha de trabajo F11.1 se incorporaban dos contextos y diferentes preguntas relacionadas. En el primero se trabajan los aumentos porcentuales y en el segundo se trabajan las disminuciones porcentuales. Volvemos a presentar aquí estas actividades:

F11.1.1: *Debido a la subida del precio de la gasolina, los billetes de autobús también van a subir de precio. En concreto la subida va a ser del 10 %.*

F11.1.1.1. *El billete subirá € por cada 100 € que costaba antes.*

F11.1.1.2. *El billete subirá € por cada euro que costaba antes.*

F11.1.1.3. *El billete costará después de la subida € por cada 100 € que costaba antes.*

F11.1.1.4. *El billete costará después de la subida € por cada euro que costaba antes.*

F11.1.1.5. *El billete costaba antes € por cada euro que costará después de la subida.*

F11.1.2: *En las rebajas de una tienda nos hacen un 20 % de descuento.*

F11.1.2.1. *Cada artículo bajará € por cada 100 € que costaba antes.*

F11.1.2.2. *Cada artículo bajará € por cada euro que costaba antes.*

F11.1.2.3. *Cada artículo costará después de la bajada € por cada 100 € que costaba antes.*

F11.1.2.4. *Cada artículo costará después de la bajada € por cada euro que costaba antes.*

F11.1.2.5. *Cada artículo costaba antes € por cada euro que costará después de la bajada.*

Como en la situación introductoria F9.1 las anteriores actividades no requieren de elaboración ni casi de cálculos intermedios, por lo que tampoco haremos análisis específico de estas actividades y nos centraremos en el análisis de los resultados obtenidos en las categorías generales de cada apartado (ver Tabla VI - 72).

	N	B	I	C
F11.1.1.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F11.1.1.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F11.1.1.3	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F11.1.1.4	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F11.1.1.5	0 (0)	30 (3)	40 (4)	30 (3)

	N	B	I	C
F11.1.2.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F11.1.2.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F11.1.2.4	0 (0)	10 (1)	30 (3)	60 (6)
F11.1.2.3	0 (0)	0 (0)	30 (3)	70 (7)
F11.1.2.5	0 (0)	60 (6)	30 (3)	10 (1)

Tabla VI - 72. Resultados generales en la situación introductoria de aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo I-2).

En los problemas de la ficha F11.1 en donde se trabajan los aumentos y disminuciones porcentuales sí observamos diferencias altas entre las tasas de éxito dependiendo del tipo de razón que se solicita calcular. Las tasas de éxito son del 100 % cuando a los estudiantes se les solicita calcular la razón entre la subida o bajada y la cantidad inicial (F11.1.1.2 y F11.1.2.2), siguen siendo altas cuando se solicita que calculen la razón entre la cantidad final y la cantidad inicial (F11.1.1.4 y F11.1.24), pero bajan drásticamente cuando se solicita que calculen la razón entre la cantidad inicial y la cantidad final, es decir, aquellas en las que la cantidad 100 aparece en el numerador en vez de en el denominador (F11.1.1.5 y F11.1.2.5). Se rompe en este caso la tendencia observada en otros problemas por la que los estudiantes tiene tasas de éxito similares al calcular e interpretar las dos razones inversas asociadas a una pareja de magnitudes.

Al menos inicialmente, parece que el cálculo de razones de la cantidad inicial respecto a la cantidad final en una situación de aumento o disminución porcentual supone un obstáculo para los alumnos. Sin embargo, los alumnos parecen poder detectar correctamente el resto de las razones externas en situaciones relacionadas con el porcentaje.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Tras unas situaciones iniciales más estructuradas que en otros focos de interés, la propuesta continua con la resolución de problemas de valor perdido asociados a situaciones de porcentaje. Como dijimos, debido a una baja médica, no se pudo completar la propuesta en este foco, por lo que los problemas analizados en esta sesión corresponden a las sesiones 9, 10 y 11, aunque estaba programada otra sesión más para terminar de afianzar estos conceptos. En la Tabla VI - 73 presentamos los resultados en las categorías generales para los problemas abordados después de las situaciones introductorias. En la tabla se indica también el tipo de problema de porcentaje del que se trata. En esta ocasión nos hemos centrado en la comparativa entre problemas de Tipo I (cálculo directo) y de Tipo III (cálculo inverso), tanto en situaciones parte-todo, donde el todo es el referente para la cantidad 100 en el porcentaje, como en problemas de aumentos y disminuciones porcentuales (Au. / Dis.), donde la normalización a 100 se realiza usando como referente la cantidad inicial. Como en la propuesta de 1º de ESO, también se incluyen preguntas sobre complementarios y "falsos" complementarios (Comp.). El problema F10.1.2.1 es un problema de comparación cuantitativa (C. Cuant.).

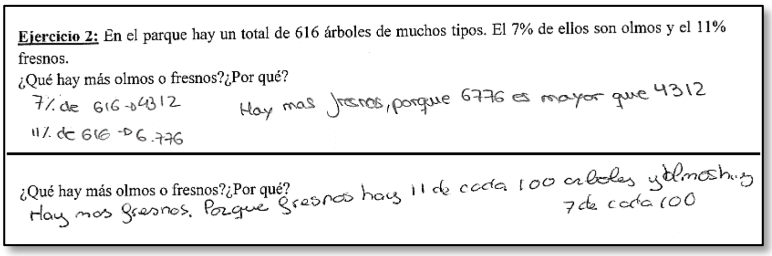
La tasa de respuestas no entregadas es baja, incluso inferior a la de otros focos de la propuesta, teniendo la ficha de trabajo para casa TC9 un 15 % de producciones no entregadas (tres alumnos). Así mismo, también es baja la tasa de respuestas en blanco (entre el 10 % y el 20 %). Estos hechos podrían indicar cierta familiaridad de los alumnos con este tipo de problemas.

En los problemas relacionados con complementarios encontramos tasas de éxito altas en TC9.1.1 y F10.1.2.1, mayores que las obtenidas en el ciclo II-1. Sin embargo, contrasta la baja tasa de éxito en el problema F10.1.2.3. Un análisis cualitativo de las respuestas en este problema indica que la confusión de los alumnos parece obedecer más a elementos semánticos del contexto, en el que se utilizan los términos 'chopo', 'fresno' y 'olmo' a los que quizá no están muy acostumbrados los alumnos de esta edad. En el enunciado de la actividad se da información sobre el porcentaje de fresnos y olmos de un bosque, para después preguntar en F10.1.2.3 "cuántos chopos hay". Todas las respuestas incorrectas en este problema calculan el número de chopos, en vez de contestar que con la información suministrada no podía determinarse que los chopos sean el complementario de la suma de fresnos y olmos. En un contexto similar sobre el color de pelo de los habitantes de una ciudad (F10.1.1.2), quizá más cercano a los alumnos, se observa una tasa de éxito superior.

El problema de comparación cuantitativa F10.1.2.1 se diseñó para poder evaluar la comprensión del concepto de porcentaje. No se trata de un problema de comparación cuantitativa en el que haya que normalizar las razones, ya que las dos situaciones a comparar estaban normalizadas a 100 utilizando el mismo porcentaje. Se pretendía observar si los alumnos respondían en cuál de los dos grupos había más individuos utilizando el concepto de porcentaje (Imagen VI - 38, abajo) o si, por el contrario, necesitaban calcular las cantidades absolutas de individuos para responder (Imagen VI - 38, arriba). Como observamos en la Tabla VI - 73 la tasa de respuestas correctas fue muy alta. Además, solo dos equipos calcularon las cantidades absolutas para comparar las poblaciones.

			N	B	I	C
TC9.1.1	Comp.	N.º de respuestas	3	0	2	15
		Porcentaje	15 %	-	10 %	75 %
TC.9.1.2	Tipo I	N.º de respuestas	3	0	1	16
		Porcentaje	15 %	-	5 %	80 %
TC9.2	Tipo III	N.º de respuestas	3	2	4	11
		Porcentaje	15 %	10 %	20 %	55 %
F10.1.1.1	Tipo III	N.º de respuestas	0	2	1	7
		Porcentaje	-	20 %	10 %	70 %
F10.1.1.2	Comp.	N.º de respuestas	0	2	1	7
		Porcentaje	-	20 %	10 %	70 %
F10.1.2.1	C. Cuant.	N.º de respuestas	0	1	0	9
		Porcentaje	-	10 %	-	90 %
F10.1.2.2	Tipo I	N.º de respuestas	0	1	1	8
		Porcentaje	-	10 %	10 %	80 %
F10.1.2.3	Comp.	N.º de respuestas	0	2	4	4
		Porcentaje	-	20 %	40 %	40 %
F11.2.1.1	Tipo I Au.	N.º de respuestas	0	0	1	9
		Porcentaje	-	-	10 %	90 %
F11.2.1.2	Tipo III Au.	N.º de respuestas	0	2	3	5
		Porcentaje	-	20 %	30 %	50 %
F11.2.2.1	Tipo I Dis.	N.º de respuestas	0	0	2	8
		Porcentaje	-	-	20 %	80 %
F11.2.2.2	Tipo III Dis.	N.º de respuestas	0	2	4	4
		Porcentaje	-	20 %	40 %	40 %
PE.9.1	Tipo I Au.	N.º de respuestas	2	2	4	12
		Porcentaje	10 %	10 %	20 %	60 %
PE.9.2	Tipo III Au.	N.º de respuestas	2	4	7	7
		Porcentaje	10 %	20 %	35 %	35 %

Tabla VI - 73. Resultados generales en los problemas de porcentajes (Ciclo I-2).


Ejercicio 2: En el parque hay un total de 616 árboles de muchos tipos. El 7% de ellos son olmos y el 11% fresnos.
¿Qué hay más olmos o fresnos?¿Por qué?
7% de 616 -> 43'12
11% de 616 -> 6.776
Hay mas fresnos, porque 6776 es mayor que 4312

¿Qué hay más olmos o fresnos?¿Por qué?
Hay mas fresnos. Porque fresnos hay 11 de cada 100 arboles y olmos hay 7 de cada 100

Imagen VI - 38. Producciones de los equipos B3 (arriba) y B9 (abajo) para el problema F10.1.2.1 (Ciclo I-2).

En cuanto a los problemas de valor perdido, observamos que los problemas de cálculo directo (Tipo I) tienen tasas de éxito muy altas durante la propuesta desde el inicio (80 % o 90 %), aunque algo más baja en la prueba escrita (PE.9.1 tiene un 60 % de éxito). Sin embargo, las tasas de éxito de los problemas de Tipo III durante la propuesta son considerablemente más bajas. Dentro de los problemas de Tipo III cabe diferenciar aquellos problemas en los que la normalización se hace respecto a un total de individuos (TC9.2 y F10.1.1.1) de los problemas de Tipo III en situaciones de aumentos y diminuciones porcentuales (F11.2.1.2, F11.2.2.2 y PE.9.2). En los primeros se obtienen tasas de éxito aceptables (un 70 % en F10.1.1.1 y un 55 % TC9.2, que es una tasa de éxito alta, dado que se encuentra en una ficha de trabajo individual fuera del horario lectivo). Sin embargo, en los relacionados con aumentos y disminuciones la tasa de éxito es inferior (entre el entre 35 % y el 50 %). Esta dificultad parece estar relacionada con las resaltadas en la situación introductoria para calcular e interpretar las razones entre la cantidad inicial y la final en este tipo de problemas de porcentajes.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

En la Tabla VI - 74 presentamos los resultados obtenidos para el análisis cuantitativo alrededor de las categorías específicas. En este análisis estudiamos el peso relativo de las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos para resolver los problemas de valor perdido en situaciones de porcentajes, para aquellos alumnos que han intentado resolver el problema (categoría I y C del análisis del general). Hemos eliminado de la tabla aquellas categorías que no han tenido incidencia en este ciclo. En concreto, no aparecen las categorías VPp1, VPp5, VPp10, VPp12 y VPp13. Es decir, no hemos encontrado a lo largo de la propuesta ni estrategias de construcción de patrones, ni el uso de una proporción, ni estrategias de cálculo y comprobación, ni uso de estimaciones o aproximaciones por ensayo y error, ni argumentos basados en gráficos. Este hecho coincide con lo observado en el ciclo II-1, salvo porque, en aquella ocasión, sí clasificamos unas pocas respuestas en la categoría VPp12 (estimaciones/ensayo y error).

Observamos que el número de producciones clasificadas en la categoría VPp0 (no se evidencia ninguna estrategia o argumentan que no se puede resolver porque no es de proporcionalidad) tiene una baja incidencia.

		VPp0	VPp2	VPp3	VPp4	VPp6	VPp7	VPp8	VPp9	VPp11
TC9.1.2	Tipo I	5 (1)	-	-	-	-	70 (14)	5 (1)	-	5 (1)
TC9.2	Tipo III	-	20 (4)	5 (1)	-	-	50 (10)	-	-	-
F10.1.1.1	Tipo III	-	30 (3)	40 (4)	-	-	10 (1)	-	-	-
F10.1.2.2	Tipo I	10 (1)	10 (1)	10 (1)	-	-	60 (6)	-	-	-
F11.2.1.1	Tipo I Au.	20 (2)	-	40 (4)	-	10 (1)	30 (3)	-	-	-
F11.2.1.2	Tipo III Au.	-	-	60 (6)	-	-	-	-	20 (2)	-
F11.2.2.1	Tipo I Dis.	10 (1)	10 (1)	70 (7)	-	-	10 (1)	-	-	-
F11.2.2.2	Tipo III Dis.	10 (1)	-	40 (4)	-	-	-	-	30 (3)	-
PE.9.1	Tipo I Au.	-	-	55 (11)	-	5 (1)	15 (3)	5 (1)	-	-
PE.9.2	Tipo III Au.	-	-	35 (7)	5 (1)	5 (1)	-	-	25 (5)	-

Tabla VI - 74. Estrategias utilizadas en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo I-2).

De entre las estrategias empleadas por los alumnos recogidas en la Tabla VI - 74 las estrategias erróneas VPp8 y VPp9 tienen una baja presencia y de entre las correctas (VPp2, VPp3, VPp4, VPp6, VPp7 y VPp11) las más habituales son VPp3 (funcional por razón externa que permite finalizar el problema con multiplicación) y VPp7 (uso de una fórmula).

Producciones que siguen una estrategia errónea.

A diferencia de lo ocurrido en el ciclo II-1 (ver Tabla V - 58), hemos clasificado muy pocas producciones en la categoría de operaciones sin sentido (VPp8). Lo que puede indicar una mayor familiaridad de los alumnos con las estrategias de resolución en este tipo de problemas.

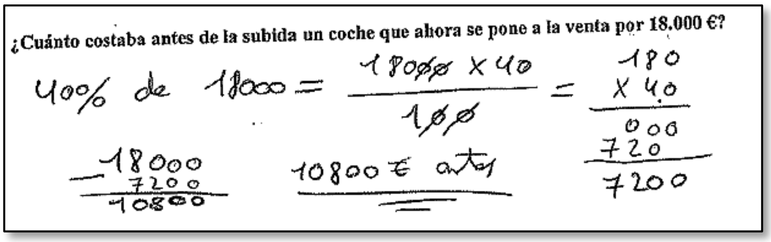
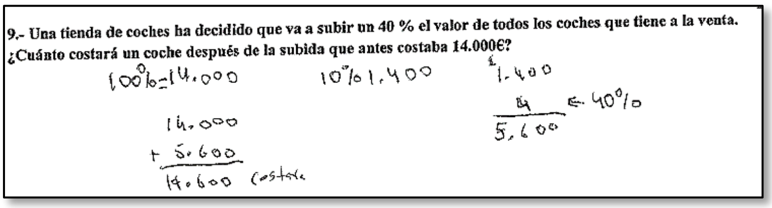


Imagen VI - 39. Producción del alumno B2.1 para el problema PE.9.2 (Ciclo I-2).

En cuanto a los argumentos aditivos erróneos, VPp9, observamos que se concentran en los problemas de Tipo III en las situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales, con un peso de entre el 20 % y el 30 % de las respuestas en estos ejercicios. En estos problemas se pide a los alumnos que calculen la cantidad inicial conocida la cantidad final tras un aumento o disminución porcentual. Los alumnos, para calcular la cantidad inicial, aplican a la cantidad final una disminución con el mismo valor porcentual, si se trata de un aumento, o un aumento con el mismo valor porcentual, si se trata de una disminución. Por ejemplo, en la prueba escrita, el problema PE.9.2 presentaba una situación de aumento del 40 % del precio de unos productos y se pedía el cálculo de la cantidad inicial conocida la cantidad final. Cinco alumnos respondieron de forma similar a como puede verse en la Imagen VI - 39, descontando un 40 % a la cantidad final.

Producciones que siguen una estrategia correcta.

En cuanto a las estrategias correctas de resolución, observamos que, al igual que ocurría en la propuesta en 1º de ESO, el uso de puntos de referencia y de una estrategia de construcción progresiva es muy escaso. De hecho, las cuatro producciones clasificadas dentro de estas dos categorías en la Tabla VI - 74 corresponden al alumno B8.1 o al equipo en el que el alumno trabajaba (B8). Como en otras ocasiones, el uso de puntos de referencia aparece en un problema en donde hay que utilizar el 25 %, concretamente en el problema TC9.1.2. Pero el alumno utiliza este tipo de estrategias basadas en factores de cambio y acercamiento progresivo a la solución en otros problemas. Por ejemplo, en la Imagen VI - 40 observamos cómo el alumno B8.1, para aumentar una cantidad en un 40 %, establece cuál es la cantidad que se corresponde con el 100 %, después calcula la correspondiente al 10 %, y a partir de ella la correspondiente al 40 %. Finalmente añade dicha cantidad a la cantidad inicial.


9.- Una tienda de coches ha decidido que va a subir un 40 % el valor de todos los coches que tiene a la venta. ¿Cuánto costará un coche después de la subida que antes costaba 14.000€?

100%=14.000 10%1.400 1.400
4 ← 40%
5.600
14.000
+ 5.600
19.600 costará

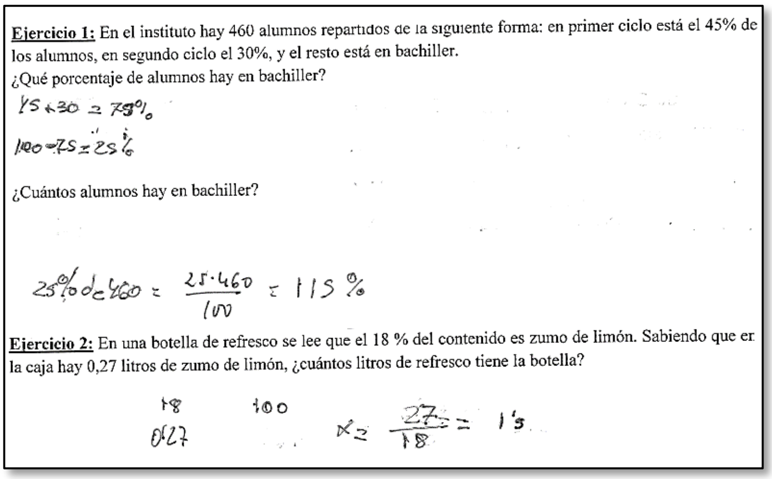
Imagen VI - 40. Producción del alumno B8.1 para el problema PE.9.1 (Ciclo I-2).

Al igual que ocurría en el ciclo II-1, las estrategias correctas de resolución se concentran en las categorías en las que se usa una estrategia funcional (VPp3 y VPp4) y el uso de fórmulas (VPp7). Ambos tipos de estrategia tienen una frecuencia absoluta similar, aunque algo mayor las estrategias funcionales (46 estrategias funcionales y 38 producciones que usan una fórmula). Sin embargo, observamos que durante este ciclo el uso de fórmulas tiene una mayor presencia, incluso mayoritaria en los primeros problemas de la propuesta, pero conforme avanza la propuesta ganan peso las estrategias funcionales.

La mayor parte de las producciones clasificadas en VPp7 (uso de fórmula) obedecen al patrón descrito en el comentario de la Imagen V - 61 en la sección V.1.1.7 del capítulo anterior. Se trata de calcular el $p\,\%$ de una cantidad M, multiplicando M por el numeral p (operación carente de significado) y dividiendo por 100 (segunda pregunta del “Ejercicio 1” que se observa en la Imagen VI - 41). Este tipo de producciones parece obedecer a conocimientos previos de los alumnos sobre el porcentaje que, probablemente, tienen su origen en la Educación Primaria.

La estrategia anterior, que está ligada a una interpretación del porcentaje como operador, es empleada en mayor medida en los problemas de cálculo directo de Tipo I, de hecho, en los problemas de Tipo III los alumnos que usan ese tipo de estrategia, cambian a una estrategia de regla de tres o cometen errores al aplicarla.

Por ejemplo, en el problema de Tipo I, TC9.1.2, catorce alumnos emplean la estrategia descrita anteriormente. De ellos, cuatro emplean una regla de tres para resolver el problema de cálculo inverso (Tipo III) TC9.2 (ver distintas estrategias empleadas en el “Ejercicio 1” y el “Ejercicio 2” por el alumno B1.2 en la Imagen VI - 41). Otros cuatro, que mantienen la estrategia basada en la interpretación de operador, resuelven mal el problema al aplicar el porcentaje sobre la parte para calcular el total. Cuatro utilizan una estrategia VPp2 de análisis unitario o factor de cambio, un alumno deja en blanco TC9.2 y un alumno cambia a una estrategia funcional VPp3. Es decir, aunque están cómodos en los problemas de Tipo I con una estrategia que parecen dominar por la instrucción previa recibida en Educación Primaria, los alumnos necesitan cambiar el enfoque para abordar los problemas de cálculo inverso, o Tipo III.



Ejercicio 1: En el instituto hay 460 alumnos repartidos de la siguiente forma: en primer ciclo está el 45% de los alumnos, en segundo ciclo el 30%, y el resto está en bachiller.
¿Qué porcentaje de alumnos hay en bachiller?

45+30 = 75%

100−75 = 25%

¿Cuántos alumnos hay en bachiller?

25% de 460 = $\frac{25 \cdot 460}{100}$ = 115 %

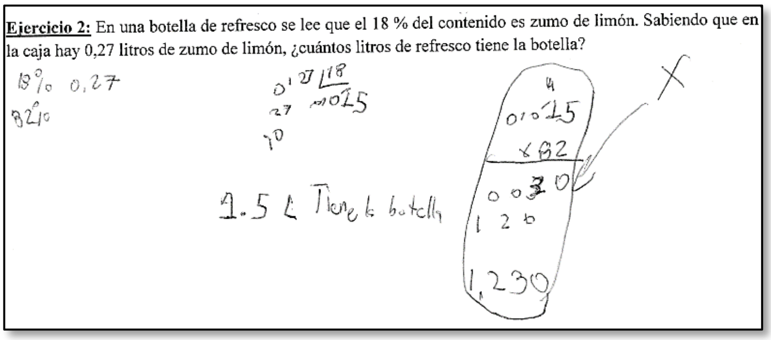
Ejercicio 2: En una botella de refresco se lee que el 18 % del contenido es zumo de limón. Sabiendo que en la caja hay 0,27 litros de zumo de limón, ¿cuántos litros de refresco tiene la botella?

18 100

0'27 x = $\frac{27}{18}$ = 1'5

Imagen VI - 41. Producciones del alumno B1.2 para los problemas de la ficha de trabajo TC9 (Ciclo I-2).

El peso de la estrategia VPp2, relacionada con una interpretación del porcentaje como parte-todo, parece relacionada con el tipo de problema de valor perdido. Como observamos en la Tabla VI - 74, esta aparece casi exclusivamente en los primeros problemas de Tipo III. Los alumnos asocian el dato dado con “la parte” y, por tanto, lo relacionan con el p %, proporcionado en el enunciado. Después, argumentan por factor de cambio para encontrar la cantidad relacionada con el 1 %, dividiendo por el numeral, y después multiplican por 100, para calcular el total. En la Imagen VI - 42 ejemplificamos una producción clasificada en VPp2 en la que el alumno tras calcular la cantidad relacionada con el 1 %, calcula la parte complementaria y el total.



Ejercicio 2: En una botella de refresco se lee que el 18 % del contenido es zumo de limón. Sabiendo que en la caja hay 0,27 litros de zumo de limón, ¿cuántos litros de refresco tiene la botella?

18% 0,27

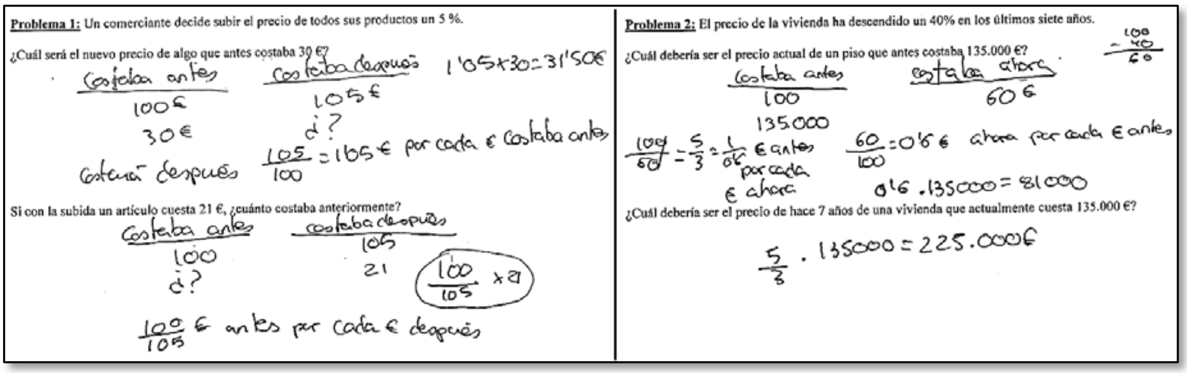
82%

1.5 L Tiene la botella

1,230

Imagen VI - 42. Producción del alumno B8.1 para el problema TC9.2 (Ciclo I-2).

Como hemos observado, las estrategias de carácter funcional van ganando peso a lo largo de la propuesta tras los primeros debates y puestas en común realizadas con los alumnos, convirtiéndose en mayoritaria la estrategia VPp3, ya que la estrategia funcional VPp4 solo aparece en una ocasión en toda la propuesta. Para la resolución del problema de Tipo III de la prueba escrita el alumno B5.2 divide la cantidad final, correctamente, por la razón $\frac{100+p}{100}$ para calcular la cantidad inicial. En cuanto a las estrategias VPp3, además del aumento de su presencia a lo largo de la propuesta, y respecto al ciclo II-1, el análisis cualitativo de las respuestas parece indicar una mejora en la calidad de los argumentos empleados. Casi todas las producciones que resuelven correctamente los ejercicios empleando una estrategia VPp3 vienen acompañadas de interpretaciones de las razones externas que calculan. Aunque con un menor peso, debido a la mayor dificultad que suponen los ejercicios de aumentos y disminuciones porcentuales, observamos este tipo de interpretaciones de las razones externas de la cantidad final sobre la cantidad inicial $\frac{100\pm p}{100}$ y también de sus inversas, $\frac{100}{100\pm p}$ (Imagen VI - 43).



Problema 1: Un comerciante decide subir el precio de todos sus productos un 5 %.

¿Cuál será el nuevo precio de algo que antes costaba 30 €?

Costaba antes | Costaba después | 1'05×30=31'50€

100€ | 105€

30€ | ¿?

Costará después $\frac{105}{100}$ = 1'05€ por cada € costaba antes

Si con la subida un artículo cuesta 21 €, ¿cuánto costaba anteriormente?

Costaba antes | costaba después

100 | 105

¿? | 21 | $\frac{100}{105}$ ×21

$\frac{100}{105}$ € antes por cada € después

Problema 2: El precio de la vivienda ha descendido un 40% en los últimos siete años.

¿Cuál debería ser el precio actual de un piso que antes costaba 135.000 €?

Costaba antes | costaba ahora

100 | 60€

135000

$\frac{100}{60} = \frac{5}{3} = \frac{1}{0'6}$ € antes por cada € ahora

$\frac{60}{100}$ = 0'6 € ahora por cada € antes

0'6 . 135000 = 81000

¿Cuál debería ser el precio de hace 7 años de una vivienda que actualmente cuesta 135.000 €?

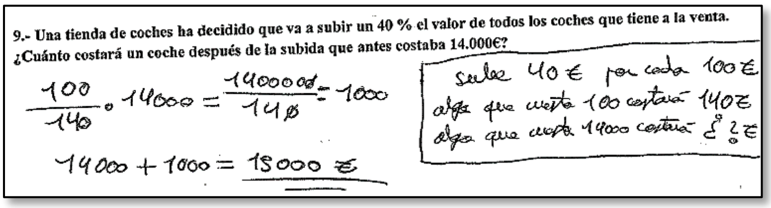
$\frac{5}{3}$. 135000 = 225.000€

Imagen VI - 43. Producciones del equipo B4 para los problemas F11.2.1.1, F11.2.1.2 (izquierda) y F11.2.2.1, F11.2.2.2 (derecha) (Ciclo I-2).

Errores cometidos en estrategias correctas.

La mayor parte de las respuestas incorrectas en este foco de interés y en este ciclo, se concentran en las producciones incluidas en las categorías (erróneas) VPp8 y VPp9, por lo que tenemos una muestra muy baja de respuestas incorrectas que siguen una estrategia correcta. Algunas de ellas, como las encontradas en el problema de “falso complementario”, F10.1.2.3, ya las hemos revisado a lo largo de esta sección.

Los errores relacionados con problemas de valor perdido se concentran en los problemas de Tipo III y tienen que ver con la mala aplicación de una fórmula en las estrategias VPp7 o con problemas inacabados (Error VP.1). Solo encontramos tres producciones que podrían clasificarse en el Error VP.3 o en el Error VP.4 (detectados en el ciclo II-1 para problemas de valor perdido en proporcionalidad simple directa). Como vemos en la Imagen VI - 44 el alumno B2.1 multiplica por la razón inversa a la pertinente. La falta de interpretación de dicha razón hace imposible determinar si se debe a una elección inadecuada de la razón para terminar el problema o a una incorrecta interpretación de dicha razón.



9.- Una tienda de coches ha decidido que va a subir un 40 % el valor de todos los coches que tiene a la venta. ¿Cuánto costará un coche después de la subida que antes costaba 14.000€?

$\frac{100}{140}$ · 14000 = $\frac{1400000}{140}$ = 1000

14000 + 1000 = 15000 €

Sube 40 € por cada 100 €

algo que cuesta 100 costará 140 €

algo que cuesta 14000 costará ¿? €

Imagen VI - 44. Producción del alumno B2.1 para el problema PE9.1 (Ciclo I-2).

VI.3.2. Comparativa con los resultados del grupo de control

Comparamos en esta sección los resultados obtenidos en el grupo experimental (GE) y el grupo de control (GC) en los problemas de la prueba escrita. Como en las anteriores secciones, realizamos este análisis en dos niveles. En primer lugar, el estudio comparativo de los resultados en las categorías generales. En segundo lugar, agrupados por focos de interés, el estudio comparativo de los resultados en las categorías específicas. Se repiten, por tanto, en esta sección, los resultados obtenidos por el grupo experimental en los problemas de la prueba escrita con el propósito de realizar la comparativa mencionada y de sintetizar los resultados obtenidos al finalizar la propuesta por los alumnos sobre los que hemos intervenido.

VI.3.2.1. Análisis comparativo según las categorías generales

En la Tabla VI - 75 se presentan las diferentes tablas de contingencia, expresadas con las frecuencias relativas, en cada problema de la prueba escrita. Como en el Capítulo V, dichas tablas de contingencia se elaboran alrededor de las variables dicotómicas "Corrección en la respuesta: Correcta / No correcta" y "Grupo de procedencia del alumno: Experimental / Control". Por tanto, las respuestas en las categorías generales N (no entrega o no asiste), B (respuesta en blanco) e I (respuesta incorrecta) se agrupan para obtener las tablas de contingencia mencionadas. Para apoyar la información cuantitativa de la Tabla VI - 75, incorporamos la Figura VI - 1 que presenta un diagrama de barras con los porcentajes de acierto en los diferentes problemas para el grupo experimental y el grupo de control.

En la Tabla VI - 75 también se presenta el p-valor obtenido del test exacto de Fisher (ver Capítulo III) para contrastar la hipótesis nula de independencia entre las dos variables. Es decir, la hipótesis nula del test es que la corrección en la respuesta es independiente del grupo del que procede el alumno.

El estudio de este p-valor en el test exacto de Fisher para un nivel de confianza del $95\,\%$, muestra diferencias significativas a favor del grupo experimental (mayor porcentaje de respuestas correctas) en los ítems PE.2.3, PE.3, PE.7 y PE.8 y ninguna diferencia significativa a favor del grupo de control. Estas diferencias significativas a favor del grupo experimental se centran por tanto en el reconocimiento e interpretación de la constante de proporcionalidad inversa (PE.2.3), en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (PE.3) y proporcionalidad compuesta (PE.7) y en los problemas de repartos directamente proporcionales (PE.8).

		N+B+I	C	p-valor
PE.1.1	GE	70 %	30 %	0,2351
	GC	89,5 %	10,5 %	
PE.1.2	GE	35 %	65 %	0,1274
	GC	10,5 %	89,5 %	
PE.1.3	GE	30 %	70 %	1,0000
	GC	31,6 %	68,4 %	
PE.1.4	GE	30 %	70 %	1,0000
	GC	26,3 %	73,7 %	
PE.2.1	GE	20 %	80 %	0,1760
	GC	42,1 %	57,9 %	
PE.2.2	GE	50 %	50 %	0,7512
	GC	42,1 %	57,9 %	
PE.2.3	GE	65 %	35 %	0,0083
	GC	100 %	0 %	
PE.3	GE	50 %	50 %	0,0407
	GC	84,2 %	15,8 %	
PE.4	GE	40 %	60 %	0,7411
	GC	32,2 %	68,4 %	
PE.5	GE	25 %	75 %	1,0000
	GC	21,1 %	78,9 %	
PE.6	GE	40 %	60 %	1,0000
	GC	42,1 %	57,9 %	
PE.7	GE	40 %	60 %	0,0079
	GC	84,2 %	15,8 %	
PE.8	GE	20 %	80 %	0,0012
	GC	73,7 %	26,3 %	
PE.9.1	GE	40 %	60 %	0,5006
	GC	26,3 %	73,7 %	
PE.9.2	GE	65 %	35 %	0,3406
	GC	47,4 %	52,6 %	

Tabla VI - 75. Comparativa del grado de éxito entre el grupo experimental (N=20) y el grupo de control (N=19) en el ciclo I-2.

Destaca, por tanto, la mayor facilidad con la que los alumnos del grupo experimental realizan los problemas de comparación cuantitativa (PE.3 y PE.7), tanto en proporcionalidad simple como en compuesta. En los problemas de valor perdido de la prueba escrita (PE.4, PE.5, PE.9.1 y PE.9.2), tradicionalmente abordados en la enseñanza, los resultados del grupo experimental y del grupo de control no son significativamente diferentes. De hecho, se obtiene un resultado prácticamente idéntico en los problemas de proporcionalidad simple inversa y proporcionalidad compuesta (PE.4 y PE.5), y ligeramente superiores a favor del grupo de control en los problemas de valor perdido relacionados con aumentos y disminuciones porcentuales (PE.9.1 y PE.9.2).

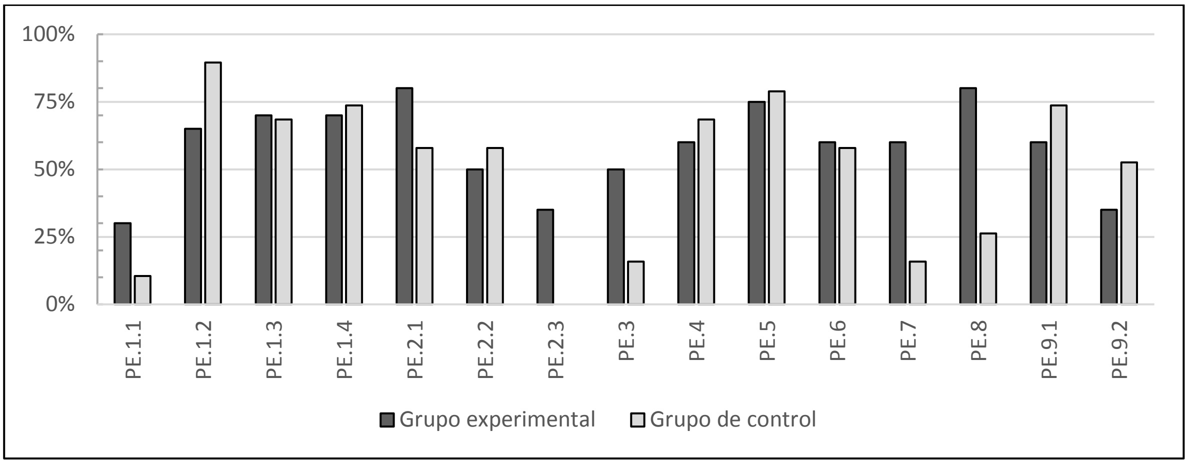


Figura VI - 1. Gráfico comparativo con los porcentajes de respuestas correctas en la prueba escrita en entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo I-2).

En resumen, los datos arrojan diferencias significativas a favor del grupo experimental en ítems correspondientes a cuatro de los seis focos de investigación: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad (Foco 1); Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Foco 3); Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta (Foco 4); Repartos proporcionales (Foco 5). Y no se encuentran diferencias significativas en ningún ítem correspondiente a los otros dos focos de interés: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa (Foco 2); Interpretación del porcentaje y problemas asociados (Foco 6).

En la prueba escrita de la propuesta para 2º de ESO solo aparece el problema de respuesta múltiple PE.2.1 relacionado con el Foco 2 ya que este foco se evalúa especialmente en la prueba escrita de 1º de ESO. Aunque no se observan diferencias estadísticamente significativas al nivel de confianza exigido, destacamos que el porcentaje de respuestas correctas en el grupo experimental para este problema (80 %) es mayor que el obtenido por el grupo de control (57,9 %).

VI.3.2.2. Análisis comparativo según las categorías específicas

Recordamos que el análisis según las categorías específicas se hace sobre las respuestas incorrectas (categoría I) y correctas (categoría C) del análisis general. De forma que las frecuencias, absolutas y relativas, presentadas en las siguientes tablas no suman las correspondientes al total de alumnos. Para comparar de forma visual el uso de diferentes estrategias de resolución y argumentos empleados por los alumnos, en los gráficos estadísticos se presentan las frecuencias relativas respecto al total de respuestas consideradas en este análisis específico y no sobre el total de alumnos.

Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad.

En la Tabla VI - 76 y en la Figura VI - 2 se presentan las frecuencias en las que aparecen los diferentes tipos de argumentos empleados por los alumnos para justificar la existencia de relaciones proporcionales, y en su caso el tipo, en las cuatro situaciones presentadas en el ejercicio PE.1.

Destacamos algunos hechos que podemos observar a partir de este análisis comparativo:

- A pesar de no tratarse de diferencias significativas debido al tamaño de la muestra, se detecta un mayor porcentaje de respuestas no argumentadas en el grupo experimental que en el grupo de control, a diferencia de lo que ocurría en el ciclo II-1. Las respuestas no argumentadas en el grupo experimental representan entre el 25 % y el 30 % del total de los alumnos en cada ítem, porcentajes similares a los obtenidos en el ciclo II-1. Mientras que en el grupo de control la categoría D0 contiene entre un 10,5 % y un 15,8 % de las respuestas.
- Se observa un elevado uso de las respuestas de tipo cualitativo por aumentos y disminuciones (D7) en las respuestas del grupo de control. Estos argumentos incorrectos para caracterizar las respuestas son empleados por más de la mitad de los alumnos en los ítems PE.1.1, PE.1.3 y PE.1.4. Solo en el ítem PE.1.2, que presenta una relación creciente pero no determinable por una expresión analítica concreta, los alumnos del grupo de control utilizan respuestas categorizadas en D8 en las que utilizan argumentos del tipo “no hay ninguna relación entre las magnitudes”.

			D0	D2	D6	D7	D8
PE.1.1	**GE**	N.º de respuestas	6	7	0	2	1
		Porcentaje	30 %	35 %	-	10 %	5 %
	GC	N.º de respuestas	2	0	1	14	1
		Porcentaje	10,5 %	-	5,3 %	73,7 %	5,3 %
PE.1.2	**GE**	N.º de respuestas	5	8	0	2	2
		Porcentaje	25 %	40 %	-	10 %	10 %
	GC	N.º de respuestas	3	1	1	1	12
		Porcentaje	15,8 %	5,3 %	5,3 %	5,3 %	63,2 %
PE.1.3	**GE**	N.º de respuestas	6	9	0	2	0
		Porcentaje	30 %	45 %	-	10 %	-
	GC	N.º de respuestas	3	3	1	11	0
		Porcentaje	15,8 %	15,8 %	5,3 %	57,9 %	-
PE.1.4	**GE**	N.º de respuestas	6	9	0	1	0
		Porcentaje	30 %	45 %	-	5 %	-
	GC	N.º de respuestas	3	1	1	10	3
		Porcentaje	15,8 %	5,3 %	5,3 %	52,6 %	15,8 %

Tabla VI - 76. Comparativa de los tipos de argumentos empleados para justificar las relaciones de proporcionalidad entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema PE.1 (Ciclo I-2).

- El tipo de argumento mayoritariamente empleado por los alumnos del grupo experimental ha sido clasificado en la categoría D2, es decir, utilizan argumentos basados en condiciones de regularidad y constantes de proporcionalidad. Por tanto, aunque las tasas de éxito en los ítems PE.1.3 y PE.1.4 en los que aparecían relaciones proporcionales son prácticamente iguales en ambos grupos, los argumentos utilizados por los alumnos del grupo experimental se basan en caracterizaciones correctas de la relación de proporcionalidad.
- El uso indiscriminado de los argumentos por aumentos y disminuciones hace que el porcentaje de éxito en PE.1.1 (relación afín decreciente, $y + x = cte$) sea menor en el grupo de control que en el grupo experimental. De hecho, en el grupo de control el 73,7 % de los alumnos contesta que hay una relación de proporcionalidad inversa argumentando que, a mayor cantidad de una magnitud, le corresponde menor cantidad de la otra.
- La búsqueda de condiciones de regularidad para realizar argumentaciones (D2) parece efectiva en el grupo experimental en todos los ítems excepto en el ítem PE.1.1. Este hecho podría deberse al mismo efecto observado en el problema TC4.2 de la propuesta (ver Imagen VI - 5 y discusión alrededor de las producciones de los alumnos) por el que los alumnos detectan condiciones de regularidad en relaciones afines debido a la tasa de variación constante e identifican estas relaciones como de proporcionalidad directa. Aunque no presentan argumentos, varios alumnos del grupo experimental alegan una relación directa en PE.1.1, hecho que no se observa en el grupo de control.

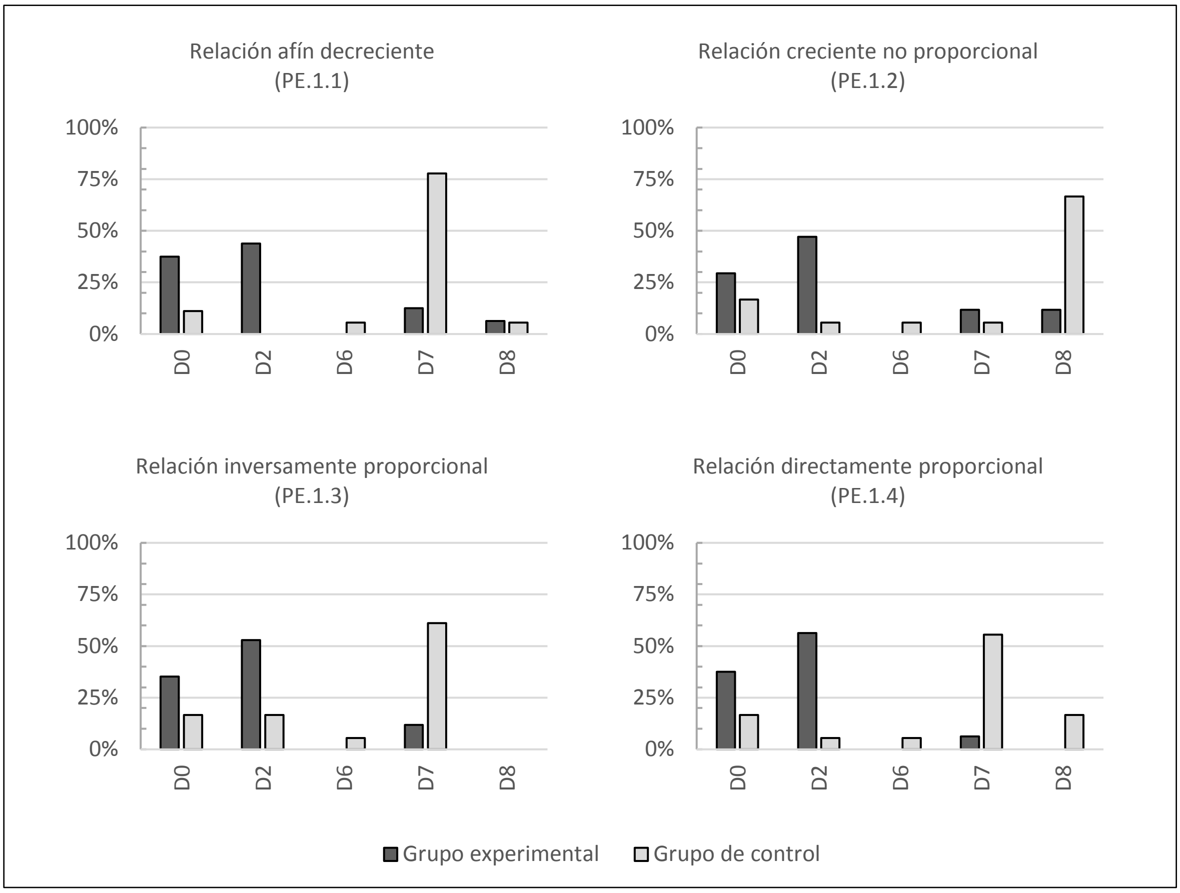


Figura VI - 2. Distribución de los diferentes argumentos empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la detección de relaciones proporcionales en PE.1 (Ciclo I-2).

En los problemas de respuesta múltiple, PE.2.2 y PE.2.3, no se solicitaba a los alumnos que argumentasen sus respuestas. A partir de un contexto numérico que relaciona dos cantidades de magnitudes proporcionales (en PE.2.2 relación directa y en PE.2.3 inversa), los alumnos debían elegir entre cuatro posibles respuestas aquella que presentaba la constante de proporcionalidad y su interpretación de forma correcta. En la Tabla VI - 77 se presenta el porcentaje de respuestas en cada una de las cuatro opciones que se presentaban a los alumnos (las tres incorrectas, I_1, I_2 e I_3, y la correcta, C).

			I_1	I_2	I_3	C
PE.2.2	**GE**	N.º de respuestas	4	0	2	10
		Porcentaje	20 %	-	10 %	50 %
	GC	N.º de respuestas	2	1	2	11
		Porcentaje	10,5 %	5,3 %	10,5 %	57,9 %
PE.2.3	**GE**	N.º de respuestas	6	1	2	7
		Porcentaje	30 %	5 %	10 %	35 %
	GC	N.º de respuestas	12	1	4	0
		Porcentaje	63,2 %	5,3 %	21,1 %	0,0 %

Tabla VI - 77. Comparativa de las respuestas para los problemas de respuesta cerrada PE.2.2 y PE.2.3 entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo I-2).

La principal diferencia en la distribución de las respuestas la encontramos en el ítem PE.2.3 que presentaba una situación de proporcionalidad inversa. Aunque el fallo mayoritario para los dos grupos ha sido elegir la opción categorizada como I_1 en la que se calculaba una razón entre las cantidades, en el grupo de control esta opción tiene un peso mayor.

Es decir, en este tipo de problema en el que no se pide etiquetar la relación de proporcionalidad, sino que hay que elegir la operación que "tendría sentido" con los datos del problema, parece que el trabajo con las condiciones de regularidad y las constantes de proporcionalidad propicia una mayor tasa de éxito.

A diferencia de lo ocurrido en el ciclo II-1, en el problema PE.6 no se encuentran diferencias significativas entre el grupo de control y el grupo experimental, ni en la corrección de la tarea ni en el tipo de respuestas analizadas. Los alumnos que responden incorrectamente suponen una relación de proporcionalidad compuesta y realizan el problema de valor perdido dando una respuesta formalmente correcta bajo esta suposición. Aunque las estrategias empleadas para resolver este problema de valor perdido en las respuestas incorrectas sí difieren sustancialmente de un grupo a otro, nos centraremos en este aspecto en el análisis de los problemas PE.5 y PE.7 relativos al Foco 4.

Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Como hemos dicho, la prueba escrita en 2º de ESO se centra esencialmente en evaluar los aspectos novedosos de la propuesta introducidos en dicho curso. Aunque no se introducen muchos ítems que evalúen el foco 2 "Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa", los conceptos relacionados con él están presentes en los focos 4, 5 y 6. Analizamos en esta breve sección las respuestas dadas por el grupo experimental y el grupo de control al problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad simple directa, PE.2.1. En este problema no se solicitaba a los alumnos que justificasen la respuesta, sino que debían marcar qué opción pensaban que era la correcta de entre las cuatro propuestas. En la Tabla VI - 78 se observan las respuestas dadas por los alumnos de ambos grupos. Vemos que la opción correcta es la mayoritaria en ambos grupos, pero que el porcentaje de respuestas correctas es mayor en el grupo experimental que en el grupo de control. También es mayor el porcentaje obtenido por el grupo experimental en este ciclo que en el ciclo II-1.

			$S_1 > S_2$	$S_1 < S_2$	$S_1 = S_2$	$S_1 ¿? S_2$
PE.2.1	**GE**	N.º de respuestas	0	0	2	16
		Porcentaje	-	-	10 %	80 %
	GC	N.º de respuestas	4	2	1	11
		Porcentaje	21,1 %	10,5 %	5,3 %	57,9 %

Tabla VI - 78. Comparativa de respuestas entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cualitativa PE.2.1 (Ciclo I-2).

Mientras que las dos únicas respuestas incorrectas del grupo experimental se concentran en la opción $S_1 = S_2$, seis de las siete respuestas erróneas del grupo de control se concentran en las dos opciones del tipo $S_i > S_j$, que pueden estar relacionadas con argumentos en términos absolutos, en vez de relativos, teniendo en cuenta solo una de las magnitudes relacionadas.

Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

Analizando las estrategias de resolución utilizadas por el grupo de control en el problema de comparación cuantitativa (PE.3) y en el de valor perdido (PE.4) en situaciones de proporcionalidad inversa (ver Tabla VI - 79, Tabla VI - 80 y Figura VI - 3) se pueden extraer algunas conclusiones sobre la enseñanza recibida por los alumnos de este grupo.

			C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
PE.3	**GE**	N.º de respuestas	1	9	0	0	0	0	6
		Porcentaje	10 %	45 %	-	-	-	-	30 %
	GC	N.º de respuestas	5	3	0	1	0	2	3
		Porcentaje	26,3 %	15,8 %	-	5,3 %	-	10,5 %	15,8 %

Tabla VI - 79. Comparativa de las estrategias de resolución empleadas en el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo I-2).

Por un lado, la baja tasa de éxito y la falta de una estrategia mayoritaria en el problema PE.3 hacen pensar que no se le prestó especial atención a este tipo de problemas durante la instrucción. Pocos alumnos son capaces de construir significativamente las constantes de proporcionalidad necesarias para realizar la comparación en el problema PE.3. De hecho, los tres únicos alumnos que lo hacen provienen del grupo experimental del ciclo II-1. Por ejemplo, en la Imagen VI - 45, vemos la producción de uno de los alumnos del grupo de control que resuelve bien el problema PE.3. Se trata del alumno D.1.2 del grupo experimental del ciclo II-1. En su producción se observa que identifica condiciones de regularidad para etiquetar como inversa la situación y usa una estrategia escalar apoyada en una representación tabular para construir la constante de proporcionalidad en cada situación e interpretarla como “semanas regaría un geranio”.

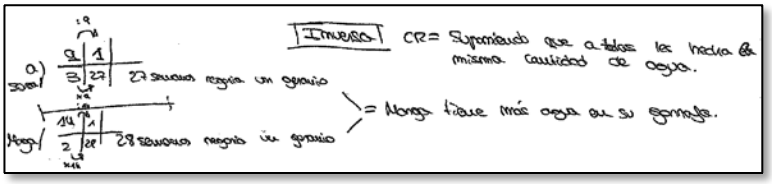


Imagen VI - 45. Producción de un alumno del grupo de control (D1.2 del ciclo II-1) para el problema PE.3 (Ciclo I-2).

La instrucción recibida por el grupo de control, por tanto, no parece favorecer la aparición de estrategias que permitan resolver este tipo de problemas salvo en casos concretos de alumnos, que como hemos dicho, provienen del grupo experimental de 1º de ESO. Aparecen en el grupo de control más respuestas no justificadas o que dicen que el problema no es de proporcionalidad y no se puede resolver que en el grupo experimental (categoría C0) y aparecen respuestas que utilizan argumentos aditivos erróneos (categoría C5) que no tienen incidencia en el grupo experimental. Sí encontramos en ambos grupos respuestas que suponen una relación de proporcionalidad directa y resuelven el problema realizando cálculo de razones entre los datos proporcionados en el enunciado (C6). Esta categoría tiene una mayor incidencia en el grupo experimental. Este hecho puede deberse al fenómeno observado durante la propuesta en el grupo experimental por el que los alumnos, al detectar condiciones de regularidad entre la magnitud producto y otra de las magnitudes, suponen una relación directa entre las cantidades que aparecen en el enunciado. La menor presencia de esta categoría en las respuestas del grupo de control también podría deberse a una menor capacidad de establecer significados en las operaciones entre cantidades de magnitud lo que también bloquearía el cálculo de razones para poder responder al problema.

			VPi0	VPi1	VPi2	VPi3	VPi4	VPi5	VPi6	VPi7	VPi8
PE.4	GE	N.º de respuestas	2	0	0	12	0	0	1	0	2
		Porcentaje	10 %	-	-	60 %	-	-	5 %	-	10 %
	GC	N.º de respuestas	0	0	0	0	16	1	0	0	0
		Porcentaje	-	-	-	-	84,2 %	5,3 %	-	-	-

Tabla VI - 80. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido PE.4 (Ciclo I-2).

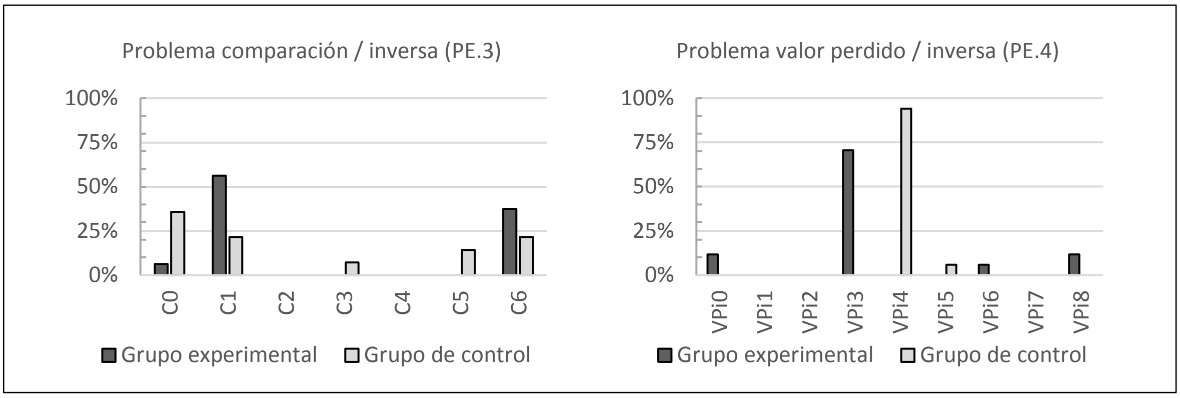


Figura VI - 3. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa PE.3 y PE.4 (Ciclo I-2).

En el problema PE.4 se observan claramente las diferencias en la instrucción entre el grupo de control y el grupo experimental. Mientras que en el grupo experimental la estrategia mayoritaria es la funcional a través del cálculo de la constante de proporcionalidad (VPi3), en el grupo de control la estrategia predominante es la de proporciones (VPi4). En la Imagen VI - 46 se observa una producción de un alumno del grupo de control para este problema. Los alumnos resumen en forma tabular los datos del problema, etiquetando como 'x' el dato desconocido, identifican el tipo de relación proporcional entre las magnitudes (la mayor parte sin dejar constancia de los argumentos utilizados) y presentan una proporción igualando una de las razones internas la inversa de la otra. Después se despeja la incógnita utilizando un producto en cruz como paso intermedio.

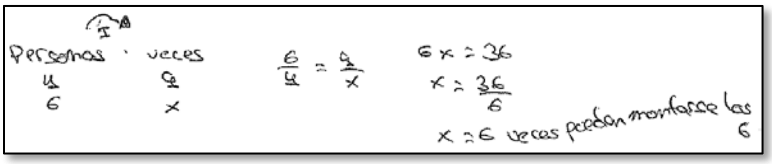


Imagen VI - 46. Ejemplo de producción prototípica de los alumnos del grupo de control para el problema PE.3 (Ciclo I-2).

En resumen, en el grupo experimental se usan de forma extendida las estrategias funcionales basadas en el cálculo de la constante de proporcionalidad para resolver tanto el problema de comparación cuantitativa como el de valor perdido. Mientras que, en el grupo de control, la instrucción basada en la aplicación mecánica del método de proporciones en problemas de valor perdido bloquea la resolución del problema de comparación. Por otra parte, las falsas suposiciones de proporcionalidad directa tienen una frecuencia ligeramente superior en el grupo experimental que en el grupo de control, probablemente debido al uso de condiciones de regularidad para identificar la relación inversa.

Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta.

En la Tabla VI - 81, en la Tabla VI - 83 y en la Figura VI - 4 resumimos los resultados de las categorías específicas para los problemas PE.5 y PE.7. En estos problemas encontramos unos resultados muy similares a los observados para los problemas de proporcionalidad simple inversa.

			VPC2	VPC3	VPC4	VPC6	VPC11
PE.5	**GE**	N.º de respuestas	12	3	1	0	1
		Porcentaje	60 %	15 %	5 %	-	5 %
	GC	N.º de respuestas	1	0	0	16	0
		Porcentaje	5,3 %	-	-	84,2 %	-

Tabla VI - 81. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo I-2).

En el grupo de control la resolución del problema de valor perdido es prácticamente idéntica en todos los alumnos, siguiendo una estrategia de proporción compuesta (VPC6). Todos los alumnos aplican la estrategia siguiendo los mismo pasos (Imagen VI - 47): resumir tabularmente los datos, identificar el dato que se solicita en el enunciado y otorgarle la letra 'x' para identificarlo, marcar la relación de proporcionalidad entre la variable dependiente y las independientes, establecer una proporción igualando la razón interna de la variable independiente al producto de las razones internas de las variables independientes, realizar el producto de dichas razones y despejar la incógnita usando como paso intermedio una multiplicación en cruz.

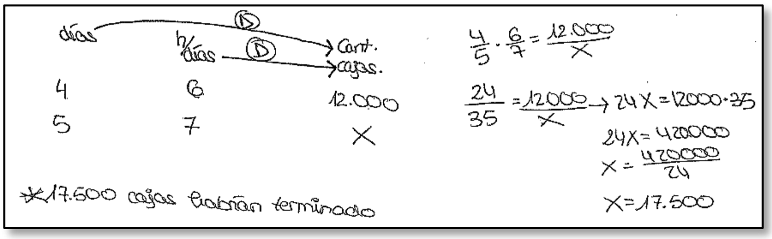


Imagen VI - 47. Ejemplo de aplicación del método de proporciones (VPC6) en un alumno del grupo de control (Ciclo II-2).

El único caso clasificado como de uso de una estrategia de amalgamación VPC2 en el grupo de control amalgama por producto las variables independientes y después utiliza el método de proporciones para una situación de proporcionalidad simple directa (VPd5) para terminar el problema.

Por otro lado, los alumnos del grupo experimental usan estrategias aritméticas buscando el significado de las operaciones realizadas (VPC2, VPC3 y VPC4), salvo un alumno que usa la estrategia errónea VPC11 por el olvido de una magnitud.

			CC0	CC1	CC2	CC3	CC4	CC5	CC6
PE.7	GE	N.º de respuestas	0	16	0	0	0	0	0
		Porcentaje	-	80 %	-	-	-	-	-
	GC	N.º de respuestas	5	0	6	0	0	0	3
		Porcentaje	26,3 %	-	31,6 %	-	-	-	15,8 %

Tabla VI - 82. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de comparación cuantitativa de proporcionalidad compuesta PE.7 (Ciclo I-2).

En el problema de comparación cuantitativa PE.7 el comportamiento observado es similar al observado en el problema PE.3. Los alumnos del grupo experimental usan unánimemente una estrategia de amalgamación para reducir el problema a uno con dos magnitudes en el que aplican una estrategia funcional para calcular la constante de proporcionalidad y comparar ambas situaciones. Los alumnos del grupo de control, probablemente sin instrucción previa en este tipo de problemas, tienen una tasa de éxito mucho menor que se debe a que: bien dicen que el problema no es de proporcionalidad y no se puede resolver (CC0), omiten una de las magnitudes (CC6) diciendo que tiene más agua aquella piscina en la que las mangueras han estado trabajando durante más tiempo, o bien utilizan una estrategia de cálculo de la constante de proporcionalidad pero identifican mal la estructura funcional. Estas últimas respuestas que identifican una estructura cociente $\mathbb{p} = (1, -1, -1)$ en vez de la estructura producto correcta $\mathbb{p} = (1,1,1)$, se han clasificado en CC2. Las tres respuestas correctas no interpretan la constante de proporcionalidad y la calculan directamente indicando el producto triple de los datos para cada situación, por lo que se han clasificado en CC2.

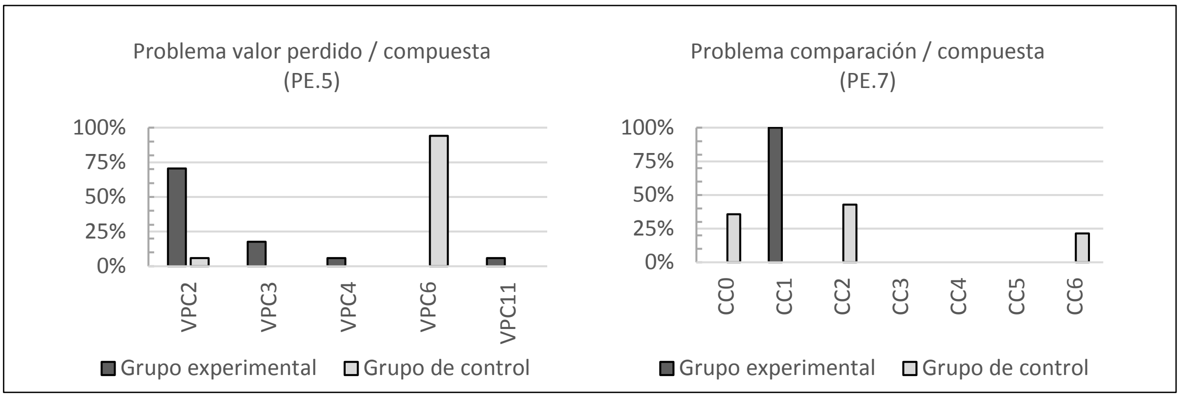


Figura VI - 4. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta PE.5 y PE.7 (Ciclo I-2).

En resumen, parece que como en el caso de la proporcionalidad simple inversa, el uso indiscriminado de la estrategia de proporciones en el grupo de control dificulta la correcta resolución del problema de comparación cuantitativa. Además, pese a ser una estrategia que parece aplicarse de forma mecánica y acrítica, no se observan mejores resultados que en el grupo experimental en el problema de valor perdido.

Repartos proporcionales.

En la Tabla VI - 84 y en la Figura VI - 5 resumimos los resultados en las categorías específicas en el grupo experimental y el grupo de control en el problema de reparto directamente proporcional PE.8. Recordamos, que en este problema hemos encontrado diferencias significativas en la tasa de éxito a favor del grupo experimental.

			RP0	RP1	RP2	RP3	RP4
PE.8	GE	N.º de respuestas	0	17	0	0	0
		Porcentaje	-	85 %	-	-	-
	GC	N.º de respuestas	3	10	1	0	0
		Porcentaje	15,8 %	52,6 %	5,3 %	-	-

Tabla VI - 83. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de reparto directamente proporcional PE.8 (Ciclo I-2).

Los resultados de la Tabla VI - 83 muestran que en el grupo experimental se ha utilizado unánimemente un acercamiento aritmético parte-todo (RP1), por el cual se calcula la constante de proporcionalidad del problema. Esta estrategia (ver, por ejemplo, Imagen VI - 48, arriba), es también la mayoritaria en el grupo de control, pero con una incidencia menor (Figura VI - 5). Aparecen varias respuestas clasificadas en RP0 en las que generalmente los alumnos indican que no se puede resolver el problema porque faltan datos (Imagen VI - 48, abajo derecha). Y una resolución algebraica (Imagen VI - 48, abajo izquierda) que se ha clasificado como RP2, pese a la ausencia de explicaciones, ya que coincide con la parte final de este tipo de estrategia (ver sección II.2.4.7).

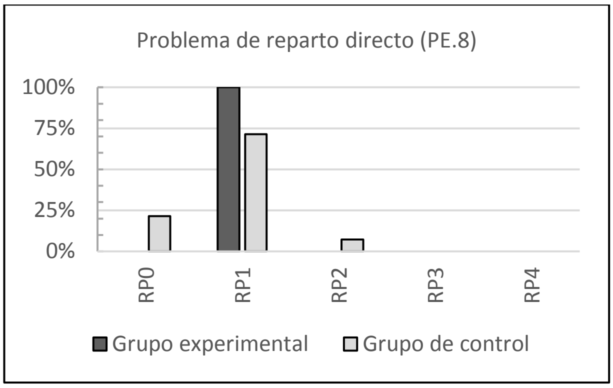


Figura VI - 5. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución del problema de repartos proporcionales PE.8 (Ciclo I-2).

Las diferentes estrategias observadas en el grupo de control y el alto porcentaje de respuestas incorrectas hacen pensar en que hubo un escaso trabajo sobre este tipo de problemas en la instrucción. Sin embargo, se trata de un problema de valor perdido de proporcionalidad simple directa por lo que parece que las herramientas suministradas al grupo de control son poco versátiles para trabajar problemas de estructuras similares en contextos diferentes. Además, el análisis cualitativo apunta hacia algunas dificultades relativas a la estructura parte-parte-todo. Por ejemplo, en dos de las producciones en las que se alega que faltan datos (Imagen VI - 48, abajo derecha) se intenta completar una tabla similar a la de los problemas de proporcionalidad simple, sin embargo, al no encontrar los datos correspondientes a las dos partes, los alumnos no pueden aplicar el método de proporciones para hallar el valor perdido, ya que les faltan dos valores.

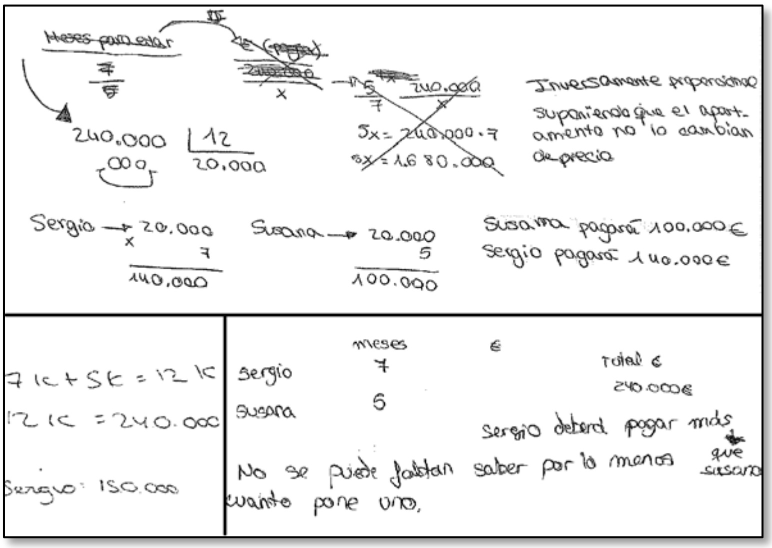


Imagen VI - 48. Algunas producciones de alumnos del grupo de control en el problema de reparto directamente proporcional PE.8 (Ciclo I-2).

Otra dificultad que hemos observado relativa a la estructura parte-parte-todo en el grupo de control es la que se observa en la Imagen VI - 48, arriba. El alumno identifica inicialmente una relación inversa al centrarse en las magnitudes que constituyen las partes y en la estructura aditiva (que es una relación afín decreciente) por lo que parece razonar que, si a un individuo le toca pagar más por el piso, al otro le tocará pagar menos.

Concepto de porcentaje y problemas asociados.

En la Tabla VI - 84 y en la Figura VI - 6 se resumen los resultados del análisis de las categorías específicas para los dos problemas de porcentajes PE.9.1 y PE.9.2 (problemas de Tipo I y Tipo III, respectivamente, enunciados sobre un mismo contexto de aumento porcentual).

			VPp3	VPp4	VPp5	VPp6	VPp7	VPp8	VPp9
PE.9.1	**GE**	N.º de respuestas	11	0	0	1	3	1	0
		Porcentaje	55 %	-	-	5 %	15 %	5 %	-
	GC	N.º de respuestas	0	0	7	0	10	0	0
		Porcentaje	-	-	36,8 %	-	52,6 %	-	-
PE.9.2	**GE**	N.º de respuestas	7	1	0	1	0	0	5
		Porcentaje	35 %	5 %	-	5 %	-	-	25 %
	GC	N.º de respuestas	0	0	5	0	6	0	4
		Porcentaje	-	-	26,3 %	-	31,6 %	-	21,1 %

Tabla VI - 84. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para problemas aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo I-2).

Vemos que en el grupo experimental la estrategia mayoritaria en ambos problemas es VPp3 (estrategia funcional basada en el cálculo de la razón externa asociada a la situación del porcentaje que permite terminar el problema de valor perdido mediante una multiplicación). En el grupo de control, las estrategias mayoritarias son VPp5 y VPp7 en ambos problemas, proporción y uso de una fórmula respectivamente. En realidad, las producciones del grupo de control categorizadas en VPp5 y en VPp7 tienen una gran similitud, la diferencia es que las que se han incluido en VPp5 explicitan la proporción, siguiendo el mismo esquema comentado anteriormente, mientras que las de VPp7 presentan la incógnita despejada después de realizar la representación tabular e identificar la incógnita. Parece, por tanto, que como en la proporcionalidad inversa y la compuesta, el método institucionalizado es el de proporciones pero que, en los problemas de proporcionalidad directa los alumnos han memorizado los pasos que llevan a obtener la incógnita.

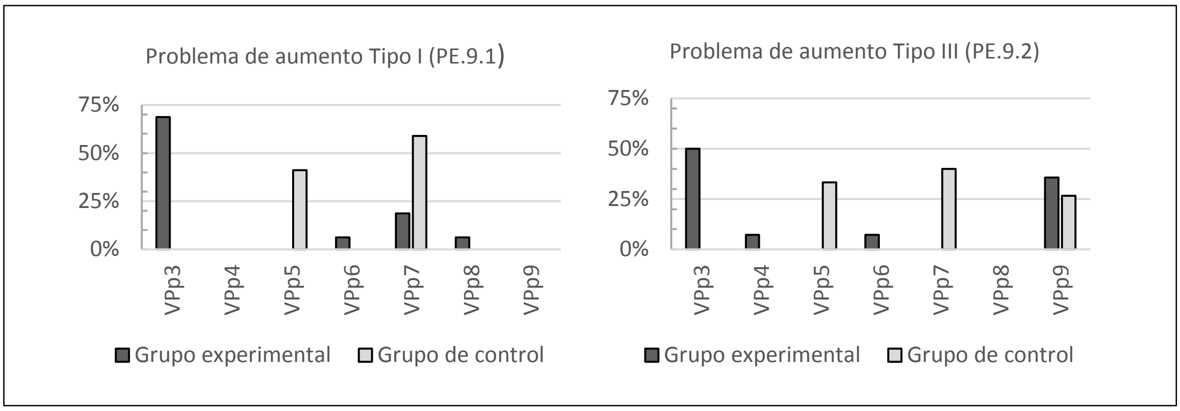


Figura VI - 6. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas de porcentajes PE.9.1 y PE.9.2 (Ciclo I-2).

En el problema PE.9.2 de Tipo III en el que hay que calcular la cantidad inicial a partir de la cantidad final y el aumento, y que supone una mayor dificultad en ambos grupos, aparecen casi con el mismo peso producciones categorizadas en VPp9 por utilizar argumentos aditivos erróneos. Las respuestas del grupo de control en esta categoría cometen errores totalmente análogos a los descritos para el grupo experimental en este tipo de problemas. Por ejemplo, se disminuye la cantidad final un porcentaje igual al de aumento, o se resta en el problema PE.9.2 el aumento calculado en el problema PE.9.1

VI.3.3. Observador externo

Recogemos los resultados obtenidos para este primer ciclo en 2º de ESO del protocolo que cumplimentó el observador externo en cada una de las sesiones tras visionar las grabaciones. Como adelantamos al principio del capítulo, solo se recogen las fichas correspondientes a los cinco primeros focos de contenido, ya que no pudo completarse la experimentación correspondiente a las sesiones en donde se trabajaba el sexto foco "Porcentaje y problemas asociados". Es decir, presentamos los resultados obtenidos en las fichas de observación correspondientes a las ocho primeras sesiones de clase.

VI.3.3.1. Tratamiento de los contenidos y metodología

En la Tabla VI - 85 se recogen las respuestas del observador externo para este primer bloque. En la tabla se recoge la explicación del significado del código asignado a cada categoría y que ya se explicitó en el Capítulo III (ver sección III.3.7.4. Grabación de las sesiones y observadores externos).

El observador externo valora como completamente adecuados todos los elementos curriculares planteados en la propuesta y la viabilidad de su tratamiento. Sin embargo, se señala que el tiempo dedicado a los contenidos planteados para las sesiones 5 y 8 es insuficiente.

	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.2	1.3
Sesión 1	5	5	5	5	SÍ
Sesión 2	5	5	5	5	SÍ
Sesión 3	5	5	5	5	SÍ
Sesión 4	5	5	5	5	SÍ
Sesión 5	5	5	5	5	NO
Sesión 6	5	5	5	5	SÍ
Sesión 7	5	5	5	5	SÍ
Sesión 8	5	5	5	5	NO

1.1 Grado de adecuación de la sesión de clase al diseño teórico.
- **1.1.1** Objetivos. (1-5)
- **1.1.2** Contenidos. (1-5)
- **1.1.3** Metodología. (1-5)

1.2 Viabilidad del tratamiento de los contenidos. (1-5)
1.3 Ajuste de la sesión al tiempo previsto. (SÍ/NO)

Tabla VI - 85. Respuestas del observador externo en el primer bloque de preguntas (Ciclo I-2).

Además, el observador externo realizó una serie de comentarios adicionales en los campos de respuesta abierta. Concretamente:

- Sesión 2: El observador apunta que quizá no sea necesario repetir los mismos conceptos en diferentes momentos de la sesión como hace el profesor-investigador, y solicita una mayor participación de los alumnos en la puesta en común.
- Sesión 8: Se incide en la falta de tiempo para una puesta en común adecuada.

VI.3.3.2. Actuación del profesor-investigador

En la Tabla VI - 86 se recogen las respuestas del observador externo para el segundo bloque de preguntas que indagan en la percepción del observador externo sobre la actuación del profesor-investigador. Se comprueba que el observador externo valora como completamente adecuados la mayoría de los indicadores sobre la actitud y el comportamiento del profesor-investigador (diecinueve valoraciones de 5, dos valoraciones de 4, una valoración de 3 y dos valoraciones en blanco). La calidad y claridad expositiva en las intervenciones se valora siempre con la máxima puntuación, es decir, como excelentes. Los ítems relativos a la participación en el proceso docente se valoran en su mayoría como positivos salvo la identificación de dificultades y el reconocimiento de avances durante las sesiones 3 y 4, que se valoran peor, y diferentes ítems a partir de la sesión 5 que se dejan en blanco.

	2.1.1	2.1.2	2.1.3	2.2.1	2.2.2	2.2.3	2.2.4	2.3.1	2.3.2	2.4
Sesión 1	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 2	5	4	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 3	5	5	5	SÍ	SÍ	NO	SÍ	5	5	Ad
Sesión 4	5	3	5	SÍ	NO	NO	SÍ	5	5	Ad
Sesión 5	5	5	5	SÍ	-	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 6	5	4	5	SÍ	-	SÍ	-	5	5	Ad
Sesión 7	5	-	-	-	-	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 8	5	5	5	-	-	SÍ	SÍ	5	5	Ad

2.1 Actitud y comportamiento. (1-5)
2.1.1 Actitud del profesor.
2.1.2 Interés por el aprendizaje de los alumnos.
2.1.3 Atención a las necesidades de los alumnos.
2.2 Participación en el proceso docente.
2.2.1 Fomenta participación. (SÍ/NO)
2.2.2 Reconoce avances y progresos. (SÍ/NO)
2.2.3 Identifica dificultades. (SÍ/NO)
2.2.4 Promueve la reflexión. (SÍ/NO)
2.3 Calidad y claridad expositiva en las intervenciones.
2.3.1 Calidad expositiva. (1-5)
2.3.2 Claridad expositiva. (1-5)
2.4 Tiempo intervención. (Escaso/Adecuado/Excesivo)

Tabla VI - 86. Respuestas del observador externo en el segundo bloque de preguntas (Ciclo I-2).

Además, el observador externo realizó otras consideraciones en los campos de respuesta abierta que recogemos a continuación:

- Sesión 3: El observador externo indica actuaciones específicas del profesor-investigador durante la sesión que fomentan la participación y promueven la reflexión.
- Sesión 4: El observador externo especifica que la respuesta negativa en los ítems 2.2.2 y 2.2.3 se debe a que “no es posible determinar si hay avances”. Además, remarca que el profesor-investigador busca que los alumnos hagan conexiones entre los conceptos involucrados.
- Sesión 5: El observador externo apunta que el tiempo que deja el profesor-investigador tras plantear una pregunta en las puestas en común es insuficiente para que los alumnos respondan.
- Sesiones 6 y 7: El observador externo identifica acciones concretas del profesor-investigador que demuestran que éste identifica dificultades de los alumnos y toma decisiones durante la sesión para intentar resolverlas.
- Sesión 8: El observador externo identifica actuaciones del profesor-investigador que buscan conectar los diferentes conceptos que aparecen durante la propuesta y pone de relieve algunas actuaciones del profesor-investigador para captar la atención de los alumnos. Por otro lado, solicita una mayor intervención del profesor-investigador durante el trabajo en parejas de los alumnos para ayudar a los mismos a encontrar un camino de resolución. Al observador externo le genera dudas la forma en la que se han institucionalizado los repartos inversamente proporcionales y no encuentra adecuado hacer alusiones al lenguaje explícito del texto del problema para asociar repartos inversos a una compensación multiplicativa.

VI.3.3.3. Actuación de los alumnos

En la Tabla VI - 87 se recogen las respuestas dadas por el observador externo en los indicadores centrados en la actuación de los alumnos. En general, al igual que ocurría en el ciclo II-1, la observación pone de manifiesto que los alumnos trabajan, realizan las tareas, atienden a las explicaciones y participan para aclarar dudas (en vez de, por ejemplo, para ampliar contenidos). La actitud general es positiva, aunque con algunas incidencias en determinadas sesiones. Además, en las sesiones 4, 6, 7 y 8, el observador externo no tiene suficiente información para constatar si los alumnos han comprendido o no los conceptos que se abordan.

	3.1	3.2	3.3.1	3.3.2	3.3.3	3.4
Sesión 1	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 2	Realizan tareas.	D	SÍ	-	SÍ	+
Sesión 3	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 4	Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+
Sesión 5	Realizan tareas.	-	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 6	Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	
Sesión 7	Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+
Sesión 8	Pasividad. Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+

3.1 Tipo de participación.
3.2 Tipo de preguntas de los alumnos.
D: aclarar dudas
C: ampliar contenidos.
3.3 Atención y asimilación. (SÍ/NO)
3.3.1 Atienden a las intervenciones.
3.3.2 Comprenden las intervenciones.
3.3.3 Comprenden los contenidos.
3.4 Actitud: Positiva (+), Negativa (–) Neutra (+/-)

Tabla VI - 87. Respuestas del observador externo en el tercer bloque de preguntas (Ciclo I-2).

Otras consideraciones sobre la actuación de los alumnos que realizó el observador externo en los campos de respuesta abierta fueron las siguientes:

- Sesión 2: El observador externo remarca que hay un grupo de cuatro alumnos que se distraen con mucha facilidad.
- Sesión 3: El observador externo apunta hacia una baja participación de los alumnos pese a las invitaciones a participar realizadas por el profesor-investigador.
- Sesión 6: Aunque el observador externo deja en blanco el indicador sobre la actitud predominante de los alumnos, remarca que hay momentos de la sesión en los que se hace necesario llamar la atención de los alumnos.
- Sesión 8: El observador externo indica diferentes momentos de la sesión en los que los alumnos no atienden a las explicaciones del profesor y están distraídos. Además, el observador externo percibe que la dificultad que supone alguna de las tareas de la sesión provoca cierto nerviosismo entre los alumnos que no quieren dar una respuesta equivocada a los problemas.

VI.3.3.4. Interacciones profesor-alumno

En la Tabla VI - 88 se recogen las respuestas dadas por el observador externo a los indicadores para analizar las interacciones entre el profesor-investigador y los alumnos. El observador externo cuantifica como frecuentes las interacciones entre el profesor-investigador y los alumnos en la mayoría de las sesiones. En algunas de las sesiones considera estas intervenciones constantes. Las intervenciones se producen mayoritariamente con el grupo clase y con las parejas de alumnos, pero el observador externo no deja constancia de si dichas intervenciones son a instancia del profesor o a instancia de los alumnos. Salvo en las primeras sesiones en las que, según el observador externo, se produce un diálogo fluido, las interacciones son calificadas como unidireccionales.

	4.1	4.2.1	4.2.2	4.2.3
Sesión 1	Cte.	GC / E	-	U/D
Sesión 2	Cte.	GC / E	-	U/D
Sesión 3	Fre.	E	-	U
Sesión 4	Fre.	GC / E	-	U
Sesión 5	Fre.	GC / E	-	U
Sesión 6	Fre.	GC / E	-	U
Sesión 7	Fre.	GC / E	-	U
Sesión 8	Cte.	GC / E	-	U

4.1 Frecuencia de las interacciones:
Nunca (Nun.)
A menudo (Fre.)
Constantemente (Cte.)
4.2 Tipo de interacciones
4.2.1 Dirigidas al grupo clase (GC), a los equipos de alumnos (E) o alumnos particulares (I).
4.2.2 Se producen a instancia del profesor (P) o de algún alumno (A).
4.2.3 La comunicación es unidireccional (U) o se establece un diálogo fluido (D).

Tabla VI - 88. Respuestas del observador externo en el cuarto bloque de preguntas (Ciclo I-2).

El observador externo no realiza comentarios adicionales en los campos de respuesta abierta de este bloque de preguntas. Sin embargo, en otros campos de respuestas abiertas sí solicita una mayor intervención a instancias del profesor-investigador en los momentos de trabajo de los alumnos.

VI.3.3.5. Otras incidencias y comentarios generales sobre la sesión

Al final del protocolo de observación, en cada sesión, se incluía un campo de respuesta abierta para que el observador externo anotara cuestiones o reflexiones al margen de los cuatro bloques anteriores. Estos son los comentarios registrados en este ciclo:

- Sesión 5: El observador externo se pregunta por qué al finalizar esta sesión no se envía tarea para casa.
- Sesión 8: El observador externo indica que los alumnos no quieren seguir atendiendo a las indicaciones del profesor una vez ha sonado el timbre que indica el final de clase.

VI.4. Fase de reflexión

En esta sección presentamos una síntesis del proceso de reflexión continuo que se hace a lo largo de todo el ciclo de investigación-acción, tanto de forma personal por el profesor-investigador como de forma colectiva por todo el equipo de investigación. Como en el resto de los ciclos la sección se estructura según las relaciones del triángulo didáctico. Se comienza poniendo el foco en la relación entre el profesor-investigador y el contenido realizando reflexiones sobre el diseño de la propuesta (conclusiones parciales en torno al objetivo de investigación II.1). Se continúa reflexionando sobre la relación entre los alumnos y el contenido, es decir, sobre la comprensión de los alumnos de los diferentes focos de contenidos prioritarios de la propuesta (conclusiones parciales en torno al objetivo de investigación II.2). Y en tercer lugar, reflexionaremos sobre la relación entre el profesor-investigador y los alumnos extrayendo algunas conclusiones relativas a la metodología de aula y de investigación. Para concluir se añaden algunas consideraciones y reflexiones de carácter general.

VI.4.1. Sobre el diseño de la propuesta

De forma similar a lo ocurrido con el diseño de 1º de ESO, atendiendo a la información recogida en las secciones anteriores, el diseño de la propuesta resulta satisfactorio, especialmente desde la sesión 1 hasta la sesión 7. En este caso, en 2º de ESO, en dichas sesiones se trabajan los contenidos relativos a los focos de contenido 1, 2, 3 y 4: detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad, problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa, problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa y problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta. Al igual que en el ciclo II-1, el profesor-investigador valora muy positivamente las situaciones introductorias en esta parte de la propuesta que consiguen hacer emerger los elementos necesario para realizar debates ricos que permiten institucionalizar los contenidos planificados. A la lista anterior, cabría añadir también el problema introductorio para los repartos directamente proporcionales (no así el de los repartos inversos que trataremos posteriormente).

Cabe destacar también que, en este ciclo, según la información recogida en el diario de clases y complementada con las anotaciones del observador externo, la cantidad y la extensión de las fichas de trabajo ha sido mucho más adecuada que en el ciclo II-1, no teniendo que hacer cambios sustanciales de diseño sobre la marcha.

A pesar de la satisfacción general, se hacen ciertas reflexiones para mejorar el diseño de la propuesta en estas primeras sesiones:

- Los alumnos de este ciclo han demostrado mayor seguridad a la hora detectar relaciones directamente proporcionales que en el ciclo II-1, siendo las relaciones inversas y las no proporcionales las que suponen un mayor reto. Además, en las fichas de trabajo con varias situaciones los alumnos tienden a dejar en blanco, o a resolver sin argumentar, con mayor facilidad las últimas situaciones, bien sea por falta de tiempo o por cansancio. Por tanto, parece adecuado reordenar algunas de las situaciones de las fichas F1.1 y TC1 para asegurarnos de que los alumnos afrontan la caracterización de estas situaciones en las que tienen mayores dificultades.

- En general, la estructura numérica de los problemas no genera dificultades para el trabajo sin calculadora. Sin embargo, cabe revisar y corregir la estructura numérica de algunos problemas como TC1.1, TC3.1, F4.1.1, F4.1.4, F5.1.1 y F5.1.3, ya que podría suponer dificultades computacionales no deseables.
- La redacción de algunos de los problemas puede causar cierta confusión en los alumnos por lo que esta debería revisarse. Especialmente en F2.2.2, TC2.2, TC3.1, F4.1.1 y F5.1.5.
- Aunque los alumnos han mostrado buena comprensión de los problemas de comparación cualitativa indeterminados aun cuando responden exclusivamente "no se puede resolver", el equipo de investigación considera oportuno que en el único problema de este tipo de proporcionalidad compuesta que hay en la propuesta sí pueda determinarse el sentido de la comparación. Por tanto, se propone cambiar el sentido de alguna de las comparaciones del problema F7.1.1.

En la sesión 8 se trabaja el foco de contenido 5 sobre repartos proporcionales. El diseño se ha mostrado excesivamente largo (situación introductoria con dos problemas, ficha de trabajo con otros dos problemas y tarea para casa con otros dos). Además, se considera que la situación introductoria para el reparto inverso no ha sido satisfactoria ya que no ha hecho emerger las ideas pretendidas. Se hace, por tanto, necesario, acortar la carga de trabajo en esta sesión y repensar la situación introductoria para los repartos inversamente proporcionales (F8.1.2).

La parte de la propuesta dedicada al foco de contenido prioritario 6 ("Porcentajes y problemas asociados"), que era la que más novedades introducía respecto al ciclo II-1, no ha podido desarrollarse satisfactoriamente durante este ciclo (recordemos que el profesor-investigador no pudo estar en las últimas sesiones de la propuesta). Sin embargo, sí se han detectado algunos problemas de diseño que cabrían mejorarse para que los alumnos no se enfrenten con ciertos tipos de problemas por primera vez en las tareas para casa. Los resultados parecen indicar un cierto obstáculo relacionado con los conocimientos previos de los alumnos sobre el porcentaje por lo que sería conveniente intentar minimizar las influencias externas. Además, deben recogerse los cambios producidos sobre la marcha en el diseño curricular alrededor de la décima sesión. Destacamos algunas ideas sobre cambios en el diseño que podrían ayudar a mejorar la propuesta:

- Acortar alguno de los problemas en la ficha de trabajo F9.1 para poder introducir otros en los que dada una razón concreta los alumnos la interpreten como razón unitaria. Hasta ahora en dicha ficha en todas las situaciones los alumnos deben aportar la cantidad asociada a una interpretación verbal de una de las razones unitarias que se pueden establecer a partir de una situación de porcentaje.
- Reformular TC9 para que en ella los alumnos refuercen algunos de los contenidos vistos en la sesión 9 sin avanzar en nuevos tipos de problemas.
- Reformular F10.1 para que se constituya en situación inicial para problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje.

- Reformular F11.1, TC11 y F12.1 para introducir mejoras similares a las propuestas para F9.1, TC9 y F10.1 respectivamente, pero en situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales.

  El diseño de la prueba escrita parece pertinente y se decide mantenerlo.

VI.4.2. Sobre la comprensión de los alumnos

Resumimos las principales conclusiones sobre la comprensión de los alumnos analizando la información recogida sobre cada uno de los seis focos de contenido prioritarios de la propuesta.

VI.4.2.1. Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad

Los resultados obtenidos tras analizar los diferentes instrumentos parecen indicar que los alumnos mejoran sustancialmente en la comprensión de las relaciones de proporcionalidad simple directa, detectándolas con facilidad, pudiendo calcular e interpretar correctamente las razones asociadas y argumentando sus producciones a partir de condiciones de regularidad detectadas en las diferentes situaciones.

A pesar de esta mejora respecto a la propuesta en 1º de ESO se constatan ciertas dificultades para interpretar y calcular las razones en situaciones con magnitudes homogéneas.

Las comparaciones con el grupo de control arrojan resultados muy similares en ambos grupos. Sin embargo, el análisis de los argumentos muestra que en el grupo de control se abusa de argumentos erróneos basados en aumentos y disminuciones mientras que en el grupo experimental la aparición de este tipo de argumentos es casi nula.

En cuanto a la detección de relaciones inversas, parece que las dificultades observadas al principio de la propuesta se diluyen con el paso de las sesiones. De hecho, el porcentaje de éxito en PE.1.3 (detección de relación inversa) es el mismo que en PE.1.4 (detección de relación directa), ambos del 70 %. Las principales dificultades se centran en aquellas situaciones en las que los alumnos necesitan dar significado al producto de magnitudes extensivas para poder interpretar la constante de proporcionalidad.

Al igual que en las relaciones directas, los alumnos se basan en el control semántico de las situaciones para argumentar y la presencia de argumentos erróneos basados en detectar aumentos y disminuciones es escasa. Por el contrario, este tipo de argumentación es mayoritario en el grupo de control.

En cuanto a la detección de relaciones no proporcionales, los alumnos presentan mayores dificultades en las situaciones en las que sí existe una dependencia funcional de las magnitudes, mientras que se desenvuelven con bastante éxito detectando como no proporcionales las situaciones sin relación funcional. En concreto, las relaciones afines, y de forma más acusada las decrecientes, han supuesto una mayor dificultad a los alumnos. En este tipo de relaciones los alumnos detectan condiciones de regularidad asociadas al crecimiento constante que interpretan como de proporcionalidad directa (incluso en las decrecientes). A pesar de estas dificultades, los alumnos del grupo experimental han conseguido una tasa de éxito del $30\ \%$ en la prueba escrita, frente al $10{,}5\ \%$ alcanzado en el grupo de control.

VI.4.2.2. Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

Inicialmente los alumnos muestran menos dificultades a la hora de abordar los problemas de comparación cuantitativa que los problemas de valor perdido o los problemas de comparación cualitativa. Sin embargo, con el paso de las sesiones se gana seguridad en los tres tipos de problemas. Por ejemplo, en el último problema de valor perdido antes del porcentaje se obtiene un $80\ \%$ de éxito y en el problema de comparación cualitativa de la prueba escrita obtenemos un $80\ \%$ de éxito (frente a un $57{,}9\ \%$ de éxito en el grupo de control).

Además de los porcentajes de éxito, es interesante remarcar que el número de respuestas sin argumentos es muy bajo, así como el número de producciones detectadas en las que se utiliza una estrategia errónea. Solo se detecta una respuesta que usa argumentos aditivos erróneos. Así, los estudiantes utilizan estrategias basadas en alguna de las razones externas de la situación (de forma mayoritaria en los problemas de valor perdido y de forma exclusiva en los de comparación cuantitativa). La aparición de estrategias algoritmizadas es muy escasa y se concentra en problemas de valor perdido propuestos para trabajar en casa, por lo que su aparición podría venir provocada por influencias externas. Además, cuando aparecen este tipo de estrategias suelen venir acompañadas por argumentos de aumentos y disminuciones para caracterizar la relación de proporcionalidad que no aparecen en otros puntos de la propuesta.

Es llamativo que en este ciclo de 2º de ESO el uso de la representación fraccionaria para trabajar con la razón es sustancialmente menor que en 1º de ESO. Cuando aparece, viene acompañado de la representación decimal y esta última es la usada para seguir con los cálculos de los problemas.

En cuanto a los errores detectados, estos se concentran en la mala interpretación de las razones externas que se establecen o en la conexión del significado de estas con el contexto del problema. Sin embargo, el número de errores detectados de este tipo es bajo.

VI.4.2.3. Foco 3: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa

Aunque las tasas de éxito en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa son aceptables, y similares a las obtenidas en las situaciones directas, se observa que la aparición de dos magnitudes extensivas aporta dificultad (ya que baja la tasa de éxito) a los problemas planteados. Por otra parte, en los problemas de valor perdido y de comparación cualitativa, observamos un fenómeno similar al descrito para las situaciones directas ya que los alumnos parecen ganar competencia en la resolución conforme avanza la secuencia. Si comparamos las tasas de éxito obtenidas al final de la secuencia, en la prueba escrita, con las obtenidas por el grupo de control, vemos que los alumnos del grupo experimental tienen una tasa de éxito significativamente mayor en el problema de comparación cuantitativa. En el problema de valor perdido las diferencias entre ambos grupos no son significativas en cuanto a tasa de éxito.

Por otro lado, en este foco de contenido detectamos un número ligeramente mayor de respuestas que no van acompañadas de argumentos que las sustenten. Además, aparecen respuestas en las que se alega que “el problema no se puede resolver” hecho no detectado en este ciclo para problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Los estudiantes utilizan de forma mayoritaria estrategias correctas de resolución. Sin embargo, también crece respecto al foco 2 el número de respuestas que siguen una estrategia errónea. Aunque desaparecen las estrategias aditivas, aparecen producciones que, tras suponer una relación directa (en vez de inversa), resuelven el ejercicio siguiendo una estrategia que sería correcta si, en efecto, el problema fuese de proporcionalidad directa. Estos hechos ponen de manifiesto la mayor dificultad que encuentran los alumnos en los problemas de proporcionalidad simple inversa.

En cuanto al uso de estrategias correctas, es destacable que no se han encontrado estrategias algoritmizadas que pudieran indicar una influencia externa (como sí ocurría en el foco 2). Tampoco aparecen de forma natural estrategias que podrían considerarse más intuitivas como los razonamientos por factor de cambio ni siquiera en las situaciones introductorias.

En este foco, disminuye el número de producciones en las que se etiqueta la relación de proporcionalidad, así como las producciones en las que se aportan argumentos para caracterizarla y también el número de respuestas que interpretan el significado de la constante de proporcionalidad. No obstante, las producciones en las que se argumenta la relación de proporcionalidad usan en su mayoría argumentos correctos y el uso de argumentos cualitativos por aumentos y disminuciones es muy escaso (2 producciones de las 180 analizadas).

Solo se han podido detectar cinco producciones con errores asociados a una estrategia correcta ya que la gran mayoría de estudiantes que aplican una estrategia correcta terminan resolviendo bien el problema. Es decir, a diferencia de lo que ocurre con las situaciones directas, la mayor dificultad de las situaciones inversas parece residir en su reconocimiento y en conocer una estrategia de resolución. Una vez reconocida la situación la tasa de éxito es muy alta ya que no aparecen errores asociados a los números racionales y a la existencia de dos constantes de proporcionalidad (las dos razones externas inversas entre sí) como sí ocurre en las relaciones directas.

VI.4.2.4. Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta[56]

[56] Algunas de estas conclusiones parciales sobre el foco de contenido 4 han sido publicadas en el trabajo escrito por el autor y otros miembros del equipo de investigación, Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, & Oller-Marcén (2019a).

Al igual que en el ciclo II-1, las observaciones del profesor-investigador durante las sesiones junto con los comentarios del observador externo y el análisis de las producciones escritas apuntan hacia un buen funcionamiento de la propuesta en torno a la proporcionalidad compuesta. Así, la introducción de la proporcionalidad compuesta no supone un gran obstáculo a los alumnos que relacionan los nuevos problemas de forma natural con lo aprendido anteriormente. Las tasas de éxito son generalmente altas. Además, en la prueba escrita las tasas de éxito del grupo experimental son mayores que las del grupo de control siendo la diferencia estadísticamente significativa en el problema de comparación cualitativa. Esta mayor tasa de éxito es especialmente relevante en 2º de ESO ya que en 1º de ESO no se instruye a los alumnos en este tipo de situaciones en el grupo de control.

Como comentamos en el ciclo II-1, las técnicas institucionalizadas para la resolución de problemas de proporcionalidad simple dotan a los alumnos de mecanismos para abordar los problemas de proporcionalidad compuesta de forma natural sin necesidad de recurrir a técnicas específicas. De hecho, solo se realiza una pequeña puesta en común / institucionalización hacia la mitad de la primera de las dos sesiones dedicadas a este foco. Es decir, la experiencia previa con el cálculo de razones y productos de magnitudes parece dotar a los alumnos de herramientas suficientes para resolver estos problemas.

La aparición de técnicas algorítmicas es anecdótica y suele aparecer en las tareas para casa. Además, se concentra en los problemas de valor perdido. De hecho, incluso alumnos que resolvían los problemas de valor perdido mediante técnicas no institucionalizadas de carácter algorítmico (ver por ejemplo la producción de B1.2 en la Imagen VI - 26) utilizan técnicas basadas en las operaciones entre magnitudes para los problemas de comparación cuantitativa (Imagen VI - 49).

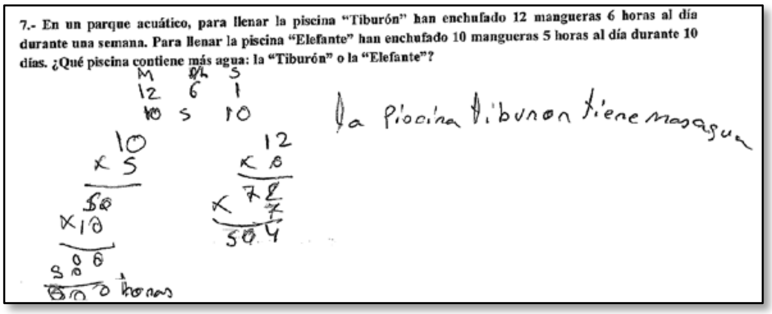


Imagen VI - 49. Producción del alumno B1.2 para el problema PE7 (Ciclo II-2).

La comparación con los alumnos del grupo de control también ha puesto de manifiesto que la mayor tasa de éxito va acompañada de la utilización de estrategias no algorítmicas, mostrándose como mayoritaria la utilización de una estrategia de proporciones compuestas en el grupo de control.

A pesar de la tasa de éxito, se detecta una menor preocupación (en comparación con la proporcionalidad simple) por la argumentación y la caracterización de las relaciones proporcionales, debida quizás a la mayor complejidad de las situaciones compuestas.

La estrategia institucionalizada, amalgamación, no siempre resulta la mayoritariamente elegida por los alumnos para la resolución de los problemas de proporcionalidad compuesta. Esta estrategia se alterna con la de “paso a paso pasando por la unidad”, especialmente en los problemas de valor perdido. La aparición de la estrategia de amalgamación parece estar más influida por la estructura funcional y la posición de la variable dependiente (en los problemas de valor perdido) que por la interpretación de la magnitud resultante. Los alumnos superan la dificultad de dar significado al producto de magnitudes tras la instrucción, pero tienen dificultades a la hora de interpretar un cociente de magnitudes como una nueva magnitud variable.

Las situaciones de comparación cualitativa suponen una gran dificultad. Probablemente, el hecho de que la respuesta a la situación concreta planteada sea que no puede realizarse la comparación con la información proporcionada influye en la elevada tasa de fracaso y dificulta la clasificación de las respuestas.

VI.4.2.5. Foco 5: Repartos proporcionales[57]

En primer lugar, es destacable que, pese a no haber recibido ningún tipo de instrucción formal en los repartos proporcionales, casi todos los equipos en la situación introductoria han sido capaces de desarrollar algún tipo de estrategia para resolver los problemas propuestos.

Además, a diferencia de lo que sucede en algunos trabajos previos, no hemos encontrado ejemplos de repartos equitativos en el problema F8.1.1 (de reparto directo). Esto puede deberse a que el contexto de la Lotería de Navidad es muy familiar para los alumnos que, de este modo, están acostumbrados a este tipo de protocolos sociales.

Pese a no recibir ninguna indicación para aplicar repartos proporcionales, el problema F8.1.1 fue resuelto mediante ese tipo de modelo de reparto por el 90 % de los equipos. Por otro lado, el segundo problema F8.1.2 de reparto inversamente proporcional, solo fue resuelto mediante un modelo inversamente proporcional por el 10 % de los equipos. Este desequilibrio se podría explicar en parte por la mayor dificultad de las situaciones inversas respecto a las directas, aunque está lejos de las tasas de éxito que obtienen los estudiantes en otro tipo de problemas relacionados con la proporcionalidad inversa.

Algunas de las respuestas al problema F8.1.2 que no aplican modelos proporcionales de reparto se corresponden con las obtenidas por Peled y Balacheff (2011) cuando trabajaban con el ‘problema de la lotería’, pero en nuestro caso en un contexto de reparto inversamente proporcional. Dichos autores denominaron a ese modelo de reparto como “partir de manera que la diferencia sea parecida a la diferencia entre las inversiones”. Estos modelos basados en

[57] Algunas de las conclusiones parciales que desarrollamos se han publicado en los trabajos escritos por el autor y otros miembros del equipo de investigación: Martínez-Juste *et al*. (2018) y Martínez-Juste *et al*. (2019b).

pensamiento aditivo también aparecen al abordar problemas de bancarrota (Antequera & Espinel, 2011).

La tasa de éxito en los repartos directos es muy alta en todos los problemas propuestos y mayor (con diferencia estadísticamente significativa) a la de los alumnos del grupo de control en este tipo de problemas.

Observamos que las técnicas de resolución de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad directa son adaptadas libremente y aplicadas por los estudiantes en los problemas de repartos directamente proporcionales. Sin embargo, esto no sucede en el caso de los repartos inversamente proporcionales. Los estudiantes resuelven los problemas de repartos directos con una alta tasa de éxito eligiendo estrategias aritméticas estableciendo razones asociadas a la estructura parte-todo (que parecen preferirse a las razones parte-parte).

Centrándonos en el reparto inversamente proporcional y, más concretamente en la situación introductoria, hemos observado que el contexto no promueve el uso de un modelo de reparto inversamente proporcional utilizando la relación multiplicativa entre los sueldos. De hecho, tan solo una de las parejas lo aplica correctamente. Este escaso éxito hace pensar al equipo investigador que para poder formalizar estrategias de resolución en modelos de reparto inversamente proporcionales convendría buscar un contexto diferente que minimizara el uso de modelos de compensación aditiva.

Además, la única producción que utiliza correctamente un modelo de reparto inversamente proporcional, al menos, tiene dos rasgos interesantes. En primer lugar, observamos que los alumnos aplican el hecho de que un reparto inversamente proporcional a pesos 1000 y 3000 es equivalente a un reparto inversamente proporcional a pesos 1 y 3. Por otro lado, usan una estrategia que, si bien podría formalizarse para repartos inversamente proporcionales entre dos individuos, sería difícilmente generalizable a repartos inversos entre tres o más individuos porque, una vez obtenida la cuarta parte del dinero, los alumnos reparten a cada nieto el resultado de multiplicar esa cantidad por el peso contrario que le correspondía al individuo.

Así pues, esta producción podría aprovecharse para, por un lado, introducir la normalización de pesos en un reparto y, por otro, para generar una estrategia de resolución aplicable en modelos de reparto inversamente proporcionales entre dos individuos sustentada en la secuencia de operaciones realizada por los alumnos que lleva a la igualdad $k_1 = \left(\frac{K}{w_1+w_2}\right) \cdot w_2$ y la análoga para k_2 .

A pesar del interés, que pueden tener los debates que podrían generarse sobre su normalización y formalización, esta estrategia no admite una generalización inmediata a repartos con tres pesos. Además, dado el contexto del problema, no resulta sencillo interpretar las operaciones que se realizan.

El debate y la institucionalización posterior a la situación introductoria para repartos inversamente proporcionales supuso un aumento en la tasa de éxito en los otros dos problemas de repartos inversamente proporcionales propuestos (F8.2.2 con un $40\ \%$ de éxito y TC8.1 con un

20 % de éxito). Sin embargo, esta tasa de éxito dista de ser satisfactoria. Además, las producciones de los alumnos parecen indicar que estos realizaban una adaptación poco reflexiva de los patrones de operaciones del problema de la situación introductoria.

Por todo lo anterior, resulta necesario replantearse la forma en la que son introducidos y tratados los problemas de repartos inversamente proporcionales.

VI.4.2.6. Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados

La secuencia comienza con una mayor estructuración de las tareas y un mayor énfasis en el cálculo, reconocimiento e interpretación de razones externas asociadas a situaciones de porcentaje y la normalización de razones con referente 100. Las tasas de éxito en este tipo de tareas son muy altas por lo que, aunque en parte puede ser debido a la mayor estructuración, parece un buen comienzo para conectar el porcentaje con sus significados asociados a la proporcionalidad simple directa. Esta conexión se muestra muy necesaria ya que los alumnos demuestran muchos conocimientos previos relacionados con el porcentaje, pero fuertemente anclados a significados parte-todo y de operador, y asociados a cálculos algorítmicos y poco reflexivos de la parte conocidos el total y el porcentaje.

La familiaridad de los alumnos con las tareas de porcentajes se evidencia también en la baja tasa (inferior a la de otros focos) de problemas no entregados o en blanco incluso en las fichas de trabajo para casa. También en el bajo número de producciones clasificadas dentro de la categoría de “operaciones sin sentido”.

En toda la secuencia se evidencia un avance respecto a 1º de ESO de los alumnos en la comprensión de este tipo de situaciones. Así mismo, una constante durante la secuencia es la mayor dificultad que los alumnos encuentran en las situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales donde el referente más que un total, indica una situación inicial que es modificada. Así, mientras en 1º de ESO los problemas de Tipo III suponían una gran dificultad en las situaciones parte-todo, estos problemas tienen una buena tasa de éxito en este ciclo de 2º de ESO. Sin embargo, las tasas de éxito son muy bajas en los problemas de tipo III en las situaciones de aumentos y disminuciones. Por otra parte, tanto en las situaciones parte-todo como en las situaciones de aumento y disminuciones porcentuales las tasas de éxito en los problemas de Tipo I son relativamente altas.

Las estrategias que utilizan los alumnos se dividen entre las funcionales, dando significado a las razones externas pertinentes y el uso de fórmulas, mucho más presente en este foco que en los focos anteriores, lo que es un claro síntoma de los conocimientos previos de la primaria o de influencias externas. La fórmula empleada mayoritariamente, que podríamos denominar regla de tres, comienza con una operación que no puede interpretarse semánticamente, multiplicando el numeral por el total, para después dividir por 100. La aplicación de esta fórmula viene precedida de una aparente interpretación del porcentaje como operador “p % de $C = \frac{p \cdot C}{100} = \cdots$”. Esta forma de resolución se revela como poco flexible para los problemas de Tipo III. De forma que la mayor parte de los alumnos que tienen éxito en los problemas de Tipo III utiliza las estrategias institucionalizadas de tipo funcional. Es decir, incluso los alumnos que usan estrategias de tipo algorítmico en los problemas de Tipo I y se encuentran cómodos con ellas, en este tipo de problemas, necesitan cambiar el enfoque para abordar los problemas de cálculo inverso.

Además del crecimiento en el uso de estrategias de tipo funcional en este ciclo (respecto al ciclo II-1) se evidencia que los alumnos que las emplean aportan mayoritariamente interpretaciones de las razones externas que calculan. En los problemas de aumentos y disminuciones porcentuales los alumnos que emplean estrategias de tipo funcional son capaces de interpretar las razones $\frac{100}{100 \pm p}$.

En la prueba escrita solo aparecen ítems de aumentos y disminuciones porcentuales en los que no encontramos diferencias significativas respecto al grupo de control en la tasa de éxito. Sin embargo, sí se evidencia que los métodos empleados por unos y otros son diferentes. Mientras que entre los alumnos del grupo experimental son mayoritarias las estrategias basadas en el cálculo e interpretación de las razones externas, entre los alumnos del grupo de control encontramos, con frecuencias similares, el método de proporciones y el uso de fórmulas.

VI.4.3. Sobre la metodología y la labor del profesor-investigador

En esta sección nos centraremos en aquellas observaciones no redundantes con lo desarrollado en la sección V.4.3 correspondiente al ciclo II-1.

VI.4.3.1. Reflexiones sobre la instrucción y la metodología de enseñanza

De forma general, el profesor-investigador valora como positiva la metodología de enseñanza basada en un enfoque a través de la resolución de problemas. Se observa que el profesor-investigador va ganando confianza con este tipo de enfoque al que no estaba habituado antes de comenzar la experimentación. Sin embargo, puede mejorarse en algunos aspectos en los siguientes ciclos. Por ejemplo, se registra cierta inquietud del profesor-investigador cuando los alumnos entran en contacto con los distintos contenidos a través de las situaciones introductorias y no se percibe una buena comprensión en dichos momentos iniciales. Los registros del diario de clases y las producciones de los alumnos evidencian que los alumnos alcanzan mayores grados de comprensión de los contenidos que los que el profesor-investigador percibe inicialmente, pero de forma progresiva a lo largo de la propuesta.

Gestión del trabajo en el aula.

Como en el ciclo II-1, en general se ha observado que la motivación e implicación de los alumnos en las diferentes actividades de clase es buena. No obstante, el profesor podría mejorar la gestión del trabajo en algunos aspectos:

- El trabajo por parejas estables es adecuado para la codificación de las producciones y el seguimiento de los alumnos a lo largo de la secuencia. Sin embargo, desde el punto de vista del trabajo en el aula parece recomendable que cuando haya alumnos con muchas ausencias se puedan reorganizar sobre la marcha las parejas para asegurar que los asistentes puedan beneficiarse de las ventajas del trabajo en equipo.

- Otro de los elementos que ha podido generar problemas en el ambiente de trabajo es la presencia de alumnos objetores que en este ciclo han coincidido con alumnos repetidores. El profesor-investigador estima conveniente reflexionar sobre cómo abordar esta problemática de presentarse en los siguientes ciclos.

Gestión del desarrollo del contenido.

Al tratarse de un ciclo exploratoria en 2º de ESO uno de los fenómenos que se ha puesto de manifiesto, aunque en menor medida que en el ciclo de 1º de ESO, es el desajuste de algunas sesiones con los tiempos planificados. En este ciclo, más que la eliminación de problemas, que puede ser necesario para no sobrecargar alguna sesión concreta, se hace necesario ajustar los tiempos dedicados a la puesta en común e institucionalización en algunas sesiones. En concreto, en las sesiones que se planifican como talleres de problemas, se han observado ritmos muy distintos entre los diferentes equipos. Esto provoca que si el profesor-investigador intenta esperar a que todos los equipos hayan terminado todos los problemas para comenzar la puesta en común, el tiempo dedicado a esta es insuficiente. Por tanto, parece necesario dar por finalizado el tiempo para realizar los problemas, aunque algunos equipos no hayan concluido para poder tener un tiempo adecuado para los debates e institucionalizaciones.

También aparecen algunos comentarios (en menor medida que en el ciclo II-1) del observador externo en los que se solicita que las intervenciones de los alumnos se repartan de forma más equitativa por lo que hay que aumentar los esfuerzos del profesor-investigador en este sentido.

Debe avanzarse también en la generación de documentos y presentaciones para reducir el tiempo invertido en la puesta en común de las tareas para casa que se ha mostrado excesivo en alguna sesión concreta.

Gestión de la construcción del conocimiento.

Según el observador externo el profesor-investigador tiene intervenciones adecuadas, precisas y concisas que fomentan la participación y promueven la reflexión. Además, se resaltan momentos en los que el profesor-investigador identifica dificultades de los alumnos y se toma decisiones sobre la marcha para intentar resolverlas.

Por otro lado, parece necesario mejorar la planificación de algunas intervenciones para la institucionalización de contenidos como los relacionados con los repartos inversamente proporcionales.

Además, el observador externo solicita que el profesor-investigador realice un mayor número de intervenciones con los equipos mientras trabajan durante las sesiones. El profesor-investigador deberá pues ponderar la importancia de las intervenciones durante el trabajo de los equipos con no proporcionar una ayuda excesiva para poder realizar un seguimiento adecuado de la evolución de los alumnos a partir de las producciones que estos realizan.

V.4.3.2. Reflexiones sobre la metodología de investigación

Como los alumnos ya están, en su mayoría, acostumbrados a la metodología de investigación las distracciones que esta provocaba en el ciclo II-1 tienen una influencia muy baja en este ciclo.

También el profesor-investigador está más cómodo con los inconvenientes que pueden generar en su práctica los diferentes instrumentos de recogida de la información que debe desplegar a lo largo de las sesiones.

VI.4.4. Sobre el funcionamiento general de la propuesta

Al igual que la secuencia en 1º de ESO valoramos como exitosa la propuesta de enseñanza de la proporcionalidad aritmética en 2º de ESO. Como en 1º de ESO, los alumnos se muestran competentes a la hora de resolver problemas "tradicionales" relativos a la proporcionalidad con una secuencia de enseñanza a través de la resolución de problemas. Las tasas de éxito en estos problemas presentes en la tradición educativa no son menores que los observados en el grupo de control y, además, los alumnos del grupo experimental utilizan estrategias más argumentadas dotando de significado a las operaciones realizadas y resultados obtenidos.

Además, la secuencia, que tiene una duración similar a la que suelen tener las unidades didácticas relacionadas con este tema, aborda una variedad mayor de problemas y de situaciones que ayudan al desarrollo del razonamiento proporcional como son los problemas de comparación y las situaciones no proporcionales.

Durante este ciclo se han mejorado algunos de los puntos débiles de la secuencia señalados en la sección V.4.4 del capítulo anterior. En concreto, los relativos a la metodología de aula y, con mayor claridad, los relativos a la metodología de investigación. Sobre la debilidad de la propuesta a la hora de abordar el porcentaje, aunque sigue siendo un punto mejorable, los resultados de este ciclo parecen prometedores ya que una buena parte de los alumnos consigue mejorar las dificultades que suponen los conocimientos previos y conectar el porcentaje con sus significados asociados a la proporcionalidad.

Por otra parte, no hemos observado mejoría en las dificultades asociadas al número racional. Los alumnos no se sienten cómodos con el uso de la representación fraccionaria y usan de forma mayoritaria la representación decimal, lo que provoca la obtención de resultados inexactos y resoluciones computacionalmente más complejas y costosas.

Por último, añadimos como punto débil el trabajo en torno al foco de contenido 5. Más concretamente en lo relativo a los repartos inversamente proporcionales. Ni la situación introductoria planificada, ni la institucionalización, ni las producciones de los alumnos y tasas de éxito han sido satisfactorias a lo largo de este ciclo.

Capítulo VII: Tercer ciclo de investigación-acción en 1º de ESO

El séptimo capítulo de esta memoria aborda el relato del tercer ciclo de investigación-acción de la propuesta didáctica en 1º de ESO. Se trata del ciclo de saturación de la propuesta en este nivel. Por tanto, se completa el desarrollo del objetivo de investigación I, relativo al diseño, y del objetivo de investigación II, relativo a la experimentación, (ver Capítulo I) de nuestra investigación para el nivel de 1º de ESO. Este capítulo, al igual que los dos anteriores, se estructura en torno a las cuatro fases de investigación-acción: planificación, acción, observación y reflexión.

VII.1. Fase de planificación

En esta sección recogemos la planificación realizada para el último ciclo de investigación-acción en 1º de ESO que se apoya en los resultados y las reflexiones realizadas, no solo para los ciclos anteriores en este nivel (Capítulo V), sino también para el ciclo I-2 de 2º ESO (Capítulo VI). Para evitar reiteraciones innecesarias resaltaremos los aspectos diferenciales de la planificación para este ciclo, destacando los cambios introducidos respecto a los ciclos anteriores.

VII.1.1. Decisiones tomadas tras las observaciones de los ciclos anteriores

VII.1.1.1. Sobre el diseño

Como se reflexiona en el Capítulo V, el diseño general de la propuesta es viable por lo que la estructura de esta no sufre cambios importantes en este ciclo[58]. Sin embargo, sí se introducen algunas mejoras:

[58] Algunas de las modificaciones realizadas conllevan un cambio en la codificación de los problemas por lo que, para una adecuada identificación del enunciado de las actividades con el código de las mismas en este ciclo, el lector debe acudir a las fichas de trabajo de los estudiantes que se recogen en los anexos y no al diseño curricular de la propuesta presentado en el Capítulo V.

- Como se reflexiona en el Capítulo V, la propuesta parece menos exitosa en cuanto a la comprensión de los alumnos alrededor del Foco 6 de investigación (porcentajes y problemas asociados). Parecía necesario ampliar las sesiones dedicadas a ello e introducir un diseño más guiado en las actividades de clase para conectar la noción de porcentaje con los conocimientos de los alumnos sobre proporcionalidad directa adquiridos en las primeras sesiones de la propuesta. Además, el diseño de las actividades relacionadas con este foco en la propuesta de 2º de ESO parece confirmar que esta mayor estructuración de las actividades redunda en un mayor éxito en las tareas relacionadas con porcentajes. Por tanto, en el ciclo III-1 añadimos una sesión a la propuesta relacionada con el Foco 6. Como describiremos posteriormente, esencialmente se desdobla la sesión inicial para proporcionar una mayor estructura a la introducción del porcentaje y su conexión con la razón externa en situaciones de proporcionalidad.
- Se reorganizan los problemas de la sesión 8. Se propone como situación introductoria el anterior F8.2.1 cuyo enunciado no generaba problemas de interpretación. La anterior situación introductoria se propone como primer ejercicio tras la institucionalización.
- En el ciclo II-1 se realizaron algunos ajustes durante la experimentación por falta de tiempo, como la eliminación de las fichas F3.1 y F8.3. En este ciclo se eliminan estas fichas desde la planificación inicial, aunque se recoge uno de los problemas de la ficha eliminada en la sesión 8, F8.3.2, para incorporarlo a la ficha F8.2. Así, se da un mayor tiempo a los alumnos para realizar las actividades iniciales sobre los conceptos de razón y condición de regularidad (se reparten las actividades de la segunda sesión planificada para el ciclo II-1 entre las sesiones 2 y 3 de este ciclo) y las relacionadas con situaciones de proporcionalidad compuesta (se aligera el número de actividades previstas para la sesión 8). Además, en F3.1 se introduce una situación de proporcionalidad simple inversa. Detectar este tipo de situaciones como de no proporcionalidad directa fue uno de los puntos de mejora detectados tras el ciclo II-1.
- La ficha F1.2 generaba algunas dudas en los alumnos, por lo que se modifica ligeramente su enunciado y se crea una factura ficticia que reemplaza a la factura real escaneada del ciclo anterior.
- Se modifican algunas estructuras numéricas que parecen introducir complicaciones computacionales innecesarias, que influyen de forma no deseada en las estrategias empleadas por los alumnos, o que arrojan resultados poco realistas en algunos problemas. También se modifica la redacción de algunos enunciados cuya interpretación parecía confusa.
- Se cambia el contexto del ejercicio PE.3 de la prueba escrita por uno de idéntica estructura numérica y multiplicativa, pero que modifica el concepto ‘espesor’ por ‘intensidad del sabor a chocolate’, ya que los estudiantes no comprendían adecuadamente el significado de esa magnitud intensiva. En concreto, la anterior redacción de PE.3 era: “*Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?*”. La nueva redacción queda de la siguiente manera: “*Sara, para hacer chocolate a la taza, mezcla 3 litros de leche con 0,9 kg de cacao. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de cacao con 1,5 litros de leche. ¿Qué chocolate tendrá un sabor más intenso?*”

VII.1.1.2. Sobre aspectos cognitivos

Se trabaja en la mejora de los aspectos destacados en la sección V.4.2 tras el ciclo II-1. En concreto, se planifica una mayor intervención en las puestas en común sobre algunas dificultades observadas:

- Respecto al Foco 1 se debe prestar atención a las argumentaciones esgrimidas para detectar como no directamente proporcionales las situaciones de proporcionalidad inversa. Otro aspecto a tener en cuenta es la identificación y cálculo de razones concretas que se destacó como mejorable tras el ciclo II-1. Las actividades introducidas en la nueva sesión de la propuesta, aunque contextualizadas en situaciones en las que aparecen porcentajes, trabajan en este sentido.
- Respecto al Foco 2 el profesor-investigador intentará promover los cambios de referentes y las representaciones realizadas de forma espontánea por los estudiantes en el ciclo II-1 en los problemas de comparación cuantitativa en los debates de la puesta en común de estas actividades de clase. Además, se intentará hacer un mayor énfasis en la utilidad de la notación fraccionaria del racional para encontrar soluciones exactas en los problemas de valor perdido.
- Respecto al Foco 6, como se ha comentado anteriormente, los cambios en el diseño pretenden proporcionar una mayor estructuración para conectar la noción de porcentaje con las interpretaciones de las razones externas en términos de cantidades intensivas.

VII.1.1.3 Sobre la metodología de aula y de investigación

Al igual que en el ciclo I-2, no se introducen cambios sustanciales ni en el modelo de enseñanza ni en el método de investigación. Se mantiene el modelo de enseñanza a través de la resolución de problemas, aunque se intenta perfeccionar reservando el tiempo necesario a las puestas en común y debates en cada sesión y repartiendo adecuadamente el turno y tiempo de las intervenciones entre todos los estudiantes como solicitaba el observador externo del ciclo II-1.

VII.1.2. Secuenciación y temporalización

La secuenciación y temporalización no sufre cambios importantes respecto a la presentada en la Tabla V -1 para el anterior ciclo de investigación-acción en 1º de ESO. En este último ciclo, la secuencia de la propuesta (ver Tabla VII - 1) se estructura en 12 sesiones de clase (3 semanas aproximadamente) y 1 sesión para la prueba escrita. Esto supone una sesión más que en el ciclo II-1 que se obtiene al desdoblar la anterior sesión 9 “Porcentaje como tanto por cien. Cálculo directo” (ver Tabla V - 1) por las actuales sesiones 9 y 10, “El porcentaje como tanto por cien” y “Cálculo directo con porcentajes” respectivamente.

Como hemos dicho, se aligeran de actividades algunas sesiones por lo que en ninguna se reparten más de tres fichas a los alumnos (contando la ficha de actividades para trabajo en casa). La codificación de estas fichas de trabajo sigue los patrones explicados en los capítulos V y VI.

	Breve descripción de los contenidos	**Fichas de trabajo**
Sesión 1	Concepto de magnitud y vocabulario asociado.	F1.1, F1.2, TC1
Sesión 2	Razones como tanto por uno. Condiciones de regularidad.	F2.1, F2.2, TC2
Sesión 3	Magnitudes directamente proporcionales.	F3.1, TC3
Sesión 4	Problemas de comparación (I).	F4.1, F4.2, TC4
Sesión 5	Problemas de comparación (II).	F5.1
Sesión 6	Problemas de valor perdido (I).	F6.1, F6.2, TC6
Sesión 7	Problemas de valor perdido (II).	F7.1
Sesión 8	Situaciones de proporcionalidad compuesta.	F8.1, F8.2, TC8
Sesión 9	El porcentaje como tanto por cien.	F9.1, TC9
Sesión 10	Cálculo directo con porcentajes.	F10.1, F10.2, TC10
Sesión 11	Cálculo inverso con porcentajes.	F11.1, F11.2
Sesión 12	Repaso de la unidad.	F12.1
Sesión 13	Prueba escrita.	PE

Tabla VII - 1. Secuencia temporal de la propuesta para 1º de ESO (Ciclo III-1).

VII.1.3. Cambios en el diseño curricular de algunas sesiones de clase

En la sección VII.1.1.1 hemos indicado de forma general los cambios introducidos en el diseño en este tercer ciclo de la propuesta de 1º de ESO. Estos cambios no modifican de forma sustancial el diseño curricular de las sesiones en donde se producen a excepción del diseño curricular de las sesiones 9 y 10 que sí es esencialmente distinto. En esta sección presentamos el nuevo diseño curricular de estas dos sesiones de clase.

VII.1.3.1. Novena sesión: El porcentaje como tanto por cien

En la novena sesión comienza el trabajo con el concepto de porcentaje. Aunque puede usarse TC8.3 como primera toma de contacto para conectar a los alumnos con sus conocimientos previos (sobre todo con la interpretación como cantidad relacionada con 100), el nuevo diseño de la sesión permite desprenderse de esa dependencia con la tarea para casa de la sesión anterior. Así, en vez de invertir tiempo en la corrección de la ficha de trabajo TC8, se repartirá una ficha con los problemas de TC8 resueltos y comentados para que los estudiantes puedan autoevaluarse. La única ficha de trabajo que se realiza durante la sesión, F9.1, hace un mayor énfasis en la interpretación del porcentaje como dos cantidades de magnitud relacionadas y la relación de este concepto con el cálculo de razones externas en una situación parte-parte-todo. A partir de esta mayor estructuración se intenta dirigir al alumno hacia la resolución de problemas de Tipo I y de Tipo II, haciendo un mayor énfasis en estos últimos y reservando la siguiente sesión para profundizar en los de Tipo I.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VII - 2.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Interpretar el porcentaje como tanto por cien. • Calcular diferentes razones externas asociadas a un porcentaje.	• Porcentajes. • Complementario de un porcentaje. • Razones asociadas a un porcentaje.

Tabla VII - 2. Objetivos didácticos y contenidos de la novena sesión (Ciclo III-1).

Esquema de la sesión:

- El profesor recoge la tarea para casa TC8 y entrega a los alumnos una resolución razonada y comentada para que comparen con su resolución (una vez devuelta).
- Mediante trabajo en parejas se resuelven los problemas de F9.1 que abordan la interpretación de la noción de porcentaje, razones asociadas y porcentaje que representa una cantidad respecto de otra. (35 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F9.1. (15 min)
- Reparto de los problemas para trabajar individualmente en casa contenidos en TC9, para reforzar lo tratado durante la sesión.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas de esta sesión pertenecen a una ficha de trabajo en el aula, F9.1 y una ficha de trabajo para casa, TC9. Analizamos individualmente cada uno de los ejercicios propuestos:

En la ficha de trabajo F9.1 aparecen dos situaciones F9.1.1 y F9.1.2 en las que se realizan múltiples preguntas a los alumnos. En la primera situación la frase contiene información utilizando el símbolo de porcentaje. Las primeras preguntas F9.1.1.1, F9.1.1.2 y F9.1.1.3 pretenden conectar con los conocimientos previos de los alumnos de forma que se interprete el porcentaje como dos cantidades de magnitud y se relacione con una situación parte-parte-todo mediante el cálculo del porcentaje complementario. Una vez que se explicitan las cantidades de magnitud que intervienen en la magnitud se pide a los estudiantes calcular diferentes razones asociadas (F9.1.1.4 – F9.1.1.9). Se solicitan las cuatro razones parte-todo posibles y las dos razones parte-parte posibles. Tras ello se acaba con una pregunta, F9.1.1.10, propia de los problemas de valor perdido de Tipo I (cálculo directo), pero para su resolución los alumnos pueden apoyarse en los cálculos realizados en los apartados previos. Así, aunque la estructura numérica es muy sencilla y pueden aparecer estrategias de razón interna o uso de puntos de referencia, el cálculo previo de las razones externas puede favorecer su uso para resolver el problema.

F9.1.1: *En un refresco el 20 % del volumen es zumo de limón y el resto agua.*

F9.1.1.1: *Porcentaje de agua que lleva el refresco:*

F9.1.1.2: *En el refresco hay ____ litros de zumo de limón por cada _____ litros de refresco.*

F9.1.1.3: *En el refresco hay _____ litros de agua por cada ______ litros de refresco.*

Calcula y di el significado:

F9.1.1.4: *Razón entre zumo de limón y refresco:*

F9.1.1.5: *Razón entre refresco y zumo de limón:*

F9.1.1.6: *Razón entre agua y refresco:*

F9.1.1.7: *Razón entre refresco y agua:*

F9.1.1.8: *Razón entre zumo de limón y agua:*

F9.1.1.9: *Razón entre agua y zumo de limón:*

F9.1.1.10: *¿Cuánto zumo de limón y agua hay que mezclar para hacer 2 l de refresco?*

Tipo de problema (F9.1.1.10): Valor perdido. **Magnitudes involucradas:** P_1: Volumen de zumo de limón. Extensiva, continua. P_2: Volumen de agua. Extensiva, continua. T: Volumen de refresco. Extensiva, continua. **Estructura funcional:** $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \qquad P_1 = \frac{k}{1-k}\, P_2$	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %. **Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el volumen de zumo de limón y el volumen de refresco (análogamente para $(1-k)$ con el volumen de agua). **Estructura numérica:** $(100 : 20 + \square) \leftrightarrow (100 : \square + x_3)$, $(1 : x_4 + \square), (x_5 : 1 + \square), (1 : \square + x_6)$, $(x_7 : \square + 1), (\square : x_8 + 1), (\square : 1 + x_9)$ $(2 : x_{10} + x_{11})$
Razones externas: $k^{-1} = 5$, entera. $\left(\frac{k}{1-k}\right)^{-1} = 4$, entera.	**Razones internas:** Enteras.

En el segundo problema de la ficha F9.1 se proporciona información en un contexto parte-todo. A través de una serie de preguntas sobre diferentes razones que pueden considerarse en la situación y la reflexión sobre el complementario de la parte de la que se da información se pretende que el alumno o la alumna llegue a resolver un problema de valor perdido de Tipo II, es decir, que llegue establecer el porcentaje correspondiente a la situación inicial.

F9.1.2: *En una reunión de 70 asistentes hay 28 españoles.*

Calcula y di el significado:

F9.1.2.1: *Razón entre españoles y asistentes:*

F9.1.2.2: *Razón entre asistentes y españoles:*

F9.1.2.3: *Razón entre españoles y franceses:*

F9.1.2.4: *Si se mantiene la razón de españoles. ¿Cuántos españoles habría con 100 asistentes?*

F9.1.2.5: *¿Cuál es el porcentaje de españoles?*

F9.1.2.6: *¿Cuál es el porcentaje de no españoles?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de personas de nacionalidad española en la reunión. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de personas de nacionalidad no española en la reunión. Extensiva, discreta. T: Total de personas en la reunión. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el total de personas en la reunión y las personas de nacionalidad española (análogamente para $(1-k)$ con las personas no españolas).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \dfrac{k}{1-k}\, P_2$	**Estructura numérica:** $(70{:}\, 28 + \square) \leftrightarrow (1{:}\, x_1 + \square), (x_2{:}\, 1 + \square),$ $(100{:}\, x_4 + x_6)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En la ficha de tarea para casa, en el problema TC9.1, se recupera uno de los problemas que se presentaba en la primera sesión de porcentajes en el ciclo anterior para 1º de ESO. Este problema de Tipo II se estructura de forma que no se plantea directamente la pregunta sobre el porcentaje que representa una cantidad respecto a otra. Como paso previo, se solicita explícitamente al estudiante que calcule la razón que le permitirá responder al problema mediante una estrategia de razón externa con multiplicación.

TC9.1: *En cierta población, en las últimas elecciones municipales, votaron 2400 personas de las 3000 que podían hacerlo.*

TC9.1.1: *¿Cuántas personas votaron por cada habitante?*

TC9.1.2: *¿Qué porcentaje de personas votó?*

TC9.1.3: *¿Qué porcentaje de personas se abstuvo (no votó)?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo del porcentaje conocidos parte y total. Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de personas que votan. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de personas que se abstienen. Extensiva, discreta. T: Total de personas que pueden votar. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el total de personas que pueden votar y el total de personas que efectivamente votan (análogamente para $(1-k)$ con las abstenciones).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \dfrac{k}{1-k}\, P_2$	**Estructura numérica:** $(3000{:}\, 2400 + \square) \leftrightarrow (1{:}\, x_1 + \square),$ $(100{:}\, x_2 + x_3)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** Enteras

En TC9.2 los estudiantes tienen que resolver una situación análoga a la propuesta en F9.1.1 con un contexto diferente. Se presenta una información en forma de porcentaje y se solicita el cálculo de 5 de las 6 razones externas que podrían calcularse a partir de esta.

TC9.2: *Sabemos que el 40 % de los alumnos del instituto lleva gafas.*

TC9.2.1: *Porcentaje de alumnos sin gafas.*

Calcula y di el significado:

TC9.2.2: *Razón entre alumnos con gafas y total de alumnos.*

TC9.2.3: *Razón entre alumnos sin gafas y total de alumnos.*

TC9.2.4: *Razón entre total de alumnos y alumnos con gafas.*

TC9.2.5: *Razón entre total de alumnos y alumnos sin gafas.*

TC9.2.6: *Razón entre alumnos sin gafas y alumnos con gafas.*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de personas del instituto con gafas. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de personas del instituto sin gafas. Extensiva, discreta. T: Total de personas. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el total de personas con gafas y el total de personas en el instituto (análogamente para $(1-k)$ con las personas sin gafas).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \dfrac{k}{1-k}\, P_2$	**Estructura numérica:** $(100{:}\, 40 + \square) \leftrightarrow (100{:}\, \square + x_1), (1{:}\, x_1 + \square),$ $(x_2{:}\, 1 + \square), (100{:}\, x_4 + x_6)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

La ficha de trabajo concluye con un problema de Tipo II, pero en esta ocasión sin preguntas intermedias. Se introduce para valorar si, tras varios problemas estructurados, los alumnos son capaces de resolver este problema planteado de forma directa. La segunda pregunta del problema solicita un "falso complementario" que no puede calcularse con los datos del problema

TC9.3: *Sabemos que en una oficina de 35 empleados 21 son morenos.*
TC9.3.1: *¿Qué porcentaje hay de morenos?*
TC9.3.2: *¿Qué porcentaje hay de rubios?*

Tipo de problema: Valor perdido, Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de personas morenas que trabajan en la oficina. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de personas no morenas que trabajan en la oficina. Extensiva, discreta. T: Total de personas que trabajan en la oficina. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa las personas morenas que trabajan en una oficina y el total de trabajadores de esta (análogamente para $(1-k)$ con las personas no morenas).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \dfrac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(35{:}\,21 + \square) \leftrightarrow (100{:}\,x_1 + \square)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

VII.1.3.2. Décima sesión: Cálculo directo con porcentajes

La décima sesión retoma los objetivos y contenidos que se planteaban para la primera sesión dedicada al porcentaje en la secuencia anterior (novena sesión). Estos objetivos didácticos y contenidos se recogen en la Tabla VII - 3.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Profundizar en el concepto de porcentaje como tanto por cien. • Consolidar la relación entre los problemas de porcentajes y los de proporcionalidad directa previamente estudiados. • Calcular un porcentaje de una cantidad dada (cálculo directo, Tipo I).	• Porcentajes. • Cálculo de la parte conocidos el porcentaje que representa y el total.

Tabla VII - 3. Objetivos didácticos y contenidos de la décima sesión (Ciclo III-1).

Esquema de la sesión:

- Se recogen las producciones de los alumnos para TC9 y se realiza una puesta en común. (10 min)
- A partir de la situación introductoria F10.1 los alumnos se introducen en el cálculo de la parte conocidos el porcentaje que representa y la cantidad total. (10 min)
- Se realiza una puesta en común con todo el grupo de F10.1 y se institucionaliza el proceso asociándolo a la resolución de un problema de valor perdido. (5 min)
- Mediante los problemas F10.2 los alumnos consolidan las técnicas aprendidas asociadas al cálculo de porcentajes. (15 min)
- Puesta en común, con todo el grupo, de F10.2. (10 min)
- Entrega de los problemas asociados al cálculo con porcentajes (TC10) para que los alumnos refuercen en casa de forma individual los contenidos.

Diseño y análisis de las actividades:

La sesión cuenta con tres fichas de trabajo, las dos primeras de aula, situación introductoria F10.1 y refuerzo F10.2, y una ficha de trabajo para casa TC10.

La situación introductoria es un problema de Tipo I, similar a los ya trabajados en la sesión anterior, pero sin estructurar. Si bien la situación a partir de la que se desarrollan las preguntas no presenta la información del porcentaje de forma compacta, sino explicitando dos cantidades (una de ellas 100) referidas a dos magnitudes distintas. Así, los alumnos deben interpretar en primer lugar que dicha información puede ser leída en forma de porcentaje, y luego resolver el problema de valor perdido propuesto. El diseño trata de acercar la resolución de este tipo de problemas con porcentajes a los conocimientos previamente adquiridos por los estudiantes.

F10.1.1: *Si quiero hacer 100 g de masa para pizza tengo que poner 40 g de harina de trigo.*
F10.1.1.1: *¿Qué porcentaje de harina de trigo lleva la masa para pizza?*
F10.1.1.2: *¿Cuánta harina de trigo tendré que poner si quiero hacer 270 g de masa de pizza?*

Tipo de problema: Valor perdido, Tipo I.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Masa de harina de trigo en la masa de pizza. Extensiva, continua. P_2: Masa resto de ingredientes en la masa de pizza. Extensiva, continua. T: Masa de la masa para pizza. Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre la masa de harina de trigo y la masa de la masa para pizza.
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \frac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(100{:}\, 40 + \square) \leftrightarrow (270{:}\, x_2 + \square)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En la ficha de trabajo F10.2 encontramos tres problemas. Los dos primeros, F10.2.1 y F10.2.2, son problemas de valor perdido en una situación de porcentaje de Tipo I. En concreto, F10.2.1, aparece en la secuencia del ciclo anterior como TC9.2.

F10.2.1: *En el instituto hay 460 alumnos repartidos de la siguiente forma: en primer ciclo está el 45% de los alumnos, en segundo ciclo el 30 %, y el resto está en bachiller.*

F10.2.1.1: *¿Qué porcentaje de alumnos hay en bachiller?*

F10.2.1.2: *¿Cuántos alumnos hay en bachiller?*

Tipo de problema: Valor perdido. Tipo I.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de alumnos en primer ciclo. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de alumnos en segundo ciclo. Extensiva, discreta. P_3: Cantidad de alumnos en bachiller. Extensiva, discreta. T: Cantidad total de alumnos. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k_1, comparación multiplicativa entre el número de alumnos de primer ciclo y el total de alumnos del instituto (análogamente para k_2 con los alumnos de segundo ciclo y k_3 para los alumnos de bachiller).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 + P_3$ $P_1 = k_1 \cdot T \quad P_2 = k_2 \cdot T \quad P_3 = k_3 \cdot T$ $k_1 + k_2 + k_3 = 1$	**Estructura numérica:** $(100{:}\, 45 + 30 + x_1) \leftrightarrow (460{:}\, \square + \square + x_2)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

F10.2.2: *Están poniendo baldosas nuevas en el paseo. La empresa dice que han embaldosado ya el 30 % de la superficie. Sabemos que las aceras del paseo tienen una superficie total de 8000 m^2.*

F10.2.2.1: *¿Qué superficie de acera está ya embaldosada?*

F10.2.2.2: *¿Qué superficie de acera está todavía sin embaldosar?*

Tipo de problema: Valor perdido, Tipo I.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: P_1: Superficie de acera embaldosada. Extensiva, continua. P_2: Superficie de acera sin embaldosar. Extensiva, continua. T: Superficie total de acera. Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre la superficie de acera embaldosada y la superficie total (análogamente con la superficie no embaldosada para $1 - k$).

Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \frac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(100{:}\, 30 + \square) \leftrightarrow (8000{:}\, x_1 + x_2)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** Enteras.

El problema F10.2.3 podría no considerarse como un problema de porcentaje. Se trata de un problema de valor perdido en el que ni los datos que se proporcionan ni el dato que se solicita al estudiante vienen dados en forma de porcentaje. Sin embargo, la condición de regularidad viene dada en forma de porcentaje, es decir, que la relación entre los datos proporcionados y los datos que se solicitan es de proporcionalidad directa, y viene expresado en el problema por la expresión "hay el mismo porcentaje". No es necesario calcular dicho porcentaje, por lo que este problema puede ser una medida para investigar si los estudiantes pueden interpretar el porcentaje como una razón que al mantenerse constante permite resolver el problema de valor perdido propuesto.

F10.2.3: *En 1º hay 80 alumnos, de los cuales 32 son chicas. Sabemos que en 2º hay el mismo porcentaje de chicas que en 1º y sabemos que en 2º hay un total de 75 alumnos. ¿Cuántas chicas hay en 2º?*

Tipo de problema: Valor perdido.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Magnitudes involucradas: P_1: Cantidad de chicas. Extensiva, discreta. P_2: Cantidad de chicos. Extensiva, discreta. T: Cantidad total de alumnos. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre la cantidad de chicas y el total de alumnos (análogamente con los chicos para $1-k$).
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \frac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(100{:}\, 30 + \square) \leftrightarrow (8000{:}\, x_1 + x_2)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

Al igual que en el ciclo anterior, de forma exploratoria se introduce un problema asociado a aumentos y disminuciones porcentuales en la tarea para casa. En el primer aparatado de TC10.1 los alumnos deben aplicar un aumento (problema de Tipo I) y en el segundo apartado calcular qué porcentaje ha aumentado el precio de un producto (Tipo II). Se espera que, al no haber institucionalizado estas situaciones, los alumnos hagan uso de la estructura aditiva y razonen mediante una estructura parte-parte. Es previsible una mayor dificultad en el segundo apartado en el que tienen que calcular la diferencia de precio de forma previa a abordar el problema de porcentaje siguiendo esta estructura de razonamiento. Este problema coincide en su estructura multiplicativa con su homónimo en el ciclo anterior, aunque se ha modificado su estructura numérica debido a que la cercanía de los valores a la unidad generó en el ciclo anterior respuestas que no permitían analizar correctamente las producciones de los estudiantes según las categorías establecidas.

TC10.1: *Debido a la subida del precio de la gasolina, los billetes de autobús también van a subir de precio. En concreto la subida va a ser del 5 %.*

TC10.1.1: *Si un billete de autobús cuesta 1,10 euros, ¿cuánto costará después de la subida?*

TC10.1.2: *Si un litro de gasolina ha pasado de costar 0,8 euros a costar 0,9 euros, ¿cuál es el porcentaje de subida del precio de la gasolina?*

TC10.1.3: *Teniendo en cuenta lo que ha subido el precio de gasolina, ¿crees que es justa la subida del precio del billete del autobús?*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos porcentuales. Tipo I y Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: PI: Valor económico inicial de los productos. Extensiva, discreta. S: Valor económico de la subida. Extensiva, discreta. PF: Valor económico final de la subida. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el valor económico de la subida y el precio inicial del producto.
Estructura funcional: $PF = PI + S$ $PF = (1+k)\cdot PI \qquad S = k\cdot\ PI$	**Estructura numérica:** $(\square{:}\,5+100) \leftrightarrow (x_1{:}\,\square+1{,}10)$ $(0{,}9{:}\,\square+0{,}8) \leftrightarrow (\square{:}\,x_2+100)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

VII.2. Fase de acción

Tras analizar los cambios realizados durante la planificación de este ciclo de investigación-acción, concretamos los detalles de la muestra de estudiantes que participaron en este ciclo, el calendario de actuación y, para dar cuenta de la acción, desarrollamos la información obtenida a partir del diario de clase del profesor-investigador.

VII.2.1. Participantes

La fase de acción del ciclo III-1 se realizó durante el curso 2015-2016 en el IES Leonardo de Chabacier de Calatayud (Zaragoza). En dicho curso, el centro tenía cuatro vías en 1º de ESO con un total de 75 alumnos repartidos en cuatro grupos ordinarios (A, B, C y D) más otros 13 alumnos en el Programa de Aprendizaje Básico (PAB) y 5 en la Unidad de Intervención Educativa Específica (UIEE). EL profesor-investigador impartía clase en el grupo ordinario D. Además de en este grupo, se intervino en los grupos ordinarios B y C (ver número de estudiantes en cada grupo en la Tabla VII

- 4), dejando el grupo A como grupo de control (de 17 alumnos). Como en ciclos anteriores, la elección de los grupos en donde se intervino y del grupo de control se realizó en base a la compatibilidad horaria del profesor-investigador con el horario de docencia de matemáticas en los grupos involucrados y a los posibles solapamientos de horas de docencia entre los diferentes grupos.

	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Total
Alumnos	17	20	21	58
Equipos	8	10	10	28

Tabla VII - 4. Número de participantes y de equipos de trabajo (Ciclo III-1).

Como en ciclos anteriores, en los grupos con un número par de estudiantes (en este caso el C) se crearon parejas para el trabajo en equipo durante las sesiones de clase y en los grupos con número impar de estudiantes se crean parejas y un trio para agrupar a los estudiantes. Así en las fichas de tarea para casa y en la prueba escrita (que se realizan de forma individual) contaremos con un total de 58 producciones para cada problema. Por otra parte, en los problemas correspondientes a las fichas de trabajo en clase contaremos con un total de 28 producciones (una por cada equipo). La codificación de estudiantes y equipos se realizará, como en el resto de la memoria, según la letra correspondiente al grupo, un ordinal correspondiente al equipo y, en su caso, otro ordinal para distinguir a los estudiantes que forman cada equipo.

VII.2.2. Calendario de actuación

	Grupo B		Grupo C		Grupo D	
Sesión 1	05-04-16	09:25 – 10:15	04-04-16	10:35 – 11:25	04-04-16	08:30 – 09:20
Sesión 2	06-04-16	09:25 – 10:15	07-04-16	09:25 – 10:15	06-04-16	13:35 – 14:25
Sesión 3	07-04-16	13:35 – 14:25	08-04-16	09:25 – 10:15	07-04-16	08:30 – 09:20
Sesión 4	08-04-16	13:35 – 14:25	11-04-16	13:35 – 14:25	08-04-16	08:30 – 09:20
Sesión 5	12-05-16	09:25 – 10:15	12-04-16	10:35 – 11:25	11-04-16	08:30 – 09:20
Sesión 6	13-04-16	09:25 – 10:15	14-04-16	09:25 – 10:15	13-04-16	13:35 – 14:25
Sesión 7	14-04-16	13:35 – 14:25	15-04-16	09:25 – 10:15	14-04-16	08:30 – 09:20
Sesión 8	15-04-16	13:35 – 14:25	18-04-16	13:35 – 14:25	15-04-16	08:30 – 09:20
Sesión 9	19-04-16	09:25 – 10:15	19-04-16	10:35 – 11:25	18-04-16	08:30 – 09:20
Sesión 10	20-04-16	09:25 – 10:15	21-04-16	09:25 – 10:15	20-04-16	13:35 – 14:25
Sesión 11	21-04-16	13:35 – 14:25	25-04-16	13:35 – 14:25	21-04-16	08:30 – 09:20
Sesión 12	26-04-16	09:25 – 10:15	26-04-16	10:35 – 11:25	25-04-16	08:30 – 09:20
Prueba	27-04-16	09:25 – 10:15	28-04-16	09:25 – 10:15	27-04-16	13:35 – 14:25

Tabla VII - 5. Calendario de actuación (Ciclo III-1).

En la Tabla VII - 5 se muestra el calendario de actuación y el horario en el que se llevaron a cabo las sesiones. La planificación tuvo en consideración los festivos locales y las actividades extraescolares para intentar que las sesiones 4 y 8 coincidieran con la última sesión de una semana natural. Como se observa, en este ciclo se pudo llevar a cabo la propuesta de forma simultánea en todos los grupos experimentales.

VII.2.3. Desarrollo de las sesiones

Como en los dos capítulos anteriores, en esta sección resumiremos el desarrollo de las sesiones a partir de la información recogida en el diario de clases, comentaremos las incidencias sobre la asistencia y los aspectos actitudinales de los estudiantes y expondremos las apreciaciones sobre la comprensión y el funcionamiento de las sesiones que hace el profesor-investigador “sobre la marcha” y que después se contrastarán con los datos obtenidos de las producciones escritas.

VII.2.3.1. Primera sesión

No asisten los alumnos B7.1 y D2.2.

El plan se ejecuta según lo previsto en los tres grupos, ajustándose correctamente al tiempo e incluso en el grupo C se pueden dedicar unos minutos adicionales a la institucionalización y el debate tras la segunda ficha.

La actitud, en general, es buena. En el grupo D cuyo comportamiento a lo largo de todo el curso fue peor que en el resto de los grupos cuesta más involucrarlos en la dinámica de trabajo. Sin embargo, el profesor-investigador apunta que, una vez que se ha conseguido involucrarlos en la actividad, el interés por el trabajo en este grupo es mayor que en los grupos B y C en donde se constata una mayor pasividad.

Algunas de las intervenciones individuales de los alumnos evidencian algún problema de comprensión de los contenidos trabajados. En particular la distinción entre magnitud y el valor de la cantidad de magnitud y la unidad empleada plantea algunas dificultades en los tres grupos.

La valoración global de la sesión es positiva. Los estudiantes se implican con la metodología de trabajo. El profesor-investigador aprecia que en los grupos cuyo rendimiento de trabajo en la asignatura era peor (en concreto en el grupo D) la propuesta de trabajo que rompe con la dinámica habitual de clase funciona mejor.

VII.2.3.2. Segunda sesión

No asiste el alumno D1.1.

El plan se ejecuta según lo previsto. Los tiempos asignados a cada actividad se cumplen sin inconvenientes en el grupo C. En el grupo A la institucionalización prevista al final de la clase se queda corta de tiempo por lo que el profesor-investigador indica que se ha dirigido el debate más de lo deseable. En el grupo D, por un error del profesor, una de las preguntas de la situación introductoria no se trata en el debate tras la realización de este problema por lo que tiene que recuperar dicha cuestión tras la ficha F2.2. Este hecho provoca que se dedique menos tiempo del deseable a la corrección en grupo de esta segunda ficha de trabajo.

Se sigue constatando cierta pasividad de los estudiantes, especialmente en los grupos B y C, aunque el comportamiento es adecuado. En el grupo D se registra un peor comportamiento. El profesor-investigador lo relaciona con que la clase se realice en la última hora lectiva de la jornada.

En todos los grupos hay muchos problemas a la hora de abordar la situación introductoria F2.1. Dichos problemas parecen estar asociados a la propia interpretación de división como un reparto equitativo y al hecho de que la razón que parece más natural para los alumnos (calcular el precio por unidad de compra) arroja un resultado menor que uno. Muchas parejas dividen el número mayor entre el menor y lo interpretan como precio de cada producto sin reflexionar sobre el significado de las cantidades que dividen. Pese a estas dificultades en todos los grupos se encuentran parejas en los que se desarrolla convenientemente la idea de razón y su interpretación como tanto por uno lo cual permite desarrollar el debate posterior a la situación e institucionalizar estos conceptos. La reflexión sobre la condición de regularidad necesaria para poder interpretar la razón aparece de forma natural en algún equipo del grupo C, pero no aparece en ninguno de los equipos de los grupos B y D.

En una valoración general se estima que puede faltar algo de tiempo en esta sesión y que, bajo la percepción del profesor-investigador, la sesión y la situación introductoria no han funcionado de forma óptima, al contrario de lo que sucedió en el ciclo II-1. Se reflexiona sobre la conveniencia de dicha situación, que sigue pareciendo adecuada pese a las dificultades detectadas en este ciclo, especialmente en el control semántico de las operaciones que realizan los estudiantes.

No se propone ningún cambio, aunque se deja constancia de que, de proseguir las dificultades, quizá haya que adaptar la dificultad de las situaciones planteadas o disminuir la cantidad de problemas en cada ficha de trabajo.

VII.2.3.3. Tercera sesión

No asisten los alumnos C3.1, C10.1, D1.1 y D8.1.

La sesión se realiza según lo planificado. El tiempo es suficiente en los grupos B y C. En el grupo D falta algo de tiempo para una institucionalización más calmada.

Se constata un mejor comportamiento que en la sesión anterior y, sobre todo, una mayor implicación de los estudiantes en el trabajo y participación durante la sesión.

En general se avanza positivamente en la comprensión de la noción de razón y de condición de regularidad. La situación que plantea una relación de proporcionalidad simple inversa, F3.1.1, (introducida en las fichas de trabajo en clase tras los cambios realizados después del ciclo II-1) genera algún problema en los grupos B y C, pero un importante número de equipos consigue detectarla como de no proporcionalidad directa usando los argumentos sobre razón, su interpretación y condición de regularidad. Sin embargo, esta situación parece causar muchos más problemas en el grupo D. El resto de las situaciones no parece causar muchos problemas, tampoco F3.1.5 en la que deben asignar significado a una razón menor que la unidad que proviene de un cociente de magnitudes discretas.

La sesión se valora muy positivamente, aunque se reflexiona sobre la conveniencia de no empezar la ficha por la situación inversa ya que esta genera muchas dudas al principio de la sesión lo cual puede ralentizar algo el trabajo.

VII.2.3.4. Cuarta sesión

No asiste el alumno C6.1 (expulsado por un expediente disciplinario no se reincorpora hasta la sesión undécima). Tampoco asisten los alumnos D1.1 y D5.1.

En los tres grupos se decide realizar una modificación al plan previsto y no realizar el debate para la corrección de la ficha de trabajo F4.2. El tiempo empleado en el debate para corregir e institucionalizar los problemas de comparación en TC3 y F4.1, respectivamente, es mucho mayor del planificado.

En los grupos B y D, tanto el comportamiento como la implicación en el trabajo son buenos. En el grupo C, sin embargo, quizá debido a que se trata de la última hora lectiva de la jornada, el comportamiento se califica como “muy malo”. También deficientes son la atención y la implicación en el trabajo. Dos alumnos se niegan a trabajar durante la sesión.

Sobre la comprensión, la situación de cambio de divisas en TC3 es la que mayores problemas parece plantear. Se empiezan a detectar grupos de unos cuatro o cinco alumnos en cada clase que no consiguen seguir el ritmo del resto del grupo. Estos alumnos presentan dificultades para trabajar con distintas representaciones del racional (decimal y fracción), para realizar el adecuado control semántico de las situaciones planteadas y para construir el significado de razón externa.

Se decide posponer en los tres grupos la corrección de F4.2 para la siguiente sesión. Como en el grupo C es donde más problemas ha habido para acabar el trabajo de clase se decide no entregar la parte de la ficha con tarea para casa correspondiente a los problemas TC4.1, TC4.2, TC4.3 y TC4.4.

VII.2.3.5. Quinta sesión

No asisten los alumnos C5.2 y C6.1.

Se ejecuta la sesión según lo previsto (incluyendo la corrección pospuesta de F4.2) salvo en el grupo B en el que no da tiempo de poner en común los problemas de comparación cualitativa.

En esta sesión, tanto el comportamiento como la implicación en el trabajo de todos los grupos es adecuada.

La comprensión de los alumnos parece evolucionar adecuadamente en esta sesión planificada como un taller de problemas. Aunque se agrandan las diferencias entre los pequeños grupos de cuatro o cinco alumnos de cada clase que presentaban dificultades graves en las sesiones anteriores y el resto de los alumnos. Aparecen diferentes técnicas para resolver los problemas basadas en la utilización de las razones externas.

En general, se valora de forma muy positiva la sesión. La única toma de decisiones que se realiza tiene que ver con la falta de tiempo en el grupo B, así que se pospone la corrección en este grupo de los problemas de comparación cualitativa.

VII.2.3.6. Sexta sesión

No asisten los alumnos C3.2, C6.1, C8.2 y D1.1

A diferencia de otros ciclos, en los que el absentismo era bajo, el elevado número de faltas de asistencia de algunos alumnos, especialmente en el grupo C, hace que el profesor-investigador reagrupe a los alumnos asistentes para que no trabajen en solitario. En esta sesión se ponen a trabajar en equipo los alumnos C6.2 y C5.2, por una parte, y los alumnos C3.1 y C5.1 por otra.

El plan se ejecuta según los previsto, sin embargo, falta algo de tiempo para terminar la puesta en común de los problemas de la ficha F6.2 en los grupos B y C (en el D se completa todo según lo previsto).

El comportamiento es adecuado, sin embargo, algunos estudiantes de cada grupo empiezan a encontrarse bastante desconectados del ritmo general de la clase, lo que provoca que su implicación en el trabajo disminuya. Se decide hacer una pequeña intervención sobre temas de disciplina y convivencia en los grupos C y D en los últimos minutos de clase.

A diferencia de lo ocurrido en el ciclo anterior, en esta sesión aparecen algunas reglas de tres en el grupo B, precisamente el grupo en el que los alumnos tenían, de forma global, un mejor desempeño en matemáticas. En este mismo grupo aparecen estrategias multiplicativas y se percibe un “rechazo” hacia el razonamiento con la razón “metros por euro”. Los estudiantes prefieren razonar con el precio unitario Atendiendo a las sugerencias del observador externo del ciclo anterior, en el momento en el que aparece la regla de tres en algunos equipos se hace una pequeña intervención explicando por qué evitamos dicha técnica para la resolución de problemas de valor perdido. En el grupo C el profesor-investigador percibe una muy mala comprensión a lo largo de la sesión, mientras que en el grupo D ocurre lo contrario.

La valoración general es positiva, aunque, como en casi todas las sesiones en las que se realiza una situación introductoria en este ciclo, el profesor-investigador percibe falta de comprensión de los conceptos en un número elevado de estudiantes.

VII.2.3.7. Séptima sesión

No asisten los alumnos B2.2, B8.2, C6.1 y D1.1.

La sesión se desarrolla según lo previsto, aunque los grupos C y D falta un poco de tiempo para la puesta en común del problema F7.1.4.

Tanto el comportamiento como el trabajo durante la sesión se valoran de forma muy positiva.

Las principales dificultades se detectan en el problema de cambio de divisas (magnitudes homogéneas) y en el problema parte-parte-todo. Se constatan dificultades importantes en un número reducido de alumnos con las operaciones multiplicación y división y el control semántico de las situaciones para decidir cuándo tiene sentido una u otra operación.

La valoración de la sesión es muy positiva.

VII.2.3.8. Octava sesión

No asisten los alumnos C3.1, C6.1 y C10.1.

La sesión se desarrolla según el tiempo y la estructura previstos en los tres grupos, aunque la puesta en común de F8.2 es algo rápida en los grupos C y D.

El comportamiento y el trabajo se valoran como muy positivos en esta sesión, especialmente en el grupo B.

Como en el ciclo anterior, el contexto del problema F8.2.1 genera problemas de comprensión. Se valora muy positivamente haberlo desplazado a la segunda ficha y que no sea la situación introductoria de la proporcionalidad compuesta. Sin embargo, se reflexiona sobre si habría que eliminar dicho contexto totalmente o desplazarlo, todavía más, hacia el final de la sesión. Se constata que en varios equipos aparecen diferentes amalgamaciones, e incluso aparecen varias maneras de resolver el mismo problema por un mismo equipo.

Debido a la falta de tiempo, especialmente en el grupo C, se decide sobe la marcha reducir el número de problemas de TC8. En concreto, se dejan solo los problemas relacionados con la proporcionalidad compuesta TC8.8 y TC8.9.

La sesión se valora de forma muy positiva.

VII.2.3.9. Novena sesión

No asisten los alumnos B1.2, B7.1, C3.1, C6.1 y C10.1.

El comportamiento y el trabajo se valoran como positivos en esta sesión, especialmente en el grupo C.

El tiempo es ajustado, pero se termina la sesión según la planificación. Sin embargo, se deja constancia de que la puesta en común e institucionalización tras la realización de F9.1 es muy dirigida.

Aparecen muchas dificultades, como se constató en el ciclo anterior, para relacionar los porcentajes con situaciones de proporcionalidad directa en la que aparecen dos cantidades de magnitudes distintas. También resulta complicado para los alumnos calcular la razón concreta que se les solicita en los apartados de F9.1. Sin embargo, hay un número de estudiantes significativo que parece comprender la conexión del porcentaje con las situaciones de proporcionalidad simple directa y se desenvuelve de manera adecuada durante la sesión. Las dificultades aparecen, en mayor medida, en el grupo B, mientras que se valora de forma más positiva la comprensión en los grupos C y D.

Debido a los problemas de comprensión detectados, se toma la decisión de dedicar unos minutos de la sesión siguiente para terminar de institucionalizar correctamente los contenidos de esta sesión.

VII.2.3.10. Décima sesión

No asisten los alumnos C3.1 y C6.1.

Falta tiempo en todos los grupos para la puesta en común de F10.2.

El comportamiento es dispar, mientras que en el grupo B es muy bueno, en el grupo D es bastante malo, probablemente este hecho venga provocado por tratarse de la última hora lectiva de la jornada en este grupo.

La comprensión parece mejorar ligeramente. Sin embargo, el profesor-investigador decide intervenir en diferentes momentos de la sesión para dirigir y reconducir el trabajo de los alumnos. En bastantes momentos de la sesión se detecta que un buen número de alumnos se encuentran atascados sin saber cómo continuar con los problemas. Aparecen algunas estrategias de factor de cambio, razonando con las cantidades que corresponden a un 1 % (análisis unitario), especialmente en el grupo D.

Se pospone la puesta en común de F10.2 para el principio de la clase siguiente.

VII.2.3.11. Undécima sesión

No asisten los alumnos C3.1 y C8.1.

Se ejecuta el plan revisado según lo previsto salvo en el grupo C en el que no da tiempo de hacer la puesta en común de F11.2.

El comportamiento en los grupos B y D es bueno. En el grupo C se percibe un ambiente de enfado general, los alumnos verbalizan que lo que estamos haciendo en el porcentaje “es muy raro” y que ellos quieren hacerlo como lo hacían en primaria (considerar el porcentaje como operador para hacer cálculos directos). Se genera un pequeño debate con los alumnos del grupo C para reconducir esta situación (lo cual provoca el retraso para la puesta en común de F11.2).

Se constatan muchas dificultades, en general, para trabajar con las razones externas. Siguen apareciendo estrategias de análisis unitario en los grupos B y D. Como en las sesiones anteriores, se sigue apreciando un número significativo de alumnos (no mayoritario) que asume las técnicas institucionalizadas y razona de forma natural con las razones externas y su significado.

En el grupo C se pospone la puesta en común de la ficha de trabajo F11.2 hasta el inicio de la sesión siguiente.

VII.2.3.12. Duodécima sesión

Asisten todos los alumnos.

El plan se ejecuta según lo previsto.

El comportamiento y el trabajo es bueno en los tres grupos a lo largo de toda la sesión.

El profesor-investigador detecta una mejora en el desempeño de los alumnos en casi todos los focos de investigación durante esta sesión de repaso. El reconocimiento como no directamente proporcionales de las situaciones de proporcionalidad inversa sigue causando problemas, especialmente en el grupo D.

La sesión se valora de forma positiva.

VII.2.3.13. Prueba escrita

No asiste el alumno C10.2.

La prueba escrita se desarrolla sin incidencias.

El tiempo para completar la prueba parece adecuado y la mayoría de los estudiantes la terminan antes del final de la sesión.

No se evidencian problemas de comprensión de los enunciados de los problemas.

VII.3. Fase de observación

En esta sección se analizan los resultados de la observación para el tercer ciclo en 1º de ESO a partir de la información recogida a través de: las producciones de los estudiantes en todos los problemas realizados durante la propuesta y en la prueba escrita final, las producciones de los estudiantes del grupo de control en la prueba escrita, las entrevistas semiestructuradas realizadas a cuatro estudiantes de los grupos experimentales y los informes realizados por el observador externo.

VII.3.1. Análisis de las producciones escritas

Las producciones de los estudiantes que analizamos se recogieron antes de realizar las correcciones y puestas en común para que estas no recogieran las soluciones aportadas por otros compañeros o por el profesor-investigador.

El análisis se lleva a cabo en dos fases. En primer lugar, se analiza la situación introductoria en cada foco de interés. En segundo lugar, se analizan el resto de las producciones para los problemas realizados durante la secuencia y durante la prueba escrita. De esta forma, puede analizarse la posible influencia de la instrucción en las producciones de los alumnos. Para evitar reiteraciones innecesarias en este capítulo no volvemos a recoger el enunciado de la situación introductoria que ya se han presentado en el diseño y análisis de producciones del Capítulo V.

Como en los capítulos V y VI, cada fase del análisis se realiza a dos niveles de concreción. En primer lugar, se estudian las producciones según cuatro categorías generales: no entrega o no asiste (N), entrega en blanco (B), resolución incorrecta (I) y resolución correcta (C). En segundo lugar, se estudian las producciones según las categorías específicas descritas en el Capítulo III para cada foco de interés. En este nivel se analizan diferentes estrategias correctas e incorrectas a la hora de resolver los problemas, errores cometidos, sistemas de representación empleados y otras peculiaridades de las respuestas asociadas a la especificidad de los problemas en cada foco. Además, dentro de cada nivel, el análisis cuantitativo según las categorías establecidas se acompaña de un análisis cualitativo de las respuestas. Para evitar reiteraciones, en este capítulo no presentamos la descripción de las categorías de análisis en cada foco de contenido. Esta descripción puede consultarse en el Capítulo III y en el Capítulo V.

VII.3.1.1. Reconocimiento de magnitudes y uso del vocabulario asociado

Como se comentó en el Capítulo V, recogemos el análisis de este foco de interés transversal para el que, a diferencia de los focos de contenido prioritarios, no se establecen categorías específicas de análisis. Se realiza un análisis cuantitativo a través de las categorías generales y un análisis cualitativo de algunos de los problemas propuestos.

En este foco los problemas involucrados no han sufrido cambios en la redacción ni en su codificación y se corresponden con los problemas contenidos en las fichas de trabajo F1.1 (problemas F1.1.1 a F1.1.6), F1.2 (problemas F1.2.1 y F1.2.2), TC.1 (problemas de TC1.1 a TC1.6) y parte de los contenidos en la ficha de trabajo TC.4 (problemas de TC4.5 a TC4.9). Es decir, se analizan 862 producciones.

Análisis de la situación introductoria.

Para los problemas de la ficha F1.1 no analizamos las categorías generales ya que las producciones a estas preguntas de tipo exploratorio no pueden clasificarse en términos de acierto o error.

En F1.1.1 y F1.1.4 se requiere que los alumnos comparen y cuantifiquen propiedades que no son magnitudes. Aunque las observaciones generales coinciden con las descritas en el ciclo II-1 caben destacar dos hechos relativos a estos dos ítems que propician una mayor riqueza en el debate que las producciones del ciclo anterior:

- Salvo en el grupo B, en los otros dos grupos aparecen respuestas en las que se alega que no se puede responder a las preguntas porque no se presentan magnitudes. Por ejemplo, el equipo D1 expresa: "No se puede saber o medir". El equipo C1 argumenta en un sentido parecido: "La alegría / El gusto no es una unidad de medida".
- Aparece un tipo de respuesta que no se había observado anteriormente. El equipo B6 establece una escala de 1 a 10 y valora dentro de esa escala la alegría y el gusto por el jamón de cada uno de los componentes del equipo.

Como en el ciclo II-1 el resto de los equipos responde qué miembro del equipo presenta en mayor grado la cualidad y "cuantifica" usando adverbios como "mucho", "poco", "algo", "bastante", … Otros equipos argumentan que los dos miembros presentan la cualidad en el mismo grado ("los dos por igual").

También en los ítems F1.1.2, F1.1.3, F1.1.5 y F1.1.6 en los que se sí se presentaba una magnitud concreta hemos encontrado respuestas muy similares a las descritas en la sección V.3.1.1. Sin embargo, cabe destacar que en F1.1.6 en el ciclo anterior solo se describieron 5 respuestas que argumentan que la cantidad de dinero es diferente porque las libras y los euros no tienen el mismo valor. En este ciclo el número de respuestas similares es de 16. La mayoría argumenta que necesitan saber el cambio entre libras y euros, o simplemente que las libras y los euros no valen lo mismo. Por otro lado, destaca el intento de varios equipos por cuantificar la diferencia. Incluso el equipo D9 (ver Imagen VII - 1) para cuantificar la diferencia multiplica la cantidad de libras (o euros) por 0,8, siendo la única producción en la que podría considerarse que aparece una idea de razón externa unitaria.

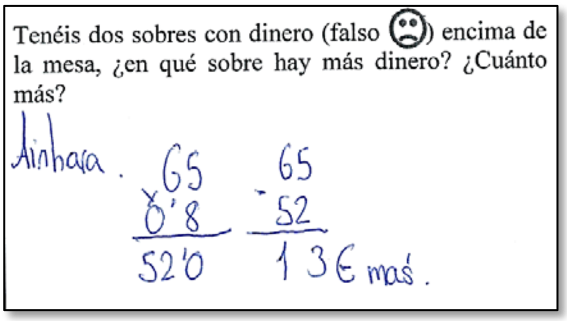


Imagen VII - 1. Producción del equipo D9 para el problema F1.1.6 (Ciclo III-1).

Para los problemas F1.2.1 y F1.2.2 sí se realizó un análisis según las categorías generales (Tabla VII - 6) para el que se clasificaron como correctas solo las producciones en las que todos los números detectados por los alumnos estaban correctamente clasificados según se usaban para medir o no se usaban para medir.

		N	B	I	C
F1.2.1	N.º de respuestas	0	0	6	22
	Porcentaje	-	-	21,4 %	78,6 %
F1.2.2	N.º de respuestas	0	0	1	27
	Porcentaje	-	-	3,6 %	96,4 %

Tabla VII - 6. Resultados generales en los problemas F1.2.1 y F1.2.2 (Ciclo III-1).

Los resultados obtenidos son muy similares a los que se obtuvieron en el ciclo II-1. Al igual que entonces, las respuestas clasificadas como incorrectas en F1.2.1 añaden a la lista de números que se corresponden con una cantidad de magnitud la fecha de facturación alegando que "se usa para medir el día en el que estamos" o que "se usa para medir el tiempo".

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Analizamos el desempeño de los estudiantes en el resto de los problemas de identificación de magnitudes y uso del vocabulario asociado diseñados explícitamente para tal fin en la propuesta. Los resultados cuantitativos para estas categorías pueden observarse en la Tabla VII - 7. Las categorías I y C, se desdoblan para analizar si se ha detectado de forma incorrecta o correcta, tanto las magnitudes como las unidades empleadas. Vemos que en lo que se refiere a producciones no entregadas se produce el mismo efecto observado en el ciclo II-1 (ver Tabla V - 16). La tarea para casa 1 tiene un número de producciones no entregadas (categoría N) relativamente bajo, mientras que, en la tarea para casa, TC4, este número se triplica.

El número de respuestas en blanco (B) está concentrado principalmente en cuatro problemas, TC1.3, TC1.4, TC4.7 y TC4.8. En estos problemas aparecen una o varias magnitudes de cardinalidad. Los estudiantes o bien no consideran que dichas magnitudes puedan etiquetarse efectivamente con ese nombre o quizá no consideran la necesidad de ponerles una etiqueta concreta. A pesar de que este efecto no se observó en el ciclo II-1, se comprueba que disminuye significativamente desde TC1 hasta TC4 conforme avanza la instrucción.

En las respuestas clasificadas como incorrectas se observan también los errores descritos en el Capítulo V. A saber, identificar una magnitud bajo la etiqueta "cantidad de (unidades)" (por ejemplo, en lugar de tiempo, cantidad de horas) e identificar magnitud con unidad. Sin embargo, cabe destacar que las tasas de éxito en este ciclo son, en general, superiores a las alcanzadas en el ciclo II-1. Por ejemplo, ninguna tasa de respuestas correctas en la Tabla V - 16 alcanza el 50 %, mientras que en la Tabla VII - 7 encontramos hasta ocho porcentajes por encima de este valor en las columnas de respuestas correctas.

				Magnitud		Unidad	
		N	B	I	C	I	C
TC1.1	N.º de respuestas	6	0	32	20	33	19
	Porcentaje	10,3 %	-	55,2 %	34,5 %	56,9 %	32,8 %
TC1.2	N.º de respuestas	6	0	24	28	25	27
	Porcentaje	10,3 %	-	41,4 %	48,3 %	43,1 %	46,6 %
TC1.3	N.º de respuestas	6	14	20	18	27	11
	Porcentaje	10,3 %	24,1 %	34,5 %	31,0 %	46,6 %	19,0 %
TC1.4	N.º de respuestas	6	18	20	14	23	11
	Porcentaje	10,3 %	31,0 %	34,5 %	24,1 %	39,7 %	19,0 %
TC1.5	N.º de respuestas	6	2	21	29	18	32
	Porcentaje	10,3 %	3,4 %	36,2 %	50,0 %	31,0 %	55,2 %
TC1.6	N.º de respuestas	6	1	10	41	20	31
	Porcentaje	10,3 %	1,7 %	17,2 %	70,7 %	34,5 %	53,4 %
TC4.5	N.º de respuestas	18	1	7	32	8	31
	Porcentaje	31,0 %	1,7 %	12,1 %	55,2 %	13,8 %	53,4 %
TC4.6	N.º de respuestas	18	1	17	22	7	32
	Porcentaje	31,0 %	1,7 %	29,3 %	37,9 %	12,1 %	55,2 %
TC4.7	N.º de respuestas	18	6	10	24	11	23
	Porcentaje	31,0 %	10,3 %	17,2 %	41,4 %	19,0 %	39,7 %
TC4.8	N.º de respuestas	18	9	5	26	7	24
	Porcentaje	31,0 %	15,5 %	8,6 %	44,8 %	12,1 %	41,4 %
TC4.9	N.º de respuestas	18	0	13	27	5	35
	Porcentaje	31,0 %	-	22,4 %	46,6 %	8,6 %	60,3 %

Tabla VII - 7. Resultados generales en los problemas de identificación de magnitudes (Ciclo III-1).

VII.3.1.2. Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones

En esta sección se analizan las cerca de dos mil quinientas producciones relativas al foco 1 recogidas en este ciclo. Las sesiones 2 y 3 se dedican íntegramente a trabajar este foco de contenido. Además, debido a la modificación de la propuesta en torno al porcentaje también se dedica una buena parte de la sesión 9 a trabajar el concepto y el significado de la razón externa. Como en el anterior ciclo, se incluyen también problemas concretos en las fichas de trabajo TC4 y TC8 que recogen conceptos desde el principio de la propuesta y en la ficha F12 de repaso final. Así mismo, incluimos en esta sección los falsos problemas de proporcionalidad distribuidos a lo largo de toda la propuesta. Por último, recogemos el análisis de los 9 ítems de la prueba escrita que trabajan estos conceptos.

Como se trata de un ciclo de saturación y hay un gran número de ítems en este foco de interés, nos centraremos en destacar las diferencias y similitudes detectadas respecto al ciclo II-1.

Análisis de la situación introductoria.

La situación introductoria en este foco no ha sufrido cambios respecto al ciclo II-1. En ella se solicita calcular las razones externas en una situación de proporcionalidad (F2.1.1) y se hacen preguntas que simulan esta misma petición en una situación no proporcional (F2.1.2). En la Tabla VII - 8 se presentan los resultados para las categorías generales (en términos de éxito, C, o fracaso,

I) en el cálculo, o justificación de la improcedencia de este según el caso, de las razones externas solicitadas.

		N	B	I	C
F2.1.1	N.º de respuestas	0	0	13	15
	Porcentaje	-	-	46,4 %	53,6 %
F2.1.2	N.º de respuestas	0	7	11	10
	Porcentaje	-	25 %	39,3 %	35,7 %

Tabla VII - 8. Resultados generales en la situación introductoria de análisis de situaciones de proporcionalidad y cálculo de razones (Ciclo III-1).

Si comparamos los resultados de la Tabla VII - 8 con los que obtuvimos en la Tabla V - 17 observamos que en este ciclo los resultados de éxito son menores pero que el efecto relativo de cada categoría dentro de los ciclos es similar. Es decir, se obtiene una mejor tasa de éxito para el cálculo de las razones externas en el ejercicio en el que sí tenía sentido calcularlas (F2.1.1) que en el que había que justificar que las preguntas que se planteaban no tenían sentido (F2.1.2). Es en esta última pregunta donde se concentran (al igual que en el ciclo II-1) las respuestas en blanco. En general, parece que el planteamiento de un problema en el que la respuesta sea que no tiene sentido responder a la pregunta genera dificultades y desconcierto, quizá debido a un contrato didáctico no explícito.

Los errores encontrados de forma mayoritaria en F2.1.1 coinciden con los descritos en el ciclo II-1, esto es, para calcular el precio de cada producto (30 productos cuestan 15 €) los alumnos calculan la razón externa inversa a la que sería correcta y dicen que cada producto cuesta 2 € y que, por tanto, no se puede comprar ningún producto por 1 €. Este tipo de respuestas sigue un patrón totalmente análogo al mostrado en la Imagen V - 4 del Capítulo V.

También como en el ciclo anterior de 1º de ESO todas las respuestas correctas a F2.1.1 calculan las dos razones. Sin embargo, a diferencia de lo ocurrido en el ciclo II-1 solo encontramos dos respuestas que mencionen la necesidad de saber si los productos son iguales (concretamente se pone en cuestión si todos los productos cuestan el mismo precio). Por lo que, en este ciclo la aparición de la condición de regularidad ha resultado menos natural.

Análisis de las producciones tras la institucionalización.

Debido a la gran variedad de problemas diferentes en este foco de contenido prioritario, dividimos el análisis agrupándolos en los siguientes tipos de problemas: problemas en los que se solicita determinar si existe relación de proporcionalidad simple directa, problemas en los que se pide calcular las razones externas asociadas a una situación de proporcionalidad simple directa, problemas en los que se pide identificar o calcular una razón concreta en una situación de proporcionalidad simple directa y detección de falsos problemas de proporcionalidad.

Problemas en los que se solicita determinar si existe relación de proporcionalidad (directa).

Los problemas en los que los alumnos tenían que decidir si en una situación se podía considerar una relación de proporcionalidad simple directa o no son los que se relacionan en la

Tabla VII - 9. En ella podemos distinguir las situaciones de proporcionalidad simple inversa F3.1.1, TC4.8, F12.1.1.1 y PE.1.3 (en gris oscuro), situaciones en las que no había dos magnitudes TC2.3, F3.1.3, TC4.7 y F12.1.1.2 (gris intermedio), situaciones en las que las magnitudes que aparecían no estaban relacionadas o tenían una relación no proporcional TC2.2, TC4.5, F12.1.1.3, PE.1.1 y PE.1.2 (gris claro) y las situaciones en las que sí podía asumirse una relación de proporcionalidad simple directa (en blanco).

Con diferencias puntuales respecto al ciclo II-1, las tendencias generales se mantienen. Los alumnos tienen más dificultades en detectar como no directamente proporcionales las situaciones de proporcionalidad simple inversa y se manejan con éxito aceptable en el análisis del resto de situaciones. Tras unas tasas de éxito bajas en las primeras situaciones tras la institucionalización (TC2) las tasas de éxito aumentan. Las situaciones de proporcionalidad simple directa se detectan con tasas de éxito generalmente entre el 58 % y el 83 % de la prueba escrita, salvo la situación F3.1.5 que genera algún problema más (aunque también cabe señalar que se trataba del último problema de la sesión). Las relaciones no proporcionales se detectan con tasas de éxito similares a las proporcionales y las situaciones con distractores (o números que no representaban una magnitud) son las que mejores tasas de éxito alcanzan en este ciclo.

	N	B	I	C		N	B	I	C
TC2.1	17,2 (10)	19 (11)	0 (0)	63,8 (37)	**TC4.5**	31 (18)	0 (0)	19 (11)	50 (29)
TC2.2	17,2 (10)	19 (11)	46,6 (27)	17,2 (10)	**TC4.6**	31 (18)	0 (0)	10,3 (6)	58,6 (34)
TC2.3	17,2 (10)	25,9 (15)	20,7 (12)	36,2 (21)	**TC4.7**	31 (18)	3,4 (2)	3,4 (2)	62,1 (36)
TC2.4	17,2 (10)	36,2 (21)	15,5 (9)	31 (18)	**TC4.8**	31 (18)	5,2 (3)	31 (18)	32,8 (19)
TC2.5	17,2 (10)	41,4 (24)	0 (0)	41,4 (24)	**TC4.9**	31 (18)	0 (0)	8,6 (5)	60,3 (35)
F3.1.1	0 (0)	10,7 (3)	64,3 (18)	25 (7)	**F12.1.1.1**	0 (0)	0 (0)	82,1 (23)	17,9 (5)
F3.1.2	0 (0)	7,1 (2)	17,9 (5)	75 (21)	**F12.1.1.2**	0 (0)	0 (0)	3,6 (1)	96,4 (27)
F3.1.3	0 (0)	10,7 (3)	7,1 (2)	82,1 (23)	**F12.1.1.3**	0 (0)	3,6 (1)	32,1 (9)	64,3 (18)
F3.1.4	0 (0)	14,3 (4)	21,4 (6)	64,3 (18)	**PE.1.1**	1,7 (1)	5,2 (3)	8,6 (5)	84,5 (49)
F3.1.5	0 (0)	32,1 (9)	17,9 (5)	50 (14)	**PE.1.2**	1,7 (1)	3,4 (2)	31 (18)	63,8 (37)
TC3.1	25,9 (15)	5,2 (3)	10,3 (6)	58,6 (34)	**PE.1.3**	1,7 (1)	5,2 (3)	56,9 (33)	36,2 (21)
TC3.2	25,9 (15)	6,9 (4)	6,9 (4)	60,3 (35)	**PE.1.4**	1,7 (1)	6,9 (4)	8,6 (5)	82,8 (48)

Tabla VII - 9. Resultados generales en los problemas de detección de relaciones de proporcionalidad (Ciclo III-1).

Un test exacto de Fisher entre los resultados de los grupos experimentales de los ciclos II-1 y III-1 también confirma que no existen diferencias significativas en la tasa de éxito de los problemas planteados en la prueba escrita (PE.1.1, PE.1.2, PE.1.3 y PE.1.4).

En el siguiente nivel de análisis clasificamos el tipo de argumentos que los equipos, o los estudiantes individualmente, han dado para argumentar si una situación podía o no considerarse de proporcionalidad simple directa (Tabla VII - 10) para aquellos problemas en los que se solicitaba. Dicha clasificación se ha hecho independientemente de si la respuesta era correcta o incorrecta (categorías I y C de la Tabla VII - 9) pero, obviamente, no se clasifican las respuestas no entregadas o en blanco (categorías N y B de la Tabla VII - 9). Dentro de la categoría D0 se clasifican respuestas que, o bien no dan ningún argumento, o los argumentos simplemente parafrasean el contexto que se analiza, o no se ha podido encontrar una lógica en la argumentación empleada que permita clasificarla en alguna de las categorías empleadas (ver Tabla V - 19 o sección III.3.8.2 para la descripción de las categorías de argumentación).

En cuanto a las respuestas sin argumentaciones (D0), observamos que estas son muy abundantes en los primeros problemas de la propuesta y que, conforme avanza la propuesta, estas disminuyen en las situaciones en las que no hay relación de proporcionalidad (ni directa ni inversa). Encontramos un fenómeno parecido al descrito en el Capítulo V por el que parece que los alumnos no sienten tanto la necesidad de dar argumentos cuando consideran que la respuesta es que sí podemos suponer que hay magnitudes directamente proporcionales. El hecho de que aparezca este efecto en las situaciones inversas parece deberse al alto número de respuestas incorrectas en estas situaciones en las que, erróneamente, se supone una relación directa al detectarse algún tipo de condición de regularidad. Este efecto, se describió y ejemplificó ampliamente en el Capítulo V.

Junto con las respuestas sin argumentos comprensibles, la categoría que concentra un mayor número de producciones es la que contiene las caracterizaciones de la situación mediante la suposición de condiciones de regularidad. Parece que, en este ciclo encontramos una ligera menor preocupación por la argumentación y el establecimiento de condiciones de regularidad. Este hecho puede observarse, por ejemplo, atendiendo al menor número de producciones en la categoría D2 en los problemas de la prueba escrita (ver Tabla V - 20), especialmente en las situaciones proporcionales PE.1.3 y PE.1.4.

	D0	D2	D6	D7	D8	D9
F2.2.1	39,3 (11)	60,7 (17)				
TC2.1	34,5 (20)	27,6 (16)		1,7 (1)		
TC2.2	36,2 (21)	24,1 (14)	1,7 (1)		1,7 (1)	
TC2.3	22,4 (13)	10,3 (6)	1,7 (1)			22,4 (13)
TC2.4	34,5 (20)	8,6 (5)	1,7 (1)	1,7 (1)		
TC2.5	22,4 (13)	17,2 (10)	1,7 (1)			
F3.1.1	25 (7)	57,1 (16)				7,1 (2)
F3.1.2	39,3 (11)	46,4 (13)	3,6 (1)			3,6 (1)
F3.1.3	21,4 (6)	25 (7)	3,6 (1)			39,3 (11)
F3.1.4	21,4 (6)	57,1 (16)	3,6 (1)			3,6 (1)
F3.1.5	17,9 (5)	46,4 (13)	3,6 (1)			
TC3.1	39,7 (23)	24,1 (14)	3,4 (2)	1,7 (1)		
TC3.2	34,5 (20)	29,3 (17)	1,7 (1)	1,7 (1)		
F12.1.1.1	50 (14)	35,7 (10)	3,6 (1)	7,1 (2)	3,6 (1)	
F12.1.1.2	17,9 (5)	10,7 (3)	3,6 (1)		17,9 (5)	50 (14)
F12.1.1.3	25 (7)	32,1 (9)	3,6 (1)	3,6 (1)	32,1 (9)	
PE.1.1	13,8 (8)	36,2 (21)		10,3 (6)	32,8 (19)	
PE.1.2	20,7 (12)	46,6 (27)		12,1 (7)	15,5 (9)	
PE.1.3	32,8 (19)	53,4 (31)		5,2 (3)	1,7 (1)	
PE.1.4	31 (18)	46,6 (27)	1,7 (1)	10,3 (6)	1,7 (1)	

Tabla VII - 10. Argumentos empleados por los alumnos en el análisis de relaciones de proporcionalidad (Ciclo III-1).

Fuera de la caracterización institucionalizada, no aparecen caracterizaciones de tipo D3, D4 y D5. La presencia de la caracterización multiplicativa del tipo “a doble, doble” (D6) aunque constante en toda la propuesta es anecdótica y se debe a la persistencia en este tipo de argumentos del alumno D4.2. La acumulación de argumentos por la existencia o no de relación entre las magnitudes (D8) y por el número de magnitudes involucradas (D9) se concentra alrededor de las mismas producciones que en el ciclo II-1.

Como elemento diferencial en este ciclo hay que destacar la mayor presencia de argumentos erróneos de tipo cualitativo “a más, más” (D7) con una presencia no muy alta, pero relevante, en la prueba escrita. Hasta ese momento, este tipo de argumentos aparecen en las producciones de las tareas para casa de forma muy aislada.

Problemas en los que se pide calcular las razones externas asociadas a una situación de proporcionalidad (directa).

		Valor numérico			Interpretación			
		B/I	C1	C2	B	I	C1	C2
F2.2.1	N.º de respuestas	9	2	17	5	9	4	10
	Porcentaje	32,1 %	7,1 %	60,7 %	17,9 %	32,1 %	14,3 %	35,7 %
TC2.1	N.º de respuestas	1	4	32	10	4	5	18
	Porcentaje	1,7 %	6,9 %	55,2 %	17,2 %	6,9 %	8,6 %	31,0 %
TC2.4	N.º de respuestas	1	2	15	6	5	2	5
	Porcentaje	1,7 %	3,4 %	25,9 %	10,3 %	8,6 %	3,4 %	8,6 %
TC2.5	N.º de respuestas	1	1	22	6	6	0	12
	Porcentaje	1,7 %	1,7 %	37,9 %	10,3 %	10,3 %	-	20,7 %
F3.1.2	N.º de respuestas	1	0	20	4	2	2	13
	Porcentaje	3,6 %	-	71,4 %	14,3 %	7,1 %	7,1 %	46,4 %
F3.1.4	N.º de respuestas	0	3	15	3	4	2	9
	Porcentaje	-	10,7 %	53,6 %	10,7 %	14,3 %	7,1 %	32,1 %
F3.1.5	N.º de respuestas	2	1	11	3	3	2	6
	Porcentaje	7,1 %	3,6 %	39,3 %	10,7 %	10,7 %	7,1%	21,4 %
TC3.1	N.º de respuestas	2	1	31	5	17	0	12
	Porcentaje	3,4 %	1,7 %	53,4 %	17,9 %	29,3 %	-	20,7 %
TC3.2	N.º de respuestas	2	4	29	3	9	3	20
	Porcentaje	3,4 %	6,9 %	50 %	5,2%	15,5 %	5,2%	34,5 %
TC4.6	N.º de respuestas	3	1	36	2	19	1	18
	Porcentaje	5,2 %	1,7 %	62,1 %	3,4 %	32,8 %	1,7%	31,0 %
TC4.9	N.º de respuestas	2	0	38	1	12	0	27
	Porcentaje	3,4 %	-	65,5 %	1,7 %	20,7 %	-	46,6 %

Tabla VII - 11. Resultados generales para los problemas en los que se solicitaba calcular las razones asociadas a una situación de proporcionalidad directa (Ciclo III-1).

En la Tabla VII - 11 presentamos los resultados del análisis de los problemas en los que se solicitaba calcular e interpretar las razones externas asociadas a una situación en la que aparecen dos magnitudes ligadas mediante una relación de proporcionalidad simple directa. En dicha tabla se diferencia entre el éxito en el cálculo y en la interpretación. Además, dado que existen dos posibles razones externas en cada situación de proporcionalidad simple directa incluimos dos columnas, C1 y C2, para dar cuenta de si se calcula, o interpreta, una o las dos razones externas. Como en la correspondiente Tabla V - 21, solo se han tenido en cuenta aquellas producciones que, efectivamente, habían supuesto una relación directa entre las magnitudes (columna C de la Tabla VII - 9).

Como en otros aspectos, observamos cierta estabilidad en los resultados respecto al ciclo anterior, especialmente en el cálculo de las dos razones externas. Los estudiantes o equipos que detectan correctamente la relación de proporcionalidad directa calculan las dos razones externas asociadas. Encontramos muy pocas respuestas en blanco, incorrectas o con solo una de las razones en lo referente al cálculo.

En cuanto a la interpretación, sí observamos a partir de las tasas de éxito, de fracaso y de respuestas en blanco que en este ciclo hay más errores a la hora de dar significado a las razones externas y quizá también una mayor despreocupación en hacerlo. Los tipos de errores detectados a la hora de interpretar las razones externas calculadas coinciden con los analizados en detalle en el Capítulo V, es decir:

- Dar el significado de la razón inversa a la calculada.
- Interpretar verbalmente la razón. Es decir, no se da una interpretación como tanto por uno, se da significado por separado a las cantidades de magnitud usadas en el cociente.

Problemas en los que se pide identificar/calcular una razón concreta en una situación de proporcionalidad (directa).

Los problemas que se muestran en Tabla VII - 12 codifican el desempeño de los alumnos y equipos en las categorías generales para los problemas en los que a partir de la interpretación de una razón externa los alumnos debían calcular numéricamente dicha razón. Los problemas marcados con un asterisco en su codificación se corresponden con los de la ficha de tarea para casa TC8 que no se repartieron en el grupo C, por lo que el tamaño muestral para esos tres problemas es $n = 38$. A diferencia de lo que ocurrió en el ciclo II-1, más de la mitad de estos problemas obtiene una tasa de éxito superior al $50\ \%$. Esta mejora respecto del ciclo anterior se pone de manifiesto también en los cuatro ítems de la prueba escrita. En tres de ellos se obtienen mejores resultados que en el ciclo anterior (si bien las diferencias no son estadísticamente significativas). Esta aparentemente mejor competencia a la hora de asociar un valor numérico a un significado concreto de una razón externa podría indicar que los peores resultados en cuanto a la interpretación de razones externas observados en la Tabla VII - 11 podrían estar influenciados más por la percepción de los alumnos de que no es necesario interpretar los resultados obtenidos, que por su incapacidad de hacerlo.

	N	B	I	C
TC8.1*	28,9 (11)	5,3 (2)	13,2 (5)	52,6 (20)
TC8.2*	28,9 (11)	2,6 (1)	28,9 (11)	39,5 (15)
TC8.3*	28,9 (11)	5,3 (2)	44,7 (17)	21,1 (8)
F9.1.1.4	3,6 (1)	10,7 (3)	10,7 (3)	75 (21)
F9.1.1.5	3,6 (1)	10,7 (3)	10,7 (3)	75 (21)
F9.1.1.6	3,6 (1)	17,9 (5)	10,7 (3)	71,4 (20)
F9.1.1.7	3,6 (1)	14,3 (4)	10,7 (3)	71,4 (20)
F9.1.1.8	3,6 (1)	21,4 (6)	7,1 (2)	67,9 (19)
F9.1.1.9	3,6 (1)	28,6 (8)	3,6 (1)	64,3 (18)
F9.1.2.1	3,6 (1)	28,6 (8)	7,1 (2)	60,7 (17)
F9.1.2.2	3,6 (1)	32,1 (9)	7,1 (2)	57,1 (16)

	N	B	I	C
TC9.2.2	32,8 (19)	3,4 (2)	8,6 (5)	55,2 (32)
TC9.2.3	32,8 (19)	3,4 (2)	8,6 (5)	55,2 (32)
TC9.2.4	32,8 (19)	5,2 (3)	13,8 (8)	48,3 (28)
TC9.2.5	32,8 (19)	5,2 (3)	12,1 (7)	50 (29)
TC9.2.6	32,8 (19)	8,6 (5)	17,2 (10)	41,4 (24)
F11.2.1.3	0 (0)	21,4 (6)	21,4 (6)	57,1 (16)
PE.2.2	1,7 (1)	3,4 (2)	50 (29)	44,8 (26)
PE.2.3	1,7 (1)	5,2 (3)	63,8 (37)	29,3 (17)
PE.7.3	1,7 (1)	22,4 (13)	13,8 (8)	62,1 (36)
PE.7.4	1,7 (1)	22,4 (13)	13,8 (8)	62,1 (36)

Tabla VII - 12. Resultados generales para los problemas en los que solicitaba identificar o calcular una razón concreta en una situación de proporcionalidad directa (Ciclo III-1).

En cualquier caso, ambos hechos juntos parecen indicar que no existen claras diferencias en cuanto a la comprensión del concepto de razón externa entre el ciclo II-1 y el III-1.

Otra de las observaciones importantes es la inclusión, como novedad en la propuesta en 1º de ESO, de problemas que intentan acercar los significados de los conceptos de porcentaje y de razón. En concreto, se trata de los problemas F9.1.1, F9.1.2 y TC.9.2. Las tasas de éxito son muy altas en todos los apartados (hay que tener en cuenta que en el problema TC.9.2 hay un porcentaje de problemas no entregados del 32,8 %). Si nos centramos en los problemas de la situación introductoria del porcentaje (ficha F9.1), vemos que la tasa de éxito es mayor en el problema en el que la información se proporcionaba en forma de porcentaje (F9.1.1) que en el que se proporcionaba como cantidades absolutas de la parte y el total (F9.1.2). Además, dentro de F9.1.1 las razones entre las partes y el total (F9.1.1.4 y F9.1.1.5) tienen un porcentaje de éxito ligeramente superior al de sus inversas entre el todo y las partes (F9.1.1.6 y F9.1.1.7) y éstas un porcentaje de éxito también ligeramente superior al de respuestas correctas que calculan las razones parte-parte (F9.1.1.8 y F1.1.9).

Detección de "falsos" problemas de proporcionalidad.

Para acabar con este foco de contenido, en la Tabla VII - 13 se presentan los resultados para las categorías generales en los falsos problemas de proporcionalidad. Las respuestas clasificadas como incorrectas no reconocen como no proporcionales los problemas, por lo que los resuelven como si fueran problemas de proporcionalidad simple directa. Las producciones correctas argumentan (con mayor o menor precisión) que los problemas no pueden resolverse, o que no tiene sentido la pregunta planteada. Al igual que en anteriores tipos de problemas no encontramos grandes diferencias entre lo observado en este ciclo y lo observado en el ciclo II-1. En general, la tasa de respuestas correctas es mayor en este ciclo. Especialmente relevante es la tasa de respuestas correctas en el problema F7.1.5 que en el ciclo II-1 fue de 22,9 % y en este es del 71,4 %.

		N	B	I	C
F4.2.2	N.º de respuestas	0	4	5	19
	Porcentaje	-	14,3 %	17,9 %	67,9 %
F4.2.4	N.º de respuestas	0	9	0	19
	Porcentaje	-	32,1 %	-	67,9 %
TC4.3*	N.º de respuestas	11	4	7	16
	Porcentaje	28,9 %	10,5 %	18,4 %	42,1 %
TC6.2	N.º de respuestas	13	6	18	21
	Porcentaje	22,4 %	10,3 %	31,0 %	36,2 %
TC6.4	N.º de respuestas	13	6	11	28
	Porcentaje	22,4 %	10,3 %	19,0 %	48,3 %
F7.1.2	N.º de respuestas	0	0	0	28
	Porcentaje	-	-	-	100 %
F7.1.5	N.º de respuestas	0	3	5	20
	Porcentaje	-	10,7 %	17,9 %	71,4 %
TC8.6*	N.º de respuestas	11	1	15	11
	Porcentaje	28,9 %	2,6 %	39,5 %	28,9 %
PE.6	N.º de respuestas	1	7	16	34
	Porcentaje	1,7 %	12,1 %	27,6 %	58,7 %

Tabla VII - 13. Resultados generales en la detección de falsos problemas de proporcionalidad (Ciclo III-1).

Aun en los ítems en los que la tasa de éxito para este ciclo es algo inferior, como en PE.6, las diferencias no son estadísticamente significativas.

VII.3.1.3. Problemas de comparación cuantitativa de proporcionalidad simple directa

En esta sección analizamos las 368 producciones correspondientes a los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple trabajados en este ciclo. Los problemas se concentran en las sesiones 4 y 5. Además, se incorpora un problema de este tipo tanto en la sesión 12 de repaso como en la prueba escrita.

Análisis de la situación introductoria.

Recordemos (ver sección V.3.1.3) que la situación introductoria en este foco comienza tras la corrección de la tarea para casa TC3. En la puesta en común se debatió la solución y se dejaron escritas en la pizarra las tablas con los resultados numéricos de las actividades que componían TC3 que suponen toda la información numérica necesaria para responder a esta situación introductoria (ver Tabla V - 26 y Tabla V - 27).

En la Tabla VII - 14 se presentan los resultados en las categorías generales para la situación introductoria en este ciclo de investigación-acción.

		N	B	I	C
F4.1.1	N.º de respuestas	0	1	8	19
	Porcentaje	-	3,6 %	28,6 %	67,9 %
F4.1.2	N.º de respuestas	0	5	13	8
	Porcentaje	-	17,9 %	46,4 %	28,6 %

Tabla VII - 14. Resultados generales en la situación introductoria de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1).

En comparación con el ciclo anterior en 1º de ESO, los porcentajes de éxito en la situación introductoria son peores. Encontramos más respuestas en blanco y más respuestas incorrectas. Sí se mantiene el hecho de que la tasa de éxito en F4.1.1 es claramente mayor que en F4.1.2. Una de las posibles razones que ya se puso de manifiesto en el ciclo anterior es la mayor complejidad de la estructura numérica. Los alumnos no se desenvuelven bien con la representación fraccionaria en la que el profesor-investigador presenta la información, de forma que algunos equipos, como C4, responden que es mejor ir al banco B porque $\frac{5}{6} > \frac{6}{7}$.

Otros equipos argumentan, en mayor medida que en el ciclo anterior, a partir de las cantidades absolutas en vez de con las cantidades relativas. Así, por ejemplo, tanto el equipo D5, como el equipo D7, optan erróneamente por el banco B "porque te dan más dólares", en vez de usar la razón entre dólares y euros en cada banco. En cualquier caso, la variedad de respuestas y argumentos que aparecen, incluidas las respuestas correctas argumentadas correctamente, siguen permitiendo organizar adecuadamente los debates y la institucionalización a partir de las producciones de los equipos.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Tras analizar la situación introductoria, pasamos a analizar las producciones de los alumnos en el resto de los problemas de comparación cuantitativa en este ciclo de investigación-acción. En la Tabla VII - 15 se recogen los resultados en las categorías generales. Los asteriscos en los problemas de la ficha TC4 indican que solo fueron realizados por los grupos B y D y, por tanto, el tamaño de la muestra es de $n = 38$.

Aunque el número de alumnos que no asiste a las sesiones en este ciclo es mayor que en otros de la propuesta, en las sesiones de clase obtenemos producciones de todos los equipos ya que, generalmente, asiste al menos uno de los componentes del mismo.

Si comparamos con los resultados del ciclo II-1 (ver Tabla V - 29) observamos, como en otros focos, que los resultados son muy similares. No encontramos diferencias significativas ni en las respuestas en blanco (columna B), ni en las respuestas incorrectas (columna I), ni en las respuestas correctas (columna C). Sin embargo, en general, el porcentaje de éxito en este ciclo es inferior al obtenido en los mismos problemas en el ciclo II-1. Por ejemplo, en la prueba escrita, problema PE.3, la tasa de éxito en el ciclo II-1 fue del $52{,}3\ \%$, mientras que en este ciclo es del $48{,}3\ \%$. En cualquier caso, dicha diferencia no es, como hemos dicho, estadísticamente significativa como muestra el p-valor $p = 0{,}7066$ que se obtiene al realizar un test exacto de Fisher.

		N	B	I	C
F4.2.1	N.º de respuestas	0	1	7	20
	Porcentaje	-	3,6 %	25 %	71,4 %
F4.2.3	N.º de respuestas	0	4	6	18
	Porcentaje	-	14,3 %	21,4 %	64,3 %
TC4.1*	N.º de respuestas	11	1	5	21
	Porcentaje	28,9 %	2,6 %	13,2 %	55,3 %
TC4.2*	N.º de respuestas	11	3	7	17
	Porcentaje	28,9 %	7,9 %	18,4 %	44,7 %
TC4.4*	N.º de respuestas	11	6	6	15
	Porcentaje	28,9 %	15,8 %	15,8 %	39,5 %
F5.1.1	N.º de respuestas	0	2	8	18
	Porcentaje		7,1 %	28,6 %	64,3 %
F5.1.2	N.º de respuestas	0	1	11	16
	Porcentaje		3,6 %	39,3 %	57,1 %
F12.1.2	N.º de respuestas	0	3	5	20
	Porcentaje		10,7 %	17,9 %	71,4 %
PE.3	N.º de respuestas	1	4	25	28
	Porcentaje	1,7 %	6,9 %	43,1 %	48,3 %

Tabla VII - 15. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1).

En general, el desempeño es bueno en este tipo de problemas, si excluimos los problemas de la ficha de tarea para casa TC4, que no fueron entregados por un número alto de alumnos, todos los problemas tienen tasas de éxito por encima del 50 % salvo el problema de la prueba escrita PE3, que se queda muy cerca de este porcentaje.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Para el siguiente nivel de análisis solo se tienen en cuenta las producciones en las que se observa un intento de resolución de los problemas. En la Tabla VII - 16 se recoge el porcentaje en el que aparece cada estrategia de resolución.

Al igual que ocurría con las categorías generales, no encontramos grandes diferencias entre lo ocurrido en este ciclo y lo ocurrido en el ciclo II-1 respecto al uso de estrategias. La aparición de la estrategia institucionalizada basada en la comparación de razones externas es mayoritaria a lo largo de toda la propuesta.

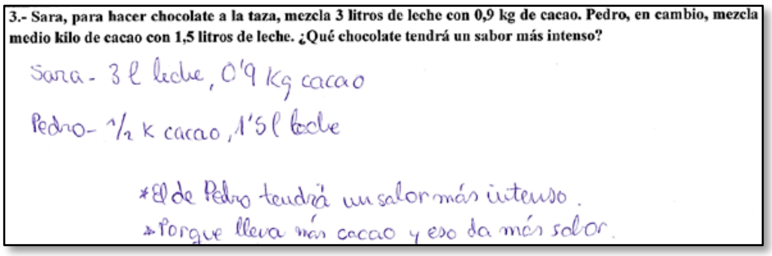
Cabría destacar que observamos en este ciclo un mayor porcentaje de respuestas clasificadas en la categoría C5 en este ciclo, es decir, respuestas aditivas erróneas. Esta diferencia se hace especialmente llamativa en el problema de la prueba escrita PE.3 donde hemos clasificado un 19 % de las respuestas en esta categoría. Este tipo de respuestas se corresponden con los grupos de alumnos “objetores” en los diferentes grupos y que, a pesar de no participar durante las sesiones de forma activa, sí que intentan resolver los problemas de la prueba escrita.

		C0	C1	C2	C3	C4	C5
F4.2.1	N.º de respuestas	2	24	0	0	0	1
	Porcentaje	7,1 %	85,7 %	-	-	-	3,6 %
F4.2.3	N.º de respuestas	2	20	0	0	0	2
	Porcentaje	7,1 %	71,4 %	-	-	-	7,1 %
TC4.1*	N.º de respuestas	0	26	0	0	0	0
	Porcentaje	0 %	68,4 %	-	-	-	0 %
TC4.2*	N.º de respuestas	5	19	0	0	0	0
	Porcentaje	13,2 %	50 %	-	-	-	0 %
TC4.4*	N.º de respuestas	3	17	0	0	0	1
	Porcentaje	7,9 %	44,7 %	-	-	-	2,6 %
F5.1.1	N.º de respuestas	0	23	0	0	0	3
	Porcentaje	0 %	82,1 %	-	-	-	10,7 %
F5.1.2	N.º de respuestas	2	24	0	0	0	1
	Porcentaje	7,1 %	85,7 %	-	-	-	3,6 %
F12.1.2	N.º de respuestas	2	23	0	0	0	0
	Porcentaje	7,1 %	82,1 %	-	-	-	0 %
PE.3	N.º de respuestas	6	33	1	0	0	11
	Porcentaje	10,3 %	56,9 %	1,7 %	-	-	19 %

Tabla VII - 16. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1).

Producciones que siguen una estrategia errónea.

Como hemos destacado, la principal diferencia en este ciclo es la mayor tasa de respuestas que siguen argumentos aditivos erróneos, especialmente durante la prueba escrita. En estas producciones se extraen conclusiones comparando (de forma aditiva) las cantidades de una sola de las magnitudes involucradas, decidiendo que el sabor más intenso corresponde a la mezcla que tiene más cacao, o menos leche. Por ejemplo, en la Imagen VII - 2 el alumno B1.1 da una respuesta basándose exclusivamente en la diferencia aditiva entre las cantidades de una de las magnitudes sin tener en cuenta el carácter relativo o intensivo de la intensidad del sabor.


3.- Sara, para hacer chocolate a la taza, mezcla 3 litros de leche con 0,9 kg de cacao. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de cacao con 1,5 litros de leche. ¿Qué chocolate tendrá un sabor más intenso?

Sara - 3 l leche, 0'9 Kg cacao

Pedro - 1/2 k cacao, 1'5 l leche

*El de Pedro tendrá un sabor más intenso.
*Porque lleva más cacao y eso da más sabor.

Imagen VII - 2. Producción del alumno B1.1 para el problema PE.3 (Ciclo III-1).

Además, el alumno B1.1 no realiza correctamente la comparación aditiva considerando mayor 1/2 que 0,9. Se evidencian, por tanto, dificultades relacionadas con la comprensión del número racional. Ya hemos destacado en diferentes ocasiones que el hecho de encontrar diferentes errores acumulados dentro de una misma producción es relativamente frecuente dentro de las producciones incorrectas.

Producciones que siguen una estrategia correcta.

Al igual que en el ciclo II-1, la gran mayoría de respuestas que responde usando una estrategia potencialmente correcta utiliza la comparación de razones externas (C1). No hemos encontrado ninguna producción que utilice una estrategia C3 (planteando un problema de valor perdido). En el ciclo II-1 encontramos una única producción clasificada en dicha categoría.

Encontramos el primer ejemplo de la experimentación de producción que utiliza una estrategia C2 razonando mediante razones internas. El alumno B3.1 razona que Pedro echa la mitad de leche y más de la mitad de cacao que Sara y, por tanto, el sabor del chocolate de este será más intenso.

Errores cometidos en estrategias correctas.

A partir de las categorías de errores detectadas en el ciclo II-1 hemos realizado un estudio cuantitativo de la aparición de cada uno de los tipos de errores en este ciclo (Tabla VII - 17). Como dijimos, ante producciones que no escriben la interpretación de las razones calculadas es complicado distinguir entre el error de tipo C.3 (error al identificar una razón con la interpretación de la inversa) y el error de tipo C.4 (error al no conectar el significado de las razones con la pregunta realizada en el problema). Por tanto, estas categorías de errores las expresamos en forma de intervalo.

		Error C.1	Error C.2	Error C.3	Error C.4
F4.2.1	N.º de respuestas	1	3	2	0
	Porcentaje	3,6 %	10,7 %	7,1 %	-
F4.2.3	N.º de respuestas	2	1	0	1
	Porcentaje	7,1 %	3,6 %	-	3,6 %
TC4.1*	N.º de respuestas	0	3	0 - 2	1 - 2
	Porcentaje	-	7,9 %	0 % - 5,3 %	2,6 % - 5,3 %
TC4.2*	N.º de respuestas	0	1	0 - 1	1 - 2
	Porcentaje	-	2,6 %	0 % - 2,6 %	2,6 % - 5,3 %
TC4.4*	N.º de respuestas	1	1	0	2
	Porcentaje	2,6 %	2,6 %	-	5,3 %
F5.1.1	N.º de respuestas	2	1	0 - 2	1 - 3
	Porcentaje	7,1 %	3,6 %	0 % - 7,1 %	3,6 % - 10,7 %
F5.1.2	N.º de respuestas	4	3	0	2
	Porcentaje	14,3 %	10,7 %	-	7,1 %
F12.1.2	N.º de respuestas	0	0	0 - 1	0 - 1
	Porcentaje	-	-	0 % - 3,6 %	0 % - 3,6 %
PE.3	N.º de respuestas	0	6	1 - 3	1 - 3
	Porcentaje	-	10,3 %	1,7 % - 5,2 %	1,7 % - 5,2 %

Tabla VII - 17. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1).

Observamos que los errores de tipo C.1 en los que se evidencia una estrategia correcta incipiente pero los alumnos no terminan de resolver el problema solo aparecen en los problemas de las fichas de aula (no aparecen en las tareas para casa). Además, se indica una importante presencia de errores de tipo C.2 relacionados con la comprensión del número racional. Como observamos en la Imagen VII - 2 estos errores no han aparecido exclusivamente en el uso de estrategias correctas y parecen aparecer con mayor frecuencia en este ciclo de investigación-acción, indicando una peor comprensión del número racional por parte de un pequeño grupo de alumnos, lo que les impide desenvolverse adecuadamente durante la propuesta.

Otros errores observados y no clasificados en la Tabla VII - 17 son los que encontramos, por ejemplo, en el problema F12.1.2. En este problema aparecían dos cantidades de tiempo expresadas en diferentes unidades: semanas y días. Por ejemplo, el equipo D2 utiliza los valores de dichas cantidades sin realizar el cambio de unidades necesario.

VII.3.1.4. Problemas de comparación cualitativa de proporcionalidad simple directa

Los problemas de comparación cualitativa se trabajan durante la quinta sesión al mismo tiempo que los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple. Además, se incorporó un problema de este tipo en la ficha de trabajo para casa TC8 y otro en la prueba escrita. Concretamente, los códigos de los problemas que analizamos en esta sección son: F5.1.3, F5.1.4, TC8.4 y PE.2.1. Como hemos comentado, el asterisco en el problema TC8.4 en las distintas tablas donde resumimos los resultados obtenidos (Tabla VII - 18, Tabla VII - 19 y Tabla VII - 20) significa que el tamaño muestral, $n = 38$, es menor para este problema ya que no se repartió en todos los grupos. Se analizan en esta sección un total de 152 producciones. Como en el ciclo II-1, debido al bajo número de problemas, no distinguimos un análisis específico para la situación introductoria.

		N	B	I	C
F5.1.3	N.º de respuestas	0	5	0	23
	Porcentaje	-	17,9 %	-	82,1 %
F5.1.4	N.º de respuestas	0	7	12	9
	Porcentaje	-	25 %	42,9 %	32,1 %
TC8.4*	N.º de respuestas	11	0	8	19
	Porcentaje	28,9 %	-	21,1 %	50 %
PE.2.1	N.º de respuestas	1	2	19	36
	Porcentaje	1,7 %	3,4 %	32,8 %	62,1 %

Tabla VII - 18. Resultados generales en los problemas comparación cualitativa (Ciclo III-1).

En la Tabla VII - 18 se presenta el análisis cuantitativo para las categorías generales. Solo en la tarea para casa el porcentaje de producciones no entregadas es significativo. El número de producciones en blanco en la situación introductoria es ligeramente superior al observado en el ciclo II-1 (ver Tabla V - 34). En cuanto a los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas observamos una gran diferencia entre los problemas F5.1.3 y F5.1.4. Ya observamos en el ciclo anterior que la diferencia entre estos problemas era grande, sin embargo, en este ciclo es todavía mayor. Hay un $50\ \%$ de diferencia en la tasa de éxito a favor del problema en el que sí podía determinarse qué opción era más ventajosa según la información del enunciado, F5.1.3. Como también ocurría en el ciclo II-1, aunque la tasa de éxito en F5.1.4 (el problema en el que no puede determinarse la situación más ventajosa con la información suministrada) es baja esta mejora considerablemente durante el desarrollo de la propuesta (problemas TC8.4 y PE.2.1).

En el siguiente nivel de análisis se estudian las respuestas clasificadas como incorrectas o correctas en el nivel anterior (columnas I y C de la Tabla VII - 18). En la Tabla VII - 19 aparece el porcentaje de producciones en las que se responde que una de las dos situaciones es más ventajosa que la otra ($S_1 > S_2$ o $S_1 < S_2$ según si es más ventajosa la primera situación que aparece en el enunciado o la segunda), si las dos situaciones son igual de ventajosas ($S_1 = S_2$), o no puede decidirse cuál de las dos opciones es más ventajosa ($S_1¿?S_2$). En dicha tabla se ha sombreado la opción correcta en cada uno de los problemas.

		$S_1 > S_2$	$S_1 < S_2$	$S_1 = S_2$	$S_1¿?S_2$
F5.1.3	N.º de respuestas	23	0	0	0
	Porcentaje	82,1 %	-	-	-
F5.1.4	N.º de respuestas	4	5	3	9
	Porcentaje	14,3 %	17,9 %	10,7 %	32,1 %
TC8.4*	N.º de respuestas	4	2	2	19
	Porcentaje	10,5 %	5,3 %	5,3 %	50 %
PE.2.1	N.º de respuestas	5	4	10	36
	Porcentaje	8,6 %	6,9 %	17,2 %	62,1 %

Tabla VII - 19. Respuesta a los problemas de comparación cualitativa (Ciclo III-1).

Los resultados, con ligeras variaciones, son muy similares a los descritos en el ciclo II-1. Una de las variaciones es la desaparición de respuestas en la categoría "$S_1¿?S_2$" (Tabla VII - 19) para el primer problema. Parece que el efecto de desconcierto por la falta de datos numéricos es menor en este ciclo y los alumnos responden correctamente al problema.

Es también interesante el mayor número de respuestas que hemos clasificado en la columna $S_1 > S_2$ para el problema F5.1.4 en este ciclo. Este problema tiene una estructura $(x_1^+, : x_2) \sim (x_1 : x_2^-)$, podríamos interpretar que los alumnos tienden a dar una respuesta basándose exclusivamente en la primera comparación (aditiva) sobre las cantidades de magnitud de solo una de las magnitudes involucradas. Esta mayor tendencia (respecto al ciclo II-1) a un pensamiento aditivo podría también haber favorecido a la mayor tasa de éxito en el problema F5.1.3 que tiene una estructura $(x_1^+, : x_2) \sim (x_1 : x_2^+)$.

		CL0	CL1	CL2	CL3
F5.1.3	N.º de respuestas	1	22	0	0
	Porcentaje	3,6 %	78,6 %	-	-
F5.1.4	N.º de respuestas	4	17	0	0
	Porcentaje	14,3 %	60,7 %	-	-
TC8.4*	N.º de respuestas	8	19	0	0
	Porcentaje	21,1 %	50 %	-	-

Tabla VII - 20. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa (Ciclo III-1).

Sobre las justificaciones empleadas por los alumnos, con una rápida inspección comparando los resultados de la Tabla VII - 20 y los de la Tabla V - 36, podemos concluir que no hay diferencias significativas entre lo descrito en el ciclo II-1 y lo ocurrido en el ciclo III-1. Por un lado, los alumnos intentan justificar las respuestas como marcan los relativamente bajos porcentajes en la columna CL0 en donde se contabilizan las respuestas no argumentadas. Por otro, un análisis cualitativo de las respuestas arroja niveles de argumentación diversos pero similares a los descritos en la discusión en torno a diferentes producciones de alumnos en el Capítulo V (Imagen V - 28, Imagen V - 29, Imagen V - 30, Imagen V - 31 e Imagen V - 32).

VII.3.1.5. Problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa

Recordamos que los problemas de valor perdido para situaciones de proporcionalidad simple directa se trabajaron durante las sesiones 6 y 7. Además, aparecen otros dos problemas de estas características en las actividades de trabajo para casa tras la sesión 8, TC8.5 y TC8.7, y otro más en la prueba escrita, PE.4. En total, en esta sección analizamos de forma cuantitativa y cualitativa 644 producciones de los estudiantes. Como siempre, los falsos problemas de valor perdido no se analizan en esta sección (fueron analizados en la sección VII.3.1.2. Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones). Como en otros focos, en este tercer ciclo de 1º de ESO ponemos especial interés en comparar los resultados obtenidos en este ciclo con los obtenidos en el ciclo anterior.

Análisis de la situación introductoria.

Los resultados para las categorías generales en la situación introductoria pueden observarse en la Tabla VII - 21 (los correspondientes para el ciclo anterior al que haremos referencia pueden verse en la Tabla V - 38)

		N	B	I	C
F6.1.1.1	N.º de respuestas	0	1	2	25
	Porcentaje	-	3,6 %	7,1 %	89,3 %
F6.1.1.2	N.º de respuestas	0	3	9	16
	Porcentaje	-	10,7 %	32,1 %	57,1 %
F6.1.1.3	N.º de respuestas	0	5	10	13
	Porcentaje	-	17,9 %	35,7 %	46,4 %
F6.1.1.4	N.º de respuestas	0	5	8	15
	Porcentaje	-	17,9 %	28,6 %	53,6 %
F6.1.1.5	N.º de respuestas	0	11	7	10
	Porcentaje	-	39,3 %	25 %	35,7 %
F6.1.1.6	N.º de respuestas	0	11	7	10
	Porcentaje	-	39,3 %	25 %	35,7 %
F6.1.1.7	N.º de respuestas	0	12	5	11
	Porcentaje	-	42,9 %	17,9 %	39,3 %

Tabla VII - 21. Resultados generales en la situación introductoria de problemas de proporcionalidad simple de valor perdido (Ciclo III-1).

Como en el ciclo II-1, el número de producciones en blanco aumenta hacia al final de la tarea. Cabe destacar que en este ciclo aumenta ligeramente el número de producciones en blanco. De forma más llamativa, destacamos el aumento de producciones incorrectas, especialmente en las preguntas F6.1.1.2, F6.1.1.3, F6.1.1.5 y F6.1.1.6. Dichas situaciones se corresponden con las que tienen el valor desconocido en la magnitud "longitud de tela". Para resolver estas cuestiones mediante una estrategia VPd3 (multiplicación por razón externa) había que utilizar la razón "metros por euro". Por tanto, parece que los alumnos han tenido más fallos en este tipo de problemas que en los que había que utilizar la razón externa de coste unitario.

Obviamente, al ser mayores las tasas de producciones en blanco y de respuestas incorrectas, las tasas de éxito son menores que las del ciclo anterior. En general, este hecho es consistente durante todo el ciclo y los alumnos del ciclo III-1 obtienen tasas de éxito ligeramente inferiores a las analizadas en el ciclo II-1. En el ciclo II-1 todos los ítems de la situación introductoria tenían tasas de éxito por encima del 50 %. Como se observa en la Tabla VII - 21, en este ciclo solo superan ese porcentaje las respuestas a los ítems F6.1.1.1 y F6.1.1.4 (junto con F6.1.1.7 son las preguntas en donde el valor solicitado pertenecía a la magnitud "valor económico").

En cualquier caso, la situación introductoria parece seguir cumpliendo su propósito ya que en todos los grupos encontramos varios equipos que responden correctamente, lo que permite articular el debate posterior hacia la institucionalización.

Los resultados para las categorías de análisis específicas de esta situación introductoria pueden observarse en la Tabla VII - 22. Como siempre, en este nivel de análisis solo se tienen en cuenta las respuestas de las categorías I y C del nivel anterior.

		VPd0	**VPd1**	**VPd2**	**VPd3**	**VPd4**	**VPd5**	**VPd6**	**VPd7**	**VPd8**	**VPd9**
F6.1.1.1	N.º de resp.	4	0	3	20	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	14,3 %	-	10,7 %	71,4 %	-	-	-	-	-	-
F6.1.1.2	N.º de resp.	8	0	1	14	0	0	0	0	2	0
	Porcentaje	28,6 %	-	3,6 %	50 %	-	-	-	-	7,1 %	-
F6.1.1.3	N.º de resp.	8	0	1	7	3	0	3	0	1	0
	Porcentaje	28,6 %	-	3,6 %	25 %	10,7 %	-	10,7 %	-	3,6 %	-
F6.1.1.4	N.º de resp.	9	0	1	11	0	0	1	0	1	0
	Porcentaje	32,1 %	-	3,6 %	39,3 %	-	-	3,6 %	-	3,6 %	-
F6.1.1.5	N.º de resp.	4	0	1	5	5	0	0	0	2	0
	Porcentaje	14,3 %	-	3,6 %	17,9 %	17,9 %	-	-	-	7,1 %	-
F6.1.1.6	N.º de resp.	4	0	1	4	5	0	1	0	2	0
	Porcentaje	14,3 %	-	3,6 %	14,3 %	17,9 %	-	3,6 %	-	7,1 %	-
F6.1.1.7	N.º de resp.	4	0	1	10	1	0	0	0	0	0
	Porcentaje	14,3 %	-	3,6 %	35,7 %	3,6 %	-	-	-	-	-

Tabla VII - 22. Estrategias empleadas en la situación introductoria de problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1).

El número de equipos que no dan explicaciones sobre cómo obtienen el valor solicitado se mueve entre 4 y 9 según el ítem analizado (entre un 14,3 % y un 32,1 %), lo que también apunta a un ligero aumento de las respuestas sin argumentos durante este ciclo. El número de equipos que siguen una estrategia incorrecta (VPd1, VPd8, VPd9) es muy bajo. Hemos categorizado ocho producciones en la categoría de operaciones sin sentido en las que no se ha podido determinar el porqué de las operaciones que realizan los equipos. Estas producciones se concentran, además, en tres equipos diferentes que presentan durante toda la propuesta muchas producciones en blanco, sin explicar o sin sentido.

En cuanto al uso de estrategias potencialmente correctas (VPd2-VPd7), cabe destacar el uso predominante de la estrategia VPd3 (multiplicación por razón externa), salvo en los ítems F6.1.1.5 y F6.1.1.6 en donde destaca el uso de la estrategia VPd4 (división por razón externa). Precisamente F6.1.1.5 y F6.1.1.6 son dos de los ítems en dónde el uso de una estrategia VPd3 suponía usar la razón inversa al coste unitario. Este hecho parece reforzar la idea de que encontramos un mayor apego en este ciclo al uso de la razón de coste unitario. En cualquier caso, es mayoritario el uso de las razones externas para resolver las diferentes preguntas planteadas. Como en el ciclo II-1, el resto de las estrategias correctas utilizadas aparecen de forma minoritaria. En concreto, solo encontramos el uso de una estrategia por factor de cambio (VPd2) en un único equipo (C4) y el uso de una estrategia de construcción progresiva (VPd6) aparece en cinco producciones. De estas cinco producciones, tres de ellas se concentran en el problema F6.1.1.3 de estructura $(6{:}\,4) \leftrightarrow (8{:}\,x)$, en donde los alumnos construyen $8 = 6 + \frac{1}{3} \cdot 6$ (equipos B2, D7 y D10).

El uso mayoritario de estrategias basadas en la razón externa confirma la conveniencia de la situación introductoria para la posterior institucionalización.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Tras el análisis de la situación introductoria, analizamos el desempeño de los estudiantes en el resto de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa. Los resultados en las categorías generales se recogen en la Tabla VII - 23. Como en el resto del ciclo, el asterisco en los problemas correspondientes a la ficha de trabajo TC8 indica que el tamaño muestral en esta tarea para casa es menor que el habitual ($n = 38$).

En general, si comparamos estos resultados con los del ciclo II-1 observamos unas menores tasas de éxito. Pero si analizamos la variación de las tasas de éxito según el problema observamos comportamientos muy similares. De los siete problemas con tasa de éxito menor del 50 %, seis coinciden con los marcados como de mayor dificultad en el ciclo II-1 por su menor tasa de éxito. Además, cuatro de estos problemas coinciden con problemas en los que el uso de la estrategia institucionalizada supone emplear la razón inversa a la que puede resultar más natural para los alumnos, y en F7.1.4 los alumnos se enfrentan por primera vez a un problema con estructura parte-parte-todo. Sobre este problema cabe destacar que es uno de los problemas en los que se modificó la estructura numérica en este ciclo, sin embargo, sigue siendo uno de los problemas de valor perdido que presenta más dificultades para los alumnos por lo que estas parecen estar más ligadas a la estructura parte-parte-todo que a la estructura numérica.

		N	B	I	C
F6.2.1	N.º de respuestas	0	3	3	22
	Porcentaje	-	10,7 %	10,7 %	78,6 %
F6.2.2	N.º de respuestas	0	4	12	12
	Porcentaje	-	14,3 %	42,9 %	42,9 %
TC6.1	N.º de respuestas	13	12	19	14
	Porcentaje	22,4 %	20,7 %	32,8 %	24,1 %
TC6.3	N.º de respuestas	13	15	8	22
	Porcentaje	22,4 %	25,9 %	13,8 %	37,9 %
TC6.5	N.º de respuestas	13	7	5	33
	Porcentaje	22,4 %	12,1 %	8,6 %	56,9 %
F7.1.1	N.º de respuestas	0	1	4	23
	Porcentaje	-	3,6 %	14,3 %	82,1 %
F7.1.3	N.º de respuestas	0	5	8	15
	Porcentaje	-	17,9 %	28,6 %	53,6 %
F7.1.4	N.º de respuestas	0	8	12	8
	Porcentaje	-	28,6 %	42,9 %	28,6 %
TC8.5*	N.º de respuestas	11	7	6	14
	Porcentaje	28,9 %	18,4 %	15,8 %	36,8 %
TC8.7*	N.º de respuestas	11	5	5	17
	Porcentaje	28,9 %	13,2 %	13,2 %	44,7 %
PE.4	N.º de respuestas	1	10	19	28
	Porcentaje	1,7 %	17,2 %	32,8 %	48,3 %

Tabla VII - 23. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1).

A pesar de estas menores tasas de éxito, un test exacto de Fisher no detecta en el problema de la prueba final diferencias significativas entre las tasas de éxito del ciclo II-1 y las del ciclo III-1.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

En la Tabla VII - 24 se recogen los porcentajes de aparición de cada una de las estrategias consideradas para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa.

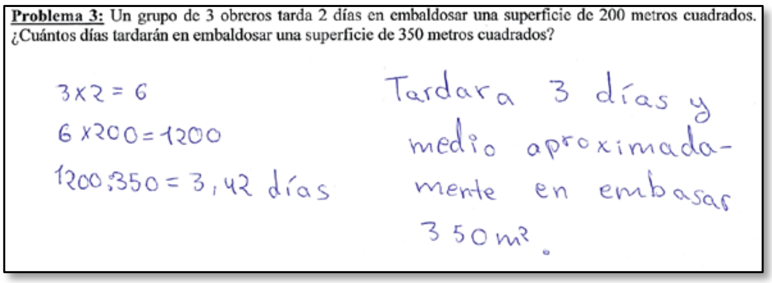
En general, observamos que el número de respuestas no justificadas (VPd0) es bajo. De hecho, el número total de respuestas que no exponen los argumentos utilizados es muy similar al del ciclo II-1. A pesar de ello destaca el mayor número de respuestas en la columna VPd0 en el problema de la prueba escrita (PE.4). Recordamos que en esta categoría también incluimos aquellas respuestas en las que los estudiantes o los equipos argumentan que el problema no se puede hacer porque no es de proporcionalidad directa.

		VPd0	VPd1	VPd2	VPd3	VPd4	VPd5	VPd6	VPd7	VPd8	VPd9
F6.2.1	N.º de resp.	0	0	0	23	0	0	0	0	3	0
	Porcentaje	-	-	-	82,1 %	-	-	-	-	10,7 %	-
F6.2.2	N.º de resp.	1	0	0	15	5	0	1	0	1	0
	Porcentaje	3,6 %	-	-	53,6 %	17,9 %	-	3,6 %	-	3,6 %	-
TC6.1	N.º de resp.	1	0	0	27	1	0	0	1	3	0
	Porcentaje	1,7 %	-	-	46,6 %	1,7 %	-	-	1,7 %	5,2 %	-
TC6.3	N.º de resp.	7	0	0	14	0	0	3	1	5	0
	Porcentaje	12,1 %	-	-	24,1 %	-	-	5,2 %	1,7 %	8,6 %	-
TC6.5	N.º de resp.		0	0	37	0	0	0	1	0	0
	Porcentaje	0 %	-	-	63,8 %	-	-	-	1,7 %	-	-
F7.1.1	N.º de resp.	2	0	0	25	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	7,1 %	-	-	89,3 %	-	-	-	-	-	-
F7.1.3	N.º de resp.	2	0	0	8	12	0	0	0	1	0
	Porcentaje	7,1 %	-	-	28,6 %	42,9 %	-	-	-	3,6 %	-
F7.1.4	N.º de resp.	1	0	2	10	0	0	0	0	7	0
	Porcentaje	3,6 %	-	7,1 %	35,7 %	-	-	-	-	25 %	-
TC8.5*	N.º de resp.	4	0	0	11	0	0	2	1	1	1
	Porcentaje	10,5 %	-	-	28,9 %	-	-	5,3 %	2,6 %	2,6 %	2,6 %
TC8.7*	N.º de resp.	1	0	0	18	1	0	0	1	2	0
	Porcentaje	2,6 %	-	-	47,4 %	2,6 %	-	-	2,6 %	5,3 %	-
PE.4	N.º de resp.	6	0	0	33	1	0	0	2	5	0
	Porcentaje	10,3 %	-	-	56,9 %	1,7 %	-	-	3,4 %	8,6 %	-

Tabla VII - 24. Estrategias empleadas en la resolución de los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1).

Producciones que siguen una estrategia errónea.

Pocas producciones siguen una estrategia errónea (VPd1, VPd8 y VPd9). De hecho, VPd1 no aparece y hemos clasificado una única producción en VPd9 (argumentos aditivos erróneos). Sí encontramos una mayor aparición de operaciones sin sentido (VPd8) en este ciclo si comparamos con el ciclo II-1. El problema en donde más encontramos este tipo de respuestas es F7.1.4 en donde aparecía por primera vez una estructura parte-parte-todo que, como hemos comentado, parece generar muchas dificultades a los alumnos y crece el número de respuestas incorrectas. Las producciones clasificadas en este problema como VPd8 son muy diversas, pero en general realizan operaciones entre los datos de las partes o del total a las que no se les ha encontrado sentido.


Problema 3: Un grupo de 3 obreros tarda 2 días en embaldosar una superficie de 200 metros cuadrados. ¿Cuántos días tardarán en embaldosar una superficie de 350 metros cuadrados?

3x2 = 6
6x200=1200
1200:350 = 3,42 días

Tardara 3 días y medio aproximadamente en embasar 350 m².

Imagen VII - 3. Producción del alumno C1.2 para el problema TC6.3 (Ciclo III-1).

Otras producciones categorizadas en VPd8 son las correspondientes al problema TC6.3 en el que el enunciado del problema contenía un distractor. Seis de las producciones analizadas en este ciclo usan el distractor para realizar algún tipo de operación y dar alguna solución (incorrecta) a la pregunta (Imagen VII - 3).

Producciones que siguen una estrategia correcta.

La mayor parte de los alumnos que realizan los ejercicios siguen una estrategia potencialmente correcta (VPd2-VPd7). Como en el ciclo II-1, de las estrategias establecidas como categorías, la única que no ha aparecido es la de proporciones (VPd5). Destaca la menor presencia en este ciclo de la estrategia de factor de cambio (VPd2), solo dos producciones la usan en este ciclo frente a las dieciséis del ciclo II-1, y de la estrategia de amalgamación (VPd6), seis producciones la usan en este ciclo frente a las doce del ciclo II-1. Por lo demás, los fenómenos observados son prácticamente idénticos a los descritos en el ciclo II-1. Por ejemplo, que la aparición de estrategias como la regla de tres tiene lugar en las tareas para casa y en la prueba escrita, probablemente por influencias externas.

También, de forma idéntica al ciclo II-1, de entre las estrategias por razón externa VPd3 y VPd4, la estrategia institucionalizada, VPd3, ha resultado mayoritaria en todos los problemas excepto en F7.1.3. En dicho problema, el enunciado proporciona explícitamente la razón externa apropiada para terminar el problema mediante una división, por lo que una mayoría de alumnos se ha decantado por la estrategia más económica en cuanto a número de operaciones. También es destacable el porcentaje de respuestas que usan VPd4 en vez de VPd3 en los problemas F6.2.2 y TC6.3. Como se comentó en el Capítulo V, este hecho puede deberse a la presencia de razones bien compactadas, precio unitario en F6.2.2 y velocidad de trabajo (metros cuadrados embaldosados por día) en TC6.3.

Errores cometidos en estrategias correctas.

A partir de las categorías de errores detectadas en el ciclo II-1 realizamos un estudio cuantitativo de la aparición de cada uno de los tipos de errores en este ciclo (Tabla VII - 25).

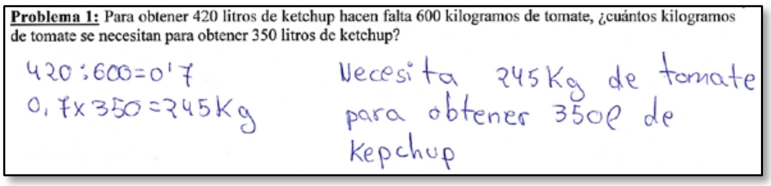
La escasa argumentación en algunas producciones que no escriben la interpretación de las razones calculadas complica la distinción entre el error de tipo VP.1 (error al identificar una razón con la interpretación de la inversa) y el error de tipo VP.4 (se opera con la razón inversa a la necesaria). Por tanto, estas categorías de errores las expresamos en forma de intervalo.

A diferencia de lo que observamos para este ciclo en los problemas de comparación cuantitativa, la mayor parte de los errores se concentran en la interpretación y uso de las razones externas (error VP.3 y error VP.4). Probablemente, por tanto, las dificultades se concentran en la utilización de las razones externas para operar y no en su interpretación ya que en los problemas de comparación los alumnos no necesitan operar con las razones externas sino calcularlas, interpretarlas y compararlas.

En general, los errores clasificados en la Tabla VII - 25 tienen un porcentaje de aparición bajo. Es decir, la mayor parte de los alumnos que utiliza una estrategia potencialmente correcta resuelve bien el problema. Sin embargo, es destacable el número de producciones con errores en TC6.1. Un ejemplo de los errores detectados en este problema se puede ver en la Imagen VII - 4. En este tipo de producciones los alumnos usan una estrategia VPd3, pero multiplican por la razón contraria a la necesaria. El alto número de producciones con este error en este problema podría deberse al alto número de producciones plagiadas detectadas en esta tarea para casa.

		Error VP.1	**Error VP.2**	**Error VP.3**	**Error VP.4**
F6.2.1	N.º de respuestas	1	0	0	0
	Porcentaje	3,6 %	-	-	-
F6.2.2	N.º de respuestas	4	0	1 - 3	1 - 3
	Porcentaje	14,3 %	-	3,6 % - 10,7 %	3,6 % - 10,7 %
TC6.1	N.º de respuestas	2	0	0 - 7	6 - 13
	Porcentaje	3,4 %	-	0 % - 12,1 %	10,3 % - 22,4 %
TC6.3	N.º de respuestas	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	-
TC6.5	N.º de respuestas	1	1	0 - 3	0 - 3
	Porcentaje	1,7 %	1,7 %	0 % - 5,2 %	0 % - 5,2 %
F7.1.1	N.º de respuestas	0	0	1	1
	Porcentaje	-	-	3,6 %	3,6 %
F7.1.3	N.º de respuestas	1	0	0 - 2	2 - 4
	Porcentaje	3,6 %	-	0 % - 7,1 %	7,1 % - 14,3 %
F7.1.4	N.º de respuestas	2	0	2	0
	Porcentaje	7,1 %	-	7,1 %	-
TC8.5*	N.º de respuestas	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	-
TC8.7*	N.º de respuestas	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	-
PE.4	N.º de respuestas	0	0	3 - 6	2 - 5
	Porcentaje	-	-	5,2 % - 10,3 %	3,4 % - 8,6 %

Tabla VII - 25. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-1).


Problema 1: Para obtener 420 litros de ketchup hacen falta 600 kilogramos de tomate, ¿cuántos kilogramos de tomate se necesitan para obtener 350 litros de ketchup?

420 : 600 = 0'7
0,7x350 = 245Kg

Necesita 245Kg de tomate para obtener 350l de Kepchup

Imagen VII - 4. Producción del alumno C1.1 para el problema TC6.1 (Ciclo III-1).

Algunas de las producciones en este ciclo no se han podido clasificar con la anterior categoría de errores. En particular, encontramos dos producciones para TC.8.7 donde se ha producido un error por no cambiar de unidades las cantidades de la magnitud “cardinalidad de huevos” que se presentaba en docenas en una situación y en número de huevos en la otra (Imagen VII - 5).

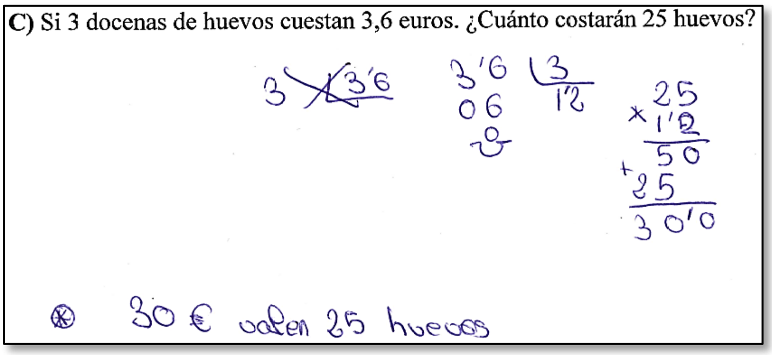


Imagen VII - 5. Producción del alumno D7.2 para el problema TC8.7 (Ciclo III-1).

VII.3.1.6. Problemas de proporcionalidad compuesta

Las situaciones de proporcionalidad compuesta se trabajaron durante la sesión 8 (incluida la tarea para casa tras esta sesión). Además, se introdujo un problema de estas características en la sesión de repaso (sesión 12) y otro en la prueba escrita. En total, en esta sección analizamos de forma cualitativa y cuantitativa 314 producciones. En cuanto al tipo de problema, en esta sección, se analizan simultáneamente los problemas de valor perdido y los de comparación.

Comenzaremos fijando la atención en primer lugar en la situación introductoria en la que se presenta un problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad compuesta, para después realizar un análisis conjunto del resto de problemas asociados a este foco de interés.

Análisis de la situación introductoria.

La situación introductoria suponía la resolución de un problema de valor perdido de tipo Directa-Directa de forma que las variables independientes podían amalgamarse fácilmente por producto. En la Tabla VII - 26 vemos los resultados para las categorías generales. Se observa que el número de respuestas en blanco es significativo. Este hecho, como veremos a continuación se mantiene en el resto de los problemas de proporcionalidad compuesta de la propuesta en este ciclo. Sin embargo, el número de equipos que responden al problema y, en concreto, los que dan una respuesta correcta, es suficientemente alto como para considerar exitosa la situación introductoria.

		N	B	I	C
F8.1.1	N.º de respuestas	1	6	8	13
	Porcentaje	3,6 %	21,4 %	28,6 %	46,4 %

Tabla VII - 26. Resultados generales en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1).

Además, si nos fijamos en las estrategias empleadas por los equipos (Tabla VII - 27, Tabla VII - 28), observamos que el porcentaje de equipos que utiliza la estrategia que se pretende institucionalizar (amalgamación, VPC2) es alto. La amalgamación se utiliza de forma natural por los alumnos con una frecuencia que dobla a la de la siguiente estrategia con mayor frecuencia (paso a paso pasando por la unidad, VPC3). En este sentido, el cambio de la situación introductoria del ciclo

II-1 a este parece exitoso, ya que en el ciclo anterior no había una clara predilección entre los métodos VPC2 y VPC3.

		VPC0	VPC1	VPC8	VPC9	VPC10	VP11
F8.1.1	N.º de respuestas	0	0	5	0	0	0
	Porcentaje	-	-	17,9 %	-	-	-

Tabla VII - 27. Estrategias incorrectas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1).

		VPC2	VPC3	VPC4	VPC5	VPC6	VP7
F8.1.1	N.º de respuestas	11	5	0	0	0	0
	Porcentaje	39,3 %	17,9 %	-	-	-	-

Tabla VII - 28. Estrategias potencialmente correctas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1).

No encontramos ni estrategias que mezclen el paso a paso y la amalgamación, VPC4, ni estrategias de paso a paso sin pasar por la unidad, VPC5, ni proporciones, VPC6, ni uso de una fórmula, VPC7, lo que refuerza la idea de que estas estrategias son menos naturales en alumnos sin experiencia ni instrucción previa en la resolución de este tipo de problemas. Todas las estrategias potencialmente correctas se basan en el cálculo de la constante de proporcionalidad del problema.

En cuanto a las estrategias incorrectas, solo 5 producciones han sido categorizadas en VPC8, única estrategia incorrecta encontrada, ya que presentan operaciones sin posible interpretación en términos del enunciado del problema.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Tras el análisis de la situación introductoria, analizamos el desempeño de los alumnos en el resto de los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta. Presentamos separadamente el análisis cuantitativo de las categorías generales para los problemas de valor perdido (Tabla VII - 29) y para los problemas de comparación cuantitativa (Tabla VII - 30).

		N	B	I	C
F8.2.1	N.º de respuestas	1	9	6	12
	Porcentaje	3,6 %	32,1 %	21,4 %	42,9 %
F8.2.3	N.º de respuestas	1	16	3	8
	Porcentaje	3,6 %	57,1 %	10,7 %	28,6 %
TC8.8	N.º de respuestas	21	8	7	22
	Porcentaje	36,2 %	13,8 %	12,1 %	37,9 %
F12.1.5	N.º de respuestas	0	9	6	13
	Porcentaje	-	32,1 %	21,4 %	46,4 %
PE.5	N.º de respuestas	1	18	15	24
	Porcentaje	1,7 %	31,0 %	25,9 %	41,4 %

Tabla VII - 29. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1).

		N	B	I	C
F8.2.2	N.º de respuestas	1	9	7	11
	Porcentaje	3,6 %	32,1 %	25 %	39,3 %
TC8.9	N.º de respuestas	21	9	7	21
	Porcentaje	36,2 %	15,5 %	12,1 %	36,2 %

Tabla VII - 30. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1).

El número de producciones no entregadas de la tarea para casa aumenta respecto a los focos de contenido anteriormente analizados.

Durante este ciclo aumenta mucho el porcentaje de alumnos que entregan los ejercicios en blanco o con producciones sin sentido. Ya hablamos de este hecho en la sección anterior cuando analizamos los problemas de valor perdido. Este efecto se debe, en parte, al alto número de alumnos "objetores" que representa alrededor de un 20 % del total y que, conforme avanza la propuesta van trabajando menos y dejando más producciones en blanco. Descontado este efecto, el comportamiento de las tasas de respuestas correctas e incorrectas es similar al observado en el Capítulo V, aunque se detecta un descenso de las tasas de éxito de forma uniforme en toda la propuesta (como, por ejemplo, el descrito en los problemas de valor perdido en la sección anterior). Este descenso es especialmente acusado en la tasa de éxito del problema de la prueba escrita en el que se obtienen resultados significativamente peores a los del ciclo II-1.

Al igual que en el ciclo II-1, las tasas de respuestas correctas en los problemas de comparación parecen ligeramente inferiores a las de los problemas de valor perdido, aunque en este ciclo las diferencias no son tan acusadas.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Para el siguiente nivel de análisis solo se han tenido en cuenta las producciones que hacen una propuesta de resolución de los problemas (categorías I y C). En la Tabla VII - 31 se presenta el análisis cuantitativo de las producciones que siguen una estrategia errónea para los problemas de valor perdido, en la Tabla VII - 32 se presentan las que siguen una estrategia potencialmente correcta para este tipo de problemas y en la Tabla VII - 33 el análisis cuantitativo de todas las estrategias (erróneas y potencialmente correctas) empleadas en los problemas de comparación cuantitativa.

		VPC0	VPC1	VPC8	VPC9	VPC10	VPC11
F8.2.1	N.º de respuestas	0	0	5	0	0	0
	Porcentaje	-	-	17,9 %	-	-	-
F8.2.3	N.º de respuestas	0	0	2	0	0	0
	Porcentaje	-	-	7,1 %	-	-	-
TC8.8	N.º de respuestas	0	0	2	0	2	2
	Porcentaje	-	-	3,4 %	-	3,4 %	3,4 %
F12.1.5	N.º de respuestas	0	0	3	0	0	0
	Porcentaje	-	-	10,7 %	-	-	-
PE.5	N.º de respuestas	0	1	5	0	0	1
	Porcentaje	-	1,7 %	8,6 %	-	-	1,7 %

Tabla VII - 31. Estrategias incorrectas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1).

		VPC2	VPC3	VPC4	VPC5	VPC6	VPC7
F8.2.1	N.º de respuestas	6	7	0	0	0	0
	Porcentaje	21,4 %	25 %	-	-	-	-
F8.2.3	N.º de respuestas	5	4	0	0	0	0
	Porcentaje	17,9 %	14,3 %	-	-	-	-
TC8.8	N.º de respuestas	10	11	1	0	0	1
	Porcentaje	17,2 %	19,0 %	1,7 %	-	-	1,7 %
F12.1.5	N.º de respuestas	14	0	2	0	0	0
	Porcentaje	50 %	0	7,1 %	-	-	-
PE.5	N.º de respuestas	20	6	6	0	0	0
	Porcentaje	34,5 %	10,3 %	10,3 %	-	-	-

Tabla VII - 32. Estrategias potencialmente correctas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1).

Probablemente debido a la mayor complejidad de los problemas de proporcionalidad compuesta el número de producciones que dan una respuesta sin realizar ningún tipo de cálculo (se clasifican en las categorías en las que no se esgrimen argumentos, VPC0 y CC0) es muy bajo. Solo encontramos una producción de este tipo en el problema de comparación cuantitativa TC8.9

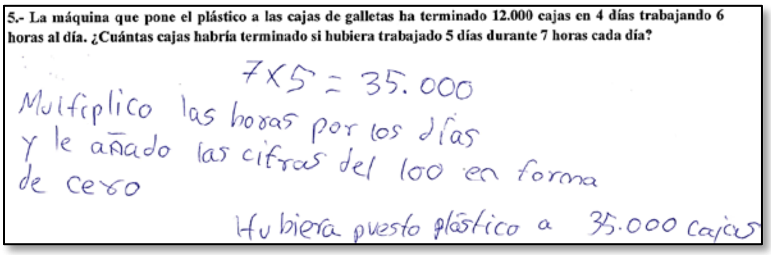
		CC0	CC1	CC2	CC3	CC4	CC5	CC6
F8.2.2	N.º de respuestas	0	4	9	0	4	0	1
	Porcentaje	-	14,3 %	32,1 %	-	14,3 %	-	3,6 %
TC8.9	N.º de respuestas	1	6	15	2	0	0	4
	Porcentaje	1,7 %	10,3 %	25,9 %	3,4 %	-	-	6,9 %

Tabla VII - 33. Estrategias de resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-1).

Producciones que siguen una estrategia errónea.

El porcentaje de respuestas que usan alguna estrategia incorrecta (VPC1, VPC8-VPC11, CC4-CC6) es minoritario. Entre las estrategias incorrectas destaca que no aparecen respuestas aditivas erróneas (VPC9 y CC5). Como en el ciclo II-1, la mayor parte de las estrategias incorrectas se concentran en las categorías de operaciones sin sentido (VPC8 y CC4), aunque también encontramos algunas producciones que omiten alguna de las magnitudes para trabajar solo con dos, como si se tratase de un problema de proporcionalidad simple (VPC 11 y CC6).

Aparecen por primera vez en la propuesta algunas respuestas clasificadas en las categorías de resolución incorrecta, “construcción de patrones”, VPC1, y “trabajo con las magnitudes independientes por separado”, VPC10. Ambas de forma anecdótica, una producción en VPC1 en la prueba escrita (Imagen VII - 6) y dos en VPC10 en la tarea para casa TC8.



5.- La máquina que pone el plástico a las cajas de galletas ha terminado 12.000 cajas en 4 días trabajando 6 horas al día. ¿Cuántas cajas habría terminado si hubiera trabajado 5 días durante 7 horas cada día?

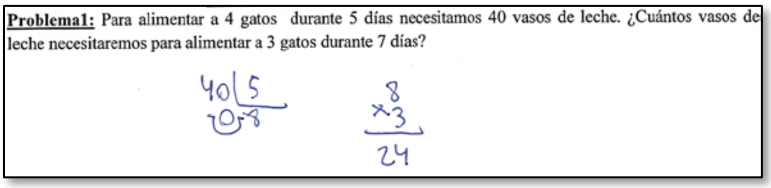
7x5 = 35.000

Multiplico las horas por los días y le añado las cifras del 100 en forma de cero

Hubiera puesto plástico a 35.000 cajas

Imagen VII - 6. Producción del alumno B8.1 para el problema PE.5 (Ciclo III-1).

Como ejemplo de respuesta clasificada en VPC10 podemos ver la producción del alumno C10.2 que opera omitiendo la magnitud “número de gatos” en el problema TC8.8 ().



Problema1: Para alimentar a 4 gatos durante 5 días necesitamos 40 vasos de leche. ¿Cuántos vasos de leche necesitaremos para alimentar a 3 gatos durante 7 días?

40 | 5
0 8

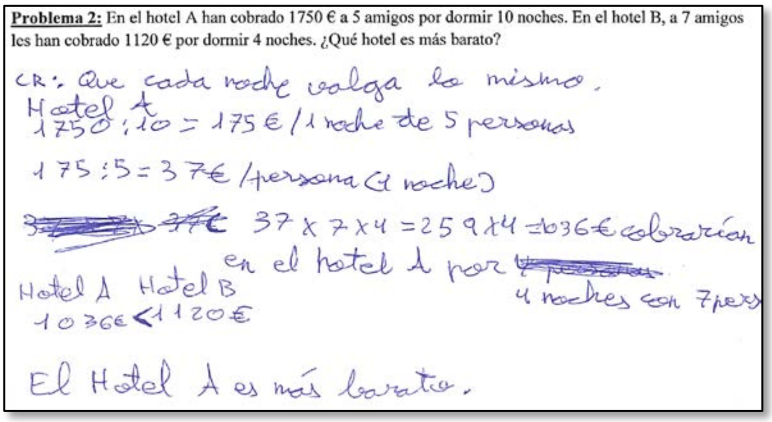
8
x3
24

Imagen VII - 7. Producción del alumno C10.2 para el problema TC8.8 (Ciclo III-1).

Producciones que siguen una estrategia correcta.

Como ocurría en el ciclo II-1 las estrategias potencialmente correctas que aparecen en este ciclo son VPC2, VPC3 y VPC4 en el caso de problemas de valor perdido, y CC1 y CC2 en el caso de los problemas de comparación cuantitativa. Estas estrategias pasan por el cálculo de las constantes de proporcionalidad, tanto para problemas de valor perdido como para problemas de comparación cuantitativa. Además, como ya apuntamos en los ciclos anteriores, para cada paso en las estrategias de paso a paso o para el problema de proporcionalidad simple tras una estrategia de amalgamación, los alumnos utilizan mayoritariamente estrategias basadas en las razones externas.

Aparecen en este ciclo por primera vez en la propuesta los métodos VPC7 y CC3. El uso de una fórmula aparece en una única producción en el problema TC8.8 (Imagen VII - 9) y la resolución de un problema de comparación cuantitativa utilizando como paso previo un problema de valor perdido en dos resoluciones de TC8.9 (Imagen VII - 8). Ambos problemas aparecen en la ficha de trabajo para casa TC8.



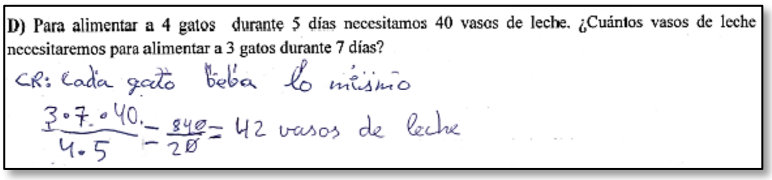
Problema 2: En el hotel A han cobrado 1750 € a 5 amigos por dormir 10 noches. En el hotel B, a 7 amigos les han cobrado 1120 € por dormir 4 noches. ¿Qué hotel es más barato?

CR: Que cada noche valga lo mismo.
Hotel A
1750 : 10 = 175 € / 1 noche de 5 personas
175 : 5 = 37 € / persona (1 noche)
~~37€~~ 37 x 7 x 4 = 259 x 4 = 1036 € cobrarían en el hotel A por ~~...~~ 4 noches con 7 pers
Hotel A Hotel B
1036€ < 1120€
El Hotel A es más barato.

Imagen VII - 8. Producción del alumno C1.2 para el problema TC8.9 (Ciclo III-1).

Una de las producciones para TC8.9 que sigue una estrategia CC3, contabilizada como correcta pese a su error aritmético puede observarse en la Imagen VII - 8. En ella puede observarse que el alumno sigue una estrategia VPC3 de paso a paso pasando por la unidad para calcular cuánto cobrarían (obsérvese que el alumno usa el condicional) en el Hotel A si el grupo de amigos fuera igual de grande que en el Hotel B, y estuvieran las mismas noches. Es decir, para resolver un problema de comparación $(1750:5:10) \sim (1120:7:4)$, resuelve en primer lugar el problema de valor perdido $(1750:5:10) \leftrightarrow (x:7:4)$ para, posteriormente, comparar la cantidad obtenida $x = 1036$ con 1120.

Como ejemplo de uso de una fórmula tenemos la producción del alumno D2.2 que establece (sin argumentos previos) una única operación con todos los datos del problema para obtener la solución (ver Imagen VII - 9).



D) Para alimentar a 4 gatos durante 5 días necesitamos 40 vasos de leche. ¿Cuántos vasos de leche necesitaremos para alimentar a 3 gatos durante 7 días?

CR: Cada gato beba lo mismo
$\frac{3\cdot7\cdot40}{4\cdot5} = \frac{840}{20} = 42$ vasos de leche

Imagen VII - 9. Producción del alumno D2.2 para el problema TC8.8 (Ciclo III-1).

Errores cometidos en estrategias correctas.

Como se observa en los datos recogidos en las tablas anteriores, y como ocurría en el ciclo II-1, el número de respuestas correctas y el número de alumnos que eligen una estrategia potencialmente correcta es muy similar. Este hecho se debe a que encontramos muy pocas producciones que cometan errores (diferentes a los de aplicación de la ejecución de los algoritmos de cálculo) una vez elegida una estrategia correcta para la resolución del problema. Las pocas producciones con errores que han planteado una estrategia correcta para el problema compuesto eligen una estrategia incorrecta para el problema simple o cometen alguno de los errores tipificados en las secciones anteriores para problemas simples.

VII.3.1.7. Porcentajes

Los problemas de porcentajes se trabajaron de forma específica en las sesiones 9, 10 y 11, y las actividades de trabajo para casa TC9 y TC10. Además, se introdujeron dos problemas de porcentajes en la sesión de repaso, F12.1.5 y F12.1.6, y otros dos en la prueba escrita, PE7 y PE8. Debido a los cambios en la introducción del porcentaje llevados a cabo en este ciclo ya hemos analizado muchos de los resultados obtenidos en el bloque de análisis de las producciones de los alumnos relativas al foco 1 de contenido (ver VII.3.1.2. Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones). Estos problemas analizados se correspondían con el cálculo de razones externas en contextos de porcentajes. Por tanto, en esta sección omitimos los apartados de los problemas en los que se solicitaba el cálculo o la interpretación de una razón, salvo los correspondientes a las situaciones introductorias para valorar la conveniencia de estas dentro del enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas. Así, en lo que no concierne a las situaciones introductorias, nos centraremos en los problemas de valor perdido de Tipo I, Tipo II y Tipo III, y en las tareas de cálculos de complementarios (estructura aditiva parte-parte-todo). Al igual que en el resto del análisis, para los problemas que tenían varias preguntas a partir de un mismo contexto se ha añadido un índice al final del código del problema para diferenciar estos apartados. En total, en esta sección se analizan 1504 producciones.

Análisis de las situaciones introductorias.

Recordamos los enunciados de las situaciones introductorias para la sesión 9 y la sesión 10 ya que son sustancialmente distintos de los utilizados en el ciclo II-1 (Capítulo V). La situación introductoria utilizada en la sesión 11 es la misma que la que se usó en la sesión 10 del ciclo II-1.

F9.1.1: *En un refresco el 20 % del volumen es zumo de limón y el resto agua.*

F9.1.1.1: *Porcentaje de agua que lleva el refresco:*

F9.1.1.2: *En el refresco hay ____ litros de zumo de limón por cada _____ litros de refresco.*

F9.1.1.3: *En el refresco hay _____ litros de agua por cada ______ litros de refresco.*

Calcula y di el significado:

F9.1.1.4: *Razón entre zumo de limón y refresco:*

F9.1.1.5: *Razón entre refresco y zumo de limón:*

F9.1.1.6: *Razón entre agua y refresco:*

F9.1.1.7: *Razón entre refresco y agua:*

F9.1.1.8: *Razón entre zumo de limón y agua:*

F9.1.1.9: *Razón entre agua y zumo de limón:*

F9.1.1.10: *¿Cuánto zumo de limón y agua hay que mezclar para hacer 2 l de refresco?*

F9.1.2: *En una reunión de 70 asistentes hay 28 españoles.*

Calcula y di el significado:

F9.1.2.1: *Razón entre españoles y asistentes:*

F9.1.2.2: *Razón entre asistentes y españoles:*

F9.1.2.3: *Razón entre españoles y franceses:*

F9.1.2.4: *Si se mantiene la razón de españoles. ¿Cuántos españoles habría con 100 asistentes?*

F9.1.2.5: *¿Cuál es el porcentaje de españoles?*

F9.1.2.6: *¿Cuál es el porcentaje de no españoles?*

F10.1.1: *Si quiero hacer 100 g de masa para pizza tengo que poner 40 g de harina de trigo.*

F10.1.1.1: *¿Qué porcentaje de harina de trigo lleva la masa para pizza?*

F10.1.1.2: *¿Cuánta harina de trigo tendré que poner si quiero hacer 270 g de masa de pizza?*

Separamos los análisis de las situaciones introductorias para cada una de las sesiones. En la Tabla VII - 34 se presentan los resultados en las categorías generales en la situación introductoria de la sesión 9 dedicada a la interpretación del porcentaje y su relación con la razón.

El número de respuestas en blanco va creciendo a lo largo de la sesión lo que puede ser indicativo de que no todos los equipos consiguen llegar a realizar todos los problemas de la ficha de trabajo. Por otra parte, las respuestas incorrectas se concentran especialmente en los problemas F9.1.1.10, F9.1.2.1 y F9.1.2.2. A partir de estos problemas decrece el número de respuestas incorrectas y crece el número de respuestas en blanco. Estos resultados apuntan a que el problema de Tipo I, F9.1.1.10, introducido de forma exploratoria como último apartado del problema F9.1.1 supone una gran dificultad a los alumnos. De todas formas, la sesión 10, incluida su situación introductoria se dedican a este tipo de problemas. En cuanto a los primeros apartados de F9.1.2, sorprende la alta tasa de respuestas incorrectas si la comparamos con las respuestas incorrectas en F9.1.1. Quizá el hecho de que las magnitudes sean discretas pueda explicar en parte esta mayor dificultad para una situación parte-parte-todo (los alumnos deben interpretar cantidades no enteras y, en algunos casos, menores que la unidad para las razones externas que relacionan cardinalidad de personas con diferentes características).

En cuanto a la tasa de éxito, vemos que los apartados del primer problema, F9.1.1, en los que se presentaba una información en forma de porcentaje y se pedía, en primer lugar, calcular un complementario e interpretar el porcentaje como dos cantidades de magnitud relacionadas (F9.1.1.1 - F9.1.1.3) y, en un segundo momento, calcular razones asociadas (F9.1.1.4 - F9.1.1.9), tienen unas tasas de éxito bastante elevadas (entre el 64,3 % y el 85,7 %). Las tasas de éxito bajan sustancialmente a partir de F9.1.1.10 y en el segundo problema F9.1.2 (salvo para la detección de un falso complementario en F9.1.2.3 en el que se obtiene una mejor tasa de éxito). Ya hemos comentado las posibles dificultades que han podido lastrar estas tasas de éxito en F9.1.1.10 y en el problema F9.1.2, aunque cabe destacar que estas se mantienen prácticamente estables desde F9.1.1.10 hasta el final de la ficha de trabajo, por lo que puede que la extensión de la ficha sea otro de los motivos que han provocado que las tasas de éxito en esta segunda parte sean peores.

En cualquier caso, el número de equipos que realiza los problemas y, en particular, el número de equipos que da respuestas correctas en esta situación introductoria hace pensar que el diseño es adecuado para su propósito de hacer surgir las ideas que relacionan el porcentaje y la razón externa.

	N	B	I	C
F9.1.1.1	3,6 (1)	10,7 (3)	3,6 (1)	82,1 (23)
F9.1.1.2	3,6 (1)	7,1 (2)	3,6 (1)	85,7 (24)
F9.1.1.3	3,6 (1)	7,1 (2)	10,7 (3)	78,6 (22)
F9.1.1.4	3,6 (1)	10,7 (3)	10,7 (3)	75 (21)
F9.1.1.5	3,6 (1)	10,7 (3)	10,7 (3)	75 (21)
F9.1.1.6	3,6 (1)	17,9 (5)	10,7 (3)	71,4 (20)
F9.1.1.7	3,6 (1)	14,3 (4)	10,7 (3)	71,4 (20)
F9.1.1.8	3,6 (1)	21,4 (6)	7,1 (2)	67,9 (19)

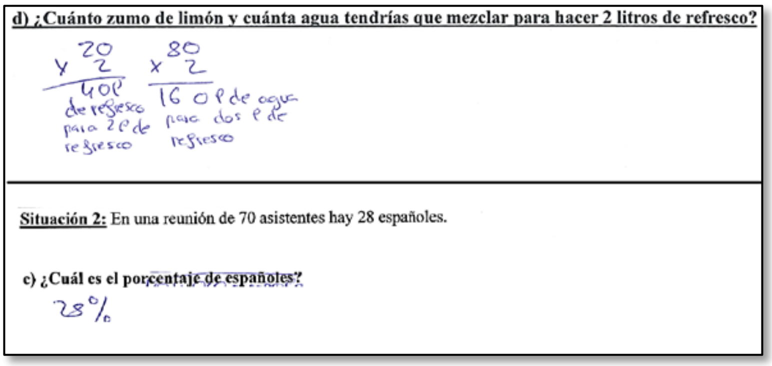
	N	B	I	C
F9.1.1.9	3,6 (1)	28,6 (8)	3,6 (1)	64,3 (18)
F9.1.1.10	3,6 (1)	28,6 (8)	35,7 (10)	32,1 (9)
F9.1.2.1	3,6 (1)	28,6 (8)	60,7 (17)	28,6 (8)
F9.1.2.2	3,6 (1)	7,1 (2)	57,1 (16)	32,1 (9)
F9.1.2.3	3,6 (1)	32,1 (9)	3,6 (1)	60,7 (17)
F9.1.2.4	3,6 (1)	46,4 (13)	14,3 (4)	35,7 (10)
F9.1.2.5	3,6 (1)	42,9 (12)	21,4 (6)	32,1 (9)
F9.1.2.6	3,6 (1)	42,9 (12)	21,4 (6)	32,1 (9)

Tabla VII - 34. Resultados generales en la situación introductoria de interpretación del porcentaje (Ciclo III-1).

En muchos de los problemas en los que se pide calcular una razón concreta solo encontramos el cálculo numérico de la razón, pero los equipos no explicitan el significado de dichos números como tanto por uno. En las entrevistas semiestructuradas se indagará sobre este hecho para intentar descubrir si los alumnos son o no capaces de realizar estas interpretaciones.

Los problemas F9.1.1.10 y F9.1.2.4 pueden considerarse como problemas de valor perdido de Tipo I y Tipo II, respectivamente, pero con una estructura muy marcada para facilitar su resolución. Entre las estrategias de resolución empleadas en F9.1.1.10 encontramos diez resoluciones sin justificaciones (VPp0), ocho basadas en la razón externa con multiplicación (VPp3) y una clasificada como utilización de argumentos aditivos erróneos (VPp9). Para el problema F9.1.2.4 encontramos tres producciones sin justificar (VPp0), ocho producciones que usan la razón externa con multiplicación (VPp3) y tres producciones clasificadas como “operaciones sin sentido” (VPp8). Por tanto, vemos que entre los alumnos que argumentan sus respuestas son mayoritarias las respuestas que usan estrategias potencialmente correctas y que, además, la única estrategia correcta empleada es la de razón externa con multiplicación. Dicha estrategia es la que se pretende institucionalizar por lo que la elección de la situación introductoria parece adecuada para hacerla surgir de forma “natural”.

En cuanto a los errores detectados en las resoluciones destacan los que en F9.1.1.10 responden los litros necesarios de zumo para hacer 200 litros de refresco, en vez de los dos litros que son los que solicitaba el enunciado (Imagen VII - 10, arriba), y los que confunden el porcentaje con la razón o con la cantidad absoluta (Imagen VII - 10, abajo).


d) ¿Cuánto zumo de limón y cuánta agua tendrías que mezclar para hacer 2 litros de refresco?

x 20 / 2 / 40 l de refresco para 2 l de refresco

x 80 / 2 / 160 l de agua para dos l de refresco

Situación 2: En una reunión de 70 asistentes hay 28 españoles.

c) ¿Cuál es el porcentaje de españoles?

28 %

Imagen VII - 10. Producciones del equipo B8 para F9.1.1.10, arriba, y para F9.1.2.5, abajo (Ciclo III-1).

A continuación, analizamos la situación introductoria para problemas de valor perdido de Tipo I que se trabaja durante la sesión 10. En la Tabla VII - 35 presentamos los resultados para las categorías generales.

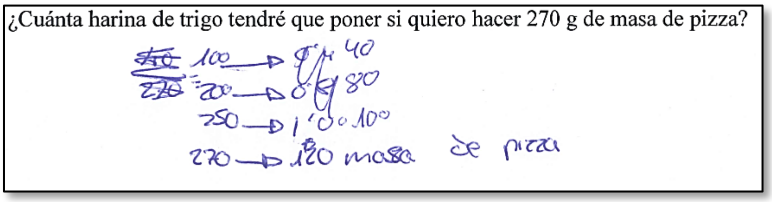
		N	**B**	**I**	**C**
F10.1.1.1	N.º de respuestas	0	0	2	26
	Porcentaje	-	-	7,1 %	92,9 %
F10.1.1.2	N.º de respuestas	0	3	12	13
	Porcentaje	-	10,7 %	42,9 %	46,4 %

Tabla VII - 35. Resultados generales en la situación introductoria de cálculo directo con porcentajes (Ciclo III-1).

En F10.1.1.1 los equipos debían interpretar la relación entre dos cantidades en una situación parte todo con estructura numérica $(100: 40)$ como un porcentaje. Como era previsible, esta situación tiene una tasa de éxito cercana al 100 % aunque es significativo que dos equipos hayan respondido de forma incorrecta a esta pregunta.

Para F10.1.1.2, en donde los alumnos debían resolver un problema de valor perdido de Tipo I, se han obtenido porcentajes de respuestas correctas e incorrectas muy similares de alrededor del 45 %. Esta tasa de éxito, aunque adecuada para una situación introductoria, puede resultar baja teniendo en cuenta que los alumnos ya han resuelto problemas de valor perdido durante la propuesta. Este hecho parece redundar en las dificultades que encuentran los alumnos para conectar los problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje con este tipo de problemas en otras situaciones.

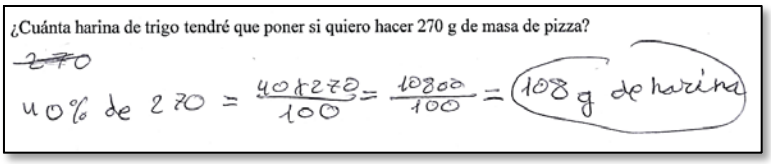
Entre las estrategias empleadas por los alumnos, encontramos solo dos producciones sin justificaciones (VPp0) y tres producciones en las que se observan operaciones sin sentido (VPp8). La mayor parte de estudiantes utiliza una estrategia potencialmente correcta entre las que destaca el uso de la estrategia que quiere institucionalizarse, VPp3, basada en el cálculo de la razón externa que resuelve el problema por multiplicación. De forma minoritaria, encontramos dos producciones que usan estrategias de construcción sucesiva (VPp6) que no habíamos encontrado anteriormente en las situaciones introductorias del porcentaje. Aunque una de las producciones no llega a terminar el problema y la otra realiza una estimación (Imagen VII - 11), creemos que el hecho de que aparezcan este tipo de estrategias constitutivas de etapas iniciales en el desarrollo del razonamiento proporcional es una consecuencia positiva del diseño de la situación introductoria, que parece promover la comprensión del porcentaje acercándolo a su significado original como relación entre dos cantidades.


¿Cuánta harina de trigo tendré que poner si quiero hacer 270 g de masa de pizza?

~~540~~ 100 → 40
~~270~~ 200 → 80
250 → 100
270 → 120 masa de pizza

Imagen VII - 11. Producción del equipo B2 para el problema F10.1.1.2 (Ciclo III-1).

Como ya sucedió en el ciclo II-1, y a diferencia de lo que ocurre en otros focos de contenido, entre las estrategias potencialmente correctas que surgen de forma espontánea en los alumnos en la resolución de la situación introductoria encontramos dos producciones que parecen hacer uso de una fórmula. Es el caso de la producción que puede verse en la Imagen VII - 12, en donde el equipo C1 parece conocer un procedimiento para realizar cálculos, al menos directos, con porcentajes. Este equipo parece dar una interpretación de operador al porcentaje escribiendo "40 % de 270" para, seguidamente, escribir una fracción en cuyo numerador se realiza la multiplicación del numeral del porcentaje y la cantidad total, y en el denominador aparece la cantidad 100. Este hecho está posiblemente relacionado con los conocimientos previos de la etapa de Educación Primaria que poseen los estudiantes.

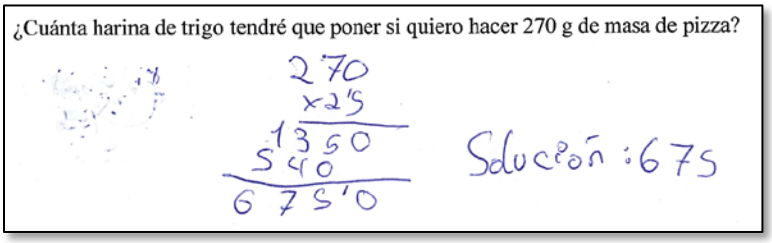

¿Cuánta harina de trigo tendré que poner si quiero hacer 270 g de masa de pizza?

~~270~~

40% de $270 = \frac{40 \times 270}{100} = \frac{10800}{100} =$ 108 g de harina

Imagen VII - 12. Producción del equipo C1 para el problema F10.1.1.2 (Ciclo III-1).

En cuanto a los errores detectados en esta situación introductoria, se han clasificado dos producciones inacabadas y otras tres respuestas que operan por la razón inversa a la pertinente, bien porque dividen la cantidad total por 0,4 o bien porque multiplican la cantidad total por la inversa de esta razón, es decir por 2,5 (ver Imagen VII - 13). En ambos casos los alumnos ofrecen como solución la cantidad 675. Estos errores se pueden relacionar con el error VP3 o con el error VP4 descritos para problemas de valor perdido de forma general.


¿Cuánta harina de trigo tendré que poner si quiero hacer 270 g de masa de pizza?

270
×2'5
1350
540
675'0

Solución: 675

Imagen VII - 13. Producción del equipo C9 para el problema F10.1.1.2 (Ciclo III-1).

Por último, analizamos lo sucedido en torno a la situación introductoria para problemas de valor perdido de Tipo III, F11.1.1. Recordemos que esta situación introductoria es esencialmente la misma que la utilizada en el ciclo II-1[59]. Debido a que el formato de la misma causaba algunas confusiones, se decidió "tapar" el total de alumnos diciendo que se había borrado por accidente, en vez de presentarlo y decir que este era erróneo. Si comparamos los resultados en las categorías generales para este ciclo (ver Tabla VII - 36) con los del ciclo II-1 (ver Tabla V - 54) y tenemos en cuenta que en este ciclo, en general, las tasas de éxito en casi todos los problemas son inferiores, podemos intuir que el cambio en el diseño ha favorecido la comprensión de la situación. Baja la tasa de respuestas en blanco y sube, muy ligeramente, la tasa de respuestas correctas.

		N	B	I	C
F11.1.1	N.º de respuestas	0	5	6	17
	Porcentaje	-	17,9 %	21,4 %	60,7 %

Tabla VII - 36. Resultados generales en la situación introductoria de cálculo inverso con porcentajes (Ciclo III-1).

En cuanto a las estrategias empleadas se han clasificado dos producciones sin ningún tipo de justificación, y el resto de las producciones siguen alguna estrategia potencialmente correcta.

Entre las estrategias potencialmente correctas encontramos frecuencias similares a las analizadas en el ciclo II-1. Tres producciones utilizan análisis unitario (VPp2), es decir, calculan la cantidad correspondiente a un $1\,\%$ para luego calcular la correspondiente al $100\,\%$. Cuatro producciones se apoyan en el $25\,\%$ como punto de referencia para construir sucesivamente la cantidad correspondiente al $100\,\%$ (estas estrategias se podrían clasificar tanto en VPp6, construcción sucesiva, como en VPp11, uso de puntos de referencia). Por último, la estrategia mayoritariamente empleada por los alumnos para responder a la situación introductoria (14 equipos de los 28) es la estrategia que emplea la razón externa con multiplicación, VPp3. Sin embargo, no muchas de estas producciones explicitan el significado de esta razón externa, por lo que se intentará indagar sobre la comprensión de su significado en las entrevistas semiestructuradas.

En general, se han detectado muy pocos errores (cuatro concretamente) entre las producciones que utilizan una estrategia correcta y estos corresponden a resoluciones inacabadas o bien a errores en el empleo de las razones externas (error VP3 o error VP4).

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Después de analizar las situaciones introductorias, en la Tabla VII - 37 presentamos los resultados para las categorías generales del resto de problemas de porcentajes realizados en la propuesta. Como en el Capítulo VI hemos etiquetado cada problema según sea un problema de valor perdido de Tipo I, Tipo II o Tipo III, o un problema de cálculo de complementarios.

[59] En el ciclo II-1 la situación introductoria para los problemas de valor perdido de Tipo III en situaciones de porcentaje tenía el código F10.1.1.

Analizamos, en primer lugar, los porcentajes de éxito según el tipo de tarea de porcentaje que representan. En los problemas de búsqueda de complementarios observamos un comportamiento muy similar al descrito en el ciclo II-1. Las tasas de éxito son generalmente altas (en algunos problemas mejores que las del ciclo II-1) salvo en algunos problemas en los que para responder se necesitaba haber hecho algún problema previo (como, por ejemplo, en PE.7.2 o en F12.1.6.3). Dichas tasas de éxito son, además, muy similares a las obtenidas en el ciclo II-1 (ver Tabla V - 57) y un test exacto de Fisher no arroja diferencias significativas entre el ciclo II-1 y el ciclo III-1 en los resultados en la prueba escrita para PE.7.2.

		N	B	I	C
TC9.1.2	Tipo II	32,8 (19)	12,1 (7)	12,1 (7)	43,1 (25)
TC9.1.3	Comp.	32,8 (19)	13,8 (8)	5,2 (3)	48,3 (28)
TC9.2.1	Comp.	32,8 (19)	8,6 (5)	6,9 (4)	51,7 (30)
TC9.3.1	Tipo II	32,8 (19)	6,9 (4)	34,5 (20)	25,9 (15)
TC9.3.2	Comp.	32,8 (19)	8,6 (5)	27,6 (16)	31 (18)
F10.2.1.1	Comp.	3,6 (1)	0 (0)	0 (0)	96,4 (27)
F10.2.1.2	Tipo I	3,6 (1)	7,1 (2)	17,9 (5)	71,4 (20)
F10.2.2.1	Tipo I	3,6 (1)	10,7 (3)	17,9 (5)	67,9 (19)
F10.2.2.2	Comp.	3,6 (1)	25 (7)	3,6 (1)	67,9 (19)
F10.2.3	Tipo II + Tipo I	3,6 (1)	25 (7)	25 (7)	46,4 (13)
TC10.1.1	Tipo I Aum.	27,6 (16)	5,2 (3)	44,8 (26)	22,4 (13)
TC10.1.2	Tipo II Aum.	27,6 (16)	3,4 (2)	55,2 (32)	13,8 (8)
F11.2.1.1	Tipo III	0 (0)	14,3 (4)	10,7 (3)	75 (21)
F11.2.1.2	Comp.	0 (0)	10,7 (3)	3,6 (1)	85,7 (24)
F11.2.2.1	Tipo III	0 (0)	28,6 (8)	35,7 (10)	35,7 (10)
F11.2.2.2	Tipo I	0 (0)	46,4 (13)	32,1 (9)	21,4 (6)
F12.1.4	Tipo II	0 (0)	28,6 (8)	46,4 (13)	25 (7)
F12.1.5	Tipo III	0 (0)	42,9 (12)	17,9 (5)	39,3 (11)
F12.1.6.1	Tipo III	0 (0)	42,9 (12)	21,4 (6)	35,7 (10)
F12.1.6.2	Comp.	0 (0)	35,7 (10)	0 (0)	64,3 (18)
F12.1.6.3	Comp.	0 (0)	53,6 (15)	21,4 (6)	25 (7)
PE.7.1	Tipo II	1,7 (1)	22,4 (13)	51,7 (30)	24,1 (14)
PE.7.2	Comp.	1,7 (1)	25,9 (15)	36,2 (21)	36,2 (21)
PE.8.1	Tipo I	1,7 (1)	22,4 (13)	43,1 (25)	32,8 (19)
PE.8.2	Tipo III	1,7 (1)	41,4 (24)	48,3 (28)	8,6 (5)

Tabla VII - 37. Resultados generales en los problemas de porcentajes (Ciclo III-1).

En cuanto a los problemas de valor perdido, los resultados apuntan, como ocurría en el ciclo II-1, hacia un mejor desempeño de los alumnos en los problemas de Tipo I que en los problemas de Tipo II y Tipo III. También como en el ciclo II-1, aunque el análisis de los datos de la Tabla VII - 37 desprende un mejor desempeño de los alumnos en los problemas de Tipo III que en los problemas de Tipo II, los resultados de la prueba escrita apuntan en sentido contrario (PE.7.1 es un problema de Tipo II con un 24,1 % de éxito mientras que el problema de Tipo III de esta misma prueba, PE.8.2, tiene un 8,6 % de éxito).

Aunque el comportamiento dentro del ciclo es muy similar al observado en el ciclo II-1 para los problemas de valor perdido, hay que destacar que, como en otros focos, durante el presente ciclo los resultados en la tasa de éxito son peores que los obtenidos en el ciclo II-1. En este foco, de hecho, son significativamente peores para los problemas de Tipo I y de Tipo II, como se desprende de un test exacto de Fisher para comparar las tasas de éxito en PE.7.1 y PE.8.1 entre ambas poblaciones. Para el problema de Tipo III de la prueba escrita no encontramos diferencias significativas entre ciclos.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Nos centramos ahora en las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje de Tipo I, Tipo II y Tipo III. Los porcentajes en los que aparecen cada una de las estrategias en las producciones de los alumnos pueden verse en la Tabla VII - 38.

Observamos que, como en el ciclo II-1, no hemos encontrado respuestas que se ajusten a las categorías VPp1 (construcción de patrones), VPp5 (proporciones), VPp10 (cálculo y comprobación) y VPp13 (estrategias apoyadas en gráficos). Así mismo, las estrategias clasificadas como Vpp6 (construcción sucesiva), VPp11 (uso de puntos de referencia) y VPp12 (ensayo y error o estimaciones) tienen una aparición anecdótica. Son bajas también, igual que en el ciclo II-1, las frecuencias de uso de estrategias aditivas erróneas (VPp9) que se concentran en unos pocos alumnos y equipos.

Aunque sigue siendo mayoritario el número de respuestas clasificadas en VPp3 (estrategia funcional con multiplicación) sí parecen incrementarse en este ciclo el número de respuestas sin argumentos (VPp0), el uso de factor unitario (Vpp2) y el uso de estrategias funcionales con división (Vp4).

Otro punto destacable, es el considerable descenso del uso de una fórmula (VPp7), tanto en las tareas para casa como en la prueba escrita final. Por ejemplo, en el ciclo II-1 (ver Tabla V - 58) contabilizamos 35 producciones en la prueba escrita que utilizaron una fórmula para resolver alguno de los problemas de porcentaje (PE.7.1, PE.8.1 o PE.8.2), sin embargo, en este ciclo se han contabilizado solo 10 producciones de este tipo.

En cuanto a los errores detectados en la aplicación de una estrategia correcta, no se observan diferencias significativas respecto al ciclo II-1.

		VPp0	VPp1	VPp2	VPp3	VPp4	VPp5	VPp6
TC9.1.2	Tipo II	13,8 (8)	0 (0)	0 (0)	39,7 (23)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC9.3.1	Tipo II	19 (11)	0 (0)	5,2 (3)	27,6 (16)	5,2 (3)	0 (0)	0 (0)
F10.2.1.2	Tipo I	3,6 (1)	0 (0)	0 (0)	64,3 (18)	10,7 (3)	0 (0)	0 (0)
F10.2.2.1	Tipo I	7,1 (2)	0 (0)	3,6 (1)	53,6 (15)	14,3 (4)	0 (0)	0 (0)
F10.2.3	Tipo I+II	7,1 (2)	0 (0)	0 (0)	53,6 (15)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F11.2.1.1	Tipo III	3,6 (1)	0 (0)	21,4 (6)	57,1 (16)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F11.2.2.1	Tipo III	14,3 (4)	0 (0)	17,9 (5)	28,6 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F11.2.2.2	Tipo I	25 (7)	0 (0)	17,9 (5)	10,7 (3)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F12.1.4	Tipo II	17,9 (5)	0 (0)	3,6 (1)	21,4 (6)	3,6 (1)	0 (0)	0 (0)
F12.1.5	Tipo III	10,7 (3)	0 (0)	3,6 (1)	28,6 (8)	3,6 (1)	0 (0)	0 (0)
F12.1.6.1	Tipo III	0 (0)	0 (0)	10,7 (3)	25 (7)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
PE.7.1	Tipo II	27,6 (16)	0 (0)	1,7 (1)	15,5 (9)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
PE.8.1	Tipo I	20,7 (12)	0 (0)	3,4 (2)	19 (11)	3,4 (2)	0 (0)	0 (0)
PE.8.2	Tipo III	22,4 (13)	0 (0)	6,9 (4)	1,7 (1)	1,7 (1)	0 (0)	1,7 (1)

		VPp7	VPp8	VPp9	VPp10	VPp11	VPp12	VPp13
TC9.1.2	Tipo II	0 (0)	1,7 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC9.3.1	Tipo II	0 (0)	3,4 (2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.2.1.2	Tipo I	7,1 (2)	3,6 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.2.2.1	Tipo I	3,6 (1)	3,6 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.2.3	Tipo I+II	0 (0)	3,6 (1)	3,6 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F11.2.1.1	Tipo III	3,6 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F11.2.2.1	Tipo III	0 (0)	10,7 (3)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F11.2.2.2	Tipo I	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F12.1.4	Tipo II	3,6 (1)	7,1 (2)	14,3 (4)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F12.1.5	Tipo III	3,6 (1)	7,1 (2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F12.1.6.1	Tipo III	0 (0)	14,3 (4)	0 (0)	0 (0)	7,1 (2)	0 (0)	0 (0)
PE.7.1	Tipo II	3,4 (2)	20,7 (12)	5,2 (3)	0 (0)	0 (0)	1,7 (1)	0 (0)
PE.8.1	Tipo I	12,1 (7)	17,2 (10)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
PE.8.2	Tipo III	1,7 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

Tabla VII - 38. Estrategias utilizadas en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo III-1).

VII.3.2. Comparativa con los resultados del grupo de control

En esta sección comparamos los resultados obtenidos en los grupos experimentales (GE) con los obtenidos en el grupo de control (GC) en los diferentes niveles de análisis que hemos realizado en la sección anterior para los problemas de la prueba escrita (PE.1 - PE.8). Esta prueba fue común para todos los grupos de 1º de ESO por acuerdo del departamento didáctico. Es decir, analizaremos los resultados en las categorías generales en términos de respuestas en blanco, incorrectas y correctas, y analizaremos las categorías específicas sobre estrategias de resolución empleadas.

Los datos para los grupos experimentales ya se han presentado en la sección anterior, los volveremos a introducir en esta sección para que el lector pueda comparar directamente estos resultados con los del grupo de control. Además de la comparación, otro propósito de esta sección es sintetizar los resultados obtenidos por los alumnos de los grupos experimentales al finalizar la propuesta.

VII.3.2.1. Análisis comparativo según las categorías generales

En la Tabla VII - 39 se presentan las tablas de contingencia, expresadas con las frecuencias relativas, en cada problema de la prueba escrita.

		N+B+I	C	p-valor
PE.1.1	GE	15,5 %	84,5 %	0,2860
	GC	29,4 %	70,6 %	
PE.1.2	GE	36,2 %	63,8 %	1,0000
	GC	35,3 %	64,7 %	
PE.1.3	GE	63,8 %	36,2 %	0,7789
	GC	58,8 %	41,2 %	
PE.1.4	GE	17,2 %	82,8 %	0,0014
	GC	58,8 %	41,2 %	
PE.2.1	GE	37,9 %	62,1 %	0,0260
	GC	70,6 %	29,4 %	
PE.2.2	GE	55,2 %	44,8 %	0,1612
	GC	76,5 %	23,5 %	
PE.2.3	GE	70,7 %	29,3 %	0,7648
	GC	76,5 %	23,5 %	
PE.3	GE	51,7 %	48,3 %	0,0277
	GC	82,4 %	17,6 %	
PE.4	GE	51,7 %	48,3 %	0,7831
	GC	58,8 %	41,2 %	
PE.5	GE	58,6 %	41,4 %	0,7825
	GC	52,9 %	47,1 %	
PE.6	GE	41,4 %	58,6 %	0,0000
	GC	100 %	0 %	
PE.7.1	GE	75,9 %	24,1 %	0,3666
	GC	64,7 %	35,3 %	
PE.7.2	GE	63,8 %	36,2 %	0,7789
	GC	58,8 %	41,2 %	
PE.7.3	GE	37,9 %	62,1 %	0,0003
	GC	88,2 %	11,8 %	
PE.7.4	GE	37,9 %	62,1 %	0,0003
	GC	88,2 %	11,8 %	
PE.8.1	GE	67,2 %	32,8 %	0,1594
	GC	47,1 %	52,9 %	
PE.8.2	GE	91,4 %	8,6 %	0,5821
	GC	100 %	0 %	

Tabla VII - 39. Comparativa del grado de éxito entre los GE y el GC (Ciclo III-1).

Como en los dos capítulos anteriores dichas tablas de contingencia se elaboran utilizando las variables dicotómicas "Corrección en la respuesta: Correcta / No correcta", y "Grupo de procedencia del alumno: Experimental / Control". Como ya hemos comentado, las respuestas de las categorías generales N: "no entrega o no asiste", B: "en blanco o sin sentido" e I: "incorrecta" se agrupan para obtener tablas 2×2. En estas condiciones, aplicamos un test exacto de Fisher (ver Capítulo III, sección III.3.8.4. Análisis cuantitativo de datos). Así, junto a cada tabla de contingencia aparece una columna en la Tabla VII - 39 con el p-valor obtenido en el test de Fisher para contrastar la hipótesis nula de independencia entre las dos variables. Es decir, la hipótesis nula del test (bilateral) es que la corrección en la respuesta es independiente del grupo de procedencia.

Para apoyar la información de la Tabla VII - 39, incorporamos la Figura VII - 1 que presenta un diagrama de barras comparativo con los porcentajes de acierto en los diferentes problemas para el grupo experimental y el grupo de control.

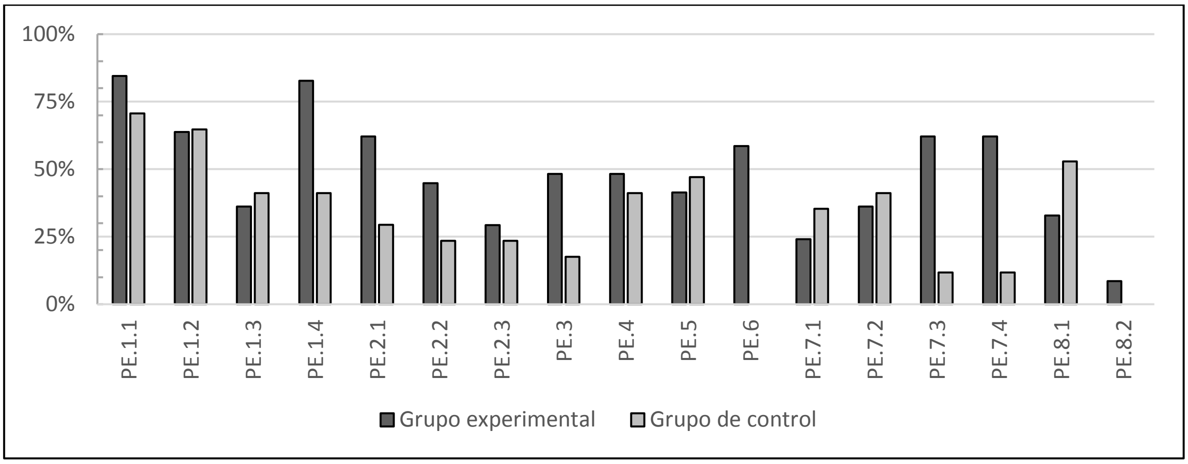


Figura VII - 1. Gráfico comparativo con los porcentajes de respuestas correctas en la prueba escrita entre los grupos experimentales y el grupo de control (Ciclo III-1).

El estudio del p-valor obtenido en el test exacto de Fisher para un nivel de confianza del $95\ \%$ muestra diferencias significativas a favor del grupo experimental (mayor porcentaje de respuestas correctas) en los ítems PE.1.4, PE.2.1, PE.3, PE.6, PE.7.3 y PE.7.4. Estos ítems evalúan conceptos contenidos en los focos de interés prioritario 1 y 2 (Análisis de situaciones y problemas de proporcionalidad simple directa). Aunque los porcentajes de éxito son mayores en el grupo experimental en once de los diecisiete ítems de la prueba final, no encontramos diferencias significativas en ninguno de los problemas correspondientes a los otros dos focos de interés prioritarios que se trabajan en la propuesta en 1º de ESO (proporcionalidad compuesta y porcentajes).

VII.3.2.2. Análisis comparativo según las categorías específicas.

Una vez analizadas las diferencias en las categorías generales realizamos un análisis comparativo en las categorías específicas que ya se han utilizado en la sección anterior, siguiendo un esquema similar en la descomposición de los focos de interés.

En este análisis seguimos los mismos criterios que en la sección anterior para la clasificación de las respuestas de los estudiantes. De forma general, el estudio de las estrategias y otras categorías específicas se hace para las respuestas incorrectas (I) y correctas (C) por lo que las frecuencias absolutas en el desglose de las categorías específicas suman la misma cantidad que las frecuencias absolutas en estas categorías generales. Los porcentajes asociados a cada categoría en las tablas se hacen sobre el total de alumnos (por lo que, generalmente, no suman 100). Sin embargo, para favorecer la comparación visual en los gráficos de barras se presentan los porcentajes relativos al total de respuestas consideradas en el análisis específico en vez del porcentaje relativo al total de alumnos en cada grupo.

Análisis de situaciones, condiciones de regularidad y cálculo de razones.

En la Tabla VII - 40 y en la Figura VII - 2 se presentan los resultados obtenidos para las categorías de análisis de los argumentos empleados por los estudiantes para decidir si una relación entre dos magnitudes es de proporcionalidad directa o no. Destacamos algunos hechos que se desprenden de la observación de estos datos, la mayoría de los cuales ya se observaron en el ciclo II-1.

			D0	D2	D6	D7	D8	D9
PE.1.1	**GE**	N.º de respuestas	8	21	0	6	19	0
		Porcentaje	13,8 %	36,2 %	-	10,3 %	32,8 %	-
	GC	N.º de respuestas	4	0	2	3	5	0
		Porcentaje	23,5 %	-	11,8 %	17,6 %	29,4 %	-
PE.1.2	**GE**	N.º de respuestas	12	27	0	7	9	0
		Porcentaje	20,7 %	46,6 %	-	12,1 %	15,5 %	-
	GC	N.º de respuestas	4	2	2	4	3	0
		Porcentaje	23,5 %	11,8 %	11,8 %	23,5 %	17,6 %	-
PE.1.3	**GE**	N.º de respuestas	19	31	0	3	1	0
		Porcentaje	32,8 %	53,4 %	-	5,2 %	1,7 %	-
	GC	N.º de respuestas	6	1	3	3	1	0
		Porcentaje	35,3 %	5,9 %	17,6 %	17,6 %	5,9 %	-
PE.1.4	**GE**	N.º de respuestas	18	27	1	6	1	0
		Porcentaje	31,0 %	46,6 %	1,7 %	10,3 %	1,7 %	-
	GC	N.º de respuestas	7	0	2	1	1	0
		Porcentaje	41,2 %	-	11,8 %	5,9 %	5,9 %	-

Tabla VII - 40. Comparativa de los tipos de justificaciones empleadas para argumentar las relaciones de proporcionalidad entre los GE y el GC en la PE (Ciclo III-1).

- En el grupo de control aparece un número mayor de respuestas sin argumentos (D0) en todos los ítems del problema PE.1, si bien la diferencia es algo menor que la observada durante el ciclo II-1.
- El número de respuestas sin argumentos es mucho mayor en el grupo de control en el ítem PE.1.4 en el que sí se exponía una situación de proporcionalidad simple directa. Prácticamente ninguna de las respuestas correctas argumenta por qué la relación es de proporcionalidad directa.
- En el grupo de control se utilizan de forma mayoritaria argumentos multiplicativos (D6) o cualitativos basados en aumentos y disminuciones (D7). Salvo en el ítem PE.1.1 en donde, como en el grupo experimental, aumentan las respuestas en las que se alega, correctamente, que las magnitudes no tienen por qué estar relacionadas. Por su parte, en el grupo experimental se utilizan mayoritariamente argumentos basados en condiciones de regularidad y constancia de las razones externas (D2) y no aparecen argumentos multiplicativos de tipo D6 y solo aparecen de forma anecdótica argumentos de tipo D7.

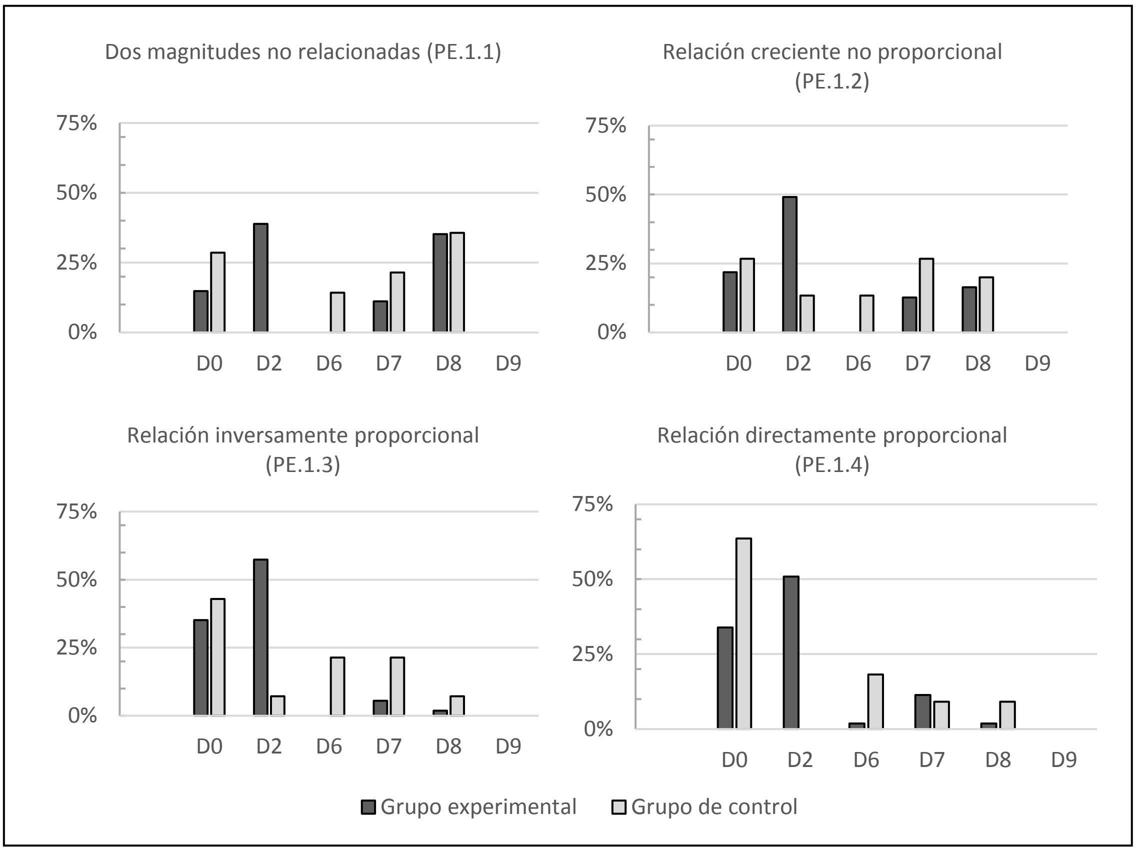


Figura VII - 2. Distribución de los diferentes argumentos empleados por los alumnos de los grupos experimentales y del grupo de control en la detección de relaciones proporcionales en PE.1 (Ciclo III-1).

Problemas de comparación cuantitativa de proporcionalidad simple directa.

El problema PE.3 es el único de comparación cuantitativa introducido en la prueba escrita. En la Tabla VII - 39, vimos que la tasa de éxito en el grupo de control era significativamente inferior a la tasa de éxito en el grupo experimental. Presentamos en la Tabla VII - 41 y en la Figura VII - 3 los resultados para las categorías específicas en este problema.

			C0	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**
PE.3	**GE**	N.º de respuestas	6	33	1	0	2	11
		Porcentaje	10,3 %	56,9 %	1,7 %	-	3,4 %	19,0 %
	GC	N.º de respuestas	2	3	0	2	1	6
		Porcentaje	11,8 %	17,6 %	-	11,8 %	5,9 %	35,3 %

Tabla VII - 41. Comparativa de las estrategias de resolución empleadas en los GE y el GC en el problema de comparación cuantitativa de la PE (Ciclo III-1).

Observamos que, en el grupo de control, se han clasificado una mayoría de respuestas en la categoría de argumentos aditivos erróneos (C5), por argumentar a partir de la comparación aditiva de las cantidades de magnitud correspondientes solo a una de las dos magnitudes involucradas. En segundo lugar, y con la mitad de frecuencia encontramos el uso de argumentos funcionales basados en el cálculo de la razón externa. En cambio, en el grupo experimental se invierte las frecuencias de este tipo de argumentaciones. Aparece como mayoritaria la estrategia funcional y, en segundo lugar, con una frecuencia tres veces menor la estrategia aditiva errónea C5.

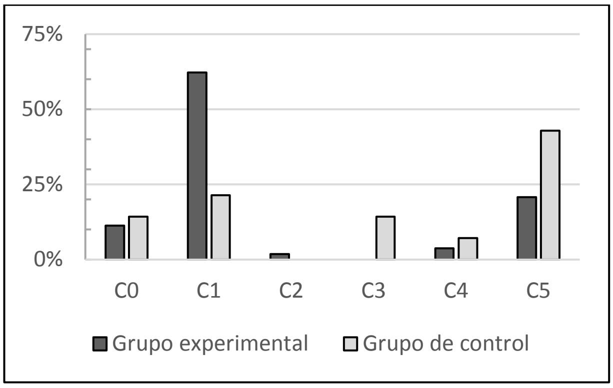


Figura VII - 3. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución del problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo III-1).

Como ya sucedió en el ciclo II-1, dos alumnos del grupo de control utilizan la estrategia C3 al resolver un problema de valor perdido que permite terminar el problema mediante una comparación aditiva.

Problemas de comparación cualitativa de proporcionalidad simple directa.

En el problema de comparación cualitativa de la prueba escrita, PE.2.1, no se solicitaba a los alumnos que argumentaran su respuesta, sino que debían seleccionar la opción que considerasen correcta de entre cuatro proporcionadas. Por tanto, no disponemos de datos sobre los argumentos utilizados por los alumnos del grupo de control para responder a este tipo de tareas. En la Tabla VII - 42 se presentan las frecuencias en las que se eligieron cada una de las opciones, la opción sombreada es la correcta ("no hay bastante información para responder").

			$S_1 > S_2$	$S_1 < S_2$	$S_1 = S_2$	$S_1 ¿?S_2$
PE.2.1	**GE**	N.º de respuestas	5	4	10	36
		Porcentaje	8,6 %	6,9 %	17,2 %	62,1 %
	GC	N.º de respuestas	2	3	7	5
		Porcentaje	11,8 %	17,6 %	41,2 %	29,4 %

Tabla VII - 42. Comparativa de respuestas entre los GE y el GC en el problema de comparación cualitativa de la PE (Ciclo III-1).

El error mayoritario en ambas poblaciones consiste en suponer que las razones tienen el mismo valor en ambas situaciones, sin embargo, la frecuencia relativa de este fallo en el grupo de control es casi dos veces y media mayor que en el grupo experimental. También son mayores las frecuencias de las respuestas en las que se determina cuál de las dos situaciones es más ventajosa teniendo en cuenta probablemente solo la comparación aditiva entre los valores de una de las magnitudes.

Problemas de valor perdido de proporcionalidad simple directa.

En la Tabla VII - 43 y en la Figura VII - 4 observamos que las frecuencias con las que aparecen las estrategias de resolución para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa tienen distribuciones muy diferentes según las observemos en el grupo experimental o en el grupo de control. Mientras que en el grupo experimental se usa mayoritariamente VPd3 (funcional, razón externa y multiplicación), en el grupo de control se utilizan varias estrategias diferentes. La mayoritaria es el método de proporciones (VPd5) pero también tienen frecuencias significativas el uso de una fórmula (VPd7) y el método funcional con multiplicación (VPd3).

			VPd0	VPd1	VPd2	VPd3	VPd4	VPd5	VPd6	VPd7	VPd8	VPd9
PE.4	GE	N. resp.	6	0	0	33	1	0	0	2	5	0
		Porcent.	10,3 %	-	-	56,9 %	1,7 %	-	-	3,4 %	8,6 %	-
	GC	N. resp.	2	0	0	3	0	4	1	2	2	0
		Porcent.	11,8 %	-	-	17,6 %	-	23,5 %	5,9 %	11,8 %	11,8 %	-

Tabla VII - 43. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos de los GE y el GC para el problema de valor perdido de proporcionalidad simple en la PE (Ciclo III-1).

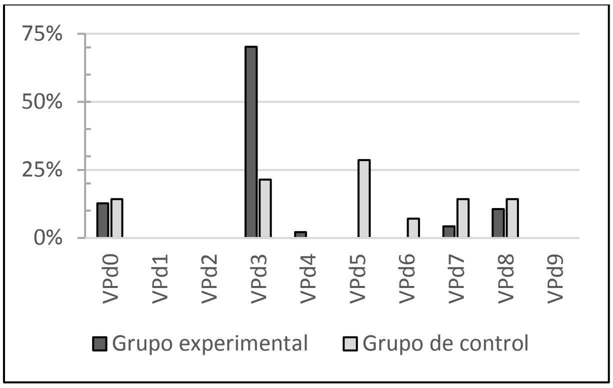
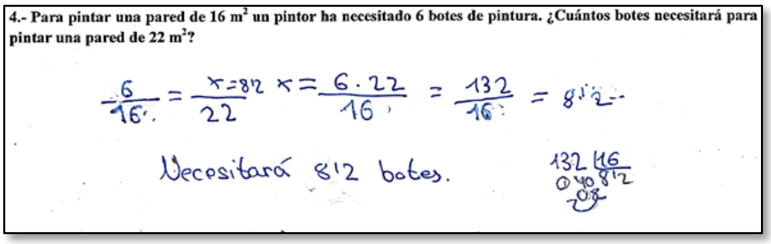


Figura VII - 4. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos de los grupos experimental y de control en la resolución del problema de valor perdido PE.4 (Ciclo III-1).

La estrategia VPd5 no apareció en el grupo de control en el ciclo II-1 y se trata, probablemente, de la estrategia institucionalizada con dicho grupo. Podemos ver un ejemplo de este tipo de resoluciones en la Imagen VII - 14. En ella observamos que, aunque establece inicialmente una proporción (motivo por el que se ha clasificado en VPd5), el proceso de resolución parece estar fuertemente algoritmizado y se diferencia poco de los métodos VPd7 en los que se usa una fórmula como puede ser la regla de tres.

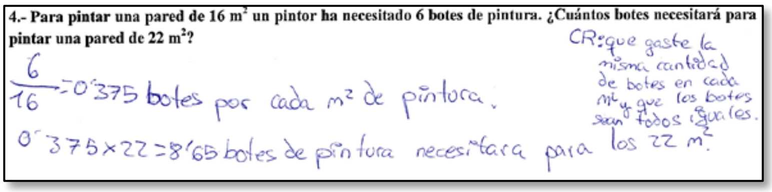

4.- Para pintar una pared de 16 m² un pintor ha necesitado 6 botes de pintura. ¿Cuántos botes necesitará para pintar una pared de 22 m²?

$\frac{6}{16} = \frac{x = 8'2}{22}$ $x = \frac{6 \cdot 22}{16} = \frac{132}{16} = 8'2$

Necesitará 8'2 botes.

Imagen VII - 14. Producción de un alumno del grupo de control en el problema PE.4 (Ciclo III-1).

Destacamos también que, al igual que sucede en la producción que se observa en la Imagen VII - 14, ninguno de los alumnos del grupo de control argumenta o etiqueta la relación de proporcionalidad existente entre las magnitudes. Por el contrario, aunque en menor medida que en el ciclo II-1, una buena parte de las producciones del grupo experimental establece condiciones de regularidad para poder suponer una relación directamente proporcional y explicita la interpretación de las razones externas calculadas y del resultado final a pesar de que no se solicitaba (ver Imagen VII - 15).


4.- Para pintar una pared de 16 m² un pintor ha necesitado 6 botes de pintura. ¿Cuántos botes necesitará para pintar una pared de 22 m²?

CR: que gaste la misma cantidad de botes en cada m² y que los botes sean todos iguales.

$\frac{6}{16} = 0'375$ botes por cada m² de pintura.

0'375 × 22 = 8'65 botes de pintura necesitara para los 22 m².

Imagen VII - 15. Producción del alumno B5.1 para el problema PE.4 (Ciclo III-1).

Además de las estrategias correctas, en ambos grupos las respuestas categorizadas en VPd8 (operaciones sin sentido), tienen una frecuencia similar (algo mayor en el grupo de control) cercana al 10 %.

Situaciones de proporcionalidad compuesta.

En la Tabla VII - 44, la Tabla VII - 45 y en la Figura VII - 5 se resumen los resultados del análisis de las estrategias de resolución puestas en juego por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en el problema de valor perdido en la situación de proporcionalidad compuesta (PE.5).

			VPC0	VPC1	VPC8	VPC9	VPC10	VPC11
PE.5	**GE**	N.º de respuestas	0	1	5	0	0	1
		Porcentaje	-	1,7 %	8,6 %	-	-	1,7 %
	GC	N.º de respuestas	0	0	4	0	1	1
		Porcentaje	-	-	23,5 %	-	5,9 %	5,9 %

Tabla VII - 44. Comparativa de estrategias erróneas empleadas por los alumnos de los GE y el GC para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta en la PE (Ciclo III-1).

			VPC2	VPC3	VPC4	VPC5	VPC6	VPC7
PE.5	GE	N.º de respuestas	20	6	6	0	0	0
		Porcentaje	34,5 %	10,3 %	10,3 %	-	-	-
	GC	N.º de respuestas	6	3	0	0	0	0
		Porcentaje	35,3 %	17,6 %	-	-	-	-

Tabla VII - 45. Comparativa de estrategias potencialmente correctas empleadas por los alumnos de los GE y el GC para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta en la PE (Ciclo III-1).

Observamos que entre los alumnos del grupo de control hay una mayor incidencia de las estrategias incorrectas VPC8 (operaciones sin sentido), VPC10 (trabajo con las magnitudes independientes por separado) y VPC11 (omisión de una magnitud). Este hecho se explica en gran medida por la instrucción recibida por los alumnos del grupo de control que no incluía situaciones compuestas.

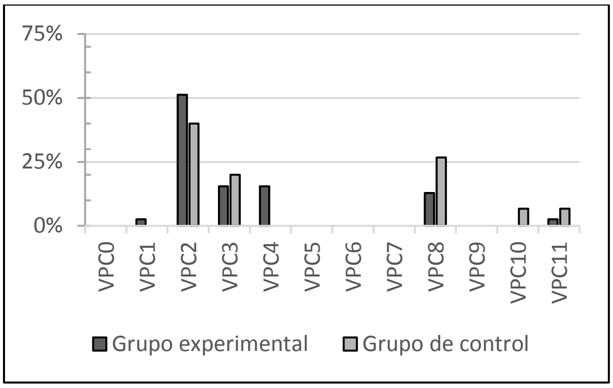


Figura VII - 5. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos de los grupos experimental y de control en la resolución del problema de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo III-1).

Sin embargo, hay una notable incidencia de la estrategia de amalgamación en el grupo de control, similar a la del grupo experimental. En estas producciones (ver Imagen VII - 16) los alumnos del grupo de control detectan la posibilidad de amalgamar las magnitudes medidas en "horas al día" y "número de días" para calcular el "total de horas trabajadas". A partir de ahí, proceden mediante el uso del método de proporciones (VPd5) como en la imagen o mediante el uso de una fórmula (VPd7).

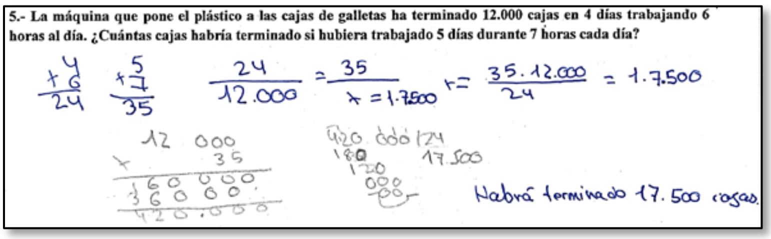


Imagen VII - 16. Producción de un alumno del grupo de control para el problema PE.5 (Ciclo III-1).

Porcentajes y problemas asociados.

En la Tabla VII - 46 y en la Figura VII - 6 se resumen los resultados para el análisis de las estrategias de resolución de los problemas de porcentajes de la prueba escrita para los alumnos del grupo experimental y del grupo de control. En ambas hemos eliminado las categorías que han tenido frecuencia nula. No se ha clasificado ninguna producción en las categorías VPp1, VPp10, y VPp13.

Observamos que las respuestas correctas de los alumnos del grupo de control se concentran en el uso de una estrategia VPp7 (uso de una fórmula). El tipo de producción incluida en esta categoría se asemeja a la descrita para el grupo experimental en torno a la Imagen VII - 12. Por tanto, comprobamos que, aunque para los problemas de valor perdido en el grupo de control había una elevada presencia del método de proporciones (VPd5), en los problemas de porcentajes el método de proporciones tiene una menor presencia y los alumnos hacen uso de una interpretación del porcentaje como operador para calcular la parte conocidos el porcentaje y el total. Este método para el cálculo de porcentajes les resulta efectivo a los alumnos del grupo de control en los problemas de Tipo II, pero en el problema de Tipo III, PE.8.2, aunque una cuarta parte de los alumnos intenta utilizar este método, la tasa de éxito es del 0 %.

		VPp0	VPp2	VPp3	VPp4	VPp5	VPp6	VPp7	VPp8	VPp9	VPp11	VPp12
PE.7.1	**GE**	16	1	9	0	0	0	2	12	3	0	1
		27,6 %	1,7 %	15,5 %	-	-	-	3,4 %	20,7 %	5,2 %	-	1,7 %
	GC	2	1	0	0	2	0	5	2	0	1	0
		11,8 %	5,9 %	-	-	11,8 %	-	29,4 %	11,8 %	-	5,9 %	-
PE.8.1	**GE**	12	2	11	2	0	0	7	10	0	0	0
		20,7 %	3,4 %	19,0 %	3,4 %	-	-	12,1 %	17,2 %	-	-	-
	GC	0	0	0	0	1	1	10	2	0	0	0
		-	-	-	-	5,9 %	5,9 %	58,8 %	11,8 %	-	-	-
PE.8.2	**GE**	13	4	1	1	0	1	1	7	5	0	0
		22,4 %	6,9 %	1,7 %	1,7 %	-	1,7 %	1,7 %	12,1 %	8,6 %	-	-
	GC	0	0	0	0	0	0	4	4	1	0	0
		-	-	-	-	-	-	23,5 %	23,5 %	5,9 %	-	-

Tabla VII - 46. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para problemas de Tipo I, II y III de porcentajes (Ciclo III-1).

En el grupo experimental la frecuencia de las estrategias basadas en el cálculo de razones VPp3, y en PE.8.2 también del análisis unitario VPp2, parece estar correlacionada con la tasa de éxito en los ejercicios, aunque también encontramos algunas respuestas correctas que utilizan fórmulas para calcular correctamente la solución en el problema de Tipo I, PE.8.1.

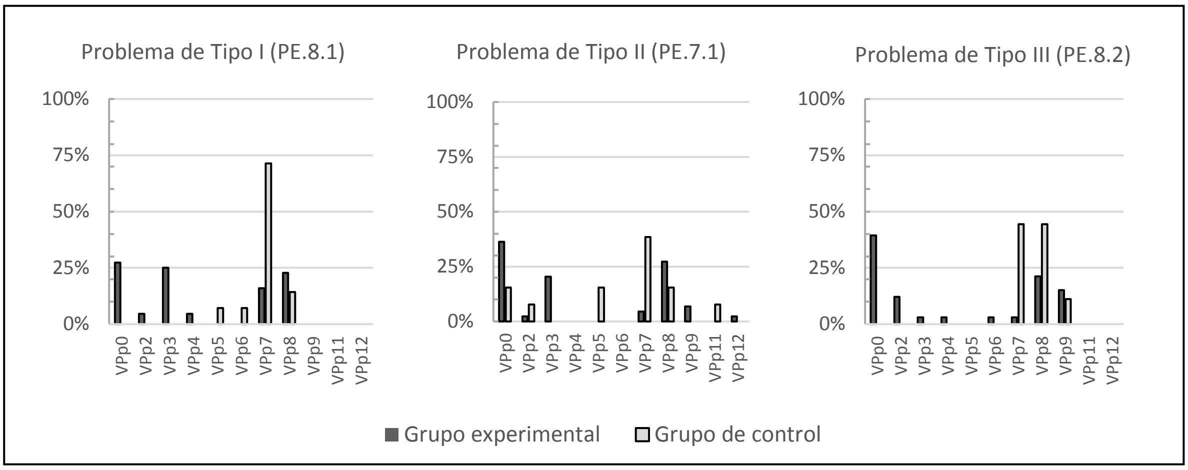


Figura VII - 6. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo III-1).

VII.3.3. Entrevistas semiestructuradas

Durante este ciclo de investigación-acción las entrevistas semiestructuradas incorporan los contenidos sobre los que no se indagó durante el ciclo II-1. De esta forma, se trabajan los cuatro focos de contenido de la propuesta para 1º de ESO. Los dos primeros ya se trabajaron en el ciclo II-1, en esta ocasión dentro del Foco 1: “Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad”, intentaremos indagar sobre la detección de las relaciones de proporcionalidad simple inversa. En el Foco 2: “Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa” haremos mayor énfasis en los problemas de valor perdido, ya que en el ciclo anterior las entrevistas se centraron en mayor medida en los problemas de comparación cualitativa y cuantitativa. Así, en este ciclo se indaga por primera vez en las entrevistas semiestructuradas sobre aspectos cognitivos relacionados con el Foco 4: “Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta” y con el Foco 6: “Interpretación del porcentaje y problemas asociados”.

Se establecieron de forma general cuatro fases en cada una de las entrevistas, cada una de ellas dedicada a cada uno de los cuatro focos de interés:

- **FASE 1:** Preguntas descontextualizadas sobre el concepto de razón y condición de regularidad. Interpretación de razones externas. Análisis de las respuestas dadas por los alumnos en problemas en los que había que decidir si una situación de proporcionalidad inversa era o no era de proporcionalidad directa.
- **FASE 2:** Análisis de algunas respuestas dadas por los alumnos en problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa.
- **FASE 3:** Análisis de respuestas dadas por los alumnos en problemas de proporcionalidad compuesta.
- **FASE 4:** Análisis de algunas respuestas dadas por los alumnos en problemas relacionados con el concepto de porcentaje.

A partir de las observaciones del profesor-investigador recogidas en el diario de clase y el análisis de la prueba escrita se seleccionaron cuatro alumnos. Se intentó que dichos alumnos respondieran a niveles de comprensión diferentes. Para que las entrevistas pudieran resultar provechosas se evitó seleccionar estudiantes en los que se previera un nivel muy bajo de comprensión. Los estudiantes seleccionados fueron D5.2, de nivel medio-bajo, C6.2 de nivel medio-alto, y C4.1 y B5.1 de nivel alto.

Para cada estudiante se revisaron las producciones de clase, las tareas de casa y la prueba escrita. Tras esta revisión se diseñó una entrevista semiestructurada personalizada en la que el profesor-investigador presentaba a los estudiantes sus producciones en diferentes ejercicios y, a partir de ellas, realizaba una serie de preguntas sobre la comprensión de los diferentes conceptos. El diseño concreto de las entrevistas puede consultarse en el Anexo IV.

Se exponen aquí los resultados de dichas entrevistas, estructurándolos en las cuatro fases de las que se componían. Para cada fase se indica el intervalo temporal de la grabación en el que tiene lugar. Se ha transcrito parte de las entrevistas para ilustrar los resultados más significativos.

VII.3.3.1. Análisis de la entrevista a D5.2

FASE 1 [00:00 – 12:28]: La entrevista comienza con dos preguntas descontextualizadas en las que se solicita que el alumno explique con sus propias palabras el significado de razón y de condición de regularidad y que ejemplifique dichos conceptos. El alumno expresa de forma natural algunas ideas como que "la razón es el significado entre ellas [entre dos magnitudes]… que tienen relación." De forma abstracta no es capaz de expresarse con un lenguaje más específico, hecho que el propio alumno expresa, pero sí que puede ejemplificar los conceptos de razón entre magnitudes y condición de regularidad. Por ejemplo, para la condición de regularidad expresa que "por ejemplo, si echa $0{,}5$ gramos en un litro, que siempre eche los $0{,}5$ gramos por cada litro".

Tras este comienzo se le presentan al alumno alguna de sus producciones para las tareas para casa 2 y 4 en las que había que razonar si dos magnitudes eran o no directamente proporcionales y, en caso positivo, establecer la condición de regularidad necesaria para que lo sea y calcular e interpretar las razones externas.

En TC2.1, "En 4 horas limpió 30 cristales" el alumno había dado como condición de regularidad "que todos (los cristales) son de el (sic.) mismo tamaño". Aludiendo a la igualdad de las unidades, pero sin relacionar la magnitud cardinalidad de cristales con el tiempo que cuesta limpiarlos. Al leer la condición de regularidad que había escrito dice que debería haber dicho que "todos los cristales cuesten el mismo tiempo limpiarlos" dando una condición de regularidad que, aunque pudiera completarse con su argumento inicial (que el alumno ahora desecha) sí establece una condición que liga ambas magnitudes.

A continuación, se le presenta al alumno su producción para TC4.8 "Para transportar la mercancía al aeropuerto se han necesitado 7 camiones y cada uno ha realizado 4 viajes". El alumno consideró que este contexto se correspondía con una situación de proporcionalidad simple directa y dio como razones los cocientes $7/4$ y $4/7$. En la entrevista el alumno se reafirma en su postura y en que las magnitudes son directamente proporcionales porque son dos y están relacionadas. Sin embargo, cuando el profesor-investigador pregunta sobre el significado de los cocientes que ha establecido el alumno y si tienen sentido, el alumno duda, momento en el que el profesor-investigador aprovecha para indagar sobre qué operación tendría sentido realizar con los datos del problema a lo que el alumno contesta "multiplicar" y al preguntarle por el significado del resultado de dicha operación el alumno contesta que "calcularía los viajes que hacen entre todos los camiones". Se pone así de manifiesto una incipiente comprensión de las relaciones de proporcionalidad inversa pese a que el alumno ha errado en sus respuestas a la actividad. De hecho, tras el debate producido se le vuelve a preguntar al alumno si tras lo dicho sigue creyendo que las magnitudes son directamente proporcionales, a lo que el alumno responde: "no".

Tras esta conversación el profesor-investigador plantea al alumno un problema de valor perdido (de proporcionalidad simple inversa) basado en la situación de la tarea TC4.8. Después de un tiempo pensando, el alumno dice que no lo sabe resolver. El profesor-investigador le ayuda planteando el cálculo de la constante de proporcionalidad a la cual el alumno ya había dado sentido anteriormente y le vuelve a plantear la pregunta. En ese momento el alumno dice que ya sabe resolverlo que lo que hay que hacer es dividir el número total de viajes entre los camiones para averiguar cuantos viajes debe hacer cada camión. Así que, pese a los problemas para verbalizar algunos conceptos y razonamientos y las inseguridades que muestra en la entrevista, el alumno D5.2 parece tener, o haber adquirido, destrezas suficientes para realizar tareas simples de proporcionalidad inversa mediante el control semántico de las operaciones que realiza.

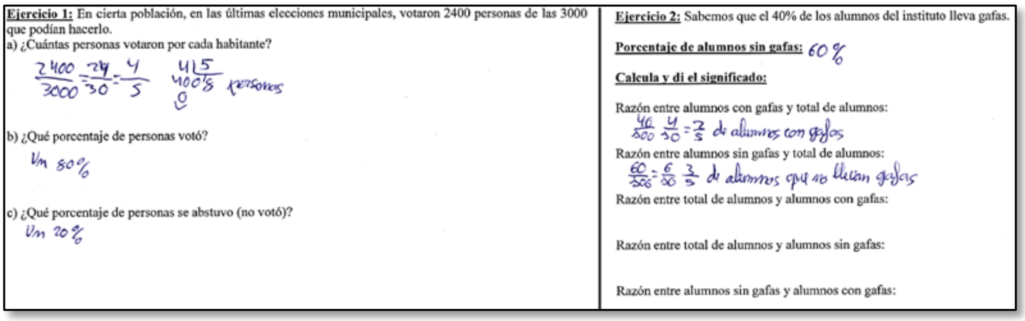
FASE 2 [12:28 – 17:28]: En primer lugar, se le muestran y se le pide al alumno que explique lo que ha realizado en dos problemas de valor perdido TC6.3 y F7.1.1. En el primero el alumno ha utilizado una estrategia de construcción progresiva y en el segundo una estrategia funcional de cálculo de la razón externa para obtener la solución mediante multiplicación. Después de que el alumno lee y explica sus producciones se le solicita que resuelva TC6.3 de una forma similar a cómo ha resuelto F7.1.1. Tras unos instantes pensando el alumno expresa que no sabe hacer lo que se le solicita. Parece, por tanto, que el método seleccionado por el alumno está fuertemente influenciado por la estructura numérica del mismo y no sabe generalizar los métodos aritméticos empleados para aplicarlos en otras situaciones. La construcción progresiva la ha aplicado en un problema de estructura numérica $(2{:}\,200) \leftrightarrow (x{:}\,350)$ calculando en un primer momento la razón externa entera, 100, para luego indicar que para conseguir 350 hay que sumar tres veces la razón externa y luego sumarle su mitad. En el problema en el que ha utilizado la estrategia de razón externa, la estructura numérica era $(4{:}\,5) \leftrightarrow (7{:}\,x)$ en donde las razones no eran enteras y una estrategia de construcción progresiva podría ser más complicada.

FASE 3 [17:28 – 23:20]: En esta fase se le muestran al alumno cinco de sus resoluciones para problemas de proporcionalidad compuesta en los que, aparentemente ha utilizado una estrategia de amalgamación, sin embargo, en ninguna de las producciones se ha interpretado el significado de ninguno de los resultados intermedios de las operaciones que realiza ni del resultado final propuesto como solución.

En un primer momento el profesor-investigador solicita al alumno que explique qué significado tiene el resultado de cada uno de los productos con los que ha comenzado cada problema. El alumno interpreta sin dificultad los cuatro primeros (alguno de ellos supone dar significado al producto de magnitudes extensivas), y tiene más dificultades para interpretar el producto entre el número de amigos que van a un hotel y el número de noches que permanecen en él. Finalmente, tras una pequeña ayuda acaba dando una interpretación no del todo precisa como "cuántas noches están en total". Sin embargo, la rapidez con la que ha podido responder a la pregunta sí parece indicar que el alumno tiene un control semántico de las operaciones que realiza y no resuelve mediante la aplicación de un patrón mecanizado.

A continuación, para corroborar que se sigue una estrategia de amalgamación y no de paso a paso (se tiene la intuición de que el alumno amalgama por la disposición de las operaciones realizadas) el profesor-investigador pregunta por el motivo por el que se hace esa multiplicación al principio del problema, el alumno contesta de forma casi automática: "quitar una magnitud". Esta respuesta corrobora la intuición del profesor-investigador al clasificar sus producciones dentro de una estrategia de amalgamación.

FASE 4 [23:20 – 34:05]: En este momento de la entrevista el profesor-investigador quiere indagar sobre la competencia del alumno para relacionar los porcentajes en una situación dada con las razones externas interpretadas como tanto por uno. Como muchos alumnos de este ciclo en este punto de la secuencia, el alumno da interpretaciones poco precisas de las razones asociadas al porcentaje (ver Imagen VII - 17). Además, aunque se utilizan representaciones fraccionarias estas suelen ir acompañadas de la palabra 'de' en el comienzo de su interpretación. También se observa que el alumno sí calcula las razones de la parte sobre el total, pero deja en blanco las razones del total sobre la parte. Por tanto, se pretende vislumbrar si estas imprecisiones en la interpretación como tanto por uno y las respuestas en blanco se corresponden con una conexión deficiente entre el porcentaje y las razones unitarias o responde a otras razones.



Ejercicio 1: En cierta población, en las últimas elecciones municipales, votaron 2400 personas de las 3000 que podían hacerlo.
a) ¿Cuántas personas votaron por cada habitante?

$\frac{2400}{3000} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ 4 | 5, 40'8, 0   personas

b) ¿Qué porcentaje de personas votó?

Un 80%

c) ¿Qué porcentaje de personas se abstuvo (no votó)?

Un 20%

Ejercicio 2: Sabemos que el 40% de los alumnos del instituto lleva gafas.

Porcentaje de alumnos sin gafas: 60 %

Calcula y di el significado:

Razón entre alumnos con gafas y total de alumnos:
$\frac{40}{500}$ $\frac{4}{50} = \frac{2}{5}$ de alumnos con gafas

Razón entre alumnos sin gafas y total de alumnos:
$\frac{60}{500} = \frac{6}{50}$ $\frac{3}{5}$ de alumnos que no llevan gafas

Razón entre total de alumnos y alumnos con gafas:

Razón entre total de alumnos y alumnos sin gafas:

Razón entre alumnos sin gafas y alumnos con gafas:

Imagen VII - 17. Producciones del alumno D5.2 para los problemas TC9.1, izquierda, y TC9.2, derecha (Ciclo III-1).

Durante las preguntas el alumno no es capaz de interpretar correctamente las razones como un tanto por uno (aunque sí lo hace en otras situaciones de la propuesta como hemos visto en el desarrollo de la entrevista). Se estanca en interpretaciones verbales de las razones del tipo: "personas que… entre personas del total". Cuando se le solicita calcular razones del total respecto de alguna de las partes e interpretarlas (respuestas que había dejado en blanco) el alumno vuelve a establecer una razón entre la parte y el total. Por tanto, bien sea por los conocimientos previos sobre el porcentaje o por la mayor dificultad para interpretar razones externas como tanto por uno en magnitudes discretas (y homogéneas), el alumno no consigue conectar las razones asociadas al porcentaje con los conocimientos previos que ha adquirido durante la secuencia.

De forma similar, se le pregunta al alumno por el significado de las operaciones que realiza para resolver el problema de valor perdido F10.2.1 (que ha resuelto mediante la estrategia institucionalizada por razón externa de forma correcta, pero sin interpretar los resultados obtenidos). Al contrario de lo que sucede en otras preguntas relacionadas con otros focos de interés, el alumno no es capaz de dar significado a las operaciones que ha realizado.

La entrevista finaliza presentándole al alumno su producción para la situación introductoria F11.1 en la que el alumno ha vuelto a utilizar (correctamente) una estrategia de construcción progresiva basándose en el $25\ \%$ como punto de apoyo para construir la cantidad correspondiente al $100\ \%$. La estructura numérica de la situación era $(25{:}\,100) \leftrightarrow (6{:}\,x)$. Como anteriormente, el alumno no es capaz extrapolar su forma de razonar ante un cambio de la estructura numérica propuesto por el profesor-investigador $(12{:}\,100) \leftrightarrow (6{:}\,x)$, y tampoco de desarrollar otras estrategias para resolver este problema de Tipo III. Durante el diálogo, el alumno vuelve a mostrar sus dificultades para interpretar las razones $12/100$ y $100/12$ e incluso para diferenciar una de la otra ya que se estanca en interpretaciones verbales sobre los datos absolutos (“doce aprobados por cada cien alumnos”).

VII.3.3.2. Análisis de la entrevista a C6.2

FASE 1 [00:00 – 06:15]: La entrevista comienza con dos preguntas descontextualizadas en las que se solicita que el alumno explique con sus propias palabras el significado de razón y de condición de regularidad y que ejemplifique dichos conceptos. El alumno no expresa de manera abstracta correctamente la noción de razón, pero sí es capaz de ejemplificar el concepto correctamente y distinguir en dicho ejemplo las dos razones inversas y su significado. Sí expresa de forma más correcta la noción de condición de regularidad, que también ejemplifica correctamente:

P-I: ¿Para ti qué significa la razón entre dos magnitudes o qué has entendido por lo que significa una razón?
C6.2: Pues, la razón que existe entre dos magnitudes para que tenga sentido poder hacer un problema con ellas.
P-I: Ponme un ejemplo.
C6.2: Eh, pues, en 5 horas limpio 32 cristales.
P-I: Entonces, ¿cuál sería la razón ahí?
C6.2: Eh, cuántos cristales limpió por hora.
P-I: ¿Y cómo lo calcularías?
C6.2: Eh, calculando los cristales por hora.
P-I: ¿Y cómo se (el alumno interrumpe al profesor-investigador)
C6.2: Pues cogería el 36 y lo dividiría para las horas, las 5 …
P-I: ¿Y hay solo una razón?
C6.2: Se podrían calcular las horas por cristal.
P-I: ¿Y cómo se haría?

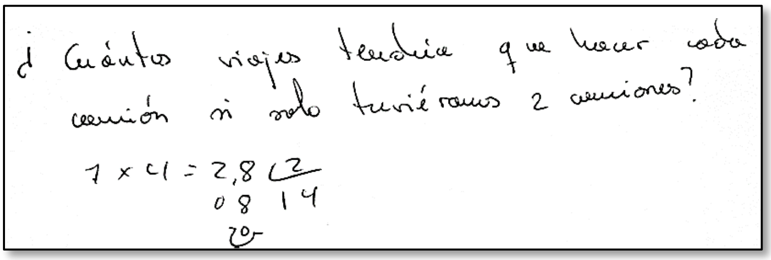
C6.2: Dividiría las horas entre los cristales.
P-I: ¿Y la condición de regularidad qué es para ti y para qué sirve?
C6.2: Eh, la condición de regularidad es una, … una norma que se aplica para que tenga sentido calcular dos razones. Eh, … ¿pongo un ejemplo?
P-I: Sí.
C6.2: Pues, eh, tengo, tendría que limpiar en los cinco cristales, o sea si por cinco horas limpio 36 cristales, tendría que limpiar los mismos cristales cada hora.

La entrevista continúa mostrando al alumno varias de las situaciones de la ficha TC2 en la que el alumno no ha contestado correctamente. Tras una breve lectura de la tarea, el alumno es capaz de dar condiciones de regularidad enunciadas de forma adecuada y detecta cuáles de las cinco situaciones son de proporcionalidad directa (etiquetando de dicha forma a estas situaciones) y qué situaciones no lo son. Además, para las situaciones que no son de proporcionalidad directa emplea argumentos correctos para justificar su decisión ("no va a crecer cada año lo mismo", para TC2.2, "no hay dos magnitudes", para TC2.3).

Para terminar esta fase de la entrevista se muestra al alumno su producción para TC4.8. En dicho problema se presentaba una situación de proporcionalidad inversa y se pedía al alumno decidir si era de proporcionalidad directa o no, y en caso afirmativo establecer condiciones de regularidad y las dos razones posibles. En su respuesta, el alumno C6.2 había dicho que sí se trataba de una relación de proporcionalidad directa y había calculado incorrectamente dos razones. Inicialmente, el alumno se reafirma en su respuesta, aunque indica que no hay que calcular nada porque ya te dan cuántos viajes hace cada camión. Pero que sí son directamente proporcionales.

C6.2: Claro es que, no es necesario calcular porque cada, porque ya te dice cuántos … ha realizado, cuántos viajes ha realizado cada camión.
P-I: Vale, entonces ¿los viajes que realiza cada camión y el número de camiones son directamente proporcionales?
C6.2: Eh, … ¿sí?
P-I: Sí ¿Y qué significaría calcular las razones?
C6.2: Calcular, …, no, no tendría sentido, …
P-I: ¿Entonces?
C6.2: Entonces no son directamente proporcionales.
P-I: ¿Y qué tendría sentido hacer con esas dos magnitudes?
C6.2: Multiplicar para saber cuántos viajes han hecho en total.

Tras este diálogo el profesor-investigador propone al alumno resolver un problema de valor perdido de proporcionalidad inversa basado en la situación anterior que escribe en una hoja de papel delante del alumno. Tras unos momentos iniciales de duda el alumno resuelve correctamente el problema (ver Imagen VII - 18), justifica las operaciones e interpreta correctamente el resultado.



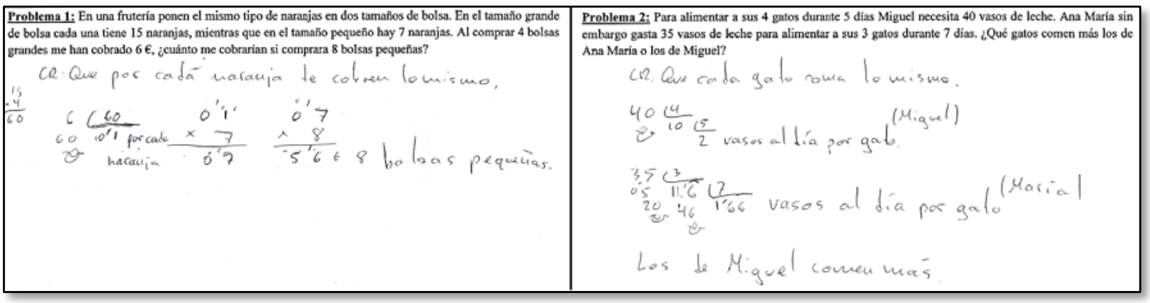
¿Cuántos viajes tendría que hacer cada camión si solo tuviéramos 2 camiones?

7 × 4 = 2,8

Imagen VII - 18. Problema propuesto a C6.2 durante la entrevista y resolución.

FASE 2 [06:15 – 09:20]: En esta fase de la entrevista se muestra al alumno su producción para F6.2.2. Un problema de valor perdido en el que, como vimos en la sección VII.3.1, muchos alumnos habían utilizado una estrategia VPd4 ya que podría resultar más natural usar la razón que puede interpretarse como "coste unitario de los bolígrafos" que la razón "bolígrafos que pueden comprarse por un euro". Esta última razón, con una magnitud numerador discreta tenía, además, un valor menor que la unidad. El alumno C6.2, sin embargo, sí había usado la estrategia institucionalizada VPd3 calculando y utilizando la razón "0,8 bolígrafos por euro". El profesor-investigador trata de averiguar si el alumno es versátil a la hora de poder aplicar estrategias diversas de forma razonada, por lo que intenta que el alumno resuelva el problema utilizando la razón "1,25 bolígrafos por euro". Tras unos momentos de duda, el alumno es capaz de utilizar esta última razón aplicando una estrategia VPd4.

FASE 3 [09:20 – 13:27]: En esta fase, se muestran al alumno sus producciones para los problemas F8.2.1 y F8.2.2 de proporcionalidad compuesta (Imagen VII - 19). Recordemos, que todos los problemas de proporcionalidad compuesta en este ciclo tienen una estructura funcional del tipo $A/(B \cdot C)$. En el primer problema, el alumno amalgama por producto las magnitudes del denominador y luego calcula la razón con la magnitud del numerador para obtener la constante de proporcionalidad. Para terminar el problema, en cambio, multiplica primero la constante de proporcionalidad por la cantidad de una de las magnitudes del denominador, y después por la correspondiente a la otra. Es decir, no amalgama por producto. En el segundo problema, se calculan para ambas situaciones las constantes de proporcionalidad realizando dos razones consecutivas (no se amalgama por producto).



Problema 1: En una frutería ponen el mismo tipo de naranjas en dos tamaños de bolsa. En el tamaño grande de bolsa cada una tiene 15 naranjas, mientras que en el tamaño pequeño hay 7 naranjas. Al comprar 4 bolsas grandes me han cobrado 6 €, ¿cuánto me cobrarían si comprara 8 bolsas pequeñas?

CR: Que por cada naranja te cobren lo mismo.

0'1 por cada naranja

5'6 € 8 bolsas pequeñas.

Problema 2: Para alimentar a sus 4 gatos durante 5 días Miguel necesita 40 vasos de leche. Ana María sin embargo gasta 35 vasos de leche para alimentar a sus 3 gatos durante 7 días. ¿Qué gatos comen más los de Ana María o los de Miguel?

CR: Que cada gato coma lo mismo.

2 vasos al día por gato. (Miguel)

1'66 vasos al día por gato (María)

Los de Miguel comen más.

Imagen VII - 19. Producciones del equipo C6 para F8.2.1 (izquierda) y F8.2.2 (derecha, respectivamente (Ciclo III-1).

El objetivo de la entrevista en este punto es investigar si el alumno muestra versatilidad en el modo de resolución de los problemas y si, en el segundo problema, el cálculo de la primera razón obedece a una estrategia de amalgamación por cociente para reducir el número de magnitudes o el alumno realiza razones consecutivas con el objetivo de calcular la constante de proporcionalidad sin pensar en reducir el número de magnitudes del problema.

En el diálogo correspondiente al primer problema, el alumno muestra que sabría realizar el problema de forma razonada utilizando otras secuencias de operaciones. En concreto, parece mostrar cierta versatilidad para poder resolver mediante amalgamación por producto o mediante una estrategia de paso a paso.

En el diálogo correspondiente al segundo problema, el profesor-investigador le lee dos opciones al alumno y le pide que elija con cuál de los dos razonamientos se siente más identificado. Las opciones son las siguientes:

- Opción 1: Calculé los “vasos al día” para que el problema, que al principio tenía tres magnitudes, tuviera solo dos, “vasos al día” y “gatos”, y así fuera más fácil de resolver.
- Opción 2: Calculé los “vasos al día” como paso intermedio para calcular “los vasos al día por gato” que era el objetivo que yo tenía al principio.

El alumno expresa que se siente más identificado con la segunda opción. Por tanto, parece que el alumno C6.2 realiza el problema mediante una estrategia de paso a paso pasando por la unidad.

FASE 4 [13:27 – 20:00]: En la fase de la entrevista sobre el porcentaje enfrentamos al alumno a sus producciones en F10.2.1, F10.2.2, F11.2.1 y F11.2.2. Los tres primeros problemas estaban bien resueltos mediante la estrategia institucionalizada VPp3 y el último problema estaba inacabado, habiéndose limitado el alumno a calcular e interpretar (correctamente) las razones asociadas a un porcentaje. En las producciones bien resueltas encontramos diferencias a la hora de interpretar las razones que utiliza:

- En F10.2.1 a partir de un “$25\ \%$ de alumnos de bachiller”, el alumno calcula la razón $0{,}25$ y la interpreta como “alumnos en bachiller por cada 100 alumnos.
- En F10.2.2 a partir de un “$30\ \%$ de superficie embaldosada” el alumno calcula, pero no interpreta, la razón $0{,}3$.
- En F11.2.1 a partir de un “$3\ \%$ de pelirrojos”, el alumno calcula e interpreta correctamente la razón $100/3$.

A pesar de que a partir de las fichas correspondientes a la sesión 11, el alumno había comenzado a interpretar correctamente las razones asociadas a situaciones de porcentaje, durante la entrevista el alumno tiene muchas dificultades para interpretar correctamente las razones calculadas en F10.2.1 y F10.2.2. De hecho, no llega a poder interpretar la razón de F10.2.2 y tarda unos cuatro minutos de entrevista en conseguir interpretar correctamente la correspondiente a F10.2.1. En F11.2.1 el alumno sí es capaz de terminar correctamente el problema mediante una estrategia VPp3, por lo que parece que no terminó dicho problema durante la propuesta por falta de tiempo.

VII.3.3.3. Análisis de la entrevista a C4.1

FASE 1 [00:00 – 08:05]: La entrevista comienza con dos preguntas descontextualizadas en las que se solicita que el alumno explique con sus propias palabras el significado de razón y de condición de regularidad y que ejemplifique dichos conceptos. El alumno, a pesar de mostrar una buena comprensión a lo largo de la secuencia y en la prueba escrita, se muestra algo nervioso con el formato de diálogo con el profesor grabado en cámara desde el comienzo de la entrevista.

C4.1 no consigue definir de forma abstracta lo que es una razón o la condición de regularidad. Esta última la asocia a lo que tiene que ocurrir para que un problema se pueda resolver. Sí ejemplifica ambos conceptos adecuadamente en un contexto de limpieza de cristales en un determinado tiempo. Ejemplifica cómo se calcularían ambas razones, las interpreta adecuadamente como tanto por uno y establece la condición de regularidad necesaria para que tenga sentido calcular e interpretar dichas razones: “que todos los cristales los limpie en el mismo tiempo”.

A continuación, se muestra al alumno su producción para TC2.1. En dicho problema, el alumno “interpreta” las razones expresando las unidades (en plural) de las dos magnitudes que ha utilizado para calcular las razones en la forma “horas por cristal” y “cristales por horas”. Se pretende aclarar si el alumno es capaz de interpretar adecuadamente las razones como tanto por uno. En la propia lectura del problema el alumno cambia su respuesta interpretando las razones como “horas por cada cristal” y “cristales en cada hora”. El profesor-investigador le dice que si ha cambiado lo que está leyendo porque ha ido entendiendo mejor el concepto de razón a lo largo de la propuesta, ya que su lectura difiere de lo que había escrito previamente. El alumno responde: “Sí mejor, sí. Al principio no entendía nada. Luego ya, …”

Después, se le muestran las respuestas a TC2.2 y TC2.3, en las que había escrito un escueto “No se puede”. En dichas situaciones no se podía considerar una relación de proporcionalidad simple directa. El profesor-investigador le pregunta que qué es lo que no se puede y el alumno responde “calcular las razones”. Además, argumenta su respuesta adecuadamente expresando en TC2.2 que una persona no crece a ritmo constante ni crece siempre, y en TC2.3 que el número de enfermos y el número de planta del hospital en el que están no están relacionados.

Para acabar esta fase de la entrevista, se indaga sobre la comprensión del alumno en las situaciones inversamente proporcionales. En TC4.8 el alumno había etiquetado la situación como directamente proporcional, sin embargo, en vez de calcular las dos razones, calculó e interpretó correctamente la constante de proporcionalidad inversa mediante el producto de las cantidades que se le mostraban.

P-I: ¿Son directamente proporcionales las magnitudes que aparecen [en TC4.8]?
C4.1: No sé, es que este no lo entendí bien.
P-I: ¿Tú que me has puesto?
C4.1: Que sí.
P-I: Que sí, y luego si es que sí (el alumno interrumpe)
C4.1: No he calculado las razones, claro, entonces es que no

P-I: Claro, entonces, si son directamente proporcionales lo que pasa es que se puede calcular ¿el qué?
C4.1: Las razones, ah vale.
P-I: Y tú no has calculado las razones, has calculado otra cosa.
C4.1: Sí yo sabía que se podía hacer otra cosa, 7 por 4 que son 28 viajes en total.
P-I: Entonces, ¿son directamente proporcionales?
C4.1: No.

Como a otros alumnos, se le propone a C4.1 resolver un problema de valor perdido a partir de la situación de proporcionalidad inversa anterior. El alumno no duda y resuelve correctamente el problema, su producción durante la entrevista puede verse en la Imagen VII - 20.

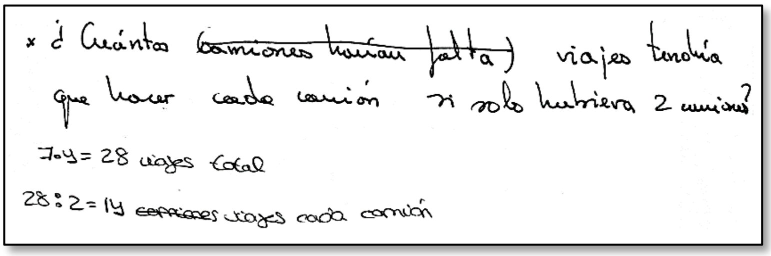


Imagen VII - 20. Primera producción del alumno C4.1 durante la entrevista.

Por último, se muestra al alumno su producción en F3.1.1 en donde ante una situación similar a la anterior (de proporcionalidad inversa) no solo había etiquetado la relación como de proporcionalidad simple directa, también había calculado, incorrectamente, dos razones. Después de leerlo y comparar la situación con TC4.8 el alumno se da cuenta de que no tenía sentido calcular dichas razones, que la relación no era directamente proporcional y que, además, era totalmente análoga a la situación presentada en TC4.8.

FASE 2 [08:05 – 11:28]: En esta fase de la entrevista se muestran al alumno sus producciones para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa F6.2.1 y F6.2.2.

En el primero de ellos, el alumno da correctamente la solución después de haber etiquetado correctamente la relación como de proporcionalidad simple directa, y de haber calculado e interpretado correctamente las dos razones asociadas, "kg de arroz por cada litro" y "litros de leche por cada kg". Sin embargo, no ha dejado registro de qué razón utiliza para calcular la solución y tampoco ha escrito ninguna condición de regularidad. Tras leer su producción el alumno dice que la solución la calculó multiplicando la razón "kilos de arroz por cada litro de leche" por los litros de leche que se utilizaban, por tanto, se trata de la estrategia institucionalizada VPd3. También es capaz de expresar correcta e inmediatamente después de la pregunta una condición de regularidad que debería pedirse al contexto para que la relación fuera proporcional.

En F6.2.2 el alumno había calculado e interpretado correctamente las dos razones asociadas al contexto que se presentaba, pero no había terminado el problema. Tras leerlo, el alumno es capaz de acabar el problema sin necesitar tiempo para pensar en cómo se resolvería. Expresa que lo realizaría mediante la estrategia institucionalizada, VPd3, aunque esta no se mostró como la más natural para los alumnos durante la propuesta ya que supone utilizar la razón "$0{,}8$ bolígrafos por euro". El profesor-investigador pregunta al alumno si también sabría resolverlo utilizando la razón inversa (precio de cada bolígrafo) a lo que el alumno responde correctamente utilizando una estrategia Vpd4. Por tanto, parece que el alumno posee cierta versatilidad a la hora de plantear diferentes estrategias para resolver problemas de valor perdido.

FASE 3 [11:28 – 19:37]: En esta parte de la entrevista se muestran al alumno varios problemas de proporcionalidad compuesta que había resuelto correctamente. En particular se quiere indagar sobre la forma de decidir la estrategia en F8.2.2 y en TC8.8. Ambos problemas partían de la misma situación, pero uno acababa con una estructura de problema de comparación (F8.2.2) y el otro con una estructura de problema de valor perdido (TC8.8). El primero de ellos el alumno lo resolvió mediante una estrategia de amalgamación por producto y el segundo mediante una estrategia de paso a paso pasando por la unidad. En esta fase de la entrevista, a pesar de que comienza diciendo que este tipo de problemas le "gustaban mucho", el alumno se muestra inseguro y comienza a responder con escuetos "no sé" o a no responder a las preguntas del profesor-investigador. No se consigue que el alumno explique ninguno de los dos procedimientos empleados, ni que interprete las operaciones que ha realizado. Por tanto, se continúa hacia la siguiente fase de la entrevista.

FASE 4 [19:37 – 26:00]: Durante la última parte de la entrevista se hacen al alumno varias preguntas sobre sus producciones en problemas relacionados con el porcentaje. En concreto, sobre sus producciones en TC9.2 en donde había calculado correctamente las razones solicitadas, pero no les había asignado interpretación y en el problema de la situación introductoria F11.1 en donde había respondido correctamente pero no había escrito ninguna justificación.

En las razones solicitadas en TC9.2 el alumno, tras dudar brevemente sobre cómo interpretar las unidades del total, responde correctamente y da significado a todas las razones calculadas: "alumnos con gafas por cada alumno del total", "alumnos sin gafas por cada alumno del total", "alumnos por cada alumno con gafas", "alumnos por cada alumno sin gafas" y "alumnos sin gafas por cada alumno con gafas".

En un primer momento, al leer su producción para F11.1 (se da la parte, 6, que corresponde a un $25\ \%$ y se solicita el total) el alumno explica que calculó el total porque como 25 cabe 4 veces en 100 pues el total de alumnos debía ser 4 veces 6. Dejando intuir una resolución usando el $25\ \%$ como punto de referencia. A continuación, el profesor-investigador le propone resolver el problema cambiando la estructura numérica, inicialmente $(25{:}\,100) \leftrightarrow (6{:}\,x)$, a $(12{:}\,100) \leftrightarrow (6{:}\,x)$. El alumno resuelve correctamente el problema utilizando e interpretando la razón externa $100/12$ "alumnos del total por cada aprobado" (ver Imagen VII - 21, en la parte inferior). Tras ello, se le pide si puede argumentar mejor su producción para la situación introductoria F11.1. El alumno responde afirmativamente y realiza una resolución análoga a la anterior (ver Imagen VII - 21, en la parte superior derecha).

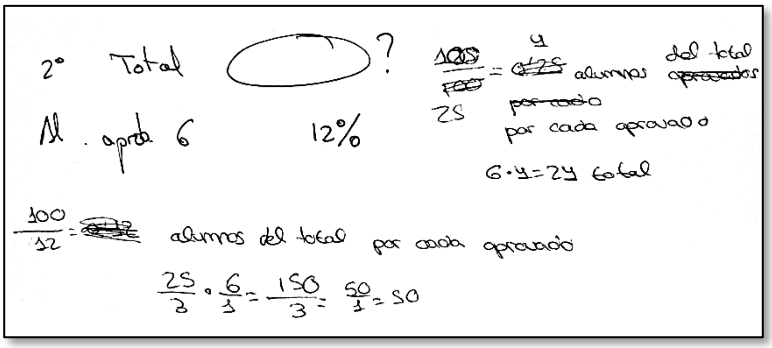


Imagen VII - 21. Segunda producción del alumno C4.1 durante la entrevista.

VII.3.3.4. Análisis de la entrevista a B5.1

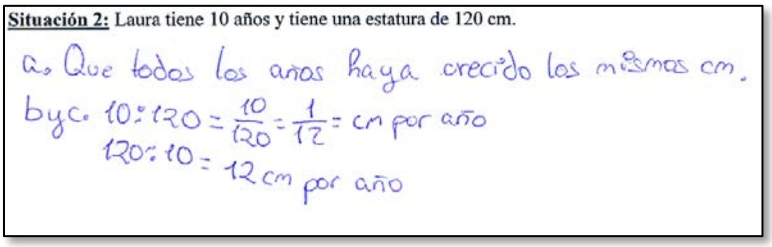
FASE 1 [00:00 – 08:14]: La entrevista comienza con dos preguntas descontextualizadas en las que se solicita que el alumno explique con sus propias palabras el significado de razón y de condición de regularidad y que ejemplifique dichos conceptos. El alumno expresa de forma más o menos correcta y abstracta tanto el significado de razón como el de condición de regularidad, además es capaz de poner ejemplos adecuados.

En cuanto al concepto de razón el alumno lo define de la siguiente forma: “Lo que significa repartir una magnitud entre otra, es lo que nos va a dar una entre otra, que no nos da lo mismo repartir A entre B que B entre A.” A continuación, propone un ejemplo con dos magnitudes discretas de cardinalidad “estuches” y “lápices” y dota de significado a las dos razones posibles.

En cuanto a la condición de regularidad el alumno la define de la siguiente forma: “Para saber si tiene sentido la razón, porque hay cosas que no tiene, son magnitudes, pero no tienen nada que ver. La condición de regularidad es que repartes que a todos les toca igual, todas las partes son iguales y tiene sentido lo que repartes.”

A diferencia de otros alumnos en la entrevista, B5.1 no hace referencia a que la condición de regularidad sea algo que hay que solicitar para que tenga sentido hacer los problemas, sino que liga la condición de regularidad a la necesidad de que tenga sentido hacer un reparto equitativo y, por tanto, poder calcular e interpretar la razón como tanto por uno.

La entrevista continúa mostrándole al alumno su producción para TC2.2. Se trata de una situación en la que no puede considerarse una relación de proporcionalidad simple directa: “Laura tiene 10 años y tiene una estatura de 120 cm.” El alumno había establecido una condición de regularidad y había calculado dos razones asociadas, pero interpretándolas de la misma forma (ver Imagen VII - 22. Nada más leer la situación y ver su producción el alumno dice que estaba mal, que no eran directamente proporcionales pero que cuando contestó “no se había dado cuenta”. Además, reconoce pronto el significado que debería tener cada una de las razones que había calculado en caso de que sí se hubiera podido calcular la razón entre ellas.



Situación 2: Laura tiene 10 años y tiene una estatura de 120 cm.

a. Que todos los años haya crecido los mismos cm.

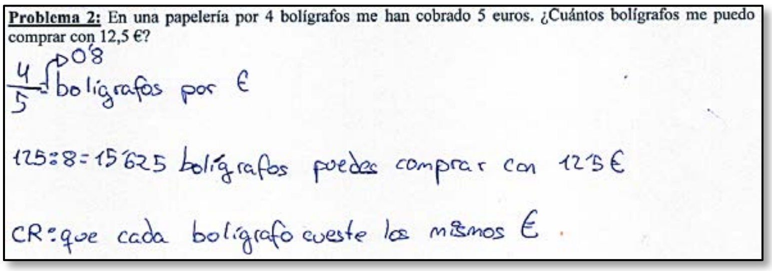
b y c. $10:120 = \frac{10}{120} = \frac{1}{12} =$ cm por año

$120:10 = 12$ cm por año

Imagen VII - 22. Producción de B5.2 para el problema TC2.2 (Ciclo III-1).

Como en otras entrevistas en este ciclo se propone al alumno revisar su producción para el problema TC8.4. Se trata de una situación de proporcionalidad simple inversa que el alumno había detectado correctamente como de no proporcionalidad directa. El alumno reconoce rápidamente qué operación tiene sentido hacer entre las cantidades de magnitud planteadas en el problema (el producto para calcular la constante de proporcionalidad inversa) y, aunque con algunas dificultades, es capaz de resolver el problema de valor perdido basado en dicha situación que le propone el profesor-investigador.

FASE 2 [08:14 – 12:20]: En esta fase de la entrevista se le muestra al alumno su producción para el problema F6.2.2 (ver Imagen VII - 23) en que había cometido un error de tipo VP.4, ya que había calculado e interpretado correctamente una razón, pero había terminado el problema realizando la operación inversa a la necesaria para resolverlo utilizando dicha razón.



Problema 2: En una papelería por 4 bolígrafos me han cobrado 5 euros. ¿Cuántos bolígrafos me puedo comprar con 12,5 €?

$\frac{4}{5} \to 0'8$ bolígrafos por €

$12'5 : 8 = 15'625$ bolígrafos puedes comprar con $12'5$ €

CR: que cada bolígrafo cueste los mismos €.

Imagen VII - 23. Producción del equipo B5 para el problema F6.2.2 (Ciclo III-1).

Leyendo su producción al alumno le cuesta ver si tiene algún error y afirma que el problema está bien resuelto. Tras unos minutos dialogando sobre el significado de las razones que se podrían calcular en el problema y tapando la parte errónea de la producción el alumno es capaz de darse cuenta del error y muestra versatilidad para realizar correctamente el problema utilizando tanto una estrategia VPd3, como VPd4.

FASE 3 [12:20 – 17:42]: En esta tercera fase se indaga sobre la comprensión del alumno relacionada con los problemas de proporcionalidad compuesta. Las preguntas se realizan en torno al problema F8.2.1.

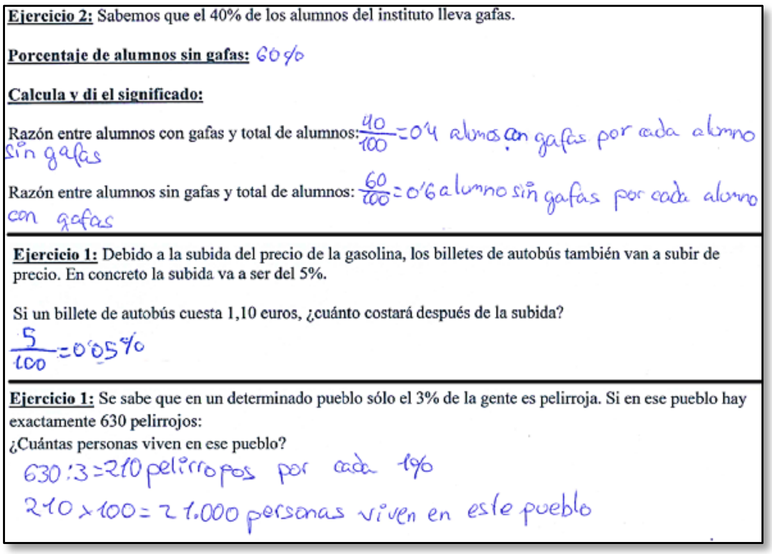
En F8.2.1 el alumno utiliza una estrategia paso a paso pasando por la unidad, pero comete un error de tipo VP.3 al calcular el precio unitario ya que divide las unidades entre su valor en vez del valor entre las unidades de producto. El alumno, tras un breve diálogo, se da cuenta del error.

A continuación, el profesor-investigador quiere descubrir si el alumno sabría resolver el problema mediante una estrategia de amalgamación por producto.

> **P-I:** ¿Sabrías hacer el problema de otra forma, haciendo primero algo para que, de repente, solo haya dos magnitudes?
> **B5.1:** Pues, …
> **P-I:** O sea, aquí hemos dicho que hay tres (el profesor-investigador escribe en una hoja de papel), valor económico, lo pongo así resumido, número de bolsas y número de naranjas por bolsa. ¿Podrías hacer algo en el problema para que, de repente, solo te quedasen dos magnitudes?
> **B5.1:** Eh, … El número de bolsas por el número de naranjas y nos darían las naranjas que hay en total.
> **P-I:** Vale, entonces, ¿con qué dos magnitudes te quedarías?
> **B5.1:** Con el valor económico y con las bolsas, … con las naranjas total, en total.

A partir de ahí se pide al alumno que resuelva el problema con el método de amalgamación lo cual realiza adecuadamente, aunque muestra, de nuevo, un pequeño problema al calcular el valor unitario de las naranjas ya que, en un primer momento, quiere dividir el número de naranjas entre su valor para calcular el precio unitario. Quizá, el hecho de que la cantidad de naranjas sea mayor que su valor en euros esté detrás de esta tendencia al querer repartir el número mayor entre el menor. En cualquier caso, el alumno muestra versatilidad y parece que es capaz de resolver los problemas de proporcionalidad compuesta tanto por el método de amalgamación como por paso a paso pasando por la unidad.

FASE 4 [17:42 – 24:29]: La parte final de la entrevista se reserva para tratar el concepto de porcentaje y los problemas relacionados. Aunque el alumno ha mostrado un buen desempeño a lo largo de toda la propuesta, sus respuestas en los problemas de porcentajes parecen señalar que tiene ciertas dificultades para interpretar o descomprimir el significado del porcentaje como una relación entre dos magnitudes diferentes. Por un lado, parece mostrar problemas a la hora de interpretar las razones que se le proponen en ciertos ejercicios (ver Imagen VII - 24, arriba). Por otro, parece mostrar problemas diferenciando entre razón unitaria y porcentaje (ver Imagen VII - 24, centro). Finalmente, realiza algunos problemas de Tipo III, correctamente, mediante estrategias de análisis unitario (ver Imagen VII - 24, abajo) en los que, probablemente, el alumno está considerando el porcentaje como una cantidad de magnitud.



Ejercicio 2: Sabemos que el 40% de los alumnos del instituto lleva gafas.

Porcentaje de alumnos sin gafas: 60%

Calcula y di el significado:

Razón entre alumnos con gafas y total de alumnos: $\frac{40}{100}$ = 0'4 alumnos con gafas por cada alumno sin gafas

Razón entre alumnos sin gafas y total de alumnos: $\frac{60}{100}$ = 0'6 alumno sin gafas por cada alumno con gafas

Ejercicio 1: Debido a la subida del precio de la gasolina, los billetes de autobús también van a subir de precio. En concreto la subida va a ser del 5%.

Si un billete de autobús cuesta 1,10 euros, ¿cuánto costará después de la subida?

$\frac{5}{100}$ = 0'05%

Ejercicio 1: Se sabe que en un determinado pueblo sólo el 3% de la gente es pelirroja. Si en ese pueblo hay exactamente 630 pelirrojos:
¿Cuántas personas viven en ese pueblo?

630 : 3 = 210 pelirropos por cada 1%
210 x 100 = 21.000 personas viven en este pueblo

Imagen VII - 24. Producciones de B5.1 para el problema TC9.2 (arriba), el problema TC10.1 (centro) y F11.2.1.1 (abajo) (Ciclo III-1).

Durante la entrevista se muestran las dificultades que tiene el alumno para interpretar las razones de los ejercicios TC9.2 y TC10.1, aunque tras las preguntas del profesor-investigador consigue poder interpretar dichas razones como tanto por uno. El diálogo final en torno al problema F11.2.1.1 confirma que el alumno B5.1 interpreta el porcentaje como una única cantidad de magnitud:

B5.1: (…) Dividimos las 630 personas entre el 3 % para saber cuánto es un 1 %. Y nos da 210 pelirrojos por cada, … eso es un 1 %. Entonces 210 por cada 100, o sea (autocorrigiéndose), por 100, 21 000 personas viven en ese pueblo.

P-I: Vale, eh, … (señalando la división 630: 3) ¿esto es una razón entre dos magnitudes?

B5.1: Sí.

P-I: ¿Qué dos magnitudes?

B5.1: A ver, dividimos los pelirrojos y el porcentaje.

P-I: Entonces, ¿el porcentaje es una magnitud?

B5.1: Sí.

P-I: Vale, eh, … dime qué pareja de magnitudes directamente proporcionales hay en este problema (señalando al problema F11.2.1.1).

B5.1: El, … el porcentaje y los pelirrojos.

P-I: Venga, y, ¿podrías calcular otras razones diferentes, a parte de esa que has calculado, con los datos del enunciado?

B5.1: A ver, eh, … no. Es que, a ver, se podría … (el profesor-investigador le interrumpe).

P-I: No para resolver, eh, …, si no, …

B5.1: 3 entre 630 y eso nos daría, eso, no sé lo que sería, …

P-I: ¿Qué estás repartiendo entre qué?

B5.1: Gente, los pelirrojos, … el porcentaje entre los pelirrojos

P-I: Entonces, ¿qué saldría?

B5.1: Porcentaje por cada pelirrojo

P-I: El porcentaje que representa …
B5.1: A cada pelirrojo.
P-I: Y ¿otras razones se te ocurren?
B5.1: Eh, … no.
P-I: Vale, pues ya está, ya hemos acabado.

VII.3.4. Observador externo

Como en los anteriores ciclos de investigación-acción, presentamos los resultados obtenidos en el protocolo de observación externa agrupados según los cuatro bloques en los que se distribuían los indicadores.

VII.3.4.1. Tratamiento de los contenidos y metodología

En la Tabla VII - 47 se recogen las respuestas del observador externo para este primer bloque. El observador externo valora como completamente adecuados todos los elementos curriculares planteados en la propuesta y la viabilidad de su tratamiento. También señala que el tiempo dedicado a los contenidos planteados para las sesiones 4, 5 y 7 es ligeramente insuficiente.

	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.2	1.3
Sesión 1	5	5	5	5	SÍ
Sesión 2	5	5	5	5	SÍ
Sesión 3	5	5	5	5	SÍ
Sesión 4	5	5	5	5	SÍ/NO
Sesión 5	5	5	5	5	SÍ/NO
Sesión 6	5	5	5	5	SÍ
Sesión 7	5	5	5	5	SÍ/NO
Sesión 8	5	5	5	5	SÍ
Sesión 9	5	5	5	5	SÍ
Sesión 10	5	5	5	5	SÍ
Sesión 11	5	5	5	5	SÍ
Sesión 12	5	5	5	5	SÍ

1.1 Grado de adecuación de la sesión de clase al diseño teórico.
- **1.1.1** Objetivos. (1-5)
- **1.1.2** Contenidos. (1-5)
- **1.1.3** Metodología. (1-5)

1.2 Viabilidad del tratamiento de los contenidos. (1-5)
1.3 Ajuste de la sesión al tiempo previsto. (SÍ/NO)

Tabla VII - 47. Respuestas del observador externo en el primer bloque de preguntas (Ciclo III-1).

En los campos de respuesta abierta el observador externo toma notas sobre los tiempos de cada actividad de clase. Además, en el apartado 1.3 marca en varias sesiones tanto la casilla del SÍ como la del NO, añadiendo aclaraciones a este tipo de respuesta, en concreto:

- Sesión 4: El observador externo apunta que no ha dado tiempo a terminar la puesta en común de la actividad F4.2.
- Sesión 5: El observador externo apunta que no ha dado tiempo a terminar la puesta en común de la actividad F5.1.
- Sesión 7: El observador externo apunta que no ha dado tiempo a terminar la puesta en común de un problema de la actividad F7.1.

VII.3.4.2. Actuación del profesor-investigador

En la Tabla VII - 48 se recogen las respuestas del observador externo para el segundo bloque de preguntas. El observador externo valora como completamente adecuados todos los indicadores sobre la actitud y el comportamiento del profesor-investigador. Los ítems relativos a la participación en el proceso docente se valoran todos como positivos. La calidad y claridad expositiva en las intervenciones se valora siempre con la máxima puntuación, salvo la claridad expositiva en la sesión 3, que el observador externo ha dejado sin marcar.

	2.1.1	2.1.2	2.1.3	2.2.1	2.2.2	2.2.3	2.2.4	2.3.1	2.3.2	2.4
Sesión 1	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 2	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 3	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	-	Ad
Sesión 4	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 5	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 6	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 7	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 8	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 9	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 10	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 11	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 12	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad

2.1 Actitud y comportamiento. (1-5)
- **2.1.1** Actitud del profesor.
- **2.1.2** Interés por el aprendizaje de los alumnos.
- **2.1.3** Atención a las necesidades de los alumnos.

2.2 Participación en el proceso docente.
- **2.2.1** Fomenta participación. (SÍ/NO)
- **2.2.2** Reconoce avances y progresos. (SÍ/NO)
- **2.2.3** Identifica dificultades. (SÍ/NO)
- **2.2.4** Promueve la reflexión. (SÍ/NO)

2.3 Calidad y claridad expositiva en las intervenciones.
- **2.3.1** Calidad expositiva. (1-5)
- **2.3.2** Claridad expositiva. (1-5)

2.4 Tiempo intervención. (Escaso/Adecuado/Excesivo)

Tabla VII - 48. Respuestas del observador externo en el segundo bloque de preguntas (Ciclo III-1).

Además, el observador externo realizó otras consideraciones en los campos de respuesta abierta que recogemos a continuación:

- Sesión 1: El observador externo indica que el profesor-investigador ha aprovechado el tiempo sobrante de la sesión utilizando un vídeo sobre el concepto de magnitud.
- Sesión 8: El observador externo estima que se podrían haber aprovechado mejor los tiempos en esta sesión reduciendo el tiempo inicial de corrección de problemas pendientes de la sesión anterior y dedicando más tiempo a la institucionalización tras las actividades de la octava sesión.

VII.3.4.3. Actuación de los alumnos

En la Tabla VII - 49 se recogen las respuestas dadas por el observador externo en los indicadores centrados en la actuación de los alumnos. En general, al igual que ocurría en los ciclos anteriores, la observación pone de manifiesto que los alumnos trabajan, realizan las tareas, atienden a las explicaciones y participan para aclarar dudas (en vez de, por ejemplo, para ampliar contenidos). A diferencia de los ciclos anteriores, los alumnos demuestran una mayor iniciativa, a ojos del observador externo, sobre todo entre las sesiones 7 y 12. La actitud general es positiva, aunque con algunas incidencias en determinadas sesiones que el observador externo desarrolla en los campos de respuesta abierta. En la mayor parte de las sesiones el observador externo manifiesta que no tiene suficiente información para constatar si los alumnos han comprendido o no los conceptos que se abordan.

	3.1	**3.2**	**3.3.1**	**3.3.2**	**3.3.3**	**3.4**
Sesión 1	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 2	Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+
Sesión 3	Pasividad. Silencio. Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+
Sesión 4	Realizan tareas.	D/C	SÍ	-	-	+
Sesión 5	Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+
Sesión 6	-	D	SÍ	-	-	+
Sesión 7	Iniciativa. Realizan tareas.	D	-	-	-	+
Sesión 8	Iniciativa. Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	-	+
Sesión 9	Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+
Sesión 10	Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+
Sesión 11	Iniciativa. Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+
Sesión 12	Iniciativa. Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+

3.1 Tipo de participación.
3.2 Tipo de preguntas de los alumnos.
D: aclarar dudas
C: ampliar contenidos.
3.3 Atención y asimilación. (SÍ/NO)
3.3.1 Atienden a las intervenciones.
3.3.2 Comprenden las intervenciones.
3.3.3 Comprenden los contenidos.
3.4 Actitud: Positiva (+), Negativa (–) Neutra (+/-)

Tabla VII - 49. Respuestas del observador externo en el tercer bloque de preguntas (Ciclo III-1).

Otras consideraciones sobre la actuación de los alumnos que realizó el observador externo en los campos de respuesta abierta fueron las siguientes:

- Sesión 1: El observador externo indica que el profesor-investigador ha tenido que "llamar la atención" en algún momento, pero indica que parece "lo normal".
- Sesión 2: Los alumnos parecen estar más habladores que en la primera sesión. Además, se indica que la comprensión de los alumnos no es observable con la grabación, pero que las preguntas que realizan los alumnos en las puestas en común parecen indicar que sí comprenden las intervenciones del profesor-investigador.
- Sesión 3: El observador remarca que los alumnos han estado "muy tranquilos" y que han participado más en la primera puesta en común que en la segunda. También expresa sus dudas sobre si esta pasividad en la segunda puesta en común es debida a la facilidad de la actividad o a un posible escaso interés por parte de los alumnos.
- Sesión 4: En cuanto al tipo de preguntas, el observador externo indica que los alumnos hacen preguntas para verificar si diferentes modos de realizar los problemas de comparación son correctos. También indica que, aunque ha marcado como no observables los ítems 3.3.2 y 3.3.3 sobre la comprensión, parece que las preguntas de los alumnos son un indicador de que sí comprenden las intervenciones y los contenidos.
- Sesión 6: Se señala que hay un alumno al que hay que llamar la atención durante casi todas las sesiones. En la segunda puesta en común de la sesión, los alumnos han estado bastante más despistados y han participado menos.

- Sesión 7: El observador externo señala varios posibles plagios entre equipos.
- Sesión 8: Se observa trabajo, pero se indican varias parejas que parecen no atender en las puestas en común.
- Sesión 9: Los alumnos están algo más despistados que en otras sesiones.
- Sesión 12: El observador externo indica que la proximidad de la prueba escrita puede estar influyendo en la actuación de los alumnos en esta sesión.

VII.3.4.4. Interacciones profesor-alumno

En la Tabla VII - 50 se recogen las respuestas dadas por el observador externo a los indicadores para analizar las interacciones entre el profesor-investigador y los alumnos. El observador externo cuantifica como frecuentes las interacciones entre el profesor-investigador y los alumnos en la mayoría de las sesiones. En la sesión 8 considera estas intervenciones constantes. El observador externo constata un mayor tipo de intervenciones diferentes que en ciclos anteriores, encontrando, en casi todas las sesiones, tanto intervenciones generales, como intervenciones con alumnos concretos, como intervenciones con los diferentes equipos. Además, estas intervenciones se realizan tanto a instancia del profesor, como a instancia de los alumnos, generándose en la mayor parte de las sesiones un diálogo fluido.

	4.1	4.2.1	4.2.2	4.2.3
Sesión 1	Fre.	GC / E	P / A	D
Sesión 2	Fre.	GC / E	P / A	D
Sesión 3	Fre.	GC / E / I	P	-
Sesión 4	Fre.	GC / E	A	D
Sesión 5	Fre.	GC / E / I	P / A	D
Sesión 6	Fre.	GC / E / I	P / A	D
Sesión 7	Fre.	GC / E / I	P / A	D
Sesión 8	Cte.	GC / I	P / A	U / D
Sesión 9	Fre.	GC / E / I	P / A	D
Sesión 10	Fre.	GC / E / I	P / A	D
Sesión 11	Fre.	GC / E / I	P / A	D
Sesión 12	Fre.	GC / E / I	P / A	D

4.1 Frecuencia de las interacciones:
Nunca (Nun.)
A menudo (Fre.)
Constantemente (Cte.)
4.2 Tipo de interacciones
4.2.1 Dirigidas al grupo clase (GC), a los equipos de alumnos (E) o alumnos particulares (I).
4.2.2 Se producen a instancia del profesor (P) o de algún alumno (A).
4.2.3 La comunicación es unidireccional (U) o se establece un diálogo fluido (D).

Tabla VII - 50. Respuestas del observador externo en el cuarto bloque de preguntas (Ciclo III-1).

En el campo de respuesta abierta, el observador externo hace el siguiente comentario:

- Sesión 8: "La estructura está bien y se va construyendo la secuencia de clase a base de preguntas por parte del profesor. Los alumnos responden."

VII.3.4.5. Otras incidencias y comentarios generales sobre la sesión

Al final del protocolo de observación, en cada sesión, se incluía un campo de respuesta abierta para que el observador externo anotara cuestiones o reflexiones al margen de los cuatro bloques anteriores. Estos son los comentarios registrados en este ciclo:

- Sesión 2: El observador externo indica la conveniencia de que fueran los alumnos los que repartieran y recogieran las fichas de clase.
- Sesión 4: El observador externo estima conveniente que en algún momento de la propuesta se dedique tiempo a hablar de los diferentes significados de la palabra 'razón'.
- Sesión 8: El observador externo cree que hubiera sido conveniente que el profesor-investigador hubiera realizado más llamadas de atención a un equipo concreto que presenta un comportamiento inadecuado.
- Sesión 11: El observador externo considera que las puestas en común que se realizan al finalizar las sesiones son "menos productivas" que las realizadas entre diferentes actividades de los alumnos.

VII.4. Fase de reflexión

En esta sección presentamos una síntesis del proceso de reflexión continuo que se hace a lo largo de todo el ciclo de investigación-acción, tanto de forma personal por el profesor-investigador como de forma colectiva por todo el equipo de investigación. Como en el resto de los ciclos la sección se estructura según las relaciones del triángulo didáctico.

Al tratarse del tercer ciclo de investigación-acción para 1º de ESO pondremos especial énfasis en determinar si, efectivamente, se trata de un ciclo de saturación. Además, para no resultar repetitivos, intentaremos incidir en aquellas reflexiones sobre la propuesta, la comprensión y la metodología de investigación y de aula, que no hayan aparecido en las fases de reflexión del Capítulo V y del Capítulo VI. En particular, prestaremos una mayor atención a las reflexiones hechas a raíz de los cambios introducidos en la propuesta tras los ciclos anteriores.

VII.4.1. Sobre el diseño de la propuesta

En la fase de reflexión del Capítulo V se señalaron algunos puntos que podrían mejorarse de la propuesta. A continuación, resumimos las propuestas de mejora realizadas en el ciclo II-1 y las reflexiones en torno a la consecución o no de dichas mejoras. Las reflexiones en torno a lo que ha ocurrido en este ciclo las presentamos en cursiva para distinguirlas de las propuestas de mejora hechas desde el ciclo pasado.

- La actividad de la factura telefónica parecía algo confusa a los alumnos del ciclo II-1. Tras la relaboración de dicha actividad no se han detectado confusiones reseñables y la información recogida desde los diferentes instrumentos (diario de clases, producciones escritas y observador externo) para esta sesión indica que el diseño de la actividad es adecuado y funciona convenientemente.
- Tras el ciclo II-1 parecía necesario reelaborar las sesiones 2 y 3, disminuir el número de actividades trabajadas y convertir la sesión 3 en un taller de problemas. Durante este ciclo se

han realizado dichos cambios y durante la acción se ha podido comprobar la adecuación de la nueva planificación a los tiempos de clase.

- El número de problemas en algunas sesiones de clase era excesivo durante el ciclo II-1. Con los cambios introducidos ha dado tiempo de realizar las actividades planificadas convenientemente con algunas excepciones. En el diario de clase y en los datos recogidos del observador externo se señala como insuficiente el tiempo en algunas sesiones en particular las sesiones 4, 5, 7 y 9. Sin embargo, algunos de estos problemas solo han ocurrido en grupos concretos y han sido debidos a problemas actitudinales. Salvo para la tarea para casa TC8 en el grupo D, no ha habido que tomar decisiones de reorganización de contenidos o de recorte de problemas. Algunas de las carencias de tiempo observadas para los debates podrían haberse resuelto si el profesor-investigador hubiera dado por concluida la fase de resolución de problemas en equipos con anterioridad. En cualquier caso, podría considerarse recortar ligeramente estas sesiones en futuras implementaciones.
- Los contextos en los que aparecen magnitudes relacionadas de forma inversamente proporcional aparecían por primera vez en las tareas para casa en el ciclo II-1. Se ha modificado el orden de algunos ejercicios para que aparezcan durante las sesiones de clase estas situaciones por primera vez y no se han detectado más problemas de este tipo durante este ciclo de investigación-acción.
- Las estructuras numéricas de algunos de los problemas causaban dificultades excesivas para la realización de operaciones aritméticas sin calculadora. Se han revisado todas las estructuras numéricas y no se han detectado más problemas importantes durante este ciclo para el cálculo sin calculadora.
- El primer problema de la propuesta en el ciclo II-1 en el que es necesario desenvolverse con los esquemas parte-parte-todo, F7.1.4, tenía una estructura numérica que favorecía excesivamente la aparición de estrategias escalares, por lo que en el Capítulo V se apuntó hacia la necesidad de plantear una estructura numérica más neutra para evaluar las dificultades de los alumnos en el planteamiento de razones externas en este tipo de situaciones. A raíz del cambio en la estructura numérica, como se apuntó en la sección VII.3.1.5 se redujeron las estrategias escalares y aumentaron las estrategias funcionales. Sin embargo, la tasa de éxito en dicho problema sigue siendo baja por lo que parece que dichas dificultades, en efecto, se relacionan más con las estructuras parte-parte-todo que con la estructura numérica.
- El diseño planificado de tres fichas en la sesión 8 se mostró excesivamente largo en el ciclo II-1. Además, dadas las dificultades en la comprensión del contexto de la situación introductoria en ese ciclo, y el mejor desempeño e interpretación en otros de los problemas planteados en la sesión, se valoró conveniente reordenar los problemas de esa sesión. El diseño de la sesión 8 ha funcionado de manera mucho más satisfactoria en este ciclo de investigación-acción ya que ha podido llevarse a cabo según la planificación. El cambio de la situación introductoria, como se analizó en VII.3.1.6 también ha sido positivo. La nueva situación introductoria para la proporcionalidad compuesta tiene una tasa de éxito razonable y hace emerger de forma natural la estrategia de amalgamación que se pretende institucionalizar.

- El diseño de las sesiones dedicadas a porcentajes es el que peores valoraciones obtenía en los análisis de los diferentes instrumentos de recogida de información. Se estimaba conveniente realizar diferentes cambios en el diseño. Por un lado, aumentar el número de sesiones para poder trabajar los mismos contenidos de forma más pausada. Por otro, estructurar las primeras situaciones para trabajar específicamente la relación del porcentaje con el concepto de razón e interpretar dicha razón como una cantidad de magnitud intensiva. También se estimaba necesario reducir la dificultad de los primeros problemas. Por último, parecía conveniente mejorar la situación introductoria a los problemas de Tipo III ya que se constataron dificultades en la comprensión del enunciado. Los cambios se realizaron de forma que las sesiones dedicadas al porcentaje se han llevado a cabo con un mejor ajuste al tiempo previsto y con mejores valoraciones tanto en el diario de clase como en los datos de la observación externa. También los cambios en la situación introductoria a los problemas de Tipo III ha mejorado la comprensión del problema. En general, se han valorado de forma positiva las tres situaciones introductorias para el porcentaje tras el análisis de las producciones escritas de los alumnos ya que hacen emerger los contenidos pretendidos y tienen tasas de éxito razonables. Sin embargo, los resultados obtenidos en la prueba escrita siguen siendo mejorables. Por un lado, parece que la propuesta ha sido exitosa despegando a los alumnos de sus conocimientos procedimentales previos ya que disminuye el uso de fórmulas, pero por otro las tasas de éxito en los problemas de Tipo I, II y III son muy bajas. Aunque estas tasas de éxito no son significativamente diferentes a las del grupo de control, sí encontramos diferencias significativas negativas respecto al ciclo anterior.

Como hemos discutido, en general, las deficiencias de la propuesta en cuanto a diseño se han resuelto satisfactoriamente. A falta de observar cómo se desempeñan estos mismos alumnos en los ciclos II-2 y III-2, solo parece necesario considerar cambios en la parte de la propuesta dedicada al porcentaje. Sin embargo, estos cambios deberían suponer un replanteamiento integral de esta parte de la secuencia o de la metodología de aula empleada.

VII.4.2. Sobre la comprensión de los alumnos

Estructuramos las reflexiones sobre la comprensión de los alumnos alrededor de los cuatro focos de contenido trabajados durante la experimentación en 1º de ESO.

VII.4.2.1. Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad

Como se ha destacado en el análisis de las producciones de los estudiantes, se han encontrado muchas similitudes y pocas diferencias con el ciclo II-1.

En general los alumnos identifican bien las dos razones externas asociadas a una relación de proporcionalidad simple directa y, aunque con mayor dificultad, las interpretan como tanto por uno. Cabe destacar que en este ciclo se ha observado un mayor apego por una de las razones cuando se necesita operar con ellas para los problemas de valor perdido.

También hemos encontrado muy buenas tasas de éxito en la detección de situaciones que no son de proporcionalidad simple directa y de los falsos problemas de proporcionalidad planteados durante la propuesta. Por ejemplo, en el falso problema de proporcionalidad PE.6 los alumnos de los grupos experimentales tienen una tasa de éxito significativamente mejor que la del grupo de control ($p = 0{,}0000$). De hecho, cuatro de los seis problemas de la prueba escrita en los que encontramos diferencias significativas a favor del grupo experimental pertenecen a este foco de contenido.

El bloque de preguntas específico sobre este foco en las entrevistas semiestructuradas ha permitido indagar sobre la comprensión de los alumnos. Por ejemplo, de las entrevistas se desprende que algunas de las respuestas en la que los alumnos etiquetan como directamente proporcionales las relaciones de proporcionalidad inversa no son indicativas de un error de comprensión, sino de errores en la expresión y en el uso del nuevo vocabulario que se introduce en la propuesta. Todos los alumnos entrevistados fueron capaces de analizar correctamente situaciones de proporcionalidad inversa, determinando la falta de significado de las razones en esa situación, proponiendo el producto como operación que sí tenía sentido e interpretando dicho producto. Muchos de ellos, incluso, fueron capaces de resolver un problema de valor perdido asociado a una situación de proporcionalidad inversa planteado por el profesor-investigador.

VII.4.2.2. Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

En el análisis de las producciones escritas en las secciones VII.3.1.3, VII.3.1.4 y VII.3.1.5, que contienen los problemas asociados a este foco de contenido prioritario, destacan dos observaciones generales:

- Las tasas de éxito en los problemas son ligeramente más bajas durante este ciclo si comparamos los resultados con el ciclo II-1.
- Salvo la observación anterior, no se encuentran diferencias significativas en la comprensión de los alumnos y en la forma de responder a los problemas si comparamos el análisis en este ciclo con el realizado en el ciclo II-1.

Se siguen detectando unas buenas tasas de éxito, significativamente mejores que las del grupo de control, en los problemas de comparación cuantitativa. Sin embargo, las dificultades en este ciclo se agravan en la resolución de problemas de valor perdido. Se han detectado mayores problemas para operar con las razones (aunque las puedan calcular e interpretar correctamente) durante este ciclo. Quizá estas dificultades puedan deberse a dificultades previas en la comprensión de las estructuras multiplicativas.

La comparación con el grupo de control en los problemas de valor perdido no arroja diferencias significativas en cuanto a la tasa de éxito, pero sigue mostrando que los alumnos del grupo experimental responden de forma más argumentada y demostrando un mayor control semántico sobre la situación problemática que los alumnos del grupo de control.

Las entrevistas semiestructuradas muestran que algunos alumnos son bastante versátiles a la hora de aplicar diferentes técnicas de resolución en los problemas de valor perdido. Sin embargo, alumnos con perfiles medios o bajos en la comprensión dependen fuertemente de la estructura numérica del problema a la hora de aplicar distintas estrategias y, por tanto, pueden tener problemas a la hora de generalizar una estrategia concreta en cualquier situación de proporcionalidad simple directa.

VII.4.2.3. Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta

A pesar de las ligeramente peores tasas de éxito, durante este ciclo se confirman las reflexiones hechas en el ciclo II-1 en este foco de contenido:

- La introducción de la proporcionalidad compuesta en 1º de ESO no supone un obstáculo y tiene ventajas evidentes al trabajar de forma más completa y compleja los significados de las operaciones en las estructuras multiplicativas.
- Aunque se detecta una mayor despreocupación por incorporar argumentos e interpretar los resultados de las operaciones binarias, las entrevistas semiestructuradas muestran que, en general, los alumnos tienen un buen control semántico de las operaciones que realizan hasta obtener la solución.
- Las estrategias institucionalizadas para la resolución de problemas de proporcionalidad simple directa, basadas en la razón externa, dotan a los alumnos de mecanismos para abordar los problemas de proporcionalidad compuesta, de forma que podría ser incluso prescindible la institucionalización de cualquier estrategia.

VII.4.2.4. Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados

Como en otros focos, muchas de las reflexiones realizadas en el Capítulo V sobre el porcentaje se mantienen en este ciclo:

- Dentro de los diferentes tipos de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje, los de Tipo I parecen causar menos dificultades a los alumnos que los de Tipo II y Tipo III.
- La aparición de estrategias basadas en una fórmula, la influencia de los conocimientos previos y de las intervenciones externas ha tenido una presencia mucho más significativa en este foco que en los anteriores

De forma específica para este ciclo caben destacar las siguientes reflexiones:

- La mayor estructuración de las actividades de clase alrededor del porcentaje ha provocado que los alumnos afronten este tipo de tareas con una actitud algo más receptiva al poder responder a los problemas iniciales y tener unas tasas de éxito altas.
- Se ha avanzado en la consecución del objetivo de acercar el concepto de porcentaje a la idea de razón externa entre cantidades de dos magnitudes diferentes. Los alumnos comienzan a romper con los conocimientos previos algorítmicos para el cálculo directo de porcentajes (problemas de Tipo II). Un indicio de este hecho es el menor porcentaje de uso de una fórmula en el problema PE.8.1 en el ciclo III-1. En el ciclo actual usaron una fórmula en este

problema de Tipo II un $12{,}1\ \%$ de los alumnos frente al $33{,}8\ \%$ de alumnos que usaron fórmulas para resolverlo en el ciclo II-1.

- La comprensión de este tipo de situaciones sigue siendo mala, como muestran las pobres tasas de éxito en los problemas de la prueba escrita (aunque no significativamente diferentes a las obtenidas por los alumnos del grupo de control). Otro indicio de la inadecuada incomprensión de este fenómeno lo obtenemos en las entrevistas semiestructuradas, donde varios alumnos muestran las dificultades que tienen para interpretar las razones asociadas a las situaciones de porcentaje aun cuando se han mostrado competentes interpretando razones externas en otro tipo de problemas.

VII.4.3. Sobre la metodología y la labor del profesor-investigador

VII.4.3.1. Reflexiones sobre la instrucción y la metodología de enseñanza

Como en ciclos anteriores, el profesor-investigador valora como muy positiva la metodología de enseñanza basada en un enfoque a través de la resolución de problemas. Durante este ciclo el profesor-investigador se siente plenamente cómodo con la metodología y es capaz de tomar decisiones sobre la marcha en la instrucción cuando detecta problemas de comprensión en los equipos de trabajo o en alumnos concretos, problemas actitudinales o reticencias en los alumnos ante los cambios que introduce la propuesta didáctica.

Gestión del trabajo en el aula.

Como en los ciclos anteriores se observa que, en general, la motivación e implicación de los alumnos es buena. Los indicadores del observador externo en torno a la gestión del trabajo de los alumnos son excelentes y se han mejorado algunas deficiencias observadas en ciclos anteriores como es la reorganización dinámica de las parejas de clase cuando se producen ausencias.

Como se ha observado en diferentes ocasiones, una de las problemáticas de este ciclo ha sido la existencia de un pequeño grupo de alumnos que han tenido una implicación en el trabajo muy inferior a la del resto de compañeros. Sigue siendo un objetivo de mejora conseguir una mayor implicación de este perfil de alumnado en siguientes ciclos.

Gestión del desarrollo del contenido.

En los ciclos anteriores se produjeron desajustes en el desarrollo del contenido, bien por una inadecuada planificación, bien por una gestión mejorable de los tiempos dedicados a cada actividad por parte del profesor-investigador. Estos desajustes han desaparecido en gran medida en este ciclo, tanto por la mejora en el diseño de la propuesta tras los diferentes ciclos de investigación-acción, como por la mayor comodidad del profesor-investigador con la metodología de investigación.

En este ciclo ya no aparecen comentarios del observador externo en los que se solicite que las intervenciones se repartan de forma más equitativa entre los alumnos. Aunque sí se solicita ampliar los tiempos para el debate y puesta en común en algunas de las sesiones.

Durante este último ciclo en 1º de la ESO se han creado diferentes documentos y presentaciones digitales que han permitido reducir el tiempo dedicado a poner en común los resultados de los problemas de las fichas de tarea para casa.

Gestión de la construcción del conocimiento.

Según el observador externo el profesor-investigador tiene intervenciones adecuadas, precisas y concisas que fomentan la participación y promueven la reflexión. Además, se resaltan momentos en los que el profesor-investigador identifica dificultades de los alumnos y toma decisiones sobre la marcha para intentar resolverlas.

VII.4.4. Sobre el funcionamiento general de la propuesta

Como en los ciclos anteriores valoramos muy positivamente la propuesta y reiteramos los puntos fuertes observados en los capítulos V y VI.

A la espera de analizar la propuesta en los últimos ciclos para 2º de la ESO, de los puntos débiles señalados en la sección V.4.4 debemos considerar como no resuelto de forma completamente satisfactoria el referente al trabajo con porcentajes. La propuesta durante estos ciclos de investigación-acción ha mejorado y resuelto el resto de los puntos débiles que señalamos al final del Capítulo V.

En cuanto al porcentaje, como hemos señalado, hemos conseguido algunos objetivos. Una incipiente ruptura con los conocimientos puramente procedimentales previos es el más destacable. Sin embargo, la tasa de éxito en los problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje es mejorable.

Las consideraciones desarrolladas en esta fase de reflexión son indicios de que nos encontramos, efectivamente, ante un ciclo de saturación en el sentido dado por Elliot (2005) que lo define como aquel tras el que no se observa la posibilidad de mejorar sin realizar cambios sustanciales en la planificación original o sin la intervención de agentes externos.

Capítulo VIII: Segundo ciclo de investigación-acción en 2º de ESO

En este octavo capítulo resumimos el segundo ciclo de investigación-acción de la propuesta didáctica en 2º de ESO. Se prestará especial atención a algunos cambios sustanciales realizados en el diseño de la propuesta en dos de los focos prioritarios de contenido: los repartos inversamente proporcionales y los problemas relacionados con porcentajes. Tras presentar estos cambios en la planificación, daremos cuenta de la implementación y la analizaremos según lo descrito en el Capítulo III sobre metodología de investigación. Se pondrá el foco de la redacción en aquellos resultados novedosos respecto a lo descrito en los capítulos V, VI y VII.

VIII.1. Fase de planificación

En esta sección recogemos la planificación realizada para el segundo ciclo de investigación-acción en 2º de ESO, que se apoya no solo en los resultados y las reflexiones realizadas en el ciclo anterior para este nivel (Capítulo VI), sino también en los realizados en los ciclos correspondientes a 1º de ESO. En este sentido, es importante considerar las reflexiones realizadas en el ciclo III-1 (Capítulo VII), ya que este capítulo completa el estudio longitudinal para un subgrupo de alumnos de los grupos experimentales de dicho ciclo. Para evitar reiteraciones innecesarias resaltaremos los aspectos diferenciales de la planificación, destacando los cambios introducidos respecto a los ciclos anteriores.

VIII.1.1. Decisiones tomadas tras las observaciones de los ciclos anteriores

VIII.1.1.1. Sobre el diseño

Tanto en los ciclos de investigación-acción en 1º de ESO (ciclo II-1 y ciclo III-1) como en el ciclo experimental de 2º de ESO (ciclo I-2), se ha valorado de forma muy positiva el diseño de la propuesta en lo que corresponde a los focos de contenido prioritarios del 1 al 4. En especial, las situaciones introductorias en estos apartados de la propuesta consiguen hacer emerger los elementos necesarios para una adecuada puesta en común e institucionalización. Además, como se recogió en las reflexiones del ciclo I-2 (Capítulo VI), la cantidad y la extensión de las fichas de trabajo en 2º de ESO resultaron más adecuadas que las relativas a 1º de ESO y no se tuvieron que hacer cambios sustanciales de diseño sobre la marcha. Por tanto, los cambios en cuanto al diseño en este ciclo para estos cuatro primeros focos de contenido son menores. Estos cambios están relacionados con la estructura numérica de algunas situaciones, la posición relativa de los problemas en las fichas de trabajo y la modificación de alguna otra variable didáctica para mejorar algunos elementos del diseño. En concreto:

- Se reorganizan las situaciones de las fichas de trabajo F1.1 y TC1 para asegurarnos de que los alumnos afrontan la caracterización de algunas situaciones en las que se detectaron mayores dificultades. Los alumnos tienden a dejar más producciones en blanco en los últimos problemas de las fichas, por lo que se estimó conveniente colocar alguna de las situaciones en las que se detectaban más dificultades al principio de las mismas.
- Con un propósito similar al anterior, se permutan los problemas F5.1.3 y F5.1.5.
- Se cambian dos problemas de las sesiones 2 y 3, en concreto F2.1.2 y F3.1.3, para reforzar algunas de las deficiencias observadas en los ciclos anteriores. Las nuevas redacciones de los problemas presentan situaciones afines (no proporcionales) o situaciones con una posible relación entre las magnitudes, pero no proporcional.
    - Nuevo F2.1.2: *Mario mide 180 cm y pesa 90 kg*.
    - Nuevo F3.1.3: *Si dejamos el desagüe abierto durante 2 minutos quedan en la bañera 80 litros de agua. ¿Cuánta agua quedará si lo dejamos abierto 4 minutos?*).
- Se eliminan algunos problemas de las fichas de trabajo correspondientes a las tareas para casa tras las sesiones 2, 3 y 4, que como hemos dicho no tuvieron el funcionamiento deseado. En concreto se eliminan TC.2.1, TC3.2, TC3.4 y TC.4.2 (en la codificación utilizada en el Capítulo VI) lo que obliga a recodificar algunos problemas de estas fichas de trabajo durante este ciclo.
- Se revisa la redacción y la estructura numérica de algunos problemas contenidos en las fichas de trabajo correspondientes a las sesiones de la 2 a la 5 (F2.2.2, TC2.3, TC3.1, F4.1.1, F4.1.4, F5.1.1, F5.1.3, en la codificación presentada en el Capítulo VI).
- Se modifican las comparaciones en el problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad compuesta F7.1.1 para que pueda determinarse el sentido de la comparación.

No creemos necesario presentar la nueva estructura curricular de las sesiones 1, 2, 3, 4, 5, 6, y 7 ya que los cambios introducidos no son sustanciales. La reorganización de algunas actividades, y la redacción modificada de otras, pueden consultarse en las fichas de trabajo de los alumnos en el Anexo I. Si el lector realiza una comparación detallada de los resultados de cada problema entre los capítulos VI, VIII y IX debe tener en cuenta los cambios en la codificación que han supuesto los cambios expuestos.

Por otra parte, como apuntamos en el Capítulo VI, la sesión 8 necesitaba un nuevo replanteamiento en, al menos, dos aspectos. Por un lado, la estructura en dos fichas de trabajo diferentes y una tarea para casa resultaba excesiva debido a la mayor complejidad de los problemas que contenía. Es necesario, por tanto, recortar esta estructura y dejar un mayor tiempo para el debate y la institucionalización, como también reclamaba el observador externo del ciclo I-2. Por otro lado, la situación introductoria para los problemas de repartos inversamente proporcionales no resultó satisfactoria, por lo que el equipo de investigación decidió hacer un nuevo planteamiento. Los motivos del nuevo planteamiento se expondrán en la siguiente sección sobre cambios relativos a aspectos cognitivos, VIII.1.2, y el nuevo diseño curricular de la sesión se expondrá en la sección VIII.1.3.

En las sesiones correspondientes al foco de contenido prioritario 6 ("Concepto de porcentaje y problemas asociados") se detectaron algunos problemas de diseño en el Capítulo VI. Algunos de ellos están relacionados con un cambio que se realizó en el ciclo I-2 de la planificación inicial. Conviene, por tanto, recolocar algunos problemas para que la ampliación de 3 a 4 sesiones, que se produjo en el ciclo anterior de 2º de ESO, presente en el lugar y orden adecuados los diferentes problemas que se trabajan. Además, dadas las dificultades de interpretación en las razones externas calculadas a partir de una situación de porcentaje que detectamos en el Capítulo VII (ciclo de saturación en 1º de ESO), parece necesario introducir algunos problemas que favorezcan esta interpretación. Hacemos explícitos los cambios de diseño para las sesiones 9, 10, 11 y 12 en la sección VIII.1.3, donde desarrollamos íntegramente el diseño curricular de estas sesiones. Los cambios, como apuntamos al final del Capítulo VI, siguen las siguientes líneas:

- Eliminar algunos de los apartados de los problemas de la ficha F9.1 para introducir problemas en los que, dado el valor numérico de una razón externa asociada a una situación de porcentaje, los equipos deben asignar significado a dicha razón interpretándola como una razón unitaria.
- Reformular TC9 para que en ella los alumnos refuercen algunos de los contenidos vistos en la sesión 9.
- Reformular F10.1 para que se constituya en situación inicial para problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje.
- Reformular F11.1, TC11 y F12.1 para introducir mejoras similares a las propuestas para F9.1, TC9 y F10.1 respectivamente, pero en situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales.
- Eliminar carga en las fichas de trabajo para casa ya que en estas tareas aparecen muchas producciones plagiadas o con claras influencias externas que parecen perjudicar el avance en la comprensión de los conceptos relacionados con el porcentaje. En particular, se elimina TC12, aunque uno de sus problemas se recupera en la parte final de la ficha de trabajo en clase F12.1.

Por último, destacamos que no se introduce ningún cambio en este ciclo ni en el diseño de la sesión de repaso ni en el de la prueba escrita final.

VIII.1.1.2. Sobre aspectos cognitivos

Podemos agrupar en tres bloques los cambios introducidos en este ciclo según hagan referencia al Foco 1, al Foco 5 o al Foco 6, respectivamente.

Cambios que inciden sobre aspectos cognitivos relativos al Foco 1, "Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad".

Como se reflexionó en el Capítulo VI, en la detección de relaciones no proporcionales, los alumnos presentaron mayores dificultades en las situaciones en las que sí existía una dependencia funcional entre las magnitudes, mientras que se desenvolvían con mayor éxito en la detección de situaciones no proporcionales sin relación funcional. En concreto, las relaciones afines, y de forma más acusada las decrecientes, supusieron una mayor dificultad a los alumnos. En consecuencia, algunos de los cambios de diseño comentados en el apartado anterior, intentan dar un mayor peso a este tipo de relaciones en este ciclo de investigación-acción. Por una parte, reordenamos algunas de estas situaciones para que todos los equipos tengan el tiempo suficiente para afrontarlas durante las sesiones. Por otro, introducimos alguna situación nueva que trabaja las relaciones afines decrecientes específicamente. Por último, el profesor-investigador intentará dar una mayor relevancia a este tipo de situaciones en los debates.

De las reflexiones del Capítulo VII se desprende que la interpretación de las razones externas asociadas a una situación de porcentaje no es satisfactoria. Aun cuando los alumnos calculan numéricamente estas razones externas, tienen problemas para interpretarlas. Estas dificultades se mantienen incluso en los alumnos que parecen tener una mejor comprensión y competencia en otros focos de contenido o en la resolución de problemas más o menos complejos, como se desprendió de las entrevistas semiestructuradas a algunos alumnos en el ciclo III-1. Aunque estas cuestiones se encuentran en la intersección de los focos de contenido 1 y 6, pueden tener parte de su origen en la interpretación de razones en situaciones parte-parte-todo con magnitudes homogéneas y más específicamente cuando estas magnitudes son de cardinalidad. Aunque presentaremos el diseño completo de las sesiones dedicadas al concepto de porcentaje en la sección VIII.1.3, recalcamos que algunos de los nuevos problemas introducidos en el diseño de este ciclo intentan trabajar en esta línea.

Cambios que inciden sobre aspectos cognitivos relativos al Foco 5, "Repartos proporcionales".

Como se comentó en el Capítulo VI, la parte de la sesión 8 dedicada a los repartos directamente proporcionales resultó satisfactoria. Sin embargo, se estimó conveniente modificar la parte de la sesión dedicada a los repartos inversamente proporcionales.

En el ciclo I-2 se observó que la situación introductoria de repartos inversamente proporcionales no promovía el uso de un modelo proporcional, utilizándose solo por uno de los equipos. Dicho equipo, además, utilizaba una estrategia correcta, pero difícilmente exportable a una situación con más pesos y que no asignaba significado a la constante de proporcionalidad del problema, ni a las operaciones que se realizaban.

Se decidió, por tanto, cambiar el problema introductorio sobre repartos inversamente proporcionales para explorar las potencialidades de otros contextos. Para ello, tras un repaso a la fenomenología histórica de la proporcionalidad, se encontró el problema siguiente (Shen *et al*., 1999, p. 340):

Ahora una persona puede enderezar 50 cuerpos de flecha en un día, o colocar plumas para 30 flechas, o instalar 15 puntas de flecha. Asume que endereza cuerpos, coloca plumas instala puntas de flecha a mano y dedicándose solo a una tarea por vez. Di: ¿cuántas flechas puede preparar en un día?

En este problema, aparece un contexto de reparto de tiempo donde los pesos vienen dados por la velocidad a la que un artesano hace cada una de las partes en que componen una obra. De esta manera, si usamos la notación descrita en el Capítulo II (ver sección II.2.4.7) los inversos de los pesos son interpretables como el tiempo que el artesano debe dedicar a cada una de las piezas. Así,

$$\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\cdots+\frac{1}{w_p},$$

puede interpretarse como el tiempo que el artesano tarda en hacer cada una de las obras.

$$\frac{1}{50}+\frac{1}{30}+\frac{1}{15}=\frac{3+5+10}{150}=\frac{3}{25}\text{ días / flecha}$$

Y la constante de proporcionalidad,

$$\frac{K}{\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}+\cdots+\frac{1}{w_p}},$$

como el número de obras que pueden completarse en el tiempo del que se dispone. En el ejemplo anterior serían $25/3$ flecha, u ocho flechas completas.

En vez de solicitar la constante de proporcionalidad, el problema anterior se puede convertir en un problema de reparto inversamente proporcional si preguntamos por la cantidad de tiempo (del total de tiempo disponible) que el artesano debe dedicar a cada una de las piezas que componen su obra para poder fabricar el máximo número de obras o, equivalentemente, para optimizar el tiempo del que dispone. De este modo, las cantidades que resultan del reparto, k_i, son los tiempos que el artesano debe dedicar a hacer tantas piezas de "tipo i" como el número de obras completas que quiera realizar (constante de proporcionalidad).

Por tanto, este tipo de contexto permite un control semántico de las operaciones, y de las cantidades calculadas, alineado con el resto de la propuesta. Así, se diseñó un problema en el que se simplificaba la estructura numérica y se reducía el número de pesos respecto al ejemplo anterior para presentarlo como situación introductoria de los repartos inversamente proporcionales. También se modificó el problema de la ficha de refuerzo buscando otro contexto similar. Los enunciados concretos de estos problemas se presentan en la sección VIII.1.3.

Cambios que inciden sobre aspectos cognitivos relativos al Foco 6, "Concepto de porcentaje y problemas asociados".

En este ciclo II-2, se continúa elaborando la propuesta del porcentaje de forma más estructurada en las situaciones iniciales para incidir en la relación entre el concepto de razón y el de porcentaje. Este trabajo más estructurado ya se inició en el ciclo I-2 y se introdujo en la propuesta de 1º de ESO en el ciclo III-1. En el primer ciclo de 2º de ESO obtuvimos resultados que apuntaban hacia una mejora en la comprensión en este foco. Sin embargo, en el ciclo III-1 en el que hicimos un mayor énfasis en la interpretación de las razones externas en situaciones de porcentajes, se obtuvieron peores resultados en los problemas de valor perdido de porcentajes que en el ciclo II-1. Estos peores resultados, en cuanto a frecuencia de éxito, vinieron acompañados de una disminución en el uso de técnicas algorítmicas. Parece pues necesario reforzar la competencia de los alumnos, no solo para interpretar las razones externas en situaciones de porcentaje, sino también para razonar sobre qué operaciones tiene sentido realizar con ellas una vez calculadas.

Además de la reorganización para priorizar la aparición de ciertos problemas en las actividades de aula y no en las tareas de casa, y de la introducción de nuevas actividades que profundicen en la interpretación del porcentaje como una relación entre dos cantidades de magnitud que ya hemos comentado anteriormente y que se ven reflejadas en cambios en el diseño, es necesario reforzar el papel del profesor-investigador en los debates para poder construir estos significados.

VIII.1.1.3 Sobre la metodología de aula y de investigación

En este cuarto ciclo de experimentación llevado a cabo por el profesor-investigador no se ha considerado introducir cambios en la metodología de investigación. Tampoco se introducen cambios en la metodología de aula.

No obstante, se debe prestar atención a la gestión de posibles alumnos que presenten una actitud “objetora” y a continuar con la elaboración de materiales de apoyo a los debates e institucionalizaciones, así como la creación de materiales de refuerzo.

VIII.1.2. Secuenciación y temporalización

La secuenciación y la temporalización en este ciclo (ver Tabla VIII - 1) sufren pocos cambios respecto a las análogas en el ciclo I-2 (ver Tabla VI - 2). En este ciclo, la secuencia de la propuesta se estructura en 13 sesiones de clase y una sesión para la prueba escrita (tres semanas y media, aproximadamente).

Como ya hemos dicho, se aligeran de actividades algunas fichas de trabajo para casa, se elimina la tarea para casa de la última sesión de porcentajes antes del repaso y se elimina la ficha de trabajo de aula tras la institucionalización en la sesión 8. Con estos cambios, se proponen tareas para casa en ocho de las sesiones y solo en dos de ellas hay dos fichas de trabajo de aula diferentes (en la sesión 2 para introducir el concepto de magnitudes inversamente proporcionales y en la sesión 6 para institucionalizar los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta). La codificación de estas fichas de trabajo sigue los mismos criterios que los utilizados en los capítulos V, VI y VII.

	Breve descripción de los contenidos	Fichas de trabajo
Sesión 1	Razones y condición de regularidad	F1.1, TC1
Sesión 2	Situaciones de proporcionalidad simple inversa	F2.1, F2.2, TC2
Sesión 3	Problemas de proporcionalidad simple I	F3.1, TC3
Sesión 4	Problemas de proporcionalidad simple II	F4.1, TC4
Sesión 5	Problemas de proporcionalidad simple III	F5.1
Sesión 6	Problemas de proporcionalidad compuesta I	F6.1, F6.2, TC6
Sesión 7	Problemas de proporcionalidad compuesta II	F7.1
Sesión 8	Repartos proporcionales	F8.1, TC8
Sesión 9	El porcentaje como tanto por cien.	F9.1, TC9
Sesión 10	Cálculo directo e inverso con porcentajes.	F10.1
Sesión 11	Aumentos y disminuciones porcentuales I	F11.1, TC11
Sesión 12	Aumentos y disminuciones porcentuales II	F12.1
Sesión 13	Repaso de la unidad	F13.1
Sesión 14	Prueba escrita	PE

Tabla VIII - 1. Secuencia temporal de la propuesta para 2º ESO (Ciclo II-2).

VIII.1.3. Cambios en el diseño curricular de algunas sesiones de clase

VIII.1.3.1. Octava sesión: Repartos proporcionales

La octava sesión es la única dedicada a la resolución de problemas de repartos directa e inversamente proporcionales. A partir de la situación introductoria en la que se plantea un problema de cada tipo, se espera que surjan en algunos equipos las ideas suficientes para poder generalizar métodos de resolución para cada uno de los problemas. Tras la institucionalización se realizará un problema de cada tipo más como tarea para casa.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VIII - 2.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Reconocer situaciones de proporcionalidad en contextos de repartos “justos” u “óptimos”. • Justificar las técnicas de reparto proporcional mediante el uso de razones, constantes de proporcionalidad y condiciones de regularidad.	• Identificación, análisis y resolución de problemas de repartos directamente proporcionales. • Identificación, análisis y resolución de problemas de repartos inversamente proporcionales.

Tabla VIII - 2. Objetivos didácticos y contenidos de la octava sesión (Ciclo II-2).

Esquema de la sesión:

- La sesión comienza con la resolución en parejas de la situación introductoria F8.1 que contiene un problema susceptible de ser resuelto mediante un modelo de reparto directamente proporcional y, otro, cuya solución óptima requiere la realización de un reparto mediante un modelo inversamente proporcional. (25 min)
- Puesta en común con todo el grupo de los resultados de la actividad F8.1 e institucionalización de repartos directa e inversamente proporcionales. (25 min)
- Entrega de la actividad TC8.

Diseño y análisis de las actividades:

La actividad de aula F8.1 es la situación introductoria para este foco de contenido. Se compone de dos problemas susceptibles de ser resueltos mediante un modelo de reparto proporcional. En ninguno de los dos problemas se especifica la forma en la que debe realizarse este reparto. En el problema F8.1.1, debe repartirse una cantidad de dinero de un premio entre tres personas que han colaborado de forma no equitativa en la compra del billete de lotería. Se espera que aparezcan respuestas que sigan un modelo de reparto directamente proporcional, de forma que el reparto del premio refleje las comparaciones relativas entre las cantidades que cada individuo ha puesto para comprar dicho billete.

F8.1.1: *Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4 €, Bea 6 € y Carmen 10 €. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?*

Tipo de problema: Reparto.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.
Problema F8.1.1 del ciclo I-2.	

Para el problema F8.1.2, situación introductoria de los repartos inversamente proporcionales, hemos adaptado el contexto, la estructura numérica y el número de pesos respecto al problema analizado en la sección VIII.1.1.2. Un artesano tiene un tiempo limitado para poder realizar muñecos que se componen de dos tipos de piezas. El enunciado proporciona la velocidad a la que realiza cada tipo de pieza y se solicita a los equipos que recomienden al artesano cómo repartir su tiempo. Se espera que los alumnos se acojan a la idea de que lo mejor es maximizar el número de muñecos (constante de proporcionalidad del reparto inverso). Para ello, deberán realizar un reparto inverso del tiempo disponible respecto a las velocidades y calcular cuánto tiempo debe dedicar el artesano a cada tipo de pieza.

La estructura numérica favorece que se puedan calcular e interpretar los inversos de los pesos con relativa facilidad como “media hora por cabeza” y “un cuarto de hora por cuerpo”. Además, el cambio de horas a minutos es sencillo y proporciona cantidades enteras para estos inversos de los pesos.

F8.1.2: *Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?*

Tipo de problema: Reparto. **Número de participantes en el reparto:** 2.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa. **Constante de proporcionalidad:** k, número óptimo de muñecos que pueden realizarse en el tiempo disponible.
Magnitudes involucradas: Magnitud de reparto, X: Tiempo (h). Extensiva, continua. Pesos, magnitud según la cual se reparte, W: Velocidad a la que hace cada pieza (piezas/h). Intensiva.	**Estructura funcional:** $X = \frac{k}{W}$ $X_A + X_B = X_T$ **Estructura numérica:** $\left(6 : \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}\right) \leftrightarrow (x_A : 4), (x_B : 2)$

La ficha de trabajo para casa es un refuerzo de lo visto en clase durante la sesión y contiene un problema modelizable mediante una estructura de reparto directamente proporcional, TC8.1, y otro según una estructura de reparto inversamente proporcional, TC8.2, con un contexto similar al presentado en F8.1.2.

En el problema TC8.1, modelizable mediante una estructura de reparto directamente proporcional, se cambia (respecto a F8.1.1) la magnitud según la cual se reparte que pasa a ser el tiempo trabajado. Se mantiene el cardinal de individuos entre los que repartir (tres individuos), pero se introducen variaciones en la estructura numérica que no favorecen el trabajo con las razones internas.

TC8.1: *Han venido 3 pintores a pintar mi casa. El primero ha llegado a las 8:00, el segundo 1 hora más tarde y el tercero ha llegado a las 12:00. Todos ellos se han ido a las 16:00 cuando han acabado de pintar. Si les he pagado 304 €, ¿cómo deberían repartirse el dinero?*

Tipo de problema: Reparto. Problema F8.2.1 del ciclo I-2.	**Relación de proporcionalidad:** Directa.

Para TC8.2 el contexto de artesanía de madera se cambia por un contexto de cocina, pero siguiendo el mismo esquema que F8.1.2, y con magnitudes y estructura muy similares. En vez de piezas para hacer un muñeco se deben elaborar platos para hacer un menú, también en un tiempo limitado que debe repartirse para optimizar el número de menús que se realizan.

La estructura numérica también favorece la opción de realizar un cambio de unidades para obtener cantidades enteras para los inversos de los pesos (diez y doce minutos para cada hamburguesa y crepe respectivamente).

TC8.2: *Vienen unos amigos a cenar y voy a hacer hamburguesas y crepes de postre. Sé que puedo hacer 6 hamburguesas por hora y 5 crepes por hora. Si dispongo de 4 horas para hacer la cena, ¿cómo debo repartir mi tiempo para cocinar?*

Tipo de problema: Reparto. **Número de participantes en el reparto:** 2. **Magnitudes involucradas:** Magnitud de reparto, X: Tiempo (h). Extensiva, continua. Pesos, magnitud según la cual se reparte, W: Velocidad a la que hace cada plato para la cena (platos/h). Intensiva.	**Relación de proporcionalidad:** Inversa. **Constante de proporcionalidad:** k, número óptimo de menús que se pueden realizar. **Estructura funcional:** $X = \frac{k}{W}$ $X_A + X_B = X_T$ **Estructura numérica:** $\left(4 : \frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}\right) \leftrightarrow (x_A : 6), (x_B : 5)$

VIII.1.3.2. Novena sesión: El porcentaje como tanto por cien

En la tercera semana de clase (novena sesión) comienza el trabajo con porcentajes. El objetivo de la primera sesión es conectar la noción de porcentaje con los conceptos estudiados sobre proporcionalidad simple directa. Para intentar paliar algunas de las deficiencias observadas se introducen ejercicios que hacen énfasis en el cálculo e interpretación de razones en situaciones de porcentaje. En concreto, se insiste en la interpretación de un porcentaje como una pareja de valores asociados a dos magnitudes ligadas por una relación de proporcionalidad, las razones asociadas a un porcentaje y la interpretación de los complementarios de un porcentaje dado.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VIII - 3.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Reconocer e interpretar las diferentes razones que pueden asociarse a un porcentaje. • Calcular el porcentaje que representa una cantidad respecto de otra, asociando el proceso al cálculo de una razón.	• Porcentajes. • Significado de las diferentes razones asociadas a un porcentaje. • Cálculo del porcentaje que una cantidad representa respecto de otra. Problemas de Tipo II.

Tabla VIII - 3. Objetivos didácticos y contenidos de la novena sesión (Ciclo II-2).

Esquema de la sesión:

- Puesta en común con todo el grupo de los resultados obtenidos en los problemas de repartos proporcionales de la actividad TC8. (10 min)
- Realización de la actividad F9.1 que supone la situación introductoria para el concepto de porcentaje y trabaja el cálculo e interpretación de las razones asociadas a una situación de

porcentaje y la obtención del porcentaje asociado a una parte respecto de un total (Tipo II). (20 min)

- Puesta en común de los resultados de la actividad F9.1 e institucionalización del concepto de porcentaje y su relación con el concepto de razón. (20 min)
- Reparto de la actividad TC9 en donde se refuerzan los contenidos de la sesión.

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas F9.1.1 y F9.1.2 se diseñan como situación introductoria para el concepto de porcentaje. En el problema F9.1.1, a partir de una situación en la que aparecen las cantidades absolutas asociadas a dos magnitudes, se proponen diferentes interpretaciones de razones relacionadas con dichas cantidades y los alumnos deben proponer la cantidad numérica que correspondería a estas razones.

Entre las interpretaciones de las diferentes razones, se propone a los alumnos averiguar la cantidad de una de las magnitudes que se correspondería con 100 unidades del total. Por tanto, se trata de un problema de Tipo II con una estructura inicial que pretende acercar la resolución de este tipo de problemas de valor perdido con el cálculo de razones externas. La sencillez de la estructura numérica con la presencia de la razón $1/4$ puede favorecer el uso de puntos de referencia.

F9.1.1: *En una clase hay 6 chicos de un total de 24 alumnos.*

F9.1.1.1: *En la clase hay chicas por cada alumno.*

F9.1.1.2: *En la clase hay chicos por cada alumno.*

F9.1.1.3: *En la clase hay alumnos por cada chico.*

F9.1.1.4: *En la clase hay alumnos por cada chica.*

F9.1.1.5: *En la clase hay chicas por cada 100 alumnos.*

F9.1.1.6: *En la clase hay chicos por cada 100 alumnos.*

Tipo de problema: Valor perdido. **Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Problema F9.1.1 del ciclo I-2 al que se le han eliminado los apartados F9.1.1.7 y F9.1.1.8.

El problema F9.1.2 es similar al anterior, sin embargo, la información inicial se da en forma de porcentaje. En primer lugar, se solicita que los alumnos interpreten el porcentaje como dos cantidades de magnitudes diferentes. A partir de ahí se proporcionan diferentes interpretaciones de razones relacionadas para las que los alumnos deben proporcionar el valor numérico.

F9.1.2: *En una ciudad hay un 10 % de personas alérgicas.*

F9.1.2.1: *En la ciudad hay alérgicos por cada 100 habitantes.*

F9.1.2.2: *En la ciudad hay alérgicos por cada habitante.*

F9.1.2.3: *En la ciudad hay no alérgicos por cada 100 habitantes.*

F9.1.2.4: *En la ciudad hay no alérgicos por cada habitante.*

F9.1.2.5: *En la ciudad hay habitantes por cada alérgico.*

Tipo de problema: Valor perdido. **Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Problema F9.1.2 del ciclo I-2, se modifica el enunciado para presentar la información en forma de porcentaje, se introduce la pregunta F9.1.2.1 para descomprimir el concepto de porcentaje, se eliminan los apartados F9.1.2.4 - F9.1.2.6 (en la codificación anterior) y se reordenan los apartados F9.1.2.1, F9.1.2.3, F9.1.2.3 y F9.1.2.7 (de la antigua codificación) que pasan a ser los apartados F9.1.2.2, F9.1.2.4, F9.1.2.5 y F9.1.2.3, respectivamente.

Por último, se introduce un nuevo problema en este ciclo que presenta el cálculo de diferentes razones externas asociadas a un porcentaje y pide explícitamente interpretar dichas razones.

F9.1.3: *En un instituto hay un 25 % de alumnos con gafas.*

F9.1.3.1: *El significado de 25/100=0,25 es: Hay 0,25* ______________________________

F9.1.3.2: *El significado de 100/25=4 es: Hay 4* ___________________________________

F9.1.3.3: *El significado de 75/25=3 es: Hay 3* ____________________________________

Tipo de problema: Análisis de situaciones.
Relación de proporcionalidad: Directa, %.

Magnitudes involucradas:
P_1: Alumnos con gafas. Extensiva, discreta.
P_2: Alumnos sin gafas. Extensiva, discreta.
T: Total de alumnos del instituto. Extensiva, discreta.

Constante de proporcionalidad:
k, comparación multiplicativa entre el número de alumnos con gafas y el número total de alumnos del instituto.

Estructura funcional:

$$T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$$

$$P_2 = (1-k) \cdot T \qquad P_1 = \frac{k}{1-k}\, P_2$$

Estructura numérica:

$$(100\colon 25 + \square\,)$$

Razones externas:
$k^{-1} = 4$, $\frac{1-k}{k} = 3$, enteras. El resto no enteras.

Una vez institucionalizado el concepto de porcentaje, asociándolo con una pareja de valores homólogos unidos mediante una relación de proporcionalidad simple directa, se proponen diferentes problemas que refuerzan los contenidos vistos en la sesión en la ficha de trabajo TC9. Esta ficha de trabajo para casa tiene un diseño totalmente diferente al utilizado en el ciclo I-2 que evita presentar contenidos nuevos en estos problemas que los alumnos no realizan en clase.

El primer problema tiene un enunciado similar al problema F9.1.1 pero la estructura hacia la resolución del problema de Tipo II es más directa. En este caso las magnitudes son homogéneas pero continuas, en vez de discretas.

TC9.1: *Se sabe que un cierto refresco de limón de 330 cl, contiene 26,4 cl de zumo de limón.*

TC9.1.1: *¿Cuántos cl de zumo de limón hay por cada cl de refresco?*

TC9.1.2: *¿Cuántos cl de zumo de limón hay por cada 100 cl de refresco?*

TC9.1.3: *¿Cuál es el porcentaje de zumo de limón que contiene el refresco?*

Tipo de problema: Valor perdido, cálculo del porcentaje conocida la parte y el total, Tipo II.	**Relación de proporcionalidad:** Directa, %.
Magnitudes involucradas: P_1: Volumen de zumo de limón. Extensiva, continua. P_2: Volumen de agua. Extensiva, continua. T: Volumen de agua. Extensiva, continua.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el volumen de zumo de limón y el volumen de refresco.
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \frac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(330{:}\, 26{,}4 + \square) \leftrightarrow (1{:}\, x_a + \square),$ $(100{:}\, x_b + \square)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

El segundo problema de la tarea para casa, TC9.2, es similar el problema F9.1.2. La información inicial se da en forma de porcentaje y a partir de esa información se solicita el valor numérico de ciertas razones externas de las que se proporciona su interpretación como magnitud intensiva. La estructura numérica es ligeramente más complicada al no presentar razones externas enteras.

TC9.2: *En el parque hay un 22 % de chopos.*

TC9.2.1: *¿Cuántos chopos hay por cada árbol?*

TC9.2.2: *¿Cuántos árboles hay por cada chopo?*

TC9.2.3: *¿Cuántos fresnos hay por cada árbol?*

Tipo de problema: Cálculos de razones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa, %.
Magnitudes involucradas: P_1: Número de chopos en el parque. Extensiva, discreta. P_2: Número de árboles que no son chopos en el parque. Extensiva, discreta. T: Total de árboles en el parque. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el número de chopos y el número total de árboles en el parque.
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \frac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(100{:}\, 22 + \square\,)$
Razones externas: No enteras.	

El último problema de la tarea para casa tiene una estructura muy similar al problema F9.1.3. A partir de la información suministrada por un porcentaje, se plantean diferentes razones externas en forma numérica para que los alumnos las interpreten.

TC9.3: *Si sabemos que el 35 % de los asistentes a un congreso son hombres. Escribe el significado de las siguientes razones:*

TC.9.3.1: 35/100

TC.9.3.2: 100/35

TC.9.3.3: 65/100

TC.9.3.4: 100/65

TC.9.3.5: 35/65

TC.9.3.6: 65/35

Tipo de problema: Análisis de situaciones. **Magnitudes involucradas:** P_1: Asistentes hombres. Extensiva, discreta. P_2: Asistentes mujeres. Extensiva, discreta. T: Total de asistentes al congreso. Extensiva, discreta.	**Relación de proporcionalidad:** Directa, %. **Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el número de hombres y el total de asistentes a un congreso.
Estructura funcional: $T = P_1 + P_2 \qquad P_1 = k \cdot T$ $P_2 = (1-k) \cdot T \quad P_1 = \frac{k}{1-k} P_2$	**Estructura numérica:** $(100{:}\,35 + \square)$
Razones externas: No enteras.	

VIII.1.3.3. Décima sesión: Cálculo directo e inverso con porcentajes

Tras la introducción del porcentaje en la sesión anterior y los problemas de Tipo II, en la sesión 10 se introducen los problemas de Tipo I y Tipo III de forma conjunta.

Así, la única ficha de trabajo F10.1 para esta sesión es, al mismo tiempo, la situación introductoria para este ciclo (aunque trabaja contenidos introducidos en el ciclo anterior) y un taller de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje.

Aunque no se han introducido problemas de nuevo enunciado en esta sesión, se han reorganizado problemas que en el ciclo II-1 se trabajan durante las sesiones 9 y 10, por lo que presentamos el diseño curricular de la sesión de forma completa.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VIII - 4.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Profundizar en el concepto de porcentaje como tanto por cien. • Consolidar la relación entre los problemas de porcentajes y los de proporcionalidad directa previamente estudiados. • Calcular razonadamente el total conocidos la parte y el porcentaje asociado a la parte.	• Porcentajes. • Cálculo de la parte conocido el total y el porcentaje asociado (Problemas de Tipo I). • Cálculo de la cantidad total conocidos la parte y el porcentaje asociado a ella (Problemas de Tipo III).

Tabla VIII - 4. Objetivos didácticos y contenidos de la décima sesión (Ciclo II-2).

Esquema de la sesión:

- Recogida y puesta en común de los resultados de la actividad TC9. (10 min)
- Realización en parejas de los problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje contenidos en la actividad F10.1. La actividad contiene esencialmente dos problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje de Tipo III y Tipo I, respectivamente. (25 min)
- Puesta en común de los resultados de la actividad F10.1 e institucionalización de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje. (15 min)

Diseño y análisis de las actividades:

Los problemas planteados para esta sesión de trabajo se corresponden con problemas que en el ciclo I-2 se encontraban en la tarea para casa 9 y también en la ficha de trabajo de la sesión 10. No se trata de problemas de nuevo diseño, simplemente se han reorganizado las actividades.

F10.1.1: *En el instituto hay 460 alumnos repartidos de la siguiente forma: en primer ciclo está el 45 % de los alumnos, en segundo ciclo el 30 %, y el resto está en bachiller.*

F10.1.1.1 *¿Qué porcentaje de alumnos hay en bachiller?*

F10.1.1.2 *¿Cuántos alumnos hay en bachiller?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo de la parte conocidos el porcentaje y el total. Tipo I. Problema TC9.1 del ciclo I-2.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.

F10.1.2: *En una botella de refresco se lee que el 18 % del contenido es zumo de limón. Sabiendo que en la caja hay 0,27 litros de zumo de limón, ¿cuántos litros de refresco tiene la botella?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo del total conocidos el porcentaje y la parte. Tipo III. Problemas TC9.2 del ciclo I-2.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.

F10.1.3: *Se sabe que en un determinado pueblo sólo el 3 % de la gente es pelirroja. Si en ese pueblo hay exactamente 621 pelirrojos:*

F10.1.3.1 *¿Cuántas personas viven en ese pueblo?*

F10.1.3.2 *¿Cuántas personas rubias viven allí?*

F10.1.3.3 *¿Cuántos pelirrojos hay por cada habitante?*

Tipo de problema: Valor perdido. Cálculo del total conocidos el porcentaje y la parte. Tipo III. Problema F10.1.1 del ciclo I-2.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.

F10.1.4: *En el parque hay un total de 616 árboles de muchos tipos. El 7 % de ellos son olmos y el 11 % fresnos.*

F10.1.4.1 *¿Qué hay más olmos o fresnos?¿Por qué?*

F10.1.4.2 *¿Cuántos fresnos hay?*

F10.1.4.3 *¿Cuántos chopos hay?*

Tipo de problema: Comparación cuantitativa / Valor perdido. Cálculo de la parte conocidos el porcentaje y el total. Tipo I. Problema F10.1.2 del ciclo I-2.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.

VIII.1.3.4. Undécima sesión: Aumentos y disminuciones porcentuales I

En la sesión undécima se comienza el trabajo con aumentos y disminuciones porcentuales. El diseño de los problemas durante esta sesión es similar al planteado en la novena sesión. Se intenta enfatizar la relación entre las cantidades finales e iniciales en las razones normalizadas a 100. Es decir, en vez de trabajar con la estructura aditiva en las cantidades absolutas o “reales”, trabajamos con la estructura aditiva en las razones normalizadas. Se intenta así priorizar el trabajo con las razones entre las cantidades finales e iniciales para intentar evitar argumentos aditivos erróneos en los problemas de Tipo III, como, por ejemplo, disminuir la cantidad final en un porcentaje igual al incremento para encontrar la cantidad inicial.

Los problemas con los que se introducen las situaciones de aumentos y disminuciones se contextualizan a partir de magnitudes de valor económico. Además de la cercanía con el origen histórico del concepto de porcentaje, el sistema monetario europeo (y el de la mayoría de los países) utiliza una subunidad de valor económico que se corresponde con la centésima parte de la unidad. Este hecho, permite interpretar como tanto por uno las razones normalizadas asociadas al porcentaje de manera intuitiva y operativamente sencilla. Así, por ejemplo, un descuento del 5 %, se traduce en un descuento de 5 unidades monetarias por cada 100 unidades monetarias del precio final, o un precio final de 95 unidades monetarias por cada 100 unidades monetarias del precio inicial. Si usamos el céntimo como unidad monetaria, la anterior se traduce fácilmente a que el precio final es de “$0{,}95$ € por cada € del precio inicial”.

De la anterior estructura para la sesión en el ciclo I-2 se han eliminado algunos problemas para introducir problemas similares a F9.1.3 y TC9.3, pero en contextos de aumentos y disminuciones porcentuales. Además, como en la sesión 10, se estructura todo el trabajo a partir de una única ficha que es a su vez la situación introductoria y un taller de problemas.

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VIII - 5.

Objetivos didácticos	**Contenidos**
• Interpretar aumentos y disminuciones porcentuales como cantidades de magnitudes relacionadas (inicial y final). • Calcular las razones asociadas a una situación de incremento o disminución porcentual que relacionan la magnitud inicial y la magnitud final (disminuida o aumentada). • Interpretar las razones asociadas a una situación de incremento o disminución porcentual.	• Aumentos y disminuciones porcentuales. • Razones asociadas a una situación de aumento o disminución porcentual.

Tabla VIII - 5. Objetivos didácticos y contenidos de la undécima sesión (Ciclo II-2).

Esquema de la sesión:

- Realización en parejas de los problemas contenidos en la actividad F11.1 (35 min)
- Puesta en común de los resultados de la actividad F11.1 e institucionalización de la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales. (15 min)
- Entrega de la actividad TC11 que refuerza los contenidos vistos en clase.

Diseño y análisis de las actividades:

El diseño de la sesión tiene una estructura simétrica de forma que los dos primeros problemas F11.1.1 y F11.1.2 tienen una estructura equivalente a la de los problemas F11.1.4 y F11.1.3, respectivamente, pero los dos primeros se contextualizan a través de una situación de aumento porcentual y en los dos últimos a través de una situación de disminución. Todos los problemas presentan una estructura numérica sencilla, ya que involucran los porcentajes $10\ \%, 5\ \%, 40\ \%$ y $20\ \%$, lo que puede favorecer la aparición de estrategias de razonamiento unitario o de puntos de anclaje o referencia.

En el problema F11.1.1, a partir de una situación en la que se informa de un aumento del valor económico en forma de porcentaje, se proponen diferentes interpretaciones de razones relacionadas con los valores económicos inicial, final y con el valor económico del aumento, y los alumnos deben proponer la cantidad numérica que correspondería a estas razones. La secuencia de preguntas guía a los alumnos hacia la interpretación de las razones que relacionan la cantidad inicial y la final, es decir, la interpretación de las razones:

$$k = \frac{100 + p}{100} \qquad k^{-1} = \frac{100}{100 + p}$$

F11.1.1: *Debido a la subida del precio de la gasolina, los billetes de autobús también van a subir de precio. En concreto la subida va a ser del 10 %.*

F11.1.1.1. *El billete subirá   € por cada 100 € que costaba antes.*

F11.1.1.2. *El billete subirá   € por cada euro que costaba antes.*

F11.1.1.3. *El billete costará después de la subida   € por cada 100 € que costaba antes.*

F11.1.1.4. *El billete costará después de la subida   € por cada euro que costaba antes.*

F11.1.1.5. *El billete costaba antes   € por cada euro que costará después de la subida.*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III. Problema F11.1.1 del ciclo I-2.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.

El problema F11.1.2, nuevo en este ciclo, persigue reforzar la interpretación de las razones externas en una situación de aumento entre la cantidad final y la inicial y tiene una estructura similar a los problemas F9.1.3 y TC9.3, también introducidos de forma novedosa en este ciclo.

F11.1.2: *Un comerciante decide subir el precio de todos sus productos un 5 %.*

Escribe el significado de las siguientes razones:

F11.1.2.1: 105/100=

F11.1.2.2: 100/105=

Tipo de problema: Análisis de situaciones.

Relación de proporcionalidad: Directa, %.

Magnitudes involucradas:

CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta.
V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta.
CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.

Constante de proporcionalidad:

k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.

Estructura funcional:

$$k = \frac{100 + p}{100}$$

$$CF = CI + V \qquad CF = k \cdot CI$$

$$V = (k - 1) \cdot CI$$

Estructura numérica:

$$(\square : 100 + 5)$$

Razones externas: $100/p = 20$. Entera.

En los problemas F11.1.3 y F11.1.4 se sigue una estructura análoga a la de los problemas F11.1.2 y F11.1.1 respectivamente, pero contextualizando a través de situaciones de disminuciones porcentuales de valor económico. El principal objetivo de estos problemas es que los alumnos calculen y den significado a las razones externas:

$$k = \frac{100 - p}{100} \qquad k^{-1} = \frac{100}{100 - p}$$

En F11.1.3 se presenta el valor numérico de las razones externas anteriores y se solicita a los equipos que las interpreten.

F11.1.3: *El precio de la vivienda ha descendido un 40% en los últimos siete años.*
Escribe el significado de las siguientes razones:
F11.1.3.1: 60/100=
F11.1.3.2: 100/60=

Tipo de problema: Análisis de situaciones.	**Relación de proporcionalidad:** Directa, %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k = \frac{100 + p}{100}$ $CF = CI + V \qquad CF = k \cdot CI$ $V = (k - 1) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square : 100 + 5)$
Razones externas: $100/p = 20$. Entera.	

En F11.1.4 se presenta una interpretación de las razones y los alumnos deben dar el valor numérico correspondiente.

F11.1.4: *En las rebajas de una tienda nos hacen un 20 % de descuento.*
F11.1.4.1. *Cada artículo bajará € por cada 100 € que costaba antes.*
F11.1.4.2. *Cada artículo bajará € por cada euro que costaba antes.*
F11.1.4.3. *Cada artículo costará después de la bajada € por cada 100 € que costaba antes.*
F11.1.4.4. *Cada artículo costará después de la bajada € por cada euro que costaba antes.*
F11.1.4.5. *Cada artículo costaba antes € por cada euro que costará después de la bajada.*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III. Problema F11.1.2 del ciclo I-2.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.

Tras la institucionalización de las situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales se proponen a los alumnos dos contextos de variaciones porcentuales de valor económico, uno de aumento (F11.2.1) y otro de disminución (F11.2.2). En ambos se proporciona como dato inicial el porcentaje de variación y posteriormente se estructuran una serie de preguntas en las que, en primer lugar, se solicitan algunas razones externas (estas preguntas no se presentaron en el ciclo I-2). Por último, se presentan dos preguntas. En una se pide calcular el precio final conocido el precio inicial (Tipo I), y en la otra se pide calcular el precio inicial conocido el precio final (Tipo III).

TC11.1: *Un comerciante decide subir el precio de todos sus productos un 5 %.*

TC11.1.1: Calcula cuántos euros vale el producto al final, por cada euro que costaba al principio

TC11.1.2: Calcula cuántos euros valía el producto al principio por cada euro que cuesta al final

TC11.1.3 ¿Cuál será el nuevo precio de algo que antes costaba 30 €?

TC11.1.4 Si con la subida un artículo cuesta 21 €, ¿cuánto costaba anteriormente?

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k = \frac{100+p}{100}$ $CF = CI + V \qquad CF = k \cdot CI$ $V = (k-1) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square : 100+5) \leftrightarrow (x_1 : 1+\square), (1 : x_2+\square), (x_3 : 30+\square), (21 : x_4+\square)$.
Razones externas: $100/p = 20$. Entera.	**Razones internas:** No enteras.

TC11.2: El precio de la vivienda ha descendido un 40 % en los últimos siete años.

TC11.2.1: Calcula cuántos euros vale actualmente una vivienda por cada euro que costaba hace 7 años.

TC11.2.2: Calcula cuántos euros valía hace 7 años una vivienda por cada euro que vale actualmente.

TC11.2.3 ¿Cuál debería ser el precio actual de un piso que antes costaba 135.000 €?

TC11.2.4 ¿Cuál debería ser el precio de hace 7 años de una vivienda que actualmente cuesta 135.000 €?

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.

Estructura funcional: $$k = \frac{100 - p}{100}$$ $$CF = CI - V \quad CF = k \cdot CI$$ $$V = (1 - k) \cdot CI$$	**Estructura numérica:** $$(\square: 100 - 40) \leftrightarrow (x_1: 1 - \square), (1: x_2 - \square)$$ $$(x_3: 135000 - \square), (135000: x_4 - \square)$$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** $r_{CI}^{-1} = 1350$, entera.

VIII.1.3.5. Duodécima sesión: Aumentos y disminuciones porcentuales II

Durante la duodécima sesión se refuerzan y completan los contenidos relacionados con el sexto foco prioritario de contenido. En esta sesión, aparece por primera vez un problema en el que los alumnos tienen que calcular el porcentaje de variación que ha sufrido una cierta cantidad. Además, se institucionalizan los problemas de Tipo I y Tipo III que aparecían de forma estructurada durante la tarea para casa de la sesión anterior. La sesión está diseñada como un taller de problemas con una ficha de trabajo en el aula (además de otra ficha de trabajo individual fuera del aula).

Los objetivos didácticos y contenidos de esta sesión se pueden observar en la Tabla VIII - 6.

Objetivos didácticos	Contenidos
• Reforzar los contenidos sobre aumentos y disminuciones porcentuales. • Resolver problemas de Tipo II en contextos de aumentos y diminuciones.	• Problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje

Tabla VIII - 6. Objetivos didácticos y contenidos de la duodécima sesión (Ciclo II-2).

Esquema de la sesión:

- Puesta en común de los resultados de la actividad TC11. Institucionalización de las técnicas para resolver problemas de Tipo I y Tipo III en situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales. (15 min)
- Realización de los dos problemas contenidos en la ficha F12.1. (25 min)
- Puesta en común de los resultados de la actividad F12.1. (10 min)

Diseño y análisis de las actividades:

En los dos primeros problemas de la ficha, incorporados por primera vez en la propuesta, a partir de una información sobre una variación porcentual común se realizan dos preguntas a los alumnos, una sobre la cantidad final conocida la inicial y otra sobre la cantidad inicial conocida la final, es decir, un problema de Tipo I y otro de Tipo III.

En F12.1 de contexto económico se informa del IVA que se debe aplicar a ciertos productos.

F12.1.1: Una tienda tiene etiquetados sus precios sin IVA. Después de una inspección le obligan a etiquetar los precios subiendo el IVA correspondiente que es del 21 %.

F12.1.1.1: Si un producto sin IVA costaba 30 € ¿cuánto costará con IVA?

F12.1.1.2: Si tras subir el IVA un producto cuesta 242 € ¿cuánto costaba al principio sin IVA?

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k = \frac{100+p}{100}$ $CF = CI + V \qquad CF = k \cdot CI$ $V = (k-1) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square: 100 + 21) \leftrightarrow\ (x_1: 30 + \square), (242: x_2 + \square)$.
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

En F12.2, también de contexto económico, se informa del porcentaje de descuento que se está realizando en todos los productos de una cadena de tiendas de ropa.

F12.1.2: Para las rebajas, una cadena de tiendas de ropa, decide rebajar todos sus productos un 30 %.

F12.1.2.1: Si antes de las rebajas una camiseta costaba 18,50 €, ¿cuánto costará después de la rebaja?

F12.1.2.2: Si he comprado unos pantalones por 35 €, ¿cuánto costaban los pantalones antes de la rebaja.

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo I y Tipo III.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.
Magnitudes involucradas: CI: Valor económico inicial. Extensiva, discreta. V: Valor económico de la variación. Extensiva, discreta. CF: Valor económico final. Extensiva, discreta.	**Constante de proporcionalidad:** k, comparación multiplicativa entre el precio final y el precio inicial.
Estructura funcional: $k = \frac{100-p}{100}$ $CF = CI - V \quad CF = k \cdot CI$ $V = (1-k) \cdot CI$	**Estructura numérica:** $(\square: 100 - 30) \leftrightarrow\ (x_1: 18{,}5 - \square), (35: x_2 - \square)$
Razones externas: No enteras.	**Razones internas:** No enteras.

El problema F12.1.3 se corresponde con un problema de Tipo II en una situación de aumento, pero que no está contextualizado en una situación monetaria. La sencillez de la estructura numérica puede hacer aparecer estrategias basadas en puntos de referencia o de análisis unitario.

F12.1.3: *El ayuntamiento ha decido incrementar el número de farolas en las calles. El año pasado había 800 farolas en todo Calatayud y este año hay 1000 farolas. ¿En qué porcentaje se ha incrementado el número de farolas?*

Tipo de problema: Valor perdido. Aumentos y disminuciones porcentuales. Tipo II. Problema TC12.1 del ciclo I-2.	**Relación de proporcionalidad:** Directa / %.

VIII.2. Fase de acción

Tras analizar los cambios realizados durante la planificación de este ciclo de investigación-acción, concretamos los detalles de la muestra de estudiantes que participaron en este ciclo, el calendario de actuación y, para dar cuenta de la acción, desarrollamos la información obtenida a partir del diario de clase del profesor-investigador.

VIII.2.1. Participantes

La fase de acción del ciclo II-2 se realizó durante el curso 2016-2017 en el IES Leonardo de Chabacier de Calatayud (Zaragoza). En ese curso escolar, el centro contaba con tres vías en 2º de ESO con un total de 58 alumnos repartidos en tres grupos ordinarios (A, B y C). Además, alrededor de otros 20 alumnos de 2º de ESO formaban parte del Programa de Aprendizaje Básico (PAB) y de la Unidad de Intervención Educativa Específica (UIEE) y recibían las clases de matemáticas fuera de los grupos ordinarios. A diferencia de lo que ocurría en el ciclo I-2, el número de vías no coincide con las de 1º de ESO en el curso anterior (en el que se desarrolló el ciclo III-1), tampoco los grupos en los que se dividían los alumnos coincidían exactamente con los grupos de 1º de ESO sobre los que se experimentó. Dado que tanto el ciclo II-2 (que relatamos en este capítulo) como el ciclo III-2 (del que daremos cuenta en el siguiente capítulo) se realizaban durante el mismo curso, se decidió elegir como grupos experimentales para estos ciclos los grupos que contenían más alumnos de los que hubieran participado en el ciclo III-1. En concreto, los grupos A y B. Por sorteo se decidió que el grupo A fuera el grupo experimental del ciclo II-2 y el grupo B el del ciclo III-2 (18 alumnos). Así, el grupo de control para ambos ciclos fue el grupo C (20 alumnos). El grupo experimental, grupo A, (Tabla VIII - 7) estaba formado por 20 alumnos sin ningún repetidor, 19 ellos provenían de grupos experimentales del ciclo III-1 (5 del B, 11 del C y 3 del D) y solo un alumno provenía del grupo de control.

	Grupo único - A
Alumnos	20
Equipos	10

Tabla VIII - 7. Número de participantes y de equipos de trabajo (Ciclo II-2).

Por tanto, en este ciclo de investigación-acción, disponemos de una muestra de 20 alumnos, que se agruparon en 10 equipos de clase. Así, para las tareas de aula dispondremos de 10 producciones diferentes, mientras que en las tareas de casa y en la prueba escrita dispondremos de 20 producciones.

Como en los anteriores capítulos, para hacer referencia a los equipos usaremos la codificación, Xi, donde X representa la letra del grupo e i el ordinal de este según la disposición espacial que había en las aulas. Los alumnos se codifican añadiendo al código de su equipo el ordinal que le correspondía en él según el orden de las mesas.

VIII.2.2. Calendario de actuación

En la Tabla VIII - 8 aparece el calendario de actuación y el horario en el que se llevaron a cabo las sesiones. La planificación tuvo en cuenta comenzar la experimentación con el comienzo de la primera sesión de la semana, de forma que las sesiones 4, 8 y 12 se corresponden con la última sesión de la primera, segunda y tercera semanas respectivamente. Como dijimos en el Capítulo III, la propuesta se ubica al final del bloque de números y antes de trabajar el álgebra.

	Grupo único			Grupo único	
Sesión 1	30-01-17	09:25 – 10:15	**Sesión 8**	10-02-17	11:30 – 12:20
Sesión 2	01-02-17	08:30 – 09:20	**Sesión 9**	13-02-17	09:25 – 10:15
Sesión 3	02-02-17	09:25 – 10:15	**Sesión 10**	15-02-17	08:30 – 09:20
Sesión 4	03-02-17	11:30 – 12:20	**Sesión 11**	16-02-17	09:25 – 10:15
Sesión 5	06-02-17	09:25 – 10:15	**Sesión 12**	17-02-17	11:30 – 12:20
Sesión 6	08-02-17	08:30 – 09:20	**Sesión 13**	20-02-17	09:25 – 10:15
Sesión 7	09-02-17	09:25 – 10:15	**Prueba**	22-02-17	08:30 – 09:20

Tabla VIII - 8. Calendario de actuación (Ciclo II-2).

VIII.2.3. Desarrollo de las sesiones

En este apartado resumimos el desarrollo de las sesiones a partir de la información recogida en el diario de clases. Comentaremos las incidencias sobre la asistencia y los aspectos actitudinales de los alumnos. Así mismo, resumiremos las apreciaciones sobre la comprensión y el funcionamiento de las sesiones.

VIII.2.3.1. Primera sesión

No asiste el alumno A6.1.

Se ejecuta el plan según lo previsto.

Los estudiantes no están muy concentrados en la primera parte de trabajo en grupo. El comportamiento mejora muchísimo en la fase de trabajo y vuelve a ser algo peor en la puesta en común. Sin embargo, la valoración general del trabajo y actitud de los alumnos es buena.

Como nota general, el significado de las razones parece recordarse con facilidad. Sin embargo, se detectan algunos problemas para identificar como no proporcional la situación inversa y para establecer condiciones de regularidad.

Los alumnos parecen recordar bastante bien los conceptos generales de la propuesta en 1º de la ESO y el profesor-investigador considera adecuada la estructura de esta sesión.

Aunque no parece necesario realizar ningún cambio a partir de esta sesión, quizá se podría incidir algo más durante el siguiente ciclo en la idea de Condición de Regularidad.

VIII.2.3.2. Segunda sesión

No asiste el alumno A9.1.

La puesta en común final es algo más corta de lo deseable. El tiempo es algo justo en general en toda la sesión, aunque se termina ejecutando según el plan previsto.

Se constata un buen comportamiento y ambiente de trabajo durante toda la sesión.

Los alumnos presentan pocos problemas en los primeros ejercicios y parecen entender bien los conceptos relacionados con la proporcionalidad inversa. Causa problemas la situación F2.2.3. Ni se identifica como de proporcionalidad inversa ni se sabe interpretar la constante de proporcionalidad asociada en la institucionalización.

A pesar de que el tiempo ha sido algo escaso, la sesión se valora como adecuada.

Se pospone institucionalizar de manera “más formal” el concepto de magnitudes inversamente proporcionales, el de constante de proporcionalidad y de condición de regularidad, para introducirlo poco a poco durante las siguientes sesiones con los ejemplos concretos.

VIII.2.3.3. Tercera sesión

Asisten todos los alumnos. El comportamiento y el nivel de trabajo son adecuados a lo largo de toda la sesión.

Se ejecuta la sesión según lo previsto, aunque sería deseable haber tenido más tiempo para la puesta en común al final de la sesión.

Algunos alumnos muestran dificultades, especialmente en el problema de valor perdido al final de la ficha, F3.1.4. Los problemas de comparación parecen presentar pocas dificultades, y las que aparecen están relacionadas con el significado de las razones que hay que utilizar en el primer problema, F3.1.1. El problema F3.1.3, que presenta una relación lineal decreciente, genera problemas en varios equipos.

El profesor-investigador encuentra significativa la diferencia de tiempo que los diferentes equipos necesitan para terminar los problemas.

Aunque la carga de trabajo es algo grande para algunos equipos, lo que ha provocado que la puesta en común final no tuviera el tiempo que sería deseable, la sesión se valora como adecuada.

En siguientes puestas en práctica podría ser deseable dar por finalizado el tiempo de trabajo de los equipos, aunque algunos de estos no hubieran terminado, para dar mayor importancia a la puesta en común.

Se valora necesario para las siguientes sesiones (o implementaciones) planteadas como talleres de problemas, hacer un mayor énfasis en los problemas de valor perdido ya que los problemas de comparación parecen causar menos dificultades.

VIII.2.3.4. Cuarta sesión

Asisten todos los alumnos.

El comportamiento y el nivel de trabajo son considerablemente peores que en las anteriores sesiones.

El plan se ejecuta según lo previsto y, de hecho, sobra algo de tiempo al final de la sesión.

La interpretación del resultado del producto de dos magnitudes como una magnitud es la cuestión que más problemas ha planteado a lo largo de la sesión. Además, los problemas de comparación cualitativa causan un cierto desconcierto.

Aunque la sesión es adecuada, se reflexiona sobre la necesidad de aumentar el tiempo dedicado a las puestas en común en donde se discute cómo interpretar los productos de magnitudes extensivas.

VIII.2.3.5. Quinta sesión

Asisten todos los alumnos. El comportamiento y el nivel de trabajo son buenos a lo largo de toda la sesión.

Falta tiempo para poder terminar todas las actividades planificadas en esta sesión. En concreto, no se realiza la puesta en común al finalizar la ficha F5.1. La falta de tiempo se debe principalmente al excesivo tiempo dedicado a la puesta en común de la Tarea para Casa.

Sobre la comprensión de los alumnos, el profesor-investigador sigue detectando problemas en la interpretación de los productos de magnitudes.

Se pospone la puesta en común de la ficha F5.1 para el principio de la clase siguiente.

VIII.2.3.6. Sexta sesión

Asisten todos los alumnos. El comportamiento y el nivel de trabajo son buenos a lo largo de toda la sesión.

La sesión se ejecuta según el plan modificado tras la sesión anterior. Sobre la marcha se decide realizar una pequeña intervención durante la realización de la situación introductoria para la proporcionalidad compuesta, ya que los alumnos parecen estar algo confundidos con el enunciado.

Pese a la institucionalización del método de amalgamación, pocas parejas parecen decantarse por este método para realizar los problemas de la ficha F6.2. Se siguen detectando problemas para interpretar el producto de magnitudes extensivas y las relaciones inversas.

VIII.2.3.7. Séptima sesión

Asisten todos los alumnos. El comportamiento y el nivel de trabajo son adecuados a lo largo de toda la sesión.

Aunque algunos equipos no llegan a completar todos los problemas, el plan se ejecuta según la planificación inicial.

El profesor-investigador percibe una disminución sustancial de las dudas conceptuales relacionadas con las relaciones inversas y los productos de magnitudes extensivas. Sin embargo, también se detectan alumnos que tienen problemas para dotar de significado las operaciones básicas de forma recurrente (tanto qué operación hacer como dotar de significado al resultado). Como sucedió con las situaciones simples, los problemas de comparación cualitativa en las situaciones compuestas causan dificultades, al menos inicialmente.

La sesión se valora como muy adecuada.

Se reflexiona sobre la posibilidad de que los problemas de comparación cualitativa aparezcan de forma más agrupada en la propuesta para favorecer una puesta en común centrada en este tipo de situaciones.

VIII.2.3.8. Octava sesión

Asisten todos los alumnos. El comportamiento y el nivel de trabajo son adecuados a lo largo de toda la sesión, pero algo peor que los observados en otras sesiones de la propuesta. Se reflexiona sobre la influencia del horario en el que se desarrollan estas sesiones de los viernes como causante de este leve empeoramiento a nivel actitudinal.

El plan se ejecuta sin inconvenientes y de forma ajustada al tiempo previsto.

En el reparto directo prácticamente no surgen dudas con el enunciado. En el reparto inverso varios grupos han solicitado aclaraciones sobre el enunciado. En concreto dudaban sobre qué solicitaba la pregunta exactamente. La puesta en común final ha sido muy provechosa debido, en parte, a la aparición de los inversos de los pesos en el reparto inverso en la producción de uno de los equipos. Sin embargo, los equipos que habían repartido siguiendo un modelo equitativo han tenido problemas para comprender por qué era mejor repartir el tiempo de otra forma. Tras el debate con los compañeros que habían repartido siguiendo un modelo proporcional, aquellos han quedado presumiblemente convencidos.

El profesor-investigador valora como muy adecuada la sesión, especialmente en lo que concierne a los repartos inversamente proporcionales que no se introdujeron de forma satisfactoria en el ciclo anterior.

Se reflexiona sobre la posibilidad de alargar un poco el tiempo de puesta en común, aunque el invertido en la sesión ha sido muy productivo. Quizá convendría aclarar un poco mejor la pregunta en los repartos inversamente proporcionales.

VIII.2.3.9. Novena sesión

Asisten todos los alumnos. El comportamiento y el nivel de trabajo son adecuados a lo largo de toda la sesión.

Da tiempo de terminar la sesión según el plan previsto, aunque se realiza alguna intervención intermedia durante la situación introductoria ya que los alumnos estaban algo bloqueados.

Se evidencian dificultades para calcular las razones concretas que pide cada problema de la ficha F9.1, por lo que el profesor-investigador ha tenido que intervenir en varias ocasiones durante su realización para impedir que los equipos se atascasen.

A pesar de las dificultades demostradas por los alumnos, se hace una valoración positiva de la sesión para introducir el concepto de porcentaje y relacionarlo con el de razón.

Una vez que los alumnos han comenzado a trabajar, estos han terminado la ficha de trabajo de forma muy rápida, por lo que quizá sea conveniente esperar en siguientes implementaciones más tiempo antes de intervenir o dar indicaciones.

VIII.2.3.10. Décima sesión

Asisten todos los alumnos. El comportamiento y el nivel de trabajo son adecuados a lo largo de toda la sesión.

Al igual que en la sesión anterior, el profesor-investigador decide sobre la marcha hacer alguna pequeña intervención para aclarar las dudas que se perciben en la mayoría de los equipos. En esta ocasión la carga de trabajo de la ficha es algo mayor y se dejan sin poner en común las soluciones a los dos últimos problemas.

A pesar de las dificultades, se sigue valorando de forma positiva la sesión. Los alumnos parecen estar intentando superar algunos obstáculos que les supone esta forma de interpretar y trabajar con el porcentaje.

VIII.2.3.11. Undécima sesión

Asisten todos los alumnos. El comportamiento y el nivel de trabajo son adecuados a lo largo de toda la sesión.

Salvo alguna intervención inicial, el plan se ejecuta según lo previsto y el tiempo para desarrollar la sesión es suficiente.

Algunas parejas no saben cómo comenzar la ficha, por lo que hay que hacer una intervención inicial al estilo de las que se realizaron en las sesiones anteriores relacionadas con el porcentaje. Tras ella, parecen disiparse las dudas y los equipos acaban la ficha con aparente éxito en el tiempo previsto.

La sesión se valora como positiva.

VIII.2.3.12. Duodécima sesión

Asisten todos los alumnos. El comportamiento y el nivel de trabajo son adecuados a lo largo de toda la sesión.

La sesión se ejecuta según el plan inicial.

Los problemas de comprensión parecen haber disminuido significativamente.

La sesión se valora como positiva.

VIII.2.3.13. Decimotercera sesión

Asisten todos los alumnos.

El plan se ejecuta según lo previsto.

El comportamiento y el trabajo son adecuados.

Se detecta una mejora en el desempeño de los alumnos en casi todos los focos de investigación durante esta sesión de repaso.

La sesión se valora de forma positiva.

VIII.2.3.14. Prueba escrita

Asisten todos los alumnos.

La prueba escrita se desarrolla sin incidencias.

El tiempo para completar la prueba parece adecuado y la mayoría de los estudiantes la terminan antes del final de la sesión.

No se evidencian problemas de comprensión de los enunciados de los problemas.

VIII.3. Fase de observación

En esta sección presentamos los resultados de la observación para el segundo ciclo en 2º de ESO a partir de la información recogida a través de las producciones escaneadas de los estudiantes de todos los problemas realizados durante la propuesta y en la prueba escrita final, las producciones de los estudiantes del grupo de control en la prueba escrita, las entrevistas semiestructuradas y los informes realizados por el observador externo.

VIII.3.1. Análisis de las producciones escritas

Como se informó en los capítulos previos, las producciones de los equipos y alumnos se recogen de forma previa a la puesta en común e institucionalización, por lo que no muestran las correcciones que estos pudieran hacer durante la puesta en común.

El análisis sigue la estructura utilizada en los capítulos anteriores, analizando en un primer nivel los resultados de las situaciones iniciales para, a continuación, analizar las producciones posteriores. Dentro de cada foco de interés, el análisis se realiza a dos niveles de concreción. Un primer nivel general y común para todos los problemas que da cuenta de si la producción no se ha entregado (N), se ha entregado, pero está en blanco (B), o de si se da una respuesta incorrecta (I) o correcta (C) al problema. En el segundo nivel se analizan diferentes estrategias de resolución, errores cometidos, sistemas de representación empleados y otras peculiaridades de las respuestas. Dentro de cada nivel, el análisis cuantitativo se acompaña de un análisis cualitativo de las respuestas. La descripción de las categorías de análisis utilizadas en cada nivel puede consultarse tanto en el Capítulo III (ver sección III.3.8.2. Categorías de análisis de la comprensión del contenido) como en la sección de análisis análoga a la presente en el Capítulo VI.

Como ya hicimos en el Capítulo VII, no presentamos de nuevo la redacción de las situaciones introductorias que no han sufrido cambios significativos, para consultar su redacción (así como la del resto de problemas) remitimos al lector al Capítulo VI.

VIII.3.1.1. Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad

Analizamos las producciones de los alumnos en las tareas específicas diseñadas para el Foco 1. Las sesiones 1 y 2 se dedican íntegramente a estos contenidos. Además, se incluyen problemas específicos en la ficha de repaso F13.1 y en la prueba escrita (PE.1, PE.2.2 y PE.2.3).

Distinguimos tres fases diferentes en la instrucción en este foco. En primer lugar, los problemas contenidos en la ficha F1.1 y TC1 se abordan sin haber recibido instrucción previa sobre proporcionalidad inversa. Estos problemas sirven como conexión con los conocimientos previos de los alumnos sobre caracterización de relaciones directamente proporcionales o no directamente proporcionales. A continuación, la ficha F2.1 contiene la situación introductoria a las situaciones de proporcionalidad inversa. Tras su resolución, se institucionaliza el concepto de magnitudes inversamente proporcionales. A partir de este momento, los alumnos deben distinguir entre relaciones directamente proporcionales, inversamente proporcionales o sin relación de proporcionalidad.

Análisis de la situación introductoria.

En la Tabla VIII - 9 se presentan los resultados para las categorías generales en la situación introductoria. Como vemos, los porcentajes de respuestas correctas son muy altos, al igual que ocurría en el ciclo I-2.

		N	B	I	C
F2.1.1	N.º de respuestas	0	0	2	8
	Porcentaje	-	-	20 %	80 %
F2.1.2	N.º de respuestas	0	1	0	9
	Porcentaje	-	10 %	-	90 %

Tabla VIII - 9. Resultados generales en la situación introductoria de análisis de situaciones de proporcionalidad inversa y cálculo de la constante de proporcionalidad (Ciclo II-2).

Como única novedad, podemos resaltar la aparición de dos respuestas clasificadas como incorrectas en F2.1.1 (en el ciclo anterior de 2º de la ESO no hubo respuestas incorrectas). Una de ellas, la del equipo A6, directamente supone una relación directa y calcula las razones entre las cantidades de magnitud expuestas (a pesar de que el propio enunciado de la situación explicita que no puede suponerse una relación directa y que no pueden calcularse las razones). La otra producción (ver Imagen VIII - 1), realizada por el equipo A10, se ha considerado incorrecta porque, aunque calcula la constante de proporcionalidad, no explicita su significado y no concreta algunos de los aspectos que se solicitaban. Además, etiqueta la relación como de proporcionalidad directa. Sin embargo, parece que la relación directa que se considera es la que puede obtenerse entre la magnitud relativa a la constante de proporcionalidad y otra de las magnitudes involucradas, por lo que resulta una producción muy interesante para el debate posterior a la resolución de los problemas para introducir la caracterización por doble relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes indicadas en el enunciado y la magnitud producto.

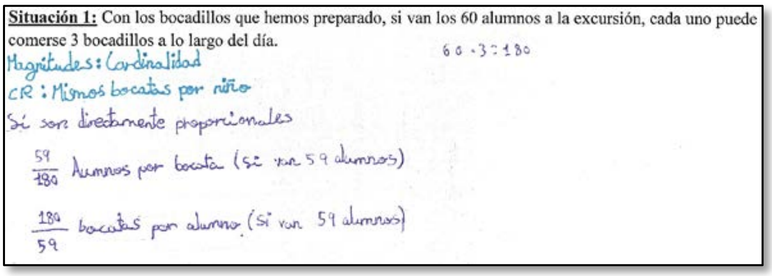


Imagen VIII - 1. Producción del equipo A10 para el problema F2.1.1 de la situación introductoria (Ciclo II-2).

Como en el ciclo I-2 (Capítulo VI), la mayor parte de los equipos interpreta la constante de proporcionalidad como una magnitud diferente a las proporcionadas por el enunciado, la mayoría como "número total de bocadillos". Al igual que en el ciclo anterior, la situación introductoria permitió introducir el concepto de relación inversamente proporcional a partir del debate generado en la puesta en común de esta actividad, no como contraposición a la relación de proporcionalidad directa, sino como un caso especial de relación entre magnitudes diferente a la de la proporcionalidad directa. En este tipo de relación puede encontrarse una tercera magnitud, producto de las dos anteriores, de forma que las magnitudes iniciales aparecen como razones de esta nueva magnitud y otra de las magnitudes iniciales.

Análisis de las producciones tras la institucionalización.

Como en los capítulos anteriores el análisis de este foco se hace a partir de cuatro categorías diferentes de problemas según se pida determinar y justificar la existencia de una relación de proporcionalidad, calcular e interpretar las constantes de proporcionalidad asociadas, conectar el valor numérico de una razón con su significado (o a la inversa), o detectar "falsos" problemas de proporcionalidad.

Problemas en los que se solicita determinar si existe relación de proporcionalidad.

En la Tabla VIII - 10 y en la Tabla VIII - 11 se presentan los resultados para los problemas en los que solicita determinar la existencia de una relación de proporcionalidad. En la primera de ellas se observan las frecuencias de éxito (y de respuestas incorrectas, en blanco o no entregadas) para los problemas en los que se pedía determinar si existía o no una relación de proporcionalidad (distinguiendo entre directa e inversa en su caso), en la segunda tabla se muestran los resultados que resumen el tipo de argumento empleado por el alumnado en sus respuestas.

Como en el Capítulo VI, en la Tabla VIII - 10 las filas en gris oscuro representan las situaciones que no eran proporcionales, en gris claro las situaciones de proporcionalidad simple inversa y en blanco hemos dejado las situaciones de proporcionalidad simple directa.

	N	B	I	C
F1.1.1	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F1.1.2	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F1.1.3	0 (0)	0 (0)	70 (7)	30 (3)
F1.1.4	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F1.1.5	0 (0)	20 (2)	0 (0)	80 (8)
TC1.1	10 (2)	0 (0)	0 (0)	90 (18)
TC1.2	10 (2)	5 (1)	10 (2)	75 (15)
TC1.3	10 (2)	15 (3)	55 (11)	20 (4)
TC1.4	10 (2)	15 (3)	5 (1)	70 (14)
F2.2.1	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F2.2.2	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F2.2.3	0 (0)	10 (1)	90 (9)	0 (0)
TC2.1.1	10 (2)	25 (5)	20 (4)	45 (9)

	N	B	I	C
TC2.1.2	10 (2)	5 (1)	15 (3)	70 (14)
TC2.1.3	10 (2)	0 (0)	0 (0)	90 (18)
TC2.2.1	10 (2)	20 (4)	20 (4)	50 (10)
TC2.2.2	10 (2)	0 (0)	25 (5)	65 (13)
TC2.2.3	10 (2)	0 (0)	5 (1)	85 (17)
F13.1.1.1	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F13.1.1.2	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (2)
F13.1.1.3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
PE.1.1	0 (0)	0 (0)	45 (9)	55 (11)
PE.1.2	0 (0)	0 (0)	25 (5)	75 (15)
PE.1.3	0 (0)	0 (0)	25 (5)	75 (15)
PE.1.4	0 (0)	0 (0)	15 (3)	85 (17)

Tabla VIII - 10. Resultados generales en los problemas de detección de relaciones de proporcionalidad (Ciclo II-2).

En general, se observan unos muy buenos resultados, mejores que los presentados en la Tabla VI -19, correspondientes al ciclo I-2. La tasa de respuestas correctas en las situaciones de proporcionalidad simple directa es muy alta, solo baja del 80 % en algunos ítems de las tareas para casa, en los que, como siempre el número de producciones no entregadas o en blanco es algo superior.

Para las situaciones de proporcionalidad simple inversa, vemos que en las seis primeras los porcentajes de acierto sufren variaciones bruscas. Sin embargo, la tasa de éxito es alta en los últimos ítems de la propuesta que incluyen la ficha de repaso y la prueba escrita. En las primeras producciones, correspondientes a las situaciones previas a la institucionalización o inmediatamente posteriores, la tasa de éxito es mayor en aquellos problemas, como F2.2.1, en los que una de las magnitudes es intensiva y la magnitud producto se corresponde con la magnitud numerador. Por otro lado, los porcentajes de éxito son menores en los problemas, como F2.2.3, en los que la constante de proporcionalidad se corresponde con el producto de dos magnitudes extensivas. Con el paso de las sesiones los alumnos resuelven problemas de valor perdido y de comparación en situaciones de proporcionalidad inversa diversas, así como problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta en donde tienen que dar significado al producto de dos magnitudes, por lo que parece que esta práctica favorece a la detección y caracterización de estas situaciones inversas al final de la propuesta.

En las situaciones no proporcionales, observamos también unas tasas de éxito altas, incluso mayores que las observadas en el ciclo I-2. La única excepción es el problema TC1.3 para el que no encontramos una explicación a la baja tasa de éxito.

En la Tabla VIII - 11 observamos que (al igual que en el ciclo I-2) las únicas argumentaciones que han aparecido en la caracterización de relaciones de proporcionalidad son D0 (sin argumentación), D2 (razones internas o constante de proporcionalidad), D7 (cualitativa por aumentos y disminuciones), D8 (se argumenta sobre la existencia o no de una relación de dependencia entre las magnitudes), D9 (se argumenta sobre el número de magnitudes que se presentan). Recordemos que las estrategias no son correctas o incorrectas por sí solas, la corrección en el tipo de argumento depende de su uso y desarrollo, y de la situación en la que se emplee. Por ejemplo, una estrategia de tipo D7, cualitativa por aumentos y disminuciones, es incorrecta si se utiliza como única argumentación para decidir que una relación es proporcional, pero puede ser correcta para argumentar que no lo es.

	D0	D2	D7	D8	D9
F1.1.1	0 (0)	100 (10)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F1.1.2	30 (3)	40 (4)	0 (0)	0 (0)	30 (3)
F1.1.3	20 (2)	80 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F1.1.4	0 (0)	100 (10)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F1.1.5	10 (1)	70 (7)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC1.1	0 (0)	90 (18)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC1.2	25 (5)	60 (12)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC1.3	5 (1)	60 (12)	0 (0)	5 (1)	5 (1)
TC1.4	0 (0)	75 (15)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC2.1.1	10 (2)	50 (10)	5 (1)	0 (0)	0 (0)
TC2.1.2	0 (0)	85 (17)	0 (0)	0 (0)	0 (0)

	D0	D2	D7	D8	D9
TC2.1.3	5 (1)	40 (8)	0 (0)	45 (9)	0 (0)
TC2.2.1	10 (2)	50 (10)	5 (1)	5 (1)	0 (0)
TC2.2.2	5 (1)	85 (17)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC2.2.3	10 (2)	35 (7)	5 (1)	35 (7)	0 (0)
F13.1.1.1	20 (2)	40 (4)	0 (0)	40 (4)	0 (0)
F13.1.1.2	50 (5)	50 (5)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F13.1.1.3	40 (4)	50 (5)	0 (0)	10 (1)	0 (0)
PE.1.1	20 (4)	55 (11)	10 (2)	0 (0)	15 (3)
PE.1.2	10 (2)	50 (10)	5 (1)	30 (6)	5 (1)
PE.1.3	15 (3)	80 (16)	5 (1)	0 (0)	0 (0)
PE.1.4	10 (2)	85 (17)	5 (1)	0 (0)	0 (0)

Tabla VIII - 11. Argumentos empleados por los alumnos en el análisis de relaciones de proporcionalidad (Ciclo II-2).

Se observa un leve descenso de las respuestas no argumentadas pero que puede estar algo más marcado en los últimos problemas de la propuesta, especialmente en la prueba escrita. Por ejemplo, en este ciclo se han contabilizado 11 respuestas no argumentadas entre las 80 respuestas a los cuatro ítems de la prueba escrita, mientras que en el ciclo I-2 fueron 23, sobre el mismo total.

También parecen haber disminuido ligeramente respecto al anterior ciclo de 2º de ESO las respuestas que, quizás como consecuencia de influencias externas, usan argumentos cualitativos por aumentos y disminuciones para argumentar relaciones de proporcionalidad simple directa. En el ciclo I-2 encontramos cuatro respuestas que utilizaban este tipo de argumentos para justificar relaciones de proporcionalidad simple directa, mientras que en este ciclo solo hemos encontrado una. En las relaciones inversas, aunque representan frecuencias muy bajas, se mantienen casi invariantes. En el ciclo anterior se detectaron cuatro respuestas categorizadas en D7 y en este ciclo se detectan tres.

Como en los ciclos anteriores, la argumentación institucionalizada, D2, solo deja de ser claramente mayoritaria en algunos de los problemas en los que no puede suponerse relación de proporcionalidad, bien porque se presentan distractores o solo aparece una magnitud en el enunciado, y los alumnos alegan este hecho (argumento D9, por ejemplo, en F1.1.2), bien porque las magnitudes no están relacionadas y eso es lo que ponen los alumnos de manifiesto (argumento D8, por ejemplo, en TC2.1.3).

Problemas en los que se pide calcular las constantes de proporcionalidad asociadas a una situación de proporcionalidad.

En la Tabla VIII - 12 observamos los resultados para los problemas en los que se pide calcular las razones (para el caso directo, filas en blanco) o la constante de proporcionalidad (para el caso inverso, filas en gris) e interpretarlas. Para los problemas que presentan una situación de proporcionalidad simple directa se diferencia C1 y C2 según sea correcto solo un valor (o interpretación) para una razón externa o lo sean los dos.

		Valor numérico			Interpretación			
		B/I	C1	C2	B	I	C1	C2
F1.1.1	N.º de respuestas	0	1	9	0	0	1	9
	Porcentaje	-	10 %	90 %	-	-	10 %	90 %
F1.1.4	N.º de respuestas	0	0	10	1	0	1	8
	Porcentaje	-	-	100 %	10 %	-	10 %	80 %
F1.1.5	N.º de respuestas	2	1	7	2	1	0	7
	Porcentaje	20 %	10 %	70 %	20 %	10 %	-	70 %
TC1.1	N.º de respuestas	0	0	18	0	3	0	15
	Porcentaje	-	-	90 %	-	15 %	-	75 %
TC1.4	N.º de respuestas	2	1	11	0	0	2	12
	Porcentaje	10 %	5 %	55 %	-	-	10 %	60 %
F2.2.1	N.º de respuestas	3	7		2	1	7	
	Porcentaje	30 %	70 %		20 %	10 %	70 %	
F2.2.2	N.º de respuestas	1	1	8	1	1	1	7
	Porcentaje	10 %	10 %	80 %	10 %	10 %	10 %	70 %
F2.2.3	N.º de respuestas	9	0		9	0	0	
	Porcentaje	90	-		90 %	-	-	

Tabla VIII - 12. Resultados generales para los problemas en los que se solicitaba calcular las razones o la constante de proporcionalidad asociadas a una situación de proporcionalidad simple (Ciclo II-2).

Salvo para el problema F2.2.3 en el que, como hemos comentado, los alumnos se enfrentaban por primera vez en la propuesta de 2º de ESO a la interpretación de un producto de dos magnitudes extensivas, los porcentajes de éxito son muy satisfactorios. En cuanto a proporcionalidad inversa, no son sustantivamente mejores que los observados en el ciclo I-2, pero sí se incrementan de forma generalizada para las situaciones de proporcionalidad simple directa (ver Tabla VI - 22, Capítulo VI).

Problemas en los que se pide identificar/calcular una razón concreta o la constante de proporcionalidad inversa en una situación de proporcionalidad.

En la Tabla VIII - 13 presentamos los resultados en las categorías generales para los problemas en los que se pide identificar o calcular una razón concreta dado su significado. Para este tipo de problemas, que son de respuesta prácticamente cerrada, no analizamos categorías específicas. Notar que el número de problemas en este apartado se ha incrementado significativamente desde el ciclo I-2 debido a la reestructuración de la propuesta didáctica para el porcentaje. Por tanto, salvo el último problema PE.2.3, todos los demás hacen referencia a situaciones de proporcionalidad simple directa, que salvo PE.2.2 se enuncian en contextos de porcentajes.

	N	B	I	C		N	B	I	C
F9.1.1.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)	**TC9.3.6**	10 (2)	5 (1)	30 (6)	55 (11)
F9.1.1.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)	**F10.1.3.3**	0 (0)	40 (4)	0 (0)	60 (6)
F9.1.1.3	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)	**F11.1.1.2**	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F9.1.1.4	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)	**F11.1.1.4**	0 (0)	10 (1)	30 (3)	60 (6)
F9.1.2.2	0 (0)	30 (3)	0 (0)	70 (7)	**F11.1.1.5**	0 (0)	0 (0)	60 (6)	40 (4)
F9.1.2.4	0 (0)	30 (3)	0 (0)	70 (7)	**F11.1.2.1**	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (8)
F9.1.2.5	0 (0)	20 (2)	10 (1)	70 (7)	**F11.1.2.2**	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F9.1.3.1	0 (0)	10 (1)	40 (4)	50 (5)	**F11.1.3.1**	0 (0)	10 (1)	40 (4)	50 (5)
F9.1.3.2	0 (0)	30 (3)	0 (0)	70 (7)	**F11.1.3.2**	0 (0)	10 (1)	30 (3)	60 (6)
F9.1.3.3	0 (0)	40 (4)	0 (0)	60 (6)	**F11.1.4.2**	0 (0)	10 (1)	10 (1)	80 (8)
TC9.1.1	10 (2)	5 (1)	0 (0)	85 (17)	**F11.1.4.4**	0 (0)	30 (3)	10 (1)	60 (6)
TC9.2.1	10 (2)	5 (1)	0 (0)	85 (17)	**F11.1.4.5**	0 (0)	20 (2)	60 (6)	20 (2)
TC9.2.2	10 (2)	5 (1)	20 (4)	65 (13)	**TC11.1.1**	20 (4)	0 (0)	25 (5)	55 (11)
TC9.3.1	10 (2)	0 (0)	50 (10)	40 (8)	**TC11.1.2**	20 (4)	0 (0)	10 (2)	70 (14)
TC9.3.2	10 (2)	10 (2)	30 (6)	50 (10)	**TC11.2.1**	20 (4)	10 (2)	15 (3)	55 (11)
TC9.3.3	10 (2)	5 (1)	45 (9)	40 (8)	**TC11.2.2**	20 (4)	20 (4)	0 (0)	60 (12)
TC9.3.4	10 (2)	10 (2)	35 (7)	45 (9)	**PE.2.2**	0 (0)	0 (0)	50 (10)	50 (10)
TC9.3.5	10 (2)	5 (1)	25 (5)	60 (12)	**PE.2.3**	0 (0)	0 (0)	70 (14)	30 (6)

Tabla VIII - 13. Resultados generales para los problemas en los que solicitaba identificar o calcular una razón concreta o la constante de proporcionalidad en una situación de proporcionalidad (Ciclo II-2).

En líneas generales, y de la misma forma que observamos en el Capítulo VI, los resultados son satisfactorios, arrojando elevadas tasas de éxito en casi todos los problemas. Además, las bajadas significativas en las frecuencias de éxito que se observan en la tabla anterior coinciden con las observadas en la Tabla VI -23 del Capítulo VI, por lo que no se aprecian fenómenos novedosos durante este ciclo en este tipo de problemas. Las tasas de éxito en tareas de porcentaje son altas incluso cuando se solicita interpretar razones parte-parte, pero bajan considerablemente en las situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales cuando se solicita calcular la razón entre la cantidad inicial y la cantidad final (F11.1.15 y F11.1.4.5). En este ciclo, esta bajada en la frecuencia de respuestas correctas se ve de manera más clara en la situación de disminución porcentual (F11.1.4.5).

Por otro lado, las frecuencias de éxito en la prueba escrita, aunque discretas, siguen el mismo patrón observado en el ciclo anterior de 2º de ESO, por lo que nos remitimos al análisis hecho en el Capítulo VI.

Detección de "falsos" problemas de proporcionalidad.

En la Tabla VIII - 14 se presentan los resultados para las categorías generales en los "falsos" problemas de proporcionalidad. Es decir, en aquellos problemas que se presentan bajo un aspecto similar a un problema de valor perdido o de comparación, pero en donde no puede suponerse ningún tipo de relación funcional entre las magnitudes; por lo que la respuesta correcta pasa por argumentar que no hay relación (proporcional) entre las magnitudes y que estos problemas no pueden resolverse.

		N	B	I	C
F3.1.3	N.º de respuestas	0	0	9	1
	Porcentaje	-	-	90 %	10 %
F4.1.3	N.º de respuestas	0	3	1	6
	Porcentaje	-	30 %	10 %	60 %
TC4.4	N.º de respuestas	3	1	7	9
	Porcentaje	15 %	5 %	35 %	45 %
F5.1.2	N.º de respuestas	0	0	0	10
	Porcentaje	-	-	-	100 %
PE.6	N.º de respuestas	0	0	1	19
	Porcentaje	-	-	5 %	95 %

Tabla VIII - 14. Resultados generales en la detección de falsos problemas de proporcionalidad (Ciclo II-2).

Destaca la muy baja tasa de éxito en el primer problema de estas características al que se enfrentan los estudiantes en este ciclo, F3.1.3, ya que en el ciclo anterior los alumnos detectaron con una tasa de éxito mucho mayor que este problema no podía resolverse. Además, como se observa en la Tabla VIII - 14, la baja tasa de éxito no se debe a que los alumnos hayan dejado en blanco el problema, sino a que han contestado incorrectamente porque han resuelto el problema como si pudiera suponerse una relación de proporcionalidad. Sin embargo, tras este primer problema (y su puesta en común) la tasa de éxito sube considerablemente, obteniéndose mejores resultados que los observados en el ciclo I-2 en el resto de los problemas de este tipo.

VIII.3.1.2. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

En la propuesta para 2º de ESO los problemas asociados a este foco de interés se concentran en las sesiones 3, 4 y 5. En las fichas de trabajo de estas sesiones, F3.1, TC3, F4.1, TC4 y F5.1, se entremezclan los problemas asociados al Foco 2 y los asociados al Foco 3 (problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa). Además, se introdujo un problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad simple directa en la ficha de repaso, F13, y en la prueba escrita (ítem PE.2.1 que es el mismo que su homónimo en la prueba escrita del ciclo II-1). Como se comentó en el Capítulo VI, no se diseñan situaciones introductorias específicas para este foco de interés en este curso.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

En la Tabla VIII - 15, la Tabla VIII - 16 y la Tabla VIII - 17 presentamos los resultados en las categorías generales para los problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa, de comparación cuantitativa, valor perdido y comparación cualitativa, respectivamente.

Aunque es una particularidad de este ciclo, destacamos que el número de respuestas no entregadas que suele concentrarse en las tareas para casa es menor que el observado durante otros ciclos. Sin embargo, un análisis de las producciones evidencia que hay un alto número de producciones plagiadas, por lo que sigue siendo pertinente analizar con cuidado los resultados obtenidos en los problemas de las tareas para casa.

Observamos también un bajo número de respuestas en blanco. Esto puede indicar que la propuesta se ajusta adecuadamente al tiempo que tienen los alumnos para resolver los problemas, ya que en los ciclos anteriores hemos apreciado una cierta correlación entre el número de respuestas en blanco y la posición de los problemas dentro de fichas con mayor cantidad de ejercicios (cuanto más atrás está un ejercicio en la ficha, mayor es el número de respuestas en blanco).

		N	B	I	C
F3.1.1	N.º de respuestas	0	0	2	8
	Porcentaje	-	-	20 %	80 %
TC4.3	N.º de respuestas	3	2	6	9
	Porcentaje	15 %	10 %	30 %	45 %

Tabla VIII - 15. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2).

		N	B	I	C
F3.1.4	N.º de respuestas	0	3	1	6
	Porcentaje	-	30 %	10 %	60 %
TC3.1	N.º de respuestas	2	1	4	13
	Porcentaje	10 %	5 %	20 %	65 %
TC3.2	N.º de respuestas	2	1	2	15
	Porcentaje	10 %	5 %	10 %	75 %
F5.1.5	N.º de respuestas	0	1	1	8
	Porcentaje	-	10 %	10 %	80 %

Tabla VIII - 16. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2).

		N	B	I	C
F4.1.2	N.º de respuestas	0	1	5	4
	Porcentaje	-	10 %	50 %	40 %
F13.1.3	N.º de respuestas	0	1	3	6
	Porcentaje	-	10 %	30 %	60 %
PE.2.1	N.º de respuestas	0	0	8	12
	Porcentaje	-	-	40 %	60 %

Tabla VIII - 17. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2).

Como en el foco anterior, las tasas de éxito son generalmente satisfactorias. Salvo en dos problemas, todas están por encima del 50 %. Los dos que están por debajo de este punto (TC4.3 y F4.1.2) no están muy alejados, por lo que son tasas de éxito que permiten avanzar adecuadamente en la consecución de los objetivos didácticos, y arrojan un número suficiente de respuestas correctas para poder articular adecuadamente los debates que se generan tras la realización de cada ficha.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

En la Tabla VIII - 18, la Tabla VIII - 19 y la Tabla VIII - 20 presentamos los resultados en las categorías específicas para los problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa, de comparación cuantitativa, valor perdido y comparación cualitativa, respectivamente.

		C0	C1	C2	C3	C4	C5
F3.1.1	N.º de respuestas	0	10	0	0	0	0
	Porcentaje	-	100 %	-	-	-	-
TC4.3	N.º de respuestas	2	12	0	1	0	0
	Porcentaje	10 %	60 %	-	5 %	-	-

Tabla VIII - 18. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2).

		VPd0	VPd1	VPd2	VPd3	VPd4	VPd5	VPd6	VPd7	VPd8	VPd9
F3.1.4	N.º de resp.	1	0	0	6	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	10 %	-	-	60 %	-	-	-	-	-	-
TC3.1	N.º de resp.	1	0	0	15	0	0	0	1	0	0
	Porcentaje	5 %	-	-	75 %	-	-	-	5 %	-	-
TC3.2	N.º de resp.	0	0	0	16	1	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	80 %	5 %	-	-	-	-	-
F5.1.5	N.º de resp.	0	0	0	3	6	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	30 %	60 %	-	-	-	-	-

Tabla VIII - 19. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2).

		CL0	CL1	CL2	CL3
F4.1.2	N.º de respuestas	1	5	0	0
	Porcentaje	10 %	50 %	-	-
F13.1.3	N.º de respuestas	1	8	0	0
	Porcentaje	10 %	80 %	-	-

Tabla VIII - 20. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2).

Cabe destacar que, aunque se produce un aumento respecto al ciclo I-2, el número de respuestas sin argumentos (C0, VPd0 y CL0) es bajo, solo 6 producciones de las 110 analizadas. De entre el resto de las respuestas no encontramos ninguna producción que utilice alguna estrategia de resolución incorrecta, en ninguno de los tipos de problemas. En concreto, no se han encontrado estrategias C4 (operaciones sin sentido) o C5 (razonamientos aditivos erróneos) en los problemas de comparación, ni estrategias VPd1 (construcción de patrones), VPd8 (operaciones sin sentido) o VPd9 (razonamientos aditivos erróneos). Por tanto, todos los alumnos en los que se ha podido detectar la estrategia empleada usan una estrategia potencialmente correcta.

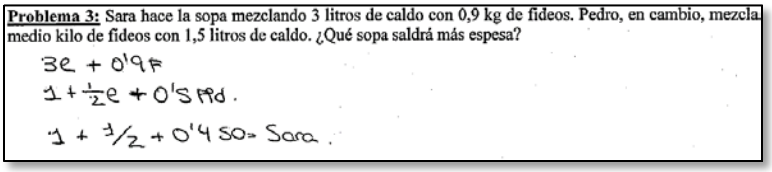
Al no encontrar producciones que sigan una estrategia errónea eliminamos esta sección del análisis.

Producciones que siguen una estrategia correcta.

Como observamos en la Tabla VIII - 18, salvo en una producción, en todas las respuestas para los problemas de comparación cuantitativa en los que puede determinarse la estrategia seguida se utiliza la estrategia de cálculo (y comparación) de alguna razón externa (C1). La única producción que se sale de esta regla es una respuesta a TC4.3 que resuelve un problema de valor perdido dentro de una de las situaciones para poder comparar las dos situaciones.

Es la segunda producción que observamos que sigue este tipo de estrategia en todos los ciclos de investigación-acción realizado y la primera en un ciclo correspondiente a 2º de ESO. Sin embargo, se trata de dos respuestas al mismo problema. El problema PE.3 de la prueba escrita del ciclo II-1 se introdujo en la propuesta de 2º de ESO.

En este ciclo, la respuesta observada en la categoría C3 es la que puede verse en la Imagen VIII - 2. En ella, vemos como el alumno A3.1 ha calculado la cantidad de fideos correspondiente a litro y medio que debería echar Sara, posiblemente mediante una estrategia de factor de cambio. Así, compara qué masa de fideos echa cada una de las personas implicadas por cada litro y medio de caldo, aunque no responde explícitamente a la pregunta que se le hace y, por esa razón, el problema se clasifica como incorrecto con un Error C.1 debido a que se trata de una producción inacabada.


Problema 3: Sara hace la sopa mezclando 3 litros de caldo con 0,9 kg de fideos. Pedro, en cambio, mezcla medio kilo de fideos con 1,5 litros de caldo. ¿Qué sopa saldrá más espesa?

3l + 0'9F

1 + 1/2 l + 0'5 Pd.

1 + 1/2 + 0'45 = Sara.

Imagen VIII - 2. Producción del alumno A3.1 para el problema TC4.3 (Ciclo II-2).

Como hemos dicho, el resto de las producciones en los problemas de comparación siguen la estrategia institucionalizada C2 y no se observan hechos o características significativamente diferentes de los ya relatados en ciclos anteriores.

En los problemas de valor perdido, observamos una concentración mucho mayor de producciones en torno a la categoría institucionalizada VPd3 que en el ciclo anterior. Es decir, los estudiantes usan mayoritariamente estrategias funcionales acabando con multiplicación para resolver este tipo de problemas. Solo ocho producciones realizan una estrategia diferente y, de ellas, siete corresponden a una estrategia también funcional, es decir, usando razones externas, pero acabando el problema mediante una división. Es decir, la práctica totalidad de las producciones en las que se detecta una estrategia de resolución emplea razones externas.

La mayor parte de las estrategias VPd4 se concentra, como en el ciclo anterior, en el problema F5.1.5 en el que se proporciona como dato en el problema la razón externa que permite terminar el problema directamente mediante una división. Sin embargo, la frecuencia en la que aparece esta estrategia baja respecto al ciclo I-2, aumentando el número de producciones que calculan e interpretan la razón inversa para terminar el problema mediante una multiplicación.

El uso de una fórmula (VPd7) solo se detecta en una producción de una tarea para casa.

Errores cometidos en estrategias correctas.

En la Tabla VIII - 21 y en la Tabla VIII - 22 presentamos las frecuencias con las que hemos detectado los cuatro tipos de errores que establecimos en el Capítulo V para los problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa, comparación cuantitativa y valor perdido, respectivamente.

		Error C.1	Error C.2	Error C.3	Error C.4
F3.1.1	N.º de respuestas	0	0	1 - 2	0 - 1
	Porcentaje	-	-	10 % - 20 %	0 % - 10 %
TC4.3	N.º de respuestas	2	0	0 - 2	0 - 2
	Porcentaje	10 %	-	0 % - 10 %	0 % - 10 %

Tabla VIII - 21. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2).

		Error VP.1	Error VP.2	Error VP.3	Error VP.4
F3.1.4	N.º de respuestas	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	-
TC3.1	N.º de respuestas	2	0	0	0
	Porcentaje	10 %	-	-	-
TC3.2	N.º de respuestas	1	0	0	1
	Porcentaje	5 %	-	-	5 %
F5.1.5	N.º de respuestas	0	0	0 - 1	0 - 1
	Porcentaje	-	-	0 % - 10 %	0 % - 10 %

Tabla VIII - 22. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo II-2).

Si comparamos con el ciclo I-2, y con el ciclo III-1 (del que provienen estos mismos alumnos), observamos una menor presencia de errores asociados a la comprensión del número racional (C.2 o VP.2) o a la comprensión de la razón externa y su interpretación como cantidad intensiva (C.3, C.4, VP.3 y VP.4). Esto, junto con las elevadas tasas de éxito y la ausencia de estrategias incorrectas, es un buen indicador de la mejora de la comprensión de los estudiantes en este foco de interés.

VIII.3.1.3. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa

Como hemos indicado en el foco anterior, en la propuesta para 2º de ESO los problemas de proporcionalidad simple directa e inversa se presentan conjuntamente e intercalados en las sesiones 3, 4 y 5. Es decir, en las fichas de trabajo F3.1, TC3, F4.1, TC4 y F5.1. Además, se presentan otros dos problemas en la prueba escrita, ll problema PE.3 (de comparación cuantitativa) y el problema PE.4 (de valor perdido). En total, analizaremos en esta sección 180 producciones de los estudiantes.

Como en el foco anterior, no se han diseñado para este foco situaciones introductorias específicas por lo que hacemos el análisis conjunto de todos los problemas involucrados en este foco.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

En la Tabla VIII - 23, la Tabla VIII - 24 y la Tabla VIII - 25 presentamos los resultados en las categorías generales para los problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa, de comparación cuantitativa, valor perdido y comparación cualitativa, respectivamente.

		N	B	I	C
F3.1.2	N.º de respuestas	0	0	0	10
	Porcentaje	-	-	-	100 %
TC3.3	N.º de respuestas	2	2	11	5
	Porcentaje	10 %	10 %	55 %	25 %
F5.1.4	N.º de respuestas	0	0	1	9
	Porcentaje	-	-	10 %	90 %
PE.3	N.º de respuestas	0	2	11	7
	Porcentaje	-	10 %	55 %	35 %

Tabla VIII - 23. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2).

		N	B	I	C
F4.1.1	N.º de respuestas	0	1	2	7
	Porcentaje	-	10 %	20 %	70 %
F4.1.4	N.º de respuestas	0	2	4	4
	Porcentaje	-	20 %	40 %	40 %
TC4.1	N.º de respuestas	3	2	5	10
	Porcentaje	15 %	10 %	25 %	50 %
F5.1.1	N.º de respuestas	0	0	1	9
	Porcentaje	-	-	10 %	90 %
F5.1.3.1	N.º de respuestas	0	1	1	8
	Porcentaje	-	10 %	10 %	80 %
F5.1.3.2	N.º de respuestas	0	1	3	6
	Porcentaje	-	10 %	30 %	60 %
PE.4	N.º de respuestas	0	1	9	10
	Porcentaje	-	5 %	45 %	50 %

Tabla VIII - 24. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2).

		N	B	I	C
F4.1.5	N.º de respuestas	0	2	4	4
	Porcentaje	-	20 %	40 %	40 %
TC4.2	N.º de respuestas	3	1	7	9
	Porcentaje	15 %	5 %	35 %	45 %

Tabla VIII - 25. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2).

Se constatan en este ciclo algunas de las observaciones realizadas en el ciclo I-2. Especialmente en lo concerniente a problemas de comparación cuantitativa. La tasa de éxito parece estar fuertemente asociada al tipo de magnitudes utilizadas. La tasa de éxito en la prueba escrita (PE.3), en donde aparecen dos magnitudes extensivas, es muy inferior a la del primer problema F3.1.2, donde la tasa de éxito es del $100\ \%$. En este último problema aparecía una magnitud intensiva.

Por otro lado, este efecto que produce tener que interpretar el producto de dos magnitudes extensivas, que en el ciclo I-2 se mantenía en los problemas de comparación cualitativa, se diluye en este ciclo. Los dos problemas de comparación cualitativa obtienen resultados muy similares.

Si observamos las diferentes tasas de éxito entre los problemas realizados en equipo y los problemas realizados de forma individual, comparando con los datos recogidos en el Capítulo VI, vemos un ligero incremento de las tasas de éxito por equipos (problemas realizados durante las sesiones) y un ligero descenso de estas tasas para los problemas que se debían resolver individualmente. Por ejemplo, las tasas de éxito en la prueba escrita para PE.3 y PE.4 son menores en este ciclo que en el ciclo I-2, aunque no existen diferencias estadísticamente significativas (p-valor $0{,}5321$ en ambos problemas en un test exacto de Fisher).

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

En la Tabla VIII - 26, la Tabla VIII - 27 y la Tabla VIII - 28 presentamos los resultados en las categorías específicas para los problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa, de comparación cuantitativa, valor perdido y comparación cualitativa, respectivamente.

		C0	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**
F3.1.2	N.º de respuestas	0	10	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	100 %	-	-	-	-	-
TC3.3	N.º de respuestas	7	5	0	0	0	0	4
	Porcentaje	35 %	25 %	-	-	-	-	20 %
F5.1.4	N.º de respuestas	1	9	0	0	0	0	0
	Porcentaje	10 %	90 %	-	-	-	-	-
PE.3	N.º de respuestas	2	12	0	0	0	0	3
	Porcentaje	10 %	60 %	-	-	-	-	15 %

Tabla VIII - 26. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2).

Para los problemas de comparación cuantitativa, vemos un ligero aumento de las producciones clasificadas en C0 debido principalmente a la repetición en el problema para casa, TC3.3, de un argumento para justificar que el problema no se podía resolver. La elevada frecuencia parece responder a un efecto del plagio entre producciones de los alumnos. Fuera de este hecho, las respuestas de los alumnos se agrupan de forma mayoritaria en la categoría institucionalizada C1 (cálculo de las constantes de proporcionalidad). El número de estudiantes que siguen una estrategia potencialmente correcta, pero que suponen desde el principio de forma errónea una relación de proporcionalidad directa (C6) y por tanto calculan razones, desciende ligeramente respecto al ciclo

I-2; especialmente en la prueba escrita en donde la frecuencia relativa es la mitad de la que observamos en el Capítulo VI.

Por el contrario, en los problemas de valor perdido encontramos un ligero aumento de respuestas que suponen una relación directa y, por tanto, resuelven de forma incorrecta (VPi8). Sin embargo, sigue siendo claramente mayoritaria la estrategia institucionalizada VPi3, consistente en calcular en un primer lugar la constante de proporcionalidad. De hecho, si comparamos con el ciclo I-2 la frecuencia del uso de esta estrategia aumenta en casi todos los problemas.

		VPi0	VPi1	VPi2	VPi3	VPi4	VPi5	VPi6	VPi7	VPi8
F4.1.1	N.º de respuestas	0	0	0	8	0	0	0	0	1
	Porcentaje	-	-	-	80 %	-	-	-	-	10 %
F4.1.4	N.º de respuestas	0	0	0	4	0	0	1	0	3
	Porcentaje	-	-	-	40 %	-	-	10 %	-	30 %
TC4.1	N.º de respuestas	0	0	0	10	0	0	1	0	4
	Porcentaje	-	-	-	50 %	-	-	5 %	-	20 %
F5.1.1	N.º de respuestas	0	0	0	9	0	0	0	0	1
	Porcentaje	-	-	-	90 %	-	-	-	-	5 %
F5.1.3.1	N.º de respuestas	0	0	0	9	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	90 %	-	-	-	-	-
F5.1.3.2	N.º de respuestas	0	0	0	8	0	0	0	0	1
	Porcentaje	-	-	-	80 %	-	-	-	-	10 %
PE.4	N.º de respuestas	3	0	0	11	0	0	0	1	4
	Porcentaje	15 %	-	-	55 %	-	-	-	5 %	20 %

Tabla VIII - 27. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2).

En las respuestas a los problemas de comparación cualitativa observamos un fuerte descenso de las respuestas no argumentadas (CL0) y un claro aumento de las producciones que se preocupan de argumentar correctamente sus respuestas.

		CL0	CL1	CL2	CL3	CL4
F4.1.5	N.º de respuestas	1	6	0	0	1
	Porcentaje	10 %	60 %	-	-	10 %
TC4.2	N.º de respuestas	6	8	0	1	1
	Porcentaje	30 %	40 %	-	5 %	5 %

Tabla VIII - 28. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2).

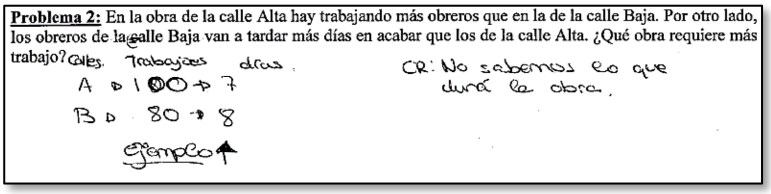
Producciones que siguen una estrategia errónea.

Como hemos observado, las únicas estrategias erróneas detectadas consisten en suponer una relación directa en vez de inversa (C6, VPi8 y CL4) y, con frecuencias muy bajas, algunas respuestas presentan producciones con operaciones entre los datos que no tienen sentido (dos producciones VPi6). Por ello, un análisis cualitativo de las respuestas en esta categoría no aporta información relevante que no se haya dado ya en el Capítulo VI de esta memoria.

Producciones que siguen una estrategia correcta.

Como hemos visto, las respuestas correctas para los problemas de comparación cuantitativa y de valor perdido se concentran en las categorías C1 y VPi3. El tipo de respuestas de los alumnos en estas categorías institucionalizadas fueron analizadas de forma cualitativa ampliamente en el Capítulo VI. No detectamos en este ciclo respuestas que se salgan de los patrones allí descritos.

En cuanto a los problemas de comparación cualitativa, encontramos por primera vez en la propuesta en una actividad de clase[60] un intento de resolver un problema de comparación cualitativa proponiendo ejemplos numéricos (Imagen VIII - 3). Aunque el alumno da una respuesta correcta, esta no se deduce del único ejemplo numérico que propone. Además, el alumno tampoco calcula ni interpreta el valor de los productos.


Problema 2: En la obra de la calle Alta hay trabajando más obreros que en la de la calle Baja. Por otro lado, los obreros de la calle Baja van a tardar más días en acabar que los de la calle Alta. ¿Qué obra requiere más trabajo?

Calles. Trabajores días.
A → 100 → 7
B → 80 → 8
ejemplo ↑

CR: No sabemos lo que durá la obra.

Imagen VIII - 3. Producción del alumno A3.1 para el problema TC4.2 (Ciclo II-2).

VIII.3.1.4. Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta

Como en el primer ciclo de segundo de la ESO, las sesiones 6 y 7 de este ciclo se dedicaron a trabajar los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta. Por tanto, las fichas de trabajo F6.1, F6.2, TC6 y F7.1 están dedicadas en exclusiva a este contenido. Además, se incorporó un problema en la sesión de repaso F13.1.2 y dos más en la prueba escrita: uno de valor perdido, PE.5, y otro de comparación cuantitativa, PE.7. Además, el problema PE.6, que ya hemos analizado anteriormente, era un "falso problema" de proporcionalidad compuesta.

Como siempre, comenzamos analizando la situación introductoria en la que se presentaba un problema con la misma estructura numérica y funcional que el de la situación introductoria de la propuesta en el ciclo III-1, pero con un cambio de contexto. Posteriormente realizaremos un análisis conjunto del resto de los problemas asociados a este foco de interés y que los alumnos realizaron tras la institucionalización.

[60] En las entrevistas semiestructuradas del Capítulo V (sección V.3.3) se indagó en la capacidad de los alumnos para proponer ejemplos numéricos a partir de problemas de comparación cualitativa de respuesta indeterminada de forma que la respuesta variase según los datos propuestos.

Análisis de la situación introductoria.

El análisis cuantitativo para la situación introductoria a los problemas de proporcionalidad compuesta en este segundo de 2º de eso se puede ver en la Tabla VIII - 29 . Al igual que en el ciclo I-2 observamos una alta tasa de respuestas correctas y ninguna respuesta en blanco.

		N	B	I	C
F6.1.1	N.º de respuestas	0	0	2	8
	Porcentaje	-	-	20 %	80 %

Tabla VIII - 29. Resultados generales en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2).

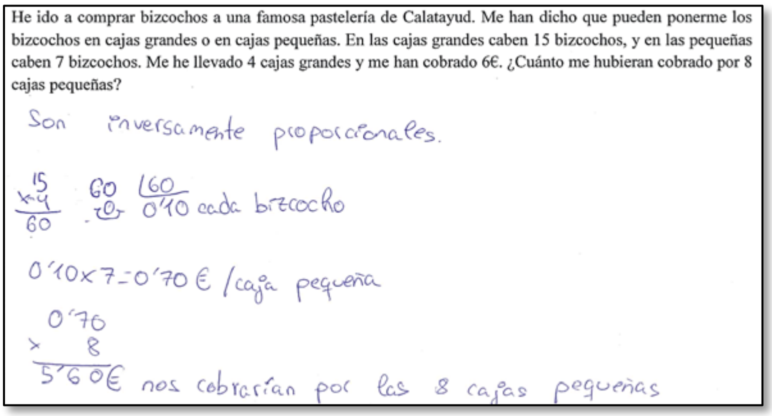
Un análisis más detallado como el que nos muestran los resultados en las categorías específicas (Tabla VIII - 30 y Tabla VIII - 31) arroja alguna diferencia con lo ocurrido en el ciclo I-2. Vemos, por ejemplo, que desaparecen las respuestas no argumentadas, pero aparecen dos producciones (que se corresponden con las producciones incorrectas) que realizan operaciones sin sentido (VPC8).

		VPC0	VPC1	VPC8	VPC9	VPC10	VP11
F6.1.1	N.º de respuestas	0	0	2	0	0	0
	Porcentaje	-	-	20 %	-	-	-

Tabla VIII - 30. Estrategias incorrectas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2).

		VPC2	VPC3	VPC4	VPC5	VPC6	VP7
F6.1.1	N.º de respuestas	6	0	2	0	0	0
	Porcentaje	60 %	-	20 %	-	-	-

Tabla VIII - 31. Estrategias potencialmente correctas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2).


He ido a comprar bizcochos a una famosa pastelería de Calatayud. Me han dicho que pueden ponerme los bizcochos en cajas grandes o en cajas pequeñas. En las cajas grandes caben 15 bizcochos, y en las pequeñas caben 7 bizcochos. Me he llevado 4 cajas grandes y me han cobrado 6€. ¿Cuánto me hubieran cobrado por 8 cajas pequeñas?

Son inversamente proporcionales.

15 x 4 = 60

60 |60 0'10 cada bizcocho

0'10x7=0'70 € /caja pequeña

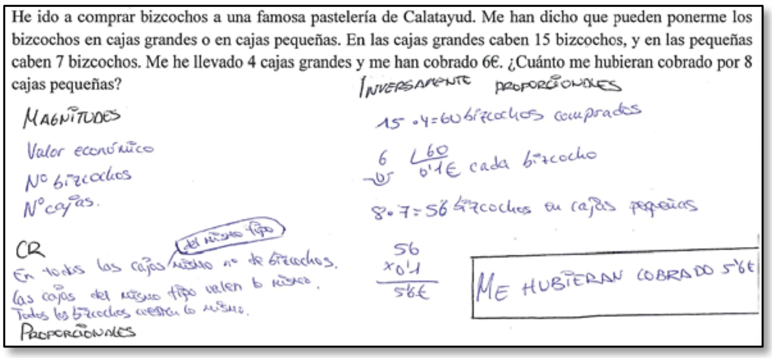
0'70 x 8 = 5'60€ nos cobrarían por las 8 cajas pequeñas

Imagen VIII - 4. Producción del equipo A8 para el problema F6.1.1 (Ciclo II-2).

Por otro lado, las respuestas que usan amalgamación (VPC2) disminuyen ligeramente, ya que aparecen dos producciones en las que se mezclan las estrategias de paso a paso pasando por la unidad y de amalgamación (VPC4). Es el caso de la producción de la Imagen VIII - 4.

En cualquier caso, la aparición de forma natural de la estrategia de amalgamación y la alta tasa de respuestas correctas siguen indicando que la situación introductoria funciona convenientemente.

Por último, cabe destacar que en este ciclo se observa una mayor preocupación por la argumentación en este foco de interés. Como ejemplo de respuesta argumentada en la situación introductoria, podemos ver (Imagen VIII - 5) que el alumno explicita el significado de cada operación parcial y establece condiciones de regularidad necesarias para que se pueda suponer la relación de proporcionalidad compuesta: “En todas las cajas del mismo tipo, mismo número de bizcochos. Las cajas del mismo tipo valen lo mismo. Todos los bizcochos valen lo mismo.”


He ido a comprar bizcochos a una famosa pastelería de Calatayud. Me han dicho que pueden ponerme los bizcochos en cajas grandes o en cajas pequeñas. En las cajas grandes caben 15 bizcochos, y en las pequeñas caben 7 bizcochos. Me he llevado 4 cajas grandes y me han cobrado 6€. ¿Cuánto me hubieran cobrado por 8 cajas pequeñas?

Inversamente proporcionales

Magnitudes
Valor económico
Nº bizcochos
Nº cajas.

15 · 4 = 60 bizcochos comprados
6 | 60
0'1€ cada bizcocho
8 · 7 = 56 bizcochos en cajas pequeñas
56
x0'1
5'6€

CR
En todas las cajas del mismo tipo mismo nº de bizcochos.
Las cajas del mismo tipo valen lo mismo.
Todos los bizcochos valen lo mismo.
Proporcionales

ME HUBIERAN COBRADO 5'6€

Imagen VIII - 5. Producción del equipo A3 para el problema F6.1.1 (Ciclo II-2).

Análisis de las producciones según las categorías generales.

El análisis cuantitativo para el resto de los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta en este segundo ciclo de 2º de ESO se puede ver en la Tabla VIII - 32 (para problemas de valor perdido), la Tabla VIII - 33 (para problemas de comparación cuantitativa) y la Tabla VIII - 34 (para el problema de comparación cualitativa).

			N	B	I	C
F6.2.1	Inversa-Inversa	N.º de respuestas	0	0	1	9
		Porcentaje	-	-	10 %	90 %
TC6.1.1	Directa-Directa	N.º de respuestas	4	4	2	10
		Porcentaje	20 %	20 %	10 %	50 %
TC6.1.2	Directa-Inversa	N.º de respuestas	4	4	5	7
		Porcentaje	20 %	20 %	25 %	35 %
F7.1.3	Directa-Directa-Inversa	N.º de respuestas	0	1	3	6
		Porcentaje	-	10 %	30 %	60 %
F7.1.4	Inversa-Inversa	N.º de respuestas	0	2	4	4
		Porcentaje	-	20 %	40 %	40 %
F13.1.2	Inversa-Inversa-Inversa	N.º de respuestas	0	1	4	5
		Porcentaje	-	10 %	40 %	50 %
PE.5	Directa-Directa	N.º de respuestas	0	3	5	12
		Porcentaje	-	15 %	25 %	60 %

Tabla VIII - 32. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2).

			N	B	I	C
F6.2.2	$\mathbb{p} = (1, -1, -1)$	N.º de respuestas	0	1	2	7
		Porcentaje	-	10 %	20 %	70 %
TC6.2	$\mathbb{p} = (1,1,1)$	N.º de respuestas	4	4	1	11
		Porcentaje	20 %	20 %	5 %	55 %
F7.1.2	$\mathbb{p} = (1, -1, -1)$	N.º de respuestas	0	0	0	10
		Porcentaje	-	-	-	100 %
PE.7	$\mathbb{p} = (1,1,1)$	N.º de respuestas	0	1	4	15
		Porcentaje	-	5 %	20 %	75 %

Tabla VIII - 33. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2).

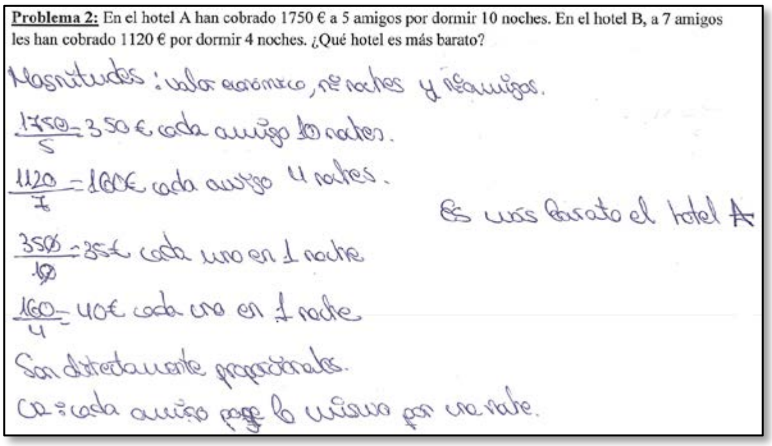
			N	B	I	C
F7.1.1	$\mathbb{p} = (1, -1, -1)$	N.º de respuestas	0	0	0	10
		Porcentaje	-	-	-	100 %

Tabla VIII - 34. Resultados generales en el problema de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2).

Como ya hemos comentado anteriormente, el porcentaje de alumnos que no entregan las tareas se redujo respecto al primer ciclo de 2º de ESO y respecto al ciclo III-1 de donde provienen estos alumnos.

Los resultados comparados con los del ciclo anterior en cuanto a tasas de éxito son similares. No se aprecian grandes diferencias ni durante la secuencia, ni en la prueba final. En los problemas de la prueba escrita encontramos una menor tasa de éxito en el problema de valor perdido PE.5 y una mejor tasa de éxito en el problema de comparación cuantitativa PE.7. Ninguna de las diferencias es estadísticamente significativa (p-valor $0{,}5006$ para ambas comparaciones usando un test exacto de Fisher). Sí podemos resaltar que, tras el cambio introducido en el problema de comparación cualitativa, F7.1.1, hemos pasado de una tasa de respuestas correctas del $40\ \%$ en el ciclo I-2, a una tasa de acierto del $100\ \%$ en este ciclo. Además, el $50\ \%$ expone de forma razonada su elección.

Sin embargo, se aprecia una gran mejoría de los alumnos dentro del ciclo de investigación acción desde 1º de ESO a 2º ESO. Esta mejoría se puede constatar, además de con el análisis cuantitativo de las categorías generales, comparando producciones de un mismo alumno en 1º y 2º de ESO para los ítems comunes. Puede verse un ejemplo en la Imagen VIII - 6. El alumno A5.2, que dejó en blanco la respuesta en 1º de ESO (en el ciclo III-1 se trataba del alumno codificado como C7.2), presenta una respuesta elaborada y argumentada en 2º de ESO. El alumno da significado a las operaciones y establece correctamente una condición de regularidad para que el problema pueda considerarse de proporcionalidad compuesta (el coste por persona y noche es constante).


Problema 2: En el hotel A han cobrado 1750 € a 5 amigos por dormir 10 noches. En el hotel B, a 7 amigos les han cobrado 1120 € por dormir 4 noches. ¿Qué hotel es más barato?

Magnitudes: valor económico, nº noches y nº amigos.

$\frac{1750}{5}$ = 350 € cada amigo 10 noches.

$\frac{1120}{7}$ = 160€ cada amigo 4 noches.

Es más barato el hotel A

$\frac{350}{10}$ = 35€ cada uno en 1 noche

$\frac{160}{4}$ = 40€ cada uno en 1 noche

Son directamente proporcionales.

CR: cada amigo paga lo mismo por una noche.

Imagen VIII - 6. Producción del alumno A5.2 (Ciclo II-2).

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

En la Tabla VIII - 35 y en la Tabla VIII - 36 se recogen los porcentajes de aparición de cada estrategia para los problemas de valor perdido.

Al igual que en el ciclo I-2, el método institucionalizado (amalgamación, VPC2) se afianza conforme avanza la propuesta, siendo el método mayoritario en muchos de los problemas de 2º de ESO. El uso de la amalgamación baja en problemas en los que la amalgamación natural involucra a la variable dependiente, como ocurre en F13.1.2. A pesar de estas dificultades, los alumnos resuelven estas situaciones apoyándose en los conceptos de razón externa y de constante de proporcionalidad inversa, llevando a cabo métodos del tipo paso a paso (VPC3-VPC5).

		VPC0	VPC1	VPC8	VPC9	VPC10	VP11
F6.2.1	N.º de respuestas	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	-	-	-
TC6.1.1	N.º de respuestas	0	0	2	0	0	0
	Porcentaje	-	-	10 %	-	-	-
TC6.1.2	N.º de respuestas	1	0	3	0	0	2
	Porcentaje	5 %	-	15 %	-	-	10 %
F7.1.3	N.º de respuestas	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	-	-	-
F7.1.4	N.º de respuestas	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	-	-	-
F13.1.2	N.º de respuestas	0	0	0	0	0	1
	Porcentaje	-	-	-	-	-	10 %
PE.5	N.º de respuestas	0	0	1	0	0	1
	Porcentaje	-	-	5 %	-	-	5 %

Tabla VIII - 35. Estrategias incorrectas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2).

		VPC2	VPC3	VPC4	VPC5	VPC6	VPC7
F6.2.1	N.º de respuestas	6	0	4	0	0	0
	Porcentaje	60 %	-	40 %	-	-	-
TC6.1.1	N.º de respuestas	5	1	4	0	0	0
	Porcentaje	25 %	5 %	20 %	-	-	-
TC6.1.2	N.º de respuestas	0	1	5	0	0	0
	Porcentaje	-	5 %	25 %	-	-	-
F7.1.3	N.º de respuestas	7	0	0	0	0	0
	Porcentaje	70 %	-	-	-	-	-
F7.1.4	N.º de respuestas	4	0	3	0	0	0
	Porcentaje	40 %	-	30 %	-	-	-
F13.1.2	N.º de respuestas	2	1	5	0	0	0
	Porcentaje	20 %	10 %	50 %	-	-	-
PE.5	N.º de respuestas	10	6	0	0	0	0
	Porcentaje	50 %	30 %	-	-	-	-

Tabla VIII - 36. Estrategias potencialmente correctas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2).

En cuanto a los problemas de comparación cuantitativa, en la Tabla VIII - 37 podemos ver la frecuencia con la que aparecen cada una de las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver los problemas. Observamos que los alumnos se decantan mayoritariamente por el cálculo de la constante de proporcionalidad y, como ocurría en el ciclo I-2, no siempre es distinguible si el alumno utiliza para ello previamente el método de amalgamación.

El resto de las estrategias que aparecen lo hacen de forma anecdótica. Dos producciones sin argumentar (CC0) y dos producciones en las que se omite alguna de las magnitudes (CC6). Aunque es la primera vez que aparecen estrategias CC6 en las producciones de 2º de ESO, ya observamos este tipo de producciones en los ciclos II-1 y III-1.

		CC0	CC1	CC2	CC3	CC4	CC5	CC6
F6.2.2	N.º de respuestas	0	5	2	0	0	0	2
	Porcentaje	-	50 %	20 %	-	-	-	20 %
TC6.2	N.º de respuestas	1	3	8	0	0	0	0
	Porcentaje	5 %	15 %	40 %	-	-	-	-
F7.1.2	N.º de respuestas	0	2	8	0	0	0	0
	Porcentaje	-	20 %	80 %	-	-	-	-
PE.7	N.º de respuestas	1	9	9	0	0	0	0
	Porcentaje	5 %	45 %	45 %	-	-	-	-

Tabla VIII - 37. Estrategias de resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo II-2).

VIII.3.1.5. Repartos proporcionales

Como en el ciclo anterior, se dedicó una sesión (sesión 8) a trabajar de forma exclusiva los problemas de repartos proporcionales, aunque se redujeron el número de fichas de trabajo y de problemas que los alumnos debían resolver. Las fichas de trabajo F8.1 y TC.8 contienen solo este tipo de problemas. Además, se incorporó un problema de reparto directamente proporcional en la prueba escrita (problema PE.8).

En este ciclo prestaremos especial atención a las producciones de los alumnos en los problemas de reparto inversamente proporcionales ya que, como hemos dicho en varias ocasiones, durante este ciclo se cambió totalmente el enfoque de enseñanza en este tipo de problemas. En lo que respecta a los problemas de reparto directamente proporcionales estaremos atentos a los indicadores que nos marquen si hemos llegado a un ciclo de saturación en este foco.

Análisis de la situación introductoria.

En la Tabla VIII - 38 se presentan los resultados en las categorías generales para los dos problemas de la situación introductoria. Recordamos que el primero de ellos, F8.1.1, es un problema de reparto susceptible de realizarse mediante un modelo directamente proporcional, mientras que el segundo, F8.1.2, para encontrar la solución óptima, debe resolverse mediante un modelo de reparto inversamente proporcional. Como en el primer ciclo, hemos sombreado en gris las filas en las tablas de resultados correspondientes a problemas de repartos inversamente proporcionales.

Recordamos el enunciado de F8.1.2 ya que es uno de los principales cambios de la propuesta en este ciclo:

F8.1.2: *Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?*

		N	B	I	C
F8.1.1	N.º de respuestas	0	1	1	8
	Porcentaje	-	10 %	10 %	80 %
F8.1.2	N.º de respuestas	0	0	3	7
	Porcentaje	-	-	30 %	70 %

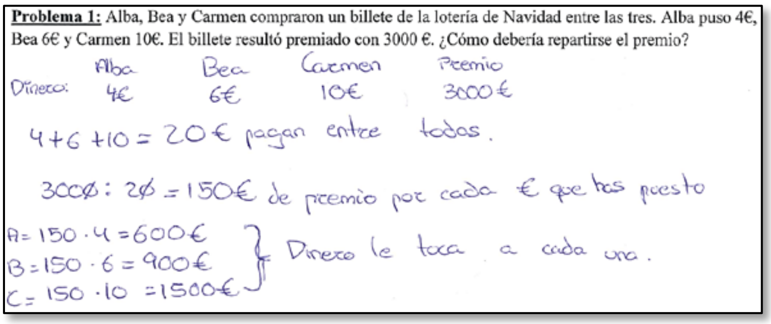
Tabla VIII - 38. Resultados generales en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo II-2).

En la Tabla VIII - 39 se recogen las frecuencias en las que se ha elegido un modelo de reparto equitativo (MR1), de compensación aditiva (MR2) o proporcional (MR3) para cada uno de los problemas de la situación introductoria.

		MR1	MR2	MR3
F8.1.1	N.º de respuestas	0	1	8
	Porcentaje	-	10 %	80 %
F8.1.2	N.º de respuestas	3	0	7
	Porcentaje	30 %	-	70 %

Tabla VIII - 39. Modelo de reparto empleado en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo II-2).

En cuanto al primer problema, los resultados son muy similares a los descritos en el Capítulo VI para el ciclo I-2. Una amplia mayoría de alumnos responde de forma correcta utilizando un modelo de reparto directamente proporcional. Las técnicas utilizadas pasan por considerar la estructura parte-todo y una estrategia funcional para resolver el problema de valor perdido. Los alumnos calculan la razón externa entre el premio obtenido y el valor total del billete de lotería, obteniendo así el valor económico del premio correspondiente a cada unidad de valor económico del billete. Posteriormente se multiplica esta razón externa por la cantidad invertida por cada participante en el reparto para adquirir el billete. Un ejemplo paradigmático de este tipo de resolución (que ya analizamos en el Capítulo VI) puede verse en la Imagen VIII - 7.


Problema 1: Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4€, Bea 6€ y Carmen 10€. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?

Dinero: Alba 4€ Bea 6€ Carmen 10€ Premio 3000€

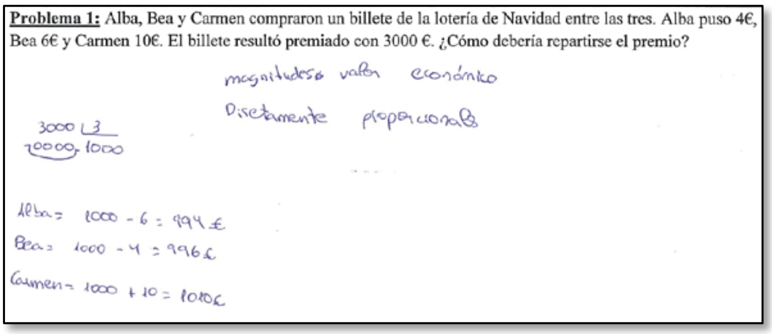
4+6+10 = 20€ pagan entre todos.

300~~0~~ : 2~~0~~ = 150€ de premio por cada € que has puesto

A = 150 · 4 = 600€
B = 150 · 6 = 900€
C = 150 · 10 = 1500€
Dinero le toca a cada una.

Imagen VIII - 7. Producción del equipo A3 para el problema F8.1.1 (Ciclo II-2).

Destacamos que, en este ciclo, encontramos una respuesta que utiliza un modelo de compensación aditiva. Este hecho, aunque anecdótico, no había sido observado en el primer ciclo. La respuesta del equipo A5 (ver Imagen VIII - 8) tras un reparto equitativo del premio substrae (y en un caso añade) la cantidad que había puesto cada participante para comprar el billete de lotería. No se trata de una respuesta correcta si atendemos a un modelo de compensación aditiva, ya que las diferencias entre la cantidad repartida y la invertida no son constantes, pero sí que los estudiantes parecen seguir ideas similares.


Problema 1: Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4€, Bea 6€ y Carmen 10€. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?

magnitudes: valor económico
Directamente proporcionales

3000 | 3
0000 | 1000

Alba = 1000 − 6 = 994 €
Bea = 1000 − 4 = 996 €
Carmen = 1000 + 10 = 1010 €

Imagen VIII - 8. Producción del equipo A5 para el problema F8.1.1 (Ciclo II-2).

Para el problema de reparto inversamente proporcional F8.1.2 observamos que, en este segundo ciclo en 2º de ESO, no hubo respuestas en blanco. De las diez parejas, ninguna utiliza argumentos aditivos (MR2), tres recurren a un modelo de reparto equitativo (MR1) y las siete parejas restantes optan por un modelo de reparto inversamente proporcional (MR3) aplicado de forma correcta (ver Tabla VIII - 39). En cambio, en el ciclo anterior hubo siete respuestas que utilizaron un modelo de compensación aditiva (MR2) y solo dos que utilizaron un modelo de reparto inversamente proporcional (MR3), por lo que parece que el nuevo problema favorece de forma mucho más clara la aparición de respuestas proporcionales.

Las parejas que realizan un reparto equitativo calculan a su vez el número total de piezas de cada tipo que el artesano haría en dicho tiempo (Imagen VIII - 9, izquierda y centro), a excepción de una pareja que, pese a repartir el tiempo en dos partes iguales, interpreta de forma errónea el resultado (Imagen VIII - 9, derecha).

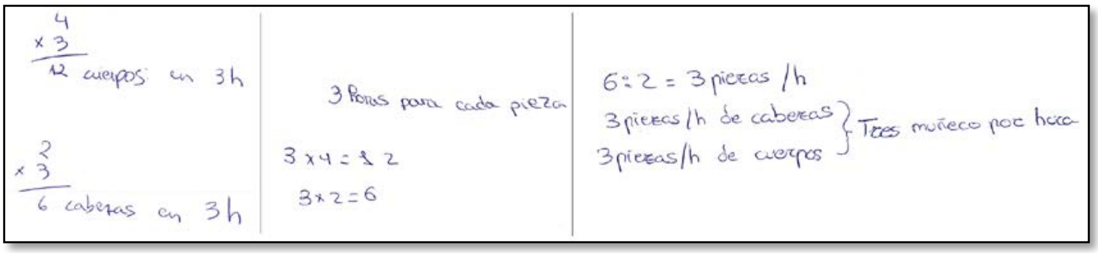


Imagen VIII - 9. Detalle de las producciones del equipo A5 (izquierda), A6 (Centro) y A3 (derecha) para el problema F8.1.2 (Ciclo II-2).

En el resto de las producciones, algunos alumnos responden que se debe dedicar el doble de tiempo a la tarea que se realiza a la mitad de velocidad (Imagen VIII - 10, abajo izquierda). Es decir, responden que, de las seis horas, debe dedicar dos horas a hacer los cuerpos y cuatro horas a hacer las cabezas. Además, todos ellos interpretan la constante de proporcionalidad como el número total de muñecos (o de piezas de cada tipo para hacer muñecos enteros) que hace el artesano, a pesar de que el problema no lo solicitaba (Imagen VIII - 10). De hecho, la búsqueda de esta constante de proporcionalidad es la que parece haber guiado el razonamiento de muchas de las parejas que explicitan argumentos del tipo "Hemos buscado hacer las mismas piezas", "… que haya muñecos enteros", etc.

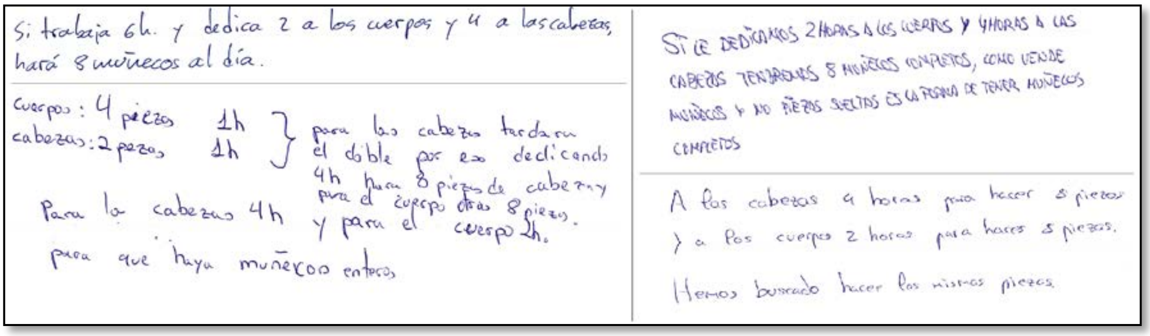


Imagen VIII - 10. Detalle de las producciones de los equipos A10 (arriba izquierda), A9 (abajo izquierda), A4 (arriba derecha) y A1 (abajo derecha) para el problema F8.1.2 (Ciclo II-1).

Cinco de las parejas utilizan resoluciones similares a la descrita en el primer ciclo. Dos de ellas realizan explícitamente la suma de los pesos y la división del tiempo total por la suma de los pesos (Imagen VIII - 11, izquierda), si bien la sencillez de la estructura numérica en esta situación provoca que no se expliciten todas las operaciones.

Otra respuesta interesante puede verse en la Imagen VIII - 11 (derecha) donde los alumnos establecen los inversos de los pesos y los interpretan correctamente como el tiempo que se dedica a hacer cada una de las piezas.

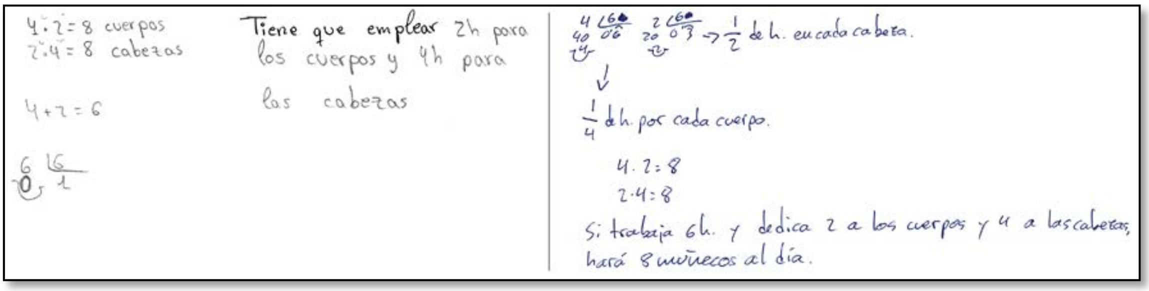


Imagen VIII - 11. Detalle de las producciones de los equipos A7 (izquierda) y A10 (derecha) para el problema F8.1.2 (Ciclo II-2).

Análisis de las producciones según las categorías generales.

En la Tabla VIII - 40 observamos los resultados en las categorías generales para el resto de los problemas de repartos que se proponen en la propuesta. Como hemos dicho, en este ciclo se ha reducido el número de problemas, por lo que solo tenemos dos problemas (uno de cada tipo) en una ficha de trabajo para casa y el problema de reparto directamente proporcional de la prueba escrita.

		N	B	I	C
TC8.1	N.º de respuestas	5	2	1	12
	Porcentaje	25 %	10 %	5 %	60 %
TC8.2	N.º de respuestas	5	2	10	3
	Porcentaje	25 %	10 %	50 %	15 %
PE.8	N.º de respuestas	0	2	5	13
	Porcentaje	-	10 %	25 %	65 %

Tabla VIII - 40. Resultados generales en los problemas de repartos proporcionales (Ciclo II-2).

En general, observamos que las tasas de éxito son menores que las correspondientes a los problemas de la situación introductoria. Este hecho es coherente con lo observado en el resto de la propuesta, en los problemas que deben realizar los alumnos de forma individual bajan las tasas de éxito. En cualquier caso, vemos que los problemas de repartos directamente proporcionales tienen una baja tasa de respuestas incorrectas y una tasa de respuestas correctas aceptable. Los resultados de la prueba escrita comparados con los obtenidos en el ciclo I-2 no arrojan diferencias estadísticas significativas (p- valor $0{,}4801$ para un test exacto de Fisher comparando las frecuencias de respuestas correctas y no correctas en ambos ciclos).

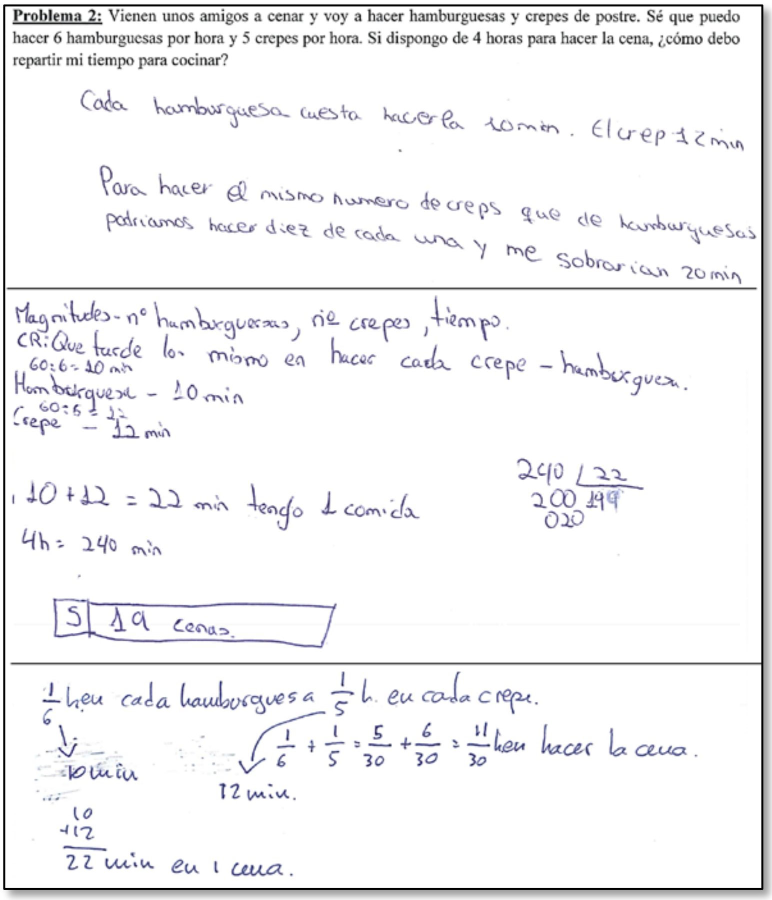
En cuanto al problema TC8.2, que puede seguir un modelo de reparto inversamente proporcional, vemos que la tasa de éxito baja de forma significativa respecto a la situación introductoria. Los estudiantes parecen haber encontrado mayor dificultad en el problema TC8.2 que en el problema F8.1.2. Parte de esta dificultad puede explicarse por la estructura numérica más compleja del problema TC8.2. Recordemos que la estructura numérica del problema F8.1.2 es

$$\left(6\colon\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)\leftrightarrow(x_A\colon 4),(x_B\colon 2),$$

Mientras que en el problema TC8.2 es la siguiente:

$$\left(4\colon\frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}\right)\leftrightarrow(x_A\colon 6),(x_B\colon 5).$$

En esta última estructura numérica los pesos según los que se reparten son coprimos. En el primer problema uno era múltiplo de otro, lo cual pudo favorecer la búsqueda del reparto del tiempo por ensayo y error. Además, en el segundo problema la solución óptima supone hacer diez cenas, cada una de las cuales cuesta un tiempo de 22 minutos hacerla, por lo que sobran 20 minutos que son insuficientes para realizar un menú completo pero pueden repartirse de formas diferentes (o no repartirse). Esta estructura numérica confiere al problema un carácter más abierto que ha podido dificultar su resolución. En cualquier caso, tanto en las respuestas correctas como en varias de las incorrectas, encontramos elementos interesantes.


Problema 2: Vienen unos amigos a cenar y voy a hacer hamburguesas y crepes de postre. Sé que puedo hacer 6 hamburguesas por hora y 5 crepes por hora. Si dispongo de 4 horas para hacer la cena, ¿cómo debo repartir mi tiempo para cocinar?

Cada hamburguesa cuesta hacerla 10 min. El crep 12 min

Para hacer el mismo numero de creps que de hamburguesas podriamos hacer diez de cada una y me sobrarian 20 min

Magnitudes - nº hamburguesas, nº crepes, tiempo.
CR: Que tarde lo mismo en hacer cada crepe - hamburguesa.
60:6 = 10 min
Hamburguesa - 10 min
60:5 = 12
Crepe - 12 min

10 + 12 = 22 min tengo 1 comida
4h = 240 min

240 | 22
200 19
020

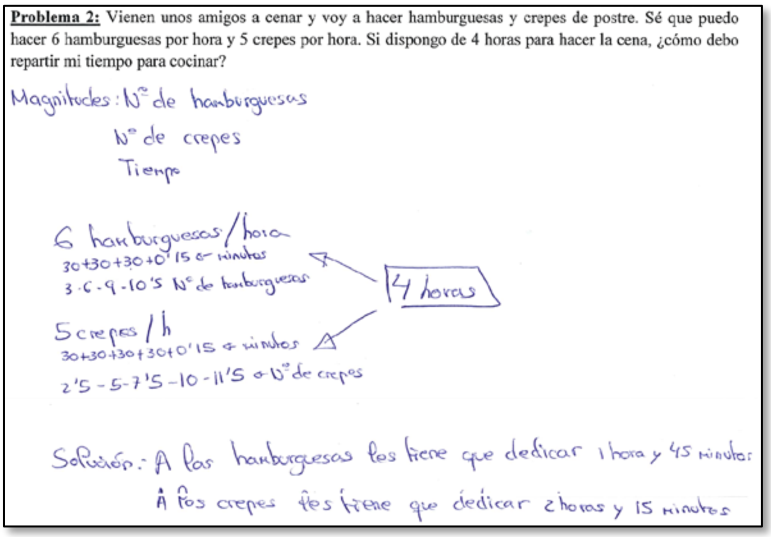
S | 19 cenas.

$\frac{1}{6}$ h en cada hamburguesa $\frac{1}{5}$ h. en cada crepe.
$\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{5}{30}+\frac{6}{30}=\frac{11}{30}$ h en hacer la cena.
10 min
12 min.
10
+12
22 min en 1 cena.

Imagen VIII - 12. Producciones de los alumnos A6.2 (arriba), A9.1 (centro) y A10.2 (abajo) para el problema TC8.2 (Ciclo II-2).

En la Imagen VIII - 12 vemos dos de las producciones correctas (arriba y centro) y la producción incorrecta del alumno A10.2 (abajo), que tiene elementos interesantes para la puesta en común. Notemos que la producción del alumno A9.1 (Imagen VIII - 12, centro) ha sido considerada correcta pese al error aritmético final. Tanto A9.1 como A6.2 (Imagen VIII - 12, arriba) resuelven correctamente tras calcular el tiempo que se debe invertir en realizar cada plato y cada cena. Sin embargo, no dejan constancia de cómo realizan este cálculo. A10.2, en cambio, calcula los inversos de los pesos de forma similar a como hemos comentado alrededor de la Imagen VIII - 11 (derecha) de forma que se puede conectar este cálculo de los inversos de los pesos (tiempo que tarda en cada plato en horas) con el cálculo del tiempo que se invierte en cada plato en minutos realizado por los alumnos A9.1 y A6.2.

Otra producción interesante y que da cuenta del carácter más abierto del problema es la del alumno A1.2, clasificada como respuesta correcta (Imagen VIII - 13). El alumno da como respuesta uno de los posibles repartos de tiempo en el que se realizan diez platos de cada tipo (de hecho, hace un plato más de uno de los tipos y le sobra tiempo en el reparto hecho a cada tipo de plato). La búsqueda de la solución la hace mediante una técnica de construcción progresiva en la que no llega a calcular el tiempo que invierte en hacer cada plato, sino que va sumando horas completas y medias horas hasta llegar a la solución presentada.


Problema 2: Vienen unos amigos a cenar y voy a hacer hamburguesas y crepes de postre. Sé que puedo hacer 6 hamburguesas por hora y 5 crepes por hora. Si dispongo de 4 horas para hacer la cena, ¿cómo debo repartir mi tiempo para cocinar?

Magnitudes: Nº de hamburguesas
Nº de crepes
Tiempo

6 hamburguesas / hora
30+30+30+0'15 → minutos
3 - 6 - 9 - 10'5 Nº de hamburguesas

4 horas

5 crepes / h
30+30+30+30+0'15 → minutos
2'5 - 5 - 7'5 - 10 - 11'5 → Nº de crepes

Solución: A las hamburguesas les tiene que dedicar 1 hora y 45 minutos
A los crepes les tiene que dedicar 2 horas y 15 minutos

Imagen VIII - 13. Producción del alumno A1.2 para el problema TC8.2 (Ciclo II-2).

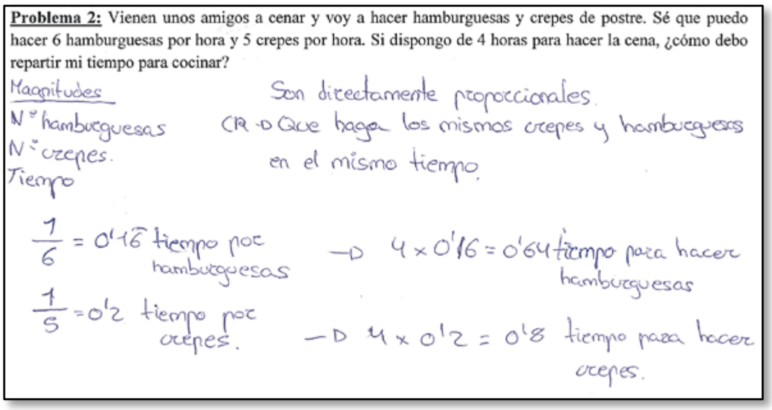
Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Como vemos en la Tabla VIII - 41, en el resto de la propuesta han desaparecido los modelos de reparto de compensación aditiva (MR2) y en los problemas de repartos directamente proporcionales tampoco aparecen producciones que sigan un modelo de reparto igualitario (MR1).

		MR1	MR2	MR3
TC8.1	N.º de respuestas	0	0	12
	Porcentaje	-	-	60 %
TC8.2	N.º de respuestas	3	0	7
	Porcentaje	15 %	-	35 %
PE.8	N.º de respuestas	0	0	15
	Porcentaje	-	-	75 %

Tabla VIII - 41. Modelo de reparto empleado (Ciclo II-2).

En el reparto inversamente proporcional que hay después de la institucionalización, siguen teniendo una cierta presencia las respuestas que usan un modelo de reparto igualitario (MR1), pero la mayor parte de los alumnos en los que puede clasificarse el modelo de reparto que siguen parecen usar un modelo proporcional. Aparecen, por tanto, varias producciones que, intentando seguir un modelo proporcional, responden de forma incorrecta al problema. Un ejemplo de estas producciones puede verse en la Imagen VIII - 14. En su intento de resolución, el alumno A3.1 considera los inversos de los pesos en notación fraccionaria (que convierte a notación decimal). Además, interpreta correctamente los inversos de estos pesos. Sin embargo, tras este cálculo e interpretación multiplica el tiempo total por estos valores de forma incorrecta.


Problema 2: Vienen unos amigos a cenar y voy a hacer hamburguesas y crepes de postre. Sé que puedo hacer 6 hamburguesas por hora y 5 crepes por hora. Si dispongo de 4 horas para hacer la cena, ¿cómo debo repartir mi tiempo para cocinar?

Magnitudes
Nº hamburguesas
Nº crepes.
Tiempo

Son directamente proporcionales.
CR → Que haga los mismos crepes y hamburguesas en el mismo tiempo.

$\frac{1}{6}$ = 0'16 tiempo por hamburguesas → 4 × 0'16 = 0'64 tiempo para hacer hamburguesas

$\frac{1}{5}$ = 0'2 tiempo por crepes. → 4 × 0'2 = 0'8 tiempo para hacer crepes.

Imagen VIII - 14. Producción del alumno A3.1 para el problema TC8.2 (Ciclo II-2).

Otras producciones erróneas analizadas que intentan realizar un reparto inversamente proporcional siguen estrategias de construcción progresiva como la comentada alrededor de la Imagen VIII - 13, pero cometiendo fallos en el proceso o dejando el problema inacabado.

VIII.3.1.6. Interpretación del porcentaje y problemas asociados

Los problemas de porcentajes, incluidos los aumentos y disminuciones porcentuales, se trabajaron de forma específica en las sesiones 9, 10, 11 y 12. En concreto, las fichas de trabajo F9.1, TC9, F10.1, F11.1, TC11 y F12.1 se dedican en exclusiva a problemas relacionados con este foco de interés (también se trabaja el concepto de razón para conectarlo con el de porcentaje). Además, se introdujeron dos problemas de disminuciones porcentuales en la ficha de repaso F13.1. Para evaluar este foco de interés se introdujeron los problemas PE.9.1 y PE.9.2 en la prueba escrita individual. Aunque en la sección VIII.3.1.1 hemos incorporado problemas relacionados con situaciones de porcentajes que se centraban en el cálculo de razones, volvemos a incorporar en esta sección aquellos problemas que forman parte de las situaciones introductorias. En concreto, las fichas de trabajo F9.1 y F11.1 contienen los problemas que se constituyen como situación introductoria para las situaciones relacionadas con porcentajes en general, y para las situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales, respectivamente.

Análisis de las situaciones introductorias.

En la Tabla VIII - 42 y en la Tabla VIII - 43 se presenta el análisis cuantitativo según las categorías generales para las situaciones introductorias del concepto de porcentaje y de los aumentos y disminuciones porcentuales, respectivamente. Debido a la estructuración, estas actividades tienen un carácter más cerrado por lo que solo las analizaremos según su corrección (no realizaremos un análisis de categorías específicas para estudiar las estrategias empleadas).

	N	B	I	C
F9.1.1.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.1.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (10)
F9.1.1.3	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F9.1.1.4	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F9.1.1.5	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (8)
F9.1.1.6	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (8)
F9.1.2.1	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)

	N	B	I	C
F9.1.2.2	0 (0)	30 (3)	0 (0)	70 (7)
F9.1.2.3	0 (0)	10 (1)	20 (2)	70 (7)
F9.1.2.4	0 (0)	30 (3)	0 (0)	70 (7)
F9.1.2.5	0 (0)	20 (2)	10 (1)	70 (7)
F9.1.3.1	0 (0)	10 (1)	40 (4)	50 (5)
F9.1.3.2	0 (0)	30 (3)	0 (0)	70 (7)
F9.1.3.3	0 (0)	40 (4)	0 (0)	60 (6)

Tabla VIII - 42. Resultados generales en la situación introductoria de porcentajes (Ciclo II-2).

Para la primera situación introductoria contenida en la ficha de trabajo F9.1 vemos que los porcentajes de acierto son elevados, ninguno por debajo del 50 %, aunque se observa una mayor tasa de respuestas en blanco que hace bajar la tasa de acierto en la segunda mitad de la ficha. Por tanto, se obtienen peores resultados en el problema F9.1.3 que en los dos anteriores. Esta disminución de la tasa de éxito puede deberse a la longitud de la ficha de trabajo o a que los alumnos encuentran una mayor dificultad interpretando una razón dada que calculando el valor cuando se les proporciona el significado.

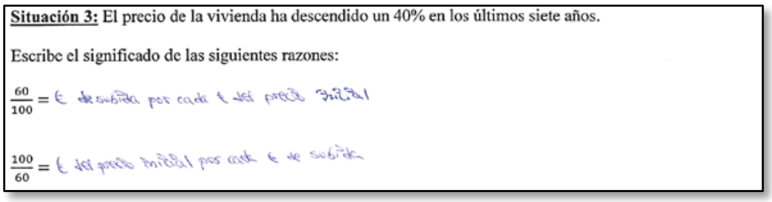
	N	B	I	C
F11.1.1.1	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (8)
F11.1.1.2	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F11.1.1.3	0 (0)	0 (0)	40 (4)	60 (6)
F11.1.1.4	0 (0)	10 (1)	30 (3)	60 (6)
F11.1.1.5	0 (0)	0 (0)	60 (6)	40 (4)
F11.1.2.1	0 (0)	0 (0)	20 (2)	80 (8)
F11.1.2.2	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)

	N	B	I	C
F11.1.3.1	0 (0)	10 (1)	40 (4)	50 (5)
F11.1.3.2	0 (0)	10 (1)	30 (3)	60 (6)
F11.1.4.1	0 (0)	0 (0)	10 (1)	90 (9)
F11.1.4.2	0 (0)	10 (1)	10 (1)	80 (8)
F11.1.4.3	0 (0)	20 (2)	10 (1)	70 (7)
F11.1.4.4	0 (0)	30 (3)	10 (1)	60 (6)
F11.1.4.5	0 (0)	20 (2)	60 (6)	20 (2)

Tabla VIII - 43. Resultados generales en la situación introductoria de aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo II-2).

En la segunda situación introductoria para aumentos y disminuciones porcentuales se observan también unas elevadas tasas de éxito que solo bajan del 50 % en dos ítems, F11.1.1.5 y

F11.1.4.5. En dichos ítems se solicita a los alumnos calcular el valor numérico de la razón que da cuenta de la cantidad inicial por cada unidad monetaria de la cantidad final, de forma que se invierte el referente natural al que va asociado el aumento o disminución. Además, observamos que el problema F11.1.3, en el que los alumnos deben dar el valor de una razón externa en una situación de disminución cuando se les proporciona su interpretación, tiene unas tasas de éxito más bajas que el problema F11.1.2, análogo para una situación de aumento. En las disminuciones porcentuales, la cantidad final coincide con el complementario a 100 de la disminución, lo que parece que ha llevado a los alumnos a considerar dicho complementario de la disminución como "subida" (ver Imagen VIII - 15).


Situación 3: El precio de la vivienda ha descendido un 40% en los últimos siete años.

Escribe el significado de las siguientes razones:

$\frac{60}{100}$ = € de subida por cada € del precio inicial

$\frac{100}{60}$ = € del precio inicial por cada € de subida

Imagen VIII - 15. Producción del equipo A4 para el problema F11.1.3 (Ciclo II-2).

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Pasamos ahora a analizar los problemas de valor perdido y de cálculo de complementarios asociados a situaciones de porcentaje propuestos durante la unidad didáctica. Omitimos en esta sección el resto de los problemas que inciden en la relación entre porcentaje y razón y que ya se analizaron en la sección VIII.3.11.

En la Tabla VIII - 44 se presentan los resultados en las cuatro categorías generales. Como en otros ciclos, hemos indicado a la derecha de la codificación el tipo de problema. Encontramos un problema de comparación cuantitativa ("C. Cuant.") y varios problemas de cálculo de complementarios ("Comp.") junto con los tres tipos de problemas de valor perdido (Tipo I, II y III), tanto en situaciones generales como en situaciones de aumentos ("Au.") y disminuciones ("Dis.").

Como en otros focos, observamos que los porcentajes de acierto en las tareas que los alumnos realizan por equipos son generalmente mayores que en las tareas que realizan de forma individual. De todas formas, de los 21 ítems analizados solo se obtienen tasas inferiores al 50 % en dos de ellos. En concreto en TC11.2.4 y en F12.1.3. El primero de ellos es un problema de cálculo de la cantidad inicial conocida la cantidad final y el porcentaje de descuento, y el segundo de ellos es un problema de cálculo del porcentaje de aumento conocidas las cantidades inicial y final.

En TC11.2.4 volvemos a encontrar algunas de las dificultades observadas en la situación introductoria sobre la interpretación de la cantidad final en una situación de disminución. En F12.1.3 se han dado por incorrectas las producciones que expresan como resultado del aumento el porcentaje que representa la cantidad final respecto a la inicial $(100 + p)$ % en vez de p % lo que ha reducido mucho el número de respuestas correctas.

			N	B	I	C
F10.1.1.1	Comp.	N.º de respuestas	0	0	0	10
		Porcentaje	-	-	-	100 %
F10.1.1.2	Tipo I	N.º de respuestas	0	1	0	9
		Porcentaje	-	10 %	-	90 %
F10.1.2	Tipo III	N.º de respuestas	0	1	1	8
		Porcentaje	-	10 %	10%	80 %
F10.1.3.1	Tipo III	N.º de respuestas	0	2	2	6
		Porcentaje	-	20 %	20 %	60 %
F10.1.3.2	Comp.	N.º de respuestas	0	1	0	9
		Porcentaje	-	10 %	-	90 %
F10.1.4.1	C. Cuant.	N.º de respuestas	0	0	0	10
		Porcentaje	-	-	-	100 %
F10.1.4.2	Tipo I	N.º de respuestas	0	2	0	8
		Porcentaje	-	20 %	-	80 %
F10.1.4.3	Comp.	N.º de respuestas	0	1	2	7
		Porcentaje	-	10 %	20 %	70 %
TC11.1.3	Tipo I Au.	N.º de respuestas	4	0	3	13
		Porcentaje	20 %	-	15 %	65 %
TC11.1.4	Tipo III Au.	N.º de respuestas	4	1	3	12
		Porcentaje	20 %	5 %	15 %	60 %
TC11.2.3	Tipo I Dis.	N.º de respuestas	4	4	2	10
		Porcentaje	20 %	20 %	10 %	50 %
TC11.2.4	Tipo III Dis.	N.º de respuestas	4	6	2	8
		Porcentaje	20 %	30 %	10 %	40 %
F12.1.1.1	Tipo I Au.	N.º de respuestas	0	0	0	10
		Porcentaje	-	-	-	100 %
F12.1.1.2	Tipo III Au.	N.º de respuestas	0	0	1	9
		Porcentaje	-	-	10 %	90 %
F12.1.2.1	Tipo I Dis.	N.º de respuestas	0	0	0	10
		Porcentaje	-	-	-	100 %
F12.1.2.2	Tipo III Dis.	N.º de respuestas	0	1	2	7
		Porcentaje	-	10 %	20 %	70 %
F12.1.3	Tipo II Au.	N.º de respuestas	0	1	6	3
		Porcentaje	-	10 %	60 %	30 %
F13.1.4.1	Tipo III Dis.	N.º de respuestas	0	0	3	7
		Porcentaje	-	-	30 %	70 %
F13.1.4.2	Tipo I Dis.	N.º de respuestas	0	2	1	7
		Porcentaje	-	20 %	10 %	70 %
PE.9.1	Tipo I Au.	N.º de respuestas	0	0	3	17
		Porcentaje	-	-	15 %	85 %
PE.9.2	Tipo III Au.	N.º de respuestas	0	2	7	11
		Porcentaje	-	10 %	35 %	55 %

Tabla VIII - 44. Resultados generales en los problemas de porcentajes (Ciclo II-2).

Estas elevadas tasas de éxito generales apuntan hacia un mejor desempeño de los alumnos en los problemas relacionados con el porcentaje en este ciclo. Si comparamos los resultados en la prueba escrita de los grupos experimentales en los ciclos I-2 y II-2, observamos que en este ciclo las tasas de acierto se incrementan en un 15 % y un 20 % para los problemas PE.9.1 y PE.9.2, respectivamente. Aunque estas diferencias no son estadísticamente significativas (p-valor $0{,}1552$ y $0{,}3406$ respectivamente), cabe destacar que en 1º de ESO la comparativa entre los ciclos II-1 y III-1 (de donde provienen los alumnos de los ciclos I-2 y II-2) arrojaba resultados significativamente peores en los alumnos del ciclo II-2. Por tanto, estos alumnos parecen haber mejorado sustancialmente su desempeño en los problemas de valor perdido asociados al porcentaje.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Para el siguiente nivel de análisis, cuyos resultados se recogen en la Tabla VIII - 45, nos hemos quedado solo con los problemas de valor perdido de Tipo I, II y III.

		VPp0	**VPp2**	**VPp3**	**VPp7**	**VPp8**	**VPp9**
F10.1.1.2	Tipo I	0 (0)	20 (2)	50 (5)	20 (2)	0 (0)	0 (0)
F10.1.2	Tipo III	0 (0)	10 (1)	80 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.1.3.1	Tipo III	10 (1)	10 (1)	60 (6)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.1.4.2	Tipo I	0 (0)	20 (2)	50 (5)	10 (1)	0 (0)	0 (0)
F12.1.1.1	Tipo I Au.	0 (0)	0 (0)	100 (10)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F12.1.1.2	Tipo III Au.	0 (0)	10 (1)	90 (9)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F12.1.2.1	Tipo I Dis.	0 (0)	10 (1)	90 (9)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F12.1.2.2	Tipo III Dis.	0 (0)	0 (0)	70 (7)	0 (0)	0 (0)	20 (2)
F12.1.2.3	Tipo II Au.	10 (1)	10 (1)	60 (6)	0 (0)	0 (0)	10 (1)
F13.1.4.1	Tipo I Dis.	0 (0)	0 (0)	70 (7)	0 (0)	0 (0)	30 (3)
F13.1.4.2	Tipo III Dis.	0 (0)	0 (0)	70 (7)	0 (0)	0 (0)	10 (1)
PE.9.1	Tipo I Au.	0 (0)	10 (2)	80 (16)	0 (0)	5 (1)	0 (0)
PE.9.2	Tipo III Au.	0 (0)	0 (0)	60 (12)	0 (0)	5 (1)	20 (4)

Tabla VIII - 45. Estrategias utilizadas en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo II-2).

Vemos un claro predominio de la estrategia institucionalizada a partir de razones externas que permiten resolver el problema realizando una multiplicación (VPp3). La frecuencia de esta estrategia es mucho mayor a la observada en anteriores ciclos. En este ciclo ninguna de las frecuencias de VPp3 es menor del $50\ \%$, mientras que en el ciclo II-1 estaba por debajo del $50\ \%$ en 9 de los 11 problemas analizados, en el ciclo I-2 en 7 de los 10 y en el ciclo III-1 en 10 de los 14.

El mayor uso de estas estrategias viene acompañado de unas producciones más y mejor argumentadas que en los ciclos anteriores. Sirva como ejemplo la evolución del alumno A4.2 entre el ciclo III-1 (en dicho ciclo su codificación era B6.1) y el actual ciclo II-2. En la Imagen VIII - 16 (izquierda) vemos la respuesta del alumno en los dos apartados del problema PE.9 en la prueba escrita de 2º de ESO y en la parte derecha de la imagen vemos su producción en uno de los problemas de porcentajes, PE.8, de la prueba escrita de 1º de ESO.

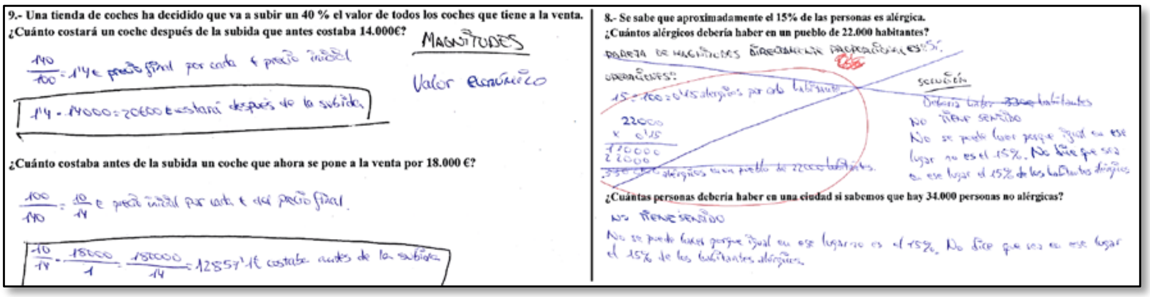


Imagen VIII - 16. Producción del alumno A4.2 (ciclo II-2) para el problema de la prueba escrita de 2º de ESO PE.9 (izquierda) y el problema de la prueba escrita de 1º de ESO PE.8 (derecha).

Desaparecen casi por completo las resoluciones mediante la aplicación de una fórmula (VPp7), que se limitan a tres producciones en la primera ficha de trabajo. También tienen una frecuencia muy baja las resoluciones no razonadas (VPp0). Además, se reduce el uso de operaciones sin sentido (VPp8) y de razonamientos aditivos erróneos (VPp9).

Una de las estrategias que mantiene su presencia de forma constante, aunque minoritaria, es el análisis unitario (VPp2). En estas producciones los alumnos consideran el porcentaje como una cantidad de magnitud y calculan una razón que interpretan como tanto por cada 1 %. En la entrevista semiestructurada realizada al alumno A8.2 indagaremos más sobre los razonamientos que hacen los alumnos cuando aplican este tipo de estrategia (ver sección VIII.3.3.3).

VIII.3.2. Comparativa con los resultados del grupo de control

Comparamos en esta sección los resultados obtenidos en el grupo experimental (GE) y el grupo de control (GC) en los problemas de la prueba escrita. Como en las anteriores secciones, realizamos este análisis en dos niveles. En primer lugar, el estudio comparativo de los resultados en las categorías generales. En segundo lugar, agrupados por focos de interés, el estudio comparativo de los resultados en las categorías específicas. Se repiten, por tanto, en esta sección, los resultados obtenidos por el grupo experimental en los problemas de la prueba escrita con el propósito de realizar la comparativa mencionada y de sintetizar los resultados obtenidos por los alumnos sobre los que hemos intervenido al finalizar la propuesta.

VIII.3.2.1. Análisis comparativo según las categorías generales

La Tabla VIII - 46 contiene las diferentes tablas de contingencia, expresadas con las frecuencias relativas, para cada ítem de la prueba escrita, quince en total. Para cada tabla de contingencia se aporta el p-valor correspondiente al test exacto de Fisher que compara las variables “corrección en la respuesta: correcta, C / no correcta, N+B+I” y “grupo de procedencia del alumno; GE / GC” para contrastar la hipótesis nula de independencia entre ellas. La información se apoya con la Figura VIII - 1 que presenta un diagrama de barras comparado con los porcentajes de acierto en los diferentes problemas para el grupo experimental y el grupo de control.

El estudio de esta tabla de resultados muestra que el grupo experimental ha obtenido mejores resultados en doce de los quince ítems y sólo ha obtenido peor resultado que el grupo de control en un ítem (PE.1.3, en el que se debía detectar una relación de proporcionalidad simple inversa). Esto parece apuntar a una mejora entre los ciclos I-2 y II-2, ya que en el ciclo I-2 se obtuvieron mejores resultados en el grupo experimental en ocho de los ítems y peores resultados en los siete restantes.

De estas diferencias, el estudio del p-valor para un nivel de confianza del $95\,\%$ indica diferencias significativas a favor del grupo experimental en los ítems PE.6, PE.9.1 y PE.9.2 y en ninguno a favor del grupo de control. Estas diferencias significativas a favor del grupo experimental aparecen en ítems correspondientes al Foco 1 (análisis y caracterización de relaciones de proporcionalidad) y al Foco 6 (concepto de porcentaje y problemas asociados).

		N+B+I	C	p-valor
PE.1.1	GE	45 %	55 %	0,2003
	GC	70 %	30 %	
PE.1.2	GE	25 %	75 %	0,3203
	GC	45 %	55 %	
PE.1.3	GE	25 %	75 %	0,5382
	GC	5 %	95 %	
PE.1.4	GE	15 %	85 %	0,1552
	GC	40 %	60 %	
PE.2.1	GE	40 %	60 %	0,7512
	GC	50 %	50 %	
PE.2.2	GE	50 %	50 %	1
	GC	50 %	50 %	
PE.2.3	GE	70 %	30 %	0,0915
	GC	95 %	5 %	
PE.3	GE	35 %	65 %	0,1128
	GC	65 %	35 %	
PE.4	GE	50 %	50 %	1
	GC	50 %	50 %	
PE.5	GE	40 %	60 %	0,5273
	GC	55 %	45 %	
PE.6	GE	5 %	95 %	0,0000
	GC	85 %	15 %	
PE.7	GE	25 %	75 %	0,1053
	GC	55 %	45 %	
PE.8	GE	35 %	65 %	0,3406
	GC	55 %	45 %	
PE.9.1	GE	15 %	85 %	0,0407
	GC	50 %	50 %	
PE.9.2	GE	45 %	55 %	0,0001
	GC	100 %	0 %	

Tabla VIII - 46. Comparativa del grado de éxito entre el grupo experimental (N=20) y el grupo de control (N=20) en el ciclo II-2.

Son muy llamativos los resultados obtenidos en el problema de aumentos porcentuales PE.9, sobre todo teniendo en cuenta los malos resultados que obtuvieron los alumnos del grupo experimental en el ciclo III-1, del que provienen mayoritariamente los alumnos del grupo experimental de este ciclo. De hecho, en la comparativa con el grupo de control en el Capítulo VII vimos que los alumnos del grupo experimental obtenían peores resultados que los alumnos del grupo de control en tres de los cuatro problemas de valor perdido que contenía la prueba escrita. En este ciclo, en el problema PE.9.1, la diferencia entre las tasas de éxito del grupo experimental y del grupo de control es de un $35\,\%$ y de un $55\,\%$ en el problema PE.9.2 (a favor del grupo experimental).

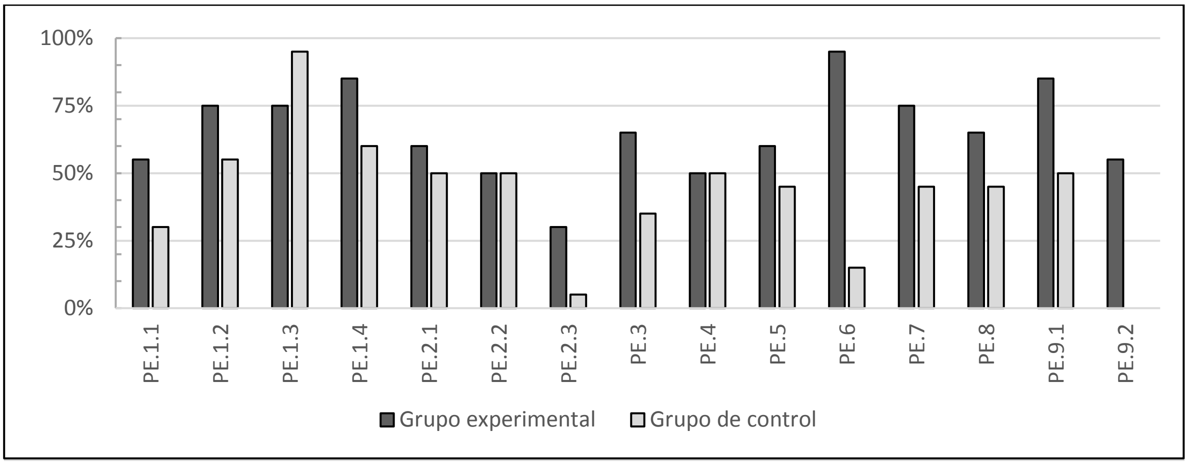


Figura VIII - 1. Gráfico comparativo con los porcentajes de respuestas correctas en la prueba escrita en entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo II-2).

Otro dato llamativo, tanto en el estudio de este ciclo como si comparamos los resultados con los obtenidos en el ciclo anterior para 2º de ESO (ver Figura VI-1). Es que los alumnos del grupo experimental obtienen resultados de acierto iguales o superiores al 75 % en seis ítems de la prueba escrita, en el ciclo I-2 se alcanzó en tres. El grupo de control en este ciclo solo alcanza dicho nivel en el problema PE.1.3. De forma similar, el grupo experimental de este ciclo solo obtiene una tasa de acierto inferior al 50 % en el problema PE.2.3, mientras que en el grupo experimental del ciclo I-2 encontrábamos tasas por debajo de esa cota en tres ítems y en el grupo de control de este ciclo se obtienen cotas inferiores al 50 % en siete ítems de la prueba escrita.

Centrándonos en el estudio longitudinal, también podemos observar la mejora del grupo experimental en comparación con los resultados del grupo experimental del ciclo III-1 (del que provienen los alumnos de este ciclo) en los ítems comunes en la prueba escrita de 1º y 2º de ESO. Estos son, como dijimos, PE.1.2, PE.1.3, PE.1.4, PE.2.1, PE.2.2, PE.5 y PE.6. Las tasas de acierto mejoran en todos los ítems excepto en PE.2.1, aunque en este ítem la diferencia es del 2 %. Además, un test exacto de Fisher muestra diferencias significativas en el problema PE.1.3 ($p = 0{,}0039$, detección de una situación de proporcionalidad inversa) y en PE.6 ($p = 0{,}0021$, falso problema de proporcionalidad compuesta).

VIII.3.2.2. Análisis comparativo según las categorías específicas

El análisis según las categorías específicas se hace sobre las respuestas incorrectas (categoría I) y correctas (categoría C) del análisis general. Las frecuencias, absolutas y relativas, presentadas en las siguientes tablas no suman las correspondientes al total de alumnos. Para comparar de forma visual el uso de diferentes estrategias de resolución y argumentos empleados por los alumnos, en los gráficos estadísticos se presentan las frecuencias relativas respecto al total de respuestas consideradas en este análisis específico y no sobre el total de alumnos.

Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad.

En la Tabla VIII - 47 y en la Figura VIII - 2 se presentan las frecuencias con las que aparecen los distintos tipos de argumentos empleados por los alumnos para justificar la existencia de relaciones proporcionales en las cuatro situaciones del problema PE.1.

La mayor parte de las afirmaciones que hicimos a partir de los datos obtenidos en el ciclo I-2 se mantienen para este ciclo. Las resumimos:

- Se observa un elevado uso de respuestas de tipo cualitativo por aumentos y disminuciones (D7) en las respuestas del grupo de control.
- El tipo de argumento mayoritariamente empleado por los alumnos del grupo experimental ha sido clasificado en la categoría D2, es decir, utilizan argumentos basados en condiciones de regularidad y constantes de proporcionalidad. Por tanto, aunque la tasa de éxito en el ítem PE.1.3 es más baja en el grupo experimental, los argumentos utilizados por los alumnos del grupo de control se basan en argumentaciones incorrectas.

			D0	**D2**	**D6**	**D7**	**D8**	**D9**
PE.1.1	**GE**	N.º de respuestas	4	11	0	2	0	3
		Porcentaje	20 %	55 %	-	10 %	-	15 %
	GC	N.º de respuestas	3	1	1	10	4	0
		Porcentaje	15 %	5 %	5 %	50 %	20 %	-
PE.1.2	**GE**	N.º de respuestas	2	10	0	1	6	1
		Porcentaje	10 %	50 %	-	5 %	30 %	5 %
	GC	N.º de respuestas	4	0	3	7	6	0
		Porcentaje	20 %	-	15 %	35 %	30 %	-
PE.1.3	**GE**	N.º de respuestas	3	16	0	1	0	0
		Porcentaje	15 %	80 %	-	5 %	-	-
	GC	N.º de respuestas	0	2	2	16	0	0
		Porcentaje	-	10 %	10 %	80 %	-	-
PE.1.4	**GE**	N.º de respuestas	2	17	0	1	0	0
		Porcentaje	10 %	85 %	-	5 %	-	-
	GC	N.º de respuestas	3	0	7	9	0	0
		Porcentaje	15 %	-	35 %	45 %	-	-

Tabla VIII - 47. Comparativa de los tipos de argumentos empleados para justificar las relaciones de proporcionalidad entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema PE.1 (Ciclo II-2).

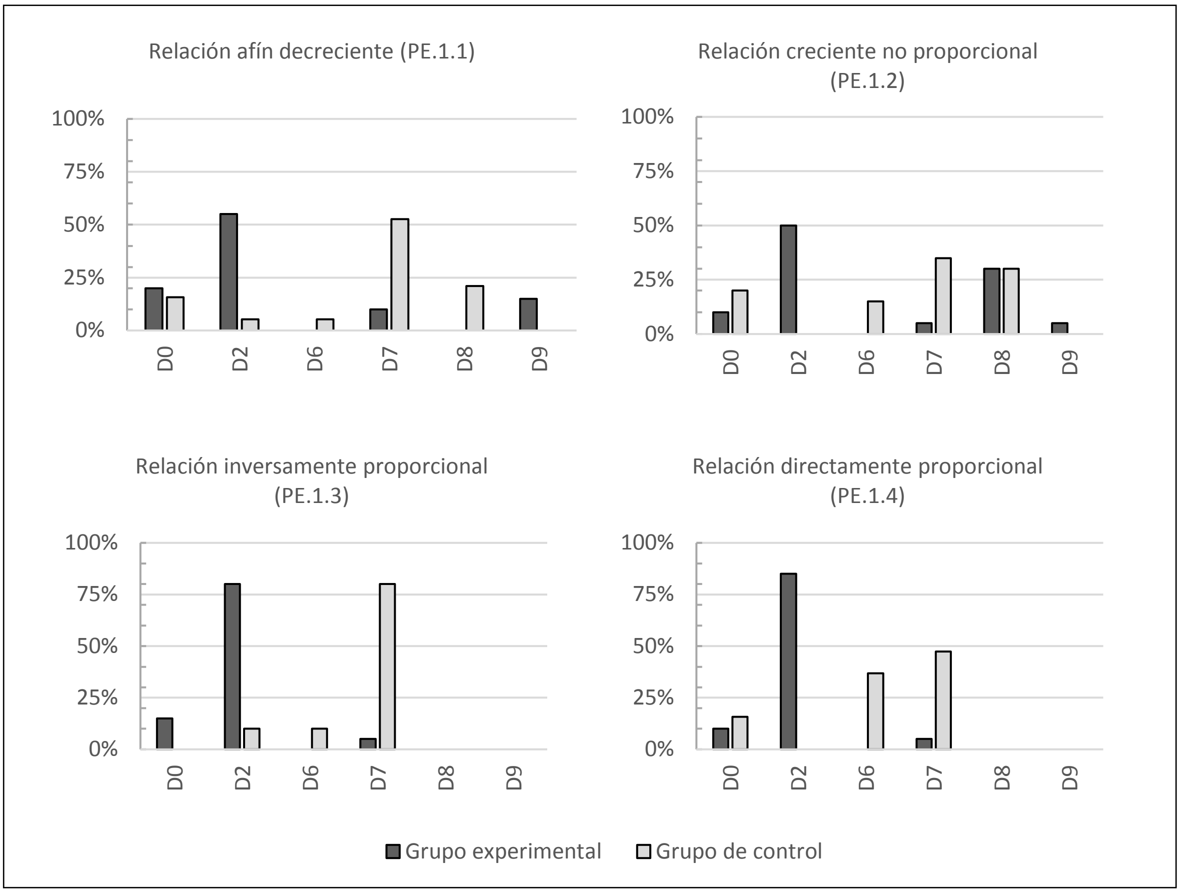


Figura VIII - 2. Distribución de los diferentes argumentos empleados por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la detección de relaciones proporcionales en PE.1 (Ciclo II-2).

- La búsqueda de condiciones de regularidad para realizar argumentaciones (D2) parece efectiva en el grupo experimental en todos los ítems excepto en el ítem PE.1.1. Sin embargo, hay que remarcar que la tasa de éxito en este ítem en el grupo experimental ha subido desde el 30 % en el ciclo I-2, hasta el 55 % en este ciclo.

Por otro lado, destacamos que la mayor frecuencia de respuestas no argumentadas en el grupo experimental respecto al grupo de control observada en el ciclo I-2 se ha visto reducida. En este ciclo, las frecuencias totales de respuestas incluidas en la categoría (D0) es prácticamente idéntica en ambos grupos.

Pasamos a analizar los problemas de respuesta múltiple PE.2.2 y PE.2.3, en los que no se solicitaba argumentación a las respuestas. A partir de un contexto numérico que relaciona dos cantidades de magnitudes proporcionales (en PE.2.2 relación directa y en PE.2.3 inversa) los alumnos debían elegir entre cuatro posibles respuestas aquella que presentaba la constante de proporcionalidad y su interpretación de forma correcta.

			I_1	I_2	I_3	C
PE.2.2	**GE**	N.º de respuestas	3	5	2	10
		Porcentaje	15 %	25 %	10 %	50 %
	GC	N.º de respuestas	1	3	6	10
		Porcentaje	5 %	15 %	30 %	50 %
PE.2.3	**GE**	N.º de respuestas	9	1	4	6
		Porcentaje	45 %	5 %	20 %	30 %
	GC	N.º de respuestas	16	2	1	1
		Porcentaje	80 %	10 %	5 %	5 %

Tabla VIII - 48. Comparativa de las respuestas para los problemas de respuesta cerrada PE.2.2 y PE.2.3 entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo II-2).

En la Tabla VIII - 48 se presenta la frecuencia de cada una de las cuatro opciones. Al igual que en el anterior ciclo de 2º de ESO, la principal diferencia en la distribución de las respuestas la encontramos en el ítem PE.2.3 que presentaba una situación de proporcionalidad inversa. Aunque el fallo mayoritario para los dos grupos ha sido elegir la opción categorizada como I_1 en la que se calculaba una razón entre las cantidades, en el grupo de control esta opción tiene un peso considerablemente mayor. Es decir, en este tipo de problema en el que no se pide etiquetar la relación de proporcionalidad, sino que hay que elegir la operación que "tendría sentido" con los datos del problema, parece que el trabajo con las condiciones de regularidad y las constantes de proporcionalidad propicia una mayor tasa de éxito.

A diferencia de lo ocurrido en el ciclo I-2, pero volviendo a situaciones similares a lo ocurrido en el primer ciclo de investigación-acción, en el problema PE.6 se encuentra una diferencia significativa clara entre el grupo de control y el grupo experimental, a favor de este último.

Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Como dijimos en el Capítulo VI, la prueba escrita en 2º de ESO se centra los aspectos novedosos de la propuesta de este curso, aunque las situaciones de proporcionalidad directa juegan un papel esencial en problemas de los focos 4, 5 y 6. El único problema con una estructura de proporcionalidad simple directa es PE.2.1. Este problema de comparación cualitativa presenta en forma de test las cuatro opciones posibles cuyas frecuencias se observan en la Tabla VIII - 49.

			$S_1 > S_2$	$S_1 < S_2$	$S_1 = S_2$	$S_1 ¿? S_2$
PE.2.1	**GE**	N.º de respuestas	2	1	5	12
		Porcentaje	10 %	5 %	25 %	60 %
	GC	N.º de respuestas	0	3	7	10
		Porcentaje	-	15 %	35 %	50 %

Tabla VIII - 49. Comparativa de respuestas entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cualitativa PE.2.1 (Ciclo II-2).

Observamos que los alumnos del grupo experimental tienen una mayor tasa de acierto. Por otro lado, se observa una mayor frecuencia, respecto al ciclo I-2, en ambos grupos, en las frecuencias de alumnos que responden que en ambas situaciones los clavos están igual de apretados. Vimos este comportamiento en el mismo problema en el Capítulo VII, por lo que el fenómeno parece propio de la promoción de alumnos, cambiando poco desde 1º hasta 2º de ESO.

Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

Los resultados comparados para las estrategias utilizadas en problemas de proporcionalidad simple inversa se resumen en la Tabla VIII - 50, la Tabla VIII - 51 y la Figura VIII - 3**.** De una comparación visual entre la Figura VIII - 3 y la Figura VI - 3 podemos extraer como conclusión global que los resultados en este ciclo son muy similares a los observados en el ciclo I-2, con tres excepciones: disminuyen las respuestas del grupo experimental en las que se supone una relación directa en el problema PE.3 (categoría C6), aumentan las frecuencias de problemas no razonados (C0, VPi0) en el grupo de control, y la instrucción recibida por el grupo de control sobre problemas de valor perdido en este ciclo se centra en una estrategia de uso de una fórmula (VPi5) en vez de en el uso del método de proporciones (VPi4), método que era mayoritario en el ciclo I-2.

			C0	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**
PE.3	**GE**	N.º de respuestas	2	12	0	0	0	0	3
		Porcentaje	10 %	60 %	-	-	-	-	15 %
	GC	N.º de respuestas	2	6	0	1	0	4	5
		Porcentaje	10 %	30 %	-	5 %	-	20 %	25 %

Tabla VIII - 50. Comparativa de las estrategias de resolución empleadas en el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo II-2).

			VPi0	**VPi1**	**VPi2**	**VPi3**	**VPi4**	**VPi5**	**VPi6**	**VPi7**	**VPi8**
PE.4	**GE**	N.º de respuestas	3	0	0	11	0	0	1	0	4
		Porcentaje	15 %	-	-	55 %	-	-	5 %	-	20 %
	GC	N.º de respuestas	7	0	0	0	0	9	0	1	1
		Porcentaje	35 %	-	-	-	-	45 %	-	5 %	5 %

Tabla VIII - 51. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido PE.4 (Ciclo II-2).

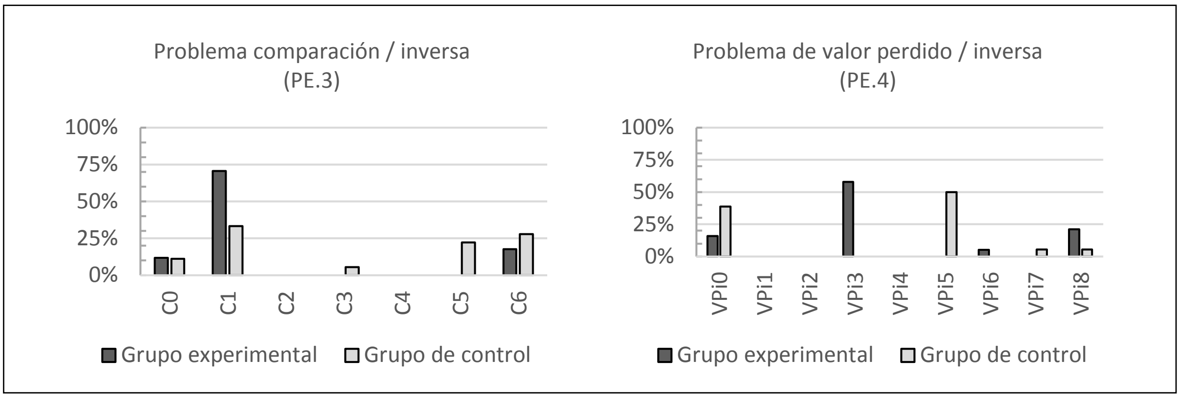


Figura VIII - 3. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa PE.3 y PE.4 (Ciclo II-2).

El resto de las observaciones hechas en el Capítulo VI siguen siendo válidas en este ciclo. En resumen, en el grupo experimental se usan de forma extendida las estrategias funcionales para resolver tanto el problema de comparación cuantitativa como el de valor perdido. En el grupo de control, la instrucción basada en la aplicación mecánica de una fórmula en problemas de valor perdido parece bloquear la resolución del problema de comparación, en el que se obtiene una tasa de éxito más baja.

Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta.

En la Tabla VIII - 52, la Tabla VIII - 53 y en la Figura VIII - 4, resumimos los resultados de las categorías específicas para los problemas PE.5 y PE.7.

			VPC0	VPC2	VPC3	VPC8	VPC10
PE.5	GE	N.º de respuestas	0	10	6	1	0
		Porcentaje	-	50 %	30 %	5 %	-
	GC	N.º de respuestas	4	9	2	1	1
		Porcentaje	20 %	45 %	10 %	5 %	5 %

Tabla VIII - 52. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo II-2).

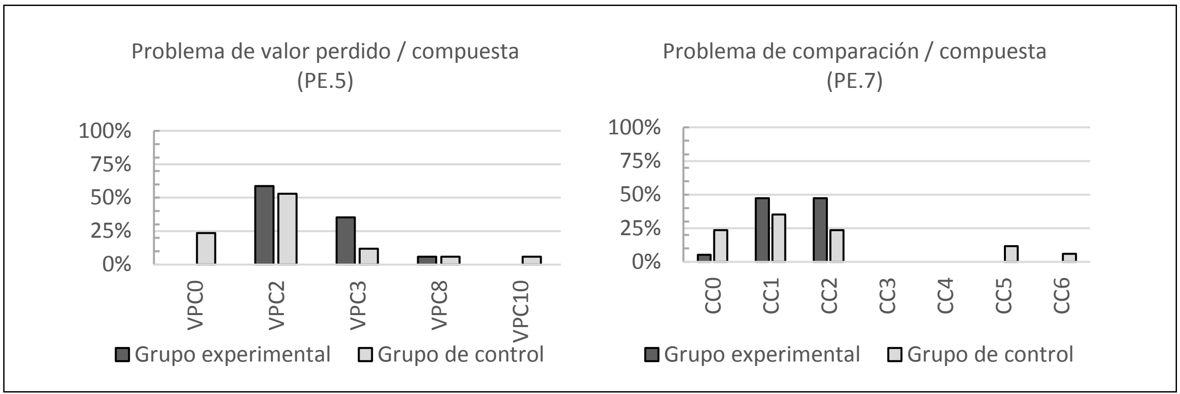


Figura VIII - 4. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta PE.5 y PE.7 (Ciclo II-2).

A diferencia de lo que ocurría en el ciclo I-2, no encontramos grandes diferencias en los métodos de resolución empleados por los alumnos de ambos grupos para el problema de valor perdido PE.5. La instrucción en el grupo de control en este ciclo parece sustancialmente distinta a la del grupo de control del ciclo I-2 (Capítulo VI). Entonces, los alumnos del grupo de control tenían una ligera mayor tasa de éxito en este problema respecto al grupo experimental y usaban de forma mayoritaria el método de proporciones (VPC6). En este ciclo, el grupo de control usa estrategias de amalgamación o paso a paso que reducen el problema de proporcionalidad compuesta a uno o varios problemas de valor perdido.

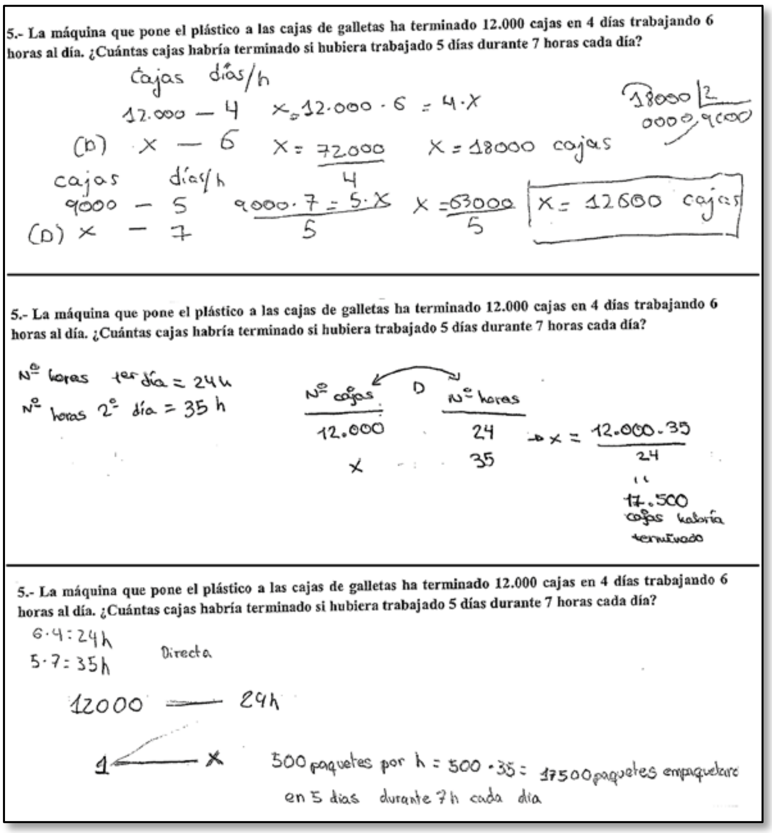


Imagen VIII - 17. Producciones de diferentes alumnos del grupo de control para el problema PE.5 (Ciclo II-2).

Aunque este comportamiento es similar al que observamos en el grupo experimental, si observamos cómo los alumnos del grupo de control resuelven los subproblemas de proporcionalidad simple, detectamos un uso predominante de la regla de tres (ver Imagen VIII - 17). Tanto para estrategias de paso a paso pasando por la unidad (VPC3), como se observa en la parte superior de la Imagen VIII - 17 (aunque el alumno comete un error tras la primera regla de tres dividiendo la cantidad obtenida por la mitad), como en las estrategias de amalgamación, como observamos en la parte media y baja de la Imagen VIII - 17. El abuso de las estrategias algorítmicas por los alumnos del grupo de control se ejemplifica en la producción de la parte baja de la imagen anterior en donde un alumno utiliza una estrategia de amalgamación y después, para calcular la constante de proporcionalidad, cuando podría simplemente dividir para calcular la razón, realiza una regla de tres introduciendo un 1 en el esquema.

Por otra parte, como ya hemos resaltado en diferentes ocasiones, los alumnos del grupo experimental utilizan generalmente estrategias de tipo funcional basadas en razones externas y el control semántico de las operaciones realizadas para terminar los problemas de proporcionalidad compuesta cuando usan una estrategia de amalgamación (Imagen VIII - 18, arriba) o de paso a paso pasando por la unidad (Imagen VIII - 18, abajo).

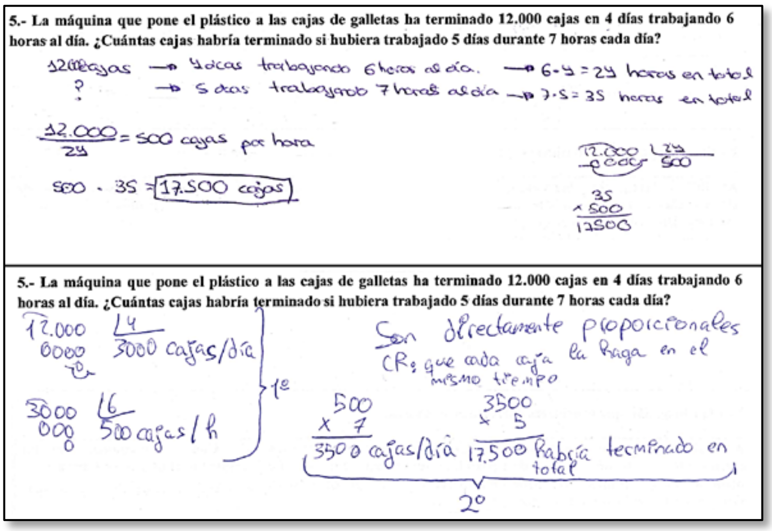


Imagen VIII - 18. Producciones de los alumnos A2.2 (arriba) y A8.2 (abajo) para el problema PE.5 (Ciclo II-2).

			CC0	CC1	CC2	CC3	CC4	CC5	CC6
PE.7	GE	N.º de respuestas	1	9	9	0	0	0	0
		Porcentaje	5 %	45 %	45 %	-	-	-	-
	GC	N.º de respuestas	4	6	4	0	0	2	1
		Porcentaje	20 %	30 %	20 %	-	-	10 %	5 %

Tabla VIII - 53. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de comparación cuantitativa de proporcionalidad compuesta PE.7 (Ciclo II-2).

Para el problema de comparación PE.7 los resultados de la Tabla VIII - 53 arrojan un comportamiento similar al observado en el ciclo I-2. Recordamos que la falta de argumentos en algunas producciones hace difícil la clasificación entre las categorías CC1 y CC2. Por tanto, una gran mayoría de los alumnos del grupo experimental utiliza una estrategia de cálculo de la constante de proporcionalidad para comparar. Las estrategias basadas en el cálculo de la constante de proporcionalidad también son mayoritarias en el grupo de control. Sin embargo, en este grupo aparecen más respuestas sin argumentos (CC0) y respuestas con argumentos aditivos erróneos (CC5) y de omisión de una magnitud (CC6).

Repartos proporcionales.

			RP0	RP1	RP2	RP3	RP4
PE.8	GE	N.º de respuestas	2	13	0	0	0
		Porcentaje	10 %	65 %	-	-	-
	GC	N.º de respuestas	0	12	0	0	0
		Porcentaje	-	60 %	-	-	-

Tabla VIII - 54. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de reparto directamente proporcional PE.8 (Ciclo II-2).

En la Tabla VIII - 54 y en la Figura VIII - 5 presentamos los resultados en las categorías específicas del grupo experimental y el grupo de control en el problema de reparto directamente proporcional PE.8.

Aunque se incrementa el número de alumnos en el grupo experimental que presentan respuestas no argumentadas, el comportamiento general en la comparación con el grupo de control es muy similar al descrito en el capítulo VI.

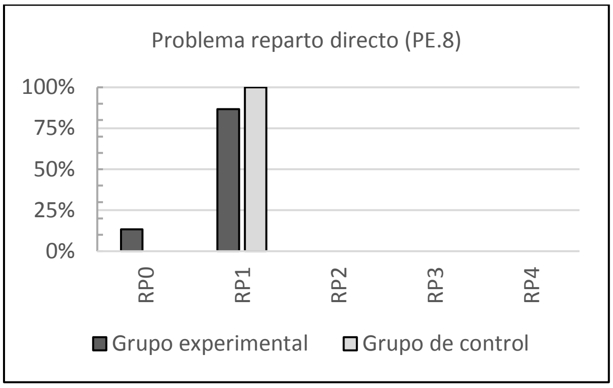
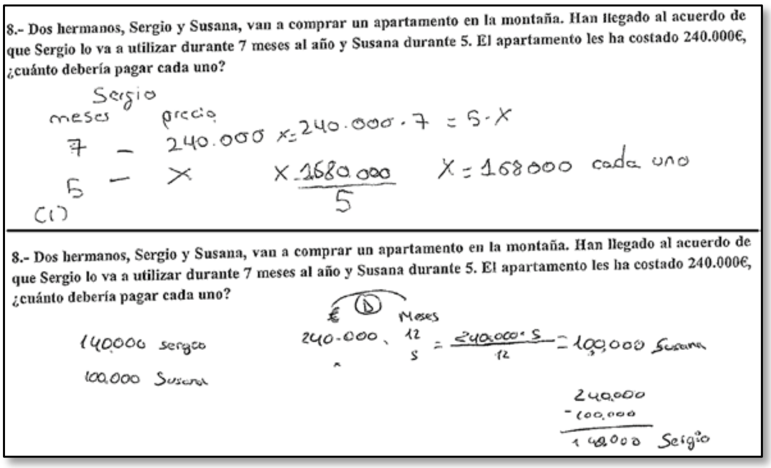


Figura VIII - 5. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución del problema de repartos proporcionales PE.8 (Ciclo II-2).

Las categorías anteriores arrojan un comportamiento similar en ambos grupos ya que usan un acercamiento parte-todo. Sin embargo, como sucedía en el caso de los problemas de proporcionalidad compuesta, los métodos de resolución de los problemas simples que se plantean son radicalmente diferentes. En el grupo experimental se usan de forma mayoritaria estrategias de tipo funcional, mientras que en grupo de control se usa la regla de tres para resolver los problemas simples (Imagen VIII - 19).


8.- Dos hermanos, Sergio y Susana, van a comprar un apartamento en la montaña. Han llegado al acuerdo de que Sergio lo va a utilizar durante 7 meses al año y Susana durante 5. El apartamento les ha costado 240.000€, ¿cuánto debería pagar cada uno?

Sergio
meses precio
7 — 240.000 x=240.000 · 7 = 5 · X
5 — X X=1680.000/5 X=168000 cada uno

8.- Dos hermanos, Sergio y Susana, van a comprar un apartamento en la montaña. Han llegado al acuerdo de que Sergio lo va a utilizar durante 7 meses al año y Susana durante 5. El apartamento les ha costado 240.000€, ¿cuánto debería pagar cada uno?

140000 sergio
100.000 Susana
€ meses
240.000 , 12
5 = 240.000 · 5 / 12 = 100.000 Susana
240.000
- 100.000
140000 Sergio

Imagen VIII - 19. Algunas producciones de los alumnos del grupo de control para el problema PE.8 (Ciclo II-2).

Destaca también que una gran parte de las respuestas clasificadas como incorrectas en el grupo de control se deben al uso de un modelo de reparto igualitario.

Concepto de porcentaje y problemas asociados.

En la Tabla VIII - 55 y en la Figura VIII - 6 se resumen los resultados del análisis de las categorías específicas para los dos problemas de porcentajes PE.9.1 y PE.9.2 (problemas de Tipo I y Tipo II, respectivamente, enunciados sobre un mismo contexto de aumento porcentual).

			VPp0	VPp2	VPp3	VPp7	VPp8	VPp9
PE.9.1	**GE**	N.º de respuestas	0	2	16	0	1	0
		Porcentaje	-	10 %	80 %	-	5 %	-
	GC	N.º de respuestas	1	0	0	17	0	0
		Porcentaje	5 %	-	-	85 %	-	-
PE.9.2	**GE**	N.º de respuestas	0	0	12	0	1	4
		Porcentaje	-	-	60 %	-	5 %	20 %
	GC	N.º de respuestas	0	0	0	9	1	7
		Porcentaje	-	-	-	45 %	5 %	35 %

Tabla VIII - 55. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para problemas aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo II-2).

Podemos observar, que como sucedía en el ciclo I-2, existe una gran diferencia entre las estrategias empleadas por los alumnos en ambos grupos. De hecho, dichas diferencias se acentúan en este ciclo. Por un lado, los alumnos del grupo experimental usan de forma mayoritaria estrategias basadas en el uso de razones externas (con una frecuencia mayor que en el ciclo anterior de 2 de ESO) y, por otro, los alumnos del grupo de control usan de forma mayoritaria fórmulas para resolver los problemas de porcentajes. De forma coherente con lo que hemos observado en los focos anteriores, las respuestas que usan el método de proporciones desaparecen.

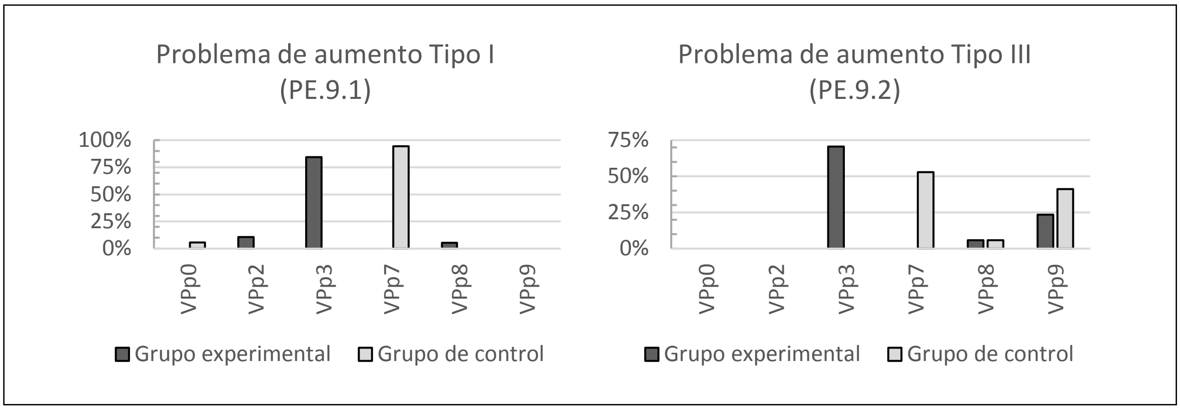


Figura VIII - 6. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas de porcentajes PE.9.1 y PE.9.2 (Ciclo II-2).

También observamos que las estrategias aditivas erróneas tienen un peso significativo en el problema PE.9.2. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría en el ciclo I-2, en este ciclo la mayor frecuencia corresponde al grupo de control ya que en el grupo experimental hemos observado una disminución importante de este tipo de respuestas.

VIII.3.3. Entrevistas semiestructuradas

Durante este ciclo de investigación-acción las entrevistas semiestructuradas se centran en los contenidos relacionados con la proporcionalidad inversa, propios de la propuesta en 2º de ESO, y en aquellos en cuyo tratamiento hemos introducido cambios sustanciales en este ciclo. Es decir, se indaga principalmente sobre el Foco 3 ("Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa"), el Foco 5 ("Repartos proporcionales") y el Foco 6 ("Interpretación del porcentaje y problemas asociados").

Se establecieron de forma general tres fases en cada una de las entrevistas, cada una de ellas dedicada a cada uno de los tres focos de interés que hemos señalado:

- **FASE 1:** Análisis de algunas respuestas dadas por los alumnos en problemas o análisis de situaciones relacionados con la proporcionalidad simple inversa.
- **FASE 2:** Análisis de algunas respuestas dadas por los alumnos en problemas de repartos proporcionales.
- **FASE 3:** Análisis de respuestas dadas por los alumnos en problemas relacionados con el porcentaje y aumentos y disminuciones porcentuales.

El criterio para la selección de estudiantes para las entrevistas en este ciclo fue que hubieran sido entrevistados durante el ciclo III-1. Tres de los cuatro alumnos entrevistados en el ciclo III-1 forman parte del grupo experimental del ciclo II-2 (el cuarto está en el grupo de control de este ciclo). Por tanto, se entrevistó a los alumnos A10.2, A2.2 y A8.2 que se corresponden con los alumnos C6.2, C4.1 y B5.1 del ciclo III-1 (ver sección VII.3.3). Como ya indicamos en el capítulo pasado, A10.2 demostró un nivel de competencia medio y A2.2 y A8.2 demostraron un nivel de competencia alto en el ciclo anterior.

Para cada estudiante se revisaron las producciones de clase en este ciclo, las tareas de casa y la prueba escrita. Tras esta revisión se diseñó una entrevista semiestructurada personalizada en la que el profesor-investigador presentaba a los estudiantes sus producciones en diferentes ejercicios y, a partir de ellas, realizaba una serie de preguntas sobre la comprensión de los diferentes conceptos. El diseño concreto de las entrevistas puede consultarse en el Anexo IV.

Se exponen aquí los resultados de dichas entrevistas, estructurándolos según las tres fases de las que se componían. Para cada fase se indica el intervalo temporal de la grabación en el que tiene lugar.

VIII.3.3.1. Análisis de la entrevista a A10.2

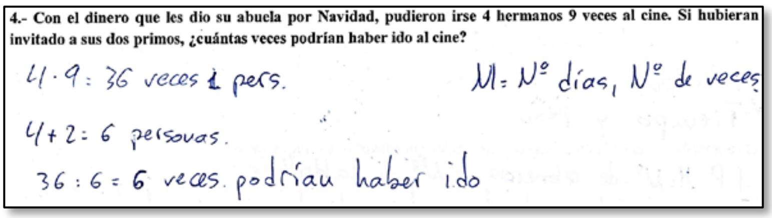
FASE 1 [00:00 – 05:03]: La entrevista comienza con varias preguntas descontextualizadas sobre conceptos relacionados con la proporcionalidad inversa.

P-I: ¿Qué significa para ti que dos magnitudes sean inversamente proporcionales?
A10.2: Que cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye y si una magnitud disminuye la otra aumenta.

P-I: Y, ¿siempre que pasa eso son inversamente proporcionales?
A10.2: No, si tiene sentido, no calcular las razones, sino multiplicarlas.
P-I: Vale, por ejemplo, en el ejemplo de si veo cuatro horas la tele me quedan dos para hacer los deberes, ahí ¿cuándo aumenta el tiempo que ves la televisión baja el tiempo que tienes para hacer los deberes? Imagínate que tienes seis horas de tiempo y o ves la televisión o haces deberes. Si aumentas el tiempo que ves la televisión ¿disminuye el tiempo para hacer los deberes?
A10.2: Si solo tengo seis horas sí.
P-I: Vale ¿y esas son inversamente proporcionales?
A10.2: No… no sé […] Porque si multiplico no sale, …
P-I: ¿Qué operación tiene sentido ahí? […]
A10.2: Yo es que ni calcularía las razones ni multiplicaría.
P-I: Y entonces, ¿qué operación tiene sentido ahí? […]
A10.2: Sumar para calcular el total de ….
P-I: El total de tiempo, y entonces ¿son inversas o no son inversas? ¿En qué hemos quedado?
A10.2: En que no.

Tras este diálogo el alumno etiqueta como “constante de proporcionalidad” el producto que se puede calcular cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales. Y lo define como “el número que no varía cuando las magnitudes varían”, asignándole, como puede comprobarse la propiedad de constancia frente a la covariación de las magnitudes (que el alumno ha descrito como una relación decreciente de forma cualitativa anteriormente). También es capaz de poner un ejemplo: “En plan, como los niños que pagan por la excursión, pues el precio de la excursión […] si varía el número de niños tendrán que pagar más o menos pero el precio de la excursión […] seguirá sin moverse.”

La entrevista continúa mostrándole al alumno su producción para el problema PE.4 de la prueba escrita (Imagen VIII - 20). Ante las preguntas del profesor-investigador, que solicita etiquetar y justificar la relación de proporcionalidad (omitida en la respuesta del alumno), el alumno responde con soltura y de forma clara que se trata de dos magnitudes inversamente proporcionales y argumenta su respuesta. También, vuelve a interpretar la constante de proporcionalidad como “el número de veces que podría ir una persona al cine” y cuando el profesor le pide argumentar por qué esa cantidad es constante el alumno responde “porque el dinero que le da la abuela es el mismo”. Por último, el alumno expresa las condiciones de regularidad que cree que debe exigirle al problema diciendo que “el dinero debe ser el mismo” y que “el cine tiene que valer siempre lo mismo”.


4.- Con el dinero que les dio su abuela por Navidad, pudieron irse 4 hermanos 9 veces al cine. Si hubieran invitado a sus dos primos, ¿cuántas veces podrían haber ido al cine?

4 · 9 = 36 veces 1 pers. M = Nº días, Nº de veces

4 + 2 = 6 personas.

36 : 6 = 6 veces podrían haber ido

Imagen VIII - 20. Producción del alumno A10.2 para el problema PE.4 (Ciclo II-2).

FASE 2 [05:03 – 10:47]: Esta fase de la entrevista comienza mostrándole al alumno su producción para el problema PE.8 que ha resuelto mediante un modelo de reparto directamente proporcional. Cuando el alumno ha leído el problema se le pregunta por qué ha considerado que no deben pagar el apartamento a partes iguales y el alumno responde que "sería injusto porque Sergio utiliza más el piso que Susana, lo justo sería que cada uno pagase lo que le corresponde."

A continuación, se le muestra su producción al problema de la situación introductoria F8.1.2 (Imagen VIII - 11, derecha, analizada en la sección VIII.3.1.5). El profesor-investigador solicita al alumno que explique lo que ha hecho en el ejercicio a lo que el alumno responde: "calculamos lo que costaba hacer cada cuerpo y cada cabeza, y luego buscamos que dedicara equis tiempo para que hiciera los mismos cuerpos que cabezas para que fuera más productivo". Cuando el profesor-investigador le pregunta que cómo llegaron a la conclusión de que debían ser dos horas en un tipo de pieza y cuatro en el otro tipo, la respuesta del alumno deja entrever que dicha conclusión se obtuvo por ensayo y error, y que no han utilizado los tiempos que tarda el artesano en hacer cada tipo de pieza.

Para acabar las preguntas de esta fase de la entrevista, el profesor-investigador le propone al alumno resolver el problema F8.1.2 si el tiempo a repartir fueran siete horas y media en vez de seis horas. El alumno no sabe responder y tras unos segundos el profesor-investigador le hace una serie de preguntas para guiarle hacia la resolución que el alumno responde sin muchas dudas: "¿cuánto tarda en hacer cada muñeco?", "¿cuántos muñecos podrá hacer en siete horas y media?", "¿cuántas piezas de cada tipo tendrá que hacer?", "¿cuánto tiempo tendría que estar para hacer diez cabezas?" y "¿cuánto tiempo tiene que estar para hacer diez cuerpos?".

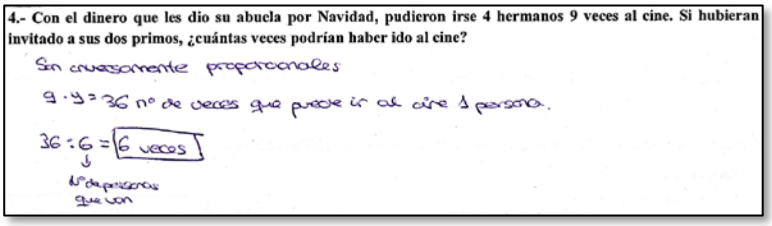
FASE 3 [10:47 – 14:10]: Esta fase de la entrevista comienza con una pregunta descontextualizada sobre el concepto de porcentaje. El alumno explica brevemente que el porcentaje es el "tantos por cada cien". Ante varios ejemplos propuestos por el profesor-investigador el alumno interpreta correctamente el porcentaje como la cantidad de una de las magnitudes "por cada" cien unidades de la otra.

El alumno también es capaz de interpretar los aumentos porcentuales con cierta soltura, "si sube un $40\ \%$ sube 40 € respecto a 100 € del precio inicial y se queda en 140". También es capaz de interpretar la razón entre el precio final y el precio inicial y su inversa correctamente. Sin embargo, no es capaz de dar una argumentación clara de por qué una vez calculadas las razones termina el problema multiplicando por una de ellas.

VIII.3.3.2. Análisis de la entrevista a A2.2

FASE 1 [00:00 – 05:16]: La entrevista comienza con varias preguntas descontextualizadas sobre conceptos relacionados con la proporcionalidad inversa. Intentamos averiguar si A2.2 puede dar una definición formal de relación de proporcionalidad inversa, constante de proporcionalidad y ejemplificar estos conceptos. El alumno no puede dar una definición abstracta y simplemente esboza algunas ideas sobre que tenga sentido calcular el producto, pero no hace referencia a que este deba permanecer constante. Tampoco ejemplifica de manera detallada una situación de proporcionalidad inversa limitándose a plantear un contexto de grifos que echan agua.

Al igual que en el ciclo anterior, el alumno, a pesar de haber presentado un buen desempeño a lo largo de la unidad didáctica, se muestra nervioso e inseguro en la entrevista. Por ejemplo, tras leer su producción correcta al problema PE.4 donde interpreta correctamente la constante de proporcionalidad, (ver Imagen VIII - 21) no verbaliza los argumentos que le han llevado a responder correctamente, ni responde de forma concisa a las preguntas que le hace el profesor-investigador al respecto. Se limita a decir que "hay que calcular el total". Tampoco se han podido inferir conclusiones relevantes de las preguntas realizadas en torno al problema PE.7 de la prueba escrita (que el alumno también había respondido correctamente).


4.- Con el dinero que les dio su abuela por Navidad, pudieron irse 4 hermanos 9 veces al cine. Si hubieran invitado a sus dos primos, ¿cuántas veces podrían haber ido al cine?

Son inversamente proporcionales

9·4=36 nº de veces que puede ir al cine 1 persona.

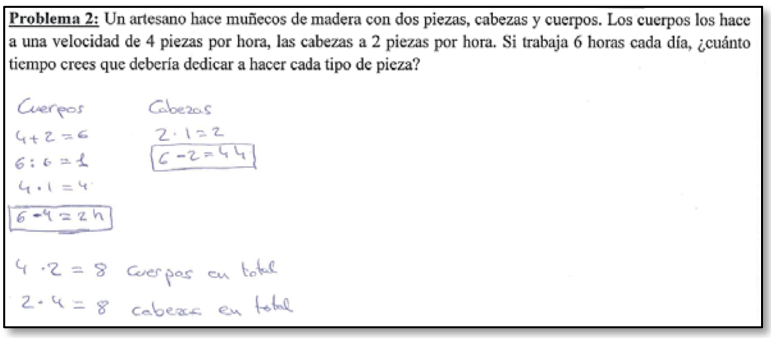
36 : 6 = 6 veces

nº de personas que van

Imagen VIII - 21. Producción de A2.2 para el problema PE.4 (Ciclo II-2).

FASE 2 [05:16 – 09:23]: Esta fase de la entrevista comienza mostrando al alumno su producción para el problema PE.8, que ha resuelto mediante un modelo de reparto directamente proporcional. Cuando el alumno ha leído el problema se le pregunta por qué ha considerado que no deben pagar el apartamento a partes iguales y el alumno responde que cree que "debería pagar más el que más esté" alegando un motivo de "justicia" para proponer un reparto directamente proporcional al tiempo de uso.

A continuación, se le muestra su producción al problema de la situación introductoria F8.1.2 (ver Imagen VIII - 22) en el que también ha dado una respuesta que se ajusta a un modelo (inversamente) proporcional pero no ha proporcionado casi información que permita averiguar cómo ha llegado a la solución.


Problema 2: Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?

Cuerpos	Cabezas
4+2=6	2·1=2
6:6=1	6-2=4h
4·1=4	
6-4=2h	

4·2=8 cuerpos en total

2·4=8 cabezas en total

Imagen VIII - 22. Producción del equipo A2 para el problema F8.1.2 (Ciclo II-2).

En primer lugar, el alumno razona que no puede realizarse un reparto equitativo porque si repartes "tres horas y tres horas habría más cabezas que cuerpos". Después de eso el alumno se muestra nervioso y dice que, aunque supo hacer un problema parecido después, que ahora no se acuerda de cómo resolverlo. El profesor-investigador decide realizarle preguntas que le guíen en la resolución. El alumno responde de forma rápida a cada una de las preguntas: “¿cuánto tardas en hacer cada cabeza?”, “¿cuánto tardas en hacer cada cuerpo?”, ¿cuánto tardas en hacer cada muñeco?”, “¿cuántos muñecos puedes hacer?”, “¿cuánto tardarías en hacer ocho cabezas?” y “¿cuánto tardarías en hacer ocho cuerpos?”. Tras las preguntas y respuestas exclama “ah, vale”, haciendo ver que entiende el proceso de resolución.

FASE 3 [09:23 – 11:37]: Esta fase de la entrevista comienza con una pregunta abstracta sobre el concepto de porcentaje. Se busca comprobar si el alumno es capaz de definir porcentaje utilizando lenguaje natural. El alumno propone como definición “cuánto toca por cada 100”. Su propuesta de definición no parece basarse por tanto en una relación parte-todo como sí deduciremos de la definición propuesta por A8.2 en la siguiente entrevista. Al solicitarle un ejemplo, propone un contexto de un refresco que contiene agua y zumo.

También se desenvuelve con soltura al preguntarle sobre el concepto de aumento porcentual, en donde responde con un ejemplo en un contexto económico: “si aumenta un $40\ \%$ significa que aumenta 40 € por cada 100 que valía, es decir, vale 140 €”.

Cuando el profesor-investigador le pide que exprese el significado de las razones que puede calcular en ese ejemplo el alumno responde: “cuántos euros del precio final hay por cada euro del precio inicial” y “cuántos euros del precio inicial hay por cada euro del precio final”.

Por último, el profesor-investigador le solicita al alumno que justifique con un ejemplo concreto por qué después de calcular esas razones multiplica las cantidades que le dan en el problema por la razón para obtener la solución a lo que el alumno responde: “si esto es euros del precio final por cada euro del precio inicial y me dan el precio inicial pues lo multiplico para saber el total.”

Observamos que el alumno se ha sentido más cómodo y parece más confiado en sus conocimientos en esta fase de la entrevista relacionada con el porcentaje que en las fases anteriores.

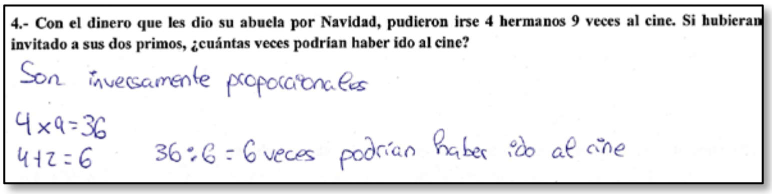
VIII.3.3.3. Análisis de la entrevista a A8.2

FASE 1 [00:00 – 03:50]: La entrevista comienza con varias preguntas descontextualizadas sobre conceptos relacionados con la proporcionalidad inversa. Intentamos averiguar si el alumno A8.2 puede dar una definición más o menos formal de relación de proporcionalidad inversa, constante de proporcionalidad y ejemplificar estos conceptos. El alumno define relación de proporcionalidad inversa como dos magnitudes que están relacionadas, pero en las que no tiene sentido repartir, sino que tiene sentido calcular el producto. Cuando el profesor-investigador le pide que diga si tiene algún nombre dicho producto el alumno A8.2 no lo etiqueta como constante de proporcionalidad sino como “total”. Al pedirle que ponga ejemplos, el alumno propone un contexto de proporcionalidad inversa en el que una cantidad de obreros tienen que transportar un número de ladrillos cada uno. Es decir, propone un ejemplo de proporcionalidad inversa en el que una de las magnitudes consideradas es intensiva. Las preguntas del profesor-investigador intentan indagar sobre la comprensión de la covariación de las magnitudes y sobre la constancia del producto.

P-I: Si cambia el número de obreros, ¿qué pasará?
A8.2: Que cambia, eh, no, no cambiará, el número de…, el total no cambia, cambiará el "5" (ladrillos que debe transportar cada obrero).
P-I: Vale, tendrá que…, si hay menos obreros, por ejemplo, ¿tendrán que llevar más ladrillos o menos?
A8.2: Tendrán que llevar más.

Por tanto, pese a las dificultades para etiquetar la constante de proporcionalidad, el alumno A8.2 parece tener un conocimiento abstracto adecuado del concepto de proporcionalidad inversa.

Tras una pequeña interrupción, la entrevista continúa mostrando al alumno su producción para el problema de valor perdido en una situación de proporcionalidad simple inversa (ver Imagen VIII - 23). El alumno había resuelto correctamente el problema, pero no había argumentado por qué la relación era inversamente proporcional, ni había expresado el significado de la constante de proporcionalidad calculada para resolverlo.


4.- Con el dinero que les dio su abuela por Navidad, pudieron irse 4 hermanos 9 veces al cine. Si hubieran invitado a sus dos primos, ¿cuántas veces podrían haber ido al cine?

Son inversamente proporcionales

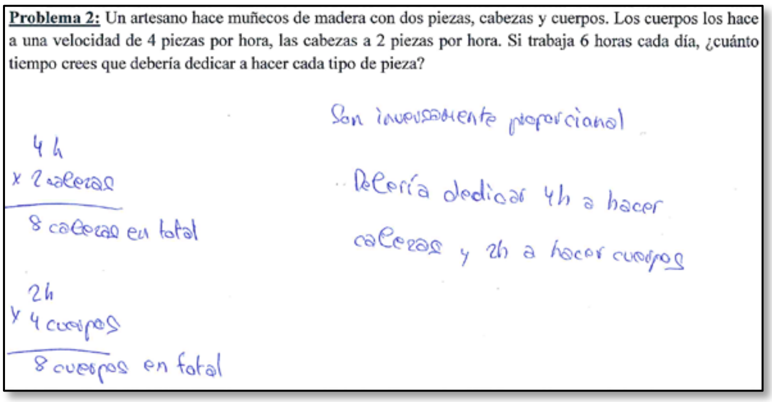
4×9=36
4+2=6 36:6=6 veces podrían haber ido al cine

Imagen VIII - 23. Producción de A8.2 para el problema PE.4 (Ciclo II-2).

Durante las preguntas el alumno no responde claramente a la petición de dar argumentos para justificar la relación inversa, pero indica que el significado de la constante de proporcionalidad es el "número de veces que una sola persona podía haber ido al cine con ese dinero".

El alumno muestra un buen desempeño interpretando el producto de dos magnitudes, lo que se confirma en las siguientes preguntas de la entrevista en las que se le solicita interpretar el producto de dos magnitudes extensivas que aparecía en el problema PE.7 de la prueba escrita (en un contexto de proporcionalidad compuesta). El alumno interpreta sin dificultades el producto entre el "número de mangueras abiertas para llenar una piscina" y el "tiempo que están abiertas" como el "tiempo que tendría que estar abierta una manguera sola para llenar la piscina".

FASE 2 [03:50 – 07:05]: En esta fase de la entrevista se indaga sobre el conocimiento del estudiante sobre los problemas de reparto proporcionales. En primer lugar, se muestra al alumno su producción para el problema F8.1.2 (ver Imagen VIII - 24) de reparto inversamente proporcional. Cuando el profesor-investigador le solicita que explique qué han hecho para resolver el problema el alumno responde lo siguiente: "como teníamos que sacar muñecos en total, en vez de la mitad de horas cada uno, como tardaba más en hacer las cabezas, probamos a poner cuatro y dos y nos salió, y como nos salía lo mismo…".



Problema 2: Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?

4 h
x 2 cabezas
8 cabezas en total

2h
x 4 cuerpos
8 cuerpos en total

Son inversamente proporcional

Debería dedicar 4h a hacer cabezas y 2h a hacer cuerpos

Imagen VIII - 24. Producción del equipo A8 para el problema F8.1.2 (Ciclo II-2).

En su explicación se observa que el equipo estaba buscando realizar el máximo número de muñecos (constante de proporcionalidad) y que para ello debían repartir el tiempo de forma que el número de cada tipo de piezas que podía hacer el artesano fuera el mismo, además, el equipo llegó a realizar ese reparto, que no podía ser equitativo porque cada pieza se hacía a una velocidad diferente, mediante una estrategia de ensayo y error.

A continuación, el profesor-investigador le propone realizar el mismo problema, pero con una estructura numérica algo más compleja cambiando el tiempo a repartir a siete horas y media. Tras unas dudas iniciales, el profesor-investigador le orienta preguntándole si puede calcular el tiempo que se necesita para realizar cada muñeco:

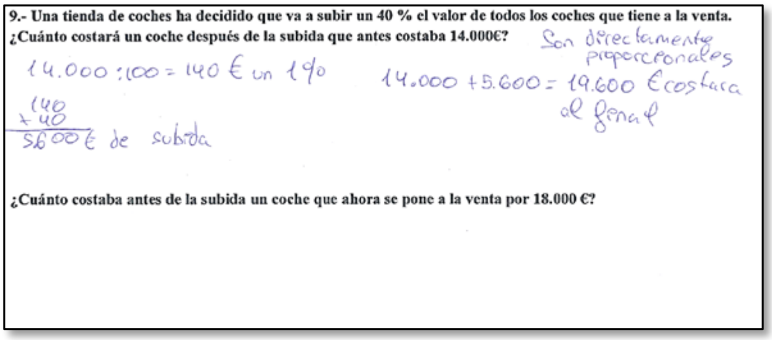
P-I: ¿Se puede calcular, por ejemplo, cuánto tiempo tardas en hacer cada uno de esos muñecos?
A8.2: Sí.
P-I: ¿Cómo?
A8.2: Eh, … lo que tarda en cada cabeza, …
P-I: ¿Cuánto tarda en cada cabeza?
A8.2: Eh, ah, media hora.
P-I: Media hora [escribiendo en un papel], ¿lo ponemos en horas? [escribe “0,5 horas”]
A8.2: Y aquí [refiriéndose a los cuerpos] tarda un cuarto de hora.
P-I: Un cuarto de hora, ¿cómo se pone un cuarto de hora en horas?
A8.2: Cero veinticinco.
P-I: [escribiendo en el papel] Cero veinticinco. ¿Entonces cuánto tarda en hacer cada muñeco?
A8.2: Cero setentaicinco.
P-I: Entonces, ¿en siete horas y media cuántos muñecos podría hacer?
A8.2: ¿Diez?
P-I: Diez. Y si tiene que hacer diez muñecos significa que tiene que hacer ¿cuántas cabezas?
A8.2: Diez.
P-I: Diez. Entonces, ¿Cuánto tiempo tiene que estar con las cabezas?
A8.2: Eh, … cinco.
P-I: Cinco horas. Y, ¿cuánto tendría que estar con los cuerpos?

A8.2: Dos con cinco.

Aunque la primera respuesta del alumno ya evidenciaba una buena comprensión del contexto, la resolución (guiada) que realiza con una estructura numérica más compleja durante la entrevista es otro indicio de la conveniencia de este contexto para introducir los repartos inversamente proporcionales.

FASE 3 [07:05 – 10:05]: Esta fase de la entrevista comienza con una pregunta abstracta sobre el concepto de porcentaje. Se busca comprobar si el alumno es capaz de definir porcentaje utilizando lenguaje natural. El alumno responde: "de cada cien, si tuvieras de un total, si el total fuera cien cuántos de esos sería lo que pide". Aunque es capaz de expresar de forma descontextualizada el concepto de porcentaje y explicita dos cantidades diferentes, en su definición el alumno parece enmarcar el concepto en situaciones parte-todo y asignarle al significado un sentido de "cálculo".

Tras esta pregunta, el alumno lee su producción para el problema de aumentos porcentuales de la prueba escrita (ver Imagen VIII - 25). En este problema el alumno había respondido correctamente al primer apartado utilizando una estrategia en dos pasos: calcula el aumento y después se lo suma al precio inicial. Para calcular el aumento el alumno utiliza una estrategia de análisis unitario en donde calcula inicialmente la cantidad correspondiente al $1\ \%$ para luego calcular la correspondiente al $40\ \%$. Este tipo de estrategias, en donde se trata el porcentaje como una magnitud, no parecen cómodas para resolver problemas de Tipo III (como el dejado en blanco por el alumno en la prueba escrita) en situaciones de aumentos porcentuales ya que la cantidad final supone un porcentaje mayor que cien respecto a la inicial que se toma como referente.


9.- Una tienda de coches ha decidido que va a subir un 40 % el valor de todos los coches que tiene a la venta. ¿Cuánto costará un coche después de la subida que antes costaba 14.000€?

Son directamente proporcionales

14.000 : 100 = 140 € un 1%

14.000 + 5.600 = 19.600 € costara al final

140
x 40
5600 € de subida

¿Cuánto costaba antes de la subida un coche que ahora se pone a la venta por 18.000 €?

Imagen VIII - 25. Producción de A8.2 para el problema PE.9 (Ciclo II-2).

Sin embargo, el alumno responde correctamente sin dudar a la pregunta del profesor-investigador sobre qué porcentaje representa la cantidad $18\ 000$ en el problema PE.9.2, diciendo que representa un $140\ \%$. A partir de ese momento, con la pequeña ayuda de la pregunta realizada, el alumno es capaz de indicar cómo se resolvería el problema PE.9.2 según esta estrategia escalar.

Por último, el profesor-investigador quiere verificar si A8.2 podría resolver el problema mediante la estrategia funcional institucionalizada y le pregunta si conoce "otras formas de resolver el problema". El alumno dice que sí, pero que no sabe hacerlo, sin embargo, en su respuesta el alumno indica que para hacerlo habría que calcular "cuántos euros del precio inicial hay por cada euro del precio final", dejando ver que su comprensión sobre el fenómeno es mayor que la que inicialmente manifestaba.

VIII.3.4. Observador externo

Como en los anteriores ciclos de investigación-acción, presentamos los resultados obtenidos en el protocolo de observación externa agrupados según los cuatro bloques en los que se distribuían los indicadores.

VIII.3.4.1. Tratamiento de los contenidos y metodología

En la Tabla VIII - 56 se recogen las respuestas del observador externo para este primer bloque. El observador externo valora como completamente adecuados todos los elementos curriculares planteados en la propuesta y la viabilidad de su tratamiento. También señala que el tiempo dedicado a los contenidos planteados para la sesión 4 no se ajusta a la planificación inicial.

	1.1.1	**1.1.2**	**1.1.3**	**1.2**	**1.3**
Sesión 1	5	5	5	5	SÍ
Sesión 2	5	5	5	5	SÍ
Sesión 3	5	5	5	5	SÍ
Sesión 4	5	5	5	5	NO
Sesión 5	5	5	5	5	SÍ
Sesión 6	5	5	5	5	SÍ
Sesión 7	5	5	5	5	SÍ
Sesión 8	5	5	5	5	SÍ
Sesión 9	5	5	5	5	SÍ
Sesión 10	5	5	5	5	SÍ
Sesión 11	5	5	5	5	SÍ
Sesión 12	5	5	5	5	SÍ
Sesión 13	5	5	5	5	SÍ

1.1 Grado de adecuación de la sesión de clase al diseño teórico.
- **1.1.1** Objetivos. (1-5)
- **1.1.2** Contenidos. (1-5)
- **1.1.3** Metodología. (1-5)

1.2 Viabilidad del tratamiento de los contenidos. (1-5)
1.3 Ajuste de la sesión al tiempo previsto. (SÍ/NO)

Tabla VIII - 56. Respuestas del observador externo en el primer bloque de preguntas (Ciclo II-2).

En el campo de respuesta abierta el observador externo hace la siguiente apreciación:

- Sesión 5: El observador considera que la metodología desde la sesión 1 a la sesión 5 (relaciones de proporcionalidad y talleres de problemas en situaciones simples) es muy similar y la valora como "muy adecuada". También indica que, en estas sesiones, los alumnos, tienden a "despistarse", sobre todo en la sesión 4.

VIII.3.4.2. Actuación del profesor-investigador

	2.1.1	2.1.2	2.1.3	2.2.1	2.2.2	2.2.3	2.2.4	2.3.1	2.3.2	2.4
Sesión 1	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 2	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 3	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 4	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 5	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 6	5	5	5	SÍ	-	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 7	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 8	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 9	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 10	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 11	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 12	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 13	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad

2.1 Actitud y comportamiento. (1-5)
  2.1.1 Actitud del profesor.
  2.1.2 Interés por el aprendizaje de los alumnos.
  2.1.3 Atención a las necesidades de los alumnos.
2.2 Participación en el proceso docente.
  2.2.1 Fomenta participación. (SÍ/NO)
  2.2.2 Reconoce avances y progresos. (SÍ/NO)
  2.2.3 Identifica dificultades. (SÍ/NO)
  2.2.4 Promueve la reflexión. (SÍ/NO)
2.3 Calidad y claridad expositiva en las intervenciones.
  2.3.1 Calidad expositiva. (1-5)
  2.3.2 Claridad expositiva. (1-5)
2.4 Tiempo intervención. (Escaso/Adecuado/Excesivo)

Tabla VIII - 57. Respuestas del observador externo en el segundo bloque de preguntas (Ciclo II-2).

En la Tabla VIII - 57 se recogen las respuestas del observador externo para el segundo bloque de preguntas sobre se percepción acerca de la actuación del profesor-investigador. El observador externo valora como completamente adecuados todos los indicadores sobre la actitud y el comportamiento del profesor-investigador. La calidad y claridad expositiva en las intervenciones también se valoran siempre como excelentes. Los ítems relativos a la participación en el proceso docente se valoran todos como positivos salvo el reconocimiento de avances durante la sesión 6 que se deja en blanco.

Además, el observador externo realizó la siguiente consideración en el campo de respuesta abierta:

- Sesión 5: El observador externo valora la actuación del profesor-investigador durante las cinco primeras sesiones de la propuesta como “impecable”.

VIII.3.4.3. Actuación de los alumnos

En la Tabla VIII - 58 se recogen las respuestas dadas por el observador externo en los indicadores centrados en la actuación de los alumnos. En general, al igual que en los ciclos anteriores, la observación pone de manifiesto que los alumnos trabajan, realizan las tareas, atienden a las explicaciones y participan para aclarar dudas. Sin embargo, el observador externo observa pasividad en los alumnos en alguna de las tareas. La actitud general es positiva, aunque con algunas incidencias en determinadas sesiones. Además, en las sesiones 2, 3, 4, 6, 8, 9 y 12, el observador externo no tiene suficiente información para constatar si los alumnos han comprendido o no los conceptos que se abordan. En las sesiones 4, 6 y 8 el observador externo no puede determinar si los alumnos comprenden las intervenciones del profesor.

	3.1	3.2	3.3.1	3.3.2	3.3.3	3.4
Sesión 1	Poca concentración.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+/-
Sesión 2	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	-	+
Sesión 3	Realizan tareas.	D / C	SÍ	SÍ	-	+
Sesión 4	Poca concentración.	D / C	-	-	-	+/-
Sesión 5	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 6	Realizan tareas.	D	SÍ	-	-	+
Sesión 7	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+/-
Sesión 8	Pasividad.	D	SÍ / NO	-	-	+/-
Sesión 9	Realizan tareas.	-	SÍ	SÍ	-	+
Sesión 10	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 11	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 12	Poca concentración.	D / C	SÍ	SÍ	-	+
Sesión 13	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+

3.1 Tipo de participación.
3.2 Tipo de preguntas de los alumnos.
D: aclarar dudas
C: ampliar contenidos.
3.3 Atención y asimilación. (SÍ/NO)
3.3.1 Atienden a las intervenciones.
3.3.2 Comprenden las intervenciones.
3.3.3 Comprenden los contenidos.
3.4 Actitud: Positiva (+), Negativa (–)
Neutra (+/-)

Tabla VIII - 58. Respuestas del observador externo en el tercer bloque de preguntas (Ciclo II-2).

Otras consideraciones sobre la actuación de los alumnos que realizó el observador externo en los campos de respuesta abierta fueron las siguientes:

- Sesión 5: El observador externo expresa que repartir algunos ejercicios resueltos de las tareas para casa genera, por un lado, poca atención en algunos alumnos y, por otro, puede agilizar las puestas en común.
- Sesión 6: El observador externo considera que podría haber sido útil para verificar la asimilación de los contenidos que los alumnos hubieran expresado en voz alta si tenían bien resueltos los problemas.
- Sesión 12: El observador externo sugiere un posible estudio de caso con un alumno que insiste en resolver los problemas mediante regla de tres.

VIII.3.4.4. Interacciones profesor-alumno

En la Tabla VIII - 59 se recogen las respuestas dadas por el observador externo a los indicadores para analizar las interacciones entre el profesor-investigador y los alumnos. El observador externo cuantifica como frecuentes las interacciones entre el profesor-investigador y los alumnos en la mayoría de las sesiones. Aunque el observador externo deja en blanco muchos de los indicadores relativos al tipo de interacción que se produce en el aula, se observa cierta diversidad en cuanto a los tipos de intervención a lo largo de la propuesta.

	4.1	4.2.1	4.2.2	4.2.3
Sesión 1	Cte.	GC / E /I	P / A	U
Sesión 2	Fre.	-	P	D
Sesión 3	Cte.	GC /I	P / A	-
Sesión 4	Fre.	GC	-	-
Sesión 5	Fre.	GC / E	A	-
Sesión 6	Fre.	GC / E /I	-	-
Sesión 7	Cte.	-	P / A	-
Sesión 8	Fre.	-	P / A	-
Sesión 9	Fre.	-	P	-
Sesión 10	Fre.	-	P	D
Sesión 11	Fre.	-	P	D
Sesión 12	Fre.	-	P	D
Sesión 13	Fre.	-	P	D

4.1 Frecuencia de las interacciones:
Nunca (Nun.)
A menudo (Fre.)
Constantemente (Cte.)
4.2 Tipo de interacciones
4.2.1 Dirigidas al grupo clase (GC), a los equipos de alumnos (E) o alumnos particulares (I).
4.2.2 Se producen a instancia del profesor (P) o de algún alumno (A).
4.2.3 La comunicación es unidireccional (U) o se establece un diálogo fluido (D).

Tabla VIII - 59. Respuestas del observador externo en el cuarto bloque de preguntas (Ciclo II-2).

En el campo de respuesta abierta, el observador externo hace los siguientes comentarios:

- Sesión 5: "Intervención suficiente y de calidad."
- Sesión 6: El observador externo indica en esta sesión que las intervenciones son más frecuentes con alumnos individuales que con los equipos.

VIII.3.4.5. Otras incidencias y comentarios generales sobre la sesión

El observador externo no realiza en este ciclo ningún comentario en el campo de respuesta abierta para este punto del protocolo de observación.

VIII.4. Fase de reflexión

En esta sección presentamos una síntesis del proceso de reflexión continuo que se hace a lo largo de todo el ciclo de investigación-acción, tanto de forma personal por el profesor-investigador como de forma colectiva por todo el equipo de investigación.

A pesar de tratarse del segundo ciclo de investigación-acción en 2º de la ESO, estamos ante el cuarto ciclo de investigación-acción realizado por el profesor-investigador en esta experimentación y, como hemos visto, se aprecian diferentes signos de que en varios de los focos de interés estamos ya en un ciclo de saturación. Estos signos son especialmente claros en los primeros cuatro focos de interés en los que, además, no se introdujeron cambios significativos en el diseño de la propuesta para este ciclo.

VIII.4.1. Sobre el diseño de la propuesta

En este ciclo de investigación-acción se han realizado cambios en el diseño que afectaban principalmente al Foco 5 “repartos proporcionales” y al Foco 6 “Interpretación del porcentaje y problemas asociados”, además de algunos cambios en la reorganización de los problemas en las primeras sesiones de clase.

Como reflexionaremos en la siguiente sección los cambios en los focos de contenido han resultado exitosos en términos cognitivos.

Además, la secuenciación y número de actividades parecen también adecuados si se tienen en cuenta las pocas incidencias sobrevenidas durante la acción y los comentarios positivos del observador externo. El observador externo valora de forma positiva, con la máxima calificación, tanto el grado de adecuación de todas las sesiones al diseño teórico como la viabilidad del tratamiento de los contenidos.

Se estima conveniente realizar algunos cambios menores en el diseño para la siguiente implementación:

- Modificar la estructura numérica del problema TC8.2 para que la solución óptima del reparto inversamente proporcional sea única.
- Modificar la estructura numérica del problema PE.9.2 para que la solución sea más realista.

VIII.4.2. Sobre la comprensión de los alumnos

Estructuramos las reflexiones sobre la comprensión de los alumnos alrededor de los focos de contenido.

VIII.4.2.1. Foco 1: Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad

Alrededor de este foco de interés se han detectado muchas similitudes con lo observado en los ciclos anteriores. Cabe destacar la mejora generalizada en las tasas de acierto, especialmente relevante en la detección de las situaciones de proporcionalidad directa. Respecto a las estrategias, sigue destacando el uso de argumentaciones que usan la constancia en las relaciones de covariación frente al uso de argumentos cualitativos en términos de aumentos y disminuciones, generalmente erróneos, que usan los alumnos del grupo de control.

VIII.4.2.2. Foco 2: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

Aunque las tasas de respuestas correctas no son significativamente diferentes a las observadas en ciclos anteriores, durante el análisis de las producciones escritas hemos detectado algunos indicadores que apuntan hacia ciertas mejoras en la comprensión en este foco de contenido:

- No hemos encontrado ninguna producción que utilice una estrategia incorrecta de resolución.
- En los problemas de valor perdido se incrementa la frecuencia de producciones que utilizan estrategias funcionales.
- En la comparativa longitudinal se aprecia un descenso de los errores asociados a la interpretación y utilización de las razones externas en la resolución de los problemas.

VIII.4.2.3. Foco 3: Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa

Durante este ciclo no hemos encontrado diferencias significativas en la comprensión de los alumnos en este foco de interés respecto a lo observado en el anterior ciclo de 2º de ESO.

Destacamos el bajo uso de argumentos cualitativos para la caracterización de las relaciones de proporcionalidad inversa (solo se ha detectado en tres producciones a lo largo de la propuesta). Esta baja frecuencia destaca frente al uso más generalizado en el grupo de control. Además, en las entrevistas semiestructuradas (ver entrevista a A10.2, sección VIII.3.3.1) se ha puesto de manifiesto que el uso de argumentos de tipo cualitativo puede venir acompañado de una adecuada comprensión de los conceptos de proporcionalidad inversa y constante de proporcionalidad, y puede estar siendo empleado para describir propiedades de la relación de covariación entre las magnitudes.

Las dificultades que inicialmente encuentran los alumnos para interpretar el producto de magnitudes extensivas parecen disiparse a lo largo de la propuesta, especialmente tras la introducción en este ciclo de los problemas de proporcionalidad compuesta.

En los problemas de valor perdido, en términos de éxito no se encuentran diferencias significativas con los alumnos del grupo de control. Sin embargo, sí existen grandes diferencias en cuanto a la estrategia utilizada para resolverlos. Los alumnos del grupo experimental utilizan estrategias funcionales basadas en el control semántico de las operaciones que se realizan entre las cantidades de magnitud, mientras que los alumnos del grupo de control utilizan estrategias algorítmicas.

En general, se sigue detectando una menor preocupación por etiquetar las relaciones de proporcionalidad inversa y proporcionar condiciones de regularidad, por lo que habría que intentar hacer un mayor esfuerzo en este sentido en el siguiente ciclo.

VIII.4.2.4. Foco 4: Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta

Se ha constatado una gran mejora en los resultados entre 1º y 2º de ESO al comparar los ciclos III-1 y II-2 (estudio longitudinal). Este avance no se debe solo a que algunos de los alumnos absentistas u objetores no promocionaran a 2º curso. El estudio de casos particulares y la comparativa con el grupo de control corroboran la mejora de los resultados de forma global y de algunos alumnos en particular.

Se observa una mayor preocupación por justificar y argumentar adecuadamente las respuestas. Los alumnos dan significado a las operaciones entre magnitudes y establecen condiciones de regularidad para justificar la relación de proporcionalidad compuesta.

La institucionalización de estrategias concretas no parece provocar cambios en la elección del método de resolución en problemas posteriores. Los alumnos aplican los conocimientos adquiridos sobre proporcionalidad simple para resolver problemas de proporcionalidad compuesta sin dificultad. La elección del método de resolución está determinada por la estructura funcional y, en el caso de los problemas de valor perdido, por la posición de la variable dependiente.

VIII.4.2.5. Foco 5: Repartos proporcionales

En cuanto a los repartos directamente proporcionales, se han confirmado en este ciclo los buenos resultados obtenidos en el ciclo anterior. Los alumnos utilizan de forma mayoritaria resoluciones aritméticas basadas en la estructura parte-todo de la situación resolviendo los problemas de valor perdido intermedios mediante estrategias funcionales y dando significado a las operaciones realizadas. Las entrevistas semiestructuradas han puesto de manifiesto que los alumnos justifican la elección del modelo proporcional en términos de “justicia”.

Los cambios introducidos en el nuevo problema de reparto inversamente proporcional de la situación introductoria han producido cambios sustanciales en las respuestas de los alumnos respecto al anterior ciclo de investigación-acción de 2º de ESO (ciclo I-2, Capítulo VI). En primer lugar, el número de respuestas que utilizan un modelo de reparto inversamente proporcional es mayoritario, pasando de 2 en el ciclo anterior (solo una de ellas correcta) a 7 (todas ellas correctas).

La situación que debía modelizarse ha permitido a los alumnos interpretar la constante de proporcionalidad. Además, el significado de dicha constante ha guiado el camino hacia una correcta resolución.

Por otro lado, las respuestas que no usan un modelo de reparto inversamente proporcional no recurren a compensaciones aditivas. Este hecho podría estar influenciado no solo por el contexto del problema sino porque las magnitudes involucradas en el reparto (magnitud cuya cantidad debe repartirse y magnitud según la cual se reparte) son diferentes.

El tipo de magnitudes elegidas parece ser también la clave para la aparición de ideas que podrían desembocar, con un trabajo más amplio, en la formalización de un método aritmético general de resolución. El carácter intensivo de la magnitud según la cual se reparte ha facilitado que una pareja de alumnos haya podido interpretar correctamente los inversos de los pesos. Este es el primer paso para poder realizar una interpretación de la cantidad $1/w_1 + 1/w_2 + \cdots + 1/w_p$, que en el problema se puede interpretar como el tiempo que se tarda en hacer un muñeco completo.

Estos buenos indicadores se han visto reforzados con el análisis del segundo problema de reparto inversamente proporcional que los alumnos han tenido que realizar de forma individual. Aunque la tasa de éxito en este caso fue menor, el empleo de un modelo proporcional fue mayoritario y las ideas principales expuestas anteriormente aparecieron en varias de las producciones de los alumnos. En este caso, cabe revisar la estructura numérica en el siguiente ciclo para que exista una única respuesta óptima al reparto de tiempo.

También las entrevistas semiestructuradas han puesto de manifiesto que los alumnos parecen comprender con relativa facilidad las estrategias que permiten resolver los problemas de repartos inversamente proporcionales en estos nuevos contextos a partir de un control semántico de las operaciones con las magnitudes involucradas.

Teniendo en cuenta el número de parejas que utilizan un modelo de reparto proporcional, así como las ideas puestas en juego en las producciones de los alumnos, los contextos utilizados en este ciclo parecen más adecuados que los utilizados en el ciclo I-2 para introducir problemas de repartos inversamente proporcionales ya que permiten al docente generar una discusión más rica en los debates posteriores

VIII.4.2.6. Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados

Durante este ciclo se ha observado que los problemas relacionados con los porcentajes han generado un menor rechazo que el producido durante el ciclo III-1. Este hecho no solo puede deberse a la mayor estructuración introducida en este ciclo respecto al ciclo anterior en 2º de ESO, ya que en el ciclo III-1 de 1º de ESO del que provienen los alumnos de este ciclo ya se comenzó con este tipo de diseño. Los alumnos parecen superar el obstáculo que en 1º de ESO suponen los conocimientos previos respecto al porcentaje basados en métodos de cálculo algoritmizados a partir de una interpretación del porcentaje con significado de operador. Aumentan de forma muy significativa las interpretaciones del porcentaje en términos de razones externas y, a partir de esa interpretación, las estrategias funcionales de resolución en problemas de valor perdido.

Se han observado en este ciclo diferentes mejoras en la comprensión en este foco de contenido:

- En términos transversales, los resultados obtenidos en este ciclo son mejores que los obtenidos en el ciclo I-2, tanto con una comparación directa de las tasas de éxito y las estrategias de resolución, como con una comparación de las comparativas con los grupos de control correspondientes.
- En términos longitudinales, hemos visto que los alumnos de las entrevistas semiestructuradas, ahora interpretan correctamente sin dificultad razones asociadas a aumentos y diminuciones porcentuales e incluso justifican las operaciones que realizan a partir de ellas, mientras que en las entrevistas del ciclo III-1 presentaban dificultades para interpretar razones externas más sencillas asociadas a porcentajes. También hemos comprobado que las producciones escritas de algunos alumnos mejoran significativamente desde la prueba escrita de 1º de ESO a la prueba escrita de 2º de ESO, tanto en cuanto a la corrección de las respuestas como en cuanto a la argumentación y justificación de las mismas.

VIII.4.3. Sobre la metodología y la labor del profesor-investigador

Como en los ciclos anteriores, el profesor-investigador valora como muy positiva la metodología de enseñanza basada en un enfoque a través de la resolución de problemas que implementa en este cuarto ciclo de investigación-acción de forma natural.

Esta opinión del profesor-investigador viene corroborada por las valoraciones positivas del observador externo, que califica todos los ítems sobre la actuación del profesor-investigador, la actuación de los alumnos y las interacciones profesor-alumno con la calificación más alta. Estos indicadores muestran la evolución de la labor del profesor-investigador desde el ciclo II-1 hasta este ciclo ya que, en el Capítulo V, el mismo observador externo no valoró todos los ítems con la máxima calificación.

Como siempre, las observaciones cualitativas recogidas en los diarios de clase y en los campos abiertos del cuestionario del observador externo sirven para mejorar algunos aspectos relacionados con la institucionalización de los conceptos clave y con los debates posteriores al trabajo de los equipos y alumnos.

Capítulo IX: Tercer ciclo de investigación-acción en 2º de ESO

...
y eches el ancla de viejo ya en la isla
rico de cuanto ganaste en el mundo,
sin esperar que las riquezas te las traiga Ítaca.

En el Capítulo IX terminamos el análisis de los diferentes ciclos de investigación-acción en los que se estructura la experimentación. Se trata del ciclo de saturación para 2º de ESO y por tanto de toda la propuesta didáctica, por lo que completa todos los objetivos de investigación planteados. Al igual que en los capítulos anteriores, estructuramos las secciones a partir de las cuatro fases de investigación-acción: planificación (sección IX.1), acción (sección IX.2), observación (sección IX.3) y reflexión (sección IX.4). La observación en este ciclo se hace con una menor estructuración y un menor detalle en el análisis respecto a ciclos anteriores para resaltar los hechos diferenciales del ciclo y no proporcionar información redundante. La reflexión que planteamos en este capítulo hará solo referencia a lo sucedido durante este ciclo. En el Capítulo X haremos una reflexión final sobre la propuesta, la experimentación y los resultados de forma global.

IX.1. Fase de planificación

Como vimos en el Capítulo VIII, el ciclo II-2 tenía muchas características de un ciclo de saturación. Además de tratarse del segundo ciclo de investigación-acción en 2º de ESO, era el quinto ciclo de investigación-acción que se realizaba con las ideas de la propuesta. Los cambios sustanciales que se realizaron en el ciclo anterior tenían que ver con los focos de investigación 5 y 6, es decir, con los contenidos relacionados con los repartos proporcionales (especialmente con los inversos) y con el concepto de porcentaje y problemas asociados.

No se introdujeron cambios (salvo pequeñas erratas de redacción o cambios en la maquetación) en los problemas asociados a los focos 1, 2, 3 y 4. Sí se continuó con la preparación de documentos escritos y presentaciones digitales para apoyar los debates y puestas en común en el aula.

Por otro lado, los cambios introducidos en el capítulo anterior para los problemas de reparto inversamente proporcionales resultaron exitosos, por lo que se decidió mantener dicho enfoque en este tercer ciclo de 2º de ESO. La situación introductoria se mantiene sin modificaciones. El segundo problema de repartos inversamente proporcionales que aparece en la ficha de trabajo para casa TC8 tenía la dificultad de que el tiempo disponible no podía repartirse de forma completa porque la constante de proporcionalidad ("número de menús"), de carácter discreto, no era entera. Por tanto, aunque sí que había un número máximo de menús que podían realizarse, el tiempo necesario para realizar este número de menús era inferior al tiempo que debía repartirse, por lo que no había una forma única de repartir el tiempo "sobrante". Por lo anterior, se decidió cambiar la estructura numérica de dicho problema para evitar este inconveniente que pudo lastrar la tasa de éxito en este problema en el ciclo II-2.

De la redacción del ciclo II-2:

TC8.2: *Vienen unos amigos a cenar y voy a hacer hamburguesas y crepes de postre. Sé que puedo hacer 6 hamburguesas por hora y 5 crepes por hora. Si dispongo de 4 horas para hacer la cena, ¿cómo debo repartir mi tiempo para cocinar?*

Se pasó a la siguiente redacción en el ciclo III-2:

TC8.2: *Vienen unos amigos a cenar y voy a hacer hamburguesas y crepes de postre. Sé que puedo hacer 6 hamburguesas por hora y 5 crepes por hora. Si dispongo de 3 horas y 40 minutos para hacer la cena, ¿cómo debo repartir mi tiempo para cocinar?*

El nuevo diseño para los problemas relacionados con el Foco 6 pareció arrojar unos mejores resultados que el diseño del ciclo I-2. Por tanto, tampoco se introdujeron cambios en el diseño para este foco salvo pequeñas erratas de redacción o cambios en la maquetación y la corrección y creación de materiales complementarios para el aula y el alumnado. Una de las erratas corregidas se corresponde con uno de los datos del problema PE.9.2 que, aunque no parecía causar dificultades a los alumnos, arrojaba un resultado poco realista.

La continuidad del diseño viene acompañada de una continuidad en el enfoque didáctico y metodológico. No se introducen cambios sustanciales que pretendan incidir sobre aspectos conceptuales, ni se producen cambios en el enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas. Tampoco se introducen cambios en la metodología de investigación. No obstante, el profesor-investigador, teniendo en cuenta los puntos débiles en la comprensión de los alumnos en algunos aspectos, procurará reservar un mayor espacio para ellos en los debates y puestas en común que se realizan tras la realización de las diferentes actividades propuestas.

IX.2. Fase de acción

Como en los capítulos anteriores, tras analizar la fase de planificación, concretamos los detalles de la muestra de estudiantes que participaron en este ciclo, el calendario de actuación y, para dar cuenta de la acción, desarrollamos la información obtenida a partir del diario de clase del profesor-investigador.

IX.2.1. Participantes

La fase de acción del ciclo III-2 se realizó durante el curso 2016-2017 en el IES Leonardo de Chabacier de Calatayud (Zaragoza). Como se comentó en el capítulo anterior, en ese curso escolar, el centro contaba con tres vías en 2º de ESO, con un total de 58 alumnos repartidos en tres grupos ordinarios (A, B y C). Además, alrededor de otros 20 alumnos de 2º de ESO formaban parte del PAB y de la UIEE y recibían las clases de matemáticas fuera de los grupos ordinarios. Por sorteo se decidió que el grupo B fuera el grupo experimental del ciclo III-2. El grupo de control (común para los ciclos II-2 y III-2) fue el grupo C (20 alumnos). El grupo experimental de este ciclo (Tabla IX - 1) estaba formado por 18 alumnos sin ningún repetidor. De ellos, 15 provenían de grupos experimentales del ciclo III-1 (13 del D, 1 del C y 1 del B) y tres provenían del grupo de control.

	Grupo único - B
Alumnos	18
Equipos	9

Tabla IX - 1. Número de participantes y de equipos de trabajo (Ciclo III-2).

Así, en este ciclo de investigación-acción, disponemos de una muestra de18 alumnos, que se agruparon en 9 equipos de clase. Para las tareas de aula dispondremos de 9 producciones diferentes, mientras que en las tareas de casa y la prueba escrita dispondremos de 18 producciones.

Como en los anteriores capítulos, para hacer referencia a los equipos usaremos la codificación Xi, donde X representa la letra del grupo e i el ordinal de este según la disposición espacial que había en las aulas. Los alumnos se codifican añadiendo al código de su equipo el ordinal que le correspondía en él según el orden de las mesas.

IX.2.2. Calendario de actuación

En la Tabla IX - 2 aparecen el calendario de actuación y el horario en el que se llevaron a cabo las sesiones. La planificación tuvo en cuenta el calendario específico del curso y grupo para que la primera sesión coincidiera con el primer día de la semana que los alumnos tenían clase de matemáticas. Como dijimos en el Capítulo III, para poder realizar el segundo y tercer ciclo durante el mismo curso académico, en este tercer ciclo la propuesta no se ubica al final del bloque de números, sino que se esperó a que los alumnos del grupo B terminasen las unidades didácticas correspondientes al bloque de álgebra.

Grupo único			Grupo único		
Sesión 1	14-03-17	12:20 – 13:30	**Sesión 8**	24-03-17	10:35 – 11:25
Sesión 2	15-03-17	10:35 – 11:25	**Sesión 9**	28-03-17	12:20 – 13:30
Sesión 3	16-03-17	13:35 – 14:25	**Sesión 10**	29-03-17	10:35 – 11:25
Sesión 4	17-03-17	10:35 – 11:25	**Sesión 11**	30-03-17	13:35 – 14:25
Sesión 5	21-03-17	12:20 – 13:30	**Sesión 12**	31-03-17	10:35 – 11:25
Sesión 6	22-03-17	10:35 – 11:25	**Sesión 13**	04-04-17	12:20 – 13:30
Sesión 7	23-03-17	13:35 – 14:25	**Prueba**	05-04-17	10:35 – 11:25

Tabla IX - 2. Calendario de actuación (Ciclo III-2).

IX.2.3. Desarrollo de las sesiones

En este apartado resumimos el desarrollo de las sesiones a partir de la información recogida en el diario de clases. Comentaremos las incidencias sobre la asistencia y los aspectos actitudinales de los alumnos, y resumiremos las apreciaciones sobre la comprensión y el funcionamiento de las sesiones.

IX.2.3.1. Primera sesión

Asisten todos los alumnos. La actitud y el nivel de trabajo son adecuados.

La sesión transcurre sin incidencias ni comentarios relevantes del profesor-investigador. Se ejecuta según el plan previsto y no se detectan diferencias con la ejecución en el ciclo anterior.

IX.2.3.2. Segunda sesión

No asiste el alumno B8.1.

La sesión transcurre sin incidencias ni comentarios del profesor-investigador relevantes. Se ejecuta según el plan previsto y no se detectan diferencias con la ejecución en el ciclo anterior.

IX.2.3.3. Tercera sesión

No asisten los alumnos B2.1, B8.1 y B8.2. La actitud y el nivel de trabajo son adecuados, aunque comienza a observarse una cierta pasividad en las puestas en común por parte de los alumnos.

La sesión se ejecuta según lo planificado.

No se detectan problemas de comprensión aparentes pero los alumnos que provenían del grupo de control en 1º de ESO verbalizan expresiones del tipo “esto es regla de tres” reconociendo la estructura de los problemas de valor perdido.

IX.2.3.4. Cuarta sesión

No asisten los alumnos B8.1 y B8.2. El comportamiento es adecuado, aunque el ritmo de trabajo de los alumnos es más bajo que en las sesiones anteriores.

Falta tiempo para la puesta en común del último problema de la sesión. Por lo demás, la sesión se ejecuta según el plan inicial.

Se observan bastantes errores en la resolución de los problemas durante la sesión, lo que, sumado a la falta de tiempo para la puesta en común, hace necesario retomar esta puesta común al comienzo de la quinta sesión.

IX.2.3.5. Quinta sesión

Asisten todos los alumnos.

La sesión se desarrolla según la planificación.

La actitud y la implicación en el trabajo son algo peores que en sesiones anteriores. Además, un muy bajo número de alumnos entrega la tarea para casa.

A pesar de que pocos alumnos entregan la tarea para casa, se constata que después de tener esta tarea durante el fin de semana empiezan a aparecer métodos automatizados de resolución que se intentan disfrazar según algunas de las indicaciones de la propuesta. Cuando los alumnos son preguntados por el significado de las operaciones o resultados (parciales o finales) que obtienen no saben explicar sus razonamientos. Se realiza alguna intervención particular con alumnos de algunos de los equipos.

De forma general se repiten los problemas con la proporcionalidad inversa y los distintos ritmos de trabajo que ya aparecieron durante estas sesiones en el ciclo anterior.

IX.2.3.6. Sexta sesión

No asiste el alumno B2.1. La actitud y la implicación en el trabajo son adecuados.

Por problemas sobrevenidos, el profesor-investigador asiste a la sesión 20 minutos más tarde de la hora de comienzo. Por este motivo la planificación sufre algunas modificaciones sobre la marcha. Durante la sesión no se pone en común la ficha F6.2 que, por otra parte, no han acabado muchos equipos (solo se realiza la ficha F6.1 y su puesta en común). Como consecuencia de este inconveniente se toman las dos decisiones siguientes:

- No se reparte la ficha con la tarea para casa TC6. En su lugar, los alumnos deberán terminar la ficha F6.2 comenzada durante la sesión.
- Se modifica la ficha F7.1 de la siguiente sesión. Se añaden los problemas que contenía TC6 y F7.1 pero eliminando F7.1.1 y F7.1.3. Es decir, se eliminan el problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad compuesta y el problema en el que la situación compuesta involucraba cuatro magnitudes diferentes.

IX.2.3.7. Séptima sesión

No asisten los alumnos B1.1, B2.1 y B9.2. La actitud y la implicación en el trabajo son adecuados.

La sesión se lleva a cabo sin incidencias tras las modificaciones realizadas al término de la sesión anterior.

El profesor-investigador detecta numerosas dificultades en determinados equipos para resolver los problemas de proporcionalidad compuesta, estas dificultades son mayores que las observadas en ciclos anteriores en 2º de ESO.

IX.2.3.8. Octava sesión

No asisten los alumnos B1.1 y B2.1. La actitud y la implicación en el trabajo son adecuados.

La sesión se desarrolla según la planificación prevista sin mayores incidentes.

Se detectan dificultades en bastantes equipos para resolver el problema F8.1.1 de reparto directamente proporcional que había tenido unas tasas de éxito muy altas en los dos ciclos anteriores de 2º de ESO.

IX.2.3.9. Novena sesión

No asisten los alumnos B5.2, B7.1 y B9.2.

La actitud y la implicación en el trabajo son buenos. Se detecta una mejora de la implicación de los alumnos respecto a sesiones anteriores. Las actividades introductorias sobre porcentajes se acogen con una actitud más positiva que los problemas verbales con una longitud de texto mayor y una mayor cantidad de datos (problemas de proporcionalidad compuesta y de repartos proporcionales) que se habían realizado en las últimas sesiones.

La sesión se desarrolla según lo planificado, con un buen ajuste a los tiempos previstos, lo que permite una puesta en común final extensa y provechosa.

La sesión se valora muy positivamente por el profesor-investigador.

IX.2.3.10. Décima sesión

No asisten los alumnos B6.1, B7.1 y B9.2. La actitud y la implicación en el trabajo son adecuados.

Aunque la sesión se ha desarrollado según la planificación, se ha decidido sobre la marcha espaciar las puestas en común de los primeros problemas porque el profesor-investigador ha detectado que algunos equipos estaban algo bloqueados al principio de la actividad. Por tanto, en vez de una puesta en común única al final de la sesión se han producido varias puestas en común a lo largo de su desarrollo.

El profesor-investigador cree que la comprensión de los contenidos a lo largo de la sesión ha sido bastante buena y valora la sesión como muy productiva.

IX.2.3.11. Undécima sesión

No asisten los alumnos B3.1, B6.1, B7.1 y B9.2. La actitud y la implicación en el trabajo son muy buenas.

La sesión se desarrolla siguiendo el plan previsto, sin embargo, la mayor rapidez de los alumnos a la hora de resolver los problemas provoca que se termine con las actividades previstas 10 minutos antes de finalizar la sesión de clase. En ese momento, se ha repartido la ficha con la tarea para casa para que los alumnos comenzaran a realizarla en el tiempo restante.

A diferencia de lo ocurrido en ciclos anteriores, el profesor-investigador percibe una mejor actitud de los alumnos a la hora de abordar los contenidos relacionados con porcentajes según la propuesta.

La comprensión de los contenidos parece adecuada y se valora de forma muy positiva la sesión.

El profesor-investigador reflexiona sobre la necesidad de tener preparado material adicional en futuras implementaciones para poder hacer frente a este tipo de contingencias.

IX.2.3.12. Duodécima sesión

No asiste el alumno B7.1. La actitud y la implicación en el trabajo son adecuados.

La sesión transcurre sin incidencias ni comentarios del profesor-investigador relevantes. Se ejecuta según el plan previsto.

El profesor-investigador percibe una mejor comprensión de los contenidos asociados con los aumentos y disminuciones porcentuales que en los ciclos anteriores.

IX.2.3.13. Decimotercera sesión

No asisten los alumnos B7.1 y B8.2. La actitud y la implicación en el trabajo son adecuados.

En la puesta en común se produce un debate muy interesante en torno a los problemas de comparación cualitativa (a partir del problema F13.1.3) y las formas de representar la información para resolverlos.

Como en ciclos anteriores, la última sesión de repaso que recoge contenidos de toda la secuencia se valora de forma muy positiva.

IX.2.3.14. Prueba escrita

No asiste el alumno B8.2.

La prueba escrita se desarrolla sin incidencias.

El tiempo para completar la prueba parece adecuado y la mayoría de los estudiantes la terminan antes del final de la sesión.

No se evidencian problemas de comprensión de los enunciados de los problemas.

IX.3. Fase de observación

En esta sección presentamos los resultados de la observación para el tercer ciclo en 2º de ESO, quinto de la investigación para este proyecto. Analizamos la información recogida a través de: las producciones escaneadas de los estudiantes de todos los problemas realizados durante la propuesta y en la prueba escrita final, las producciones de los estudiantes del grupo de control en la prueba escrita, las entrevistas semiestructuradas y los informes realizados por el observador externo.

IX.3.1. Análisis de las producciones escritas

Seguiremos la estructura utilizada en los capítulos anteriores, aunque para evitar reiteraciones innecesarias obviaremos algunas partes que no presenten información significativamente distinta de la ya expuesta en el resto de la memoria. Dado que en los focos 1,2, 3 y 4 ya se observaron indicios de saturación, prestaremos mayor atención a los focos 5 y 6 (“Repartos proporcionales” e “Interpretación del porcentaje y problemas asociados”) en los que sí se introdujeron cambios sustanciales en el ciclo anterior. La descripción de las categorías de análisis utilizadas en cada nivel puede consultarse tanto en el Capítulo III (ver sección III.3.8.2) como en la sección de análisis análoga del Capítulo VI.

IX.3.1.1. Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad

Analizamos las producciones de los alumnos en las tareas específicas diseñadas para el Foco 1. Las sesiones 1 y 2 se dedican íntegramente a estos contenidos. Además, se incluyen problemas específicos en la ficha de repaso F13.1 y en la prueba escrita (PE.1, PE.2.2 y PE.2.3). El análisis de las producciones en este foco sigue la estructura utilizada en el Capítulo VI y en el Capítulo VIII (secciones VI.3.1.1 y VIII.3.1.1).

Análisis de la situación introductoria.

En la Tabla IX - 3 se presentan los resultados para las categorías generales en la situación introductoria. Como vemos, los porcentajes de respuestas correctas son muy altos, al igual que ocurría en los ciclos anteriores para 2º de ESO (ver Tabla VI - 18 y Tabla VIII - 9). De hecho, todos los alumnos responden correctamente al ítem F2.1.1.

		N	B	I	C
F2.1.1	N.º de respuestas	0	0	0	9
	Porcentaje	-	-	-	100 %
F2.1.2	N.º de respuestas	0	2	0	7
	Porcentaje	-	22,2 %	-	77,8 %

Tabla IX - 3. Resultados generales en la situación introductoria de análisis de situaciones de proporcionalidad inversa y cálculo de la constante de proporcionalidad (Ciclo III-2).

Como en los ciclos anteriores, la situación introductoria sigue mostrándose adecuada para introducir el concepto de relación inversamente proporcional, observándose frecuencias de respuestas correctas e incorrectas muy similares a las descritas en los anteriores ciclos de investigación-acción.

Análisis de las producciones tras la institucionalización.

Como en los capítulos anteriores, el análisis de este foco se hace a partir de cuatro categorías diferentes de problemas según se pida determinar y justificar la existencia de una relación de proporcionalidad, calcular e interpretar las constantes de proporcionalidad asociadas, conectar el valor numérico de una razón con su significado (o viceversa), o detectar “falsos” problemas de proporcionalidad.

Problemas en los que se solicita determinar si existe relación de proporcionalidad.

En la Tabla IX - 4 y en la Tabla IX - 5 se presentan los resultados para los problemas en los que solicita determinar la existencia de una relación de proporcionalidad. En la primera tabla mostramos las frecuencias de éxito (y de respuestas incorrectas, en blanco o no entregadas) para los problemas en los que se pedía determinar si existía o no una relación de proporcionalidad (distinguiendo entre directa e inversa en su caso). En la segunda tabla se muestran los resultados que resumen el tipo de argumento empleado por el alumnado en sus respuestas. Las filas en gris oscuro representan las situaciones que no eran proporcionales, en gris claro las situaciones de proporcionalidad simple inversa y en blanco las situaciones de proporcionalidad simple directa.

	N	B	I	C
F1.1.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (9)
F1.1.2	0 (0)	11,1 (1)	22,2 (2)	66,7 (6)
F1.1.3	0 (0)	0 (0)	44,4 (4)	55,6 (5)
F1.1.4	0 (0)	11,1 (1)	0 (0)	88,9 (8)
F1.1.5	0 (0)	77,8 (7)	0 (0)	22,2 (2)
TC1.1	5,6 (1)	0 (0)	0 (0)	94,4 (17)
TC1.2	5,6 (1)	5,6 (1)	5,6 (1)	83,3 (15)
TC1.3	5,6 (1)	5,6 (1)	77,8 (14)	11,1 (2)
TC1.4	5,6 (1)	0 (0)	22,2 (4)	72,2 (13)
F2.2.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (9)
F2.2.2	0 (0)	11,1 (1)	0 (0)	88,9 (8)
F2.2.3	0 (0)	0 (0)	77,8 (7)	22,2 (2)
TC2.1.1	22,2 (4)	33,3 (6)	5,6 (1)	38,9 (7)

	N	B	I	C
TC2.1.2	22,2 (4)	5,6 (1)	27,8 (5)	44,4 (8)
TC2.1.3	22,2 (4)	16,7 (3)	0 (0)	61,1 (11)
TC2.2.1	22,2 (4)	44,4 (8)	16,7 (3)	16,7 (3)
TC2.2.2	22,2 (4)	38,9 (7)	0 (0)	38,9 (7)
TC2.2.3	22,2 (4)	44,4 (8)	0 (0)	33,3 (6)
F13.1.1.1	0 (0)	11,1 (1)	22,2 (2)	66,7 (6)
F13.1.1.2	0 (0)	11,1 (1)	11,1 (1)	77,8 (7)
F13.1.1.3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (9)
PE.1.1	5,6 (1)	0 (0)	61,1 (11)	33,3 (6)
PE.1.2	5,6 (1)	0 (0)	5,6 (1)	88,9 (16)
PE.1.3	5,6 (1)	0 (0)	22,2 (4)	72,2 (13)
PE.1.4	5,6 (1)	0 (0)	11,1 (2)	83,3 (15)

Tabla IX - 4. Resultados generales en los problemas de detección de relaciones de proporcionalidad (Ciclo III-2).

En la línea de lo observado en el ciclo anterior de 2º de ESO observamos buenos resultados de forma general, especialmente en las situaciones de proporcionalidad simple directa. Sin embargo, en este ciclo encontramos dos diferencias. En primer lugar, vemos que hay un mayor número de producciones no entregadas y en blanco de las tareas para casa en comparación con el ciclo II-2. Este hecho, que se mantiene constante a lo largo de este ciclo, hace que los porcentajes de respuestas correctas (y también los de incorrectas) bajen en las tareas para casa. En segundo lugar, observamos que la tasa de acierto para el ítem F1.1.5 es muy baja, sin embargo, parece que la explicación de este hecho puede encontrarse en que los alumnos en este ciclo no llegaron a completar este ejercicio ya que todas las respuestas no clasificadas como correctas se encuentran en la categoría de respuestas en blanco. En la situación de proporcionalidad directa de la prueba escrita final (PE.1.4), la tasa de éxito es prácticamente igual que en el ciclo anterior. De hecho, en ningún ítem de la prueba escrita en este ciclo (no solo los correspondientes a este foco) hemos encontrado diferencias respecto al ciclo II-2 que sean estadísticamente significativas.

Respecto a las situaciones de proporcionalidad inversa (filas en gris claro) observamos que las tasas de acierto de las situaciones en las que aparecen dos magnitudes extensivas, aunque siguen siendo más bajas que las de aquellas en las que aparece una magnitud extensiva y una intensiva, mejoran respecto al ciclo anterior (en F1.1.3 se pasa del 30 % al 55,6 % en la tasa de respuestas correctas y en F2.2.3 del 0 % al 22,2 %). Este era uno de los puntos de mejora que se habían propuesto a la finalización del ciclo anterior.

En cuanto a las situaciones no proporcionales, observamos buenas tasas de éxito en los ítems realizados durante las sesiones de clase. En la prueba escrita se obtienen en PE.1.1 (relación afín decreciente) peores resultados que en el ciclo II-2 pero parecidos a los observados en el ciclo I-2. Por otro lado, en PE.1.2 se obtienen mejores resultados que en los dos ciclos anteriores. Reiteramos que ninguna de las diferencias con el ciclo II-2 en la prueba escrita resulta estadísticamente significativa.

	D0	D2	D7	D8	D9		D0	D2	D7	D8	D9
F1.1.1	22,2 (2)	77,8 (7)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	**TC2.1.3**	5,6 (1)	16,7 (3)	0 (0)	38,9 (7)	0 (0)
F1.1.2	11,1 (1)	55,6 (5)	0 (0)	0 (0)	22,2 (2)	**TC2.2.1**	22,2 (4)	11,1 (2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F1.1.3	0 (0)	100 (9)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	**TC2.2.2**	0 (0)	38,9 (7)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F1.1.4	11,1 (1)	77,8 (7)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	**TC2.2.3**	5,6 (1)	0 (0)	0 (0)	22,2 (4)	0 (0)
F1.1.5	0 (0)	22,2 (2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	**F13.1.1.1**	33,3 (3)	44,4 (4)	0 (0)	11,1 (1)	0 (0)
TC1.1	5,6 (1)	88,9 (16)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	**F13.1.1.2**	55,6 (5)	33,3 (3)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC1.2	33,3 (6)	55,6 (10)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	**F13.1.1.3**	33,3 (3)	66,7 (6)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
TC1.3	5,6 (1)	77,8 (14)	0 (0)	0 (0)	5,6 (1)	**PE.1.1**	44,4 (8)	38,9 (7)	5,6 (1)	0 (0)	5,6 (1)
TC1.4	5,6 (1)	83,3 (15)	0 (0)	0 (0)	5,6 (1)	**PE.1.2**	27,8 (5)	44,4 (8)	0 (0)	22,2 (4)	0 (0)
TC2.1.1	11,1 (2)	55,6 (19)	5,6 (1)	0 (0)	0 (0)	**PE.1.3**	22,2 (4)	66,7 (12)	5,6 (1)	0 (0)	0 (0)
TC2.1.2	5,6 (1)	55,6 (10)	11,1 (2)	0 (0)	0 (0)	**PE.1.4**	27,8 (5)	61,1 (11)	5,6 (1)	0 (0)	0 (0)

Tabla IX - 5. Argumentos empleados por los alumnos en el análisis de relaciones de proporcionalidad (Ciclo III-2).

Pese al ligero aumento de respuestas no argumentadas (D0) respecto al ciclo anterior, el número de respuestas que usan argumentos cualitativos erróneos (D7) se mantiene bajo (seis respuestas en total en este ciclo frente a las siete del ciclo anterior) y solo aparecen este tipo de respuestas en la primera tarea para casa y en la prueba escrita final. Además, como en los ciclos anteriores, la argumentación institucionalizada (D2) es mayoritaria en prácticamente todas las respuestas salvo en algunos de los problemas en los que no puede suponerse relación de proporcionalidad. Si se compara la Tabla IX - 5 con la análoga para el ciclo II-2, Tabla VIII - 11, se observa que las frecuencias de uso de la estrategia D8 aumentan en exactamente los mismos ítems (TC2.1.3, TC2.2.3, F13.1.1.1 y PE.1.2).

Problemas en los que se pide calcular las constantes de proporcionalidad asociadas a una situación de proporcionalidad.

En la Tabla IX - 6 observamos los resultados para los problemas en los que se pide calcular las razones (para el caso directo, filas en blanco) o la constante de proporcionalidad (para el caso inverso, filas en gris) e interpretarlas. Para los problemas que presentan una situación de proporcionalidad simple directa se diferencia C1 y C2 según sea correcto solo un valor (o interpretación) para una razón externa o lo sean los dos.

Aunque de forma general la distribución de frecuencias es muy similar a la observada en el ciclo II-2, cabe destacar una leve mejora en el cálculo e interpretación de las constantes de proporcionalidad inversa y un leve empeoramiento en el cálculo e interpretación de las de proporcionalidad directa.

		Valor numérico			Interpretación			
		B/I	**C1**	**C2**	**B**	**I**	**C1**	**C2**
F1.1.1	N.º de respuestas	0	2	7	0	0	2	7
	Porcentaje	-	22,2 %	77,8 %	-	-	22,2 %	77,8 %
F1.1.4	N.º de respuestas	2	1	6	2	0	2	5
	Porcentaje	22,2 %	11,1 %	66,7 %	22,2 %	-	22,2 %	55,6 %
F1.1.5	N.º de respuestas	7	1	1	7	0	1	1
	Porcentaje	77,8 %	11,1 %	11,1 %	77,8 %	-	11,1 %	11,1 %
TC1.1	N.º de respuestas	0	1	16	3	3	0	11
	Porcentaje	-	5,6 %	88,9 %	16,7 %	16,7 %	-	61,1 %
TC1.4	N.º de respuestas	0	0	13	0	4	0	9
	Porcentaje	-	-	72,2 %	-	22,2 %	-	50 %
F2.2.1	N.º de respuestas	0	9		0	0	9	
	Porcentaje	-	100 %		-	-	100 %	
F2.2.2	N.º de respuestas	1	0	8	1	1	0	7
	Porcentaje	11,1 %	-	88,9 %	11,1 %	11,1 %	-	77,8 %
F2.2.3	N.º de respuestas	8	1		8	0	1	
	Porcentaje	88,9 %	11,1 %		88,9 %	-	11,1 %	

Tabla IX - 6. Resultados generales para los problemas en los que se solicitaba calcular las razones o la constante de proporcionalidad asociadas a una situación de proporcionalidad simple (Ciclo III-2).

Problemas en los que se pide identificar/calcular una razón concreta o la constante de proporcionalidad inversa en una situación de proporcionalidad.

	N	**B**	**I**	**C**		**N**	**B**	**I**	**C**
F9.1.1.1	0 (0)	0 (0)	11,1 (1)	88,9 (8)	**TC9.3.6**	33,3 (6)	0 (0)	16,7 (3)	50 (9)
F9.1.1.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (9)	**F10.1.3.3**	11,1 (1)	0 (0)	0 (0)	88,9 (8)
F9.1.1.3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (9)	**F11.1.1.2**	22,2 (2)	0 (0)	0 (0)	77,8 (7)
F9.1.1.4	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (9)	**F11.1.1.4**	22,2 (2)	0 (0)	11,1 (1)	66,7 (6)
F9.1.2.2	0 (0)	0 (0)	11,1 (1)	88,9 (8)	**F11.1.1.5**	22,2 (2)	0 (0)	33,3 (3)	44,4 (4)
F9.1.2.4	0 (0)	22,2 (2)	11,1 (1)	66,7 (6)	**F11.1.2.1**	22,2 (2)	0 (0)	55,6 (5)	22,2 (2)
F9.1.2.5	0 (0)	22,2 (2)	22,2 (2)	55,6 (5)	**F11.1.2.2**	22,2 (2)	0 (0)	44,4 (4)	33,3 (3)
F9.1.3.1	0 (0)	0 (0)	44,4 (4)	55,6 (5)	**F11.1.3.1**	22,2 (2)	0 (0)	44,4 (4)	33,3 (3)
F9.1.3.2	0 (0)	0 (0)	44,4 (4)	55,6 (5)	**F11.1.3.2**	22,2 (2)	0 (0)	44,4 (4)	33,3 (3)
F9.1.3.3	0 (0)	22,2 (2)	66,7 (6)	11,1 (1)	**F11.1.4.2**	22,2 (2)	0 (0)	0 (0)	77,8 (7)
TC9.1.1	33,3 (6)	0 (0)	11,1 (2)	55,6 (10)	**F11.1.4.4**	22,2 (2)	11,1 (1)	11,1 (1)	55,6 (5)
TC9.2.1	33,3 (6)	0 (0)	16,7 (3)	61,1 (11)	**F11.1.4.5**	22,2 (2)	11,1 (1)	33,3 (3)	33,3 (3)
TC9.2.2	33,3 (6)	5,6 (1)	16,7 (3)	44,4 (8)	**TC11.1.1**	27,8 (5)	0 (0)	27,8 (5)	44,4 (8)
TC9.3.1	33,3 (6)	0 (0)	27,8 (5)	38,9 (7)	**TC11.1.2**	27,8 (5)	0 (0)	11,1 (2)	61,1 (11)
TC9.3.2	33,3 (6)	0 (0)	16,7 (3)	50 (9)	**TC11.2.1**	27,8 (5)	5,6 (1)	50 (9)	16,7 (3)
TC9.3.3	33,3 (6)	0 (0)	22,2 (4)	44,4 (8)	**TC11.2.2**	27,8 (5)	5,6 (1)	50 (9)	16,7 (3)
TC9.3.4	33,3 (6)	0 (0)	16,7 (3)	50 (9)	**PE.2.2**	5,6 (1)	0 (0)	27,8 (5)	66,7 (12)
TC9.3.5	33,3 (6)	0 (0)	16,7 (3)	50 (9)	**PE.2.3**	5,6 (1)	0 (0)	72,2 (13)	22,2 (4)

Tabla IX - 7. Resultados generales para los problemas en los que solicitaba identificar o calcular una razón concreta o la constante de proporcionalidad en una situación de proporcionalidad (Ciclo III-2).

En la Tabla IX - 7 presentamos los resultados en las categorías generales para los problemas en los que se pide identificar o calcular una razón concreta dado su significado. Para este tipo de problemas, que son de respuesta prácticamente cerrada, no analizamos categorías específicas. El alto número de problemas que se analizan en esta tabla se debe a los cambios introducidos en el tratamiento del porcentaje tras el ciclo anterior. Salvo el último problema PE.2.3, todos los demás hacen referencia a situaciones de proporcionalidad simple directa, que salvo PE.2.2 se enuncian en contextos de porcentajes.

Los alumnos del ciclo III-2 parecen tener más dificultades identificando y calculando razones concretas en los contextos de aumentos y disminuciones porcentuales (desde F11.1.12 hasta TC11.2.2) que las que presentaban los alumnos del ciclo II-2. En cuanto al resto de ítems, el comportamiento es similar al descrito en el ciclo anterior, salvo en el ítem F9.1.3.3 en donde se observa una muy baja tasa de éxito. En este ítem se pedía interpretar la razón $\frac{75}{25} = 3$, a partir de un contexto en el que se proporcionaba como dato un $25\ \%$. Es decir, los alumnos parecen tener mayores dificultades en el ítem en el que se pide interpretar una razón parte-parte en un contexto de porcentaje.

Las frecuencias de éxito en los problemas de este foco en la prueba escrita siguen el mismo patrón observado en los ciclos anteriores de 2º de ESO, por lo que nos remitimos a los análisis hechos en el Capítulo VI y en el Capítulo VIII.

Detección de "falsos" problemas de proporcionalidad.

En la Tabla IX - 8 se presentan los resultados para las categorías generales en los "falsos" problemas de proporcionalidad. Es decir, en aquellos problemas que se presentan bajo un aspecto similar a un problema de valor perdido o de comparación, pero en los que no puede suponerse ningún tipo de relación funcional entre las magnitudes por lo que la respuesta correcta pasa por argumentar que estos problemas no pueden resolverse.

		N	**B**	**I**	**C**
F3.1.3	N.º de respuestas	0	1	5	3
	Porcentaje	-	11,1 %	55,6 %	33,3 %
F4.1.3	N.º de respuestas	1	3	2	3
	Porcentaje	11,1 %	33,3 %	22,2 %	33,3 %
TC4.4	N.º de respuestas	9	1	7	1
	Porcentaje	50 %	5,6 %	38,9 %	5,6 %
F5.1.2	N.º de respuestas	0	0	0	9
	Porcentaje	-	-	-	100 %
PE.6	N.º de respuestas	1	0	0	17
	Porcentaje	5,6 %	-	-	94,4 %

Tabla IX - 8. Resultados generales en la detección de falsos problemas de proporcionalidad (Ciclo III-2).

Aunque en los primeros problemas de la propuesta la distribución de frecuencias es diferente a la observada en el ciclo anterior (influida por el mayor número de alumnos que no entregan las tareas de casa y la ausencia de algunos alumnos en sesiones de clase), las tasas de éxito en el último problema realizado en una sesión de clase y en el problema de la prueba escrita son prácticamente idénticas que las observadas en el ciclo anterior. Es decir, hacia el final de la propuesta prácticamente todos los alumnos son capaces de detectar este tipo de situaciones y no resolverlas como si fueran problemas proporcionales.

IX.3.1.2. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa

La propuesta didáctica no sufrió modificaciones en este foco de interés durante este ciclo, por lo que la estructura y codificación de los problemas coincide con lo descrito en la sección análoga del Capítulo VIII.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

En la Tabla IX - 9, en la Tabla IX - 10 y en la Tabla IX - 11 presentamos los resultados relativos a las categorías generales para los problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa, de comparación cuantitativa, de valor perdido y de comparación cualitativa, respectivamente.

		N	B	I	C
F3.1.1	N.º de respuestas	0	0	2	7
	Porcentaje	-	-	22,2 %	77,8 %
TC4.3	N.º de respuestas	9	2	2	5
	Porcentaje	50 %	11,1 %	11,1 %	27,8 %

Tabla IX - 9. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2).

		N	B	I	C
F3.1.4	N.º de respuestas	0	0	4	5
	Porcentaje	-	-	44,4 %	55,6 %
TC3.1	N.º de respuestas	4	2	6	6
	Porcentaje	22,2 %	11,1 %	33,3 %	33,3 %
TC3.2	N.º de respuestas	4	2	10	2
	Porcentaje	22,2 %	11,1 %	55,6 %	11,1 %
F5.1.5	N.º de respuestas	0	1	3	5
	Porcentaje	-	11,1 %	33,3 %	55,6 %

Tabla IX - 10. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2).

		N	B	I	C
F4.1.2	N.º de respuestas	1	2	1	5
	Porcentaje	11,1 %	22,2 %	11,1 %	55,6 %
F13.1.3	N.º de respuestas	0	1	5	3
	Porcentaje	-	11,1 %	55,6 %	33,3 %
PE.2.1	N.º de respuestas	1	0	9	8
	Porcentaje	5,6 %	-	50 %	44,4 %

Tabla IX - 11. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2).

Durante este ciclo las frecuencias de respuestas correctas en este foco de interés son menores que las observadas en los ciclos anteriores para 2º de ESO. Las tasas de respuestas correctas en las tareas para casa son bastante bajas y las correspondientes a las actividades de clase rondan el 50 %.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

En cuanto al tipo de estrategia utilizada por los estudiantes para los problemas de proporcionalidad simple directa, vemos (Tabla IX - 12, Tabla IX - 13,Tabla IX - 14) que las respuestas se concentran (con menor dispersión que en otros ciclos) en las estrategias C1, VPd3 y CL1, es decir, cálculo y comparación de alguna de las razones externas para los problemas de comparación cuantitativa, estrategia funcional mediante la razón externa que permite terminar el problema con una multiplicación para los problemas de valor perdido y argumentaciones verbales para los problemas de comparación cualitativa, respectivamente.

El único caso en el que las estrategias anteriores no son mayoritarias es en el ítem F5.1.5 en donde, de forma similar a los ciclos anteriores, la estrategia VPd4 (funcional terminando con división) tiene la misma frecuencia que la estrategia institucionalizada VPd3.

		C0	C1	C2	C3	C4	C5
F3.1.1	N.º de respuestas	0	8	0	0	0	1
	Porcentaje	-	88,9 %	-	-	-	11,1 %
TC4.3	N.º de respuestas	1	6	0	0	0	0
	Porcentaje	5,6 %	33,3 %	-	-	-	-

Tabla IX - 12. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2).

		VPd0	VPd1	VPd2	VPd3	VPd4	VPd5	VPd6	VPd7	VPd8	VPd9
F3.1.4	N.º de resp.	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	55,6 %	-	-	-	-	-	-
TC3.1	N.º de resp.	0	0	0	11	0	0	0	0	0	1
	Porcentaje	-	-	-	61,1 %	-	-	-	-	-	5,6 %
TC3.2	N.º de resp.	6	0	0	6	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	33,3 %	-	-	33,3 %	-	-	-	-	-	-
F5.1.5	N.º de resp.	0	0	0	4	4	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	44,4 %	44,4 %	-	-	-	-	-

Tabla IX - 13. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2).

		CL0	CL1	CL2	CL3
F4.1.2	N.º de respuestas	1	5	0	0
	Porcentaje	11,1 %	55,6 %	-	-
F13.1.3	N.º de respuestas	4	4	0	0
	Porcentaje	44,4 %	44,4 %	-	-

Tabla IX - 14. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2).

En el análisis cualitativo de las producciones analizadas no observamos hechos relevantes que no se hubieran considerado en ciclos anteriores. Además, como observamos, hay muy pocas producciones que sigan estrategias erróneas. Las respuestas incorrectas que siguen una estrategia potencialmente válida, pero que comenten algún error en su ejecución, también son escasas. Las frecuencias en las que hemos observado los errores en los problemas de comparación cuantitativa y en los problemas de valor perdido están recogidas en la Tabla IX - 15 y en la Tabla IX - 16, respectivamente.

		Error C.1	Error C.2	Error C.3	Error C.4
F3.1.1	N.º de respuestas	0	0	1	0
	Porcentaje	-	-	11,1 %	-
TC4.3	N.º de respuestas	0	0	0 - 1	0 - 1
	Porcentaje	-	-	0 % - 5,6 %	0 % - 5,6 %

Tabla IX - 15. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2).

		Error VP.1	Error VP.2	Error VP.3	Error VP.4
F3.1.4	N.º de respuestas	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	-
TC3.1	N.º de respuestas	5	0	0	0
	Porcentaje	27,8 %	-	-	-
TC3.2	N.º de respuestas	3	0	1	0
	Porcentaje	16,7 %	-	5,6 %	-
F5.1.5	N.º de respuestas	0	0	0	3
	Porcentaje	-	-	-	33,3 %

Tabla IX - 16. Clasificación de los errores cometidos en el uso de estrategias correctas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa (Ciclo III-2).

Como ocurría en el ciclo II-2, si comparamos con el ciclo I-2, y con el ciclo III-1 (del que provienen estos mismos alumnos) observamos una menor presencia de errores asociados a la comprensión del racional (C.2 o VP.2) o a la comprensión de la razón externa y su interpretación como cantidad intensiva (C.3, C.4, VP.3 y VP.4). De hecho, salvo el Error VP.1 (producción inacabada) en los problemas de las tareas para casa TC3.1 y TC3.2, el resto de las frecuencias de errores son muy bajas.

IX.3.1.3. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa

En los ciclos de 2º de ESO, los problemas de proporcionalidad simple directa e inversa se presentan conjuntamente en forma de taller de problemas. No hay situaciones introductorias diseñadas para cada tipo de problema, sino que los diferentes tipos de problemas (valor perdido, comparación cuantitativa y comparación cualitativa) en cada situación (simple directa y simple inversa) se trabajan de forma simultánea a lo largo de las sesiones 3, 4 y 5. Es decir, en las fichas de trabajo F3.1, TC3, F4.1, TC4 y F5.1. Además, se introducen otros dos problemas de proporcionalidad inversa en la prueba escrita.

Análisis de las producciones según las categorías generales.

En la Tabla IX - 17, la Tabla IX - 18 y la Tabla IX - 19 presentamos los resultados en las categorías generales para los problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa, de comparación cuantitativa, de valor perdido y de comparación cualitativa, respectivamente.

		N	B	I	C
F3.1.2	N.º de respuestas	0	0	1	8
	Porcentaje	-	-	11,1 %	88,9 %
TC3.3	N.º de respuestas	4	1	6	7
	Porcentaje	22,2 %	5,6 %	33,3 %	38,9 %
F5.1.4	N.º de respuestas	0	1	3	5
	Porcentaje	-	11,1 %	33,3 %	55,6 %
PE.3	N.º de respuestas	1	1	7	9
	Porcentaje	5,6 %	5,6 %	38,9 %	50 %

Tabla IX - 17. Resultados generales para los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo III-2).

		N	B	I	C
F4.1.1	N.º de respuestas	1	0	2	6
	Porcentaje	11,1 %	-	22,2 %	66,7 %
F4.1.4	N.º de respuestas	1	3	5	0
	Porcentaje	11,1 %	33,3 %	55,6 %	-
TC4.1	N.º de respuestas	9	2	2	5
	Porcentaje	50 %	11,1 %	11,1 %	27,8 %
F5.1.1	N.º de respuestas	0	0	3	6
	Porcentaje	-	-	33,3 %	66,6 %
F5.1.3.1	N.º de respuestas	0	2	1	6
	Porcentaje	-	22,2 %	11,1 %	66,7 %
F5.1.3.2	N.º de respuestas	0	4	5	0
	Porcentaje	-	44,4 %	55,6 %	-
PE.4	N.º de respuestas	1	1	9	7
	Porcentaje	5,6 %	5,6 %	50 %	38,9 %

Tabla IX - 18. Resultados generales para los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo II-2).

		N	B	I	C
F4.1.5	N.º de respuestas	1	2	2	4
	Porcentaje	11,1 %	22,2 %	22,2 %	44,4 %
TC4.2	N.º de respuestas	9	1	1	7
	Porcentaje	50 %	5,6 %	5,6 %	38,9 %

Tabla IX - 19. Resultados generales para los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo III-2).

Como en el resto de la propuesta, se observan frecuencias de éxito generalmente más bajas que en el ciclo anterior. Llama especialmente la atención el análisis de los ítems F4.1.4 y F5.1.3.2, donde no hemos categorizado ninguna de las respuestas como correcta. En dichos problemas, los alumnos se enfrentaban a una situación en la que debían interpretar el producto de dos magnitudes extensivas para aplicar una estrategia funcional de resolución. Esta mayor dificultad por el tipo de magnitudes involucradas se detectó también en el ciclo anterior. Podemos destacar también que el efecto de este tipo de magnitudes en los problemas de proporcionalidad simple parece vencerse a lo largo de la propuesta en este ciclo, ya que la tasa de éxito en el problema de la prueba escrita PE.3 es mayor que la obtenida en el ciclo anterior. Aunque dicha diferencia no es estadísticamente significativa, parece relevante que este sea uno de los dos únicos ítems (junto con TC3.3 que también presenta dos magnitudes extensivas) en los que aumenta la tasa de éxito respecto al ciclo II-2.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

En la Tabla IX - 20, la Tabla IX - 21 y la Tabla IX - 22 presentamos los resultados en las categorías específicas para los problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa, de comparación cuantitativa, de valor perdido y de comparación cualitativa, respectivamente.

		C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
F3.1.2	N.º de respuestas	1	7	0	0	0	0	1
	Porcentaje	11,1 %	77,8 %	-	-	-	-	11,1 %
TC3.3	N.º de respuestas	6	7	0	0	0	0	0
	Porcentaje	33,3 %	38,9 %	-	-	-	-	-
F5.1.4	N.º de respuestas	2	5	0	0	0	0	1
	Porcentaje	22,2 %	55,6 %	-	-	-	-	11,1 %
PE.3	N.º de respuestas	3	10	0	0	0	0	3
	Porcentaje	16,7 %	55,6 %	-	-	-	-	16,7 %

Tabla IX - 20. Estrategias empleadas en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo III-2).

		VPi0	VPi1	VPi2	VPi3	VPi4	VPi5	VPi6	VPi7	VPi8
F4.1.1	N.º de resp.	0	0	0	7	0	0	0	0	1
	Porcentaje	-	-	-	77,8 %	-	-	-	-	11,1 %
F4.1.4	N.º de resp.	3	0	0	0	0	0	0	0	2
	Porcentaje	33,3 %	-	-	-	-	-	-	-	22,2 %
TC4.1	N.º de resp.	0	0	0	5	0	0	0	0	2
	Porcentaje	-	-	-	27,8 %	-	-	-	-	11,1 %
F5.1.1	N.º de resp.	0	0	0	6	0	0	0	0	3
	Porcentaje	-	-	-	66,7 %	-	-	-	-	33,3 %
F5.1.3.1	N.º de resp.	1	0	0	2	0	0	1	0	3
	Porcentaje	11,1 %	-	-	22,2 %	-	-	11,1 %	-	33,3 %
F5.1.3.2	N.º de resp.	0	0	0	0	0	0	1	0	4
	Porcentaje	-	-	-	-	-	-	11,1 %	-	44,4 %
PE.4	N.º de resp.	4	0	0	8	0	0	0	1	3
	Porcentaje	22,2 %	-	-	44,4 %	-	-	-	5,6 %	16,7 %

Tabla IX - 21. Estrategias empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo III-2).

Como en el ciclo anterior, y en el foco dedicado a la proporcionalidad simple directa, las estrategias se concentran de manera clara en las categorías C1 (cálculo y comparación de la constante de proporcionalidad para los problemas de comparación cuantitativa), VPi3 (estrategia funcional para los problemas de valor perdido) y CL1 (uso de argumentos verbales para los problemas de comparación cualitativa).

		CL0	CL1	CL2	CL3	CL4
F4.1.5	N.º de respuestas	3	3	0	0	0
	Porcentaje	33,3 %	33,3 %	-	-	-
TC4.2	N.º de respuestas	5	3	0	0	0
	Porcentaje	27,8 %	16,7 %	-	-	-

Tabla IX - 22. Tipo de argumento utilizado para responder a los problemas de comparación cualitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa (Ciclo III-2).

Del resto de categorías, aparecen solo con cierto peso las respuestas no argumentadas (C0, VPi0, CL0) y las respuestas erróneas que suponen una relación directa en vez de inversa (C6 y VPi8). Mientras que se observa un aumento en las respuestas no argumentadas respecto del ciclo anterior, el número de respuestas en las que se supone erróneamente una relación inversa se mantiene estable.

IX.3.1.4. Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta

Este foco de interés se trabaja principalmente en las sesiones 6 y 7 en la propuesta para 2º de ESO. Las fichas F6.1, F6.2 y F7.1 están dedicadas íntegramente a trabajar problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta. Fuera de dichas sesiones, se introduce un problema de proporcionalidad compuesta en la ficha de repaso F13.1 y otros tres en la prueba escrita. Uno de ellos, PE.6, ya se analizó en el foco 1 al tratarse de un “falso” problema de proporcionalidad compuesta.

Como se comentó en el diario de clases, un imprevisto en la sesión 6 obligó a realizar cambios sobre la marcha en las fichas de trabajo TC6 y F7.1. De hecho, no se repartió la ficha con la tarea para casa TC6 y se modificó la ficha F7.1 de la siguiente sesión, añadiendo problemas que contenía TC6 y F7.1, pero eliminando los problemas planificados F7.1.1 y F7.1.3. Es decir, se elimina el problema de comparación cualitativa en una situación de proporcionalidad compuesta y el problema en el que la situación compuesta involucraba cuatro magnitudes diferentes.

Análisis de la situación introductoria.

En Tabla IX - 23 exponemos los resultados para las categorías generales y en la Tabla IX - 24 y la Tabla IX - 25 los correspondientes para las categorías específicas.

		N	B	I	C
F6.1.1	N.º de respuestas	0	0	5	4
	Porcentaje	-	-	55,6 %	44,4 %

Tabla IX - 23. Resultados generales en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2).

Como en otros focos, se observa una menor tasa de respuestas correctas en este ciclo.

Por otro lado, cabe destacar que, como vemos en la Tabla IX - 24, ningún equipo emplea una estrategia incorrecta para resolver el problema.

		VPC0	VPC1	VPC8	VPC9	VPC10	VP11
F6.1.1	N.º de respuestas	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	-	-	-

Tabla IX - 24. Estrategias incorrectas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2).

Además, observamos un mayor número de respuestas que utilizan una estrategia de amalgamación (VPC2). Dicha estrategia es la que se institucionaliza al finalizar la puesta en común, por lo que es interesante que un alto número de equipos se decanten por ella. En general, los equipos que se decantan por esta estrategia amalgaman correctamente. Los errores que aparecen en la ejecución de la estrategia están vinculados a la resolución del problema de valor perdido de proporcionalidad simple directa al que se reduce el problema después de amalgamar.

Aparte de las estrategias de amalgamación, un equipo utiliza una estrategia de resolución de "paso a paso pasando por la unidad" (VPC3).

		VPC2	VPC3	VPC4	VPC5	VPC6	VP7
F6.1.1	N.º de respuestas	8	1	0	0	0	0
	Porcentaje	88,9 %	11,1 %	-	-	-	-

Tabla IX - 25. Estrategias potencialmente correctas empleadas en la situación introductoria de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2).

Análisis de las producciones según las categorías generales.

El análisis cuantitativo para el resto de los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta en este segundo ciclo de 2º de ESO se puede ver en la Tabla IX - 26 (para problemas de valor perdido) y en la Tabla IX - 27 (para problemas de comparación cuantitativa).

			N	B	I	C
F6.2.1	Inversa-Inversa	N.º de respuestas	0	0	2	7
		Porcentaje	-	-	22,2 %	77,8 %
F7.1.1.1	Directa-Directa	N.º de respuestas	0	1	1	7
		Porcentaje	-	11,1 %	11,1 %	77,8 %
F7.1.1.2	Directa-Inversa	N.º de respuestas	0	2	4	3
		Porcentaje	-	22,2 %	44,4 %	33,3 %
F7.1.4	Inversa-Inversa	N.º de respuestas	0	1	3	5
		Porcentaje	-	11,1 %	33,3 %	55,6 %
PE.5	Directa-Directa	N.º de respuestas	1	3	4	10
		Porcentaje	5,6 %	16,7 %	22,2 %	55,6 %

Tabla IX - 26. Resultados generales en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2).

La distribución de frecuencias en la Tabla IX - 26 no presenta diferencias significativas con la correspondiente a los mismos problemas analizados en el ciclo II-2 a partir de los resultados de la Tabla VIII - 32.

Sin embargo, sí son más claros los peores resultados obtenidos en este ciclo (diferencias de entre un 20 y un $30\ \%$ en las tasas de éxito) en la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (comparar Tabla IX - 27 y Tabla VIII - 33).

			N	B	I	C
F6.2.2	$\mathbb{p} = (1, -1, -1)$	N.º de respuestas	0	0	5	4
		Porcentaje	-	-	55,6 %	44,4 %
F7.1.2	$\mathbb{p} = (1,1,1)$	N.º de respuestas	0	0	4	5
		Porcentaje	-	-	44,4 %	55,6 %
F7.1.3	$\mathbb{p} = (1, -1, -1)$	N.º de respuestas	0	0	2	7
		Porcentaje	-	-	22,2 %	77,8 %
PE.7	$\mathbb{p} = (1,1,1)$	N.º de respuestas	1	1	8	8
		Porcentaje	5,6 %	5,6 %	44,4 %	44,4 %

Tabla IX - 27. Resultados generales en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2).

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

En la Tabla IX - 28 y en la Tabla IX - 29 se recogen las frecuencias de aparición de cada estrategia para los problemas de valor perdido. En la primera de las tablas nos centramos en las estrategias incorrectas o producciones no argumentadas y en la segunda recogemos el análisis de las estrategias potencialmente correctas.

		VPC0	VPC1	VPC8	VPC9	VPC10	VP11
F6.2.1	N.º de respuestas	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	-	-	-
F7.1.1.1	N.º de respuestas	0	0	0	0	0	0
	Porcentaje	-	-	-	-	-	-
F7.1.1.2	N.º de respuestas	3	0	0	0	0	0
	Porcentaje	33,3 %	-	-	-	-	-
F7.1.4	N.º de respuestas	0	0	1	0	0	0
	Porcentaje	-	-	11,1 %	-	-	-
PE.5	N.º de respuestas	0	0	0	0	0	1
	Porcentaje	-	-	-	-	-	5,6 %

Tabla IX - 28. Estrategias incorrectas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2).

En la Tabla IX - 28 se observa un bajo número de respuestas que siguen una estrategia incorrecta. Este hecho puede venir provocado por la desaparición de los ejercicios que los alumnos debían resolver de forma individual en casa, ya que una buena parte de las respuestas con estrategias incorrectas en los ciclos anteriores se obtenían precisamente en esos problemas. Como en ciclos anteriores, destaca la no utilización de argumentos aditivos.

		VPC2	VPC3	VPC4	VPC5	VPC6	VP7
F6.2.1	N.º de respuestas	7	1	1	0	0	0
	Porcentaje	77,8 %	11,1 %	11,1 %	-	-	-
F7.1.1.1	N.º de respuestas	2	6	0	0	0	0
	Porcentaje	22,2 %	66,7 %	-	-	-	-
F7.1.1.2	N.º de respuestas	0	4	0	0	0	0
	Porcentaje	-	44,4 %	-	-	-	-
F7.1.4	N.º de respuestas	0	7	0	0	0	0
	Porcentaje	-	77,8 %	-	-	-	-
PE.5	N.º de respuestas	11	1	1	0	0	0
	Porcentaje	61,1 %	5,6 %	5,6 %	-	-	-

Tabla IX - 29. Estrategias potencialmente correctas empleadas en los problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2).

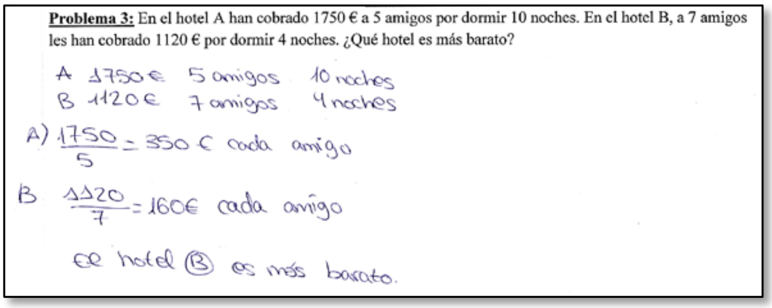
En cuanto a las estrategias potencialmente correctas (Tabla IX - 29), observamos que solo aparecen aquellas que utilizan la descomposición del problema en problemas de proporcionalidad simple, bien previa amalgamación (VPC2), por un procedimiento de paso a paso (VPC3), o mezclando ambos métodos (VPC4). No se ha detectado ninguna producción que utilice pasa o a paso sin pasar por la unidad (VPC5), el método de proporciones (VPC7) o el uso directo de una fórmula (VPC7). Además, las estrategias de los alumnos que se basan en la descomposición en problemas simples resuelven los nuevos problemas intermedios de valor perdido mediante métodos aritméticos basados en el uso significativo de razones externas y productos de magnitudes y de las operaciones básicas. Vemos, como ocurría en ciclos anteriores, que el uso de la estrategia de amalgamación viene condicionado por la posición de la incógnita de forma que el uso de esta estrategia desaparece, por ejemplo, en el problema F7.1.1.2, en el que la incógnita se sitúa en una de las magnitudes que facilita la amalgamación por producto. En cualquier caso, estos efectos ya han sido descritos en los capítulos anteriores.

La frecuencia con la que se han observado las diferentes estrategias para la resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta puede observarse en la Tabla IX - 30.

		CC0	CC1	CC2	CC3	CC4	CC5	CC6
F6.2.2	N.º de respuestas	3	2	2	0	1	0	1
	Porcentaje	33,3 %	22,2 %	22,2 %	-	11,1 %	-	11,1 %
F7.1.2	N.º de respuestas	0	2	5	0	0	0	2
	Porcentaje	-	22,2 %	55,6 %	-	-	-	22,2 %
F7.1.3	N.º de respuestas	0	4	3	0	0	0	2
	Porcentaje	-	44,4 %	33,3 %	-	-	-	22,2 %
PE.7	N.º de respuestas	3	10	0	0	0	0	3
	Porcentaje	16,7 %	55,6 %	-	-	-	-	16,7 %

Tabla IX - 30. Estrategias de resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta (Ciclo III-2).

Como en los ciclos anteriores, la mayor parte de los equipos y estudiantes utilizan una estrategia de cálculo de la constante de proporcionalidad (CC1 y CC2), aunque no siempre es distinguible el uso de la amalgamación (CC1) para este propósito. Los peores resultados observados en este tipo de problemas en las categorías generales se explican por la mayor presencia de respuestas que omiten una de las magnitudes (CC6) y resuelven el problema como si se tratase de un problema de proporcionalidad simple. Por ejemplo, en la Imagen IX - 1 vemos como el equipo B5, omite la magnitud que da cuenta del tiempo total que se ha alargado la estancia en el hotel y que hay que tener en cuenta para poder determinar qué hotel es más barato. Aunque habíamos encontrado dos producciones similares en el ciclo II-2, en este ciclo la presencia es mucho mayor; ocho producciones que se concentran en los equipos B3 y B5.



Problema 3: En el hotel A han cobrado 1750 € a 5 amigos por dormir 10 noches. En el hotel B, a 7 amigos les han cobrado 1120 € por dormir 4 noches. ¿Qué hotel es más barato?

A 1750€ 5 amigos 10 noches
B 1120€ 7 amigos 4 noches

A) $\frac{1750}{5} = 350$ € cada amigo

B $\frac{1120}{7} = 160$€ cada amigo

el hotel B es más barato.

Imagen IX - 1. Producción del equipo B5 para el problema F7.1.3 (Ciclo III-2).

IX.3.1.5. Repartos proporcionales

Como en los ciclos anteriores, los repartos proporcionales se trabajan específicamente durante una única sesión (sesión 8). Con la reformulación de la propuesta en torno a los repartos inversamente proporcionales esta sesión se planifica a través de una única ficha de trabajo (F8.1). Posteriormente se entrega otra ficha de trabajo para casa (TC8) y se incorpora un problema de reparto directamente proporcional en la prueba escrita (PE.8).

En este ciclo queremos averiguar si las mejoras observadas en el ciclo anterior para los problemas de repartos inversamente proporcionales se mantienen, además de constatar los indicios de estabilidad de la propuesta para los problemas de repartos directamente proporcionales (ya observados en el ciclo anterior).

Análisis de la situación introductoria.

En la Tabla IX - 31 y en la Tabla IX - 32 recogemos los resultados para las categorías generales y para el modelo de reparto empleado, respectivamente. Como vemos, todos los equipos entregan la tarea. Ningún equipo entrega alguno de los problemas en blanco.

		N	**B**	**I**	**C**
F8.1.1	N.º de respuestas	0	0	2	7
	Porcentaje	-	-	22,2 %	77,8 %
F8.1.2	N.º de respuestas	0	0	4	5
	Porcentaje	-	-	44,4 %	55,6 %

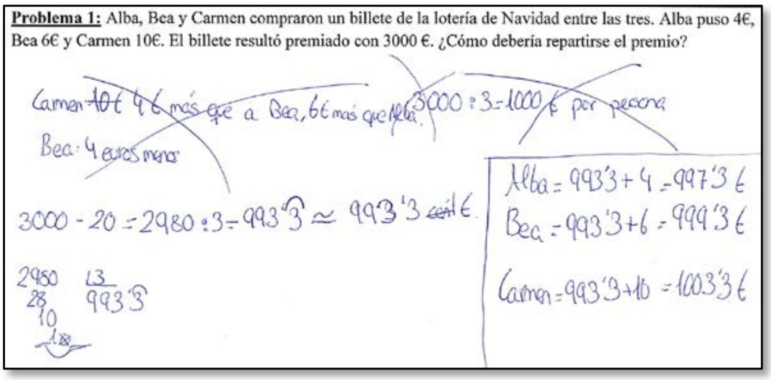
Tabla IX - 31. Resultados generales en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo III-2).

Si nos fijamos primero en el problema de reparto directamente proporcional, F8.1.1 (filas sin color de fondo), podemos observar unos resultados casi idénticos a los ya descritos en el capítulo F8.1.1. El problema se resuelve mayoritariamente de forma correcta utilizando un modelo de reparto proporcional (MR3) y aparece una única respuesta que utiliza un modelo de reparto de compensación aditiva (MR2).

		MR1	**MR2**	**MR3**
F8.1.1	N.º de respuestas	0	1	8
	Porcentaje	-	11,1 %	88,9 %
F8.1.2	N.º de respuestas	0	0	8
	Porcentaje	-	-	88,9 %

Tabla IX - 32. Modelo de reparto empleado en la situación introductoria de repartos proporcionales (Ciclo III-2).

A diferencia de lo observado en el ciclo II-2, esta producción (ver Imagen IX - 2) utiliza correctamente este modelo de reparto de compensación aditiva. Para ello, en primer lugar, sustraen la cantidad que ha costado el billete del premio conseguido. Después, reparten en partes iguales lo que queda del premio. Por último, añaden a cada una de esas partes la cantidad que cada individuo puso para comprar el billete. De esta forma, la diferencia entre la cantidad recibida en el reparto y los pesos (cantidad puesta para comprar el billete) se mantiene constante.


Problema 1: Alba, Bea y Carmen compraron un billete de la lotería de Navidad entre las tres. Alba puso 4€, Bea 6€ y Carmen 10€. El billete resultó premiado con 3000 €. ¿Cómo debería repartirse el premio?

Carmen 10€ 4€ más que a Bea, 6€ más que Alba. 3000 : 3 = 1000 € por persona

Bea: 4 euros menos

3000 - 20 = 2980 : 3 = 993'3 ≃ 993'3 cent €

2980 | 3
28 | 993'3
10

Alba = 993'3 + 4 = 997'3 €

Bea = 993'3 + 6 = 999'3 €

Carmen = 993'3 + 10 = 1003'3 €

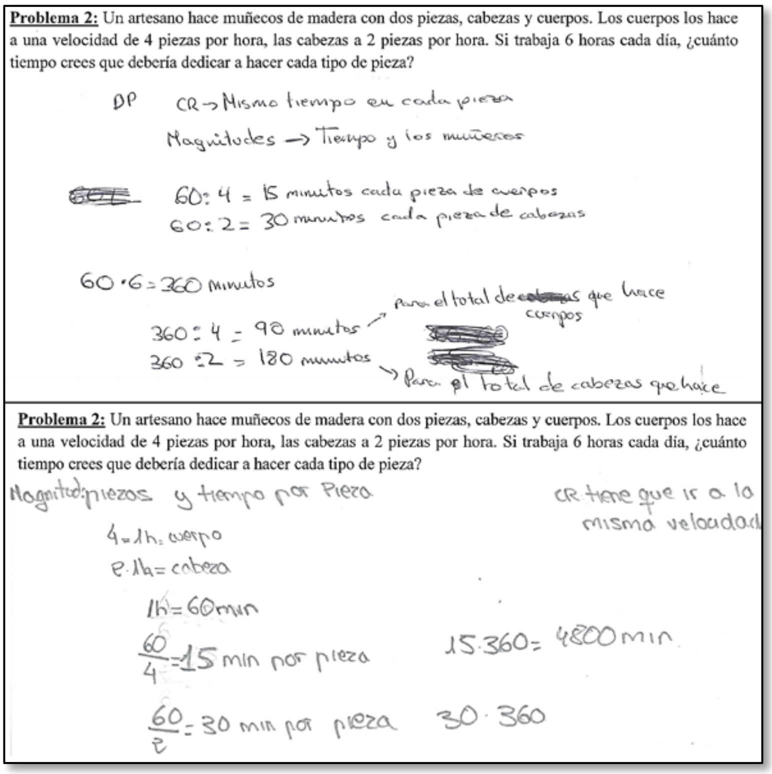
Imagen IX - 2. Producción del equipo B8 para el problema F8.1.1 (Ciclo III-2).

Además de esta producción aislada, las otras ocho producciones utilizan un modelo de reparto proporcional, dando siete de ellas una respuesta correcta. Los métodos utilizados por todas ellas son aritméticos y se basan en la resolución de problemas de valor perdido pare-todo. Es decir, se considera constante la razón entre cantidad correspondiente a un individuo y la suma de las cantidades correspondientes a todos ellos tanto en el dinero puesto para la compra del billete como en el dinero correspondiente al premio.

Si prestamos atención al problema de reparto inversamente proporcional, F8.1.2 (filas sombreadas de gris), vemos, por un lado, un comportamiento similar al ciclo anterior en cuanto a tasas de acierto y de respuestas incorrectas (algo inferior la tasa de aciertos respecto al ciclo anterior). Por otro lado, vemos que ocho de las nueve respuestas han utilizado un modelo de reparto inversamente proporcional, mejorando la tasa de respuestas proporcionales correspondientes al ciclo II-2. Por tanto, aunque con un ligero peor desempeño (constante en este ciclo) el problema de la situación introductoria sigue mostrando una alta potencialidad para introducir los repartos inversamente proporcionales.

Además de la mayor frecuencia de respuestas proporcionales observadas, un análisis cualitativo de las respuestas muestra hasta cuatro producciones en las que se calculan los inversos de los pesos (en el ciclo pasado solo se detectó una y que no utilizaba finalmente ese cálculo para dar su respuesta).

Tres de las respuestas que calculan los inversos de los puestos no dan una respuesta correcta al problema. Una de ellas, la del equipo B8, tras decir que se tardan $0{,}25\ h$ en uno de los tipos de piezas y $0{,}5\ h$ en el otro, deja el problema sin acabar. Las otras dos respuestas incorrectas que utilizan un modelo de reparto inversamente proporcional y que calculan los inversos de los pesos se pueden ver en la Imagen IX - 3. En ambas se calcula el tiempo que se necesita para realizar cada pieza (inversos de los pesos) haciendo un cambio a minutos. Posteriormente, en cada una de ellas se observa un error similar, que pasa por no calcular el tiempo total que hace falta para realizar un muñeco y por realizar una operación sin sentido entre los pesos y sus inversos y el tiempo total disponible. En la producción del equipo B1 (Imagen IX - 3, arriba) no se usan los tiempos calculados y se divide el tiempo total entre la velocidad, operación que carece de sentido, de forma que acaba repartiéndose menos tiempo del que se dispone. En la producción del equipo B5 (Imagen IX - 3, abajo), se utilizan los tiempos que cuesta hacer cada pieza, pero se multiplican por el tiempo total del que se dispone, dando como resultado que se reparte un tiempo mucho mayor al disponible.



Problema 2: Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?

DP CR → Mismo tiempo en cada pieza
Magnitudes → Tiempo y los muñecos

60 : 4 = 15 minutos cada pieza de cuerpos
60 : 2 = 30 minutos cada pieza de cabezas

60 · 6 = 360 minutos

360 : 4 = 90 minutos → Para el total de ~~cabezas~~ cuerpos que hace
360 : 2 = 180 minutos → Para el total de cabezas que hace

Problema 2: Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?

Magnitud: piezas y tiempo por pieza   CR tiene que ir a la misma velocidad

4 = 1h = cuerpo
2 · 1h = cabeza
1h = 60 min
$\frac{60}{4}$ = 15 min por pieza   15 · 360 = 4800 min
$\frac{60}{2}$ = 30 min por pieza   30 · 360

Imagen IX - 3. Producción del equipo B1 (arriba) y del equipo B5 (abajo) para el problema F8.1.2 (Ciclo III-2).

La respuesta correcta que utiliza un modelo de reparto inversamente proporcional y, además, calcula y usa para su resolución los inversos de los pesos, puede verse en la Imagen IX - 4. Se trata de la primera (y única) producción de la propuesta que da, espontáneamente, una respuesta correcta al problema de la situación introductoria utilizando esta estrategia que se pretende institucionalizar. En la Imagen IX - 4 vemos como en la parte inferior central el equipo B7 calcula el inverso de los pesos en minutos. Posteriormente, en la parte inferior derecha, se calcula el tiempo que cuesta hacer un muñeco y, tras pasar el tiempo disponible a minutos, se realiza la división del tiempo entre lo que cuesta hacer un muñeco, obteniéndose el valor 8 de la constante de proporcionalidad que, aunque no se interpreta explícitamente, es la cantidad de muñecos (y de cada una de las piezas) que se pueden hacer como máximo. En la zona que el equipo ha destacado sombreándola, se divide la constante (el número de piezas que deben hacerse) entre la velocidad a la que se realiza cada pieza, para obtenerse la cantidad en horas que el artesano debe dedicar a hacer cada tipo de piezas.

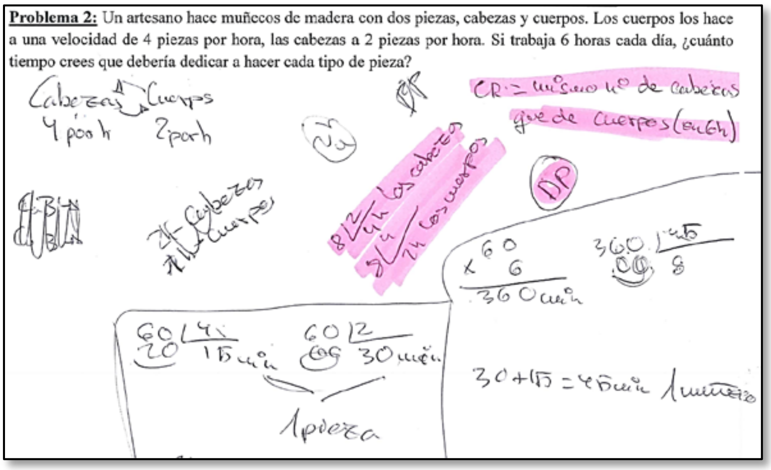


Imagen IX - 4. Producción del equipo B7 para el problema F8.1.2 (Ciclo III-2).

Análisis de las producciones de los problemas realizados tras la institucionalización.

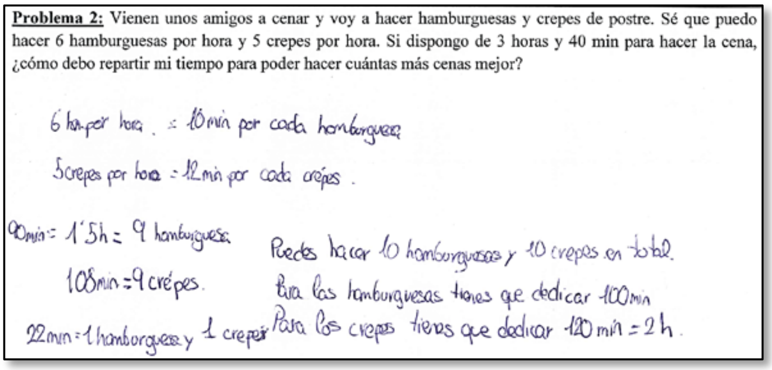
En la Tabla IX - 33 observamos los resultados en las categorías generales para el resto de los problemas de repartos que se proponen en la propuesta. Como hemos dicho, en este ciclo se ha reducido el número de problemas por lo que solo tenemos dos problemas (uno de cada tipo) en una ficha de trabajo para casa y el problema de reparto directamente proporcional de la prueba escrita.

		N	B	I	C
TC8.1	N.º de respuestas	7	2	2	7
	Porcentaje	38,9 %	11,1 %	11,1 %	38,9 %
TC8.2	N.º de respuestas	7	2	5	4
	Porcentaje	38,9 %	11,1 %	27,8 %	22,2 %
PE.8	N.º de respuestas	1	2	3	12
	Porcentaje	5,6 %	11,1 %	16,7 %	66,7 %

Tabla IX - 33. Resultados generales en los problemas de repartos proporcionales (Ciclo III-2).

Observamos que en los problemas de repartos directamente proporcionales las tasas de éxito siguen unos patrones similares a los observados en ciclos anteriores. En la prueba escrita (problema PE.8) la tasa de éxito es prácticamente idéntica a la del ciclo pasado y la menor tasa de éxito en el problema TC8.1 debe analizarse teniendo en cuenta la mayor cantidad de producciones no entregadas en las tareas para casa.

En el problema de reparto TC8.2, a pesar de la mayor tasa de respuestas no entregadas, vemos que disminuye considerablemente el número de respuestas incorrectas y que aumenta ligeramente el número de respuestas correctas. Estos pueden ser indicios de que el cambio de estructura numérica realizado para este ciclo ha favorecido la búsqueda de la solución óptima en este problema. Una de las producciones correctas para este problema, que usa los inversos de los pesos, puede verse en la Imagen IX - 5. En ella, el alumno B8.1 parece usar una estrategia de construcción progresiva tras calcular el tiempo que debe dedicar a cada plato para encontrar la constante de proporcionalidad. En cualquier caso, parece tener presente ese carácter de constancia, ya que busca ajustar el reparto de tiempos de forma que haga el mismo número de platos de cada tipo.


Problema 2: Vienen unos amigos a cenar y voy a hacer hamburguesas y crepes de postre. Sé que puedo hacer 6 hamburguesas por hora y 5 crepes por hora. Si dispongo de 3 horas y 40 min para hacer la cena, ¿cómo debo repartir mi tiempo para poder hacer cuántas más cenas mejor?

6 ham por hora = 10 min por cada hamburguesa

5 crepes por hora = 12 min por cada crepes.

90 min = 1'5 h = 9 hamburguesa

108 min = 9 crépes.

22 min = 1 hamburguesa y 1 crepe

Puedes hacer 10 hamburguesas y 10 crepes en total.

Para las hamburguesas tienes que dedicar 100 min

Para los crepes tienes que dedicar 120 min = 2 h.

Imagen IX - 5. Producción del alumno B8.1 para el problema TC8.2 (Ciclo III-2).

Además, vemos en la Tabla IX - 34, donde se presentan las frecuencias del modelo de reparto utilizado, que no se ha detectado la utilización de repartos equitativos ni de compensación aditiva en los problemas TC8.1 y PE.8.

		MR1	MR2	MR3
TC8.1	N.º de respuestas	0	0	9
	Porcentaje	-	-	50 %
TC8.2	N.º de respuestas	5	0	4
	Porcentaje	27,8 %	-	22,2 %
PE.8	N.º de respuestas	0	0	12
	Porcentaje	-	-	66,7 %

Tabla IX - 34. Modelo de reparto empleado (Ciclo III-2).

IX.3.1.6. Porcentajes y problemas asociados

Los problemas de porcentajes, incluidos los aumentos y disminuciones porcentuales, se trabajaron de forma específica en las sesiones 9, 10, 11 y 12. En concreto, las fichas de trabajo F9.1, TC9, F10.1, F11.1, TC11 y F12.1 se dedican en exclusiva a problemas relacionados con este foco de interés (también se trabaja el concepto de razón para conectarlo con el de porcentaje). Además, hay dos problemas de disminuciones porcentuales en la ficha de repaso F13.1 y para evaluar este foco de interés al final de la propuesta se incluyeron los problemas PE.9.1 y PE.9.2 en la prueba escrita individual. Como en el Capítulo VIII, aunque en la sección de análisis de las producciones del foco 1 hemos incorporado los problemas relacionados con porcentajes que se centraban en el cálculo de razones, volvemos a incorporar en esta sección aquellos problemas que forman parte de las situaciones introductorias. En concreto, las fichas de trabajo F9.1 y F11.1 contienen los problemas que se constituyen como situación introductoria en este foco.

Análisis de las situaciones introductorias.

En la Tabla IX - 35 y en la Tabla IX - 36 se presenta el análisis cuantitativo según las categorías generales para las situaciones introductorias del concepto de porcentaje y de los aumentos y disminuciones porcentuales, respectivamente.

	N	B	I	C
F9.1.1.1	0 (0)	0 (0)	11,1 (1)	88,9 (8)
F9.1.1.2	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (9)
F9.1.1.3	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (9)
F9.1.1.4	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (9)
F9.1.1.5	0 (0)	22,2 (2)	11,1 (1)	66,7 (6)
F9.1.1.6	0 (0)	22,2 (2)	11,1 (1)	66,7 (6)
F9.1.2.1	0 (0)	0 (0)	0 (0)	100 (9)

	N	B	I	C
F9.1.2.2	0 (0)	0 (0)	11,1 (1)	88,9 (8)
F9.1.2.3	0 (0)	0 (0)	11,1 (1)	88,9 (8)
F9.1.2.4	0 (0)	22,2 (2)	11,1 (1)	66,7 (6)
F9.1.2.5	0 (0)	22,2 (2)	22,2 (2)	55,6 (5)
F9.1.3.1	0 (0)	0 (0)	44,4 (4)	55,6 (5)
F9.1.3.2	0 (0)	0 (0)	44,4 (4)	55,6 (5)
F9.1.3.3	0 (0)	22,2 (2)	66,7 (6)	11,1 (1)

Tabla IX - 35. Resultados generales en la situación introductoria de porcentajes (Ciclo III-2).

Como observamos en el ciclo anterior de 2º de ESO (Capítulo VIII) en la primera situación introductoria de la ficha F9.1 los porcentajes de acierto son elevados, solo uno de ellos por debajo del 50 %.

Sin embargo, cabe destacar que, durante este ciclo, en las situaciones introductorias los alumnos han tenido mayores dificultades a la hora de interpretar razones para las que se proporcionaba el valor numérico. Este hecho se pone de manifiesto en la disminución de la tasa de éxito y el aumento de la tasa de respuestas incorrectas en los problemas F9.1.3 (Tabla IX - 35) y F11.1.2 y F11.1.3 (Tabla IX - 36). Especialmente llamativo es el caso del ítem F9.1.3.3 donde encontramos una sola respuesta correcta. Se trata del único ítem en estas situaciones introductorias en donde había que interpretar el valor asociado a una razón parte-parte.

	N	B	I	C		N	B	I	C
F11.1.1.1	22,2 (2)	0 (0)	0 (0)	77,8 (7)	**F11.1.3.1**	22,2 (2)	0 (0)	44,4 (4)	33,3 (3)
F11.1.1.2	22,2 (2)	0 (0)	0 (0)	77,8 (7)	**F11.1.3.2**	22,2 (2)	0 (0)	44,4 (4)	33,3 (3)
F11.1.1.3	22,2 (2)	0 (0)	11,1 (1)	66,7 (6)	**F11.1.4.1**	22,2 (2)	0 (0)	0 (0)	77,8 (7)
F11.1.1.4	22,2 (2)	0 (0)	11,1 (1)	66,7 (6)	**F11.1.4.2**	22,2 (2)	0 (0)	0 (0)	77,8 (7)
F11.1.1.5	22,2 (2)	0 (0)	33,3 (3)	44,4 (4)	**F11.1.4.3**	22,2 (2)	0 (0)	22,2 (2)	55,6 (5)
F11.1.2.1	22,2 (2)	0 (0)	55,6 (5)	22,2 (2)	**F11.1.4.4**	22,2 (2)	11,1 (1)	11,1 (1)	55,6 (5)
F11.1.2.2	22,2 (2)	0 (0)	44,4 (4)	33,3 (3)	**F11.1.4.5**	22,2 (2)	11,1 (1)	33,3 (3)	33,3 (3)

Tabla IX - 36. Resultados generales en la situación introductoria de aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo III-2).

Otros aspectos, como la menor tasa de éxito observada en el ítem F11.1.4.5 son consistentes con lo observado durante el ciclo anterior. Entonces argumentábamos que en las situaciones de descuentos la coincidencia del porcentaje que supone el precio final respecto al inicial y el complementario del descuento realizado hasta cien hacen que algunos alumnos interpreten la razón externa asociada a es complementario como “euros de subida por cada euro del precio inicial” en vez de “euros del precio final por cada euro del precio inicial”.

En resumen, las situaciones introductorias han seguido permitiendo un adecuado acercamiento a los conceptos que se pretenden institucionalizar, casi todos los efectos observados en el ciclo II-2 se mantienen, pero se ha detectado una mayor dificultad de los alumnos para interpretar como razón externa un valor concreto respecto a la dificultad que muestran para calcular el valor dada la interpretación. Esta dificultad se ve agravada en las situaciones parte-parte (de mayor dificultad que las parte-todo).

Análisis de las producciones según las categorías generales.

Analizamos ahora los problemas de valor perdido y de cálculo de complementarios asociados a situaciones de porcentaje propuestos tras las situaciones introductorias. No incluimos en esta sección los problemas que inciden en la relación entre porcentaje y razón que ya se analizaron en la sección IX.3.11.

En la Tabla IX - 37 se presentan los resultados en las cuatro categorías generales. Como en otros ciclos hemos indicado al lado de la codificación el tipo de problema. Encontramos un problema de comparación cuantitativa (“C. Cuant.”) y varios problemas de cálculo de complementarios (“Comp.”) junto con los tres tipos de problemas de valor perdido (Tipo I, II y III) tanto en situaciones generales como en situaciones de aumentos (“Au.”) y disminuciones (“Dis.”).

Del análisis de la Tabla IX - 37 y de su comparación con la tabla análoga para el ciclo II-2 (Tabla VIII - 44) podemos apreciar un comportamiento muy similar al del ciclo anterior, con las diferencias que ya se han marcado en otros focos, que esencialmente son:

- Hay una tasa de respuestas correctas ligeramente inferior a la observada en el ciclo II-2.
- No se ha detectado significatividad estadística al realizar un test exacto de Fisher para comparar el éxito entre ciclos en los ítems correspondientes a la prueba escrita.

- Las diferencias en cuanto a tasa de éxito son mayores en los problemas contenidos en las fichas de tareas para casa.

			N	B	I	C
F10.1.1.1	Comp.	N.º de respuestas	1	0	0	8
		Porcentaje	11,1 %	-	-	88,9 %
F10.1.1.2	Tipo I	N.º de respuestas	1	0	0	8
		Porcentaje	11,1 %	-	-	88,9 %
F10.1.2	Tipo III	N.º de respuestas	1	0	0	8
		Porcentaje	11,1 %	-	-	88,9 %
F10.1.3.1	Tipo III	N.º de respuestas	1	0	0	8
		Porcentaje	11,1 %	-	-	88,9 %
F10.1.3.2	Comp.	N.º de respuestas	1	0	0	8
		Porcentaje	11,1 %	-	-	88,9 %
F10.1.4.1	C. Cuant.	N.º de respuestas	1	0	2	6
		Porcentaje	11,1 %	-	22,2 %	66,7 %
F10.1.4.2	Tipo I	N.º de respuestas	1	0	2	6
		Porcentaje	11,1 %	-	22,2 %	66,7 %
F10.1.4.3	Comp.	N.º de respuestas	1	0	1	7
		Porcentaje	11,1 %	-	11,1 %	77,8 %
TC11.1.3	Tipo I Au.	N.º de respuestas	5	1	3	9
		Porcentaje	27,8 %	5,6 %	16,7 %	50 %
TC11.1.4	Tipo III Au.	N.º de respuestas	5	1	6	6
		Porcentaje	27,8 %	5,6 %	33,3 %	33,3 %
TC11.2.3	Tipo I Dis.	N.º de respuestas	5	1	10	2
		Porcentaje	27,8 %	5,6 %	55,6 %	11,1 %
TC11.2.4	Tipo III Dis.	N.º de respuestas	5	7	4	2
		Porcentaje	27,8 %	38,9 %	22,2 %	11,1 %
F12.1.1.1	Tipo I Au.	N.º de respuestas	0	0	0	9
		Porcentaje	-	-	-	100 %
F12.1.1.2	Tipo III Au.	N.º de respuestas	0	0	2	7
		Porcentaje	-	-	22,2 %	77,8 %
F12.1.2.1	Tipo I Dis.	N.º de respuestas	0	1	1	7
		Porcentaje	-	11,1 %	11,1 %	77,8 %
F12.1.2.2	Tipo III Dis.	N.º de respuestas	0	2	2	5
		Porcentaje	-	22,2 %	22,2 %	55,6 %
F12.1.2.3	Tipo II Au.	N.º de respuestas	0	1	8	0
		Porcentaje	-	11,1 %	88,9 %	-
F13.1.4.1	Tipo III Dis.	N.º de respuestas	0	1	1	7
		Porcentaje	-	11,1 %	11,1 %	77,8 %
F13.1.4.2	Tipo I Dis.	N.º de respuestas	0	0	4	5
		Porcentaje	-	-	44,4 %	55,6 %
PE.9.1	Tipo I Au.	N.º de respuestas	1	2	4	11
		Porcentaje	5,6 %	11,1 %	22,2 %	61,1 %
PE.9.2	Tipo III Au.	N.º de respuestas	1	4	5	8
		Porcentaje	5,6 %	22,2 %	27,8 %	44,4 %

Tabla IX - 37. Resultados generales en los problemas de porcentajes (Ciclo III-2).

Sin embargo, seguimos destacando unas elevadas tasas de éxito en la mayor parte de los problemas. Las frecuencias de respuestas correctas están por encima del 66 % en los problemas previos a los aumentos y disminuciones porcentuales realizados en clase, y por encima del 55 % los problemas de aumentos y disminuciones porcentuales realizados en clase, a excepción del problema de Tipo II F12.1.2.3 en el que no encontramos respuestas correctas (en el ciclo II-2, aunque tuvo respuestas correctas, estas fueron minoritarias). Por tanto, parece consolidarse el mejor desempeño en los problemas de valor perdido relacionados con el porcentaje, respecto al ciclo I-2 y el ciclo III-1, con los cambios en el diseño introducidos en el ciclo II-2.

Análisis de las producciones según las categorías específicas.

Pasamos a analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes en los problemas de valor perdido de Tipo I, II y III en situaciones de porcentajes (Tabla IX - 38).

		VPp0	VPp3	VPp4	VPp7	VPp8	VPp9
F10.1.1.2	Tipo I	11,1 (1)	77,8 (7)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.1.2	Tipo III	11,1 (1)	77,8 (7)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.1.3.1	Tipo III	0 (0)	88,9 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F10.1.4.2	Tipo I	22,2 (2)	66,7 (6)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F12.1.1.1	Tipo I Au.	0 (0)	100 (9)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F12.1.1.2	Tipo III Au.	0 (0)	77,8 (7)	11,1 (1)	0 (0)	0 (0)	11,1 (1)
F12.1.2.1	Tipo I Dis.	0 (0)	88,9 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F12.1.2.2	Tipo III Dis.	0 (0)	66,7 (6)	0 (0)	11,1 (1)	0 (0)	0 (0)
F12.1.2.3	Tipo II Au.	22,2 (2)	66,7 (6)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
F13.1.4.1	Tipo III Dis.	0 (0)	77,8 (7)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	11,1 (1)
F13.1.4.2	Tipo I Dis.	11,1 (1)	77,8 (7)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	11,1 (1)
PE.9.1	Tipo I Au.	5,6 (1)	61,1 (11)	0 (0)	5,6 (1)	11,1 (2)	0 (0)
PE.9.2	Tipo III Au.	5,6 (1)	50 (9)	0 (0)	0 (0)	11,1 (2)	5,6 (1)

Tabla IX - 38. Estrategias utilizadas en la resolución de problemas de porcentajes (Ciclo III-2).

Como en el ciclo anterior, vemos un elevadísimo predominio de la estrategia institucionalizada a partir de razones externas que permiten resolver el problema realizando una multiplicación (VPp3). Exactamente igual que pasaba en el ciclo II-2, la frecuencia de esta estrategia no está en este ciclo por debajo del 50 % en ningún problema, mientras que en el ciclo II-1 estaba por debajo del 50 % en 9 de los 11 problemas analizados, en el ciclo I-2 en 7 de los 10 y en el ciclo III-1 en 10 de los 14.

Además, se constata una interpretación general del porcentaje como razón externa, frente a la interpretación de operador que estaba muy presente en el ciclo III-1 del que provienen estos alumnos.

Una característica reseñable de este ciclo es la desaparición de las estrategias de análisis unitario (VPp2). La baja presencia del resto de estrategias correctas e incorrectas es consistente con lo observado en el ciclo II-2.

IX.3.2. Comparativa con los resultados del grupo de control

Comparamos en esta sección los resultados obtenidos en el grupo experimental (GE) y el grupo de control (GC) en los problemas de la prueba escrita. Recordamos que el grupo de control del ciclo III-2 es el mismo que el del ciclo II-2, por lo que los datos correspondientes al grupo de control en las tablas y figuras de esta sección son los mismos que los presentados en el Capítulo VIII. Como hasta ahora, el análisis se realiza en dos niveles según nos fijemos en los resultados para las categorías generales o para las categorías específicas, estos últimos agrupados por focos de interés.

IX.3.2.1. Análisis comparativo según las categorías generales

La Tabla IX - 39 contiene las tablas de contingencia con las frecuencias relativas para cada ítem de la prueba escrita. Para cada tabla de contingencia se aporta el p-valor que arroja el test exacto de Fisher que compara las variables "corrección en la respuesta: correcta, C / no correcta, N+B+I" y "grupo de procedencia del alumno; GE / GC" para contrastar la hipótesis nula de independencia entre ellas. La información se apoya de forma visual con la Figura IX - 1. En dicha figura se observa un diagrama de barras comparado con los porcentajes de acierto en los diferentes problemas para el grupo experimental y el grupo de control.

		N+B+I	C	p-valor
PE.1.1	GE	66,7 %	33,3 %	1,0000
	GC	70 %	30 %	
PE.1.2	GE	11,1 %	88,9 %	0,0327
	GC	45 %	55 %	
PE.1.3	GE	27,8 %	72,2 %	0,0828
	GC	5 %	95 %	
PE.1.4	GE	16,7 %	83,3 %	0,1596
	GC	40 %	60 %	
PE.2.1	GE	55,6 %	44,4 %	0,516
	GC	40 %	60 %	
PE.2.2	GE	33,3 %	66,7 %	0,3423
	GC	50 %	50 %	
PE.2.3	GE	77,8 %	22,2 %	0,1699
	GC	95 %	5 %	
PE.3	GE	50,0 %	50,0 %	0,5118
	GC	65 %	35 %	
PE.4	GE	61,1 %	38,9 %	0,5318
	GC	50 %	50 %	
PE.5	GE	44,4 %	55,6 %	0,7459
	GC	55 %	45 %	
PE.6	GE	5,6 %	94,4 %	0,0000
	GC	85 %	15 %	
PE.7	GE	55,6 %	44,4 %	1,0000
	GC	55 %	45 %	
PE.8	GE	33,3 %	66,7 %	0,2097
	GC	55 %	45 %	
PE.9.1	GE	38,9 %	61,1 %	0,5318
	GC	50 %	50 %	
PE.9.2	GE	55,6 %	44,4 %	0,0009
	GC	100 %	0 %	

Tabla IX - 39. Comparativa del grado de éxito entre el grupo experimental (N=18) y el grupo de control (N=20) en el ciclo III-2.

El estudio de la tabla anterior muestra que el grupo experimental ha obtenido mejores resultados en once de los quince ítems que tiene la prueba. De estas diferencias, el estudio del p-valor para un nivel de confianza del 95 %, marca significatividad a favor del grupo experimental en los ítems PE.1.2, PE.6 y PE.9.2. En concreto, llama la atención que, mientras ningún alumno del grupo de control resuelve correctamente el problema en el que se solicita calcular la cantidad inicial conocidos el aumento y la cantidad final (PE.9.2), casi la mitad de los alumnos del grupo experimental resuelven correctamente este problema. Además, no encontramos ninguna diferencia significativa a favor del grupo de control.

Al igual que sucedía en el ciclo II-2 las diferencias significativas las encontramos en ítems que evalúan el Foco 1 (análisis y caracterización de relaciones de proporcionalidad) y el Foco 6 (concepto de porcentaje y problemas asociados. Por tanto, se refuerzan los resultados obtenidos en el ciclo anterior, especialmente en lo correspondiente a los problemas de valor perdido en situaciones de porcentaje, a pesar de que de forma global los resultados del grupo experimental en el ciclo III-2 son ligeramente peores que los del correspondiente grupo en el ciclo II-2.

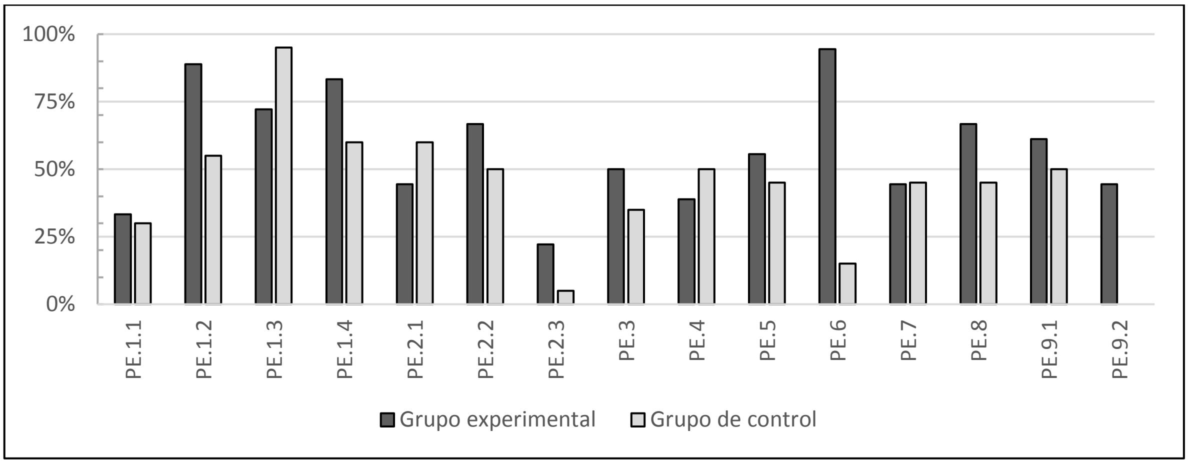


Figura IX - 1. Gráfico comparativo con los porcentajes de respuestas correctas en la prueba escrita en entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo III-2).

Aunque un test exacto de Fisher no arroja diferencias significativas en la prueba escrita entre los grupos experimentales de los ciclos II-2 y III-2, el número de ítems con frecuencias de acierto iguales o superiores al 75 % es menor que en el ciclo anterior y el número de frecuencias de acierto inferiores al 50 % superiores. Aun así, en lo concerniente a este ciclo, el grupo experimental obtiene mejores resultados que el de control en ambos indicadores.

Los resultados en la comparativa longitudinal con los resultados del ciclo III-1 del que provienen estos alumnos son prácticamente idénticos que los observados en el Capítulo VIII. Confirmándose la mejora en los ítems comunes desde 1º de ESO a 2º de ESO, que resulta significativa en el ítem en el que hay que detectar una relación inversa (PE.1.3) y en la detección de "falsos problemas de proporcionalidad" (PE.6).

IX.3.2.2. Análisis comparativo según las categorías específicas

Las categorías específicas se analizan exclusivamente para las respuestas contestadas tanto incorrectas (categoría I) como correctas (categoría C), es decir, no se analizan las respuestas de las categorías N y B. Como en los capítulos anteriores, para comparar visualmente el peso de las estrategias de resolución, en los gráficos de esta sección se usan las frecuencias relativas respecto al total de respuestas consideradas en este análisis y no sobre el total de alumnos. En las tablas de resultados se siguen presentando las frecuencias relativas sobre el total de alumnos de los grupos.

Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad.

En la Tabla IX - 40 y en la Figura IX - 2 se presentan las frecuencias con las que aparecen los distintos tipos de argumentos para justificar la existencia de relaciones proporcionales en las cuatro situaciones del problema PE.1. Salvo la mayor frecuencia de respuestas no argumentadas del grupo experimental de este ciclo respecto al ciclo anterior, una inspección rápida de la Tabla IX - 40 y, sobre todo, de la Figura IX - 2 comparándolas con la Tabla VIII - 53 y la Figura VIII - 2, muestran un comportamiento prácticamente idéntico en estos dos ciclos de 2º de ESO. Por tanto, nos remitimos a las consideraciones hechas en la sección VIII.3.2.2 para este foco de contenido prioritario.

			D0	D2	D6	D7	D8	D9
PE.1.1	**GE**	**N.º de respuestas**	**8**	**7**	**0**	**1**	**0**	**1**
		Porcentaje	**44,4 %**	**38,9 %**	**-**	**5,6 %**	**-**	**5,6 %**
	GC	**N.º de respuestas**	**3**	**1**	**1**	**10**	**4**	**0**
		Porcentaje	**15 %**	**5 %**	**5 %**	**50 %**	**20 %**	**-**
PE.1.2	**GE**	**N.º de respuestas**	**5**	**8**	**0**	**0**	**4**	**0**
		Porcentaje	**27,8 %**	**44,4 %**	**-**	**-**	**22,2 %**	**-**
	GC	**N.º de respuestas**	**4**	**0**	**3**	**7**	**6**	**0**
		Porcentaje	**20 %**	**-**	**15 %**	**35 %**	**30 %**	**-**
PE.1.3	**GE**	**N.º de respuestas**	**4**	**12**	**0**	**1**	**0**	**0**
		Porcentaje	**22,2 %**	**66,7 %**	**-**	**5,6 %**	**-**	**-**
	GC	**N.º de respuestas**	**0**	**2**	**2**	**16**	**0**	**0**
		Porcentaje	**-**	**10 %**	**10 %**	**80 %**	**-**	**-**
PE.1.4	**GE**	**N.º de respuestas**	**5**	**11**	**0**	**1**	**0**	**0**
		Porcentaje	**27,8 %**	**61,1 %**	**-**	**5,6 %**	**-**	**-**
	GC	**N.º de respuestas**	**3**	**0**	**7**	**9**	**0**	**0**
		Porcentaje	**15 %**	**-**	**35 %**	**45 %**	**-**	**-**

Tabla IX - 40. Comparativa de los tipos de argumentos empleados para justificar las relaciones de proporcionalidad entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema PE.1 (Ciclo III-2).

Tampoco los resultados de la Tabla IX - 41 en donde se presentan las respuestas dadas a los problemas de respuesta múltiple PE.2.2 y PE.2.3 (en los que a partir de un contexto numérico que relaciona dos cantidades de magnitudes proporcionales los alumnos debían elegir aquella respuesta que presentaba la constante de proporcionalidad y su interpretación de forma correcta), en ella se muestran diferencias significativas si los comparamos con los datos del ciclo II-2 presentados en el a Tabla VIII - 54. Sí podemos destacar que durante este ciclo desaparecen los alumnos que han elegido la segunda opción en PE.2.2 en donde se presenta una cantidad numérica correspondiente a una razón externa interpretada como su inversa.

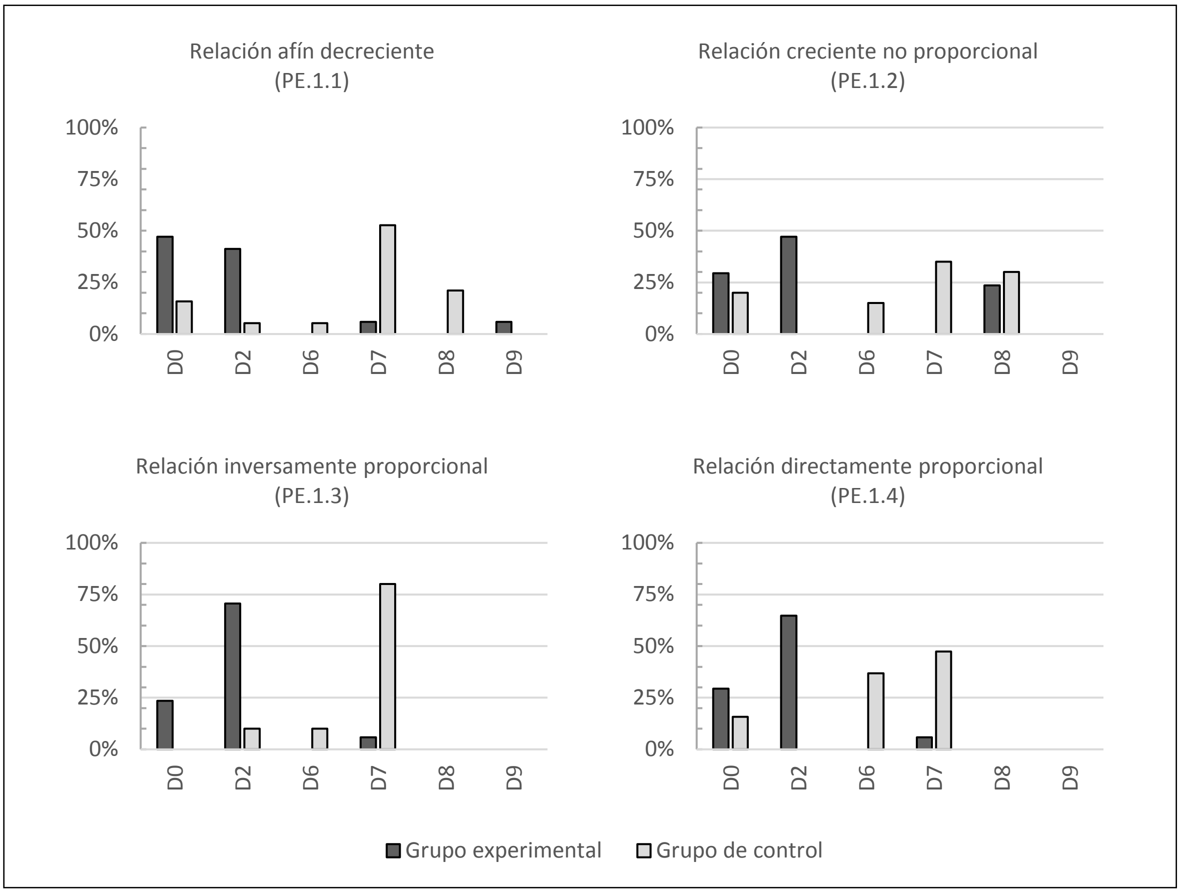


Figura IX - 2. Distribución de los diferentes argumentos empleados por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la detección de relaciones proporcionales en PE.1 (Ciclo III-2).

			I_1	I_2	I_3	C
PE.2.2	**GE**	N.º de respuestas	2	0	3	12
		Porcentaje	11,1 %	-	16,7 %	66,7 %
	GC	N.º de respuestas	1	3	6	10
		Porcentaje	5 %	15 %	30 %	50 %
PE.2.3	**GE**	N.º de respuestas	8	0	5	4
		Porcentaje	44,4 %	-	27,8 %	22,2 %
	GC	N.º de respuestas	16	2	1	1
		Porcentaje	80 %	10 %	5 %	5 %

Tabla IX - 41. Comparativa de las respuestas para los problemas de respuesta cerrada PE.2.2 y PE.2.3 entre el grupo experimental y el grupo de control (Ciclo III-2).

En lo referente al problema PE.6 encontramos de nuevo un comportamiento prácticamente idéntico al descrito en el capítulo anterior.

Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa.

De nuevo, aunque la tasa de acierto baja (no de forma significativa) en el grupo experimental en el problema PE.2.1 en este ciclo, la información de la Tabla IX - 42 no varía de forma que podamos extraer conclusiones diferentes a las ya expuestas en los capítulo VI y VIII respecto a la comparación con el grupo de control en el Foco 2.

			$S_1 > S_2$	$S_1 < S_2$	$S_1 = S_2$	$S_1¿?S_2$
PE.2.1	**GE**		2	3	4	8
			11,1 %	16,7 %	22,2 %	44,4 %
	GC	N.º de respuestas	0	3	7	10
		Porcentaje	-	15 %	35 %	50 %

Tabla IX - 42. Comparativa de respuestas entre el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cualitativa PE.2.1 (Ciclo III-2).

Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

Los resultados comparados para las estrategias utilizadas en problemas de proporcionalidad simple inversa se resumen en la Tabla IX - 43, la Tabla IX - 44 y la Figura IX - 3**.**

			C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
PE.3	**GE**	N.º de respuestas	3	10	0	0	0	0	3
		Porcentaje	16,7 %	55,6 %	-	-	-	-	16,7 %
	GC	N.º de respuestas	2	6	0	1	0	4	5
		Porcentaje	10 %	30 %	-	5 %	-	20 %	25 %

Tabla IX - 43. Comparativa de las estrategias de resolución empleadas en el grupo experimental y el grupo de control en el problema de comparación cuantitativa PE.3 (Ciclo III-2).

Como en el foco anterior, no existe prácticamente ninguna diferencia relevante entre la comparación con el grupo de control en este ciclo con las comparaciones realizadas en los capítulos VI y VIII.

			VPi0	VPi1	VPi2	VPi3	VPi4	VPi5	VPi6	VPi7	VPi8
PE.4	**GE**	N.º de respuestas	4	0	0	8	0	0	0	1	3
		Porcentaje	22,2 %	-	-	44,4 %	-	-	-	5,6 %	16,7 %
	GC	N.º de respuestas	7	0	0	0	0	9	0	1	1
		Porcentaje	35 %	-	-	-	-	45 %	-	5 %	5 %

Tabla IX - 44. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido PE.4 (Ciclo III-2).

En resumen, en el grupo experimental se usan de forma extendida las estrategias funcionales mientras que, en el grupo de control, la instrucción basada en la aplicación mecánica de una fórmula en problemas de valor perdido parece bloquear la resolución del problema de comparación, en el que se obtiene una tasa de éxito más baja.

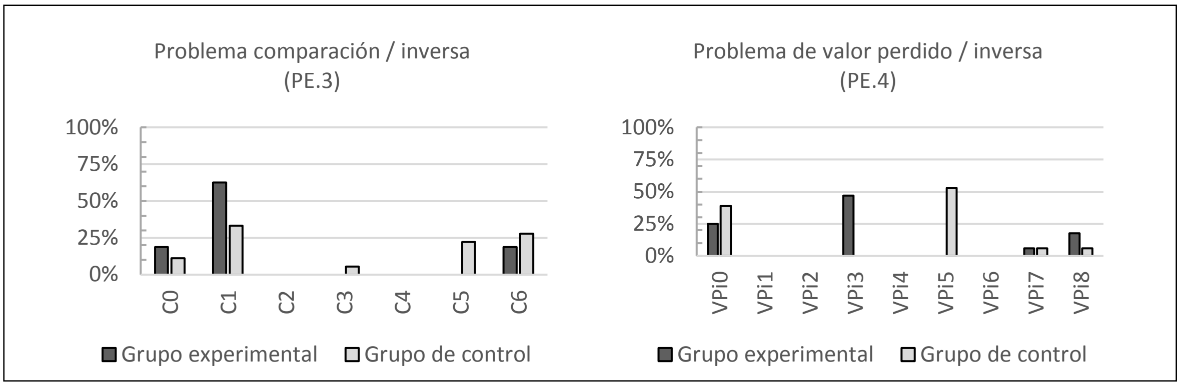


Figura IX - 3. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa PE.3 y PE.4 (Ciclo III-2).

Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta.

En la Tabla IX - 45, la Tabla IX - 46 y en la Figura IX - 4, resumimos los resultados de las categorías específicas para los problemas PE.5 y PE.7.

Comprobamos que durante este ciclo los alumnos del grupo experimental utilizan en mayor medida las estrategias de resolución institucionalizadas en la prueba escrita, en concreto, la estrategia de amalgamación (VPC2). Este hecho hace que, como en el ciclo I-2, veamos una mayor diferencia entre las estrategias de resolución cuando comparamos con el grupo de control.

			VPC0	VPC2	VPC3	VPC4	VPC8	VPC10	VPC11
PE.5	GE	N.º de respuestas	0	11	1	1	0	0	1
		Porcentaje	-	61,1 %	5,6 %	5,6 %	-	-	5,6 %
	GC	N.º de respuestas	4	9	2	0	1	1	0
		Porcentaje	20 %	45 %	10 %	-	5 %	5 %	-

Tabla IX - 45. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta PE.5 (Ciclo III-2).

			CC0	CC1	CC2	CC3	CC4	CC5	CC6
PE.7	GE	N.º de respuestas	3	10	0	0	0	0	3
		Porcentaje	16,7 %	55,6 %	-	-	-	-	16,7 %
	GC	N.º de respuestas	4	6	4	0	0	2	1
		Porcentaje	20 %	30 %	20 %	-	-	10 %	5 %

Tabla IX - 46. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de comparación cuantitativa de proporcionalidad compuesta PE.7 (Ciclo III-2).

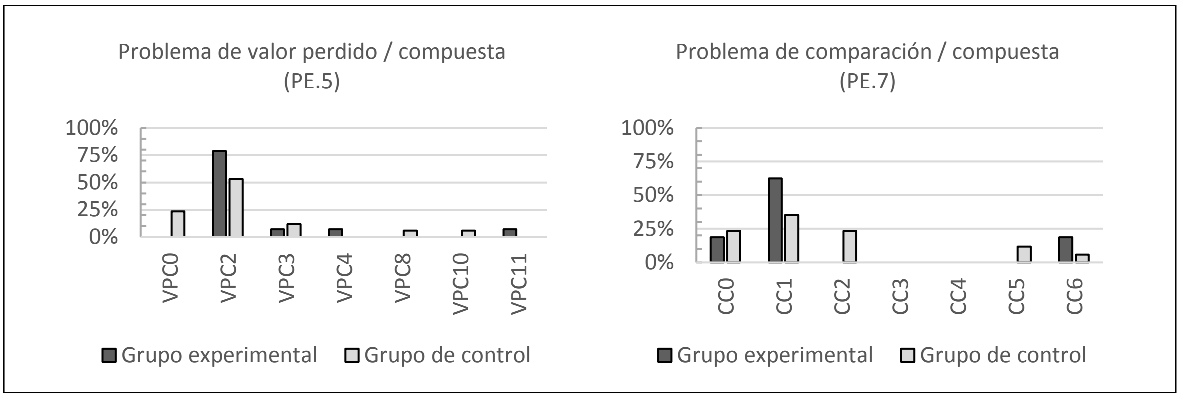


Figura IX - 4. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta PE.5 y PE.7 (Ciclo III-2).

Repartos proporcionales.

En la Tabla IX - 47 y en la Figura IX - 5 presentamos los resultados en las categorías específicas del grupo experimental y el grupo de control en el problema de reparto directamente proporcional PE.8. Estos elementos arrojan, de nuevo, resultados idénticos a los descritos en el Capítulo VIII por lo que no podemos realizar observaciones sustancialmente distintas a las que ya hicimos para el ciclo anterior.

			RP0	**RP1**	**RP2**	**RP3**	**RP4**
PE.8	**GE**	N.º de respuestas	2	11	0	0	0
		Porcentaje	11,1 %	61,1 %	-	-	-
	GC	N.º de respuestas	0	12	0	0	0
		Porcentaje	-	60 %	-	-	-

Tabla IX - 47. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para el problema de reparto directamente proporcional PE.8 (Ciclo III-2).

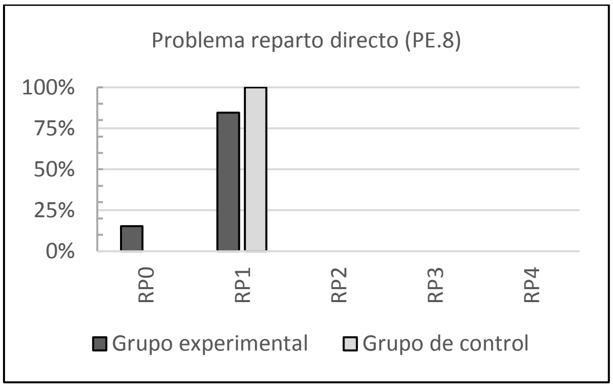


Figura IX - 5. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución del problema de repartos proporcionales PE.8 (Ciclo III-2).

Concepto de porcentaje y problemas asociados.

En la Tabla IX - 48 y en la Figura IX - 6 se resumen los resultados del análisis de las categorías específicas para los dos problemas de porcentajes PE.9.1 y PE.9.2 (problemas de Tipo I y Tipo II, respectivamente, enunciados sobre un mismo contexto de aumento porcentual).

			VPp0	VPp2	VPp3	VPp7	VPp8	VPp9
PE.9.1	**GE**	N.º de respuestas	1	0	11	1	2	0
		Porcentaje	5,6 %	-	61,1 %	5,6 %	11,1 %	-
	GC	N.º de respuestas	1	0	0	17	0	0
		Porcentaje	5 %	-	-	85 %	-	-
PE.9.2	**GE**	N.º de respuestas	1	0	9	0	2	1
		Porcentaje	5,6 %	-	50 %	-	11,1 %	5,6 %
	GC	N.º de respuestas	0	0	0	9	1	7
		Porcentaje	-	-	-	45 %	5 %	35 %

Tabla IX - 48. Comparativa de estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control para problemas aumentos y disminuciones porcentuales (Ciclo III-2).

De nuevo, salvo diferencias anecdóticas (diferencias de uno o dos estudiantes en alguna frecuencia absoluta), los gráficos de barras de la Figura IX - 6 son prácticamente idénticos que los que pueden verse en la Figura VIII - 6, correspondiente a la comparativa realizada en el ciclo anterior por lo que nos remitimos a las observaciones hechas en el Capítulo VIII.

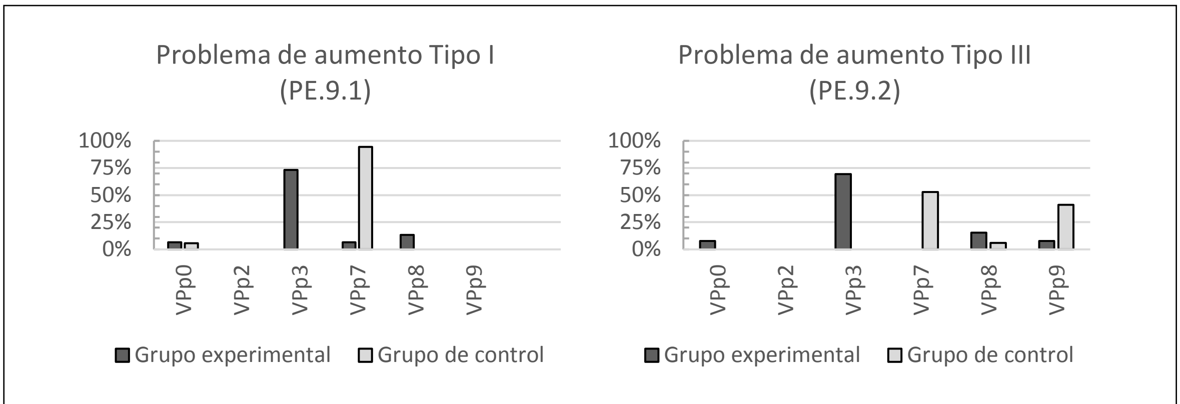


Figura IX - 6. Distribución de las diferentes estrategias empleadas por los alumnos del grupo experimental y del grupo de control en la resolución de los problemas de porcentajes PE.9.1 y PE.9.2 (Ciclo III-2).

IX.3.3. Entrevistas semiestructuradas

Durante este ciclo de investigación-acción las entrevistas semiestructuradas se articulan en torno a las tres fases siguientes:

- **FASE 1:** Preguntas descontextualizadas sobre conceptos de proporcionalidad inversa y análisis de algunas respuestas dadas por los alumnos en problemas o análisis de situaciones relacionados con esta relación de proporcionalidad.

- **FASE 2:** Análisis de algunas respuestas dadas por los alumnos en problemas de comparación cualitativa, tanto en relaciones de proporcionalidad simple directa, como en relaciones de proporcionalidad simple inversa.
- **FASE 3:** Preguntas descontextualizadas sobre conceptos relacionados sobre el porcentaje y análisis de respuestas dadas por los alumnos en problemas relacionados con el porcentaje y aumentos y disminuciones porcentuales.

Se eligieron dos alumnos: uno de perfil bajo y otro de perfil medio bajo, pero que habían mostrado interés durante la propuesta. En concreto, se entrevistó a los alumnos B7.1 y B4.2. Para cada estudiante se revisaron las producciones de clase en este ciclo, las tareas de casa y la prueba escrita. Tras esta revisión se diseñó una entrevista semiestructurada personalizada. El diseño concreto de las entrevistas y el vídeo con la grabación de estas puede consultarse en el Anexo IV.

El análisis de las entrevistas durante este ciclo no produjo información relevante o que difiera de las reflexiones que se produjeron en los ciclos anteriores. Por tanto, omitimos la presentación de los resultados de dicho análisis y remitimos al material enlazado en el Anexo IV.

IX.3.4. Observador externo

Como en los anteriores ciclos de investigación-acción, presentamos los resultados obtenidos en el protocolo de observación externa agrupados según los cuatro bloques en los que se distribuían los indicadores.

IX.3.4.1. Tratamiento de los contenidos y metodología

En la Tabla IX - 49 se recogen las respuestas del observador externo para este primer bloque. El observador externo valora como completamente adecuados todos los elementos curriculares planteados en la propuesta, aunque expresa algunas dudas sobre la completa viabilidad del tratamiento de los repartos inversamente proporcionales y la introducción de las situaciones de proporcionalidad compuesta. También señala que el tiempo dedicado a los contenidos planteados para la sesión 6 no es suficiente.

En el campo de respuesta abierta el observador externo anota los tiempos dedicados a cada una de las actividades en las que se dividen las sesiones y, además, hace los siguientes comentarios:

- Sesión 6: Al verse reducida la sesión a 30 minutos de clase el profesor-investigador ha modificado sobre la marcha la planificación inicial.
- Sesión 8: El observador externo estima insuficiente el tiempo para el problema de reparto inversamente proporcional debido a su complejidad.
- Sesión 9: El observador externo cree que debería haberse dedicado una sesión a reforzar los problemas de repartos proporcionales.

- Sesión 10: Se remarca un ligero cambio metodológico ya que el profesor-investigador ha realizado las puestas en común tras la realización de cada uno de los problemas que componen la ficha F10.1, en vez de esperar al final y realizar una única puesta en común.
- Sesión 11: El observador externo reflexiona sobre el problema F11.1.4 y, bajo su punto de vista, este problema "permite enfatizar en las razones porcentuales inversas cuando se aplican subidas y bajadas que mantienen el precio."

	1.1.1	**1.1.2**	**1.1.3**	**1.2**	**1.3**
Sesión 1	5	5	5	5	SÍ
Sesión 2	5	5	5	5	SÍ
Sesión 3	5	5	5	5	SÍ
Sesión 4	5	5	5	5	SÍ
Sesión 5	5	5	5	5	SÍ
Sesión 6	5	5	5	3	NO
Sesión 7	5	5	5	5	SÍ
Sesión 8	5	5	5	4	SÍ
Sesión 9	5	5	5	4	SÍ
Sesión 10	5	5	5	5	SÍ
Sesión 11	5	5	5	5	SÍ
Sesión 12	5	5	5	5	SÍ
Sesión 13	5	5	5	5	SÍ

1.1 Grado de adecuación de la sesión de clase al diseño teórico.
  1.1.1 Objetivos. (1-5)
  1.1.2 Contenidos. (1-5)
  1.1.3 Metodología. (1-5)
1.2 Viabilidad del tratamiento de los contenidos. (1-5)
1.3 Ajuste de la sesión al tiempo previsto. (SÍ/NO)

Tabla IX - 49. Respuestas del observador externo en el primer bloque de preguntas (Ciclo III-2).

IX.3.4.2. Actuación del profesor-investigador

En la Tabla IX - 50 se recogen las respuestas del observador externo para el segundo bloque de preguntas. El observador externo valora como completamente adecuados todos los indicadores sobre la actitud y el comportamiento del profesor-investigador (aunque deja en blanco los de la sesión 11). La calidad y claridad expositiva en las intervenciones se valoran siempre como excelentes. Los ítems relativos a la participación en el proceso docente se valoran todos como positivos.

Además, el observador externo realizó otras consideraciones en los campos de respuesta abierta que recogemos a continuación:

- Sesión 1: El observador externo considera adecuada la intervención del profesor-investigador para una sesión de repaso de conceptos del curso anterior.
- Sesión 8: El observador externo valora como "difícil" la gestión del primer encuentro de los alumnos con una situación de reparto proporcional inverso.

	2.1.1	2.1.2	2.1.3	2.2.1	2.2.2	2.2.3	2.2.4	2.3.1	2.3.2	2.4
Sesión 1	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 2	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 3	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 4	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 5	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 6	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 7	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 8	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 9	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 10	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 11	-	-	-	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 12	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad
Sesión 13	5	5	5	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	5	5	Ad

2.1 Actitud y comportamiento. (1-5)
2.1.1 Actitud del profesor.
2.1.2 Interés por el aprendizaje de los alumnos.
2.1.3 Atención a las necesidades de los alumnos.
2.2 Participación en el proceso docente.
2.2.1 Fomenta participación. (SÍ/NO)
2.2.2 Reconoce avances y progresos. (SÍ/NO)
2.2.3 Identifica dificultades. (SÍ/NO)
2.2.4 Promueve la reflexión. (SÍ/NO)
2.3 Calidad y claridad expositiva en las intervenciones.
2.3.1 Calidad expositiva. (1-5)
2.3.2 Claridad expositiva. (1-5)
2.4 Tiempo intervención. (Escaso/Adecuado/Excesivo)

Tabla IX - 50. Respuestas del observador externo en el segundo bloque de preguntas (Ciclo III-2).

IX.3.4.3. Actuación de los alumnos

En la Tabla IX - 51 se recogen las respuestas dadas por el observador externo en los indicadores centrados en la actuación de los alumnos. El observador externo valora de manera uniforme la mayor parte de las sesiones constatando que los alumnos realizan las tareas, intervienen generalmente para preguntar dudas (casi nunca para ampliar contenidos), atienden a las explicaciones del profesor y tienen una actitud positiva. En este último ciclo, el observador externo sí encuentra evidencias de comprensión tanto de las intervenciones como de los contenidos trabajados, salvo en los problemas de repartos inversamente proporcionales donde expresa dudas sobre la comprensión de dicho contenido por parte de los alumnos.

Otras consideraciones sobre la actuación de los alumnos realizadas por el observador externo en los campos de respuesta abierta fueron las siguientes:

- Sesión 3: El observador externo reflexiona sobre la dificultad que ha supuesto la ficha TC2 en la que se presentan magnitudes sin datos concretos para las cantidades de magnitud.
- Sesión 4: El observador remarca que los alumnos han tenido una actitud más pasiva que en otras sesiones y que, probablemente, sea debido al cansancio ya que se trata de la última hora lectiva del viernes.
- Sesión 5: Se señala la mayor dificultad que ha supuesto el problema de proporcionalidad simple inversa F5.1.1 a los alumnos.
- Sesión 6: El observador externo intuye algunas dificultades de los alumnos para elegir las magnitudes para amalgamar en los problemas de proporcionalidad compuesta.

- Sesión 8: El observador externo duda sobre si los alumnos han comprendido, en este momento inicial, el reparto proporcional inverso.
- Sesiones 8 y 10: Los alumnos piden aclaraciones sobre otros métodos para resolver los problemas.
- Sesiones 10 y 11: El observador externo indica que los alumnos se muestran inseguros a la hora de elegir la razón externa adecuada en los problemas de porcentaje y que solicitan ayuda al profesor-investigador.
- Sesión 12: El observador externo observa indicios de un mejor desempeño en la resolución de problemas de valor perdido en situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales.

	3.1	3.2	3.3.1	3.3.2	3.3.3	3.4
Sesión 1	Iniciativa. Realizan tareas.	D/C	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 2	Iniciativa. Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 3	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 4	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 5	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 6	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 7	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 8	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	NO	+
Sesión 9	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 10	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 11	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 12	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+
Sesión 13	Realizan tareas.	D	SÍ	SÍ	SÍ	+

3.1 Tipo de participación.
3.2 Tipo de preguntas de los alumnos.
D: aclarar dudas
C: ampliar contenidos.
3.3 Atención y asimilación. (SÍ/NO)
3.3.1 Atienden a las intervenciones.
3.3.2 Comprenden las intervenciones.
3.3.3 Comprenden los contenidos.
3.4 Actitud: Positiva (+), Negativa (–)
Neutra (+/-)

Tabla IX - 51. Respuestas del observador externo en el tercer bloque de preguntas (Ciclo III-2).

IX.3.4.4. Interacciones profesor-alumno

	4.1	4.2.1	4.2.2	4.2.3
Sesión 1	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 2	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 3	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 4	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 5	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 6	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 7	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 8	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 9	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 10	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 11	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 12	Fre.	GC / E / I	P / A	-
Sesión 13	Fre.	GC / E / I	P / A	-

4.1 Frecuencia de las interacciones:
Nunca (Nun.)
A menudo (Fre.)
Constantemente (Cte.)
4.2 Tipo de interacciones
4.2.1 Dirigidas al grupo clase (GC), a los equipos de alumnos (E) o alumnos particulares (I).
4.2.2 Se producen a instancia del profesor (P) o de algún alumno (A).
4.2.3 La comunicación es unidireccional (U) o se establece un diálogo fluido (D).

Tabla IX - 52. Respuestas del observador externo en el cuarto bloque de preguntas (Ciclo III-2).

En la Tabla IX - 52 se recogen las respuestas dadas por el observador externo a los indicadores utilizados para analizar las interacciones entre el profesor-investigador y los alumnos. El observador externo valora uniformemente todas las sesiones de la propuesta, indicando que se producen interacciones frecuentes y de diversa tipología. El observador externo no ha hecho consideraciones sobre el ítem 4.2.3 “La comunicación es unidireccional o se establece un diálogo fluido”.

El observador externo no hace ningún comentario en el campo de respuesta abierta ni ninguna otra anotación al margen.

IX.3.4.5. Otras incidencias y comentarios generales sobre la sesión

El observador externo no realiza en este ciclo ningún comentario en el campo de respuesta abierta para este punto del protocolo de observación.

IX.4. Fase de reflexión

Esta sección supone la síntesis del proceso de reflexión continuo que el profesor-investigador y el equipo de investigación realizan a lo largo de todo el ciclo III-2.

En las fases de reflexión del Capítulo VII (ciclo III-1) y del Capítulo VIII (ciclo II-2), se destacaron signos que indicaban características de saturación. En esta sección trataremos de destacar las reflexiones que nos llevan a pensar que el ciclo III-2 supone el ciclo de saturación tanto de la secuencia propia de 2º de ESO, como de toda la propuesta didáctica.

IX.4.1. Sobre el diseño de la propuesta

Durante este ciclo no se han realizado cambios de diseño importantes. Las sesiones planteadas para trabajar los focos 1, 2, 3 y 4 no habían tenido cambios substanciales tampoco en el ciclo II-2. Tanto las notas recogidas en el diario de clase, como el análisis de las producciones de los alumnos y las anotaciones del observador externo muestran que el diseño de la propuesta es adecuado en términos de secuenciación, duración y planificación en estos focos y que el comportamiento observado es estable. Por ejemplo, en el diario de clase y en la observación externa no se han recogido modificaciones sobre la marcha, salvo una por causas ajenas a la investigación entre las sesiones 6 y 7 que afectó al foco 4. Otro ejemplo de que la planificación del diseño se adecúa mejor a los tiempos disponibles es el descenso de producciones que se dejan en blanco en los últimos problemas de las fichas de trabajo cuando son demasiado largas y que habíamos destacado en otros ciclos.

Estas mismas reflexiones sobre un comportamiento estable de la propuesta y la adecuación de la secuenciación y el número de actividades propuestas pueden hacerse en lo relativo a los focos 5 y 6. En estos focos se habían introducido cambios relevantes en el ciclo II-2. Durante este ciclo hemos comprobado que el diseño propuesto en el ciclo anterior se ha desarrollado de una forma similar.

Destacamos también que las situaciones introductorias de todos los focos han seguido funcionando de la manera esperada. Por un lado, no suponen un obstáculo insalvable para los estudiantes que se enfrentan a ellas sin instrucción previa y, por otro, proporcionan una variedad de estrategias y producciones interesantes para realizar una puesta en común rica. Es destacable que, en este sentido, la situación introductoria para los repartos inversamente proporcionales no solo ha conservado el buen funcionamiento observado en el ciclo anterior, sino que ha producido en este ciclo una mayor variedad de respuestas propiciando una institucionalización más completa en este ciclo.

IX.4.2. Sobre la comprensión de los alumnos

Aunque esta sección la hemos estructurado en los ciclos anteriores a través de todos los focos de contenido, hemos destacado en varias ocasiones que en este ciclo no hemos obtenido en los cuatro primeros focos resultados esencialmente diferentes de los obtenidos en el ciclo anterior. Por tanto, en esta última sección de reflexión destacaremos las reflexiones sobre la comprensión en los focos 5 y 6 únicamente.

IX.4.2.1. Foco 5: Repartos proporcionales

Las actuaciones de los alumnos en los problemas de repartos directamente proporcionales no presentan diferencias con las observadas en ciclos anteriores:

- Las tasas de éxito son muy altas.
- No aparecen prácticamente resoluciones que se basen en un reparto equitativo o de compensación aditiva.
- Se utilizan métodos aritméticos basados en el significado de las operaciones y de las cantidades calculadas.
- Los razonamientos se apoyan en la estructura parte-todo.
- Los problemas simples en los que se descompone la resolución, a diferencia de lo que sucede en el grupo de control, se resuelven también mediante técnicas aritméticas. No encontramos el uso de fórmulas u otras técnicas de carácter más algorítmico.

En cuanto a los repartos inversamente proporcionales hemos corroborado que los nuevos contextos favorecen la aparición de técnicas aritméticas de forma espontánea. De hecho, han aumentado las producciones en donde se interpretan los inversos de los pesos y hemos encontrado una producción totalmente correcta en la situación introductoria similar a la institucionalización prevista.

También dentro de los problemas de repartos inversamente proporcionales, hemos obtenido mejores resultados al ajustar la estructura numérica de forma que se pueda responder de forma única al reparto óptimo (sin que sobre cantidad a repartir que no pueda “aprovecharse”).

Por otro lado, se constata (tanto en las tasas de éxito como en los comentarios del observador externo) la mayor dificultad que suponen este tipo de problemas para los alumnos si los comparamos con los problemas de repartos directamente proporcionales.

IX.4.2.2. Foco 6: Interpretación del porcentaje y problemas asociados

Al igual que ocurre con otros focos en este ciclo, hemos observado en los estudiantes mayores dificultades para resolver los problemas de porcentajes. Sin embargo, parece que este hecho está más relacionado con las características propias del grupo que con la propuesta didáctica.

En cualquier caso, como en el ciclo previo, hemos observado una mejor comprensión, en términos longitudinales, de este tipo de situaciones respecto al ciclo III-1 de 1º de ESO del que provienen los alumnos. También se detectan diferencias significativas en la prueba escrita a favor de los alumnos del grupo experimental de este ciclo respecto al grupo de control. Además de los porcentajes de respuestas correctas más bajos, los alumnos del grupo de control muestran menor versatilidad para adaptarse a las situaciones que se les plantean y una dependencia mayor de las técnicas algorítmicas.

Como indicábamos en la fase de reflexión del ciclo II-2, los alumnos superan el obstáculo que en 1º de ESO suponía el mayor apego a interpretaciones del porcentaje como operador y consecuentemente a las técnicas de cálculo algorítmicas que asociaban a este concepto. Aumentan de forma muy significativa las interpretaciones del porcentaje en términos de razones externas y, a partir de esa interpretación, las estrategias de resolución de problemas de valor perdido basadas en el cálculo e interpretación de una razón externa.

IX.4.3. Sobre la metodología y la labor del profesor-investigador

Como en ciclos anteriores el profesor-investigador valora como muy positiva la metodología de enseñanza basada en un enfoque a través de la resolución de problemas que se integra de forma natural en su práctica. Las valoraciones positivas del observador externo, que califica todos los ítems sobre la actuación del profesor-investigador, la actuación de los alumnos y las interacciones profesor-alumno con la calificación más alta, apoyan esta valoración del profesor-investigador.

IX.4.4. Sobre el funcionamiento general de la propuesta

Las consideraciones hechas sobre el diseño y la comprensión de los alumnos, junto con los buenos resultados obtenidos en la comparativa con el grupo de control ponen de manifiesto varias características de la propuesta en este ciclo de investigación-acción. Por un lado, la propuesta es exitosa en la profundización de la comprensión de situaciones relacionadas con el razonamiento proporcional. Por otro, se ha alcanzado un ciclo de saturación ya que el comportamiento observado es en líneas generales muy similar al del ciclo anterior y no parece posible introducir mejoras significativas sin introducir cambios sustanciales en la propuesta.

Por último, queremos reflexionar sobre el listado de puntos fuertes y débiles de la propuesta que expusimos en la sección V4.4 tras la realización del ciclo II-1, primer ciclo experimental desarrollado en esta memoria. En concreto, repasaremos los puntos débiles detectados en dicho ciclo para reflexionar sobre ellos en este último ciclo de la propuesta.

Presentamos entrecomillados y en cursiva las reflexiones que realizamos en el ciclo V.4.4 para comentar después el estado actual de estas consideraciones.

"Hemos detectado que el número racional se entiende principalmente como decimal. Los alumnos muestran dificultades al aplicar los algoritmos para operar con fracciones y evitan en lo posible su uso. Como consecuencia surgen multitud de situaciones en las que los alumnos obtienen resultados inexactos a pesar de que el procedimiento seguido es adecuado."

Respecto a este punto débil no se aprecia un avance significativo en este ciclo de saturación, aunque desaparecen casi por completo los errores asociados al manejo de los significados del racional, los alumnos eligen de forma mayoritaria la representación decimal para trabajar con las razones externas.

"El trabajo con los porcentajes ha resultado especialmente complejo. Los alumnos no consiguen conectar de forma adecuada este concepto con los asociados a la proporcionalidad simple directa. Además, se observa una fuerte influencia de la instrucción previa en las producciones de muchos alumnos. Esta instrucción previa supone un gran obstáculo para los alumnos a la hora de enfrentarse a las tareas propuestas."

Como hemos discutido anteriormente sí se aprecian mejoras significativas en este punto débil apreciado tras el primer ciclo de investigación-acción de nuestra experimentación. Hemos constatado un mejor desempeño de los estudiantes en torno al foco 6 de contenido, tanto en términos cuantitativos (mayor tasa de acierto y diferencias significativas con el grupo de control), como en términos cualitativos ya que los alumnos asignan significado a las razones externas asociadas al porcentaje y razonan sobre las operaciones que deben realizarse a partir de dichos significados.

"Los cambios en la metodología de aula (trabajo en parejas, ausencia de libro de texto, institucionalización posterior a la resolución de situaciones problemáticas) provocan un cierto desconcierto inicial en los alumnos ya que se aparta del modelo de enseñanza para la resolución de problemas al que están acostumbrados."

Tras los cinco ciclos de investigación-acción, observamos que tanto los alumnos, como el profesor-investigador, integran de forma natural la metodología a través de la resolución de problemas por lo que este punto débil observado parece haberse resuelto a lo largo de la experimentación.

> *"La propia naturaleza investigadora del experimento de enseñanza que conlleva la recogida diaria de fichas de trabajo y, especialmente, el uso de una cámara para la grabación de las sesiones de clase supone novedades que también distraen inicialmente la atención de los alumnos."*

Como en lo referente a la metodología de aula, la realización de la propuesta a lo largo de dos cursos académicos consecutivos hace que estas "novedades" introducidas para realizar una observación de la experimentación lleguen a pasar prácticamente desapercibidas. Además, parte de los inconvenientes para los alumnos que el profesor-investigador achacaba a la metodología de aula y de investigación nacían de su propia incomodidad con los mismos. La utilización de esta misma metodología a lo largo de los diferentes ciclos hace que el profesor-investigador se sienta más cómodo con su implementación y, por tanto, se perciban menos inconvenientes.

Capítulo X: Conclusiones, difusión y trabajo futuro

Que Ítaca te ha dado el viaje hermoso.
Sin ella no emprendieras el camino.

El último capítulo de la memoria presenta una síntesis no solo de los resultados obtenidos a lo largo del trabajo, sino también de las actividades de investigación, transferencia y divulgación que se han llevado a cabo durante todo el proceso de elaboración de la memoria.

Las conclusiones del trabajo se presentan en las dos primeras secciones. Dichas secciones se estructuran según los objetivos principales y parciales de investigación que presentamos en el Capítulo I. Así, en la sección X.1, se presentan las conclusiones en torno al Objetivo I, las subsecciones de la sección se corresponden con los objetivos parciales (por ejemplo, el Objetivo I.2 se corresponde con la sección X.1.2, o el Objetivo I.1.3 con la sección X.1.1.3). Lo mismo ocurre con el Objetivo II cuyas conclusiones se desarrollan en la sección X.2.

Tras las conclusiones, dedicaremos una sección a las limitaciones del trabajo de investigación intentando indicar posibles vías de mejora. Entre otras, reflexionaremos sobre limitaciones del diseño metodológico cuantitativo, como el tamaño reducido de los grupos de control, del diseño metodológico cualitativo, como la selección de estudiantes para las entrevistas semiestructuradas o la caracterización de la instrucción recibida por los grupos de control.

La cuarta sección se dedica a resumir las actividades de investigación, publicaciones en revistas científicas y comunicaciones a congresos que han surgido del trabajo de esta tesis doctoral. También se reseñan las actividades de transferencia, colaboración en la edición de libros de texto electrónicos, proyectos de investigación educativa y dirección de trabajos académicos que se llevaron a cabo tras el término de la experimentación y de forma previa a la presentación de esta memoria. Por último, se describen otras actividades mediante las que se ha divulgado tanto la propuesta didáctica como los resultados obtenidos tras su experimentación.

En la última sección realizamos una breve descripción de algunas de las vías de investigación que surgen de este trabajo y en las que nos planteamos profundizar en el futuro. Algunas de estas vías surgen de la necesidad de extender y mejorar la propuesta didáctica, otras de la posibilidad de extender a otros ámbitos las investigaciones en libros de texto que se han desarrollado durante la planificación de esta tesis y otras surgen de colaboraciones internacionales a raíz de los avances en la investigación en situaciones de proporcionalidad compuesta que, en general, están poco desarrolladas.

X.1. Conclusiones relativas al primer objetivo

En esta sección presentamos las conclusiones de la investigación en torno al primer objetivo principal de investigación.

Objetivo I: Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética para todo el primer ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria, modificando la realizada para 1º ESO en (Oller-Marcén, 2012) y completando la propuesta para todo el primer ciclo constituyendo una alternativa a la enseñanza tradicional.

De forma general, una primera observación es que la propuesta diseñada y experimentada en este trabajo contiene y amplía los contenidos que aparecen en las normativas curriculares. Además, los desarrolla en secuencias de alrededor de tres semanas. Esta extensión se ajusta al tiempo que habitualmente se dedica a este tema en el centro de enseñanza en el que se desarrolló el proyecto.

Además, se han establecido variables de tarea para cada uno de los tipos de problemas considerados (ver Tabla X - 1, para su especificación y valores que se consideran, ver sección IV.1.2), tanto en los nuevos focos de contenido considerados en esta propuesta, como en los focos de contenido ya trabajados en la propuesta de Oller-Marcén (2012). Estas variables de las tareas han permitido un análisis detallado del diseño de cada uno de los problemas. Con este análisis se intenta prever la influencia que los valores que toman estas variables de las tareas tienen en cuanto a la dificultad y el tipo de estrategias empleadas por los alumnos y, consecuentemente, tomar decisiones de diseño. Al mismo tiempo, la consideración de estas variables de las tareas permite controlar la introducción en la propuesta de una colección de problemas que trabaje el mayor número de combinaciones posibles de estas variables. Además de la potencialidad para generar un diseño argumentado y completo de nuestra propuesta, esta colección de variables de las tareas puede servir de base (a maestros y profesores en formación y ejercicio) para crear y analizar secuencias didácticas relacionadas con la proporcionalidad.

Otra de las características novedosas de nuestra investigación es la introducción de listados de categorías para el análisis de las resoluciones de los alumnos en cada tipo de problemas. EL listado, justificación y explicación de cada una de estas categorías se presentó en la sección III.38.2. Así, se han mejorado y ampliado las categorías usadas anteriormente en los trabajos que usaban las ideas de nuestra propuesta (Gairín & Oller-Marcén, 2011), y se han generado nuevas categorías para los focos de interés que se introducen por primera vez en la experimentación de esta tesis doctoral.

FOCO DE CONTENIDO	VARIABLES DE LA TAREA
Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad	• Relación de proporcionalidad • Magnitudes involucradas • Estructura funcional • Constante de proporcionalidad • Estructura numérica • Razones externas
Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa y problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa	• Relación de proporcionalidad • Tipo de problema • Magnitudes involucradas • Estructura funcional • Constante de proporcionalidad • Estructura numérica • Razones externas • Razones internas
Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta	• Tipo de problema • Magnitudes involucradas • Estructura funcional • Constante de proporcionalidad • Amalgamaciones parciales • Estructura numérica • Razones externas • Razones internas
Problemas de repartos proporcionales	• Tipo de reparto (directo o inverso) • Modelo de reparto empleado • Magnitudes involucradas • Estructura funcional • Número de participantes en el reparto / Número de pesos • Constante de proporcionalidad • Estructura numérica • Razones externas • Razones internas
Interpretación del porcentaje y problemas asociados	• Tipo de problema • Posición de la incógnita • Sentido del cambio (aumento/disminución) • Magnitudes involucradas • Estructura funcional • Constante de proporcionalidad • Estructura numérica • Razones externas • Razones internas

Tabla X - 1. Variables de las tareas en cada foco de contenido.

Las categorías para analizar el desempeño de los alumnos se han generado de la forma más exhaustiva y general posible, no ciñéndose exclusivamente a las estrategias trabajadas durante la propuesta. La revisión de los trabajos de investigación en el Capítulo II ha permitido refinar el análisis de los diferentes tipos de problemas de proporcionalidad simple. Por ejemplo, para los problemas de comparación cuantitativa, las categorías se han generado tomando las de Karplus *et al*. (1983) para los problemas de comparación de mezclas de azúcar y zumo (sección II.3.2.1. del Capítulo II) en el que unimos los razonamientos erróneos cualitativos ("como tiene más azúcar está más dulce") con los aditivos ("tiene dos cucharadas más de azúcar luego está más dulce") y consideramos en otra categoría las respuestas ilógicas consideradas por estos autores. Para refinar la categoría de respuestas multiplicativas incluida en el trabajo de Karplus *et al*. (1983) utilizamos la distinción de Vergnaud (1983) entre estrategias funcionales mediante la comparación de razones externas (constante de proporcionalidad en el caso directo) y las estrategias escalares mediante comparación de razones internas (sección II.2.4.3. del Capítulo II). Además, añadimos otra categoría para las producciones descritas por Valverde y Castro (2009) en las que los alumnos resuelven un problema de valor perdido para responder a un problema de comparación cuantitativa (ver sección II.3.2.1. del Capítulo II).

Para los focos de contenido en donde los estudios hechos desde la investigación en educación matemática eran escasos, como es el caso del foco dedicado a las situaciones de proporcionalidad compuesta, los sistemas de categorías se han creado generalizando los existentes para situaciones simples (ver Martínez-Juste *et al*., 2017 y sección II.2.2.6 y sección II.2.4.4 de esta memoria), analizando libros de texto (Martínez-Juste *et al*., 2014, 2015b, 2017) y mediante estudios exploratorios previos (Martínez-Juste, 2015a).

El uso de este sistema de categorías ha permitido estructurar el análisis cualitativo de las respuestas del alumnado para profundizar en las respuestas que usan estrategias erróneas, las que usan estrategias potencialmente correctas y los fallos que se cometen utilizando estrategias correctas. En nuestro trabajo, estas categorías han permitido:

- Valorar la adecuación de las situaciones introductorias, estudiando no solo si los alumnos podían resolver correctamente sin recibir instrucción previa, sino también qué tipo de estrategias surgen de forma espontánea en su resolución.
- Monitorizar el avance de los estudiantes en la comprensión de los conceptos a lo largo de las sesiones.
- Detectar la aparición de influencias externas en las tareas para casa o en la prueba escrita; evaluar la comprensión final de los estudiantes en los determinados focos
- Comparar el desempeño de los estudiantes de los grupos experimentales con los estudiantes de los grupos de control.

Además del uso dado en esta memoria, estas categorías pueden emplearse para otras investigaciones centradas en el análisis de contenido de libros de texto (Ibáñez & Martínez-Juste, 2020) o en el análisis de resoluciones de aprendices. También pueden emplearse como guía en el ejercicio docente para realizar una evaluación formativa o diagnóstica de los estudiantes en el aprendizaje de la proporcionalidad aritmética.

Las siguientes subsecciones se corresponden con los objetivos parciales en los que descompusimos este objetivo principal en la sección I.3 (Capítulo I).

X.1.1. Modificación de la propuesta de enseñanza

Uno de los objetivos parciales en cuanto al diseño de la propuesta didáctica para la proporcionalidad aritmética que se ha abordado en este proyecto era modificar la propuesta realizada por Oller-Marcén (2012). Alguna de las modificaciones realizadas no solo supone un cambio respecto a la propuesta de enseñanza anterior, sino que supone una innovación curricular (Elliot, 2020; Romera, 2012) de mayor alcance ya que se proponen alternativas a las directrices curriculares y al tratamiento que se da a estos aspectos tradicionalmente en los libros de texto.

X.1.1.1. Reorganización de la secuencia didáctica

Los libros de texto generalmente presentan la proporcionalidad simple, tanto directa como inversa, en primero de ESO (Martínez-Juste *et al*., 2015; Oller-Marcén, 2012). También las prescripciones curriculares en la Comunidad Autónoma de Aragón[61] en donde se realizó la experimentación introducen en este primer curso la proporcionalidad inversa (junto con la directa que ya aparece en EP). La propuesta de Oller-Marcén (2012) también introducía estas dos relaciones de proporcionalidad simple en este primer curso. Sin embargo, se detectó que este tratamiento no parecía adecuado debido a la mayor dificultad que presentan los alumnos ante las situaciones inversas. Oller-Marcén (2012, p. 499) propone cambios en este sentido:

> Concretar un modelo de aprendizaje apropiado para la introducción de la proporcionalidad inversa de modo que la idea de constante de proporcionalidad surja de modo natural. Al igual que en el caso de la proporcionalidad directa (y la idea de razón), pensamos que el modo en que se presenten dichos contenidos influirá de manera decisiva en la concepción que los alumnos tengan de los mismos.

Nuestro diseño ha pospuesto la institucionalización de las relaciones inversas al 2º curso de la ESO, dejando espacio en el primer curso para trabajar de manera profunda y extensa las cuestiones relacionadas con la proporcionalidad directa. De este modo, la propuesta en primero de ESO permite trabajar con mayor profundidad el concepto de razón y los significados asociados. A pesar de no recibir institucionalización explícita, en la propuesta de 1º de ESO (también en la de 2º) se introducen situaciones de proporcionalidad inversa (así como situaciones en las que las magnitudes tienen una relación afín, o no tienen relación) para dar oportunidades a los alumnos a

[61] Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón*, 2 de junio de 2016, Zaragoza, pp. 12640 - 13458.

detectar relaciones directamente proporcionales de entre otro tipo de relaciones que no lo son (Buforn, 2017; Buforn & Fernández, 2014; Van Dooren *et al*., 2008).

Una de las problemáticas detectadas en nuestra investigación se relaciona con la transición entre la Educación Primaria y la Educación Secundaria Obligatoria (Font, 2011; Torres, 2015). Aunque la proporcionalidad directa aparece como elemento curricular en Educación Primaria, los alumnos de los grupos experimentales han mostrado tener pocos (o nulos) conocimientos conceptuales previos sobre las relaciones de proporcionalidad directa en general, y sobre la razón entre magnitudes y su interpretación como magnitud intensiva en particular. Sin embargo, sí han demostrado tener ciertos conocimientos previos de carácter procedimental (regla de tres, fórmulas para calcular el porcentaje de una cantidad, …). Estos conocimientos previos de carácter exclusivamente procedimental, implementados sin ningún tipo de argumentación, han supuesto en algunos puntos de la propuesta un cierto obstáculo tanto para introducir nuevos significados en los conceptos ya aprendidos, como para adquirir nuevos conceptos en los que no eran aplicables las técnicas conocidas.

Los hechos anteriores concuerdan tanto con la interpretación como obstáculo didáctico que diferentes autores atribuyen a algunas dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la proporcionalidad (Van Dooren *et al*., 2008); como con la escasa atención que se le da tradicionalmente al concepto de razón en la enseñanza de la proporcionalidad en España; así como con un tratamiento deficiente en los libros de texto (Gairín & Oller-Marcén, 2012; Ponte & Marques, 2011) y sin presencia en las prescripciones curriculares oficiales de EP, como vimos en el Capítulo II. En nuestra propuesta, el trabajo casi en exclusiva sobre cuestiones relacionadas con la proporcionalidad directa en el primer curso ha conseguido romper con estos conocimientos previos como se pone de manifiesto en la desaparición de este tipo de procedimientos algoritmizados al final de la implementación de la propuesta didáctica.

La no inclusión de la proporcionalidad simple inversa en primero de ESO ha permitido introducir de manera informal la proporcionalidad compuesta. Los conceptos relacionados con este tipo de situaciones de proporcionalidad, aunque no aparecen de forma explícita en los documentos oficiales, se introducen en los libros de texto en 2º de ESO (Martínez-Juste *et al*., 2014, 2015b, 2017). Los problemas de proporcionalidad compuesta, de mayor demanda cognitiva, resultan muy interesantes para valorar el razonamiento proporcional de los estudiantes (Arican, 2018) ya que permiten desplegar un amplio número de estrategias para su resolución incluso si nos ceñimos al ámbito aritmético. De hecho, las resoluciones aritméticas en este tipo de problemas basadas en las magnitudes implicadas pueden suponer un conocimiento más rico (Pérez-Bueno, Liñán, & Barrera, 2018). Hemos comprobado a través de los resultados de las situaciones introductorias en 1º de ESO, como un buen número de alumnos ha podido afrontar con éxito estas tareas sin haber recibido instrucción previa al respecto. Además, aunque se han presentado en 1º de ESO solo problemas en los que la relación de la variable dependiente era directa con las independientes, muchas de las estrategias de resolución pasan por realizar productos de magnitudes, en ocasiones ambas extensivas, lo que supone un primer acercamiento a las estrategias y significados que se ponen en juego con posterioridad en las situaciones de proporcionalidad inversa.

Otro de los cambios en cuanto al orden en la presentación de los contenidos es el relativo al porcentaje. A pesar de que los contextos de porcentaje pueden tratarse como un caso particular de contexto de proporcionalidad directa, son muchas las dificultades específicas atribuidas a este concepto que tienen que ver con la desconexión con el concepto de razón (Mendoza & Block, 2010; Parker & Leinhardt, 1995; Pöhler & Prediger, 2015). En la propuesta de Oller-Marcén (2012) uno de los puntos débiles fue precisamente el tratamiento del porcentaje. Allí se introducían los problemas relacionados con este concepto tras la proporcionalidad directa intentando que los alumnos aplicasen los conocimientos adquiridos a estos nuevos contextos. En la propuesta desarrollada en esta tesis doctoral, para intentar mejorar esta conexión entre el porcentaje y la proporcionalidad directa, se tomó la decisión de incorporar más sesiones dedicadas exclusivamente a este concepto y separarlas de forma clara dentro de la secuencia de aquellas dedicadas a la proporcionalidad directa. En 1º de la ESO el porcentaje se trabaja después de la proporcionalidad compuesta y en 2º de la ESO el porcentaje se trabaja después de la proporcionalidad compuesta y de los repartos proporcionales. Este hecho, junto con el rediseño de las actividades de la propuesta para el porcentaje, del que hablaremos en la sección X.1.1.3, parece haber tenido un efecto positivo sobre el aprendizaje de los alumnos (ver sección X.2).

X.1.1.2. Cambios en el tratamiento de la proporcionalidad simple directa e inversa

La distinción entre problemas de valor perdido y problemas de comparación, cuantitativa y cualitativa (Cramer & Post, 1993) es clásica y central para la investigación (Rivas, 2013). Sin embargo, la enseñanza tradicional de la proporcionalidad, tanto desde un punto de vista histórico como actual basado en el estudio de los libros de texto, se centra en la resolución de problemas de valor perdido (Gómez, 2016). Sin embargo, la incorporación de este abanico de tareas cuantitativas y cualitativas es determinante para un adecuado desarrollo del razonamiento proporcional (Cramer & Post, 1993; Lesh *et al*., 1988; Singh, 2000a). Así, una de las principales aportaciones de nuestra propuesta consiste en incorporar los tres tipos de problemas utilizados por Cramer y Post (1993), para cada una de las estructuras multiplicativas trabajadas. Es decir, diseñamos problemas de valor perdido, de comparación cuantitativa y de comparación cuantitativa para las situaciones de proporcionalidad simple directa, para las de proporcionalidad simple inversa y para las de proporcionalidad compuesta. Esto, además de una innovación curricular, supone un cambio en el tratamiento de estos tópicos respecto a la propuesta de Oller-Marcén (2012), en donde no se incorporaban problemas de comparación cualitativa en toda la propuesta, y los problemas de comparación cuantitativa se trabajaban solo en las situaciones directas.

El enfoque general dado a la proporcionalidad directa y a sus elementos clave, como la razón externa entre magnitudes, su significado, o la caracterización de la relación de proporcionalidad en términos de condiciones de regularidad (que implican la constancia de la razón) no ha variado durante el proyecto. Sin embargo, sí se han introducido nuevos tipos de actividades para su trabajo y para poder valorar de una forma más precisa la comprensión de los alumnos. Por ejemplo, para trabajar el concepto de razón externa se han diseñado actividades en las que, a partir de un contexto, se proporcionaba a los alumnos un valor numérico que se correspondía con una razón externa y para el que se les pedía desarrollar una interpretación. También se han diseñado situaciones como las anteriores, pero en donde el dato era la interpretación y se pedía dar el valor numérico asociado. El análisis de las respuestas apunta a que la dificultad de estas actividades no es simétrica, resultando más complicado para los estudiantes explicar el significado cuando el valor ya viene dado, que realizar la actividad recíproca o que realizar las actividades que se incluían ya en el trabajo de Oller-Marcén (2012), en donde dada una situación con dos cantidades se pedía calcular e interpretar las posibles razones que pudieran generarse. Este tipo de actividades puede servir como base para investigar la progresión en la adquisición de estos conceptos.

En el tratamiento de la proporcionalidad simple inversa, además de la ampliación de la tipología de los problemas y de posponer su introducción a 2º de ESO, hemos introducido cambios de carácter conceptual. En concreto, nos hemos alejado de la caracterización de la relación de proporcionalidad inversa por doble relación de proporcionalidad directa que se proponía en el trabajo de Oller-Marcén (2012), para acercarnos a una caracterización de la relación por constante de proporcionalidad. Es decir, nos centramos en la estructura multiplicativa de la relación funcional entre las magnitudes (Vergnaud, 1983) para interpretar el producto de medidas y reflexionar sobre su valor constante en el contexto. Esta caracterización, si se trabaja desde un enfoque aritmético como el nuestro, requiere dotar de significado al producto de las magnitudes involucradas, es decir, a la constante de proporcionalidad. Esta interpretación depende fuertemente del contexto y puede ser especialmente complicada cuando las dos magnitudes son extensivas, incluso desde un punto de vista puramente matemático (Freudenthal, 1973), por lo que este tipo de enfoques han sido puestos en cuestión en algunos trabajos (Bosch, 1994). Sin embargo, por una parte, creemos que es imprescindible proporcionar a los estudiantes oportunidades para realizar este trabajo significativo con las magnitudes y sus operaciones en contextos diversos, en especial los relacionados con las ciencias experimentales en donde la proporcionalidad puede suponer un nexo en la enseñanza de ambas disciplinas (Tinoco, Albarracín, & Deulofeu, 2021), y, por otra, utilizando los argumentos que de forma natural surgían en algunos estudiantes en los ciclos exploratorios, hemos dotado a los alumnos de argumentos para poder distinguir e interpretar este tipo de situaciones como han demostrado los resultados en los últimos ciclos de investigación-acción de 2º de ESO.

X.1.1.3. Rediseño de la propuesta de enseñanza del porcentaje

Hemos mencionado anteriormente que una de las medidas para cambiar el diseño de la propuesta en torno al porcentaje ha consistido en separarlo de las sesiones correspondientes a la proporcionalidad simple directa. Así mismo, el número de sesiones que se le han dedicado también se ha incrementado. Además del incremento inicial de las sesiones dedicadas en la propuesta de Oller-Marcén (2012) hay que considerar que durante la experimentación también este foco ha visto aumentado el número de sesiones que se le han dedicado. Tras la saturación de los ciclos de investigación-acción, la propuesta consta de tres sesiones en 1º de ESO donde se trabajan esencialmente contextos parte-parte-todo y de cuatro sesiones en 2º de ESO donde se retoman estas estructuras y se trabajan de forma específica los contextos de aumentos y disminuciones porcentuales.

La propuesta inicial hecha en esta memoria para trabajar el porcentaje, más pegada a la realizada por Oller-Marcén (2012), se ha modificado significativamente en el transcurso de la investigación-acción, especialmente en el tercer ciclo de 1º de ESO y en el segundo ciclo de 2º de ESO. De forma similar a la descrita por Lembke y Reys (1994), se detectó que los alumnos mostraban poca versatilidad a la hora de abordar los problemas de porcentajes, posiblemente debido a la instrucción previa recibida. Esta instrucción parecía estar fuertemente basada en una concepción del porcentaje como operador y en una identificación de la preposición 'de' con la multiplicación, lo que suponía un importante foco de dificultad a la hora de construir nuevos significados y ampliar el rango de acción de sus estrategias (Parker & Leinhardt, 1995). La idea fuerza de nuestra propuesta es devolver al porcentaje su carácter de razón entre dos magnitudes. El diseño final propuesto tiene cinco fases de actuación principales:

- En un primer momento se trabaja exclusivamente la interpretación del porcentaje como relación entre dos cantidades de magnitud. Como indican Parker y Leinhardt (1995, p. 473) "el carácter de relación entre cantidades [del porcentaje] está normalmente escondido tras la comprimida notación". Se trata de "descomprimir" el significado de la expresión "$p\,\%$" para poner de manifiesto las dos cantidades relacionadas involucradas en dicha expresión y las magnitudes a las que se refieren. Así, entre otras cuestiones, hacemos explícita la magnitud referente del porcentaje que se usa para normalizar a 100 unidades.
- En un segundo momento se trabaja la conexión entre porcentaje y razón unitaria. No se trata de identificar el porcentaje $p\,\%$ con una única razón (valor), es decir, con $p/100$. Al interpretarse el porcentaje como una situación de proporcionalidad en la que se presentan dos cantidades referidas a dos magnitudes diferentes se pone el énfasis en calcular las razones externas (una inversa de la otra) que se pueden establecer. Además, en las primeras situaciones se presentan contextos parte-todo en los que también tiene sentido calcular las dos razones externas que involucran el total y la parte complementaria, o las razones externas formadas por dos partes. En este sentido se trabajan situaciones en las que a partir de la interpretación de una razón externa se pide establecer su valor y las situaciones inversas en donde a partir de un valor numérico se solicita la interpretación de dicho valor como razón unitaria.
- En este primer acercamiento, aparecen de forma natural en las situaciones parte-todo los problemas en los que dadas dos cantidades "absolutas" que representan una parte y un todo hay que calcular el porcentaje que la parte representa respecto del todo (problemas de valor perdido, Tipo II, según la notación usada por Dole (2000). Para ello tomamos como primer paso el cálculo y la interpretación de la razón parte-todo para posteriormente normalizar a 100. Esto supone una diferencia con la instrucción tradicional fuertemente basada en un significado de operador del porcentaje entendido como el número (o razón) $p/100$ (Parker & Leinhardt, 1995). Este significado procedimental del porcentaje está relacionado con los problemas de valor perdido de Tipo I (Dole, 2000), es decir, aquellos en los que hay que calcular un porcentaje de un total.
- En una cuarta fase se resuelven de forma estructurada problemas de valor perdido de Tipo I y de Tipo III (Dole, 2000). Es decir, problemas en los que los datos proporcionan un porcentaje y, o bien una parte o bien la cantidad total. En los primeros problemas proponemos

estructurar el camino hacia la solución mediante dos preguntas intermedias. En la primera de ellas se pide al estudiante interpretar el porcentaje como dos cantidades diferentes relacionadas y en la segunda se le pide que calcule e interprete las dos razones (una inversa de la otra) que se pueden calcular entre el numeral y el 100.

- En una quinta fase los problemas de valor perdido relacionados con el porcentaje se proponen sin preguntas intermedias.

En la sección X.2 resumiremos las conclusiones obtenidas durante este trabajo, y que apuntan hacia una mejora en la comprensión del concepto de porcentaje tras una ruptura con los obstáculos didácticos provocados por la instrucción previa que han recibido los estudiantes.

Las fases anteriores, además de ser la base para elaborar la secuencia de aprendizaje para el porcentaje en los primeros cursos de secundaria, pueden servir de guía para abordar la enseñanza del porcentaje en los últimos cursos de Educación Primaria. De esta forma, sería conveniente que en dichos cursos la enseñanza no se ciñera a presentar el porcentaje como una representación adicional del número racional, ligada a un significado de operador que permite resolver problemas de Tipo I (Burgos & Godino, 2019b).

X.1.2. Diseño de una propuesta completa para 1º y 2º de ESO

Además de modificar y redefinir el tratamiento de algunos elementos de la proporcionalidad aritmética experimentados con anterioridad a través del diseño de la propuesta para 1º de ESO de la tesis doctoral de Oller-Marcén (2012), en este trabajo hemos diseñado una propuesta completa, que cubre los cursos 1º y 2º de ESO. En concreto, nuestro trabajo presenta el diseño y la implementación de una propuesta de enseñanza novedosa para la proporcionalidad compuesta y para los repartos proporcionales.

Los contenidos relativos a la proporcionalidad compuesta no aparecen explícitamente en las normas curriculares (ver sección II.2.5.1). Sin embargo, la proporcionalidad compuesta está relacionada con una de las estructuras multiplicativas señaladas por Vergnaud (1983) y ha recibido históricamente atención en textos didácticos (Guacaneme, 2002; Oller-Marcén, 2012). Sin embargo, un análisis de los libros de texto actuales detecta deficiencias e incoherencias en su tratamiento habitual (Martínez-Juste *et al*., 2015, 2015b, 2017). Además, su presencia en nuestro diseño puede justificarse también por sus numerosas aplicaciones prácticas: producción o consumo en un marco de trabajo cooperativo, costes económicos o temporales de una actividad, situaciones involucrando magnitudes de la Física y situaciones económicas que involucran interés simple (Martínez-Juste *et al*., 2015b).

La reforma curricular promovida por los cambios que introdujo LOMCE en ley educativa española afirmaba que los estudiantes de entre 13 y 14 años debían ser competentes en “resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales” (ver sección II.2.5.1). Además de esta prescripción curricular existen diferentes razones relacionadas con cuestiones históricas y con la práctica educativa habitual por las que es interesante introducir este tipo de problemas y revisar el tratamiento que tradicionalmente reciben. Por ejemplo, desde un punto de vista histórico, los problemas de repartos proporcionales aparecen en algunos de los textos de contenido matemático que se conservan, como el problema nº 68 del Papiro de Rhind (datado hacia el siglo XVII a.n.e.) que dice lo siguiente: "*Supongamos que un escriba te dice: cuatro capataces, cuyas cuadrillas consisten en 12, 8, 6 y 4 hombres respectivamente, han ganado 100 gran hekat cuádruples de grano. ¿Cuánto grano debe recibir cada capataz?*" (Chace, 1979, p. 104). Por otro lado, los libros de texto actuales incluyen este tipo de problemas, generalmente en 2º de ESO, pero se detectan algunas deficiencias en su tratamiento como el abuso de técnicas algebrizadas que se presentan para resolver específicamente cada tipo de problema sin prestar atención al significado de las operaciones que se realizan (Martínez-Juste *et al*., 2018, 2019a). Este tipo de problemas en el tratamiento de los repartos directamente proporcionales también se ha detectado en otro tipo de materiales como los vídeos educativos en línea (Beltrán-Pellicer *et al.*, 2021; Beltrán-Pellicer & Giacomone, 2021b; Beltrán-Pellicer *et al*., 2018).

X.1.2.1. Diseño de una propuesta de enseñanza para la proporcionalidad compuesta

El tratamiento tradicional de la proporcionalidad compuesta suele basarse en procedimientos artificiosos y muy dependientes del tipo de estructura funcional subyacente (Martínez-Juste *et al*., 2014, 2015b, 2017). Frente a esta situación, proponemos un tratamiento cercano a la proporcionalidad simple y basado de forma exclusiva en operaciones binarias entre magnitudes.

Así, la idea principal para abordar estas situaciones es considerar la relación existente entre una magnitud y cada una de las otras magnitudes involucradas (cuando el resto permanecen constantes) y trabajar con la operación binaria asociada a la estructura multiplicativa simple correspondiente (isomorfismo de medidas o producto de medidas).

En las situaciones de proporcionalidad compuesta entre tres o más magnitudes siempre es posible aplicar técnicas para la proporcionalidad simple detectando las relaciones que unen cada pareja de magnitudes. Una posibilidad es "amalgamar" todas las magnitudes menos una, creando una nueva magnitud mediante cocientes y productos de magnitudes, de forma que podamos traducir la situación de proporcionalidad compuesta a una de proporcionalidad simple directa o inversa.

Además, como en el caso de la proporcionalidad simple directa e inversa, hemos ampliado la tipología de problemas de proporcionalidad compuesta que tradicionalmente se presentan a los estudiantes, trabajando no solo problemas de valor perdido, sino también de comparación cuantitativa y cualitativa. Todos los problemas introducidos tienen un contexto realista (Díaz & Poblete, 2001). Además, los datos y la constante de proporcionalidad suelen ser enteras para favorecer el trabajo entre las diferentes magnitudes y la interpretación de las cantidades obtenidas a partir de las relaciones multiplicativas como cantidades de una nueva magnitud.

En el marco teórico de esta tesis desarrollado en el Capítulo II, se han realizado algunas aportaciones originales al estudio y análisis de los problemas de proporcionalidad compuesta. Se extiende la tipología de problemas de Cramer y Post (1993) para proporcionalidad simple directa, se hace un análisis detallado de las estructuras multiplicativas con tres o más magnitudes que extienden de forma explícita los isomorfismos y productos de medidas, se adaptan y extienden las técnicas de resolución de los problemas simples a este tipo de problemas y, por último, se expone un análisis exploratorio de las resoluciones de los alumnos ante este tipo de problemas.

Una de las características novedosas del tratamiento de la proporcionalidad compuesta en nuestra propuesta consiste en la introducción de este tipo de problemas en 1º de ESO, cuando habitualmente en los libros de texto se trabajan en 2º de ESO. Además, los aspectos conceptuales asociados a la proporcionalidad compuesta no siempre están presentes o no se relacionan adecuadamente con los asociados a la proporcionalidad simple (Martínez-Juste *et al*., 2014, 2015b). Nuestra propuesta evita esto último, permitiendo un tratamiento integrado y conjunto de la proporcionalidad (Levain & Vergnaud, 1995). Además, el trabajo con los problemas de proporcionalidad compuesta de carácter más abierto y que proporcionan una mayor demanda cognitiva es interesante para profundizar en la comprensión de las relaciones multiplicativas entre magnitudes y en el significado de las operaciones que se realizan entre ellas. Sirve también para preparar la posterior interpretación de la constante de proporcionalidad en relaciones simples inversas en las que intervienen dos magnitudes extensivas.

La propuesta se articula a través de tres sesiones específicas de clase, una en 1º de ESO y dos en 2º de ESO. Los conocimientos que los alumnos han adquirido previamente sobre proporcionalidad simple y el tratamiento integrado de todos los tipos de problemas y las diferentes estructuras multiplicativas permiten desarrollar la secuencia en relativamente poco tiempo, obtienen unos buenos resultados en la comprensión de los alumnos como veremos en la sección siguiente. Este tratamiento integrado para los diferentes problemas de proporcionalidad compuesta difiere del tratamiento específico a cada estructura y posición de la incógnita que la mayoría de los libros de texto dan a los problemas de valor perdido en situaciones compuestas (Martínez-Juste *et al*., 2014, 2015b, 2017).

X.1.2.2. Diseño de una propuesta de enseñanza para los repartos proporcionales

Otra de las aportaciones de la presente tesis doctoral para la enseñanza de la proporcionalidad es el diseño de una secuencia de aprendizaje para los repartos proporcionales, directos e inversos.

Para este tipo de problemas nos basamos en la idea de que en una situación de reparto proporcional se produce la comparación multiplicativa entre dos situaciones. En la primera situación cada individuo que participa en el reparto posee una cantidad de una cierta magnitud (pesos). En la segunda situación se dispone de una cantidad de otra magnitud que se quiere repartir entre los individuos que participan en el reparto. La cantidad que se reparte a cada individuo debe responder a una comparación multiplicativa constante con las cantidades según las que se ha realizado el reparto.

Para abordar este tipo de problemas se reserva una única sesión de clase la cual ha resultado suficiente para la adquisición de las estrategias básicas de resolución en este tipo de problemas, sobre todo los de relación directa. Tras los cambios introducidos a través del desarrollo de los ciclos de investigación-acción también se han llegado a diseñar problemas de repartos inversamente proporcionales satisfactorios, ya que no incluyen ninguna referencia a cómo debe hacerse el reparto en el enunciado y promueven la aparición de resoluciones proporcionales en los estudiantes aun no habiendo recibido instrucción específica, y que pueden suponer la base para un desarrollo de las técnicas de resolución.

Nuestra propuesta de enseñanza para los repartos directos comienza con “el problema de la lotería” (Sánchez, 2013, 2014). El contexto de reparto de un premio entre diferentes personas que han participado de forma desigual en la compra del billete ha resultado cercano a los alumnos y permite desarrollar casi sin institucionalización estrategias de resolución de este tipo de repartos. Nuestra propuesta de resolución se basa en las estrategias adquiridas para la proporcionalidad simple, centrándonos en las razones parte-todo que deben coincidir para las cantidades invertidas inicialmente y para las cantidades relativas a la cantidad a repartir.

La propuesta inicial para abordar los problemas de repartos inversamente proporcionales cambió debido a los discretos resultados obtenidos en el ciclo exploratorio de investigación-acción en 2º de ESO. En dicho ciclo se observó que la situación introductoria de repartos inversamente proporcionales basada en el reparto de una cierta cantidad de dinero no promovía el uso de un modelo proporcional. La única producción en el que se detectó un modelo proporcional utilizaba una estrategia difícilmente exportable a una situación más compleja y no asignaba significado a la constante de proporcionalidad del problema, ni a las operaciones que se realizaban. Como indican diferentes estudios (Antequera & Espinel, 2011; Peled & Balacheff, 2011; Peled & Bassan-Cincinatus, 2005; Sánchez, 2013, 2014), en problemas planteados en un contexto de reparto de una cantidad de dinero intervienen factores del entorno social y cultural de los alumnos que generan diferentes modelos de reparto no necesariamente proporcionales. Además, como ocurre con la proporcionalidad compuesta, la capacidad para trabajar con diferentes tipos de magnitudes e interpretar las operaciones entre cantidades de magnitud en términos de la cantidad de una nueva magnitud son determinantes para el éxito de los estudiantes. Por ello, en el problema propuesto inicialmente, la presencia de magnitudes homogéneas y extensivas no favorecía la interpretación de la constante de proporcionalidad en el contexto de reparto monetario.

Las consideraciones anteriores delimitaron las características deseables de las magnitudes que debían tenerse en cuenta para elaborar un contexto realista del que surgieran de forma natural estrategias de resolución. A saber, que las magnitudes fueran heterogéneas y que una de ellas fuera intensiva, para promover la interpretación de los inversos de los pesos, necesaria para dar significado a la constante de proporcionalidad.

Conjuntamente con la delimitación de estas características, la revisión de los contextos en los que históricamente han surgido problemas de proporcionalidad aritmética (Oller-Marcén & Gairín, 2016) permitió encontrar un problema con las características deseables (Shen *et al*., 1999) a partir del cual se diseñó la situación introductoria y otros problemas de refuerzo. En las situaciones elaboradas, la magnitud a repartir es el tiempo y la magnitud según la que se reparte da cuenta de la velocidad a la que se elaboran ciertas partes de un producto. De esta forma los inversos de las velocidades admiten una interpretación sencilla dentro del contexto, se pueden sumar y es fácil interpretar la razón entre una cantidad de tiempo y el inverso de una velocidad. Como señala Chorlay (2011, p. 64) "una perspectiva histórica puede ayudar en la toma de decisiones didácticas". En nuestro caso, ha permitido determinar un contexto en el que la aplicación de un modelo de reparto inversamente proporcional surge de forma natural.

Además de todo lo anterior, para el diseño y análisis de los métodos de resolución de los problemas de repartos proporcionales, se han realizado algunas aportaciones teóricas originales en el marco teórico de este trabajo y que ya hemos presentado en el Capítulo II. Una revisión de la literatura sobre actuaciones de alumnos ante situaciones de reparto lleva a una clasificación de los modelos en tres bloques: modelos de reparto equitativo, modelos proporcionales y modelos de compensación aditiva (Antequera & Espinel, 2011; Peled & Balacheff, 2011; Sánchez, 2013). En nuestro trabajo hemos adaptado dicha clasificación a los problemas susceptibles de ser resueltos mediante un reparto inverso. Además, también se ha descrito la adaptación de algunas de las técnicas de resolución habituales para repartos directamente proporcionales (Gómez, 1999; Sánchez, 2013).

X.2. Conclusiones relativas al segundo objetivo

En esta sección presentamos las conclusiones de la investigación en torno al segundo objetivo principal de investigación.

Objetivo II: Explorar las potencialidades y limitaciones de la propuesta didáctica cuando se implementa con grupos naturales de primero y segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria.

Las siguientes subsecciones se corresponden con los objetivos parciales en los que descompusimos este objetivo principal en la sección I.3 (Capítulo I).

X.2.1. Adecuación de la propuesta a la secuenciación y temporalización

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto educativo del centro de secundaria donde se experimentó y de la programación didáctica del departamento de matemáticas de dicho centro. Por tanto, la investigación-acción realizada debía tener un carácter realista en cuanto a la secuenciación de contenidos y la duración de la implementación de la secuencia didáctica, sin perjuicio del carácter de innovación curricular con el que se pretende mejorar la práctica (de la enseñanza de la proporcionalidad aritmética). Por tanto, nuestra propuesta cubre (y amplía) los contenidos que se recogen en los documentos oficiales curriculares y del centro de enseñanza y los desarrolla en el tiempo que se reservaba para ellos en la programación del departamento (entre tres semanas y tres semanas y media). Este carácter realista se ve reforzado por los hechos de que el profesor-investigador desarrollaba su actividad profesional en dicho centro y de que se haya experimentado sobre grupos naturales de alumnos. Aunque algunas investigaciones detectan reticencias entre los profesores a realizar innovaciones porque pueden entrar en conflicto con las prescripciones normativas (Henry, 1999) nuestra investigación supone un ejemplo de integración de la innovación curricular en la práctica educativa real de un centro de secundaria.

Además de la adecuación a la temporalización habitual, los cambios en la secuenciación de los contenidos, como posponer la proporcionalidad simple inversa al segundo curso o adelantar algunos elementos de la proporcionalidad compuesta al primero, han sido exitosos en términos cognitivos como veremos en las siguientes secciones.

Estas características de la investigación integrada en la práctica real de un centro de secundaria facilitan que la propuesta sea replicable posteriormente. De hecho, como desarrollaremos en la sección X.4.2 dedicada a la transferencia, la propuesta se ha llevado a cabo por el mismo profesor-investigador en otro centro de enseñanza durante cuatro cursos. También se ha formado a otros profesores para que pudieran implantarla y se ha observado la implementación que alguno de estos profesores ha realizado (Martínez-Juste, 2019; Martínez-Juste & Domenech, 2019). Lo anterior, junto con los instrumentos de investigación utilizados con los que hemos proporcionado suficiente información para distinguir los hechos objetivables de las interpretaciones personales del profesor-investigador, da cuenta de la fiabilidad de la investigación.

Hemos podido comprobar que los materiales diseñados para la propuesta se han ajustado a la planificación *a priori* de manera adecuada desde los primeros ciclos. Los ajustes que se han llevado a cabo no han provocado cambios sustantivos en la propuesta didáctica. Esta es una posible consecuencia de que el diseño, con el apoyo del equipo de investigación, haya sido elaborado por un profesor en activo con una cierta experiencia docente (unos siete años al comienzo de la experimentación). Esta característica del paradigma de investigación-acción junto con su carácter cíclico han sido clave para ajustar la secuenciación y temporalización de los contenidos y proponer un diseño realista. En palabras de Elliot (2005, p.88) "en la investigación-acción las teorías no se validan de forma independiente para aplicarlas luego a la práctica, sino a través de la práctica".

La potencialidad del paradigma de investigación-acción para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje (Romera, 2012) no se circunscribe en nuestro trabajo únicamente a la adecuación de la secuenciación y temporalización, sino que ha jugado un papel determinante en el diseño, la adecuación de las situaciones introductorias, la búsqueda de contextos realistas, la graduación de la dificultad de las actividades, la propuesta de estructuras numéricas adecuadas, etc. Además, el diseño experimental de esta tesis presenta una innovación metodológica dentro del paradigma de investigación-acción, ya que se realizan de forma paralela dos espirales de investigación-acción: una para la propuesta de 1º de ESO y otra para la propuesta de 2º de ESO. Dichas espirales no se desarrollan de forma independiente, sino que las fases de reflexión de los ciclos intermedios de 1º de ESO repercuten en las fases de planificación de los ciclos intermedios de 2º de ESO, como se explicó en el Capítulo III alrededor de la Figura III -3. Esta característica ha permitido tomar decisiones al finalizar los ciclos de investigación-acción no solo de forma transversal, es decir que afecten a posteriores implementaciones en el mismo curso, sino que también las observaciones realizadas en un ciclo de un curso afectaban en la planificación de un ciclo correspondiente al otro curso.

X.2.2. Viabilidad de la propuesta en términos cognitivos

En esta sección, recogemos las principales conclusiones obtenidas sobre el aprendizaje de los estudiantes tanto a lo largo de la propuesta, como al finalizar la misma, y que se han ido exponiendo en las fases de observación y reflexión de los diferentes ciclos de investigación-acción realizados. Nos centraremos en primer lugar en el desempeño de los alumnos de los grupos experimentales y en segundo lugar resumiremos las comparativas con los alumnos de los grupos de control.

X.2.2.1. Desempeño del alumnado de los grupos experimentales

Estructuramos las conclusiones relativas al desempeño de los estudiantes de los grupos experimentales a través de los seis focos de contenido descritos en el Capítulo IV.

Foco 1. Detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad.

La propuesta consigue que los alumnos identifiquen mayoritariamente la existencia de dos razones externas (inversas la una respecto de la otra) en las situaciones de proporcionalidad simple directa. Además, aunque con un mayor número de errores, los alumnos son capaces de interpretar dichas razones externas como tanto por uno. Este hecho permite a los alumnos del grupo experimental detectar relaciones de proporcionalidad directa bajo la suposición de condiciones de regularidad con una muy buena tasa de éxito. Además, parece ser una pieza fundamental para abordar con éxito y poca instrucción el resto de los problemas de la propuesta contenidos en los demás focos de interés.

Los alumnos también han mostrado un buen desempeño detectando números que no representan una cantidad de magnitud (Puig & Cerdán, 1988, p.57) y con los que, por tanto, no puede establecerse una razón, y evaluando previamente la covariación entre las magnitudes como condición necesaria para que puedan establecerse las razones.

En los ciclos de 2º de ESO hemos observado que los estudiantes mejoran sustancialmente en la comprensión de las relaciones de proporcionalidad simple directa, detectándolas con facilidad, pudiendo calcular e interpretar correctamente las razones asociadas y argumentando sus producciones a partir de condiciones de regularidad detectadas en las diferentes situaciones. A pesar de esta mejora respecto a la propuesta en 1º de ESO, se constatan ciertas dificultades para interpretar y calcular las razones en situaciones que involucran magnitudes homogéneas (Cramer & Post, 1993; Fernández, 2009; Lamon 1993a; Steinthorsdottir, 2006; Tourniaire & Pulos, 1985; Vergnaud, 1983).

En la línea de Arican (2019b) o Monteiro (2003), los alumnos presentan mayores dificultades identificando las relaciones de proporcionalidad inversa, que solo se mitigan parcialmente con el desarrollo de la propuesta. Las principales dificultades se centran en aquellas situaciones en las que los alumnos necesitan dar significado al producto de magnitudes extensivas (Freudenthal, 1983) para poder interpretar la constante de proporcionalidad. Al igual que en las relaciones directas, los alumnos se basan en el control semántico de las situaciones para argumentar y la presencia de argumentos erróneos de carácter cualitativo basados en detectar aumentos y disminuciones es muy escasa ("a más… menos…").

En cuanto a la detección de relaciones no proporcionales, los alumnos presentan mayores dificultades en las situaciones en las que sí existe una dependencia funcional de las magnitudes, mientras que se desenvuelven con bastante éxito detectando como no proporcionales las relaciones sin relación funcional. En concreto, las relaciones afines, y de forma más acusada las decrecientes, han supuesto una mayor dificultad a los alumnos (Fernández *et al*., 2011). En este tipo de relaciones los alumnos detectan condiciones de regularidad asociadas al crecimiento constante que interpretan como de proporcionalidad directa (incluso en las decrecientes).

Foco 2. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa.

Los problemas de comparación cuantitativa tienen, en general, unas altas tasas de acierto. Una mínima institucionalización permite a los alumnos conectar los conocimientos adquiridos sobre razón y condición de regularidad con la resolución de este tipo de problemas. Además, se conecta la interpretación de las razones como tanto por uno con términos de uso cotidiano como el sabor, el espesor, el rendimiento, la velocidad, el coste unitario, el cambio de divisas, … a través de situaciones realistas en las que los alumnos deben decantarse por la "opción más ventajosa". En este sentido, nuestra propuesta promueve la conexión de la proporcionalidad con sus aspectos prácticos promoviendo la finalidad social del aprendizaje de las matemáticas (Rico, 2016).

La baja experiencia o relación de los alumnos con términos asociados a magnitudes intensivas bien compactadas en determinados contextos parece estar detrás de las dificultades mostradas en algunos ejercicios (Bosch, 1994). Este hecho pone de manifiesto el interés de trabajar los problemas de comparación cuantitativa para incrementar los conocimientos de los alumnos no solo en su resolución, sino también en el manejo general de magnitudes.

Los problemas de comparación cualitativa suponen un cierto desconcierto inicial en los alumnos ya que no están acostumbrados a trabajar en problemas sin datos numéricos. Salvados esos momentos de desconcierto inicial, se ha registrado un buen desempeño en la resolución de problemas de comparación cualitativa. Por otro lado, pese a que las argumentaciones en la resolución escrita de estos problemas son, en ocasiones, pobres y no permiten profundizar en los razonamientos que los han llevado a producir la respuesta emitida, las entrevistas semiestructuradas han mostrado que, tras las escuetas respuestas, puede haber una comprensión profunda del fenómeno que se estudia. Además, en la línea de López-Rueda y Figueras (1999), las entrevistas han ejemplificado el potencial de este tipo de problemas para trabajar el razonamiento proporcional, cuando se solicita a los alumnos que generen estructuras numéricas que se adapten a la información suministrada en el problema y que generen diferentes respuestas finales al mismo.

Respecto a los problemas de valor perdido, se ha detectado una mayor influencia de algunas variables de la tarea como la estructura numérica, en la línea de los estudios de Steinthorsdottir (2006), especialmente la aparición de razones externas o internas enteras. También se ha detectado el efecto del tipo de magnitudes, especialmente relevante parece la aparición de magnitudes homogéneas (Cramer & Post, 1993; Fernández, 2009; Lamon 1993a; Steinthorsdottir, 2006; Tourniaire & Pulos, 1985; Vergnaud, 1983), ligadas a estructuras parte-parte-todo (Cramer & Post, 1993; Lamon, 1993a, Tourniaire & Pulos, 1985), tanto en la tasa de éxito, como en la estrategia empleada por los estudiantes para responder al problema. Además, también se ha detectado una cierta influencia externa (Oller-Marcén, 2012), lo que provoca la aparición de métodos algorítmicos basados en la regla de tres, aunque cabe señalar que el empleo de estas estrategias ha sido bajo. A pesar de estas influencias los estudiantes usan de forma mayoritaria las estrategias funcionales y obtienen buenas tasas de éxito a pesar de no utilizar estrategias más algorítmicas.

El trabajo sin calculadora y la preferencia de los alumnos por utilizar la notación decimal del número racional frente al uso de la fracción, hacen que muchos alumnos no alcancen las respuestas numéricas exactas en los problemas de valor perdido, aun en problemas que tienen una solución entera (Lamon, 2012, p.116). A pesar de este inconveniente, parece interesante confrontar dichas respuestas con los alumnos para valorar el uso de una u otra notación al establecer una razón externa. Con el paso de las sesiones, algunos alumnos muestran indicios de mejorar en la elección de notaciones adecuadas en cada problema.

El análisis de las producciones escritas en los problemas de proporcionalidad simple ha permitido establecer cuatro categorías de errores en la implementación de una estrategia funcional, tanto para problemas de comparación cuantitativa como para problemas de valor perdido. El estudio de dichos errores pone de manifiesto la necesidad de profundizar en los significados de las operaciones relacionadas con la estructura multiplicativa, en la comprensión de las diferentes representaciones del número racional y en la interpretación de las razones externas como cantidades de magnitud intensiva, para mejorar el desempeño de los alumnos en este tipo de tareas.

Foco 3. Problemas en situaciones de proporcionalidad simple inversa.

Aunque las tasas de éxito en los problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad simple inversa son aceptables, y similares a las obtenidas en las situaciones directas, se observa que la aparición de dos magnitudes extensivas aporta dificultad (ya que baja la tasa de éxito) a los problemas planteados. Dichas dificultades estaban previstas en la planificación de la propuesta ya que se apuntan en diferentes trabajos de investigación (Bosch, 1994; Freudenthal, 1973; Gairín & Oller-Marcén, 2011; Vergnaud, 1983). Por otra parte, en los problemas de valor perdido y de comparación cualitativa, observamos un fenómeno similar al descrito para las situaciones directas ya que los alumnos parecen ganar competencia en la resolución conforme avanza la secuencia. Sin embargo, en los últimos ciclos de investigación-acción se aprecia que las dificultades que inicialmente encuentran los alumnos para interpretar el producto de magnitudes extensivas se reducen hacia el final de la propuesta. Este hecho puede deberse a la práctica con las operaciones entre magnitudes que los alumnos llevan a cabo en la resolución de problemas de proporcionalidad compuesta.

En general, se detecta una mayor dificultad de los alumnos a la hora de resolver los diferentes tipos de problemas de proporcionalidad inversa respecto a la detectada en las situaciones directas. Esta mayor dificultad viene acompañada de respuestas con menos argumentos o de peor calidad.

Otro indicio de la mayor dificultad es el aumento en el uso de estrategias incorrectas de resolución. Aunque no detectamos estrategias aditivas, aparecen producciones en las que tras suponer una relación directa (en vez de inversa), se resuelve el ejercicio siguiendo una estrategia que sería correcta si, en efecto, el problema fuese de proporcionalidad directa. Es decir, a diferencia de lo que ocurre con las situaciones directas, la mayor dificultad de las situaciones inversas parece residir en su reconocimiento. Una vez reconocida la situación, la tasa de éxito es muy alta ya que no aparecen errores asociados a los números racionales y a la existencia de dos constantes de proporcionalidad como sí ocurre en las relaciones directas.

Aunque el reconocimiento de las relaciones de proporcionalidad inversa puede estar detrás de la menor tasa de éxito en su resolución, cabe destacar el bajo uso de argumentos cualitativos erróneos por aumentos y disminuciones para la caracterización de las relaciones de proporcionalidad inversa (a diferencia de lo que ocurre con los alumnos de los grupos de control, como veremos en la siguiente sección).

En cuanto al uso de estrategias correctas, es destacable que no se han encontrado estrategias algoritmizadas que pudieran indicar una influencia externa como sí ocurre en los problemas en situaciones de proporcionalidad simple directa. Tampoco aparecen de forma natural, ni siquiera en las situaciones introductorias, estrategias que podrían considerarse más intuitivas y que aparecen en la resolución de problemas de proporcionalidad directa como los razonamientos por factor de cambio.

Foco 4. Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta.

Al comienzo de la propuesta, los alumnos abordan las situaciones de proporcionalidad compuesta disponiendo solo de las herramientas propias de la proporcionalidad simple con cierta naturalidad: razón, manipulación de magnitudes, constantes de proporcionalidad. En este sentido, Arican (2018) señala la importancia de desarrollar estrategias que pongan de manifiesto el reconocimiento de las razones externas y las relaciones producto entre magnitudes proporcionales para fomentar el razonamiento proporcional mediante la proporcionalidad compuesta. En base a estas ideas, nuestros estudiantes son capaces de abordar con éxito las tareas propuestas incluso las que suelen ser más complejas, como las de comparación cualitativa (López-Rueda & Figueras, 1999).

Las producciones de los estudiantes en cada tarea son ricas en cuanto a variedad de razonamientos, técnicas y estrategias que se emplean en la resolución. A partir de las primeras producciones, se institucionaliza el método de amalgamación de magnitudes, pero surgen de manera natural otros métodos que también son indicio de un razonamiento proporcional avanzado (Lesh *et al*., 1988).

Se han identificado diferentes estrategias (exitosas y erróneas) de resolución de problemas de comparación cuantitativa en situaciones de proporcionalidad compuesta. Aunque existen trabajos sobre la resolución de problemas de comparación cuantitativa en problemas de proporcionalidad simple directa, no hemos encontrado estudios que aborden las estrategias de resolución dadas por los estudiantes ante este tipo de tareas para situaciones de proporcionalidad compuesta. Aparecen generalizaciones de las estrategias señaladas por Valverde y Castro (2009) basadas, bien en el cálculo de la constante de proporcionalidad, bien en la manipulación de los datos para encontrar razones unitarias; así como estrategias para convertir el problema de comparación en uno de valor perdido y comparar la solución resultante con los datos del enunciado.

Una de las potencialidades de este tipo de situaciones dentro de la propuesta didáctica es que no promueven la aparición de estrategias algebraicas o algorítmicas. En otros focos de interés hemos observado que en unas pocas tareas para casa o en la prueba escrita aparecían métodos de resolución que no aparecían durante las sesiones de clase y cuya sofisticación técnica parecía indicar que eran consecuencia de influencias externas por parte de familiares o profesores particulares. Sin embargo, la mayor complejidad de los problemas con tres o más magnitudes relacionadas de forma proporcional parece impedir que aparezcan estas influencias.

Por otro lado, no hemos encontrado estrategias erróneas de naturaleza aditiva. Estos resultados van en la línea de lo apuntado por Fernández y Llinares (2012) en cuanto a la ausencia de este tipo de respuestas en tareas de proporcionalidad simple de estudiantes de secundaria.

Foco 5. Repartos proporcionales.

Los estudiantes abordan con un éxito elevado los problemas de reparto directamente proporcional ya desde las situaciones introductorias a pesar de no haber recibido ningún tipo de instrucción formal al respecto. Este buen desempeño se mantiene de forma constante incluso en el problema incluido en la prueba escrita final.

Las producciones se decantan de forma espontánea por los modelos de reparto proporcional en estos problemas a pesar de no pedirse explícitamente en el enunciado. A diferencia de lo que sucede en algunos trabajos consultados, no hemos encontrado ejemplos de repartos equitativos en el “Problema de la Lotería”. Esto puede deberse a que el contexto de la Lotería de Navidad es muy familiar para los alumnos que, de este modo, están acostumbrados a este tipo de protocolos sociales (Sánchez, 2014).

Dentro del modelo de reparto proporcional, los alumnos adaptan sus conocimientos sobre problemas de valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa para resolver de forma aritmética estos problemas. Para ello, descomponen la situación en tantos problemas simples como individuos hay en el reparto, resolviéndolos a partir de la estructura parte-todo. Los estudiantes utilizan de forma mayoritaria técnicas de razón externa para resolver estos problemas.

Nuestra investigación ha puesto en relieve la importancia de los contextos de los problemas verbales para hacer emerger significados de determinados conceptos matemáticos y estrategias de resolución (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2005). En el caso de los repartos inversamente proporcionales, los contextos de reparto monetario que buscan compensar una situación inicial y que se plantearon al inicio de la experimentación como situación introductoria no han resultado adecuados. Pocos alumnos se decantan por un reparto proporcional y aparecen modelos de reparto equitativo y de compensación aditiva. El trabajo con este tipo de contextos para introducir los repartos inversamente proporcionales requeriría de mayor tiempo y estructuración, ya que no surgen de manera natural estrategias aprovechables para la institucionalización.

Los cambios introducidos para los problemas de reparto inversamente proporcional produjeron mejoras sustanciales en las respuestas de los estudiantes. En primer lugar, el número de respuestas que utilizan un modelo de reparto inversamente proporcional de forma espontánea es mayoritario. Además, los estudiantes interpretan adecuadamente la constante de proporcionalidad cuyo significado guía hacia el camino para una correcta resolución. En segundo lugar, las respuestas que no usan un modelo de reparto inversamente proporcional no recurren a compensaciones aditivas. Este hecho podría estar influenciado no solo por el contexto del problema sino porque las magnitudes involucradas en el reparto son heterogéneas.

El tipo de magnitudes elegidas parece ser también la clave para la aparición de ideas que podrían desembocar, con un trabajo más amplio, en la formalización de un método aritmético general de resolución. Así, que la magnitud según la cual se reparte sea una magnitud intensiva facilita interpretar correctamente los inversos de los pesos.

Foco 6. Interpretación del porcentaje y problemas asociados.

En comparación con los contenidos relativos al resto de los focos de interés de la propuesta, los problemas en los que aparece el concepto de porcentaje resultan más complicados para los alumnos. Dentro de esta mayor dificultad, los problemas de Tipo III y los de Tipo II en situaciones de aumentos y disminuciones porcentuales parecen causar mayores problemas a los estudiantes que los problemas de Tipo I (calcular la parte conocidos el porcentaje y el total). Estos resultados concuerdan con los obtenidos en otros estudios (Dole *et al*., 1997).

La aparición de estrategias basadas en una fórmula, la influencia de los conocimientos previos y de las intervenciones externas, tienen una presencia mucho más marcada en los problemas en contextos de porcentajes en la propuesta de 1º de la ESO de lo que la tienen en otros focos de contenido. Las dificultades conceptuales que parece causarles la propuesta didáctica hacen que los estudiantes se refugien en los conocimientos previos o en la ayuda externa.

El efecto de las variables de la tarea asociadas al tipo de magnitud (Tourniaire & Pulos, 1985) y la estructura parte-parte-todo (Lamon, 2012) también ha sido mucho más acusado en los problemas relacionados con porcentajes. En concreto, se observa un mal desempeño de los estudiantes en las razones parte-parte en contextos de porcentajes. Estas dificultades que presentan los alumnos españoles en la comprensión de las razones que relacionan dos partes de un todo, en un contexto más general, se ha puesto también de manifiesto en un trabajo en progreso en el que participa el autor de esta memoria (Martínez-Juste, Arican, Muñoz-Escolano, & Oller-Marcén, 2021a, 2021b).

La introducción de una mayor estructuración en la secuencia y un mayor énfasis en la interpretación de las razones externas asociadas a un contexto de porcentaje provoca que los alumnos de 1º de ESO comiencen a romper con los conocimientos previos algorítmicos. Sin embargo, estos alumnos de 1º de ESO obtienen tasas de éxito bajas en los problemas cuando desaparece esa estructura de los problemas.

Con los cambios introducidos a partir del ciclo de confirmación de 2º de ESO, los estudiantes parecen superar el obstáculo que en 1º de ESO suponen los conocimientos previos respecto al porcentaje basados en métodos de cálculo algoritmizados a partir de una interpretación del porcentaje con significado de operador. Aumentan de forma muy significativa las interpretaciones del porcentaje en términos de razones externas y, a partir de esa interpretación, las estrategias funcionales de resolución en problemas de valor perdido. Se constatan mejoras en la comprensión en términos longitudinales en la cantidad de respuestas correctas y en la calidad argumentativa de las mismas.

X.2.2.2. Comparación entre los grupos experimentales y los grupos de control

A lo largo de la memoria hemos realizado comparaciones entre los grupos experimentales y el grupo de control tanto a nivel de categorías generales (en términos de éxito en la resolución) como a nivel de categorías específicas (en términos de la estrategia de resolución empleada por los alumnos).

En el nivel general, hemos constatado diferencias significativas en diversos focos de contenido a lo largo de la experimentación siempre a favor de los grupos experimentales. Para dar una panorámica general de la comparación cuantitativa en términos de éxito, hemos acumulado para esta sección las frecuencias de éxito en los diferentes ítems de todos los grupos experimentales y de todos los grupos de control que han intervenido, tanto en 1º de ESO como en 2º de ESO. Dichos resultados pueden observarse en la Tabla X - 2 (1º de ESO) y en la Tabla X - 3 (2º de ESO). Recordamos que para crear las variables dicotómicas agrupamos por un lado las respuestas correctas (columna C) y por otro todas las respuestas (columna N+B+I) que incluyen las respuestas no entregadas por el estudiante (N), las entregadas en blanco (B) y las respuestas desarrolladas de forma incorrecta (I).

En 1º de ESO los alumnos de los grupos experimentales obtienen mejores resultados en quince de los diecisiete ítems. Además, un test exacto de Fisher arroja diferencias significativas al 95 % a favor de los grupos experimentales en ocho ítems y ninguna a favor de los grupos de control. Estas diferencias significativas corresponden a ítems que evalúan aspectos de los cuatro focos de interés que se trabajan en 1º de ESO (focos 1, 2, 4 y 6). Recordar que PE.1.1 y PE.1.4 se corresponden con ítems que evalúan la detección y caracterización de relaciones de proporcionalidad, PE.2.1 es un problema de comparación cualitativa, PE.3 es un problema de comparación cuantitativa, PE.5 es un problema de valor perdido de proporcionalidad compuesta, PE.6 es un falso problema de proporcionalidad, y PE.7.3 y PE.7.4 evalúan la conexión del porcentaje con el concepto de razón externa.

Los alumnos del grupo de control solo obtienen mejores resultados (aunque no significativamente diferentes) que el grupo experimental en el ítem PE.1.3 en donde hay que reconocer una relación de proporcionalidad inversa y en el ítem PE.8.1 (problema de valor perdido en un contexto de porcentaje de Tipo I).

En 2º de ESO los alumnos de los grupos experimentales obtienen mejores resultados en trece de los quince ítems. Estos mejores resultados son estadísticamente significativos en cinco de estos ítems (PE.3, problemas de comparación cuantitativa en una situación inversa; PE.6, falso problema de proporcionalidad; PE.7, problema de comparación cuantitativa en una situación compuesta; PE.8, repartos proporcionales) que corresponden a los focos de interés 1, 3, 4 y 5.

		N+B+I	C	p-valor
PE.1.1	GE	11,4 %	88,6 %	0,0000
	GC	47,4 %	52,6 %	
PE.1.2	GE	34,1 %	65,9 %	0,0559
	GC	52,7 %	47,4 %	
PE.1.3	GE	63,4 %	36,6 %	0,5696
	GC	57,9 %	42,1 %	
PE.1.4	GE	17,9 %	82,1 %	0,0000
	GC	60,5 %	39,5 %	
PE.2.1	GE	34,2 %	65,8 %	0,0007
	GC	65,8 %	34,2 %	
PE.2.2	GE	57,7 %	42,3 %	0,0883
	GC	73,7 %	26,3 %	
PE.2.3	GE	66,7 %	33,3 %	0,3185
	GC	76,3 %	23,7 %	
PE.3	GE	49,6 %	50,4 %	0,0047
	GC	76,3 %	23,7 %	
PE.4	GE	43,1 %	56,9 %	0,4625
	GC	50,0 %	50,0 %	
PE.5	GE	45,5 %	54,5 %	0,0160
	GC	68,4 %	31,6 %	
PE.6	GE	36,6 %	63,4 %	0,0000
	GC	97,3 %	2,7 %	
PE.7.1	GE	65,0 %	35,0 %	0,5590
	GC	71,1 %	28,9 %	
PE.7.2	GE	61,0 %	39,0 %	0,4480
	GC	68,4 %	31,6 %	
PE.7.3	GE	44,7 %	55,3 %	0,0001
	GC	81,6 %	18,4 %	
PE.7.4	GE	45,5 %	54,5 %	0,0000
	GC	84,2 %	15,8 %	
PE.8.1	GE	52,8 %	47,2 %	0,0626
	GC	34,2 %	65,8 %	
PE.8.2	GE	90,2 %	9,8 %	0,0705
	GC	100 %	0 %	

Tabla X - 2. Comparativa del grado de éxito entre el total de grupos experimentales (N=123) y el total de grupos de control (N=38) en 1º de ESO.

		N+B+I	C	p-valor
PE.1.1	**GE**	60,3 %	39,7 %	0,0747
	GC	79,5 %	20,5 %	
PE.1.2	**GE**	24,1 %	75,9 %	0,8132
	GC	28,2 %	71,8 %	
PE.1.3	**GE**	27,6 %	72,4 %	0,3350
	GC	18,0 %	82,0 %	
PE.1.4	**GE**	20,7 %	79,3 %	0,2362
	GC	33,3 %	66,7 %	
PE.2.1	**GE**	37,9 %	62,1 %	0,5285
	GC	46,2 %	53,8 %	
PE.2.2	**GE**	44,8 %	55,2 %	1
	GC	46,2 %	53,8 %	
PE.2.3	**GE**	70,7 %	29,3 %	0,0009
	GC	97,4 %	2,6 %	
PE.3	**GE**	44,8 %	55,2 %	0,0063
	GC	74,4 %	25,6 %	
PE.4	**GE**	50,0 %	50,0 %	0,4133
	GC	41,0 %	59,0 %	
PE.5	**GE**	36,2 %	63,8 %	0,8333
	GC	38,5 %	61,5 %	
PE.6	**GE**	17,2 %	82,8 %	0,0000
	GC	64,1 %	35,9 %	
PE.7	**GE**	39,7 %	60,3 %	0,0068
	GC	69,2 %	30,8 %	
PE.8	**GE**	29,3 %	70,7 %	0,0009
	GC	64,1 %	35,9 %	
PE.9.1	**GE**	31,0 %	69,0 %	0,5147
	GC	38,5 %	61,5 %	
PE.9.2	**GE**	55,2 %	44,8 %	0,0857
	GC	74,4 %	25,6 %	

Tabla X - 3. Comparativa del grado de éxito entre el total de grupos experimentales (N=58) y el total de grupos de control (N=39) en 2º de ESO.

De nuevo, aparecen ítems relacionados con la proporcionalidad inversa (PE.1.3 y PE.4) en donde los alumnos del grupo de control obtienen unos mejores resultados (no estadísticamente significativos). Sin embargo, como hemos destacado a través del análisis de las estrategias empleadas este mayor éxito en algunas tareas de proporcionalidad inversa en los grupos de control se debe al uso generalizado de argumentos erróneos por aumentos y disminuciones ("a más … menos …") para caracterizar las relaciones inversas. Como hemos dicho anteriormente, el éxito en los problemas de proporcionalidad inversa está fuertemente ligado a la posibilidad de detectar la relación inversa entre las magnitudes. Este tipo de argumentos erróneos son una herramienta cómoda para detectar relaciones de proporcionalidad inversa cuando solo se consideran relaciones directas e inversas en los problemas. Sin embargo, provocan un aprendizaje pobre del fenómeno y mayores tasas de fracaso cuando se introducen relaciones afines como el ítem PE.1.1 en la prueba de 2º de ESO, o problemas en los que no puede suponerse una relación de proporcionalidad, como el problema PE.6 en donde el grupo de control tiene unos resultados significativamente peores que el grupo experimental.

En los problemas de comparación, tanto en estructuras simples como en estructuras compuestas, se observan unos resultados significativamente mejores en los grupos experimentales. Este hecho podría justificarse por la previsible falta de instrucción de los alumnos de los grupos de control en este tipo de problemas. Sin embargo, los alumnos de los grupos experimentales muestran unas altas tasas de éxito desde el principio de la propuesta.

Se ha constatado, además, que la instrucción recibida por los alumnos de los grupos de control para problemas de valor perdido se centra bien en la regla de tres, bien en el método de proporciones que se aplica de forma acrítica y muy algoritmizada. Sin embargo, a pesar de la menor dificultad conceptual de aplicación de estas estrategias y del previsible mayor énfasis en la instrucción que han recibido en la resolución de problemas de valor perdido, los alumnos del grupo de control no obtienen mejores resultados ni en la situación simple directa (PE.4 en 1º de ESO), ni en la compuesta (PE.5 en 1º y 2º de ESO).

Por último, los alumnos del grupo de control no muestran versatilidad para aplicar los conocimientos sobre proporcionalidad simple en determinadas situaciones como los problemas de Tipo III, en donde los alumnos del grupo experimental obtienen mejores resultados tanto en 1º de ESO (PE.8.2), como en 2º de ESO (PE.9.2), aunque solo con un nivel de significatividad del 90 %.

X.2.3. Viabilidad de la metodología de aula

Para nuestra propuesta de enseñanza hemos seguido una metodología de aula con un enfoque a través de la resolución de problemas (Beltrán-Pellicer & Martínez-Juste, 2021a, 2021b; Bingolbali & Bingolbali, 2019; Gaulin, 2001). Este enfoque metodológico se aparta de la instrucción directa y sigue una secuencia de enseñanza que comienza proponiendo a los escolares la resolución de problemas para los que no han tenido instrucción previa con la intención de hacer emerger los contenidos matemáticos deseados (Cai, 2003; Cai & Lester, 2010). Así, los problemas deben promover la reflexión y la indagación hacia la búsqueda de estrategias que permitan resolverlos. Posteriormente, el profesor utiliza las respuestas de los alumnos para organizar una puesta en común que permita introducir los nuevos conceptos. Por último, los alumnos resuelven problemas para afianzar los nuevos contenidos.

Por tanto, este enfoque de enseñanza no excluye otros elementos del aprendizaje relacionados con la resolución de problemas como la enseñanza de heurísticos o la aplicación de los contenidos aprendidos a situaciones contextualizadas, sino que los contiene. Además, ha ganado relevancia en la investigación en educación matemática en las últimas décadas (English & Gainsburg, 2016).

Son pocas las secuencias de enseñanza que pueden encontrarse en la literatura en las que se utilice este tipo de enfoque. Beltrán-Pellicer y Giacomone (2021a), por ejemplo, realizan una propuesta de enseñanza para la probabilidad en los primeros años de secundaria. Camacho Machín y Santos Trigo (2004), presentan una actividad que puede poner en juego diferentes representaciones y estrategias de resolución, y el empleo de herramientas tecnológicas a partir de un problema que propicia la modelización funcional con diferentes grados de profundidad. En este sentido, nuestra propuesta de enseñanza cubre este hueco en la investigación en lo referente a la proporcionalidad aritmética.

La concreción del enfoque a través en nuestra propuesta didáctica se ha estructurado alrededor de cinco tipos de actividades: las situaciones introductorias, las actividades de clase, las actividades de refuerzo individual, los debates y las puestas en común y los momentos de institucionalización (ver sección IV.4).

Las situaciones introductorias son el elemento principal de la propuesta, pues deben poder ser abordadas por una buena parte del alumnado, y deben proporcionar respuestas ricas y variadas que contengan los elementos necesarios para que, tras la puesta en común, puedan institucionalizarse los conceptos y estrategias previstas *a priori*. La amplia variedad de instrumentos de recogida de información desplegados en nuestra propuesta ha permitido hacer una evaluación precisa del funcionamiento de estas situaciones introductorias. En concreto el análisis de las producciones de los alumnos que se recogían de forma previa a la puesta en común ha sido de gran utilidad, pero también lo han sido las observaciones de los expertos externos tras la visualización de las grabaciones de clase y las propias reflexiones del profesor-investigador en el diario de clases. Además, el carácter cíclico de la investigación-acción ha permitido modificar las situaciones introductorias que no han funcionado de la manera deseada en las primeras implementaciones. En este sentido, destacamos el cambio de contexto en la situación introductoria de la proporcionalidad compuesta en la propuesta de 1º de ESO, el cambio de contexto para el problema de reparto inversamente proporcional en la propuesta de 2º de ESO, y las reorganizaciones y cambios de las situaciones introductorias para el porcentaje tanto en la propuesta de 1º de ESO como en la de 2º de ESO. Tras estos cambios, hemos podido comprobar un adecuado funcionamiento de todas ellas. El resto de las situaciones introductorias no ha sufrido cambios debido a su adecuación desde la primera implementación.

Durante la memoria hemos tratado de forma simultánea las actividades de puesta en común y de institucionalización. Esto se debe principalmente a que las institucionalizaciones, entendidas en el sentido explicado por Arce *et al*. (2019, p.38) como las situaciones "en las que el docente interviene para terminar de perfilar los avances y atribuir a los conocimientos construidos el estatus de conocimiento o de saber matemático perteneciente a la cultura matemática", se han intentado minimizar durante la propuesta. Sí han cobrado una especial importancia los debates y puestas en común tras la resolución de los diferentes problemas para tratar de corregir los errores observados y analizar las diferentes características de las situaciones correctamente resueltas, observar diferentes formas de resolución y destacar las estrategias que se consideraban más adecuadas argumentando sus potencialidades. Estas interacciones entre alumnos y profesor-investigador han sido validadas principalmente por los observadores externos que, en general, han destacado la buena actuación del profesor-investigador. Algunos comentarios en este sentido:

- "El observador considera las interacciones como muy adecuadas, concisas y precisas. Además, indica que en las intervenciones se promueve la reflexión y la argumentación de las respuestas." (ciclo de confirmación en 1º de ESO, sección V.3.4.4)
- "El observador externo identifica acciones concretas del profesor-investigador que demuestran que éste identifica dificultades de los alumnos y toma decisiones durante la sesión para intentar resolverlas." (ciclo de observación en 2º de ESO, sección VI.3.3.2)
- "El observador externo identifica actuaciones del profesor-investigador que buscan conectar los diferentes conceptos que aparecen durante la propuesta y pone de relieve algunas actuaciones del profesor-investigador para captar la atención de los alumnos." (ciclo de observación en 2º de ESO, sección VI.3.3.2)
- "El observador externo valora la actuación del profesor-investigador durante las cinco primeras sesiones de la propuesta como impecable." (ciclo de confirmación en 2º de ESO, sección VIII.3.4.2)

De la misma forma, los observadores externos han marcado diferentes líneas de mejora. Tanto en la actuación del profesor-investigador en las puestas en común como en el reparto de las intervenciones de los estudiantes, que se han ido mejorando en el transcurso de los diferentes ciclos de investigación-acción.

El funcionamiento de las actividades de clase, de la misma manera que las situaciones introductorias, ha sido valorado principalmente por las observaciones de los diarios de clase y por el exhaustivo análisis cuantitativo y cualitativo a través de las categorías generales (éxito) y específicas (estrategias de resolución). Esta exhaustiva monitorización ha permitido valorar la adecuación de la dificultad, el orden y la cantidad de problemas y hacer una evaluación continua de la evolución en el aprendizaje de los alumnos a través del análisis de las estrategias erróneas, las estrategias correctas y los errores en la ejecución de estrategias correctas.

Por su parte, las actividades de refuerzo que los alumnos debían realizar fuera del horario lectivo han recibido una valoración negativa en diferentes aspectos:

- Muchos alumnos no realizan, y por tanto no entregan o entregan en blanco, las tareas para casa. Además, en general, estos alumnos suelen ser aquellos que mayores dificultades presentan en la comprensión de los conceptos.

- Se ha detectado en algunos ciclos un alto número de producciones plagiadas, por lo que pierde sentido considerar el análisis cuantitativo de las respuestas en estas tareas.
- Las influencias externas aparecen generalmente en las tareas para casa.
- Las puestas en común de las actividades para casa ocupan un tiempo importante en el comienzo de la siguiente sesión ya que se debaten las resoluciones planteadas por los alumnos. Además de esta inversión de tiempo, el alto número de alumnos que no han realizado la tarea o han presentado una tarea plagiada, hace que estas puestas en común tengan, en ocasiones, poco aprovechamiento.

En definitiva, en la línea de lo apuntado por Oller-Marcén (2012), parece que los aspectos negativos que suponen estas actividades superan a los positivos por lo que se eliminará por completo el trabajo fuera del aula en futuras implementaciones.

Además de esta viabilidad del diseño de las actividades que estructuran nuestro enfoque metodológico, hay que tener en cuenta la viabilidad de la propuesta en términos cognitivos expuesta en la sección anterior lo que refuerza la viabilidad de la metodología de aula a través de la resolución de problemas como alternativa a aproximaciones basadas en introducir primero los conceptos y después su aplicación, provocando un efecto positivo para el desarrollo cognitivo de los estudiantes (Bingolbali & Bingolbali, 2019).

Por último, una crítica común a los enfoques de corte constructivista es la cantidad de tiempo necesario para su desarrollo, que se supone mayor que el necesario para realizar una propuesta con una instrucción directa (Godino & Burgos, 2020). Sin embargo, la adecuación de nuestra propuesta a la secuenciación y temporalización que hemos desarrollado en la sección X.2.1 pone de manifiesto que un adecuado diseño de una propuesta de enseñanza a través de la resolución de problemas no solo puede desarrollarse en el mismo tiempo que una secuencia “tradicional”, sino que en el mismo tiempo puede incorporar el tratamiento significativo de una variedad más amplia de contenidos y obtener mejores resultados de aprendizaje.

X.3. Limitaciones del trabajo

A lo largo de la memoria hemos mostrado diferentes líneas de actuación adoptadas para mejorar la calidad de la investigación realizada, atendiendo a su fiabilidad, validación y relevancia (Flick, 2007; Mays & Pope, 2000). En esta sección reflexionamos sobre algunas limitaciones de nuestro estudio que marcan el camino para su extensión y mejora en el futuro.

En nuestro estudio hemos acompañado un paradigma de investigación típicamente cualitativo, como es la investigación-acción, con algunas herramientas propias de los estudios cuantitativos. En concreto, hemos realizado un análisis cuantitativo estableciendo grupos de control para comparar los resultados obtenidos en la prueba final (en términos de corrección de las respuestas) por los grupos en donde se ha desarrollado nuestra propuesta con los de los grupos que siguen una propuesta tradicional. Esta comparación se realiza con el propósito de comprobar la viabilidad de la propuesta más que con la finalidad de comparar rendimientos académicos. Sin embargo, el tamaño de los grupos experimentales y de los grupos de control es pequeño, debido a las limitaciones de alumnado del centro y de disponibilidad horaria del profesor-investigador. La comparación de variables dicotómicas que hemos realizado a través de test exactos de Fisher con bajos tamaños muestrales requiere de grandes diferencias en dichas variables para resultar significativa con un alto nivel de confianza. Los estudios cuantitativos suelen requerir de tamaños muestrales mucho mayores para su correcto funcionamiento. Por ejemplo, en un estudio iniciado recientemente (Martínez-Juste *et al.*, 2021a, 2021b) en donde se aplica un modelo de diagnóstico cognitivo (Rupp, Templin, & Henson, 2010) para comparar diferentes componentes del razonamiento proporcional entre alumnos turcos y españoles se han utilizado tamaños muestrales para cada muestra cercanos a los trescientos estudiantes.

Debido a la amplia variedad de herramientas utilizadas para la recogida de la información, no han podido analizarse de forma profunda todos los datos experimentales recogidos. Por ejemplo, las grabaciones de las sesiones de clase se han utilizado únicamente para que los expertos externos completasen el protocolo de observación. Además de este uso, estos vídeos podrían haber sido analizados por el propio profesor-investigador y el equipo de investigación para indagar sobre la actuación del profesor-investigador, y observar las interacciones entre el profesor-investigador y los alumnos en los debates y los momentos de institucionalización (Coll & Sánchez, 2008).

Enlazando con el párrafo anterior, los observadores externos no asistieron de forma presencial a las sesiones de clase de las que emiten informe, sino que lo elaboran a partir de las grabaciones de las mismas. Estos vídeos presentan una panorámica general de la clase, pero no siempre recogen todas las interacciones que se producen durante la sesión o no lo hacen con la calidad suficiente. Estas limitaciones se han puesto de manifiesto en las tablas que recogen las respuestas de los observadores externos y que dejan algunos ítems en blanco por no disponer de información suficiente para contestar. La potencialidad de las observaciones en tiempo real dentro del aula se pone de manifiesto, por ejemplo, en el desarrollo de *lesson studies* (o estudios de clase). Este enfoque metodológico (Elliot, 2015), muy cercano al paradigma de la investigación-acción, tiene como uno de sus elementos característicos la observación dentro del aula. Como explicaremos en las siguientes secciones el autor ha continuado tras la experimentación presentada en esta memoria implementando la propuesta didáctica bajo este enfoque de observación dentro del aula (Martínez-Juste, 2019; Martínez-Juste & Domenech, 2019).

Otra de las herramientas empleadas para la recogida de información ha sido la realización de entrevistas semiestructuradas. En total, se han realizado doce entrevistas. Un mayor número de entrevistas semiestructuradas que hubiese permitido realizar un mayor número de estudios de caso longitudinales hubiera podido aportar información interesante sobre el funcionamiento de la propuesta. Además, la selección de los alumnos entrevistados podía haberse afinado en algunos ciclos realizando breves entrevistas previas lo que podría haber mejorado la calidad de las entrevistas realizadas. También, la inexperiencia, al menos inicial, del profesor-investigador realizando entrevistas semiestructuradas ha podido provocar algunos defectos en el desarrollo de las mismas como la interrupción ocasional de las intervenciones de los alumnos o el refuerzo positivo en algunas respuestas de los estudiantes (Blázquez *et al.*, 2005; Seidman, 2006).

Por otro lado, también podría resultar interesante realizar un seguimiento sistemático de los diferentes perfiles de alumnos que han participado en la propuesta, a saber: alumnos que han pertenecido en los dos niveles a los grupos experimentales, alumnos que han pertenecido al grupo experimental en 1º y al de control en 2º, alumnos que han pertenecido al grupo de control en 1º y al experimental en 2º, y alumnos que han pertenecido al grupo de control en los dos niveles. Para este propósito se tienen los datos necesarios, pero este tipo de análisis no ha sido incluido sistemáticamente en nuestro estudio y solo se han resaltado algunos ejemplos que han resultado especialmente llamativos.

La programación didáctica del departamento de matemáticas del centro donde se realizó la propuesta recogía la no utilización de la calculadora, de forma generalizada, en los dos primeros cursos de secundaria. Además, la propuesta de Oller-Marcén (2012) se realizó también sin la ayuda de medios tecnológicos. Estos hechos influyeron en la decisión de no permitir el uso de la calculadora durante nuestra experimentación, aunque el debate sobre su uso en contraposición con enfoques de la enseñanza de la aritmética basados en el uso exclusivo de lápiz y papel es un tema controvertido en la enseñanza de las matemáticas en la etapa primaria y primeros cursos de secundaria (Artigue, de Shalit, & Ralston, 2006). Las estructuras numéricas propuestas se adecuaron a la necesidad de realizar los cálculos de forma manual. Así mismo, esta forma de proceder puede aportar información relevante sobre el uso de los diferentes sistemas de representación para el número racional. Sin embargo, sería necesario estudiar el efecto que produciría el empleo de la calculadora por parte de los estudiantes. Por ejemplo, si la influencia de la estructura numérica de los problemas en los métodos de resolución (Steinthorsdottir, 2009) que hemos observado durante la propuesta sigue siendo la misma cuando los alumnos trabajan con calculadora. En este sentido, las siguientes implementaciones que se han hecho en otros centros de secundaria (Martínez-Juste, 2019; Martínez-Juste & Domenech, 2019) y los materiales didácticos que se han generado a partir de nuestra propuesta didáctica (ver sección X.4.2.2) sí contemplan el uso de calculadora y otras herramientas tecnológicas. Los primeros indicios que han proporcionado estas implementaciones posteriores a la experimentación de esta tesis doctoral apuntan a que el apego hacia las estrategias funcionales es mayor, del ya muy alto observado en nuestra experimentación, al no enfrentarse a las dificultades operativas relacionadas con la representación fraccionaria de las razones y, además, obtener respuestas exactas a los resultados finales de los problemas (Lamon, 2012).

En nuestro estudio, los conocimientos previos sobre proporcionalidad aritmética de los estudiantes se han inferido de las resoluciones a las situaciones introductorias en los diferentes focos a las que los alumnos se enfrentan sin que se hayan trabajado previamente problemas similares en clase. Una posible mejora en este sentido pasaría por realizar un test previo a los estudiantes (Hailikari, Nevgi, & Lindblom-Ylänne, 2007). Se optó por no realizar dicho test para que la cumplimentación del mismo no influyera en la propuesta didáctica (adelantando contenidos o haciendo emerger estrategias o técnicas no deseadas fuera del control de las situaciones introductorias). Sin embargo, con una mayor planificación podría realizarse un test previo alejado de la propuesta para evaluar estos conocimientos. Otra vía de caracterización de los conocimientos previos de los alumnos pasaría por caracterizar la enseñanza que los alumnos han recibido en Educación Primaria (Torres, 2015). Del mismo modo, además de la evaluación al final de la propuesta realizada con la prueba escrita, un test realizado con posterioridad a la propuesta y alejado en el tiempo de ella podría arrojar información sobre los conocimientos adquiridos que los alumnos mantienen en el tiempo.

Además de caracterizar los conocimientos previos y de, eventualmente, analizar la instrucción previa recibida por los alumnos de los grupos experimentales, sería interesante caracterizar con un mayor grado de detalle la instrucción recibida por los alumnos del grupo de control. En este sentido se han inferido las estrategias de resolución institucionalizadas en el grupo de control a través del análisis de contenido de las producciones escritas (Tinoco *et al*., 2021) utilizadas de forma mayoritaria en la prueba final. Un trabajo interesante para realizar un estudio comparativo de mayor alcance consistiría en estudiar las relaciones entre el libro de texto utilizado por los docentes del grupo de control, las producciones de los alumnos y otros instrumentos como los cuadernos de clase de estos estudiantes (Arce, 2016, 2018).

Nuestra propuesta de enseñanza presenta un tratamiento completo de los contenidos relacionados con la proporcionalidad desde un punto de vista aritmético para los primeros cursos de ESO. Sin embargo, pueden establecerse conexiones con contextos de proporcionalidad geométricos y con el estudio de las funciones lineales que también se introducen en los primeros cursos de esta etapa educativa (Burgos & Godino, 2020). Como expondremos en la sección X.5.1, proponer e implementar propuestas de enseñanza para realizar esta articulación de los diferentes contenidos asociados a la proporcionalidad (Bosch *et al*., 2006) en los primeros cursos es una de nuestras líneas de trabajo futuro.

X.4. Difusión, alcance y transferencia

Como se desarrolló en el Capítulo III, uno de los aspectos que da cuenta de la calidad de una investigación que utiliza un paradigma cualitativo es la relevancia de dicha investigación (Flick, 2007; Mays & Pope, 2000). En este sentido, una investigación es relevante si, además de suponer un avance en el conocimiento sobre un determinado problema, existe la posibilidad de extender, generalizar o transferir los conocimientos que aporta más allá del contexto social sobre el que se ha realizado la investigación.

En esta sección pretendemos justificar la relevancia de nuestra investigación-acción resumiendo la difusión del trabajo a través de los diferentes artículos de investigación publicados y las comunicaciones a congresos; exponiendo la generalización incipiente de nuestros resultados a otros niveles educativos y otros contextos matemáticos en los que aparece la proporcionalidad a través de la dirección de trabajos académicos que los usan. Así mismo, se destaca la extensión y transferencia del trabajo a través de diferentes proyectos de creación de materiales didácticos y de innovación educativa que actúan sobre contextos sociales diversos y diferentes del que ha generado este trabajo.

X.4.1. Difusión

X.4.1.1. Artículos de investigación

Aunque ya han sido citados a lo largo de la memoria, en esta sección destacamos los artículos publicados en revistas científicas a los que ha dado lugar por el momento la investigación realizada en este proyecto de Tesis Doctoral. Los dos primeros surgieron como resultado de la investigación inicial a la que dio lugar la necesidad de completar el marco teórico en lo relativo a la proporcionalidad compuesta. El tercero presenta los resultados obtenidos de la implementación de la propuesta para el foco 4, "Problemas en situaciones de proporcionalidad compuesta" a lo largo de los diferentes ciclos de investigación-acción.

- Artículo en la revista *Avances de Investigación en Educación Matemática* titulado, "Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en los libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante la LOGSE-LOE-LOMCE".

  […] realizamos un estudio comparativo del tratamiento dado a la proporcionalidad compuesta en 6 colecciones completas de libros de texto […]. Dichas colecciones pertenecen a dos editoriales diferentes y recorren los tres últimos periodos educativos implantados en España. El estudio realizado es un análisis textual y a priori de textos escolares dentro del paradigma metodológico del análisis del contenido estructurado a través de diferentes categorías de análisis. Entre otros resultados se concluye que existe una gran variabilidad en el tratamiento de la proporcionalidad compuesta, pese a que el tipo de problemas y sus contextos son de una gran homogeneidad. Así mismo, detectamos carencias en, entre otros aspectos, las caracterizaciones y justificaciones empleadas en los textos. (Martínez-Juste *et al*., 2015b, p. 95)

- Artículo en la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Ciencias* (SSCI *Educational research,* Q4; SJR *Education,* Q4), titulado "Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de ESO".

  […] realizamos un estudio detallado de los problemas de proporcionalidad compuesta de doce libros de texto españoles de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años). En concreto, se realiza un análisis de contenido textual y a priori, clasificando los problemas atendiendo a su contexto, su estructura, su posición y papel dentro de la Unidad Didáctica correspondiente y a la tipología de magnitudes utilizadas. Entre otros resultados se concluye que […] el tratamiento es bastante homogéneo respecto a su contexto, estructura y magnitudes implicadas: la mayoría de los problemas son de contexto realista, de valor perdido y con cinco cantidades de magnitud extensivas. También se detecta poca presencia de problemas de comparación cuantitativa y de situaciones de tipo inversa-inversa, así como poca presencia y variedad de magnitudes intensivas. (Martínez-Juste *et al*., 2017, p. 95)

- Artículo en la revista *Enseñanza de las Ciencias* (SSCI *Education* & *Educational research,* Q3; SJR *Education,* Q2), titulado "Una experiencia de Investigación-Acción para la enseñanza de la proporcionalidad compuesta".

  En este trabajo describimos y analizamos los resultados de una experiencia de enseñanza de la proporcionalidad compuesta llevada a cabo con alumnos de 1.º y 2.º de secundaria bajo el paradigma de la investigación-acción. […]. La amplia muestra de trabajo, con unos 120 alumnos involucrados en cada ciclo, y la variedad de instrumentos de recogida de información utilizados durante la fase de acción permiten la obtención de conclusiones sólidas sobre la viabilidad y los puntos fuertes, así como sobre los aspectos mejorables de la propuesta. (Martínez-Juste *et al*., 2019a, p. 85)

X.4.1.2. Comunicaciones a congresos

Al igual que en la sección anterior, aunque la mayoría de los siguientes trabajos ya han sido citados anteriormente, destacamos en este capítulo final las comunicaciones a distintos congresos de carácter nacional e internacional cuyo contenido surge de la investigación realizada para este proyecto. Algunas de estas comunicaciones han dado lugar a publicaciones en libros de actas con índices de calidad.

- Comunicación presentada al *XVIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), titulada "Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles":

  […] abordamos el estudio del tratamiento recibido por la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles de 2º […] pretendemos observar el modo en que se caracteriza la proporcionalidad compuesta entre magnitudes, así como la tipología de problemas propuestos y los métodos presentados y utilizados por los autores para resolverlos. Entre otros resultados señalaremos una relativa despreocupación en cuanto a la caracterización de la proporcionalidad compuesta, la ausencia de problemas de comparación y el escaso número de problemas de tipo Inversa-Inversa. Además, se observa una cierta heterogeneidad en los métodos de resolución presentados. (Martínez-Juste *et al*., 2014, p. 435)

- Comunicación presentada al *XIX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), titulada "Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta":

  En este trabajo se analizan las actuaciones de alumnos desde 6.º de Educación Primaria hasta 2.º de Educación Secundaria Obligatoria (11-14 años) con distintos grados de instrucción en proporcionalidad al resolver ciertos problemas de proporcionalidad compuesta. En particular, observamos la tasa de éxito y las distintas estrategias empleadas, tanto correctas como incorrectas. (Martínez-Juste *et al*., 2015a, p. 351)

- Comunicación presentada al congreso *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*, titulada " Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de ESO":

  En esta comunicación presentamos las ideas básicas de una propuesta didáctica para la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de la E.S.O. y analizamos algunos puntos fuertes y debilidades detectados en un punto intermedio de su experimentación. (Martínez-Juste *et al*., 2015, p. 459)

- Póster presentado en 2015 al 9th Congress of European Research in Mathematic Education (CERME), titulado "Compound proportion problems in secondary Spanish textbooks":

  En este trabajo nos aproximamos al estudio del tratamiento de la proporcionalidad compuesta dado por cinco libros de texto españoles de 8º grado. En particular realizamos un análisis de contenido inductivo para estudiar la tipología de los problemas propuestos y de los métodos usado por el autor para resolverlos. Entre otras cuestiones destacamos la falta de problemas de comparación cuantitativa y cualitativa. Además, observamos cierta heterogeneidad de los métodos de resolución.

- Póster presentado en 2016 al 13th International Congress on Mathematical Education (ICME), titulado "Proportional distribution problems: strategies of the students before receiving formal instruction":

  En este trabajo analizamos las respuestas dadas por estudiantes sin experiencia previa en estos problemas [repartos proporcionales] cuando resuelven dos tareas: un problema de reparto proporcional directo y otro inverso.

- Comunicación presentada al *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (CIBEM), titulada "¿Cómo resuelven problemas de repartos proporcionales alumnos sin experiencia previa?":

  De las muchas situaciones que pueden modelizarse mediante la proporcionalidad, los "repartos proporcionales" constituyen una de las más tradicionales. […]. En este trabajo estudiamos las respuestas dadas por alumnos que se enfrentan por primera vez a este tipo de problemas sin haber recibido instrucción previa. En concreto, estudiaremos el tipo de reparto realizado y las técnicas utilizadas en su resolución cuando responden a dos problemas abordables mediante un reparto proporcional, uno directo y otro inverso. Pese a la relativa variabilidad en las técnicas del reparto, uno de los problemas se acepta de forma natural como un reparto (directamente) proporcional, mientras que un bajo número de alumnos realiza de forma espontánea un reparto inversamente proporcional. (Martínez-Juste *et al*., 2018, p. 121)

- Comunicación presentada al *XXIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), titulada "Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción":

> […] la enseñanza tradicional [de los repartos inversamente proporcionales] se orienta hacia la aplicación de técnicas no justificadas en problemas poco realistas cuyo enunciado solicita explícitamente realizar un reparto inversamente proporcional. En este trabajo […] se analizan las respuestas de alumnos de 2º de secundaria sin instrucción específica previa a una tarea introductoria sobre repartos inversamente proporcionales. En el proceso en que se llevó a cabo la experimentación se introdujeron cambios sustanciales en el contexto del problema planteado que promovieron la aparición de estrategias de resolución incipientes que un instructor puede aprovechar para formalizar técnicas de resolución generales. (Martínez-Juste *et al.*, 2019b, p. 413)

X.4.2. Transferencia

X.4.2.1. Dirección de trabajos académicos que utilizan la propuesta didáctica

Durante los últimos años del periodo en el que se ha desarrollado este proyecto de tesis doctoral, el autor, también profesor asociado en el área de didáctica de la matemática en la Universidad de Zaragoza, ha dirigido diferentes trabajos académicos (en la titulaciones de Máster de Profesorado de Educación Secundaria y Grado de Magisterio en Educación Primaria) que amplían las ideas de este trabajo para desarrollar propuestas de enseñanza en diferentes niveles educativos (6º de Educación Primaria y 4º de la ESO) y en contextos diferentes al aritmético. En concreto:

- Trabajo fin de máster titulado: "Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para 4º de ESO" (Ibáñez, 2018). En este trabajo se propone el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en 4º cuso de la ESO en la opción orientada a las enseñanzas aplicadas. Como fruto de este trabajo se publicó un artículo de análisis de libros de texto que resalta las carencias que tienen este tipo de materiales (Ibáñez & Martínez-Juste, 2020).
- Trabajo fin de grado titulado: "Videoblogs para la enseñanza de proporcionalidad en Primaria. Diseño y experimentación de una propuesta educativa" (Álvarez, 2020). En este trabajo se diseñan y ponen en práctica diferentes vídeos didácticos para 6º de Educación Primaria que tratan el concepto de razón y los problemas de comparación y valor perdido en situaciones de proporcionalidad simple directa utilizando las ideas expuestas en esta memoria[62].
- Trabajo fin de máster titulado: "Semejanza: una propuesta didáctica para 2º de ESO" (Coronas, 2021). En este trabajo se presenta una propuesta de enseñanza de determinados

[62] Los siguientes enlaces dan acceso a los vídeos creados:
Razón entre magnitudes: https://www.youtube.com/watch?v=JbPiDHeeua4&t=6s
Problemas de comparación cuantitativa: https://www.youtube.com/watch?v=-vu0nyr0jnM&t=2s
Problemas de valor perdido: https://www.youtube.com/watch?v=He99_PyU2Jg&t=3s
Concepto de porcentaje: https://www.youtube.com/watch?v=SoEbbe7Y-ck&t=1s

conceptos relacionados con la proporcionalidad geométrica. La autora propone interpretaciones de las razones de semejanza basadas en razones externas y estrategias funcionales de resolución de los problemas asociados. Dicha propuesta se acompaña de una pequeña experimentación de las estrategias de resolución e interpretaciones de las razones de semejanza en grupos naturales de alumnos que habían recibido previamente instrucción sobre proporcionalidad aritmética según nuestra propuesta de enseñanza.

X.4.2.2. Creación de materiales didácticos

En el Capítulo II discutimos ampliamente sobre la influencia en la práctica educativa real que tienen los libros de texto (González & Sierra, 2004; Monterrubio & Ortega, 2009). De hecho, la existencia de libros de texto que toman en consideración las aportaciones de la investigación en educación matemática puede ser un factor relevante en el nivel competencia matemática que presentan los alumnos de algunos países (Fan & Zhu, 2000). Por tanto, además de en el análisis de los libros de texto utilizados, parece necesario que la comunidad de investigadores en educación matemática participe en la elaboración de materiales didácticos y libros de texto que transfieran el conocimiento teórico a la práctica educativa.

En el sentido anterior desde el curso 2020-2021 el autor colabora, junto con otros investigadores, en la elaboración de materiales digitales para el proyecto *Math-bits*[63] de la Fundación Internacional de Enseñanza de la Ciencia (*International Science Teaching Foundation*[64]). Estos materiales diseñados para la ESO pueden usarse como libro de texto de matemáticas o como material complementario. En este proyecto, la unidad didáctica de proporcionalidad aritmética supone una adaptación digital de la propuesta para 1º de ESO presentada en este trabajo. Además, a lo largo del proyecto se realizan conexiones entre los conceptos matemáticos relacionados con la proporcionalidad y conceptos propios de las ciencias experimentales. Por otra parte, en las sesiones dedicadas a la introducción del concepto de función se apuntan ideas para el paso de la aritmética a la modelización funcional a través del concepto de razón externa entre magnitudes directamente proporcionales.

X.4.2.3. Proyectos de innovación educativa en ESO

Como desarrollamos en el Capítulo I, las experiencias de innovación educativa abarcan aspectos y facetas distinta que van desde innovaciones de carácter organizativo, institucional o para la mejora de la convivencia y la introducción de las tecnologías de las información y comunicación. Junto a ellas, podemos encontrar actuaciones innovativas centradas en las didácticas específicas de cada materia. Atendiendo a este último enfoque, Sánchez Ramón (2005) señala las características de esta clase de innovación, y aborda las conexiones existentes entre la investigación y la

---

[63] https://www.math-bits.com/mb/es/

[64] https://science-teaching.org/es/teaching

innovación educativa, apuntando que la investigación-acción es un método de investigación educativa que relaciona estos dos conceptos.

Por tanto, desde nuestra perspectiva, este trabajo es en sí mismo un proyecto de innovación educativa que pretende mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de una innovación curricular y metodológica en el ámbito de la educación matemática. En este sentido, se presentaron algunos resultados preliminares de la investigación en el congreso "Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas" (Martínez-Juste *et al*., 2015) ya mencionados a lo largo de esta memoria.

Dado el carácter innovador de nuestro trabajo, para abordar la difusión y transferencia de los resultados obtenidos, y que estos pudieran implementarse por otros profesores y en otros centros, se decidió elaborar proyectos de innovación que pudieran optar al reconocimiento de la Administración Educativa mediante las convocatorias de carácter competitivo que se realizan anualmente para los centros públicos no universitarios.

Así, en los últimos años el autor ha sido el coordinador de dos proyectos de innovación educativa autorizados por el Departamento de Educación, Cultura y Deporte de la Comunidad Autónoma de Aragón. Ambos proyectos tienen una fuerte componente de formación del profesorado.

- *Nuevas tendencias para el aprendizaje de la proporcionalidad*[65]: Mediante este proyecto de innovación se abordó la formación necesaria para que los miembros del departamento de matemáticas del IES Leonardo de Chabacier en donde se desarrolló la experimentación de esta Tesis Doctoral pudieran implementar la propuesta en sus grupos de 1º y 2º de ESO.
- *Cooperación docente: metodología Lesson Study para innovar en matemáticas*[66]: Este proyecto de innovación se desarrolló en el IES Pilar Lorengar, situado en una localidad diferente al que se desarrolló la experimentación de esta Tesis Doctoral. Los dos pilares en los que se apoyaba el proyecto eran la formación en didáctica específica para los profesores de matemáticas del departamento y el desarrollo y experimentación de unidades didácticas a través de la metodología *lesson studies*. Dentro del proyecto, nuestra propuesta didáctica para la proporcionalidad jugó un papel protagonista ya que formó parte de uno de los estudios de clase realizados. En un primer ciclo el autor implementaba la propuesta en un grupo natural de alumnos mientras otros miembros del departamento observaban dicha implementación. En un segundo ciclo, uno de los observadores implementaba la secuencia

---

[65] ORDEN ECD/720/2017, de 11 de mayo, por la que se resuelve la convocatoria a los centros docentes no universitarios sostenidos con fondos públicos de la Comunidad Autónoma de Aragón para desarrollar proyectos de innovación educativa en el curso 2016-2017. Boletín Oficial de Aragón, nº 103, 1 de junio de 2017, pp. 12894-12900.

[66] ORDEN ECD/321/2019, de 14 de marzo, por la que se resuelve la convocatoria a los centros docentes no universitarios sostenidos con fondos públicos de la Comunidad Autónoma de Aragón para desarrollar proyectos de innovación educativa durante el curso 2018-2019. Boletín Oficial de Aragón, nº 66, 4 de abril de 2019, pp. 9025-9030.

didáctica mientras el autor de esta memoria observaba y le realizaba aportaciones para mejorar su práctica.

En el contexto del segundo proyecto de innovación realizado en el IES Pilar Lorengar se realizaron varios aportes en jornadas, congresos y revistas de profesores encaminados a difundir sus resultados (Domenech & Martínez-Juste, 2019; Martínez-Juste, 2019; Martínez-Juste & Domenech, 2019; Domenech & Martínez-Juste, 2021).

X.4.3. Otras actividades de divulgación

Además de las actuaciones anteriores, durante el periodo de desarrollo de este proyecto se han impartido diversas charlas y conferencias cuyo principal objetivo era divulgar los resultados de nuestro trabajo en diferentes ámbitos:

- Charlas y talleres encaminadas a la divulgación de la propuesta entre profesores de matemáticas en las diferentes Jornadas de Educación Matemática de Aragón[67] (por ejemplo, Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén, 2015c).
- Charla "Proporcionalidad aritmética: de la investigación didáctica al aula de secundaria"[68] orientada a divulgar la investigación dentro del Seminario de Didáctica de la Matemática[69] de la Facultad de Educación de Zaragoza de la Universidad de Zaragoza.
- Charla "Diseño de actividades de proporcionalidad aritmética" dentro del programa "Del Aula al Máster" dirigida a estudiantes del Máster de Profesorado de Educación Secundaria de la especialidad de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

[67] https://sites.google.com/site/ijemaragon/home

[68] https://riemann.unizar.es/seminario-didactica/Martinez.pdf

[69] https://riemann.unizar.es/grupodidactica/index.php?id=seminario

X.5. Líneas de trabajo futuro

Para concluir esta memoria, esbozamos algunas de las líneas de investigación que se abren tras el trabajo presentado en esta memoria.

X.5.1. Enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en educación primaria y secundaria

En este trabajo hemos desarrollado e implementado una propuesta didáctica para la proporcionalidad para los dos primeros cursos de ESO. Sin embargo, el desarrollo del razonamiento proporcional comienza en los primeros años de la EP, con enfoques menos numéricos y más cualitativos (Nunes *et al*., 2003) y sigue desarrollándose tras los primeros años de secundaria con un progresiva algebrización (Burgos *et al*., 2017), hasta los últimos años de secundaria y el bachillerato donde se relaciona con la modelización funcional (García, 2005). Nuestra propuesta está fuertemente basada en el concepto de razón externa, constantes de proporcionalidad y estrategias funcionales de resolución de problemas de proporcionalidad. Estos elementos, como dijimos en el Capítulo IV, tienen un papel protagonista en el desarrollo del razonamiento proporcional (Arican, 2018; Cramer & Post, 1993; Levain & Vergnaud, 1995), son claves para introducir las ideas de covariación entre magnitudes (Burgos & Godino, 2019a; Mochón, 2012), suponen una algebrización incipiente (Burgos *et al*., 2017) y conectan el mundo aritmético con el algebraico por lo que puede permitir una posterior modelización funcional (Solar & Zamorano, 2006).

Por tanto, dos importantes líneas de trabajo futuro son:

- Realizar e implementar una propuesta de enseñanza concreta que desarrolle esas primeras etapas cualitativas y aritméticas en Educación Primaria y conecte con la propuesta hecha para los primeros años de secundaria en este trabajo (Font, 2011).
- Desarrollar ideas para una propuesta de enseñanza (también realizar su diseño e implementarlo) que conecte nuestra secuencia de enseñanza de la proporcionalidad aritmética con el mundo algebraico y la modelización funcional (Burgos *et al*., 2017; Solar & Zamorano, 2006).

Por otro lado, en nuestra propuesta de enseñanza no se trabajan algunos aspectos fenomenológicos relacionados con contextos geométricos, como los constructos (Freudenthal, 1983). Por tanto, es interesante crear nexos entre los contextos aritméticos y geométricos para desarrollar conceptos como la semejanza y la trigonometría a partir de las ideas propias de nuestra propuesta.

Por último, además de estas potenciales ampliaciones de la propuesta didáctica, creemos que la gran cantidad de información recogida durante esta experimentación puede servir de base para diferentes análisis que no se han abordado en este proyecto. Por ejemplo, podría ser interesante caracterizar de forma más detallada la instrucción recibida por los grupos de control a partir de estudios que relacionen el desempeño de los alumnos en la prueba escrita, el tratamiento del libro de texto utilizado por los profesores y las profesoras que impartieron las clases a estos grupos y los cuadernos de clase (Arce, 2016, 2018) de algunos alumnos del grupo de control que se escanearon durante la experimentación. De esta forma, además del desempeño en la prueba escrita, podríamos comparar la instrucción recibida por los grupos experimentales y los grupos de control para intentar inferir en qué medida esta instrucción provoca diferencias en las tasas de acierto, en el uso de estrategias correctas e incorrectas y en los errores que comenten los estudiantes.

X.5.2. Formación inicial de maestros y profesores

En el Capítulo II, destacamos la formación inicial de maestros y profesores como una de las líneas activas de investigación alrededor de la proporcionalidad, resumiendo diferentes trabajos recientes que abordan esta línea de trabajo (Ben-Chaim *et al*. 2007, 2012; Berenson & Nason, 2003, Berk *et al*., 2009; Burgos *et al*., 2018; Monteiro, 2003; Rivas, 2013; Rivas *et al*., 2012; Valverde, 2012, Valverde *et al*., 2013).

La investigación realizada en el presente trabajo puede servir como base para el diseño de propuestas de enseñanza para la formación inicial de maestros y profesores. Estas propuestas pueden diseñarse, tanto con el objetivo de transmitir las ideas principales para el diseño de secuencias de actividades de proporcionalidad como con el objetivo de desarrollar competencias profesionales a través del análisis de producciones de los alumnos y de episodios de clase. Este tipo de trabajos relacionados con el analisis de secuencias de enseñanza, o episodios de clase, para desarrollar el conocimiento especializado de profesores en formacion es una línea de investigación relevante en el ámbito español y que se aborda desde diferentes marcos teóricos (Bufforn & Fernández, 2014; Climent, & Carrillo, 2003; Pérez-Bueno *et al*., 2018; Fuentes, 2020).

X.5.3. Análisis de libros de texto

En el Capítulo II de esta memoria se han descrito diferentes contribuciones del autor a la investigación educativa sobre libros de texto (Martínez-Juste *et al*., 2014, 2015b, 2017). El origen de estas contribuciones se encuentra en los trabajos que hemos denominado “investigaciones adyacentes” para completar el marco teórico de la proporcionalidad compuesta. El marco teórico y metodológico establecido en dichos trabajos ha permitido realizar otros estudios como el realizado por Ibáñez y Martínez-Juste (2020) para analizar el tratamiento global dado a la proporcionalidad aritmética en libros de texto de 4º de ESO.

Las categorías de contenido y las categorías específicas para analizar las estrategias de resolución en los diferentes tipos de problemas en esta memoria pueden servir de base para realizar posteriores análisis de libros de texto sobre proporcionalidad. En particular, puede ser relevante realizar aportaciones al estudio del tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto de Educación Primaria (Burgos *et al*., 2020; Burgos & Godino, 2020) o al estudio de los conceptos y estrategias de resolución relacionadas con la proporcionalidad que se ponen en juego en los libros de textos de materias relacionadas con las ciencias experimentales para indagar sobre las habilidades matemáticas demandas en estas materias (Basson, 2002).

X.5.4. Desarrollo profesional y curricular mediante el desarrollo de *lesson studies*

Dentro del paradigma de la investigación-acción en el que se encuadra esta tesis doctoral ha cobrado importancia en los últimos años la metodología *lesson study* (o estudio de clase) (Elliot, 2015). Dicha metodología surge del modelo educativo japonés y se introdujo en los sistemas educativos anglosajones hace dos décadas para intentar mejorar sus resultados en las evaluaciones internacionales, especialmente en competencia matemática. Su característica más llamativa es que el trabajo cooperativo llevado a cabo por los docentes no se circunscribe exclusivamente al diseño de las unidades didácticas y al análisis de los resultados. El grupo cooperativo entra en la clase de uno de sus miembros para observar cómo el docente lleva a cabo la propuesta diseñada y poder observar cómo los alumnos reaccionan ante dicha propuesta. Posteriormente, la observación se repite en al menos un segundo ciclo en otro grupo para ir progresivamente mejorando tanto el proceso de enseñanza de los miembros del grupo como la propuesta didáctica para obtener mejores resultados con los alumnos.

Esta característica de observación mutua dentro del aula de las *lesson studies* permite realizar simultáneamente proyectos de desarrollo e innovación curricular (Lewis, Perry, & Murata, 2006) junto con la formación y actualización en didáctica de la matemática de los profesores implicados en el proyecto (Martínez-Juste, 2019; Martínez-Juste & Domenech, 2019). En este sentido, sería interesante estudiar el impacto que el desarrollo de los estudios de clase puede tener en la formación didáctica del profesorado implicado (García, Wake, Lendínez, & Lerma, 2019).

X.5.5. Modelos de diagnóstico cognitivos centrados en la proporcionalidad

Una de las líneas de investigación recientemente abiertas, que surge de la necesidad de evaluar los conocimientos de los estudiantes sobre proporcionalidad, es el diseño de cuestionarios de respuesta múltiple centrados en los diferentes tipos de problemas (Cramer & Post, 1993) y estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1983) y su análisis utilizando modelos de diagnóstico cognitivos (Arican, 2019b).

Los modelos de diagnóstico cognitivos son una familia de modelos psicométricos que ha sido diseñado con propósitos diagnósticos (Rupp *et al*., 2010). Estos modelos no se limitan a medir una única habilidad matemática global, como podría ser el razonamiento proporcional, sino que descomponen la competencia que se quiere estudiar en una serie de destrezas o atributos y clasifican a los estudiantes según posean o no cada uno de estos atributos.

Así, uno de nuestros intereses es la posible aplicación de estos modelos para diagnosticar las habilidades de nuestros estudiantes en torno al razonamiento proporcional, descomponiendo el razonamiento proporcional en destrezas relacionadas con la estructura multiplicativa (los alumnos son competentes en proporcionalidad simple directa, proporcionalidad simple inversa, proporcionalidad compuesta, …), comprobando los diferentes perfiles de estudiantes según hayan adquirido o no cada una de las destrezas y estudiando posibles jerarquías entre ellas (¿todos los alumnos que son competentes en proporcionalidad simple inversa lo son en proporcionalidad simple directa?). Este tipo de trabajo también permitiría hacer un análisis más fino sobre la comprensión de los alumnos si nos restringimos a una estructura multiplicativa concreta. Por ejemplo, utilizando las habilidades de los alumnos en la resolución de problemas de comparación cualitativa, comparación cuantitativa y valor perdido o, en el caso de la proporcionalidad compuesta estudiando las habilidades de resolución según diferentes estructuras funcionales (Martínez-Juste *et al*., 2017).

Un trabajo inicial en esta dirección se ha presentado recientemente en el congreso *International Conference on Mathematics Education* (Martínez-Juste *et al*., 2021a).

X.5.6. Estudios comparativos internacionales

La presencia históricamente constante de la proporcionalidad en un amplio espectro internacional justifica la necesidad de realizar investigaciones que comparen el tratamiento que este tema recibe en diferentes contextos educativos (Cai, Mok, Reedy, & Stacey, 2016; Stigler, Gallimore, & Hiebert, 2000).

Una de las posibles vías de investigación en este sentido es la comparación del tratamiento dado a la proporcionalidad en libros de texto en diferentes países. Por ejemplo, Lo, Cai y Watanabe (2001) comparan libros de texto de Japón, China, Taiwan y Estados Unidos encontrando diferencias en definiciones de conceptos, tipos de problemas y secuenciación. Ponte y Marques (2011) comparan libros de texto de sexto y séptimo grado (sexto de EP y primero de ESO) de Portugal, Brasil, España y Estados Unidos, y entre otras conclusiones señalan la poca importancia del concepto de razón en los libros españoles en comparación los del resto de países. En otro trabajo en la misma línea, Incikabi y Tjoe (2013) comparan los tipos de problemas de razón y proporción en libros de texto de Turquía y Estados Unidos. En este sentido, los trabajos que se realizaron para completar el marco teórico en torno a las situaciones de proporcionalidad compuesta y que analizan libros de texto españoles (Martínez-Juste *et al*., 2014, 2015b, 2017) pueden servir como base para diseñar comparativas internacionales en torno a este tema específico y poco trabajado en la investigación educativa.

Otra de las posibles vías de trabajo para realizar estudios comparativos internacionales es analizar el desempeño en una prueba escrita de muestras de estudiantes de diferentes sistemas educativos (Chin & Lin, 2009; Sen & Arican, 2015). Esta línea de trabajo a través del uso de los modelos de diagnóstico cognitivos presentados en la sección anterior, se está utilizando para comparar el razonamiento proporcional de los estudiantes de Turquía y España a través de dos muestras de tamaños 282 y 314, respectivamente, y ha dado lugar a un trabajo que está actualmente en proceso de revisión (Martínez-Juste *et al.*, 2021b).

Referencias bibliográficas

Abero, L., Berardi, L., Capocasale, A., García, S., & Rojas, R. (2015). *Investigación Educativa: Abriendo puertas al conocimiento.* Montevideo: CLACSO.

Abrahamson, D. (2004). *Keeping meaning in proportion: the multiplication table as a case of pedagogical bridging tools.* (Tesis Doctoral). Northwestern University, Evanston, EEUU.

Abrahamson, D., & Cigan, C. (2003). A design for ratio and proportion instruction. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(9), 493-501.

Adjiage, R., & Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 149-175.

Ahl, L. M. (2016). Research findings' impact on the representation of proportional reasoning in Swedish mathematics textbooks. *Journal of Research in Mathematics Education - REDIMAT, 5*(2), 180-204.

Álvarez, A. (2020). *Videoblogs para la enseñanza de la proporcionalidad en Primaria.* (Trabajo Fin de Grado). Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Antequera, A., & Espinel, M. C. (2011). Analysis of a teaching experiment on fair distribution with secondary school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(2), 213-228.

Appelbaum, P., & Stathopoulou, C. (2016). Critical issues in culture and mathematics learning. En L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education. Third edition* (pp. 336-358). Nueva York: Routledge.

Arce, M. (2016). *Análisis de los cuadernos de matemáticas de los alumnos de Bachillerato: percepciones, perfiles de elaboración y utilización y rendimiento académico.* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid.

Arce, M. (2018). El cuaderno de matemáticas: un instrumento relevante en las aulas que suele pasar desapercibido. *La Gaceta de la RSME, 21*(2), 367-387.

Arce, M., Conejo, L., & Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* Madrid: Síntesis.

Arican, M. (2018). Preservice Middle and High School Mathematics Teachers' Strategies when Solving Proportion Problems. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(2), 315-335.

Arican, M. (2019a). Preservice mathematics teacher's understanding of and abilities to differentiate proportional relationships from nonproportional relationships. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(7), 1423-1443.

Arican, M. (2019b). A diagnostic assessment to middle school students' proportional reasoning. *Turkish Journal of Education, 8*(4), 237-257.

Artigue, M., de Shalit, E., & Ralston, A. (2006). Controversial issues in K-12 mathematical education. En *Proceedings of the international congress of mathematicians* (pp. 1645-1662). European Mathematical Society.

Aviña González, M. J., Vargas Alejo, V., Alvarado Monroy, A., & Cristóbal Escalante, C. (2019). Ciclos de entendimiento de estudiantes universitarios al resolver una actividad de proporcionalidad. *CPU-e, Revista de Investigación Educativa, 29*, 58-86.

Balda, P. A. (2018). *Una epistemología de usos en torno a lo proporcional: un estudio socioepistemológico en el contexto de la huerta escolar.* (Tesis Doctoral). Universidad Santo Tomás, Bogotá, Colombia.

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido.* Madrid: Akal.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Basson, I. (2002). Physics and mathematics as interrelated fields of thought development using acceleration as an example. *International journal of mathematical education in science and technology, 33*(5), 679-690.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). Nueva York: Academic Press.

Beltrán-Pellicer, P., & Giacomone, B. (2021a). Una propuesta didáctica de probabilidad para el comienzo de la secundaria. *Educação Matemática Pesquisa, 23*(4), 246-272.

Beltrán-Pellicer, P., & Giacomone, B. (2021b). Una primera aproximación al análisis de vídeos educativos de estadística: el caso de la mediana. *Números, 106*, 53-61.

Beltrán-Pellicer, P., & Martínez-Juste, S. (2021). La resolución de problemas, mucho más que un eslogan. *Entorno Abierto, 42*, 13-16.

Beltrán-Pellicer, P., & Martínez-Juste, S. (En prensa). Enseñar a través de la resolución de problemas. *Suma*.

Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., & Giacomone, B. (2021). Análisis de vídeos educativos en línea por estudiantes de máster de secundaria. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 157-164). Valencia: SEIEM.

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Burgos, M. (2018). Los Vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. *Cultura y Educación, 30*(4), 633-662.

Ben-Chaim, D., Fay, J. T., Fitzgerald, M. W., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experience. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 247-273.

Ben-Chaim, D., Ilany, B., & Keret, Y. (2008). "Atividades investigativas autênticas" para o ensino de razão e proporção de profesores de matemática para os níveis elementar e médio. *Boletin de Educação Matemática, 21*(31), 125-159.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. (2007). Designing and implementing authentic investigate proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematic teacher's content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 333-340.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion. Research and teaching in mathematics teachers' education (pre- snd in- service mathematics teachers of elementary and middle school classes).* Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Benoit, P., Chemla, K., & Ritter, J. (coords.) (1992). *Histoire de fractions, fractions d'histoire.* Basel-Boston-Berlín: Birkhäuser Verlag.

Bentley, B., & Yates, G. (2017). Facilitating proportional reasoning through workrd examples: Two classroom-based experiments. *Cogent Education, 4*(1), 1-14.

Berenson, S. B., & Nason, R. (2003). Using Instructional Representations of Ratio as an Assessment Tool of Subject Matter Knowledge. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 89-96.

Berg, B. L. (2007). *Qualitative research methods for the social sciences.* Boston: Allyn and Bacon.

Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C., & Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(3), 113-135.

Bingolbali, F., & Bingolbali, E. (2019). One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving. *Mathematics Education Research Journal, 31*, 237–257.

Blanco, L. (1993). *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas.* Badajoz: Univérsitas editorial.

Blázquez, S., Ibañes, M., & Ortega, T. (2005). Debates y entrevistas. En J. V. Aymerich, & S. Macario (Eds.), *Matemátiacs para el siglo XXI. Collection "Treballs D'Informàtica I Tecnologia"* (Vol. 22, pp. 103-109). Universidad Jaume I. Castellón.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(1), 7-40.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad.* (Tesis Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-44.

Boyer, T., Levine, S., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology, 44*(5), 1478-1490.

Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990* (Vol. 19). Springer Science & Business Media.

Brown, G. W., & Kinney, L. B. (1973). Let's teach them about ratio. *The mathematics teacher, 66*(4), 352-355.

Buforn, A. (2017). *Características de la competencia docente mirar profesionalmente de los estudiantes para maestro en relación al razonamiento proporcional.* (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante, Alicante.

Buforn, A., & Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Boletin de Educação Matemática, 28*(48), 21-41.

Burgos, M. (2020). *Niveles de algebrización en el razonamiento proporcional desde las perspectivas institucional y personal. Implicaciones para la formación de profesores de matemáticas.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Burgos, M., & Godino, J. D. (2019a). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *Boletin de Educação Matemática, 33*(63), 389-410.

Burgos, M., & Godino, J. D. (2019b). Conflictos semióticos de alumnos en primaria en la resolución de una tarea de porcentajes. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, M.-E. J. M., & A. Alsina, *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 223-232). Valladolid: SEIEM.

Burgos, M., & Godino, J. D. (2020). Semiotic conflicts in the learning of proportionality: analysis of a teaching experience in primary education. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(3).

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-22.

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Boletin de Educação Matemática, 34*(66), 40-68.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo, & J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Cabero-Fayos, I., Santágueda-Villanueva, M., Villalobos-Antúnez, J. V., & Roig-Albiol, A. I. (2020). Understanding of inverse proportional reasoning in pre-service teachers. *Education Sciences, 10*(11), 308-326.

Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. En F. Lester (Ed.), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving* (pp. 241-254). Reston, VA: NCTM.

Cai, J., & Lester, F. (2010). Why is Teaching with Problem Solving Important to Student Learning? *NCTM Research Brief, 13*(12), 1-6.

Cai, J., Mok, I., Reedy, V., & Stacey, K. (2016). *International comparative studies in mathematics: Lessons for improving students' learning.* Nueva York: Springer.

Camacho Machín, M. (2011). Investigación en Didáctica de las Matemáticas en el Bachillerato y primeros cursos de la universidad. En M. Marín Rodríguez, G. Fernández García, L. J. Blanco Nieto, & M. Palarea Medina (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 195-226). Ciudad Real: SEIEM.

Camacho Machín, M., & Santos Trigo, L. M. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las Matemáticas a través de la resolución de problemas. *Números, 58*, 45-60.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2013). Análisis Didáctico en una investigación sobre razonamiento inductivo. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 333-348). Granada: Universidad de Granada.

Carbonell, J. (2002). El profesorado y la innovación educativa. En P. Cañal de León (coord.), *La innovación educativa* (pp. 11-26). Madrid: Akal.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carr, W., & Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza. La investigación-acción en la formación del profesorado.* Barcelona: Ed. Martínez Roca.

Carretero, L. (1989). La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años. *Anuario de Psicología, 3*(42), 85–101.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Chace, A. B. (1979). *The Rhind mathematical papyrus.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Chevallard, Y., & Joshua, M. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques, 3*(1), 159-239.

Chin, E., & Lin, F. (2009). A comparative study on junior high school students' proof conceptions in algebra between Taiwan and the UK. *Journal of Mathematics Education, 2*(2), 52-67.

Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros.* Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Clark, M. R., Berenson, S. B., & Cavey, L. O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 297-317.

Climent, N., & Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias, 3*(21), 387-404.

Coleman, G. (2019). Action Research. En C. Costley, & J. Fulton, *Methodologies for practice research* (pp. 151-172). Londres: Sage.

Coll, C., & Sánchez, E. (2008). Presentación. El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de Educación, 346*, 15-32.

Colmenares, A. M., & Piñero, M. L. (2008). La investigación acción: Una herramienta metodológica heurística para la comprensión y transformación de realidades y prácticas socio-educativas. *Revista de Educación, 14*(27), 96-114.

Conejo, L., & Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación Matemática, 25*(3), 7-38.

Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. (2014). Justificación de las reglas de derivación en libros de texto de cuatro editoriales desde LGE hasta LOE. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 257-266). Salamanca: SEIEM.

Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 51-71.

Conejo, L., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2016). Esquemas de prueba en torno al concepto de proporcionalidad en los libros de texto. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, . . . A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 585). Málaga: SEIEM.

Coronas, C. (2021). *Semejanza: una propuesta didáctica para 2º de ESO.* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Cortina, J. L., Visnovska, J., & Zuniga, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality: supporting students' reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal, 26*(1), 79-99.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Cullen, C. (2004). *The Suàn shù shu, "Writings on reckoning": A translation of a Chinese mathematical collection of the second century BC, with explanatory commentary* (Vol. 34). Cambridge: Needham Research Institute.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement.* Nueva York: Springer.

Denzin, N. K. (1978). *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Methods.* Nueva York: McGraw-Hill.

Díaz, M. V., & Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números, 45*, 33-41.

Dole, S. (2000). Promoting Percent as a Proportion in Eighth-Grade Mathematics. *School Science and Mathematics, 100*(7), 380-389.

Dole, S., Cooper, T. J., Baturo, A. R., & Conoplia, Z. (1997). Year 8, 9 and 10 students' understanding and access of percent knowledge. *People in mathematics education (Proceedings of the 20th annual conference of the Mathematics Education Reasearch Group of Australasia*, (pp. 7-11). Rotorua.

Domenech, A., & Martínez-Juste, S. (2019). Actividades de razonamiento "up and down" para trabajar las fracciones en 1º de ESO. *Entorno Abierto, 29*, 13-18.

Domenech, A., & Martínez-Juste, S. (2021). Acercándonos a la probabilidad en 1.º ESO. *Entorno Abierto, 39*, 7-11.

Downton, A., & Sullivan, P. (2017). Posing complex problems requiring multiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. *Educational Studies in Mathematics, 95*(3), 303-328.

Elliot, J. (2000). *La Investigación-Acción en Educación* (Cuarta ed.). Madrid: Morata.

Elliot, J. (2005). *El cambio educativo desde la Investigación-Acción* (Cuarta ed.). Madrid: Morata.

Elliot, J. (2015). Lesson and Learning study and the idea of the teacher as a researcher. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 29*(3), 29-46.

English, L. D., & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. En L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education. Third edition* (pp. 313-335). Nueva York: Routledge.

English, L. D., & Kirshner, D. (2016). Changing agendas in international research in mathematics education. En L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education. Third edition* (pp. 3-18). Nueva York: Routledge.

Erbilgin, E. (2019). Two mathematics teacher educators' efforts to improve teaching and learning processes: An action research study. *Teaching and Teacher Education, 78*, 28-38.

Escolano, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente.* (Tesis Doctoral). Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Escolano, R., & Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática, 1*, 17-35.

Fan, L., & Zhu, Y. (2000). Problem solving in Singaporean secondary mathematics textbooks. *The Mathematics Educator, 5*(1/2), 117-141.

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education, 45*, 633-646.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción: Un estudio en la escuela primaria.* Valencia: Publicacions de la Universitat de València.

Fernández, A., & Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 5*(2), 397-416.

Fernández, C. (2010). *Características del desarrollo del razonamiento proporcional. Estrategias y mecanismos constructivos.* (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante, Alicante.

Fernández, C., & Llinares, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M. Moreno, J. Carrillo, & A. Estrada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281-290). Lleida: SEIEM.

Fernández, C., & Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 34*(1), 67-80.

Fernández, C., & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129-142.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2011). Effect of number structure and nature of quantities on secondary school students' proportional reasoning. *Studia Psychologica, 53*(1), 69-81.

Fernández, F., & Segovia, I. (2011). Proporcionalidad entre magnitudes. Medidas indirectas. En I. Segovia, & L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Erimaria* (pp. 375-400). Madrid: Pirámide.

Fernández, P., Caballero, P., & Fernández, J. A. (2013). ¿Yerra el niño o yerra el libro de matemáticas? *Números, 83*, 131-148.

Ferrer, M., Fortuny, J. M., & Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las ciencias, 32*(3), 385-405.

Fiol, M. L., & Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa: la forma y el número.* Madrid: Síntesis.

Fisher, L. C. (1988). Strategies used by secondary mathematics teachers to solve proportion problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 157-168.

Flick, U. (2007). *Managing quality in qualitative research.* Londres: Sage.

Flores, R., Koontz, E., Inan, F. A., & Alagic, M. (2015). Multiple representation instruction first versus traditional algorithmic instruction first: Impact in the middle school mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 267-281.

Fraile Rey, M. A. (2018). Análisis de procesos de resolución de problemas en preguntas liberadas de TIMSS-20112. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 7*(2), 38-54.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fried, M. N., & Amit, M. (2016). Reform as an issue for mathematics education research. Thinking about change, communication and cooperation. En L. D. English, & D. Kishner, *Handbook of international research in mathematics education. Third edition* (pp. 257-274). Nueva York: Routledge.

Fuentes, C. (2020). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca de la proporcionalidad : un estudio de casos.* (Tesis Doctoral). Universidad de Huelva, Huelva.

Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación.* (Tesis Doctoral). Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Gairín, J. M. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos: un estudio con maestros en formación. *Contextos educativos, 4*, 137-159.

Gairín, J. M. (2010). *Proporcionalidad aritmética.* Colección Práxis. Guías para Educación Secundaria Obligatoria, España: Wolters Kluwer Educación.

Gairín, J. M., & Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma, 62*, 35-48.

Gairín, J. M., & Muñoz-Escolano, J. M. (2005). El número racional en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial. Comunicación al grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. En *Investigación en Educación Matemática IX.* Córdoba: SEIEM.

Gairín, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2011). Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, & A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 179-189). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Gairín, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa, A. Contreras, J. P. Deulofeu, & F. J. García, *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 249-259). Jaén: SEIEM.

Gairín, J. M., & Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos.* Madrid: Síntesis.

Gallardo, J., & González-Marí, J. L. (2013). Análisis Didáctico como método para el tratamiento de los antecedentes bibliográficos en la investigación en Educación Matemática. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 415-432). Granada: Universidad de Granada.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* (Tesis Doctoral). Universidad de Jaen, Jaen.

García, F. J., Wake, G., Lendínez, E. M., & Lerma, A. M. (2019). El papel de los modelos epistemológicos y didácticos en la formación del profesorado a través del dispositivo del estudio de clase. *Enseñanza de las ciencias, 37*(1), 137-156.

García, G., Granados, R., & Pinillos, O. (2009). Razonamientos proporcionales en estudiantes de Enfermería. *El hombre y la máquina, 21*(33), 72-81.

García, M. M., & Romero, I. M. (2013). Uso del Análsis Didáctico en una Investigación-Acción en secundaria: un avance sobre el análisis de actuación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina, *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 253-270). Granada: Universidad de Granada.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma, 19*, 51-63.

Gheverghese, G. (1996). *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid: Pirámide.

Godino, J. D., & Burgos, M. (2020). ¿ Cómo enseñar las matemáticas y ciencias experimentales? Resolviendo el dilema entre transmisión e indagación. *Revista Paradigma, 41*, 80-106.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de compañías. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2*(2-3), 19-29.

Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. En A. T. Maz, & L. Rico (coords.), *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática* (pp. 49-69). Córdoba: Publicaciones Universidad de Córdoba.

Gómez, B. (2011a). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA, 5*(2), 49-65.

Gómez, B. (2011b). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon, 28*(1), 9-22.

Gómez, B. (2015). Los problemas de aligación. En P. R. Scott, & Á. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 12: Historia y Epistemología* (pp. 108-119). República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Gómez, B. (2016). Sobre el análisis didáctico de la razón. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiañez, J. F. Ruiz, & M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 165-174). Granada: Cimares.

Gómez, B., & García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, A. D., & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-292.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(especial), 78-89.

Gómez-Torres, E., Ortiz, J. J., & Gea, M. M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en los libros de texto españoles en educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5*, 49-71.

González, M. J., & Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia, & L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 351-374). Madrid: Pirámide.

González, M. T. (2009). La investigación en Historia de la Educación Matemática. *Educación y Ciencia, 1*(36), 37-58.

González, M. T., & Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

Guacaneme, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA, 7*(1), 3-42.

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P., & Rico, L. (2016). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio. *Educación XX1, 19*(1), 135-158.

Hailikari, T., Nevgi, A., & Lindblom-Ylänne, S. (2007). Exploring alternative ways of assessing prior knowledge, its components and their relation to student achievement: A mathematics based case study. *Studies in educational evaluation, 33*(3-4), 320-337.

Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1989). Proportional Reasoning: The Effect of Two Context Variables, Rate Type and Problem Setting. *Journal for Research in Science Teaching, 26*(1), 205-220.

Hilton, A., Hilton, G., Dole, S., & Goos, M. (2016). Promoting middle school students' proportional reasoning skills through an ongoing professional development programme for teachers. *Educational Studies in Mathematics, 92*(2), 193-219.

Hino, K., & Kato, H. (2019). Theaching whole-number multiplication to promote children's proportional reasoning: a practice-based perspective from Japan. *ZDM, 51*(1), 125-137.

Houssaye, J. (1988). *Le triangle pédagogique.* Berna: Peter Lang.

Howe, C., Nunes, T., & Bryant, P. (2011). Rational number and proportional reasoning: using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(2), 391-417.

Huntley, M. A., & Terrell, M. S. (2014). One-step and multi-step linear equations: a content analysis of five textbooks series. *ZDM Mathematics Education, 46*, 751-66.

Ibáñez, C. (2018). *Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para 4º de ESO.* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Ibáñez, C., & Martínez-Juste, S. (2020). Proporcionalidad aritmética en libros de texto de 4º de ESO. *Suma, 95*, 51-58.

Incikabi, L., & Tjoe, H. (2013). A comparative analysis of ratio and proportion problems in turkish and the us middle school mathematics textbooks. *Journal of Kirsehir Education Faculty, 14*(1), 1-15.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* New York: Basic Books.

Jiang, C., Hwang, S., & Cai, J. (2014). Chinese and Singaporean sixth-grade students' strategies for solving problems about speed. *Educational Studies in Mathematics, 87*, 27-50.

Kaput, J., & Roschelle, J. (1998). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. En C. Hoyles, M. C., & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 155-170). London: Springer-Verlag.

Karplus, E. F., Karplus, R., & Wollman, W. (1974). Intellectual development beyond elementary school IV: Ratio, the influence of cognitive style. *School Science and Mathematics, 74*(6), 476-482.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). Nueva York: Academic Press.

Kemmis, S., McTaggart, R., & Nixon, R. (2013). *The action research planner: Doing critical participatory action research.* Nueva York: Springer.

Kielmann, K., Cataldo, F., & Seeley, J. (2012). *Introduction to qualitative research methodology: a training manual.* Reino Unido: Department for International Development (DfID).

Kieren, T. E. (1980). The rational numbers construct. Its elements and mechanisms. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125-150). Columbus, Ohaio: ERIC/SMEAC.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis : an introduction to its methodology.* Londres: Sage.

Kvale, S. (2007). *Doing Interviews.* Londres: Sage.

Lamon, S. J. (1993a). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. En T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Rombreg (Eds.), *Rational numbers. An integration of research* (pp. 131-156). Hillsdale, NJ: Lawrens Erlbaun Associates, Publishers.

Lamon, S. J. (1993b). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 41-61.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towar a theoretical framework for research. En F. K. Lester Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). Charlotte, NC: NCTM-Information Age Publishing.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3ª ed.). Nueva York: Routledge.

Lembke, L. O., & Reys, B. J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(3), 237-259.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: NCTM-Information Age Publishing.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.

Levain, J. P., & Vergnaud, G. (1995). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. *Grand N, 56*, 55-67.

Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of lesson study. *Educational researcher, 35*(3), 3-14.

Lo, J. J., Cai, J., & Watanabe, T. (2001). A comparative study oh the selected textbooks from China, Japan, Taiwan, and de United States on the teaching of ratio and proportion concepts. En R. Speiser, C. A. Maher, & C. N. Walter (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 509-520). Columbus, OH: Clearinghouse for Sciencie, Mathematics, And Environmental Education.

Lopes, J. B., & Costa, N. (1996). Modelo de enseñanza-aprendizaje centrado en la resolución de problemas: Fundamentación, presentación e implicaciones educativa. *Enseñanza de las ciencias, 14*(1), 45-61.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI Revista de Educación, 4*, 167-179.

López, M., & Alsina, Á. (2015). La influencia del método de enseñanza en la adquisición de conocimientos matemáticos en educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 4*(1), 1-10.

López-Rueda, G., & Figueras, O. (1999). Qualitative reasoning in problem solving related to ratio, proportion, and proportional variation concepts. En F. Hitt, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of mathematics Education* (Vol. 2, pp. 599-605). México: Cinvestav. Columbus, Ohio: ERIC.

Lundberg, A. (2011). Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7)* (pp. 336-345). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis Didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 81-102). Granada: Universidad de Granada.

Madden, J. J. (2018). Knowing Ratio and Proportion for Teaching. En Y. Li, W. J. Lewis., & J. J. Madden (Eds.), *Mathematics Matters in Education* (pp. 93-115). Cham, Suiza: Springer.

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C., & López-Esteban, C. (2017). Applications of Mathematics to Everyday Life in Spanish Arithmetic Books Published in the 16th Century. *Boletim de Educação Matemática, 31*(59), 1082-1100.

Mahajan, S., Marciniak, Z., Schmidt, B., & Fadel, C. (2016). *PISA Mathematics in 2021.* Center for Curriculum Redesign. Obtenido de http://https://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Recommendations-for-PISA-Maths-2021-FINAL-EXTENDED-VERSION-WITH-EXAMPLES-CCR.pdf

Martínez González, R. A. (2007). *La investigación en la práctica educativa: Guía metodológica de investigación para el diagnóstico y evaluación en los centros docentes* (Vol. 5). Madrid: Ministerio de Educación.

Martínez-Juste, S. (2019). Elaboración y consolidación de secuencias didácticas innovadoras de matemáticas en secundaria mediante el desarrollo de Lesson Studies. *Libro de actas CIMIE19.* AMIE. Disponible en https://amieedu.org/actascimie19/.

Martínez-Juste, S., & Domenech, A. (2019). Lesson study para innovar en matemáticas. *Entorno Abierto, 30*, 7-10.

Martínez-Juste, S., Arican, M., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller Marcén, A. M. (2021a). Diagnostic Classification Models to Compare Proportional Reasoning of Turkish and Spanish Middle School Students. *International Online Conference on Mathematics Education*, (pp. 123-125). Estambul, Turquía.

Martínez-Juste, S., Arican, M., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2021b). *A diagnostic comparison of Spanish and Turkish middle school students' proportional reasoning.* Manuscrito presentado para su publicación.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). Salamanca: SEIEM.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2015a). Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 351-359). Alicante: SEIEM.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2015b). Un estudio comparativo sobre la proporcionalidad compuesta en los libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante la LOGSE-LOE-LOMCE. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 95-115.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2015c). Enseñando proporcionalidad aritmética en 1º de ESO. *Entorno Abierto, 4*, 11-12.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2018). ¿Cómo resuelven problemas de repartos proporcionales alumnos sin experiencia previa? *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas.*, *CB-721*, pp. 121-129. Madrid.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2019a). Una experiencia de Investigación-Acción para la enseñanza de la proporcionalidad compuesta. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(2), 85-106.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., & Oller-Marcén, A. M. (2019b). Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & A. Alsina, *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 413-422). Valladolid: SEIEM.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M., & Ortega, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de ESO. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20*(1), 95-122.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M., & Pecharromán, C. (2015). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de ESO. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (Ed.), *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 459-470). Lugar: Academia de Artillería de Segovia.

Masson, R. K. (1975). *The time-function model: A new approach to the study of per cent concepts with relevant statistical and verbal comparisons.* (Tesis Doctoral). West Virginia University, Virginia, EEUU.

Mays, N., & Pope, C. (2000). Assessing quality in qualitative research. *BMJ, 320*(7226), 50-52.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y división.* Madrid: Síntesis.

Maz-Machado, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* (Tesis Doctoral). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Maz-Machado, A., & Gutiérrez, M. P. (2008). Errores de los estudiantes de magisterio frente a situaciones que implican porcentajes. *Investigación, 17*(1), 59-69.

Maz-Machado, A., & Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de Matemáticas de los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), 49-76.

McNiff, J. (1992). *Action Research: principles and practice.* Canadá: Routledge.

MEFP. (2020). *TIMSS 2019. Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias. Informe español.* Secretaría General Técnica.

Memiş, Y. (2019). Comparison of Japanese and Turkish textbooks: Giving opportunities for creative reasoning in terms of proportion. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)* (pp. 4266-4273). Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Mendoza, T., & Block, M. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-1), 177-190.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics, 72*, 199-218.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática, 24*(1), 133-157.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Student's improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology, 27*(1), 75-92.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2009). Proportional reasoning: the strategies behind the percentages. *Acta Didactica Universitatis Comenianae, 9*, 25-40.

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A., & Spanoudis, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(3), 313-324.

Monje, J., & Gómez, B. (2019). Rutas cognitivas de futuros maestros ante una situación comparativa de razones desiguales. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(2), 151-172.

Monteiro, C. (2003). Prospective elementary teachers' misunderstanding in solving ratio and proportion problemas. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th Joint Meeting of PME and PMENA, 3* (pp. 317-323). Honolulu, EE.UU.: PME/University of Hawaii.

Monterrubio, M. C., & Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M. J. González, G. M. T., & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Morice-Singh, C. (2018). Indian Calculation: The Rule of Three - Quite a Story. En E. Barbin, J. P. Guichard, M. Moyon, P. Guyot, C. Morice-Singh, F. Métin, . . . G. Hamon, *Let History into the Mathematics Classroom* (pp. 47-57). Springer International Publishing.

Moss, J. (2002). Percents and proportion at the center: Altering the teaching sequence for rational number. En B. Litwiller, & B. (., *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 109-120). Reston, Virginia: National Council of Teacher of Mathematics.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International results in mathematics.* Chestnut Hill, USA: Boston College.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, USA: NCTM.

Nesher, P. (1987). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. *Meeting of the Working Group on Middle School Number Concepts.*

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at successive stages: problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in mathematics, 11*(3), 331-363.

Nortes, A., Huedo, T., López, J. A., & Martínez, R. (2003). Conocimientos matemáticos de maestros en formación. *Suma, 44*, 71-82.

Norton, S. J. (2005). The construction of proportional reasoning. En H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Melbourne: PME.

Novo, M. L., Alsina, Á., Marbán, J. M., & Berciano, A. (2017). Inteligencia conectiva para la educación matemática infantil. *Comunicar: Revista Científica de Comunicación y Educación, 52*(25), 29-39.

Nunes, T., Desli, D., & Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research, 39*, 651-675.

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 59-81.

Occelli, M., & Valeiras, N. (2013). Los libros de texto de ciencias como objeto de investigación: Una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(2), 133-152.

OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana.* Madrid: Santillana.

OCDE. (2013). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe Español. Volumen I: Resultados y contexto.* MECD.

OCDE. (2014). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics Reading and Science (Volume I).* OCD.

OCDE. (2015). *Dónde se sitúa su centro educativo en el contexto internacional: PISA para centros educativos prueba piloto 2013-2014.* París: OCDE.

Oliveira, I. (2009). Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. *Boletin de Educação Matemática, 34*, 57-80.

Oller-Marcén, A. M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid.

Oller-Marcén, A. M., & Gairín, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(3), 317-338.

Oller-Marcén, A. M., & Gairín, J. M. (2016). Proportionality problems in some mathematical texts prior to fourteenth century. En K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 1859-1865).

Ortega, T., Pecharromán, C., & Sosa, P. (2011). La importancia de los enunciados de problemas matemáticos. *Educatio Siglo XXI, 29*(2), 99-116.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research, 65*(4), 421-481.

Patiniotis, M. (2006). Textbooks at the crossroads: Scientific and philosophical textbooks in 18th century Greek education. *Science & Education, 15*(7-8), 801-822.

Peled, I., & Balacheff, N. (2011). Beyond realistic considerations: Modeling conceptions and controls in task examples with simple word problems. *ZDM Mathematics Education, 43*, 307-315.

Peled, I., & Bassan-Cincinatus, R. (2005). Degrees of freedom in modeling: taking certainty out of proportion. En H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 57-64). Melbourne: PME.

Pérez-Bueno, B., Liñán, M. M., & Barrera, V. (2018). Conocimiento especializado de los estudiantes para profesor de primaria en la resolución de problemas de proporcionalidad compuesta basada en las unidades de medida. *Escuela Abierta, 21*(1), 47-64.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children.* New York: Norton.

Piaget, J., Grize, J. B., Szeminska, A., & Vinh, B. (1968). *Epistémologie et Psychologie de la Fonction.* Paris: Presses Universitaires de France.

Picado, M., & Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA, 6*(1), 11-27.

Pino, J., & Blanco, L. J. (2008). Análisais de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones, 38*, 63-88.

Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación Matemática, 18*(1), 37-72.

Pöhler, B., & Prediger, S. (2015). Intertwining lexical and conceptual learning trajectories - A design research study on dual macro-scaffolding towards percentages. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1697-1722.

Ponte, J., & Marques, S. (2011). Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study. *RIPEM, 1*(1), 36-53.

Porres, M. (2011). *Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías.* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understandings. En A. Coxford, & A. Shulte (Eds.), *The Idea of Algebra K-12: Yearbook NCTM* (pp. 78-90). Resto, VA: NCTM.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, . . . M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ICE-Horsori.

Puig, L., & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2013). Antecedentes del Análisis Didáctico en Educación Matemática. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 23-58). Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (2016). Matemáticas escolares: fines educativos y estructura curricular. En L. Rico, & A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 31-44). Madrid: Pirámide.

Rico, L., & Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada: Universidad de Granada.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria: el caso de los números naturales. *Suma, 58*, 7-23.

Riehl, S. M., & Steinthorsdottir, O. B. (2019). Missing-value proportion problems: The effects of number structure characteristics. *Investigations in Mathematics Learning, 11*(1), 56-68.

Rivas, M. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de Educación Primaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Rivas, M., Godino, J. D., & Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Boletin de Educação Matemática, 26*(42B), 559-588.

Rivas, M., Godino, J. D., & Konic, P. (2009). Análisis epistémico y cognitivo de tareas en la formación de profesores de matemáticas. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 453-462). Santander: SEIEM.

Robins, G., & Shute, C. (1987). *The Rhind mathematical papyrus. An ancient Egypcian text.* London: British Museum Publications.

Rodríguez, J. (2007). La investigación sobre los libros de texto y materiales curriculares. En *Primer seminario internacional de textos escolares (SITE)* (pp. 185-191). Santiago de Chile: Mineduc.

Rodríguez-Muñiz, L. J., & Díaz, P. (2018). Las investigaciones sobre la estadística y la probabilidad en los libros de texto de Bachillerato. ¿Qué se ha hecho y qué se puede hacer? *Avances de Investigación en Educación Matemática, 14*, 65-81.

Rojas, H. F. (2021). *Características del desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de Ecuador de 11 a 16 años: Una trayectoria de aprendizaje.* (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante, Alicante.

Romera, M. J. (2012). La investigación-acción en Didáctica de las Matemáticas: teoría y realizaciones. *Revista Investigación en la Escuela, 78* , 69–80.

Romera, M. J. (2014). La investigación-acción en didáctica de las ciencias: perspectiva desde las revistas españolas de educación. *Enseñanza de las ciencias, 1*(32), 221–239.

Romero, I. M. (1995). *Introducción del número real en educación secundaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Roschelle, J., Shechtman, N., Tatar, D., Hegedus, S., Hopkins, B., Empson, S., . . . Gallagher, L. (2010). Integration of technology, curriculum, and professional development for advancing middle school mathematics: Three large-scale studies. *American Educational Research Journal, 47*(4), 833-878.

Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberría, J., & Sarasua, J. (2013). Los libros de texto de Matemáticas del Bachillerato en el periodo 1970-2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(2), 245-276.

Rupley, W. H. (1981). *The effects of numerical characteristics on the difficulty of proportional problems.* (Tesis doctoral). University of California, Berkeley, EEUU.

Rupp, A., Templin, J., & Henson, R. (2010). *Diagnostic measurement: Theory, methods, and applications.* Nueva York: Guilford.

Ruthven, K., & Goodchild, S. (2016). Knowledge creation through dialogic interaction between the practices of teaching and researching. En l. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education. Third edition* (pp. 523-539). Nueva York: Routledge.

Sánchez Ramón, J. M. (2005). La innovación educativa institucional y su repercusión en los centros docentes de Castilla-La Mancha. *REICE - Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 3*(1), 637-664.

Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(1), 65-97.

Sánchez, E. A. (2014). Hacer un reparto proporcional o un reparto equitativo: ¿cómo influye el contexto para tomar la decisión? *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 44-60.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *Learn Math, 7*(3), 41-51.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Hillsdale, NJ: Earlbaum.

Seidman, I. (2006). *A Guide for Researchers in Education And the Social Sciences.* Nueva York: Teachers College Press.

Sen, S., & Arican, M. (2015). A diagnostic comparison of Turkish and Korean students' mathematics performances on the TIMSS 2011 assessment. *Journal of Measurement and Evaluation in Education and Psychology, 6*(2), 238-253.

Shen, K., Crossley, J. N., & Lun, A. W. (1999). *The nine chapters on the mathematical art: Companion and commentary.* Oxford: Oxford University Press.

Shield, M., & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 183-199.

Sierra, M., González, M. T., & López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y C.O.U: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463-476.

Sierra, M., González, M. T., & López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles del siglo XX. *Educación Matemática, 15*(1), 21-51.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Boook of Calculation.* New York: Springer Verlag.

Silvestre, A. I., & da Ponte, J. P. (2011). Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Educación y Pedagogía, 23*(59), 137-158.

Silvestre, A. I., & da Ponte, J. P. (2012). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. *PNA, 6*(3), 73-83.

Singer, J. A., & Resnick, L. B. (1992). Representation of Proportional Relationships: Are Children Part-part or Part-whole Reasoners? *Educational Studies in Mathematics, 9*, 55-73.

Singh, K. (2007). *Quantitative social research methods.* Londres: Sage.

Singh, P. (2000a). Understanding the concepts of proportion and ratio among grade nine students in Malaysia. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(4), 579-599.

Singh, P. (2000b). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics, 43*, 271-292.

Smith, M., & Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Solar, H., & Zamorano, A. (2006). Algebrización en la proporcionalidad de magnitudes. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 507-526). Jaen: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaen.

Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: Part-part comparisons about continuos and discontinuos quantity. *Mathematical Cognition, 5*, 181-197.

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variable influencing of the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. En J. Novotná, H. Moraová, K.

M., & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 169-176). Praga: PME.

Stenhouse, L. (1998). *La investigación como base de la enseñanza. Ediciones Morata.* Madrid: Morata.

Stigler, J. W., Gallimore, R., & Hiebert, J. (2000). Using video surveys to compare classrooms and teaching across cultures: Examples and lessons from the TIMSS video studies. *Educational Psychologist, 35*(2), 87-100.

Stray, C. (1994). Paradigms regained: towards a historical sociology of the textbook. *Journal of Curriculum Studies, 26*(1), 1-29.

Tarr, J. E., Chávez, Ó., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2006). From the written to the enacted curricula: The intermediary role of middle school teachers in shaping students' opportunity to learn. *School Sciencie and Mathematics, 106*(4), 191-201.

Tinoco, J. C., Albarracín, L., & Deulofeu, J. (2021). Estrategias de proporcionalidad simple en las aulas de Matemáticas y de Física. En P. D. Diago, Y. D. F., M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 603-610). Valencia: SEIEM.

Torralbo, M., Vallejo, M., Fernández, A., & Rico, L. (2004). Análisis metodológico de la producción española de tesis doctorales en educación matemática (1976-1998). *RELIEVE, 10*(1), 41-59.

Torres, E. (2015). *Características del desarrollo del razonamiento proporcional. Estrategias y mecanismos constructivos.* (Tesis Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Vahey, P., Rafanan, K., Patton, C., Swan, K., van't Hooft, M., Kratcoski, A., & Stanford, T. (2012). A cross-disciplinary approach to teaching data literacy and proportionality. *Educational Studies in Mathematics*, 179-205.

Valverde, A. G. (2012). *Competencias Matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria.* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Valverde, A. G., & Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander: SEIEM.

Valverde, A. G., Castro, E., & Molina, M. (2013). Empleo del análisis didáctico en un experimento de enseñanza con futuros maestros de Educación Primaria. En L. Rico, J. L. Lupiañez, & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación en innovación curricular* (pp. 211-230). Granada: Comares.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in Mathematics, 54*(1), 9-35.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the learning of mathematics, 25*(2), 2-23.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction, 14*(5), 485-501.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' over-use of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 311-342.

Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspective on Mathematics Education* (pp. 141-171). Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Vanderlinde, R., & van Braak, J. (2010). The gap between educational research and practice: Views of teachers, school leaders, intermediaries and researchers. *British Educational Research Journal, 36*(2), 299-316.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* Nueva York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicatives Structures. En J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: NCTM.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique de Mathematique, 10*, 133-170.

Vula, E. (2019). Action research as a potent methodology for improving teaching and learning in mathematics. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)* (pp. 3539-3546). Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht Unversity and ERME.

Vygotsky, L. (1998). *Pensamiento y lenguaje.* Barcelona: Paidós.

Wijayanti, D., & Winsløw, C. (2017). Mathematical practice in textbooks analysis: praxeological reference models, the case of proportion. *REDIMAT, 6*(3), 307-330.

Wiles, R. (2013). *What are Qualitative Research Ethics?* Londres: Bloomsbury academic.

Wright, P. (2017). Critical relationships between teachers and learners of school mathematics. *Pedagogy, Culture & Society, 25*(4), 515-530.

Zapico, M. H. (2007). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. En *Primer seminario internacional de textos escolares (SITE)* (pp. 149-155). Santiago de Chile: Mineduc.

Anexo I:
Fichas de trabajo de los alumnos y pruebas escritas

AI.1. Fichas de trabajo 1º de ESO

Fichas de trabajo en el ciclo II-1:

https://drive.google.com/file/d/1nFTQu0DYDtkRk5HGWQVHDyi-cEzaZCON/view?usp=sharing

Fichas de trabajo en el ciclo III-1:

https://drive.google.com/file/d/1y_aa1C0kZRLn9xhCdCUGcOkum3Oig67q/view?usp=sharing

AI.2. Fichas de trabajo de 2º de ESO

Fichas de trabajo en el ciclo I-2:

https://drive.google.com/file/d/1jikzAwOirP7OM9bpb1KYAWisbbIcBQzP/view?usp=sharing

Fichas de trabajo en el ciclo II-2:

https://drive.google.com/file/d/1yHgFP2P61_hivG_KEgEEZC3Z8GsJV34g/view?usp=sharing

Fichas de trabajo en el ciclo III-2:

https://drive.google.com/file/d/1_tZzGUNwMmoeNtfua1obVpq6Ld0jgDNI/view?usp=sharing

AI.3. Prueba escrita de 1º de ESO

https://drive.google.com/file/d/1Q46_j5-gP4OqXY7Qkt0jhB9gaiPEa_53/view?usp=sharing

AI.4. Prueba escrita de 2º de ESO

https://drive.google.com/file/d/1vvsXpnqd5xSKHk1r-sj8-hWKMN7ygJl6/view?usp=sharing

Anexo II:
Diarios de clase

AII.1. Diarios de clase del ciclo II-1

Diario de clase del grupo A del ciclo II-1:

https://drive.google.com/file/d/1Vr5bpSDYqsFxsIhw8lElVkciFNxJv2Sb/view?usp=sharing

Diario de clase del grupo B del ciclo II-1:

https://drive.google.com/file/d/1NTVxiRHAX0RpBECxgaErduCis_iIrUr0/view?usp=sharing

Diario de clase del grupo D del ciclo II-1:

https://drive.google.com/file/d/1X9LPAMcYqXBWip3Zz3BLLpg2qv7Gvu7y/view?usp=sharing

AII.2. Diario de clase del ciclo I-2

https://drive.google.com/file/d/15Q_LZrojJ7-Jr5JW9s-VlmWY6jR7NiK6/view?usp=sharing

AII.3. Diarios de clase del ciclo III-1

Diario de clase del grupo B del ciclo III-1:

https://drive.google.com/file/d/17kkEsOpbPFSu3jaJ2Hk0nxbmLCkVXt4F/view?usp=sharing

Diario de clase del grupo C del ciclo III-1:

https://drive.google.com/file/d/1cZikaClkd1tLfFnFa2XDWC55BD3fAuTR/view?usp=sharing

Diario de clase del grupo D del ciclo III-1:

https://drive.google.com/file/d/1_ozL6tgRtP5UWIcQ_1M_IMopfZpJk01M/view?usp=sharing

AII.4. Diario de clase del ciclo II-2

https://drive.google.com/file/d/1a9kmVdeA22qob6jd_Hthx0FlyFp5fH5h/view?usp=sharing

AII.5. Diario de clase del ciclo III-2

https://drive.google.com/file/d/1HEsXUA6hINISPnDxb4mCTvayYCKIwZAa/view?usp=sharing

Anexo III:
Producciones de los alumnos

AIII.1. Producciones del ciclo II-1

Producciones del **grupo experimental** A:

https://drive.google.com/drive/folders/1iOnzj1t_6OwXB_7bLEPITKsa-OgbZej7?usp=sharing

Producciones del **grupo experimental** B:

https://drive.google.com/drive/folders/1LFjYgVxB0_9-VD88u1plL54Xd3v5NNrM?usp=sharing

Producciones del **grupo experimental** D:

https://drive.google.com/drive/folders/1DtC7V5E8I3YPwPCKeGhCUdmoKmZJe_Oo?usp=sharing

Producciones del **grupo de control** C:

https://drive.google.com/drive/folders/1aUn35_2F_4729xTTMnPyHnDBTMzex0qb?usp=sharing

AIII.2. Producciones del ciclo I-2

Producciones del **grupo experimental**:

https://drive.google.com/drive/folders/1SLf5vkcgVs_KfTG3VlF4yBPVwmidtF_6?usp=sharing

Producciones del **grupo de control**:

https://drive.google.com/drive/folders/1kEyQ7wNFp5OCeJ6D2_gOZXNLKEXE8SWM?usp=sharing

AIII.3. Producciones del ciclo III-1

Producciones del **grupo experimental** B:

https://drive.google.com/drive/folders/1NVdJeqvRrJDFUQ5DL0_550nNhwzyLpYI?usp=sharing

Producciones del **grupo experimental** C:

https://drive.google.com/drive/folders/1syGcpbkPzWdVjbBZNAayY2LD7mP4j0ZM?usp=sharing

Producciones del **grupo experimental** D:

https://drive.google.com/drive/folders/1O6Mz1WlhC6g3-ngwYs5CwrSWcVXCAGCj?usp=sharing

Producciones del **grupo de control** A:

https://drive.google.com/drive/folders/1ZW51YM9i29BfJVzoLrQ4NZqX129yQkCW?usp=sharing

AIII.4. Producciones del ciclo II-2

Producciones del **grupo experimental**:

https://drive.google.com/drive/folders/1Oj1qSjti05xL4CO31SbxklBNfc9iyiho?usp=sharing

Producciones del **grupo de control**:

https://drive.google.com/drive/folders/1a_l_a8eCV5ckVJXZk58OA0oxpI6492XT?usp=sharing

AIII.5. Producciones del ciclo III-2

Producciones del **grupo experimental**:

https://drive.google.com/drive/folders/1N9lMxXdT_U5YWiXE0WfEfLJ98cbz2uOB?usp=sharing

Producciones del **grupo de control**:

https://drive.google.com/drive/folders/1a_l_a8eCV5ckVJXZk58OA0oxpI6492XT?usp=sharing

Anexo IV: Entrevistas

AIV.1. Entrevistas en el ciclo II-1

AIV.1.1. Entrevista al alumno A3.2

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1ETwZ0BeHPTWkOHxLLezI_oHa0cbEEnU/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/1lIGykfu5xrWm_IJb7tVOWuyeDUelrfns/view?usp=sharing

AIV.1.2. Entrevista al alumno A1.1

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1mhIbhnZ4tWbjLl_8WwehxySxm9eZNznm/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/1a73H0HI5mjvuhJjvC0Y8Y-bWkGpmzF_H/view?usp=sharing

AIV.1.3. Entrevista al alumno A4.1

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1qRb_GaW2Z2tA9yQTa28EVLvUSbK2ljPS/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/1huYPG2RGB0W3djUWT_WzHrM8sy8Rot_R/view?usp=sharing

AIV.2. Entrevistas en el ciclo III-1

AIV.2.1. Entrevista al alumno D5.2

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1LcOzv2PmRvmrWUgL3MjWIh6dgHXyP8WI/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/14amNjDPRegKuZnm6yxN_dvBcrXac6B7r/view?usp=sharing

AIV.2.2. Entrevista al alumno C6.2

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1-piHzFK0DRQtm7IMgdTyo5xxqS9F2KOz/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/1zdS7a3Lg-yruCxs_K7eomvQqQig0NHlS/view?usp=sharing

AIV.2.3. Entrevista al alumno C4.1

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1kbuCwOPMzexT1Y5C_jr_yQNi26DnYzsf/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/1M02hyhTgXQylsYJ87Q-uCBYdY4SOoEIl/view?usp=sharing

AIV.2.4. Entrevista al alumno B5.1

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1Hb1Is5lcWiTsIQczYKxTsrMaCoYrypg9/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/1MyCVhXGKXHvkhMgdEb7M4VlRfWjRbrEF/view?usp=sharing

AIV.3. Entrevistas en el ciclo II-2

AIV.3.1. Entrevista al alumno A10.2

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1igp9ciHC89JXQV16AB6eghwl2LwwXN24/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/1XotvC12xVFrSpq83Avb6cWdGBP3Um9LH/view?usp=sharing

AIV.3.2. Entrevista al alumno A2.2

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1naZPy9H34M84rtVzFAqDrORsEv4orV7e/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/1B4bjFMeagDasJaf02R2IxEhnqw45mY0N/view?usp=sharing

AIV.3.3. Entrevista al alumno A8.2

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1Iuwt_Cjl8mnoz90rt-TrawCJ3Edwa33E/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/1l_v6sN7yYnC2zS5fhFLBZN3AeXdpFvwp/view?usp=sharing

AIV.4. Entrevistas en el ciclo III-2

AIV.4.1. Entrevista al alumno B7.1

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1arUteZFJPnhdGp3oZqu4S0Pc3fEOehWZ/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/1uyzrfpvriMAHf8rHzpnlOJNNqHA5zwLa/view?usp=sharing

AIV.4.2. Entrevista al alumno B4.2

Guion de la entrevista semiestructurada:

https://drive.google.com/file/d/1OoyYt1wkC8I4RPO2Yd8YALJ8UocMRVQo/view?usp=sharing

Grabación de la entrevista:

https://drive.google.com/file/d/1UcXW5sMsfGFX9lzbzSbDLGoWlspGqstg/view?usp=sharin

Anexo V:
Observadores externos

AV.1. Protocolo de observación de las sesiones

https://drive.google.com/file/d/1rZB3LtFzoUGAk1p5_ONz9lS3fEePbOPq/view?usp=sharing

AV.2. Dosieres proporcionados a los observadores externos

Dosier para el observador externo del ciclo II-1:

https://drive.google.com/file/d/1VI7ssq05TbXpJ5eD_r4_amtFYI9laVdM/view?usp=sharing

Dosier para el observador externo del ciclo I-2:

https://drive.google.com/file/d/1wZWUWTG_IaQTzgusSf_a0kTee5Z_lzvO/view?usp=sharing

Dosier para el observador externo del ciclo III-1:

https://drive.google.com/file/d/1M71fzIf_ibm_3e-l5c5mUZttL3F-9UVk/view?usp=sharing

Dosier para el observador externo del ciclo II-2:

https://drive.google.com/file/d/1NJziX3U57Ng3lw2SbfmW_j6G_eGHKpxn/view?usp=sharing

Dosier para el observador externo del ciclo III-2:

https://drive.google.com/file/d/1dhLP7szd5QvMdVZEKmxvJLBDKiqoOV0P/view?usp=sharing

AV.3. Respuestas de los observadores externos

Respuestas del observador externo en el ciclo II-1:

https://drive.google.com/file/d/11IeBY6z-0Uv5zk6wy9BcpFa0kd_ZgdZs/view?usp=sharing

Respuestas del observador externo en el ciclo I-2:

https://drive.google.com/file/d/1VAg4DgCvwahmcpB9rGYASxKJRIbFOLDd/view?usp=sharing

Respuestas del observador externo en el ciclo III-1:

https://drive.google.com/file/d/1FtIw_Lzj6dIRZ4dQsO3BVPPx9j26N2ek/view?usp=sharing

Respuestas del observador externo en el ciclo II-2:

https://drive.google.com/file/d/1Shv5APAhPRVD-HaDVEhn6dq3U-DQcX7R/view?usp=sharing

Respuestas del observador externo en el ciclo III-2:

https://drive.google.com/file/d/1eFcOELxGyxMBX9epYkmyFPQpi-znA2OZ/view?usp=sharing

Anexo VI:
Circulares informativas y permisos

AVI.1. Permisos generales toma de imágenes y uso

Autorización para la toma y difusión de imágenes para uso pedagógico:

https://drive.google.com/file/d/1sEBvFre6qC_WDUFxt87IwlG_QHYT8apl/view?usp=sharing

AVI.2. Circulares y autorizaciones 1º ESO

Circular informativa y autorización sobre las condiciones especiales en las que desarrollan las sesiones de clase durante la experimentación, incluida la grabación en vídeo de las sesiones:

Ciclo II-1, grupo A:

https://drive.google.com/file/d/1rlhpmSZ1ogVjkeewP3gK7od1NRKsmrIo/view?usp=sharing

Ciclo II-1, grupo B:

https://drive.google.com/file/d/149OFkKKxb9y8LxZtI6W63FiD7e4xJF4e/view?usp=sharing

Ciclo II-1, grupo C:

https://drive.google.com/file/d/1ZNXZJ4LLjWbw74s0hqH9ZTkG_aYO6zHT/view?usp=sharing

Ciclo III-1, grupo B:

https://drive.google.com/file/d/1TXx9ZbrsBMsFO7xAe9qCyWvcUoNp9ky3/view?usp=sharing

Ciclo III-1, grupo C:

https://drive.google.com/file/d/1q1BkDQWjQM7yptQYN4Gmo0gUpC5FtKxG/view?usp=sharing

Ciclo III-1, grupo D:

https://drive.google.com/file/d/1DcERUtHjEGHOQ1ama7EZcvB2jXt2FF6e/view?usp=sharing

AVI.3. Circulares y autorizaciones 2º ESO

Circular informativa y autorización sobre las condiciones especiales en las que desarrollan las sesiones de clase durante la experimentación, incluida la grabación en vídeo de las sesiones:

Ciclo I-2, grupo B:

https://drive.google.com/file/d/1J7VDX4BSwe1WUtJNZVHVMs-FFkw1BxGU/view?usp=sharing

Ciclo II-2, grupo A:

https://drive.google.com/file/d/1B72FIW7VTC_Drq5z7_qHt_s0lJQBPuDZ/view?usp=sharing

Ciclo III-2, grupo B:

https://drive.google.com/file/d/1rVuWewjT3VIzjgE6ILdE3qNt9AdXDfTU/view?usp=sharing

Anexo VII:
Materiales adicionales

AVII.1. Materiales adicionales para 1º de ESO

Apuntes para los alumnos:

https://drive.google.com/file/d/1MkP1UGo-rU-UKjS3FWgfCge9NxSp8aTK/view?usp=sharing

Presentaciones digitales:

https://drive.google.com/drive/folders/1HLF4W7aonUds59ANoPLJ808Byft-c98C?usp=sharing

Otros documentos generados a lo largo de la propuesta:

https://drive.google.com/drive/folders/1Ds1gylZYV-xBlunsD4HHXWXmNhV8ZK2v?usp=sharing

AVII.2. Materiales adicionales para 2º de ESO

Apuntes para los alumnos:

https://drive.google.com/file/d/11GlFWoKoGlylQJk01ttTd0Yjw_laVLqg/view?usp=sharing

Presentaciones digitales:

https://drive.google.com/drive/folders/1w0883qfiWOsQXIZN3Au6EEUgO2JtnM0j?usp=sharing

Otros documentos generados a lo largo de la propuesta:

https://drive.google.com/drive/folders/15rMUmMKbU7GM3XSonYiTdgyjdk4cOyMQ?usp=sharing

Ítaca

Al emprender el viaje para Ítaca
desea que el camino sea largo,
lleno de peripecias, lleno de saberes.
A Lestrigones y Cíclopes,
a Poseidón airado no los temas,
que a tales no hallarás en tu camino
si es tu pensar excelso, si selecta
es la emoción que toca tu espíritu y tu cuerpo.
A Lestrigones y Cíclopes,
a Poseidón violento no habrás de encontrarte
si no es que ya los llevas en tu alma,
si tu alma no los alza frente a ti.

Desea que el camino sea largo.
Que sean muchas las mañanas de verano
en las que con qué regocijo, con qué gozo,
llegues a puertos vistos por primera vez.
Detente en los comercios de Fenicia
y compra sus preciadas mercancías,
corales y nácar, ámbar y ébano,
y aromas exquisitos de mil clases,
cuantos más aromas exquisitos puedas conseguir.
Visita muchas ciudades de Egipto,
y aprende y aprende de todos los que saben.

Pero en la mente siempre ten a Ítaca,
porque llegar allí es tu objetivo.

Mas no apresures en nada tu viaje.
Mejor que dure muchos, muchos años,
y eches el ancla viejo ya en la isla,
rico de cuanto ganaste en el mundo,
sin esperar que las riquezas te las traiga Ítaca.

Que Ítaca te ha dado el viaje hermoso.
Sin ella no emprendieras el camino.
Pero no tiene ya nada que darte.

Y si la encuentras mísera, no te ha engañado Ítaca.
Tan sabio que te has hecho, con tanta experiencia,
habrás ya comprendido las Ítacas qué son.

ÍTACA (Constantino P. Cavafis)

Cavafis, C. P. (2007). *Obras completas* (A. Pathitou, & R. Herrera, Trad.). Visor Libros, S. L.