http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351
Educación Matemática en la Infancia

Aprendiendo a ser maestro: Algunas perspectivas desde la Educación Matemática

Grupo de Investigación GIDIMAT-UA
Universidad de Alicante[1]

Fecha de recepción: 22-04-2021
Fecha de aceptación: 03-05-2021
Fecha de publicación: 12-06-2021

RESUMEN
Apoyar el desarrollo de competencias docentes de los estudiantes para maestros desde la Educación Matemática implica no solo identificar lo que los maestros deben llegar a conocer para desarrollar buenas prácticas, sino también pensar en las oportunidades de aprendizaje que los programas de formación puedan ofrecer. En este trabajo presentamos los principios que apoyan el diseño de estas oportunidades en las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas en los programas de formación de maestros de la Universidad de Alicante. En particular, considerando el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes. Ejemplificamos estos principios mediante dos ejemplos de entornos de aprendizaje para estudiantes para maestro de Educación Infantil centrado en la magnitud y medida, y para estudiantes de Educación Primaria centrado en las fracciones.

Palabras clave: Educación Infantil, Educación Primaria, Formación de maestros, Competencia docente, Enseñanza de las matemáticas, Aprender a "mirar profesionalmente", Aprendizaje del profesor.

Learning to be a primary teacher: Some perspectives from Mathematics Education

ABSTRACT
Support Early Childhood and Primary prospective teachers' development of teaching competencies implies not only identifying what teachers must come to know to develop good practices, but also thinking about the learning opportunities that training programs can offer. In this paper, we present the principles supporting the design of these opportunities in the Early Childhood and Primary teacher education programs at the University of Alicante, considering the development of professional noticing students' mathematical thinking. We exemplify these principles through two examples of learning environments for Early Childhood Education prospective teachers focused on magnitude and measurement, and for Primary Education prospective teachers focused on fractions.

Key words: Early Childhood Education, Primary Education, Primary Teacher Education, Teaching competence, Mathematics Teaching, Learning to noticing, Teacher Learning.

[1] https://web.ua.es/es/gidimat/grupo-de-investigacion-de-didactica-de-la-matematica.html

1. Introducción

La competencia docente del maestro para enseñar matemáticas no está solo caracterizada por el conocimiento que debe tener un maestro, sino también por la manera en la que el maestro usa lo que conoce en las actividades que articulan la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, 1995; 2004; Llinares y Sánchez, 1990). Estas prácticas pueden ser analizar las producciones de los estudiantes, diseñar tareas matemáticas adecuadas o gestionar el discurso matemático en el aula. Estas actividades se consideran prácticas normales en la cultura de enseñar matemáticas. En la realización de estas actividades, la competencia docente "mirar profesionalmente" permite al maestro identificar aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza de las matemáticas, interpretarlos y justificar sus decisiones de enseñanza. "Mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza de las matemáticas se ha identificado como una componente de la práctica profesional del maestro que vincula el conocer y el hacer y que puede estar en la base del desarrollo de buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas.

La relación entre lo que se conoce y lo que se puede llegar a hacer es una cuestión clave cuando se piensa en el aprendizaje de los estudiantes para maestro (Putman y Borko, 2000) y en particular en el desarrollo de esta competencia docente, y en cómo apoyar su desarrollo en los programas de formación de maestros de Educación Infantil y Primaria. La manera en la que se aprende a usar el conocimiento para (i) interpretar el pensamiento matemático de los niños, (ii) planificar y justificar secuencias de actividades para la enseñanza y (iii) determinar cómo gestionar el discurso matemático en el aula, plantea desafíos para los formadores de profesores a la hora de diseñar las oportunidades de aprendizaje en los programas de formación (tareas y formas de usarlas en los entornos de aprendizaje). En particular, en el diseño de tareas que fomenten las destrezas de resolución de problemas vinculados a la enseñanza de las matemáticas en los niveles de Educación Infantil y Educación Primaria.

El Grupo de Investigación en Didáctica de la Matemática del Departamento de Innovación y Formación Didáctica de la Universidad de Alicante (GIDIMAT-UA) ha estado desarrollando en los últimos años contextos para ayudar a desarrollar la competencia "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza de las matemáticas en la formación de maestros. Un aspecto particular han sido el diseño de propuestas de formación centradas en el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes. El diseño, implementación y análisis de estas propuestas de formación se han vinculado a la realización de investigaciones centradas en comprender cómo los estudiantes para maestro aprenden a usar conocimiento específico para la enseñanza de las matemáticas cuando tienen que interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes o diseñar secuencias de actividades. La metodología usada son ciclos de investigación o experimentos de enseñanza (Design-Based Researcher Collective, 2003): iteración de ciclos de diseño de entornos de aprendizaje, implementación en contextos reales, análisis de lo sucedido, y cuyos resultados permiten rediseñar las propuestas formativas. Estos ciclos de investigación permiten relacionar la práctica de formar maestros con la investigación sobre el aprendizaje del maestro.

En las siguientes secciones presentamos, en primer lugar, la conceptualización de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes y una revisión de las investigaciones realizadas por el grupo GIDIMAT-UA. A continuación, describiremos las características de los entornos de aprendizaje y tareas cuando usamos la idea de trayectorias de aprendizaje. Finalmente, ejemplificaremos estas características en el diseño de dos entornos de aprendizaje dirigidos a apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente", uno en el dominio de la magnitud longitud y su medida para estudiantes para maestro de Educación Infantil, y el otro en el dominio del concepto de fracción para estudiantes para maestro de Educación Primaria.

2. Competencia "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes

Mason (2002) presentó la competencia "mirar profesionalmente" como la capacidad de analizar la práctica de enseñar matemáticas para poder generar formas de actuar de manera consciente. Analizar la práctica se apoya en la capacidad de identificar semejanzas y diferencias entre las situaciones y poder llegar a ser conscientes de estas diferencias y semejanzas. La identificación de estas diferencias y semejanzas entre las situaciones permite categorizar los sucesos del aula, vinculando las acciones de los maestros a los significados dados a la situación como una manera de llegar a ser consciente de las relaciones causa-efecto en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, la competencia "mirar profesionalmente" se considera como un conjunto de destrezas que funcionan para mejorar la sensibilidad de los maestros en la enseñanza (Mason, 2002).

Un aspecto particular de esta competencia docente es "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes. Jacobs, Lamb y Philipp (2010) conceptualizan esta competencia como tres destrezas que están interrelacionadas: (i) atender las estrategias de los estudiantes identificando detalles matemáticos importantes, (ii) interpretar la comprensión de los estudiantes en base a los detalles matemáticos identificados, y (iii) decidir cómo responder para que los estudiantes sigan progresando conceptualmente. Estas tres destrezas requieren que los maestros usen su conocimiento de matemáticas y de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para atender, interpretar y decidir (Brown, Fernández, Helliwell y Llinares, 2020; Fernández, 2021; Thomas, Jong, Fisher y Schack, 2017).

3. Creando oportunidades en la formación de maestros para desarrollar la competencia docente "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes

Un entorno de aprendizaje se entiende como la conjunción de tres aspectos. Por una parte, una tarea o problema profesional procedente de la práctica de enseñar matemáticas. Una tarea profesional es la recreación de una situación de aula en la que los maestros deben decidir qué hacer después de analizar los hechos para dotarlos de significado. Por ejemplo, decidir qué problemas y actividades son adecuados en relación a un objetivo de aprendizaje específico para sus alumnos o valorar lo que sus estudiantes parece que comprenden de contenidos matemáticos escolares inferidos desde los procedimientos y estrategias que usan para resolver las tareas.

En segundo lugar, conocimiento teórico desde las matemáticas y la didáctica de la matemática que el formador de maestros considera relevante para resolver la tarea. Este conocimiento teórico es una síntesis del conocimiento reunido por las investigaciones en didáctica de la matemática que el formador de maestros considera relevante.

Finalmente, una concepción de una determinada manera de usar las tareas y problemas profesionales que incluye el papel del formador reflejando un modelo teórico sobre el aprendizaje del maestro. Es decir, la manera en la que el formador considera que se produce la instrumentalización del conocimiento teórico de forma que el contenido del programa de formación pueda transformarse en conocimiento profesional del maestro (o conocimiento práctico personal) (Llinares, 2004).

Los principios en los que se basa el diseño de los entornos de aprendizaje son (Ivars, Buforn y Llinares, 2017; Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Fernández, 2021; Llinares y Fernández, 2021):

- Uso de representaciones (registros) de la práctica.
- Preguntas guía para apoyar el desarrollo de las destrezas que conforman la competencia "mirar profesionalmente".

- Uso de instrumentos conceptuales: Información teórica procedente de las investigaciones en Didáctica de la Matemática.

En las próximas secciones desarrollaremos algunos ejemplos de estas oportunidades en la formación de maestros. Los entornos de aprendizaje diseñados en las asignaturas de Didáctica de la Matemática de los programas de formación de maestros de Educación Infantil y Primaria en la Universidad de Alicante tienen como objetivo apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes siguiendo estos principios. En publicaciones previas hemos mostrado ejemplos de este tipo de entornos de aprendizaje y de tareas profesionales en diferentes dominios matemáticos: la magnitud longitud y su medida con estudiantes para maestro de Educación Infantil (Callejo, Pérez-Tyteca, Moreno y Sánchez-Matamoros, 2021; Moreno, Sánchez-Matamoros, Callejo, Pérez-Tyteca y Llinares, 2021; Sánchez-Matamoros, Moreno, Pérez-Tyteca y Callejo, 2018), el concepto de fracciones con estudiantes para maestro de Educación Primaria (Ivars, Fernández, Llinares y Choy, 2018; Ivars, Fernández y Llinares, 2020a, 2020b), el desarrollo del razonamiento proporcional con estudiantes para maestro de Educación Primaria (Buforn, Llinares y Fernández, 2018; Buforn, Llinares, Fernández, Coles y Brown, 2020) o la resolución de problemas de división-medida (Fernández, Callejo y Márquez, 2014).

Aquí nos centraremos en explicitar las características de algunas de estas oportunidades que se apoyan en el uso de las representaciones de la práctica y el papel que pueden desempeñar las preguntas guía para analizar las situaciones de la práctica. Estas preguntas guías forman el vínculo en la propuesta formativa entre el conocimiento teórico que debe ser usado y la situación de la práctica a través del desarrollo del conjunto de destrezas que configuran esta competencia docente de los maestros (identificar los elementos matemáticos en las estrategias de los estudiantes, vincular dichas estrategias a principios más generales, y justificar nuevas propuestas de acción dirigidas a potenciar el aprendizaje matemático de los estudiantes). En el diseño de estos entornos de aprendizaje, el conocimiento teórico a ser instrumentalizado se presenta organizado mediante trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

3.1. Representaciones de la práctica y preguntas guía

Las tareas profesionales están formadas por representaciones de la práctica y unas preguntas guía. Las representaciones de la práctica pueden tomar la forma de un video-clip, la descripción de una situación de aula (por ejemplo, una interacción entre un grupo de estudiantes resolviendo un problema o una interacción de varios estudiantes y el maestro discutiendo varias resoluciones de un problema), un conjunto de respuestas de estudiantes a diferentes problemas, materiales o recursos didácticos que deben ser analizados considerando objetivos de aprendizaje específicos, etc. Una representación de la práctica puede mostrar un aspecto o varios de una situación de clase, y permite focalizar la atención de los estudiantes para maestro en aspectos de la práctica que son objeto de aprendizaje (Buchbinder y Kuntze, 2018; Fernández et al., 2018).

Una característica en la selección de las representaciones de la práctica de los entornos de aprendizaje diseñados en los programas de formación de maestros en la Universidad de Alicante es que en las diferentes interacciones entre los estudiantes o estudiantes-maestro resolviendo o discutiendo un problema o actividad, o en las respuestas de los estudiantes a varios problemas/actividades, se pueden observar diferentes niveles de la progresión del aprendizaje de los estudiantes de Infantil o Primaria.

Las preguntas guía que tienen como objetivo guiar la "mirada" de los estudiantes para maestro están relacionadas con las tres destrezas que conceptualizan la competencia "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010) y permiten desarrollar los vínculos entre el conocer y el hacer (Brown y Coles, 2011):

- Describe cómo ha resuelto cada estudiante la actividad, identificando cómo ha utilizado los elementos matemáticos implicados.
- Interpreta la comprensión de cada estudiante teniendo en cuenta los elementos matemáticos identificados.
- Suponiendo que eres el maestro de este estudiante, define un objetivo de aprendizaje y propón una actividad para favorecer la progresión en el aprendizaje del concepto.

3.2. Instrumentos conceptuales: Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA)

Investigaciones centradas en el desarrollo de la competencia han mostrado que, aunque es posible su desarrollo en los programas de formación inicial de maestros, su desarrollo no es fácil sin un marco de referencia que guíe a los estudiantes para maestro hacia qué y cómo mirar (Fernández y Choy, 2020; Sztajn y Wilson, 2019). Una de las herramientas que podría actuar como marco de referencia son las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Clements y Sarama, 2015; Edgington, Wilson, Sztajn y Webb, 2016). Una THA consta de un objetivo de aprendizaje, un camino hipotético de aprendizaje entendido como niveles de progresión en el aprendizaje del contenido y un conjunto de actividades que favorezcan la progresión (Simon, 1995). Por tanto, el uso de THA como instrumentos conceptuales en los entornos de aprendizaje proporcionan a los estudiantes para maestro referencias para reconocer diferentes niveles en la comprensión de un concepto (niveles en la progresión del aprendizaje) y posibles referencias para diseñar actividades que apoyen la progresión en el aprendizaje de los estudiantes.

En el contexto de la formación de maestros, se ha mostrado que las THA pueden dotar a los estudiantes para maestro de un lenguaje profesional que les permita describir el pensamiento matemático de los estudiantes y, de este modo, centrar su atención sobre la comprensión de los estudiantes para pensar en secuencias de actividades que ayuden a los estudiantes a progresar en su comprensión de las matemáticas.

A continuación, ejemplificamos dos entornos de aprendizaje diseñados y usados en los programas de formación de maestros de Educación Infantil y Educación Primaria en la Universidad de Alicante. En particular, describiremos en cada uno de ellos las tareas profesionales y el conocimiento teórico que permite analizar la situación.

4. Ejemplos de entornos de aprendizaje dirigidos a desarrollar la competencia “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los estudiantes

4.1. Estudiantes para maestro de Educación Infantil: magnitud longitud y su medida

El objetivo de este entorno es que los estudiantes para maestro de Educación Infantil conozcan y comprendan los elementos matemáticos relacionados con la magnitud longitud y su medida (contenido matemático), y cómo aprenden los niños, para ayudarles a progresar en su aprendizaje (conocimiento sobre las matemáticas y los estudiantes), así como aprender a usar este conocimiento para resolver problemas de la práctica relativos a la enseñanza-aprendizaje de la magnitud y medida en la Educación Infantil.

4.1.1. Trayectoria de aprendizaje de la magnitud longitud y su medida

Los objetivos de aprendizaje de la THA tienen en cuenta el currículo de Educación Infantil (Real Decreto 1630/2006): identificar la longitud como una propiedad de los elementos del entorno; y establecer relaciones cualitativas y cuantitativas que permitan comprender la medida de la longitud.

Los niveles de progresión en la comprensión de la magnitud y la medida provienen de resultados de investigaciones en educación matemática, en este caso, es una adaptación de Sarama y Clements (2009) y Szilágyi, Clements y Sarama (2013). Para que un niño construya el concepto de magnitud longitud y su medida, entendida esta como la cuantificación de la distancia entre dos puntos extremos de un objeto o la distancia que separa dos puntos en el espacio, debe superar diferentes estadios: conocimiento y manejo de la magnitud (percepción de la magnitud, conservación, ordenación y relación entre la magnitud y el número), el desarrollo evolutivo de la medida (comparación directa, desplazamiento de objetos y comparación indirecta), y la constitución de la unidad (unicidad, iteración, acumulación, universalidad).

La destreza describir las estrategias de los estudiantes identificando los elementos matemáticos es una condición necesaria para interpretar su comprensión y decidir qué actividades serían necesarias para que los niños aprendan, de ahí que el camino hipotético de aprendizaje se secuencie en niveles de comprensión en función de los elementos matemáticos que los niños deben aprender y usar (Tabla 1).

Tabla 1. Elementos matemáticos de la magnitud longitud y medida

Elementos matemáticos de magnitud
● *Reconocimiento de la magnitud longitud*: la longitud es un atributo de los objetos. ● *Conservación de la magnitud*: un objeto no cambia su longitud si lo movemos o modificamos su disposición espacial. ● *Transitividad*: si un objeto A es más largo (corto) que uno B y B es más largo (corto) que otro objeto C, entonces A será más largo (corto) que C.
Elementos matemáticos de medida
● *Unidad de medida:* reconocer la unidad de medida utilizada como parte de la longitud de un objeto. ● *Unicidad de la unidad de medida:* para medir hay que utilizar una única unidad de medida. ● *Iteración de la unidad de medida:* para medir, se deben realizar iteraciones de la unidad de medida sin superposiciones, huecos, ni saltos y contarlas. ● *Propiedad de acumulación:* la palabra-número resultante de contar las iteraciones es el resultado de la medición. ● *Relación número-unidad de medida:* cuanto mayor longitud tenga la unidad de medida, menor será el número de iteraciones realizadas para medir. ● *Universalidad de la unidad de medida:* es necesario utilizar una unidad de medida universal para que las mediciones realizadas por diferentes personas den el mismo resultado.

Los procesos asociados a la comprensión y uso de estos elementos matemáticos están organizados en cinco niveles de comprensión (Tabla 2). Estos niveles son inclusivos y están caracterizados en términos de los procesos que debe de ser capaz de hacer el niño para avanzar de un nivel a otro. No obstante, debemos ser conscientes de que el aprendizaje de cada niño no es lineal y que estos aprenden de manera diferente (Clements, 1999).

Las actividades de enseñanza en Educación Infantil responden a los elementos matemáticos que conforman la progresión de la comprensión y que pueden favorecer dicha progresión. Las actividades se acompañan de respuestas reales y/o hipotéticas de niños que dan evidencia de diferentes niveles de comprensión y/o de las dificultades de los niños con la comprensión de estas ideas matemáticas. También se incluyen el análisis de estas respuestas y su interpretación basada en los elementos matemáticos y los niveles de comprensión contemplados en la progresión.

Tabla 2. Progresión en el aprendizaje de la THA (camino hipotético)

Nivel	*Progresión del aprendizaje*	
1	● *Reconocen la magnitud longitud* - Identifican las cualidades de la magnitud longitud. - Realizan comparaciones directas considerando la longitud de forma intuitiva.	Del reconocimiento de la magnitud longitud como un atributo de los objetos hasta la propiedad transitiva
2	● *Reconocen la conservación de la longitud* - Realizan comparaciones directas por desplazamiento de los objetos.	
3	● *Utilizan la propiedad transitiva* - Realizan comparaciones indirectas. - Hacen ordenaciones de objetos.	
4	● *Identifican una unidad* - Reconocen la unicidad de la unidad de medida. - Realizan iteraciones de la unidad de medida. - Reconocen la propiedad de acumulación.	Constitución de la idea de unidad de medida de longitud
5	● *Reconocen la relación entre número y unidad de medida* ● *Reconocen la universalidad de la unidad de medida*	

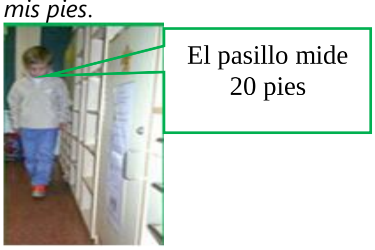
En las Tablas 3 y 4 se muestran ejemplos de actividades de magnitud y de medida, respectivamente. En la Tabla 3 se presentan dos ejemplos de actividad de nivel 2 de progresión en el aprendizaje, con el objetivo de que cualquier niño que se encuentre en el nivel 1, transite al nivel 2. De esta manera se presenta en relación una representación de una situación de la práctica real y un conocimiento que debe ser movilizado por el maestro cuando interpreta la situación, mostrando los vínculos entre conocer y hacer como un principio.

Tabla 3. Actividades de nivel 2: objetivo, procesos y dificultades

Objetivo	*Comparar longitudes*	
● Reconocer la conservación de la magnitud	Actividad 1  Las barras ¿Cuál es la más larga?	Respuesta Las dos barras son iguales.
	Análisis de las respuestas: ● Los niños realizan comparaciones directas de manera intuitiva.	
	Dificultades que tienen los niños Actividad 2 Las barras  ¿Cuál es la más larga?	Respuesta La barra negra es más larga porque llega más lejos que la marrón.
	Análisis de las respuestas: ● Los niños tienen dificultades en realizar comparaciones directas de longitudes que presentan diferencias en la forma y/o posición.	

En la Tabla 4, se muestran dos ejemplos de actividades que se podrían proponer a un niño que se encuentra en el nivel 4 de comprensión y se quiere que transite al nivel 5 (reconocer la relación entre número y unidad de medida, y reconocer la universalidad de la unidad de medida). La actividad 1 pretende ratificar que el niño tiene adquiridos todos los conceptos del nivel 4 (identificar una unidad: unicidad, iteración y acumulación). Para apoyar la transición al nivel 5 un tipo de actividades puede ser la actividad 2 dirigida a que el niño reconozca la relación entre el número y la medida, así como la necesidad de usar una unidad de medida universal.

Tabla 4. Actividades de nivel 4 y 5: objetivos, procesos y dificultades

Objetivo	*Medición de longitudes con unidades antropomórficas*	
	Actividad 1	Respuesta hipotética
Elegir una única unidad de medida y realizar iteraciones de la misma a lo largo de la longitud del objeto, sin saltos ni superposiciones y contando las iteraciones (unidad e iteración de la unidad).	¿Cuánto mide el ancho del aula? 	Juan: *voy a medir el ancho del aula con mis pies*. 
	Análisis de la respuesta: Juan ha elegido como *única unidad de medida* los pies, los ha *iterado* a lo largo del pasillo, sucesivamente, sin superposiciones ni saltos, ha contado las iteraciones y ha reconocido que la palabra-número significa el espacio cubierto por todas las unidades contadas desde ese punto, 20 pies (propiedad de acumulación)	
Objetivo	*Dificultades: Medición de longitudes con unidades antropomórficas*	
	Actividad 2	Respuestas hipotéticas
Reconocer la relación entre número y medida, así como la necesidad de la universalidad de una unidad de medida.	Ángela, una maestra de Infantil, pide a María y a Juan que midan con sus pies el ancho de la clase y que expliquen por qué mide distinto y cómo podrían conseguir una misma medida. 	 María: *la pared mide 24 pies.* Juan: *No, la pared mide 20 pies.* Maestra: *¿por qué no mide lo mismo?* María: *porque Juan no ha puesto bien los pies.* Juan: *sí que los he puesto bien, a lo mejor no los has puesto bien tú.*
	Análisis de la respuesta: María y Juan no son conscientes de que no han obtenido la misma medida de la pared de la clase porque sus pies son de distinto tamaño, como ponen de manifiesto en sus respuestas. Tampoco han sido conscientes de que, a mayor tamaño de la unidad, los pies, menor número de iteraciones (relación entre número y medida), y que para obtener la misma medida deben elegir una misma unidad o usar una unidad estándar y convenida por todos (universalidad de la medida).	

4.1.2. Tarea profesional

Presentamos una de las tareas profesionales propuestas a los estudiantes para maestro en este entorno de aprendizaje. En la Figura 1 se muestra la situación de aula diseñada *ad hoc*, en la que una maestra propone hacer collares con cuerdas con diferentes longitudes (nominadas como A, B y C), y diferentes tipos de cuentas (macarrones y estrellas). Asimismo, se proporciona un fragmento del diálogo de dos niños y dos niñas con la maestra (representación de la práctica) sobre quién ha hecho el collar más largo.

Maestra: ¿Quién ha hecho el collar más largo?
Mario: He hecho el collar con la cuerda con forma de bastón [cuerda C] y he usado 15 macarrones [ha utilizado macarrones de varios tipos].
Almudena: Seño. Yo he hecho un collar con la cuerda rosa [cuerda A] y he usado 20 estrellitas [las estrellitas están muy separadas].
Luis: El mío tiene 10 macarrones [ha utilizado todos del mismo tipo] y cogido la cuerda que tiene forma de ensaimada [cuerda B], pero es más largo que el de Mario porque la cuerda es más larga.
Elena: Yo también he utilizado la cuerda rosa [cuerda A] y he usado 15 estrellitas [las estrellitas están todas juntas], luego el más largo de todos los collares es el de Almudena.

A partir de las respuestas dadas, Alicia les pregunta a los niños:

Maestra: ¿Estáis de acuerdo con Elena?
Mario: No estoy de acuerdo con Luis, porque el mío tiene más macarrones.

Figura 1. Situación de aula diseñada *ad hoc* (representación de la práctica)

Las preguntas guías para esta representación de la práctica y que la convierte en un problema profesional son:

- Describe las estrategias de resolución del niño X puestas de manifiesto en sus respuestas. Identifica los elementos matemáticos del concepto que están implícitos en sus respuestas. Justifica tu respuesta.
- Según las estrategias usadas por el niño, interpreta su comprensión teniendo en cuenta los niveles de progresión descritos en la trayectoria de aprendizaje. Justifica tu respuesta.
- Suponiendo que eres el maestro de este niño, define un objetivo de aprendizaje teniendo en cuenta su comprensión de los elementos matemáticos y propón una actividad para favorecer su progresión en el aprendizaje del concepto. Justifica tu respuesta.

En la Tabla 5, se muestran respuestas esperadas de los estudiantes para maestro a las dos primeras cuestiones que conforman la tarea profesional (describir estrategias e identificar los elementos matemáticos presentes, y justificar el nivel de comprensión que evidencias las respuestas de los niños).

Tabla 5. Identificación de elementos matemáticos en las respuestas de los niños y nivel de comprensión inferidos

Niños	*Elementos Matemáticos identificados*	*Nivel*
Mario	Hay evidencias de que ● SÍ reconoce la magnitud longitud. ● NO comprende la conservación de la longitud (magnitud). ● NO considera la unicidad del objeto que se toma como unidad (medida).	1
Almudena	Hay evidencias de que ● SÍ reconoce la magnitud longitud ● NO comprende la conservación de la longitud (magnitud) ● SÍ considera la unicidad del objeto que se toma como unidad (medida). ● NO itera correctamente la unidad de medida (medida).	
Luis	Hay evidencias de que ● SÍ reconoce la magnitud longitud. ● SÍ comprende la conservación de la longitud (magnitud). ● SÍ considera la unicidad del objeto que se toma como unidad, la iteración y la acumulación (medida).	4
Elena	Hay evidencias de que ● SÍ reconoce la magnitud longitud. ● SÍ considera la unicidad del objeto que se toma como unidad, la iteración y la acumulación (medida).	

En respuesta a la tercera pregunta guía relativa a indicar actividades para ayudar a los niños a progresar, los estudiantes para maestro deben, en el caso de Mario y Almudena, plantear actividades para reconocer la conservación (Tabla 3). Por otra parte, para ayudar a Luis y a Elena a transitar del nivel 4 al nivel 5, los estudiantes deberían proponer actividades para reconocer la relación entre el número y la unidad de medida (Tabla 4).

4.2 Estudiantes para maestro de Educación Primaria: Fracciones

El objetivo de este entorno de aprendizaje es que los estudiantes para maestro de Educación Primaria conozcan y comprendan los elementos matemáticos relacionados con el concepto de fracción como parte-todo (conocimiento matemático), y conozcan cómo aprenden los niños para ayudarles a progresar en su aprendizaje (conocimiento sobre las matemáticas y los estudiantes); así como aprender a usar este conocimiento para resolver problemas de la práctica relativos a la enseñanza-aprendizaje del concepto de fracción en la Educación Primaria.

4.2.1. Trayectoria de aprendizaje del concepto de fracción

El objetivo de aprendizaje del concepto de fracción como parte-todo lo podemos derivar de lo que el currículo establece considerando lo que hay que conseguir al final de la Educación Primaria. En el caso de la Comunidad Valencia, Decreto 108/2014 de la ConsejerÍa de Educación, Cultura y Deporte, lo podemos sintetizar en: "Dotar de significado a la idea de fracción como la relación entre las partes y el todo, fracciones propias e impropias, considerando diferentes representaciones".

Los niveles de progresión en la comprensión del concepto de fracción (relación parte-todo) provienen de las investigaciones de educación matemática (Battista, 2012; Steffe y Olive, 2010). La progresión de la comprensión del concepto de fracción se sintetiza en una serie de niveles en función de los elementos matemáticos que deben aprender y usar los estudiantes de Primaria (Tabla 6).

Tabla 6. Elementos matemáticos con relación al significado de fracción como parte-todo

Teniendo en cuenta diferentes modos de representación: continuo, discreto, recta numérica
● Las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño. Las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero deben ser iguales en tamaño. ● Una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte. ● Una parte como una unidad iterativa de manera que permita construir otras fracciones ("n veces a/b"). ● Relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte: a mayor número de divisiones del todo, cada parte es más pequeña (manteniendo el todo igual).

Los procesos asociados a la comprensión y uso de estos elementos matemáticos están organizados en tres niveles de comprensión (Tabla 7). Estos niveles están caracterizados considerando los procesos que el estudiante debe ser capaz de asimilar para transitar de un nivel a otro.

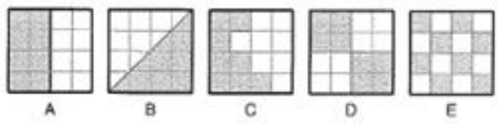
Tabla 7. Niveles de comprensión (camino hipotético de aprendizaje)

Niveles	*Del significado intuitivo de dividir en partes iguales en tamaño a la idea de fracción como relación parte-todo y el reconocimiento de diferentes representaciones*
1	*Los niños no pueden identificar y representar fracciones* ● No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño. ● No usan el mismo todo cuando comparan fracciones.
2	*Los niños pueden identificar y representar fracciones propias* ● Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño, aunque no tengan la misma forma. ● Usan una fracción unitaria como una unidad iterativa para construir fracciones propias. ● No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ● Comparan fracciones usando el mismo todo.
3	*Los niños pueden identificar y representar fracciones propias e impropias* ● Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ● Usan cualquier fracción como unidad iterativa para construir fracciones propias e impropias. ● Reconocen que el tamaño de la parte disminuye cuando el número de partes aumenta.

Estos niveles de comprensión son ejemplificados con diferentes tipos de actividades de fracciones, tales como identificar fracciones, representar fracciones, reconstruir fracciones o comparar fracciones en diferentes modos de representación usando fracciones propias e impropias. Las actividades se acompañan de respuestas de estudiantes reales y/o hipotéticas que evidencian diferentes niveles de comprensión y/o dificultades de los niños con la comprensión de la fracción como relación parte-todo. También se incluye el análisis de estas respuestas y su interpretación, basadas en los elementos matemáticos y los niveles de comprensión contemplados en la progresión. En la Tabla 8 se muestran actividades de identificar fracciones y respuestas de estudiantes que muestran características del nivel 2 de comprensión. En la Tabla 9 de muestra una actividad de comparar fracciones y la respuesta de un estudiante que muestra características del nivel 2 de comprensión.

Tabla 8. Actividades de identificar fracciones y respuestas que ejemplifican el nivel 2 de comprensión

Actividad 1. Señala la figura que representa un medio

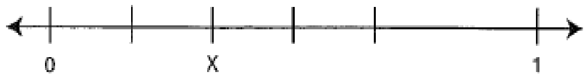


Respuesta. La figura A, B, C son un medio, la D representa 2/4 y la E representa 8/16.

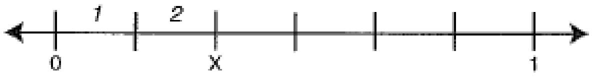
Características

- Identifican fracciones propias (contexto continuo) reconociendo que las partes en las que se divide un todo pueden ser diferentes en forma, pero iguales en tamaño (reconocen A, B y C como ½).
- No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes (pues no reconocen D y E como ½).

Actividad 2. Indica qué fracción representa la X



Respuesta. Tienes que marcar todos los espacios del mismo tamaño (marca una señal en el último segmento de la derecha para tener todas las divisiones del mismo tamaño). Como hay seis trozos, y hay dos hasta la X, entonces la X es 2/6.



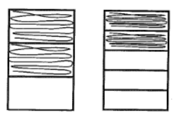
Características

- Identifican fracciones propias (contexto: recta numérica) reconociendo que las partes en las que se divide un todo deben ser del mismo tamaño.

Tabla 9. Actividad de comparar fracciones y respuesta que ejemplifica el nivel 2 de comprensión

Actividad. ¿Qué fracción es mayor, 2/3 o 2/5? Justifica con palabras o dibujos.

Respuesta: (tras hacer los dibujos) 2/3 es mayor.



Características

- Al comparar fracciones usan los mismos "todos".
- No se evidencia el uso de la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte.

Además, se incorporan ejemplos de actividades en la descripción de cada nivel que podrían ayudar a los estudiantes a progresar en su aprendizaje, es decir, a transitar de un nivel de comprensión a otro. Por ejemplo, en la Tabla 10 se incluye una actividad que podría ayudar a un estudiante a transitar hacia el nivel 3 de comprensión trabajando el elemento matemático usan fracciones (unitarias y propias) como unidad iterativa para construir la unidad y otras fracciones propias e impropias.

Tabla 10. Ejemplos de actividades que favorecen la transición del nivel 2 al 3 de comprensión

Objetivo: Usar una parte (una fracción propia) como una unidad iterativa para construir el todo u otras fracciones. *Material:* Regletas de Cuisenaire. *Actividad 2A.* Si la regleta roja es 1/3 de la unidad, ¿qué regleta es la unidad? *Actividad 2B.* Si la regleta verde claro es 2/3 de la unidad, ¿qué fracción representa la marrón? *Actividad 2C.* Si la regleta roja es 1/3 de la unidad, ¿qué fracción representa la regleta lila? ¿Y la marrón?

4.2.2. Tarea profesional

Presentamos una de las tareas profesionales propuestas a los estudiantes para maestro en este entorno de aprendizaje. En la Figura 2 se muestra la situación de aula que forma parte de la tarea profesional. Está formada por el contexto, una actividad de comparar fracciones propias, y el diálogo de la maestra (Júlia) con tres parejas de estudiantes resolviendo la actividad.

Júlia es la tutora de una clase de 3er curso de Educación Primaria en un colegio público de un barrio en una ciudad dormitorio cercana a la capital. Este año tiene un grupo de 26 estudiantes y aunque esto dificulta su tarea, ella intenta plantear su enseñanza de manera diferente. Durante las próximas semanas Júlia tiene la intención de centrarse en las fracciones.

Su objetivo es que sus alumnos identifiquen diferentes representaciones de partes de un todo considerando:

- que las partes deben ser iguales en tamaño y
- la posibilidad de agrupar varias partes para identificar la fracción.

Una de las actividades centrada en la comparación de fracciones que plantea a sus estudiantes es la siguiente:

¿Qué es más grande 4/5 o 3/4? Explícalo con un dibujo o palabras

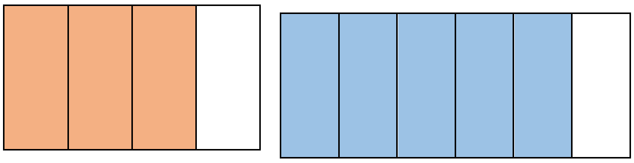
Júlia deja proyectada en la pizarra digital el enunciado e insiste a sus alumnos en que pueden usar dibujos y que deben explicar el porqué de su elección. Los estudiantes están acostumbrados a esta manera de proceder, saben que cuando Júlia les presenta estas actividades siempre les solicita que justifiquen sus respuestas de manera que sean convincentes para sus compañeros.

Mientras los estudiantes realizan la actividad Júlia va pasando por las mesas observándoles. Al observar cómo los diferentes grupos están resolviendo la actividad identifica los aspectos que crean dificultades y con esa información decide qué grupo debería exponer su solución en primer lugar y también cómo continuar. Júlia sabe que, si pide voluntarios para responder, todos los grupos levantan la mano. Pero ella ha decidido pedir a Joan y Tere que sean los primeros en hablar:

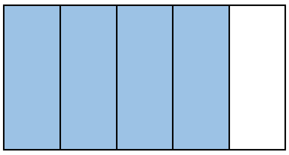
Júlia solicitó a Joan y Tere que explicaran su razonamiento en la pizarra digital.

Joan: Bueno nosotros creemos que 4/5 es mayor que 3/4.
Júlia: ¿Y cómo lo sabéis?
Tere: Porque nosotros hemos dibujado cuatro quintos, que es así y tres cuartos que es así (mientras que dibuja sobre la pizarra las siguientes imágenes):
Júlia: ¿Y?

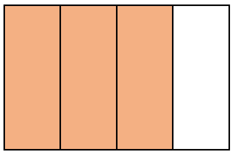
Joan: Pues **que se ve que** 4/5 es mayor que 3/4.
Júlia: ¿Estáis todos de acuerdo?... ¿Víctor? ¿Vosotros qué pensáis?



(Víctor y Xavi)
Víctor: Pues nosotros también pensamos lo mismo, pero lo hemos hecho de otra manera.
Júlia: ¿Podéis enseñarnos cómo?
Xavi: Sí, mira, así, porque tenemos 4/5 que son cuatro de cinco (mientras que dibuja la siguiente figura):



Y, además, luego, tenemos 3/4 que también son 3 de cuatro, es decir (dibuja la siguiente figura):



Júlia se da cuenta de que Xavi y Víctor no basan su decisión en el uso de los elementos matemáticos del concepto de fracción en las actividades de comparar fracciones que son el objetivo de esta actividad. Por ello intenta que aparezca en clase alguna explicación que utilice alguno o los dos elementos matemáticos que son el objetivo de aprendizaje de esta lección.

Júlia: ¿Qué pensáis? ¿Alguien lo ha hecho de otra manera? ¿Nadie? ¿Alguien puede explicar de otra manera que 4/5 es mayor que 3/4?

(Álvaro y Félix)
Álvaro: Sí, claro... lo que pasa es que nosotros no lo hemos pintado.
Júlia: ¿Qué habéis hecho?
Félix: Pues hemos pensado que a 4/5 le falta 1/5 para estar completo y a 3/4 le falta 1/4. Entonces... como 1/5 es más pequeño que 1/4 al ser los trozos más pequeños, entonces 4/5 es mayor porque le falta menos para estar completo que a 3/4.
Álvaro: ¡Eso es!

Figura 2. Situación de aula (representación de la práctica) que forma parte de una tarea profesional

Las preguntas guías para esta representación de la práctica y que la convierten en un problema profesional son:

- Describe cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la tarea identificando cómo han utilizado los elementos matemáticos implicados y las dificultades que han tenido con ellos.
- ¿En qué nivel de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje situarías a cada pareja? Justifica tu respuesta.

- Teniendo en cuenta el nivel en el que has situado a cada pareja, define un objetivo de aprendizaje y propón una actividad (o modifica la propuesta inicialmente por Júlia) para ayudar a sus alumnos a progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje prevista.

En la Tabla 11, se muestran las respuestas esperadas de los estudiantes para maestro a las dos primeras cuestiones.

Tabla 11. Mirada profesional de la situación de aula

Pareja	*Elementos Matemáticos identificados*	*Nivel*
Joan y Tere	Hay evidencias de que ● SÍ mantienen los todos iguales en la comparación. ● NO usan la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de las partes.	2
Víctor y Xavi	Hay evidencias de que ● NO mantienen los todos iguales en la comparación. ● NO usan la relación inversa.	1
Álvaro y Félix	Hay evidencias de que ● SÍ mantienen los todos iguales en la comparación. ● SÍ usan la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de las partes.	3

Una respuesta esperada a la tercera cuestión, para ayudar a Víctor y Xavi a transitar del nivel 1 (no reconocer que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño, aunque no necesariamente en forma, y no usar el mismo todo para comparar fracciones) al nivel 2 de comprensión, sería proponer como objetivo de aprendizaje "reconocer que los todos deben ser iguales para poder compararse". Como actividad se podría usar material concreto como hojas de periódico de igual tamaño para que representaran en ellas diferentes fracciones y las compararan, enfatizando la idea de que el todo debe ser el mismo para poder compararlas.

5. Reflexiones finales

Aprender a ser maestro de Educación Infantil y Educación Primaria desde una perspectiva competencial implica no solo identificar lo que los maestros deben llegar a conocer para desarrollar buenas prácticas, sino también pensar en las oportunidades de aprendizaje que los programas de formación puedan ofrecer para aprender a usar el conocimiento necesario para enseñar. En este trabajo hemos descrito los principios que apoyan el diseño de estas oportunidades en las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas en los programas de formación de maestros de la Universidad de Alicante, en particular, considerando el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes. Hemos ejemplificado estos principios mediante la descripción de dos ejemplos de entornos de aprendizaje mostrando los elementos que los configuran. Estos elementos son el uso de representaciones de la práctica, la identificación de conocimiento específico para interpretar estas situaciones desde la Didáctica de la Matemática organizado desde la idea de trayectoria hipotética de aprendizaje, y la consideración de cuestiones guías como ayuda para articular la mirada de los estudiantes para maestro.

El diseño, implementación y análisis de estas oportunidades de aprendizaje ha generado una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática dirigida a aportar información sobre el aprendizaje de los estudiantes para maestro y en particular sobre el desarrollo de las competencias docentes. Las investigaciones con relación al entorno de aprendizaje de medida (Callejo et al., 2021; Moreno et al.,

2021) han mostrado que los estudiantes para maestro de Infantil han tomado consciencia de qué elementos matemáticos subyacen en la magnitud longitud y en la medida, lo que ha propiciado que adquieran con mayor facilidad las destrezas identificar e interpretar el pensamiento matemático de los niños en las distintas situaciones de aula planteadas. Los resultados de estas investigaciones evidencian que el entorno de aprendizaje ha permitido a los estudiantes para maestro de Educación Infantil "mirar de manera profesional" situaciones reales y/o hipotéticas de aula. Asimismo, se ha comprobado que el uso adecuado de una THA no es inmediato y puede estar condicionado por el tipo de situaciones de aula analizadas, por el tipo de elementos matemáticos implicados, etc. No obstante, estas investigaciones han proporcionado como evidencia del desarrollo de la competencia la instrumentación de la THA para un determinado concepto matemático (en este caso, la magnitud longitud y su medida). Por otra parte, en los estudios de Ivars et al. (2018, 2020a, 2020b) relacionados con el entorno de aprendizaje de las fracciones, se ha mostrado que el progreso en el discurso profesional puede ser considerado una evidencia del desarrollo de la competencia. En estos estudios se muestra que la THA ayudó a los estudiantes para maestro a elaborar un discurso más detallado y específico cuando interpretaban la comprensión de los estudiantes, y justificar las actividades que proponían a los niños para ayudarles a progresar en su aprendizaje.

Esta forma de trabajar como formadores de maestros dirigida a apoyar el desarrollo de las competencias docentes en los estudiantes para maestro vincula tres dimensiones de nuestro trabajo en el programa de formación: (i) como formadores de maestros (docentes en el programa de formación), (ii) como diseñadores de oportunidades de aprendizaje y desarrollo de competencias; y (iii) como investigadores sobre el aprendizaje de los estudiantes para maestro que nos ayuda a comprender mejor lo que sucede en nuestras aulas. La relación entre la docencia, el trabajo como diseñadores de oportunidades de aprendizaje y como investigadores viene justificada al reconocer el vínculo que existe entre el conocer y el hacer en el proceso de llegar a ser maestro.

Agradecimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del proyecto I+D+i EDU2017-87411-R financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad, España, del proyecto PROMETEO2017/135 de la Generalitat Valenciana, y el apoyo del Programa de la Unión Europea Erasmus+ (project coReflect@maths, 202 Educación 2019-1-DE01-KA203-004947). El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.

Referencias

Battista, M. T. (2012). *Cognition-Based Assessment and teaching of fractions: Building on students' reasoning.* Portsmouth, N.H. Heinemann.

Buchbinder, O. y Kuntze, S. (2018). Representations of practice in teacher education and research – Spotlights on Different Approaches. In O. Buchbinder & S. Kuntze (Eds.), *Mathematics teachers engaging with representations of practice. A dynamically evolving field* (pp. 1–8). Cham, Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70594-1_1.

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 23,* 229-251.

Buforn, Llinares, Fernández, Coles y Brown (2020). Preservice teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' resasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 1-19. https://doi.org/10.1080/0020739x.2020.1777333.

Brown, L. y Coles, A. (2011). Developing expertise: how enactivism re-frames mathematics teacher development. *ZDM Mathematics Education, 43,* 861-873. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0343-4

Brown, Fernández, Helliwell y Llinares (2020). Prospective mathematics teachers as learners in university and school contexts. Gwendolyn, LL. Y Chapman, O. (eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 3: Participants in Mathematics Teacher Education*, (p. 343-366). Brill/Sense: Leiden/Boston.

Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P., Moreno, M. y Sánchez-Matamoros, G. (2021). The Use of a Length and Measurement HLT by Pre-Service Kindergarten Teachers' to Notice Children's Mathematical Thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-21. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10163-4.

Clements, D. H. (1999). Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics, 99*(1), 5-11.

Clements, D. y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: el enfoque de* las *trayectorias de aprendizaje.* Learning Tools: NY. https://doi.org/10.1590/s0104-40602013000400009.

Design-Based Researcher Collective (2003). Design-Based Research: an emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8. https://doi.org/10.3102/0013189x032001005.

Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator, 5(1), 65–80*. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.5.1.0065.

Fernández, C. (2021). Apoyando el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente del futuro profesorado de matemáticas: Práctica e investigación. *Realidad y Reflexión, 53,* 40-60. https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10887.

Fernández, Callejo y Márquez (2014) Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división-medida. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3) 407-424. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1235.

Fernández, C. y Choy, B. H. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Learning, Teaching, Psychological, and social perspectives. In S. Llinares & O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teachers Education: Volume 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (vol. 12, pp. 337-360). Koninklijke Brill NV, Leiden. https://doi.org/10.1163/9789004418967_013

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M.L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13,* 39-61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229.

Ivars, P., Buforn, À. y Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una mirada profesional sobre las situaciones de enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del siglo XXI* (pp. 65 – 87). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020a). A Learning Trajectory as a scaffold for pre-service teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18,* 529-548. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020b). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias 38* (3), 105–124.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *Eurasia. Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(11), em1599. https://doi.org/10.29333/ejmste/93421.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169.

Llinares, S. (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en Educación Primaria. *UNO, Revista de Didáctica de la Matemática, 36*, 93-115.

Llinares, S. (1995). Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza. Implicaciones en la formación de profesores de matemáticas. En L. Blanco y V. Mellado (Eds.). *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal* (p.153-171). DDCEM-Uex: Badajoz.

Llinares, S. y Fernández, C. (2021). "Mirar profesionalmente" la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME, 24*(1), 185-205.

Llinares, S., Fernández, C. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1 & 2), 441-468.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, A. y Groenwald, Cl. (2020). Mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1990). El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las matemáticas. En S. Llinares, y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (p. 63-116). Alfar: Sevilla.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3,* 243-267.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge Falmer. https://doi.org/10.4324/9780203471876.

Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L., Pérez-Tyteca, P. y Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: the instrumentation of a learning trajectory. *ZDM–Mathematics Education*, 1-16. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01234-5.

Putman, R. y Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher, 29*(1), 4-15. https://doi.org/10.3102/0013189x029001004.

Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación Infantil. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2007-185.

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P. y Callejo, M.L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de Infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 203-228. https://doi.org/10.12802/relime.18.2124.

Sarama, J. y Clements D. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. London and New York, UK and USA: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 114-145. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.2.0114.

Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge.* Springer Science & Business Media.

Szilágyi, J., Clements, D. y Sarama, J. (2013). Young Children's Understanding of Length measurement: Evaluating a learning Trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(3), 581-620. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.44.3.0581.

Sztajn, P., y Wilson, P. H. (Eds.). (2019). *Learning trajectories for teachers: Designing effective professional development for math instruction*. Teachers College Press.

Thomas, J., Jong, C., Fisher, M. H. y Schack, E. O. (2017). Noticing and knowledge. Exploring Theoretical connections between professional noticing and mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Educator, 26*(2), 3-25.

GIDIMAT-UA. Grupo de Investigación en Didáctica de la Matemática, Universidad de Alicante. España

Email/Web: https://web.ua.es/es/gidimat/grupo-de-investigacion-de-didactica-de-la-matematica.html