



GeoPattern, una app para resolver problemas de patrones geométricos en Primaria

Eva Arbona Picot

Universitat de València, Valencia, España, eva.arbona@uv.es

Daniel García Costa

Universitat de València, Valencia, España, daniel.garcia@uv.es

María José Beltrán Meneu

Universitat Jaume I, Castellón de la Plana, España, mmeneu@uji.es

Ángel Gutiérrez Rodríguez

Universitat de València, Valencia, España, angel.gutierrez@uv.es

Fecha de recepción: 17-10-2018

Fecha de aceptación: 22-12-2018

Fecha de publicación: 15-04-2019

RESUMEN

Hay numerosos estudios que avalan el interés de iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en Educación Primaria. En este artículo presentamos una parte de un proyecto de investigación en el que exploramos los procesos de resolución de problemas de patrones geométricos de estudiantes de 4º a 6º curso de Primaria. En concreto, analizamos el comportamiento de estudiantes que recibieron una unidad de enseñanza basada en la resolución de este tipo de problemas en la aplicación *GeoPattern*, creada por los autores para este fin. Una característica de la aplicación es que informa a los estudiantes de si su respuesta es correcta o errónea y, en este último caso, les permite volver a responder a la misma cuestión, lo cual provoca el inicio por los estudiantes de procesos de autocorrección. Describimos los diferentes tipos de comportamiento que hemos identificado en los estudiantes que responden de forma errónea una cuestión y vuelven a intentar resolverla.

Palabras clave: álgebra, Educación Primaria, patrones geométricos, resolución de problemas, retroalimentación, software didáctico

GeoPattern, an app to solve geometric pattern problems in Primary School

ABSTRACT

There are numerous studies that support the interest of starting the development of algebraic thinking in Primary School. In this paper, we present a part of a research project aimed to explore the processes of solution of geometric pattern problems by students in Primary grades 4th to 6th. We analyze the behavior of students who were administered a teaching unit based on the resolution of this type of problems in the *GeoPattern* application, created by the authors for this purpose. A characteristic of the application is that it informs the students on the correctness of their answers and allows them to respond again to the same question when their answer was wrong. This causes the students to initiate self-correction processes. We describe the different types of behavior we have identified in students whose answer to a question was wrong and they tried to solve it again.

Key words: algebra, Primary School, geometric patterns, problem solving, feedback, educational software

1. Introducción

Pólya (1965) planteó un proceso ideal de resolución de problemas organizado en cuatro fases de actividad, la última de las cuales es "examinar la solución obtenida", es decir, verificar si la solución parece ser correcta o hay indicios de que es errónea porque no concuerda con alguno de los datos. No obstante, la realidad en la práctica diaria en Educación Primaria es que la mayoría de profesores no son conscientes de la importancia de esta última fase de la resolución de los problemas, por lo que no inculcan en sus alumnos el hábito de tratar de aplicarla. Por otra parte, muchos problemas planteados en las clases no proporcionan un procedimiento razonable que permita a los estudiantes examinar la corrección de su solución, más allá de repasar los pasos dados y los cálculos realizados. Esta situación es diferente cuando la resolución de problemas se realiza en una aplicación informática que, una vez introducida la respuesta, informa automáticamente al usuario sobre si esta es correcta o no.

Desde que Schoenfeld (1985) reflexionó sobre la importancia de prestar atención al componente metacognitivo de los estudiantes durante la resolución de problemas, ha habido numerosas investigaciones centradas en diferentes enfoques relacionados con este tema, la mayoría de ellas informando sobre los procesos de toma de decisiones durante la resolución. Sin embargo, son escasos los resultados de investigaciones centradas en observar cómo reaccionan los estudiantes cuando se les informa de que su solución no es correcta y qué decisiones toman para continuar resolviendo el problema. Por ejemplo, Weber, y Leikin (2016) describen investigaciones que exploran el uso de diversos tipos de software en resolución de problemas, pero ninguna alude a la retroalimentación del ordenador al estudiante.

De Corte, Verschaffel y Op't Eynde (2000) consideran que la enseñanza de las matemáticas tiene cuatro componentes principales, uno de los cuales es la evaluación como base para el control y la retroalimentación de los estudiantes. La popularización del uso de herramientas informáticas en las aulas (ordenadores y, más frecuentemente, tabletas y teléfonos inteligentes) posibilita un nuevo estilo de trabajo para los estudiantes, en el que las aplicaciones informáticas crean entornos interactivos en los que pueden tener lugar diversos tipos de interacción entre los estudiantes y la aplicación, dependiendo de cómo haya sido programada esta, siendo una de las más frecuentes la de proporcionarles información sobre la corrección de sus respuestas. La investigación didáctica actual muestra que el uso adecuado de entornos interactivos, en particular entornos inteligentes, puede incrementar la competencia de los estudiantes en la resolución de problemas (González-Calero, Arnau, Puig y Arevalillo-Herráez, 2014).

Se suele denominar evaluación formativa a los métodos de evaluación que, a lo largo del periodo dedicado al aprendizaje, proporcionan información al estudiante sobre sus logros en cada momento, con el fin de que estudiante y profesor sepan dónde está aquel respecto de la meta prevista y puedan tomar decisiones respecto de cómo continuar. En el contexto particular de la resolución de problemas en entornos TICs, la evaluación formativa puede adoptar la forma de reacción de la aplicación a la respuesta proporcionada por el estudiante al problema que la aplicación le ha planteado. Dependiendo de lo sofisticada que sea la aplicación, la reacción puede consistir en proporcionar al estudiante la respuesta correcta cuando este se equivoca y plantearle otro problema, informarle de si su respuesta es correcta o no y darle la oportunidad de intentar resolver el problema de nuevo cuando es errónea, darle algunas pistas en caso de respuestas erróneas, decidir qué problema plantearle a continuación dependiendo de los resultados obtenidos en problemas previos, sugerirle estudiar determinados contenidos matemáticos, etc.

En la actualidad, estamos desarrollando un proyecto de investigación sobre iniciación a estudiantes de 4º, 5º y 6º de Educación Primaria en el álgebra mediante problemas de patrones geométricos. En este contexto, una parte de la investigación se ha basado en un experimento de enseñanza en el que hemos planteado a los estudiantes diversos problemas de este tipo mediante una aplicación para tabletas

creada por nosotros. La aplicación evalúa la respuesta del estudiante, le informa de si es correcta o errónea y, en el segundo caso, le permite decidir si quiere seguir adelante o volver a intentar resolver el problema. El objetivo de este artículo es describir y analizar las diferentes formas de comportamiento de los estudiantes cuando veían que habían resuelto mal un problema; en particular, comparamos las estrategias de resolución seguidas durante los sucesivos intentos de resolver el mismo problema, con el fin de analizar los posibles cambios inducidos por la retroalimentación proporcionada por la aplicación al evaluar las respuestas.

2. Revisión bibliográfica

En España, se empieza a estudiar álgebra de manera sistemática en 1º y 2º de la ESO y en cursos equivalentes en otros muchos países. No obstante, hay una línea de investigación didáctica que explora el *pensamiento algebraico*, entendido como las formas de razonamiento algebraico propias de estudiantes de Primaria y principio de Secundaria previas al estudio formal del álgebra (Stephens, Ellis, Blanton y Brizuela, 2017), basadas en el planteamiento de problemas o actividades para cuya resolución no es necesario usar el lenguaje algebraico simbólico, pero que presentan contextos en los que el uso de símbolos algebraicos (especialmente las letras) surge de manera significativa (Kieran, 2004). La investigación en pensamiento algebraico ha mostrado las posibilidades de desarrollarlo en estudiantes de Primaria, como preparación para el inicio del estudio detallado del álgebra (Warren, Trigueros y Ursini, 2016). Stephens, Ellis, Blanton y Brizuela (2017) afirman que hay un acuerdo generalizado entre estos investigadores en que los estudiantes pueden empezar a razonar algebraicamente mucho antes de iniciar la ESO y que son capaces de hacerlo de maneras que pueden ayudar a reducir las dificultades que habitualmente sufren los estudiantes cuando inician el aprendizaje del álgebra en Secundaria. De hecho, los currículos de matemáticas de China y Singapur incluyen el desarrollo del pensamiento algebraico desde 1º de Primaria (Cai, Ng y Moyer, 2011).

Se han realizado numerosos experimentos de enseñanza en diversos contextos y con diversas aproximaciones (ver, por ejemplo, los capítulos de Kieran, 2018). Un contexto que han mostrado producir resultados de aprendizaje muy interesantes es el de los *problemas de patrones geométricos*, también llamados problemas de generalización de patrones o problemas de patrones (Cai, y Knuth, 2011; Rivera, 2013). Aunque una mayoría de estudios se han centrado en los últimos cursos de Primaria (Callejo, García-Reche y Fernández, 2016; Gutiérrez, Benedicto, Jaime y Arbona, 2018), algunos autores han realizado estudios longitudinales a lo largo de toda la Primaria (Cooper, y Warren, 2011; Radford, 2011) e incluso desde Infantil (Papic, Mulligan y Mitchelmore, 2011).

Las investigaciones sobre resolución de problemas de patrones geométricos han planteado diversos tipos de cuestiones (Stacey, 1989; Rivera, 2013; Warren, 2005) y han descrito diferentes estrategias de los estudiantes cuando analizan la información visual proporcionada por los enunciados (Rivera, y Becker, 2005), cuando calculan las respuestas a las cuestiones planteadas (García-Reche, Callejo y Fernández, 2015) o cuando realizan procesos de generalización (Radford, 2006). En la sección siguiente describimos con detalle los elementos que usamos en nuestra investigación para plantear los problemas y para analizar las respuestas de los estudiantes.

Existen diversas aplicaciones informáticas que pueden utilizarse como ayuda y motivación para que los estudiantes de Primaria avancen en el desarrollo de su pensamiento algebraico. La mayoría de ellas están centradas en la enseñanza de la resolución de ecuaciones lineales y las contextualizan en situaciones de equilibrio, como balanzas (NLVM, 2018; PhET, 2018) o pares de regiones, (como en el conocido DragonBox de WeWantToKnow, 2018). Sin embargo, hay un vacío entre el uso de contextos pre-algebraicos, para introducir a los estudiantes en el uso de las letras y en el significado de las expresiones algebraicas como representación abstracta de operaciones generalizadas, y el software para la resolución de ecuaciones. Ese vacío se puede evitar en el contexto de los problemas de patrones

geométricos, planteando cuestiones inversas. No hemos encontrado ninguna aplicación informática que permita manipular patrones geométricos, por lo que nosotros hemos creado una, denominada *Geopattern*, cuyo objetivo es proporcionar un entorno para la resolución de este tipo de problemas. Consideramos que *GeoPattern* es una aportación original al uso de las TICs como promotoras del desarrollo del pensamiento algebraico.

Según De Corte, Verschaffel y Op't Eynde (2000), los estudiantes de los diferentes niveles educativos tienen notables carencias en sus destrezas de resolución de problemas y sus habilidades metacognitivas; ambos aspectos –especialmente el segundo– apenas son tenidos en cuenta por los profesores de matemáticas de Primaria y Secundaria y la situación ha cambiado poco en la actualidad. En la introducción, comentábamos los avances realizados en la evaluación formativa gracias al uso de aplicaciones informáticas inteligentes que informan a los estudiantes de si sus respuestas son correctas o erróneas y, algunas, son capaces de ofrecer ayudas o pistas adecuadas o decidir qué problema plantear a continuación. Este tipo de aplicaciones, sí pueden ayudar a los estudiantes en la adquisición de habilidades de resolución de problemas y metacognitivas. Existen diversas publicaciones que dan cuenta de experimentos de enseñanza llevados a cabo en este tipo de entornos tutoriales inteligentes, pero no vamos a comentarlas aquí porque salen fuera del campo de interés de este artículo. Nuestro interés se centra en el aspecto concreto de la retroalimentación proporcionada por las aplicaciones informáticas cuando informan a los estudiantes de que sus respuestas no son correctas y les permiten intentar nuevamente resolver el mismo problema, es decir, estamos interesados en las reacciones de los estudiantes ante el nuevo intento de resolución.

Müller, Bescherer, Kortenkamp y Spannagel (2006) ofrecen una recopilación de información sobre la problemática de la evaluación asistida por tutoriales inteligentes en las clases de matemáticas. Diferencian entre “evaluación asistida por ordenador” y “evaluación inteligente”. La primera se refiere a procedimientos de evaluación de estudiantes mediante programas de ordenador que sustituyen al profesor y le evitan la tarea de corregir los exámenes. La segunda se refiere a software que intenta ir más allá del anterior, proporcionando a los estudiantes información o ayudas si, durante la resolución, detectan que estos tienen dificultades. Estos autores describen varias aplicaciones de evaluación inteligente, pero no mencionan que ninguna de ellas permita una nueva resolución del mismo problema ni que, en ninguna de las publicaciones que citan, se preste atención a la reacción de los estudiantes una vez terminada la resolución de los problemas.

Por su parte, Sancho, y Escudero (2012) describen el procedimiento de evaluación formativa que han implementado en una asignatura de matemáticas de un grado de ingeniería impartida “online”. La evaluación se basa en las respuestas a un cuestionario, pero el sistema permite a los estudiantes, antes de completar dicho cuestionario, responder a otros cuestionarios de entrenamiento tantas veces como quieran. Las autoras informan sobre la correlación entre el número de veces que se han respondido los cuestionarios de pruebas y la puntuación obtenida, pero no prestan atención a las diferencias entre los resultados de las sucesivas respuestas a los cuestionarios de prueba.

En vista de que no hemos encontrado ninguna publicación que aborde nuestro problema de investigación, una parte de nuestra actividad ha consistido en identificar comportamientos de los estudiantes para crear una categorización emergente de los mismos.

3. Marco teórico

Los problemas de patrones geométricos muestran una representación gráfica de los primeros términos de una sucesión de números naturales y plantean cuestiones sobre algunos términos concretos de la sucesión y sobre su término general (las Figuras 1 a 3 muestran varios ejemplos). La finalidad de estos problemas es proporcionar a los estudiantes un procedimiento gráfico para poder empezar a abordar

su resolución sin necesidad de conocer la estructura matemática de la sucesión, es decir la regla de paso de un término al siguiente o el valor del término general. Los problemas de patrones geométricos pueden incluir diferentes tipos de cuestiones. Las más frecuentes son las *cuestiones de relación directa* (de aquí en adelante, cuestiones directas), en las que se pide calcular, por este orden, el valor –es decir, la cantidad de objetos que tiene la representación gráfica– de un término *inmediato* (uno muy cercano a los términos dados en el enunciado del problema, por ejemplo entre el 4º y el 6º términos), un término *próximo* a los dados (de manera que se puedan utilizar tanto la representación geométrica como la aritmética para el cálculo de su valor) y un término *lejano* (tal que su representación gráfica sea costosa de llevar a cabo y sea más conveniente poner en marcha un proceso de generalización) y, finalmente, se pide formular una expresión (que se espera que sea algebraica) para un término *general* de la sucesión (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015). En las cuestiones de *relación inversa* (de aquí en adelante, cuestiones inversas), se pide calcular la posición de un término de la sucesión cuyo valor se da en el enunciado (Rivera, 2013). Las cuestiones directas son un buen contexto para introducir a los estudiantes en la generalización y las cuestiones inversas para iniciarles en el planteamiento y la resolución de ecuaciones.

En el contexto de iniciación al álgebra, el planteamiento de problemas de patrones geométricos tiene como principal finalidad ofrecer a los estudiantes contextos en los que surja de manera natural la necesidad de generalizar las relaciones observadas en los primeros términos de la representación gráfica. Por ello, se utilizan sucesiones con una relación funcional sencilla. En nuestros experimentos de enseñanza, hemos utilizado patrones geométricos que corresponden a relaciones funcionales *afines* ($V_n = an \pm b$) y *lineales* ($V_n = an$), pero no hemos usado relaciones cuadráticas ($V_n = an^2 \pm bn + c$).

Los estudiantes emplean distintas estrategias para resolver los problemas de patrones geométricos. Por una parte, Rivera, y Becker (2005) distinguen, en las respuestas a las cuestiones directas, dos tipos de estrategias:

- *Visual*, en la que los estudiantes analizan y descomponen la información gráfica de los términos representados.
- *Númerica*, en la que los estudiantes usan los valores numéricos de la cantidad de objetos de los términos sin prestar atención a su representación gráfica.

Por otra parte, García-Reche, Callejo y Fernández (2015) consideran cuatro estrategias de cálculo en las cuestiones directas:

- *Conteo*, basada en dibujar la representación gráfica del término pedido y contar la cantidad de objetos que contiene.
- *Recursiva*, consistente en sumar de forma reiterada la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos de la sucesión, hasta llegar al término pedido.
- *Funcional*, en la cual se aplica una relación que permite el cálculo del valor de cualquier término a partir de su posición en la sucesión.
- *Proporcional*, que usa una relación de proporcionalidad entre las posiciones de dos términos y sus valores para calcular el valor de uno de los términos.

Estas cuatro estrategias de cálculo pueden ser correctas o incorrectas, dependiendo de la sucesión a la que se apliquen y de cómo se determinen las operaciones a realizar. En particular, la estrategia proporcional sólo es correcta en las sucesiones lineales (aquellas cuyo término general es de la forma an).

Como hemos comentado en secciones anteriores, no conocemos literatura de investigación que analice las reacciones de los estudiantes cuando una aplicación informática les informa de que su respuesta a un problema es errónea y deben volver a intentar resolverlo. Por este motivo, una aportación original de nuestra investigación, presentada en este artículo, es una categorización de estilos de reacción de los

estudiantes. Se trata de un conjunto de categorías emergente, obtenido mediante un análisis inicial de los datos y una depuración posterior de la primera aproximación. Nos hemos centrado en los apartados *a*, *b* y *c* de los problemas de patrones geométricos que analizamos en este artículo, ya que son las cuestiones directas que requieren de una respuesta numérica (la cantidad de elementos de la posición pedida).

Hemos identificado tres formas diferentes de actuar de los estudiantes que proporcionaron una respuesta incorrecta en su primer intento de resolver una cuestión y, a continuación, realizaron uno o más intentos de resolverla:

- *Cambio de estrategia*: el estudiante aborda de nuevo la resolución, pero lo hace con una aproximación diferente. Por ejemplo, si primero ha aplicado una estrategia funcional, después aplica una recursiva, proporcional, etc. Esta estrategia puede producirse porque el estudiante piensa que esa forma de resolver el problema no es válida.
- *Mantenimiento de la estrategia*: el estudiante aborda de nuevo la resolución con la misma aproximación anterior, pero aplicándola de manera diferente. Por ejemplo, si ha descompuesto la figura del patrón en dos partes, vuelve a hacer esa descomposición y a verificar la relación entre las cantidades de objetos de las partes y la posición en la sucesión. Esta estrategia puede usarse cuando el estudiante sospecha que el error se ha debido a algún fallo al contar objetos o en los cálculos.
- *Ensayo y error*: el estudiante introduce en la aplicación números elegidos de una forma, al menos parcialmente, aleatoria, hasta que acierta con el valor correcto o se cansa de probar. Por ejemplo, introduce números unas unidades superiores o inferiores a su primera respuesta, o realiza de forma aleatoria operaciones con números presentes en los datos del problema. Esta estrategia puede emplearse porque el estudiante no sabe a qué se ha debido el error o no tiene confianza en su forma de resolución, pero no sabe cómo mejorarla.

4. Metodología

Para dar respuesta a los objetivos planteados en esta investigación, empleamos una metodología cualitativa de análisis de casos con un componente emergente, en lo relativo a las reacciones de los estudiantes cuando la aplicación les informa de que la respuesta que han dado a una cuestión no es correcta. A continuación, describimos la muestra estudiada en la investigación y la unidad de enseñanza implementada, la aplicación móvil *GeoPattern* diseñada para llevarla a cabo y, finalmente, describimos el proceso de recogida de datos y el procedimiento de análisis de las respuestas de los estudiantes a los distintos problemas de la unidad de enseñanza.

4.1. Participantes

En este artículo nos centramos en analizar el comportamiento de un conjunto de 27 estudiantes que realizaron la unidad de enseñanza descrita en la siguiente sección mediante la aplicación *GeoPattern*. Estos estudiantes formaron una muestra de conveniencia constituida por grupos heterogéneos de 10 estudiantes de 4º de Educación Primaria, 7 estudiantes de 5º y 10 estudiantes de 6º de dos centros públicos. Sus edades van desde los 9 hasta los 12 años. Para identificar a cada estudiante, usamos un código formado por su curso, su grupo y un número secuencial; por ejemplo, el estudiante 6A-T3 es el estudiante T3 del grupo 6ºA.

4.2. La unidad de enseñanza

Las sesiones experimentales tuvieron lugar en el horario y con la duración habituales –45 minutos cada una– de las clases de matemáticas. La unidad de enseñanza estaba formada por una secuencia de problemas de patrones geométricos, que se organizaron en cuatro bloques, para resolver un bloque en

cada sesión. Los objetivos de aprendizaje de las sucesivas sesiones eran, respectivamente: 1) identificar la relación funcional correspondiente al patrón geométrico presentado en el problema y describirla mediante *expresiones verbales*, es decir, describiendo de palabra el término general de la sucesión; 2) traducir generalizaciones expresadas verbalmente a *expresiones algebraicas primitivas* que combinan símbolos aritméticos o algebraicos con palabras (p. ej.: la generalización verbalizada como *hay el doble de sillas que de mesas* se escribe como $Sillas = 2 \times mesas$); 3) iniciar la enseñanza del significado de las letras y expresar generalizaciones utilizando *expresiones algebraicas*; y 4) utilizar las expresiones algebraicas para resolver las cuestiones de inversión mediante la inversión del orden de las operaciones de la relación funcional.

Cada estudiante de la muestra objeto de estudio disponía de una tableta en la que tenía instalada la aplicación *GeoPattern*, descrita en la siguiente sección. En cada sesión los estudiantes resolvieron de forma individual y en la aplicación *GeoPattern* un máximo de 3 problemas, dependiendo de su habilidad y rapidez. La profesora (la primera autora) proporcionaba algunas directrices a los alumnos y, una vez estos habían resuelto los problemas, los resolvía en la pizarra, animando a los alumnos a compartir distintas estrategias, generalizaciones y expresiones algebraicas.

En el presente artículo analizamos la resolución de tres problemas (Figuras 1, 2 y 3), planteados uno en cada una de las tres primeras sesiones. Los problemas tienen una estructura similar, con tres apartados que plantean cuestiones directas sobre un término inmediato, uno próximo y uno lejano (apartados *a*, *b* y *c*, respectivamente), un apartado con una cuestión de generalización (*d*) –que esperamos que sea de tipo verbal en el problema de la primera sesión (Cumpleaños B) y algebraico en los de la segunda y tercera sesiones (Jardín y Cometa, respectivamente)– y otro apartado con una cuestión de inversión (*e*). Los tres problemas están basados en relaciones de tipo afín: en Cumpleaños B la relación es $V_n = 2n + 2$, en Jardín es $V_n = 2n + 1$ y en Cometa es $V_n = n + 4$.

CUMPLEAÑOS B

Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:



1 mesa



2 mesas



3 mesas

- ¿Cuántos invitados cabrán en 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Cuántos invitados cabrán en 15 mesas? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Cuántos invitados cabrán en 50 mesas? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de invitados que cabrán dependiendo del número de mesas?
- Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

Figura 1. Problema de la primera sesión de la unidad de enseñanza

JARDÍN

En una clase quieren hacer un jardín juntando macetas de flores. Mira cómo crece el jardín cada día.



Día 1



Día 2



Día 3

a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de macetas que tendrá el jardín cada día? ¿Puedes escribirle alguna fórmula?
e) Luis ha contado 39 macetas, ¿sabrías decir qué día es? ¿Cómo lo sabes?

Figura 2. Problema de la segunda sesión de la unidad de enseñanza

COMETA

Alberto ha decidido salir hoy a volar su cometa. Como hay bastante viento para volarla alto, cada minuto añade piezas cuadradas a su cola. Ten en cuenta que el rombo verde es la cometa y no forma parte de la cola.



Minuto 1



Minuto 2



Minuto 3

a) ¿Cuántas piezas cuadradas tendrá la cola en el minuto 6? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántas piezas cuadradas tendrá la cola en el minuto 15? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Cuántas piezas cuadradas tendrá la cola en el minuto 37? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular las piezas cuadradas que tendrá la cola en cada minuto? ¿Puedes escribirle alguna fórmula?
e) Si la cola tiene 45 piezas cuadradas, ¿cuántos minutos habrán pasado? ¿Cómo lo sabes?

Figura 3. Problema de la tercera sesión de la unidad de enseñanza

4.3. GeoPattern

GeoPattern es una aplicación móvil educativa que permite la presentación y resolución de problemas de patrones geométricos. La aplicación captura minuciosamente la traza digital que el estudiante deja durante la resolución de los problemas, con el fin de facilitar a profesores e investigadores datos que les informen sobre las diferentes estrategias de resolución seguidas por los estudiantes, las operaciones que han realizado con la calculadora incorporada en la aplicación, la cantidad de intentos de solución que han hecho o cuántos problemas han resuelto correctamente.

GeoPattern está diseñada de modo que pueda ser compilada y embebida utilizando Phonegap, un conjunto de librerías que permite compilar una aplicación web escrita en HTML5, CSS3 y Javascript para ser utilizada como aplicación nativa en dispositivos móviles. De este modo, la aplicación puede ser

compilada para diferentes sistemas operativos móviles, como Android, iOS o Windows Phone, con la ventaja de servirse de un único desarrollo.

Para su funcionamiento, *GeoPattern* necesita disponer de una batería de problemas de patrones geométricos. Estos están compuestos por un enunciado, varios apartados con las cuestiones y sus respectivas soluciones. Así, la aplicación puede evaluar si las soluciones numéricas aportadas por los estudiantes son correctas o no (Figura 4).

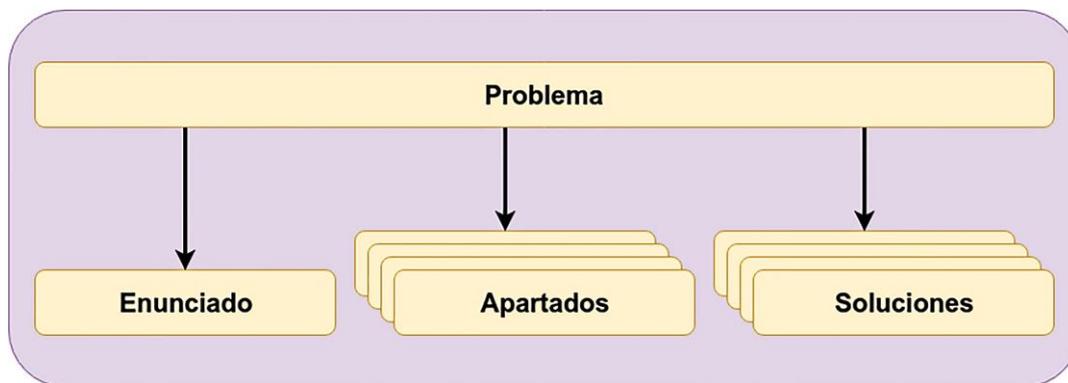


Figura 4. Elementos de un problema en GeoPattern

Además, *GeoPattern* necesita cierta información adicional, que es necesario cargar al introducir los problemas en la aplicación para conformar una estructura de datos definida que debe de ser satisfecha al ejecutar la aplicación. Toda esta información debe de cargarse en la aplicación en formato JSON, siguiendo la estructura que se muestra en la Figura 5a, para que pueda ser leída correctamente. La información requerida para cada problema es la siguiente:

- Un título, que sirve para identificar el problema.
- Un enunciado, que se muestra al inicio de la actividad y sirve para contextualizar el patrón que se muestra y las cuestiones que se plantean.
- Una secuencia de apartados con las cuestiones que se presentarán a los estudiantes, en el orden preestablecido.
- La secuencia de soluciones a los apartados, en el mismo orden, que sirve para corregir las respuestas aportadas por los estudiantes.
- Entre 1 y 4 imágenes, cada una en un archivo en formato PNG, que representan los objetos básicos que forman la representación gráfica del patrón mostrada en el enunciado del problema. En los tres problemas que analizamos, son una mesa y un invitado, una maceta de cada color, y el cuerpo de la cometa y un cuadrado de la cola.
- Una imagen del patrón geométrico del enunciado, en un archivo en formato PNG.

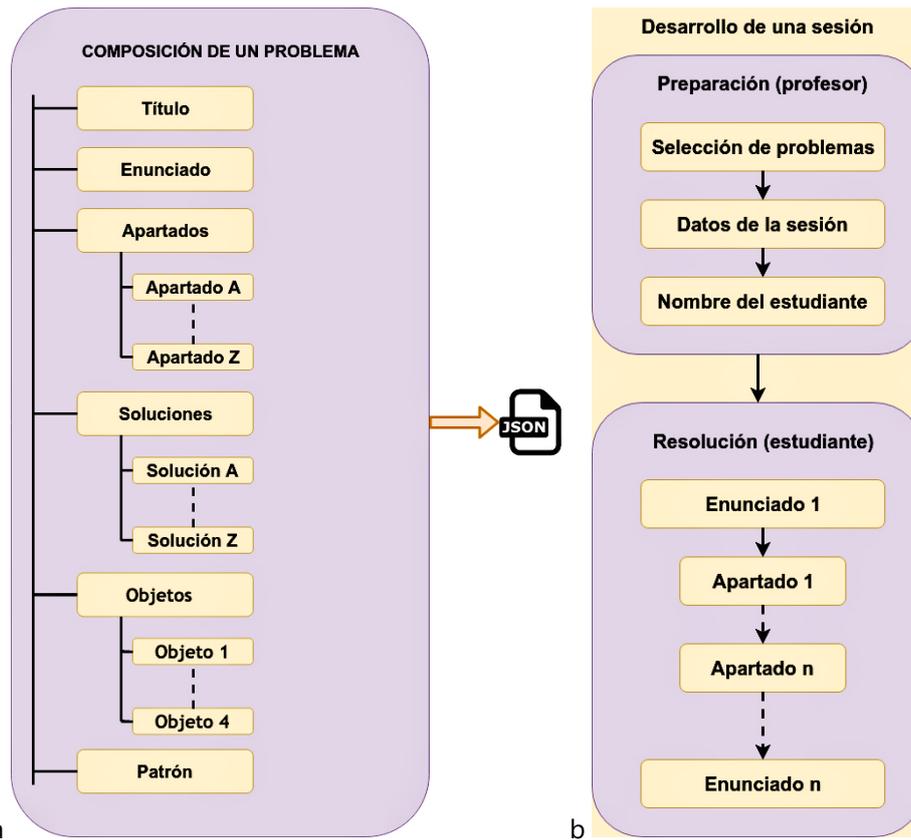


Figura 5. Estructura (a) de un problema en GeoPattern y (b) del desarrollo de una sesión

A nivel funcional, el uso de la aplicación se divide en dos partes (Figura 5b): la primera, a realizar por el profesor o investigador, consiste en introducir, en cada tableta que van a utilizar los estudiantes, datos necesarios para la sesión de clase (Figura 6): seleccionar, del conjunto de problemas cargados en la aplicación, los que quiere plantear a los estudiantes y fijar su orden de aparición; introducir datos identificativos de la sesión y del estudiante que va a utilizar esa tableta durante la sesión, que serán utilizados por la aplicación al generar la traza digital del estudiante.

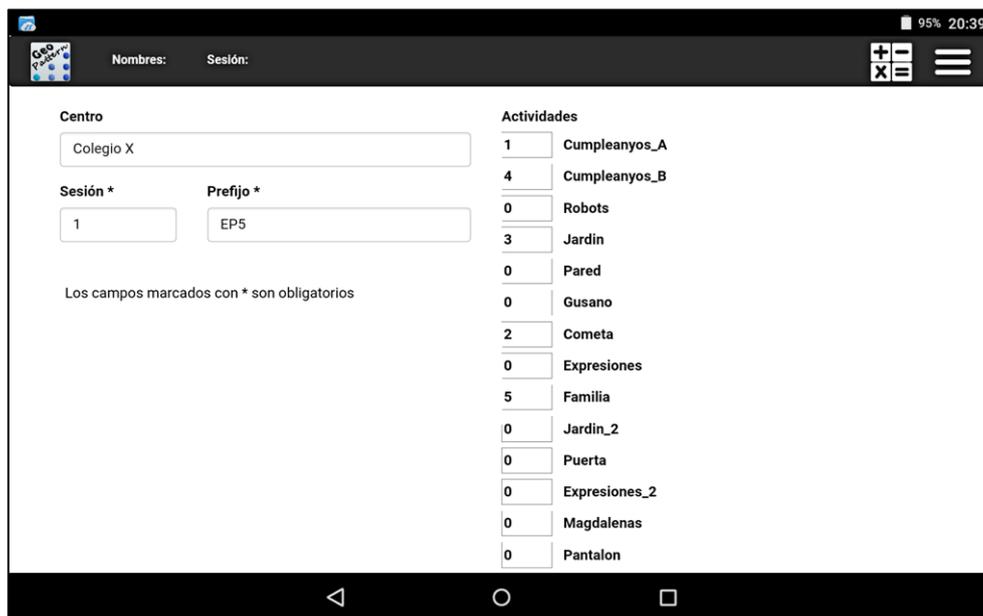


Figura 6. Pantalla del profesor, para seleccionar los problemas e introducir datos de la sesión

La segunda parte, a realizar por los estudiantes, consiste en la resolución de los problemas. Mientras se está resolviendo un problema, GeoPattern permite al estudiante moverse libremente por todos sus apartados gracias a los botones "Anterior" y "Siguiente" (Figura 7). De este modo, el estudiante decide cuándo pasar al apartado siguiente o volver a apartados anteriores para recordar su resolución o modificar su respuesta anterior con nueva información. Al terminar de resolver un problema, la aplicación plantea el siguiente problema sin posibilidad de volver al problema anterior.

La interfaz del usuario está diseñada para poder mostrar en una misma ventana todos los elementos necesarios para responder cada apartado. Esto la hace más intuitiva y sencilla para estudiantes de edades tempranas. La interfaz se divide en tres áreas (Figura 7):

- La barra de menú superior, que muestra información acerca de la sesión y permite desplegar u ocultar la imagen del patrón y de los objetos básicos que lo forman (en este caso, una mesa y un invitado). También contiene un botón para mostrar y ocultar una calculadora con las operaciones básicas necesarias para realizar este tipo de problemas.
- La barra con la imagen del patrón y los objetos básicos que lo forman. Permite seleccionar un objeto básico para insertarlo en el lienzo gráfico.
- El lienzo gráfico, que permite al estudiante, si opta por dibujar durante la resolución, arrastrar dentro de él los distintos objetos básicos del patrón, para situarlos en la posición que el estudiante desee.
- La zona de respuestas, que cuenta con varios elementos: en la parte superior izquierda hay una ventana para introducir una respuesta numérica y, a su derecha, el botón "Comprobar", que permite al estudiante saber si la respuesta introducida es correcta o no: si es correcta, la ventana de la respuesta cambiará a color verde, de lo contrario lo hará a color rojo. En la parte inferior hay un campo de texto que permite introducir respuestas textuales libres, por ejemplo, explicaciones o comentarios, en particular la respuesta al apartado *d*. En la versión actual, GeoPattern no puede corregir las respuestas del campo de texto.

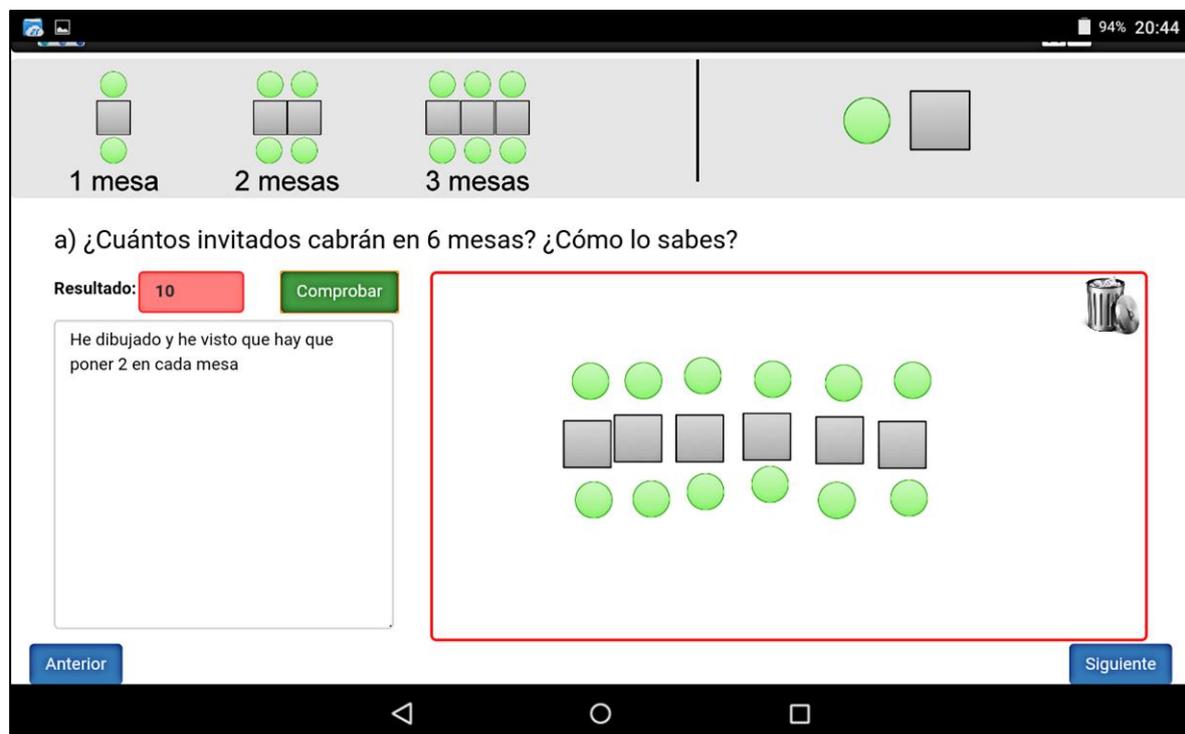


Figura 7. Interfaz del usuario

Durante la resolución de los problemas, la aplicación captura automáticamente todas las acciones que el estudiante realiza y las almacena en forma de clave/valor, con una clave asociada a cada acción posible y el valor de la respuesta, junto con una marca temporal e información del problema y el apartado que está resolviendo el usuario. Estos datos se vuelcan a un fichero en formato CSV (*Comma-Separated Values*). Adicionalmente, en caso de ser utilizado, también almacena el contenido del lienzo gráfico de cada apartado en formato imagen. Toda esta información se archiva en el almacenamiento interno del dispositivo y el profesor o investigador la puede exportar y procesar con cualquier software de análisis como Excel (Figura 8), R o SPSS o software gráfico (Figura 10).

1	clave	actividad	apartado	texto	resultado	correccion	operacion	fecha	timestamp
2	Centro			CEIP X				28/2/18 9:32	1519810334
3	Sesion			1				28/2/18 9:32	1519810334
4	Nombres			Estudiante Y				28/2/18 9:32	1519810334
5	Siguiente Actividad	Cumpleanyos_B	encabezado					28/2/18 9:32	1519810334
6	Siguiente Apartado	Cumpleanyos_B	a					28/2/18 9:33	1519810390
7	Explicacion	Cumpleanyos_B	a	3-8 6-				28/2/18 9:33	1519810430
8	Calcular	Cumpleanyos_B	a				8+6 = 14	28/2/18 9:33	1519810434
9	Calcular	Cumpleanyos_B	a				8*6 = 48	28/2/18 9:34	1519810444
10	Calcular	Cumpleanyos_B	a				48/3 = 16	28/2/18 9:34	1519810451
11	Explicacion	Cumpleanyos_B	a	3-8 6-				28/2/18 9:34	1519810455
12	Explicacion	Cumpleanyos_B	a	3-8 6-16				28/2/18 9:34	1519810461
13	Explicacion	Cumpleanyos_B	a	3-8 6-16 La regla de tres				28/2/18 9:34	1519810492
14	Comprobar	Cumpleanyos_B	a		16	Mal		28/2/18 9:34	1519810492
15	Explicacion	Cumpleanyos_B	a					28/2/18 9:36	1519810584
16	Apartado Anterior	Cumpleanyos_B	encabezado					28/2/18 9:36	1519810584
17	Siguiente Apartado	Cumpleanyos_B	a					28/2/18 9:36	1519810586
18	Dibuja	Cumpleanyos_B	a					28/2/18 9:37	1519810642
19	Comprobar	Cumpleanyos_B	a		14	Bien		28/2/18 9:40	1519810823
20	Explicacion	Cumpleanyos_B	a	Dibujando				28/2/18 9:40	1519810836
21	Siguiente Apartado	Cumpleanyos_B	b					28/2/18 9:40	1519810838
22	Dibuja	Cumpleanyos_B	b					28/2/18 9:41	1519810862
23	Comprobar	Cumpleanyos_B	b		32	Bien		28/2/18 9:44	1519811077
24	Explicacion	Cumpleanyos_B	b	Dibujando				28/2/18 9:44	1519811093
25	Siguiente Apartado	Cumpleanyos_B	c					28/2/18 9:44	1519811098
26	Apartado Anterior	Cumpleanyos_B	b					28/2/18 9:45	1519811148
27	Siguiente Apartado	Cumpleanyos_B	c					28/2/18 9:45	1519811150
28	Explicacion	Cumpleanyos_B	c	Multiplicando 50 * 2 i sumando dos				28/2/18 9:46	1519811197
29	Comprobar	Cumpleanyos_B	c		102	Bien		28/2/18 9:46	1519811203
30	Siguiente Apartado	Cumpleanyos_B	d					28/2/18 9:46	1519811207

Figura 8. Información recogida por GeoPattern sobre la actividad de un estudiante

4.4. Procedimientos de recogida de información y análisis de datos

Cada estudiante de la muestra disponía de una tableta con la aplicación GeoPattern. La recogida de datos se realizó a través de la aplicación, como hemos explicado en la sección anterior, y se exportó para su análisis mediante Excel (Figura 8) y una aplicación gráfica (Figura 10). Además, para completar la información sobre la actividad de los estudiantes y resolver posibles dudas en la etapa de análisis de datos, grabamos videos de la pantalla de las tabletas y las conversaciones mantenidas por los estudiantes.

Como el objetivo principal de este artículo es evaluar el papel de GeoPattern en la autocorrección de los estudiantes y en la búsqueda de nuevas estrategias de resolución, analizaremos únicamente las respuestas a las cuestiones directas con respuesta numérica, en las que la aplicación evalúa las respuestas, es decir, los apartados *a*, *b* y *c*. Además, nos centramos en los estudiantes cuyas respuestas fueron, en el primer intento, erróneas, pues son los que tuvieron que decidir cómo continuar para responder de nuevo el mismo apartado. Para la identificación de las estrategias empleadas por estos estudiantes, nos hemos basado en las categorizaciones propuestas por Rivera, y Becker (2005) y García-Reche, Callejo y Fernández (2015), así como en nuestra categorización emergente de cambios de estrategia de los estudiantes en los sucesivos intentos de resolución de la misma cuestión, todas ellas descritas en la sección del marco teórico.

5. Análisis

El análisis de los datos recogidos nos ha permitido identificar cuatro tipos de respuestas que los estudiantes mostraron durante la resolución en GeoPattern de los problemas de patrones geométricos que hemos seleccionado, al evaluar la corrección de sus repuestas numéricas a los apartados *a*, *b* y *c*. Estas respuestas fueron: *correcta* (C), cuando el estudiante obtuvo un valor numérico correcto en su primer intento; *errónea-correcta* (E-C), en aquellos casos en los que el estudiante, tras obtener una respuesta errónea, modificó y/o autocorrigió su estrategia hasta conseguir una respuesta correcta; *errónea* (E), cuando, pese a sus intentos por obtener una respuesta correcta, el estudiante fue incapaz de lograrla; y *no contesta* (NC), para los apartados en que el estudiante no dio una respuesta.

En la Tabla 1 se recogen los tipos de respuestas obtenidos en los distintos cursos y en cada uno de los apartados de los problemas analizados. Como se puede observar, la herramienta de autocorrección de GeoPattern permitió obtener una respuesta correcta a un alto porcentaje de estudiantes de 4º y 5º cursos que, inicialmente, dieron una respuesta errónea. De un total de 243 respuestas, los estudiantes se beneficiaron de esta herramienta en 66 de ellas, es decir, un 27.2%, siendo los estudiantes de 5º los más beneficiados (34.9%) y los estudiantes de 6º los que menos necesitaron corregir su respuesta inicial (23.3%).

		Cumpleaños B			Jardín			Cometa			Total
		a	b	c	a	b	c	a	b	c	
4º	C	0	0	0	0	0	0	1	0	3	4
		0%	0%	0%	0%	0%	0%	10%	0%	30%	4.4%
	E-C	0	0	0	1	1	0	8	9	4	23
		0%	0%	0%	10%	10%	0%	80%	90%	40%	25.6%
E	1	1	0	3	0	1	0	0	1	7	
	10%	10%	0%	30%	0%	10%	0%	0%	10%	7.8%	
NC	9	9	10	6	9	9	1	1	2	56	
	90%	90%	100%	60%	90%	90%	10%	10%	20%	62.2%	
5º	C	1	3	2	2	3	3	3	4	2	23
		14.3%	42.9%	28.6%	28.6%	42.9%	42.6%	42.6%	57.1%	28.6%	36.5%
	E-C	3	1	0	5	2	3	3	2	3	22
		42.9%	14.3%	0%	71.4%	28.6%	42.6%	42.6%	28.6%	42.9%	34.9%
E	2	1	1	0	2	1	0	0	1	8	
	28.6%	14.3%	14.3%	0%	28.6%	14.3%	0%	0%	14.3%	12.7%	
NC	1	2	4	0	0	0	1	1	1	10	
	14.3%	28.6%	57.1%	0%	0%	0%	14.3%	14.3%	14.3%	15.9%	
6º	C	3	5	5	2	3	3	1	4	3	29
		30%	50%	50%	20%	30%	30%	10%	40%	30%	32.2%
	E-C	2	1	0	4	3	2	6	3	0	21
		20%	10%	0%	40%	30%	20%	60%	30%	0%	23.3%
E	3	3	3	2	1	3	1	1	5	22	
	30%	30%	30%	20%	10%	30%	10%	10%	50%	24.4%	
NC	2	1	2	2	3	2	2	2	2	18	
	20%	10%	20%	20%	30%	20%	20%	20%	20%	20%	

C = respuesta correcta en el primer intento. E = respuesta errónea en todos sus intentos. E-C = respuesta errónea en uno o varios intentos y correcta en el último intento. NC= no contesta.

Tabla 1. Cantidad (absoluta y porcentual) de estudiantes en cada tipo de respuesta a cada apartado

A continuación, describimos y analizamos los diferentes tipos de estrategias identificadas en los estudiantes que dieron respuestas erróneas-correctas (E-C), con el fin de ver de qué manera se beneficiaron de la retroalimentación producida por GeoPattern al evaluar sus respuestas. Hemos identificado tres estilos de actuaciones de autocorrección por parte de estos estudiantes, que ejemplificamos en la siguiente sección con respuestas de estudiantes.

5.1. Cambio de estrategia

Este estilo de actuación corresponde a los estudiantes que, tras una respuesta errónea, decidieron buscar de nuevo la solución siguiendo una estrategia diferente a la anterior. La decisión de intentar una estrategia distinta forzó a estos estudiantes a replantearse su visión del patrón y buscar otra posible vía de solución. Los cambios fueron realizados hasta encontrar la respuesta correcta.

5.1.1. Ejemplo 1

En el problema Cometa (Figura 3), el estudiante 6A-T3 realizó varios cambios de estrategia tanto en el apartado *a* como en el apartado *b* (La Figura 9 muestra sus sucesivos intentos). En el apartado *a*, donde se pregunta por el minuto 6, el estudiante empezó dibujando (fila 11), aunque no llegó a completar el dibujo. A continuación, decidió seguir mediante una estrategia proporcional ($V_n = 5n$, filas 12 y 13), basándose en que la cometa tiene 5 piezas cuadradas en el minuto 1. Al comprobar que esta respuesta era errónea, decidió probar la relación $V_n = 60n$ (filas 15 y 16). Desconocemos el motivo por el que realizó esta operación, ya que el estudiante no proporcionó información al respecto. Finalmente, decidió utilizar una estrategia de conteo, más sencilla y más lenta, realizando un dibujo de la cometa en el minuto 6 (Figura 10), con el que obtuvo la respuesta correcta (filas 17 y 18). En el apartado *b*, en el que se pregunta por la cometa en el minuto 15, el comportamiento del estudiante fue similar, pues este empezó con una estrategia funcional ($V_n = n+5$, filas 20 y 21), pasó a una proporcional ($N=5n$, filas 22 y 23) y, finalmente, a una de recuento mediante un dibujo (fila 24), que le permitió obtener la respuesta correcta.

clave	actividad	apartado	texto	resultado	correccion	operacion	fecha
10	Siguiente Apartado	Cometa	a				14/3/18 9:15
11	Dibuja	Cometa	a				14/3/18 9:16
12	Calcular	Cometa	a			$5*6 = 30$	14/3/18 9:16
13	Comprobar	Cometa	a		30	Mal	14/3/18 9:16
14	Explicacion	Cometa	a				14/3/18 9:16
15	Calcular	Cometa	a			$6*60 = 360$	14/3/18 9:17
16	Comprobar	Cometa	a		360	Mal	14/3/18 9:17
17	Comprobar	Cometa	a		10	Bien	14/3/18 9:18
18	Explicacion	Cometa	a	He dibujado			14/3/18 9:20
19	Siguiente Apartado	Cometa	b				14/3/18 9:20
20	Calcular	Cometa	b			$5+15 = 20$	14/3/18 9:21
21	Comprobar	Cometa	b		20	Mal	14/3/18 9:21
22	Calcular	Cometa	b			$5*15 = 75$	14/3/18 9:21
23	Comprobar	Cometa	b		75	Mal	14/3/18 9:21
24	Dibuja	Cometa	b				14/3/18 9:22
25	Comprobar	Cometa	b		19	Bien	14/3/18 9:23
26	Explicacion	Cometa	b	He			14/3/18 9:23
27	Calcular	Cometa	b			$15+5 = 20$	14/3/18 9:23
28	Explicacion	Cometa	b	He dibujado			14/3/18 9:24

Figura 9. Respuestas del estudiante 6A-T3 a los apartados *a* y *b* del problema Cometa

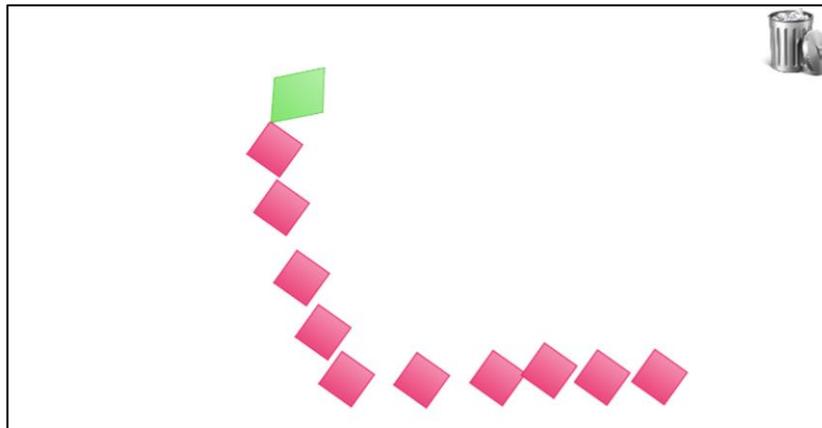


Figura 10. Dibujo realizado por el estudiante 6A-T3

5.1.2. Ejemplo 2

También en el problema Cometa (Figura 3), el estudiante 5A-T2 realizó cambios de estrategia en los apartados *b* y *c* (Figura 11) para obtener una respuesta correcta. Empezó utilizando una estrategia proporcional (filas 15 y 16) al multiplicar 15 (término por el que se le preguntó en el apartado *b*) por 5 (número de piezas cuadradas rosa del primer término). Al comprobar que la respuesta era errónea, decidió cambiar a la estrategia de conteo, más visual, y empezó a dibujar (fila 17). Para ello, primero colocó las 5 piezas de la cometa en el minuto 1 y luego añadió una pieza más por cada minuto hasta llegar al 15 (Figura 12). Finalmente, contó las piezas que formaban la cola del minuto 15 (fila 18) y escribió su explicación "Sumando uno siempre" (fila 19).

clave	actividad	apartado	texto	resultado	correccion	operacion	fecha
14	Siguiente Apartado	Cometa	b				15/5/18 10:11
15	Calcular	Cometa	b			15*5 = 75	15/5/18 10:12
16	Comprobar	Cometa	b	75	Mal		15/5/18 10:12
17	Dibuja	Cometa	b				15/5/18 10:12
18	Comprobar	Cometa	b	19	Bien		15/5/18 10:13
19	Explicacion	Cometa	b	Sumando uno siempre			15/5/18 10:14
20	Siguiente Apartado	Cometa	c				15/5/18 10:14
21	Dibuja	Cometa	c				15/5/18 10:14
22	Comprobar	Cometa	c	44	Mal		15/5/18 10:17
23	Comprobar	Cometa	c	43	Mal		15/5/18 10:17
24	Comprobar	Cometa	c	40	Mal		15/5/18 10:18
25	Calcular	Cometa	c			19-15 = 4	15/5/18 10:18
26	Comprobar	Cometa	c	41	Bien		15/5/18 10:18
27	Explicacion	Cometa	c	Ayudándose de la operación de antes restando			15/5/18 10:19

Figura 11. Respuestas del estudiante 5A-T2 a los apartados *b* y *c* del problema Cometa

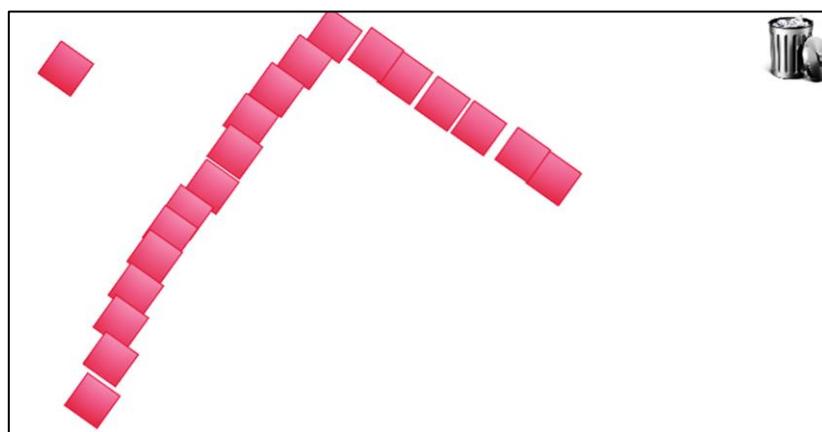


Figura 12. Dibujo realizado por el estudiante 5A-T2 en el apartado *b*

Una vez solucionado el apartado *b*, el estudiante 5A-T2 decidió emplear la misma estrategia visual de dibujo y conteo en el apartado *c*, donde se pide calcular el valor del término que ocupa la posición 37

(fila 21). Sin embargo, en esta ocasión se equivocó al añadir piezas cuadradas y añadió más de las que debía (Figura 13), seguramente debido a las dimensiones del dibujo. Como consecuencia, obtuvo una respuesta errónea (fila 22) y decidió probar otras dos respuestas cercanas (filas 23 y 24). Finalmente, decidió cambiar de estrategia y usar una numérica: calcular la diferencia existente entre el término del apartado *b* y su valor ($19-15=4$, filas 25 y 27) y utilizar esa diferencia para calcular el término del apartado *c* ($37+4=41$, fila 26).

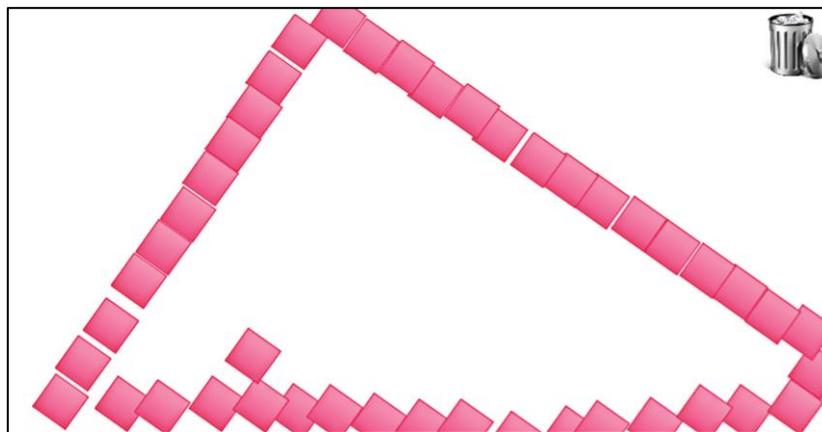


Figura 13. Dibujo realizado por el estudiante 5A-T2 en el apartado c

5.1.3. Ejemplo 3

En el problema Cumpleaños B (Figura 1), el estudiante 6A-T1 también se vio forzado a cambiar de estrategia para solucionar el apartado *a* (Figura 14). En un inicio, decidió emplear una estrategia numérica proporcional, usando el término 3 y su valor para obtener el valor del término 6 (filas 7 a 14). Tras comprobar que su respuesta era errónea, decidió dibujar y, de este modo, obtuvo la respuesta correcta (filas 18 a 20), aunque, como se observa en la Figura 15, seguía teniendo en mente la estrategia proporcional y, tras acabar el dibujo, decidió separar las mesas y comprobar por qué esta no era correcta.

clave	actividad	apartado	texto	resultado	correccion	operacion	fecha
6	Siguiente Apartado	Cumpleaños_B	a				28/2/18 9:33
7	Explicacion	Cumpleaños_B	a	3-8 6-			28/2/18 9:33
8	Calcular	Cumpleaños_B	a			$8+6 = 14$	28/2/18 9:33
9	Calcular	Cumpleaños_B	a			$8*6 = 48$	28/2/18 9:34
10	Calcular	Cumpleaños_B	a			$48/3 = 16$	28/2/18 9:34
11	Explicacion	Cumpleaños_B	a	3-8 6-			28/2/18 9:34
12	Explicacion	Cumpleaños_B	a	3-8 6-16			28/2/18 9:34
13	Explicacion	Cumpleaños_B	a	3-8 6-16 La regla de tres			28/2/18 9:34
14	Comprobar	Cumpleaños_B	a		16 Mal		28/2/18 9:34
15	Explicacion	Cumpleaños_B	a				28/2/18 9:36
16	Apartado Anterior	Cumpleaños_B	encabezado				28/2/18 9:36
17	Siguiente Apartado	Cumpleaños_B	a				28/2/18 9:36
18	Dibuja	Cumpleaños_B	a				28/2/18 9:37
19	Comprobar	Cumpleaños_B	a		14 Bien		28/2/18 9:40
20	Explicacion	Cumpleaños_B	a	Dibujando			28/2/18 9:40

Figura 14. Respuestas del estudiante 6A-T1 al apartado *a* del problema Cumpleaños B

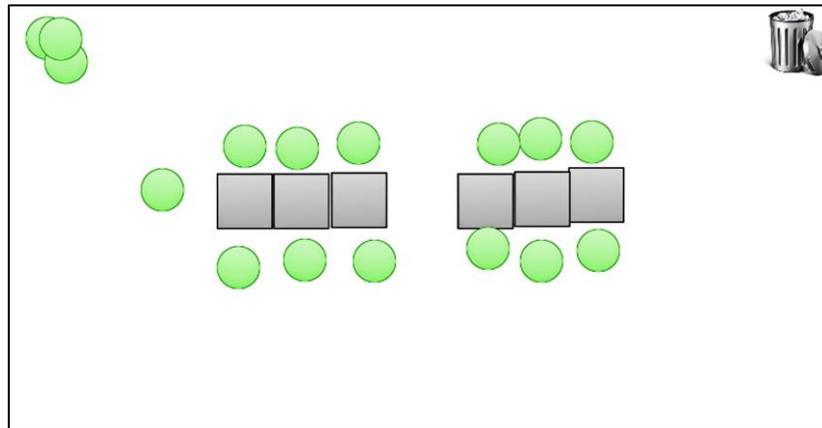


Figura 15. Dibujo realizado por el estudiante 6A-T1 en el apartado a

5.2. Revisión de la estrategia

Estos estudiantes empezaron planteando una estrategia que, al ser aplicada, llevaba a una respuesta errónea. Después, decidieron continuar usando la misma estrategia, pero revisándola y perfeccionándola hasta obtener la respuesta correcta. Esta forma de actuación llevaba a los estudiantes a analizar sus acciones y ordenar sus pensamientos, siendo capaces de autocorregir sus errores sin cambiar de estrategia.

5.2.1. Ejemplo 1

En el problema Cometa (Figura 3), el estudiante 6A-T9 decidió usar una estrategia recursiva numérica para hallar la solución del apartado b (Figura 16). En el vídeo se escucha cómo recitaba la sucesión numérica proporcionada por el patrón hasta llegar al término pedido por el apartado b:

1. Pues si en el minuto 6 hay 10, ...
2. En 3 es 7, en 4 es 8, en 5 es 9, en 6 es 10 [baja la voz y no se entiende]. Ay, no.
3. [Continúa contando] en 9 es 13, en 9 es 13, ...
4. [vuelve a empezar] En 3 es 7, en 4 es 8, en 5 es 9, en 6 es 10, en 7 es 11, en 8 es 12, en 9 es 13, en
5. 10 es 14, en 11 es 15, en 12 es 16, en 17 es 16... en 17 es 18, en 18 es 19, en 19 es 20 [escribe 20,
6. que es erróneo (fila 21)].
7. En 3 es 7, en 4 es 8, en 5 es 9, en 6 es 10, en 7 será 11, en 8 será 12, en 9 será 13, en 10 será 14, 11
8. será 15, en 12 será 16, en 13 será 14... ¡Ay!
9. A ver... En 6 son 10, en 7 serán [no se entiende lo que dice]. 7 [es] 11, 8 [es] 12, 9 [es] 13 [no se
10. entiende lo que dice]. [Comprueba 19 (correcto, fila 24)].

Sin embargo, en diversos momentos el estudiante se confundió con los números y aplicó mal la estrategia recursiva (líneas 2 y 5), ocasionando una respuesta errónea (fila 21). Tras iniciar de nuevo la sucesión (línea 7) y volver a equivocarse (fila 8) y rectificar, consiguió resolver correctamente el apartado (fila 24).

clave	actividad	apartado	texto	resultado	correccion	operacion	fecha
18	Siguiente Apartado	Cometa	b				14/3/18 9:29
19	Explicacion	Cometa	b				14/3/18 9:31
20	Explicacion	Cometa	b	Contando cada minutos quantos hace			14/3/18 9:32
21	Comprobar	Cometa	b		20 Mal		14/3/18 9:32
22	Explicacion	Cometa	b	Contando cada minutos quantos hace			14/3/18 9:36
23	Explicacion	Cometa	b	Contando cada minutos contando quandos pone			14/3/18 9:36
24	Comprobar	Cometa	b		19 Bien		14/3/18 9:36

Figura 16. Respuestas del estudiante 6A-T9 al apartado b del problema Cometa

5.2.2. Ejemplo 2

En el problema Jardín (Figura 2), el estudiante 5A-T1 utilizó una estrategia visual de recuento para la resolución del apartado c (Figura 17). El estudiante dibujó las macetas del término 3 del patrón y, luego, fue añadiendo una de cada color hasta llegar al día 28 (Figura 18). Aunque la cantidad de macetas del dibujo es correcta, se equivocó en varias ocasiones al contarlas y obtuvo repuestas erróneas (filas 17 a 25). Tras cada respuesta errónea, volvió a contar las macetas del dibujo. Finalmente, identificó que sobraba una maceta verde del dibujo, aunque en realidad contaba dos veces otra maceta, y consiguió resolver correctamente el apartado (filas 26 y 27).

clave	actividad	apartado	texto	resultado	correccion	operacion	fecha
15	Siguiente Apartado	Jardin	c				8/5/18 9:29
16	Dibuja	Jardin	c				8/5/18 9:29
17	Comprobar	Jardin	c		58 Mal		8/5/18 9:33
18	Calcular	Jardin	c			31+32 = 63	8/5/18 9:35
19	Comprobar	Jardin	c		63 Mal		8/5/18 9:35
20	Calcular	Jardin	c			30+28 = 58	8/5/18 9:35
21	Comprobar	Jardin	c		58 Mal		8/5/18 9:36
22	Calcular	Jardin	c			30+29 = 59	8/5/18 9:36
23	Comprobar	Jardin	c		59 Mal		8/5/18 9:36
24	Calcular	Jardin	c			30+28 = 58	8/5/18 9:37
25	Comprobar	Jardin	c		58 Mal		8/5/18 9:37
26	Calcular	Jardin	c			29+28 = 57	8/5/18 9:39
27	Comprobar	Jardin	c		57 Bien		8/5/18 9:39
28	Explicacion	Jardin	c	Me ajudat amb els dibuixos			8/5/18 9:46

Figura 17. Respuestas del estudiante 5A-T1 al apartado c del problema Jardín

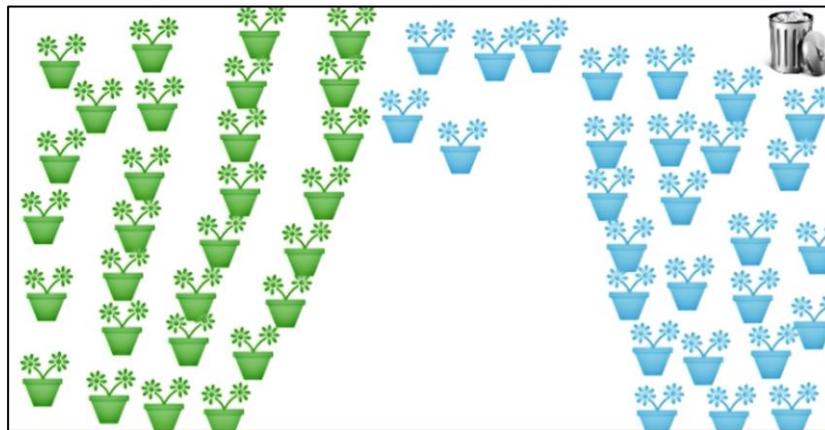


Figura 18. Dibujo realizado por el estudiante 5A-T1 en el apartado c (29 macetas verdes y 28 azules)

5.3. Ensayo y error

Este estilo de actuación corresponde a estudiantes que probaron diversos números escogidos al azar. Debido a que los apartados de los problemas piden explicar o justificar las respuestas, estos estudiantes, una vez obtenida la respuesta correcta, buscaron una explicación o justificación que se ajustara a esa respuesta. Esta forma de actuación llevó a los estudiantes a analizar el patrón a posteriori mediante una estrategia numérica (Rivera, y Becker, 2005) que les permitió reconocer las operaciones necesarias para obtener la respuesta correcta.

5.3.1. Ejemplo 1

En el problema Jardín (Figura 2), el estudiante 6A-T6 obtuvo la respuesta correcta del apartado b (Figura 19) mediante ensayo y error. Inicialmente, realizó el dibujo del día 13 (Figura 20) haciendo uso de la estrategia visual de recuento. Sin embargo, el dibujo no era correcto y obtuvo una repuesta errónea (fila 16), que modificó tratando de encontrar la respuesta correcta (fila 17). Tras dos intentos fallidos, reorganizó su dibujo, volvió a realizar el recuento y obtuvo otra respuesta errónea (fila 19), que modificó hasta obtener la correcta (filas 20 y 23). Tras conocer la respuesta, modificó el dibujo (Figura 21) para

que este mostrara la misma cantidad que su respuesta, pero añadió una maceta en el color azul, cuando, en realidad, debía añadirla de color verde para seguir correctamente el patrón.

	A	B	C	D	E	F	G	H
14	Siguiente Apartado	Jardin	b					5/3/18 10:05
15	Dibuja	Jardin	b					5/3/18 10:05
16	Comprobar	Jardin	b		26	Mal		5/3/18 10:08
17	Comprobar	Jardin	b		28	Mal		5/3/18 10:08
18	Explicacion	Jardin	b					5/3/18 10:09
19	Comprobar	Jardin	b		25	Mal		5/3/18 10:12
20	Comprobar	Jardin	b		26	Mal		5/3/18 10:12
21	Explicacion	Jardin	b	Lo e dibujado i lo e pensado				5/3/18 10:13
22	Explicacion	Jardin	b	Lo e dibujado i lo e pensado				5/3/18 10:13
23	Comprobar	Jardin	b		27	Bien		5/3/18 10:13

Figura 19. Respuestas del estudiante 6A-T6 al apartado b del problema Jardín

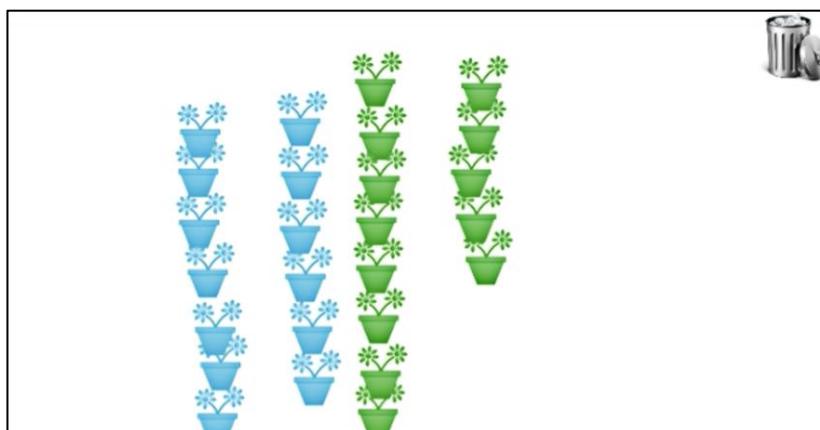


Figura 20. Dibujo realizado por el estudiante 6A-T6 en el apartado b (13 macetas de cada color)

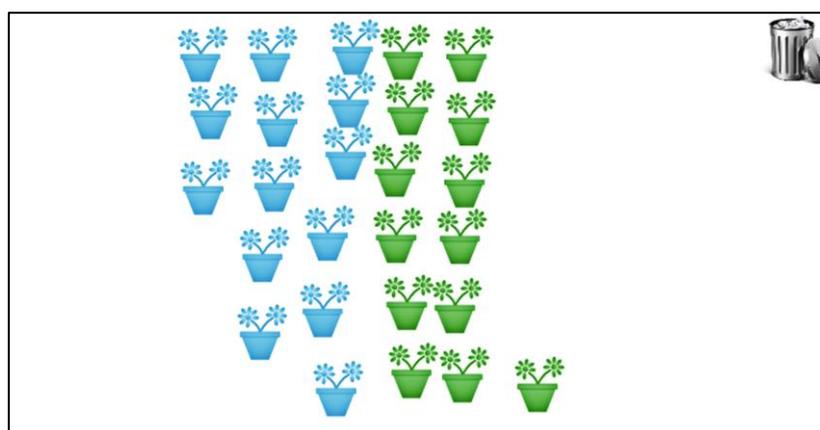


Figura 21. Dibujo realizado por el estudiante 6A-T6 (14 macetas azules y 13 verdes)

5.3.2. Ejemplo 2

En el problema Jardín (Figura 2), el estudiante 5A-T5 empezó la resolución del apartado b (Figura 22) haciendo uso de una estrategia visual de recuento (fila 17). Sin embargo, antes de acabar el dibujo, decidió borrarlo y, en su lugar, escribir la explicación “Añadiendo 2 plantas cada día” (fila 18). Parece que esta respuesta tampoco le convenció y decidió borrarla. Finalmente, decidió empezar a probar números hasta encontrar la solución (filas 24 a 32). Una vez conocida la solución correcta, realizó diversas pruebas con la calculadora (filas 35 a 41) para dar con las operaciones aritméticas que permitían obtener el valor del término pedido (término 13) y, de este modo, justificar su solución (fila 42).

clave	actividad	apartado	texto	resultado	correccion	operacion	fecha
15	Siguiente Apartado	Jardin	b				8/5/18 9:16
16	Explicacion	Jardin	b				8/5/18 9:16
17	Dibuja	Jardin	b				8/5/18 9:18
18	Explicacion	Jardin	b	Afegint 2 plantes cada dia			8/5/18 9:20
19	Explicacion	Jardin	b				8/5/18 9:20
20	Siguiente Apartado	Jardin	c				8/5/18 9:20
21	Apartado Anterior	Jardin	b				8/5/18 9:21
22	Apartado Anterior	Jardin	a				8/5/18 9:21
23	Siguiente Apartado	Jardin	b				8/5/18 9:21
24	Comprobar	Jardin	b		13	Mal	8/5/18 9:23
25	Comprobar	Jardin	b		14	Mal	8/5/18 9:23
26	Comprobar	Jardin	b		15	Mal	8/5/18 9:23
27	Comprobar	Jardin	b		16	Mal	8/5/18 9:24
28	Explicacion	Jardin	b				8/5/18 9:24
29	Comprobar	Jardin	b		17	Mal	8/5/18 9:24
30	Comprobar	Jardin	b		28	Mal	8/5/18 9:25
31	Explicacion	Jardin	b				8/5/18 9:26
32	Comprobar	Jardin	b		27	Bien	8/5/18 9:26
33	Dibuja	Jardin	b				8/5/18 9:27
34	Explicacion	Jardin	b				8/5/18 9:28
35	Calcular	Jardin	b			13*1 = 13	8/5/18 9:28
36	Calcular	Jardin	b			13*2 = 26	8/5/18 9:28
37	Comprobar	Jardin	b		26	Mal	8/5/18 9:28
38	Explicacion	Jardin	b				8/5/18 9:29
39	Calcular	Jardin	b			13*3 = 39	8/5/18 9:29
40	Calcular	Jardin	b			13*2 = 26	8/5/18 9:29
41	Calcular	Jardin	b			26+1 = 27	8/5/18 9:29
42	Explicacion	Jardin	b	He multiplicar 13 per2 idespres lo he sumat 1 i me dona 27			8/5/18 9:31
43	Comprobar	Jardin	b		27	Bien	8/5/18 9:31

Figura 22. Respuestas del estudiante 5A-T5 al apartado b del problema Jardín

5.3.3. Ejemplo 3

En el problema Cometa, el estudiante 4A-T4 fue probando distintos valores numéricos y operaciones matemáticas, sin prestar atención al patrón, para intentar resolver el apartado a (Figura 23). Tras diversos intentos (filas 7 a 16), obtuvo el resultado correcto por casualidad (fila 17) y, posteriormente, como muestra su conversación con otra estudiante, dedujo que la operación que debía realizarse era sumar 4 a la posición, a pesar de lo cual, decidió escribir una explicación diferente (fila 18):

4A-T4: Lo he adivinado.
 Compañera: Serán 3, ¿no?
 4A-T4: Cuatro más.

clave	actividad	apartado	texto	resultado	correccion	operacion	fecha
6	Siguiente Apartado	Cometa	a				15/5/18 12:12
7	Calcular	Cometa	a			6*3 = 18	15/5/18 12:14
8	Comprobar	Cometa	a		18	Mal	15/5/18 12:14
9	Comprobar	Cometa	a		18	Mal	15/5/18 12:14
10	Calcular	Cometa	a			72 = 72	15/5/18 12:15
11	Comprobar	Cometa	a		72	Mal	15/5/18 12:16
12	Calcular	Cometa	a			7*3 = 21	15/5/18 12:16
13	Comprobar	Cometa	a		21	Mal	15/5/18 12:16
14	Explicacion	Cometa	a				15/5/18 12:16
15	Comprobar	Cometa	a		40	Mal	15/5/18 12:16
16	Comprobar	Cometa	a		14	Mal	15/5/18 12:16
17	Comprobar	Cometa	a		10	Bien	15/5/18 12:16
18	Explicacion	Cometa	a	He multiplicar 5 *2			15/5/18 12:21

Figura 23. Respuestas del estudiante 4A-T4 al apartado a del problema Cometa

6. Conclusión

En este artículo hemos presentado la aplicación GeoPattern para la resolución de problemas de patrones geométricos y hemos mostrado las posibilidades que ofrece a los estudiantes para facilitar la autocorrección de respuestas erróneas y la reflexión sobre las estrategias que los han llevado a esas

respuestas. Para ello, hemos analizado las respuestas de 27 estudiantes de 4º, 5º y 6º de Educación Primaria a 3 problemas de patrones geométricos.

Este análisis nos ha permitido explorar qué papel juega la autocorrección en las acciones de los estudiantes. Por una parte, hemos identificado 3 tipos de estudiantes: i) los estudiantes que consiguen obtener una respuesta correcta en su primer intento, lo cual les corrobora que su estrategia es correcta; ii) los estudiantes que, aplicando inicialmente una estrategia errónea, después consiguen aplicar una estrategia válida y obtener el resultado correcto gracias a la aplicación; y iii) los estudiantes que, tras varios intentos, no consiguen resolver correctamente el apartado. Como se puede observar en los datos proporcionados (Tabla 1), en todos los cursos el porcentaje de estudiantes que, finalmente, consiguieron responder correctamente fue superior al porcentaje de estudiantes que no lo consiguió. Sin esta herramienta el porcentaje de fallo hubiese sido mayor que el de acierto, ya que los estudiantes no habrían sido capaces de detectar su error.

Por otra parte, hemos identificado 3 estilos de autocorrección tras una respuesta errónea: i) realizar un cambio de estrategia; ii) revisar y mejorar o corregir la estrategia empleada para la primera respuesta; y iii) obtener la solución mediante ensayo y error para, posteriormente, buscar una justificación de la solución, que no siempre es una justificación correcta. Se trata de una aproximación inicial a esta cuestión, que merece la pena analizar con más detalle y desarrollar en futuras fases de la investigación. Asimismo, es necesario investigar en el futuro las reacciones de los estudiantes cuando responden las cuestiones inversas.

El uso de GeoPattern en los experimentos descritos ha mostrado que esta aplicación es de utilidad para profesores e investigadores, ya que proporciona información sobre la actividad de los estudiantes y por su capacidad para presentar los datos que recoge de una forma ordenada. El hecho de permitir capturar minuciosamente las acciones realizadas por el estudiante y exportarlas para su procesado con un software externo adecuado, como una hoja de cálculo o un programa gráfico, convierte a esta aplicación no sólo en una herramienta docente, sino también en un instrumento facilitador de la investigación. Hay algunos aspectos de la aplicación que esperamos poder mejorar en la próxima versión, siendo el principal de ellos facilitar la carga de nuevos problemas para que los resuelvan los estudiantes.

Agradecimientos

Agradecemos su colaboración y disposición a los maestros y estudiantes que, con su participación en las experimentaciones, han hecho posible esta investigación. Los resultados presentados en este artículo son parte de las actividades de los proyectos de investigación I+D+i EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) y GVPROMETEO2016-143 (Generalitat Valenciana) y de la ayuda predoctoral FPU16/04513 (Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades).

Referencias

- Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.
- Cai, J., y Knuth, E. (Eds.) (2011). *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives*. Berlín: Springer.
- Cai, J., Ng, S. F. y Moyer, J. C. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: lessons from China and Singapore. En J. Cai, y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (pp. 25-41). Berlín: Springer.
- Callejo, M. L., García-Reche, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 5-25.

- Cooper, T., y Warren, E. (2011). Year 2 to year 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai, y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187-214). Berlín: Springer.
- De Corte, E., Verschaffel, L. y Op't Eynde, P. (2000). Self-regulation. A characteristic and a goal of mathematics education. En M. Boekaerts, P. R. Pintrich y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 687-726). Cambridge, MA, EE.UU.: Academic Press.
- García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.
- González-Calero, J. A., Arnau, D., Puig, L. y Arevalillo-Herráez, M. (2015). Intensive scaffolding in an intelligent tutoring system for the learning of algebraic word problem solving. *British Journal of Educational Technology*, 46(6), 1189–1200.
- Gutiérrez, A., Benedicto, C., Jaime, A. y Arbona, E. (2018). The cognitive demand of a gifted student's answers to geometric pattern problems. Analysis of key moments in a pre-algebra teaching sequence. En F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness. Enhancing creative capacities in mathematically promising students* (pp. 169-198). Cham, Suiza: Springer.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- Kieran, C. (Ed.) (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year olds*. Cham, Suiza: Springer.
- Müller, W., Bescherer, C., Kortenkamp, U. y Spannagel, C. (2006). *Intelligent computer-aided assessment in math classrooms: state-of-the-art and perspectives*. Texto presentado a la IFIP Joint Conference Imagining the Future for ICT and Education, Ålesund, Noruega.
- National Library of Virtual Manipulatives (NLVM) (2018). Página web <http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>. Logan, UT, EE.UU.: Utah State University.
- Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237–268.
- PhET Interactive Simulations (2018). Página web <https://phet.colorado.edu/es/>. Boulder, CO, EE.UU.: University of Colorado.
- Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th PME-NA Conference* (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, México: PME-NA.
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th PME Conference* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.
- Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Nueva York: Springer.
- Rivera, F. D., y Becker, J. R. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 11(4), 198-203.
- Sancho, T., y Escudero, N. (2012). A proposal for formative assessment with automatic feedback on an online mathematics subject. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 9(2), 240-260.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Nueva York: Academic Press.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.
- Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). Reston, VA, EE.UU.: NCTM.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. L. Chick, y J. L. Vincent (Eds.), *Proceeding of the 29th PME Conference* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne, Australia: PME.
- Warren, E., Trigueros, M. y Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73-108). Rotterdam, Holanda: Sense.
- Weber, K., y Leikin, R. (2016). Recent advances in research on problem solving and problem posing. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 353-382). Rotterdam, Holanda: Sense.
- WeWantToKnow AS (2018). *DragonBox*. Oslo, Noruega: WeWantToKnow AS. <https://dragonbox.com>.

Eva Arbona Picot. Ha cursado el Grado en Maestra de Educación Primaria y el Máster en Investigación en Didácticas Específicas (especialidad de Didáctica de las Matemáticas) de la Universitat de València, cuyo TFM está centrado en la iniciación al álgebra y los estudiantes con altas capacidades matemáticas. Actualmente, es estudiante de doctorado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de Valencia, donde desarrolla su actividad como Personal Investigador en Formación bajo el Programa de Formación de Profesorado Universitario del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades.

Email: eva.arbona@uv.es

Daniel García Costa. Ingeniero multimedia, actualmente cursando el Master de Tecnologías Web, Computación en la Nube y Aplicaciones Móviles en la Universitat de València. Desarrolla su actividad investigadora en el Departamento de Informática de la Universitat de València en el área de computación e inteligencia artificial.

Email: daniel.garcia@uv.es

María José Beltrán Meneu. Profesora Ayudante Doctor de la Universitat Jaume I. Doctora en matemáticas, desarrolla su actividad docente e investigadora en el Departamento de Educación y Didácticas específicas. Sus líneas de investigación se centran en la didáctica de la educación superior, en la atención a estudiantes con alta capacidad matemática y en el análisis funcional. Ha publicado diversos artículos en revistas de alto impacto y ha sido conferenciante en diversos congresos nacionales e internacionales.

Email: mmeneu@uji.es

Ángel Gutiérrez Rodríguez. Catedrático de la Universitat de València. Doctor en matemáticas, desarrolla su actividad docente e investigadora en el Departamento de Didáctica de la Matemática, con sede en la Facultad de Magisterio. Sus líneas de investigación actuales se centran en la didáctica de la geometría, el uso de entornos de geometría dinámica y en la atención a estudiantes con alta capacidad matemática. Ha publicado diversos artículos en revistas nacionales e internacionales, algunos de ellos con importante repercusión internacional.

Email: angel.gutierrez@uv.es

Web personal: www.uv.es/angel.gutierrez