



Una ingeniería didáctica para la enumeración en educación infantil

Pilar Sánchez Padilla
sanchezpadillapilar@gmail.es

Fecha de recepción: 2/11/2018

Fecha de publicación: 15/04/2019

RESUMEN

En este trabajo se ha desarrollado una pequeña *ingeniería didáctica* para el aprendizaje de la enumeración, un "olvidado" conocimiento matemático, por su falta de inclusión en el currículum de Educación Infantil. Concretamente se han diseñado siete situaciones a-didácticas para trabajar este conocimiento con el alumnado del CEIP Pablo Picasso de La Bobadilla, de tres y cuatro años. La elección de las variables didácticas en cada una de las situaciones intenta la evolución y adaptación de las estrategias llevadas a cabo por los sujetos, vinculadas a sus conocimientos previos. Tras la implementación en el aula, se analizan los resultados, comparando los mismos con los previstos en el diseño a priori. El marco teórico da sentido a todo el diseño, pues recoge el aprendizaje por adaptación al medio y la Teoría de Situaciones Didácticas.

Palabras clave: ingeniería didáctica, situación a-didáctica, enumeración, Educación Infantil, Teoría de Situaciones Didácticas.

A didactical engineering for the teaching of enumeration in early-childhood education

ABSTRACT

In this work, we have developed a small *didactic engineering* for the learning of enumeration, a "forgotten" mathematical knowledge (for its lack of inclusion in the curriculum of early-childhood education). Specifically, we have designed seven a-didactical situations for the learning of this knowledge with the students of CEIP Julian Picasso de La Bobadilla, 3 and 4 years old. The choice of didactical variables in each of the situations attempts the evolution and adaptation of the strategies carried out by the subjects, linked to the impervious knowledge. After the implementation in the classroom, we analyze the results comparing them with those foreseen in the a priori design. The theoretical framework gives meaning to the whole design, since it includes learning by adaptation to the environment and the Theory of Didactic Situations.

Keywords: didactical engineering, a-didactical situation, enumeration, early-childhood education, Theory of Didactical Situations.

1. Introducción

Antes de abordar el número natural en su concepción cardinal y ordinal, es importante la construcción de un conocimiento matemático que, aunque no se recoge todavía en el currículum de Educación Infantil, constituye el primer paso en las técnicas de conteo. Sin él, por tanto, difícilmente podremos construir una colección equipotente a la colección de referencia.

La génesis artificial, de la que se va a hablar a lo largo de este trabajo, nos invita a eliminar aquellos pasos no necesarios en la construcción de un conocimiento, pero nos "prohíbe" ir directamente al conocimiento en su "versión final", pues ello supondría un aprendizaje no funcional y no significativo para el alumnado. Es por ello por lo que, al requerir el conteo de la enumeración, debemos incluir esta en nuestra lista de contenidos a trabajar en Educación Infantil.

No debemos olvidar que hay conocimientos matemáticos, que aun pareciendo innatos, no lo son. No se nace con la correspondencia término a término que permite establecer aplicaciones biyectivas y tampoco nacemos con el saber recorrer todos y cada uno de los elementos de una colección, pasando una sola vez por todos ellos. Es necesario construir tales conocimientos en aras de sentar una correcta base para los saberes lógico-matemáticos futuros.

Lo haremos desde el constructivismo, desde el correcto diseño de situaciones cuya respuesta óptima constituya el conocimiento pretendido. La ingeniería didáctica nos proporcionará las fases a seguir para alcanzar los mejores resultados. Tan necesario resulta, el análisis previo de conocimientos, como un correcto diseño de las situaciones, gestionando de forma adecuada las variables didácticas, como un análisis comparativo de los resultados obtenidos con los prefijados.

2. Metodología: una aproximación a la ingeniería didáctica

El concepto de ingeniería didáctica se remonta a los años 80, en el seno de la Didáctica de las Matemáticas francesa, para otorgar una dimensión científica al trabajo didáctico. La evolución de esta metodología está vinculada a la propia Teoría de Situaciones Didácticas, lo que le proporciona criterios explícitos, en todas sus fases, en la de diseño, experimentación y análisis a posteriori (Godino, Batanero, Contreras, Lacasta y Wilhelmi, 2013).

Es necesario un análisis a priori de la situación para asegurarnos de que la misma se ha diseñado de forma adecuada y, por tanto, va a permitir la correcta construcción de un conocimiento por parte del alumnado. El objetivo de la ingeniería didáctica es, precisamente, procurar el diseño adecuado de situaciones didácticas y su adecuada estructuración temporal.

Todo saber es fruto de aportaciones significativas dentro de un proceso histórico, en algunos casos siglos de construcción, no nace de repente o de la nada. Chamorro (2005) habla de la génesis artificial de un saber, y es que a la hora de abordar la enseñanza de un conocimiento no podemos remontarnos a sus orígenes, ello sería antieconómico e inentendible, lo que buscamos es un proceso rápido y seguro a fin de que el alumnado construya con sentido y de manera significativa ese conocimiento, omitiendo los pasos no necesarios en esa construcción de acuerdo con pautas didácticas. No significa que obviemos todas las fases de construcción histórica de un conocimiento y pasemos directamente al abordaje de este tal cual es actualmente, por ejemplo, no iremos directamente a la numeración decimal, pero tampoco pasaremos por todos y cada uno de los sistemas de numeración de la historia.

Dentro de la ingeniería didáctica podemos hablar de macro-ingenierías y micro-ingenierías. El primer término hace referencia a investigaciones prolongadas en el tiempo, de hasta varios años. El segundo concepto se refiere a investigaciones locales y acotadas en el tiempo. Las fases de esta metodología son, según Artigue (1990):

1. *Análisis previos*. Comprende el estudio epistemológico del saber en cuestión, los efectos de la enseñanza actual del mismo, los conocimientos previos o alternativos del alumnado, así como sus

dificultades y obstáculos; los objetivos de la investigación, así como las limitaciones y condiciones del sistema educativo, en general.

2. *Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería.* Se trata de la gestión de variables, eligiendo las más adecuadas al problema objeto de investigación. En esta fase hay una parte predictiva, orientada a anticipar el comportamiento del alumnado en la situación en que actúa.
3. *Experimentación en el aula de las situaciones didácticas.* Una vez diseñadas las situaciones, las ponemos en práctica, es decir, llevamos a cabo las situaciones diseñadas con el alumnado para el que se han diseñado. La función del profesorado en esta fase es la observación, que permita recoger todos los datos necesarios en aras de un análisis posterior. El alumnado, cuando actúa en la situación, realiza acciones observables, que son las que documenta el profesorado, para luego ser interpretadas en términos de conocimientos. Se deben tener en cuenta determinados efectos que pueden contaminar la observación, tales son: efecto halo, efecto generosidad, efecto regresión hacia la media, efecto coherencia lógica, efecto de la primera impresión, efecto contacto, efecto de espera del observador y confusión entre las características generales y las momentáneas. Para una correcta observación es preciso contar con una persona encargada de recoger los aspectos generales relacionados con los tiempos de las fases, la actuación del profesorado y las demás cuestiones que tengan que ver con la dinámica del aula y un grupo de observadores y observadoras del comportamiento del alumnado. Enriquece la observación el debate tras la intervención, la recogida de todo el material producido por el alumnado, grabación de audio y vídeo y la fiel transcripción de todo el material digital.
4. *Análisis a posteriori y evaluación.* Con todo el material que hemos conseguido en la fase anterior, vamos a confrontar resultados obtenidos con los planificados, validando o no las hipótesis fijadas en el análisis previo.

A continuación, vamos a describir las fases de la ingeniería didáctica para una situación a-didáctica de enumeración. Empezaremos con un análisis preliminar que nos ponga en situación, continuando con el diseño de la situación a-didáctica de enumeración para el alumnado de tres y cuatro años, en base a los resultados obtenidos en la fase anterior, una vez diseñada la llevamos al aula en varias sesiones, finalizamos analizando y evaluando los resultados.

3. Diseño, experimentación y evaluación de una propuesta de enumeración para Educación Infantil

3.1. Análisis preliminar

3.1.1. Dimensión epistemológica

Podemos definir la enumeración como el proceso por medio del cual dada una colección formada por un número finito de elementos pasamos por todos y cada uno de los mismos una y solo una vez, o dicho de otro modo y en un plano matemático, supone establecer un orden total en dicha colección. Esto ocasiona que, a la hora de llevar a cabo una actividad de enumeración, el alumnado deba seguir los pasos que se detallan a continuación:

1. Distinguir claramente todos los objetos de la colección.
2. Elegir un primer objeto de la colección.
3. Determinar el sucesor en el conjunto de elementos no elegidos con anterioridad.
4. Mantener en la memoria las elecciones anteriores.
5. Volver al paso 3.

6. Parar cuando haya pasado por todos los elementos de la colección, es decir, saber cuándo ha elegido el último elemento de la colección.

Si observamos al alumnado de Educación Infantil en sus intentos de conteo sobre una colección, confirmamos, en muchas ocasiones, su imposibilidad de llevar a cabo la enumeración correctamente, pues a pesar de saber recitar la serie numérica, es decir, a pesar de conocer las palabras-número de la cantinela en orden estable, no eligen bien el siguiente elemento o no conservan en su memoria los elementos por los que ya se ha pasado. Podemos afirmar que, dada dicha situación, el alumnado no sabe enumerar los elementos de una colección.

La enumeración apenas es reconocida culturalmente y, en algunos casos, es confundida con el conteo o la cardinación de colecciones. Ni siquiera aparece recogida en el currículum de Educación Infantil. Para esta situación a-didáctica, definimos el siguiente conjunto de variables didácticas.

1. V_1 . Número de elementos que constituyen la colección (en nuestro caso dadas las edades con las que se va a trabajar este saber matemático, utilizaremos entre 6 y 12 elementos).
2. V_2 . Disposición espacial de los elementos: alineados en una única fila, en tabla de $n \times m$, en círculo o de forma aleatoria.
3. V_3 . Posibilidad de movilidad y o desplazamiento de los elementos o no, es decir, si permanecen fijos a un soporte o se da la opción de mover los elementos.
4. V_4 . Opciones de marcaje o no de los elementos de la colección.
5. V_5 . Naturaleza del espacio en que se sucede la actividad: macro-espacio, meso-espacio, micro-espacio.
6. V_6 . Posibilidad o no de control visual.

Las estrategias que se espera que el alumnado ponga en funcionamiento se detallan en la siguiente lista.

1. E_0 : Enumeración instantánea, basada en un control visual fugaz. Solo se puede llevar a cabo en colecciones de seis elementos como máximo.
2. E_1 : Marcaje de los elementos a medida que se van enumerando.
3. E_2 : Mover los objetos a fin de determinar a través del sentido del oído si por él ha pasado o no.
4. E_3 : Utilización del espacio, separando los elementos por los que ya se ha pasado de los que quedan por enumerar. Cada vez que el alumnado pasa por un elemento lo separa del resto.
5. E_4 : Organizar el espacio según una estructura de orden total. Consiste en estructurar los objetos en determinado orden. Por ejemplo, poner en línea todos los elementos, este tipo de estructuración hace posible que el alumnado pueda llevar a cabo la enumeración de la colección.
6. E_5 : Estructurarlos elementos de la colección mentalmente a través de ciertas marcas o hitos interiores o exteriores a la colección, a fin de conseguir un orden total en la misma. Esta estrategia depende del tipo de colección, de si se realiza en el micro-espacio, meso-espacio o macro-espacio, de las relaciones del alumnado que enumera con ese espacio y la propia capacidad del alumnado para estructurar la colección de elementos a enumerar en dicho espacio.
7. E_6 : Cuando el alumno no realiza ni movimientos ni desplazamientos espaciales de la colección, ni marcaje alguno, e introduce los elementos de forma arbitraria, sin orden aparente, al azar.

3.1.2. Dimensión cognitiva

Es preciso tomar como punto de partida los conocimientos previos del alumnado que va a ser protagonista de estas situaciones a-didácticas. Así, la "correspondencia término a término" o

“correspondencia uno a uno”, supone la asociación de cada elemento de una primera colección con un único elemento de la segunda colección, recíprocamente, cada elemento de la segunda colección está relacionado con un único elemento de la primera colección. De este modo, todo elemento de la primera colección está “emparejado” con un solo elemento de la segunda colección y viceversa, tal como se observa en la Figura 1. Esta actividad cognitiva no es espontánea y supone un aprendizaje muy significativo en la etapa de Educación Infantil. Dicho conocimiento será el primer paso para abordar la enumeración.

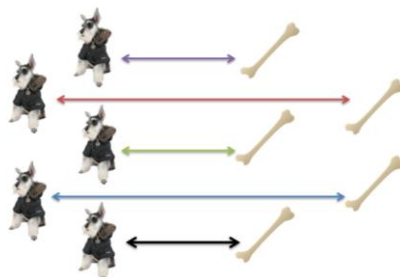


Figura 1. Aplicación biyectiva entre la colección de perros y de huesos.

El conjunto de actividades que se describen a continuación va dirigido a la detección de conocimientos previos del alumnado seleccionado, en concreto dos niños y una niña de tres años por un lado y, por otro, cinco niños y tres niñas de cuatro años.

El hilo conductor es un cuento de una niña llamada Julia que quiere una mascota, sus padres adoptan una perrita y esta perrita al tiempo tiene muchos cachorritos. Como el trabajo en casa de la protagonista se ha intensificado pide ayuda a los alumnos del CEIP Pablo Picasso. Las diferentes peticiones de Julia a los alumnos se transforman en situaciones a-didácticas de enumeración (excepto la de conocimientos previos) que ellos han de resolver, consiguiendo en cada una de ellas una medalla de “Mini veterinario”. Al finalizar todas las situaciones obtendrán el título de “Súper Veterinario”.

Las herramientas que se han diseñado para llevar a cabo esta experiencia suponen un conjunto de collares determinado por un número finito de elementos, junto a una colección de entre ocho y doce perros. A fin de comprobar sus conocimientos en torno a la correspondencia término a término planteamos la siguiente actividad.

Julia pide ayuda para poner un collar a cada uno de sus cachorros. Disponemos de ocho y doce perritos para el alumnado de tres años y cuatro años, respectivamente, dispuestos en forma aleatoria encima de una mesa (micro-espacio) (Figura 2). En la misma mesa tenemos muchos lazos (elementos verdes de la Figura 2), hemos de poner uno y solo un collar a cada cachorro. La actividad quedará resuelta de forma correcta si el alumnado es capaz de, a través de aplicaciones biyectivas, poner un collar y solo una a cada perro.

Debemos establecer la consigna adecuada, a fin de que el alumnado entienda que ha de realizar en esta situación, en concreto para este caso se establece la que sigue: “Tienes que colocar un lazo a cada uno de los perritos de Julia”.



Figura 2. Colección de perritos y huesos.

Se puede afirmar que todos los alumnos y alumnas, tanto de tres como de cuatro años, saben realizar aplicaciones biyectivas, correspondencia término a término.

Cuando los elementos de la colección están situados en fila, la mayoría de los alumnos y alumnas siguen un riguroso orden de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, colocando un lazo a todos los elementos de la colección. Al distribuirse en forma aleatoria, el orden se diluye en la mayoría de los alumnos y alumnas, aun así, todos, excepto una alumna de tres y un alumno de cuatro, colocan un lazo a todos y cada uno de los perritos de la colección de referencia. Por último, al distribuir los perritos en círculo, la mayoría del alumnado sigue un orden en la colocación de los lazos, seleccionando un primer elemento al azar, a partir del cual, en sentido a las agujas del reloj o, al contrario, colocan un collar a todos y cada uno de los perritos de la colección

3.2. Concepción y análisis a priori

3.2.1. Alumnado de tres años

Julia tiene una mascota, una preciosa perrita llamada Chispita. Chispita ha tenido doce perritos a los cuales ha de alimentar. Julia nos ha pedido ayuda, de modo que debemos dar de comer a sus cachorros, pero debemos tener en cuenta las indicaciones dadas.

Dada una colección de ocho comederos han de colocar un solo hueso en todos y cada uno de los comederos.

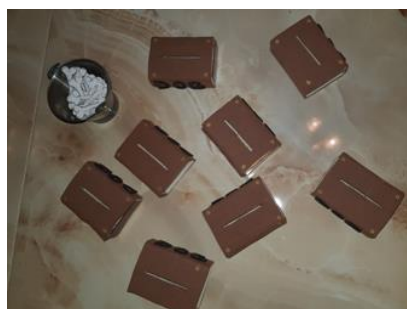


Figura 3. Colección de comederos y de huesos.

Los comederos, que son cajas de cerillas forradas simulando al objeto de verdad, disponen de una ranura en su parte superior, suficiente como para introducir un hueso e impedir que el alumnado pueda ver si en su interior hay ya otro o no. Al ser una caja de cerillas, el alumnado al finalizar su actividad podrá comprobar, por sí mismo, si hay un hueso en cada caja con solo abrir y observar.

Se inicia la situación dando la consigna, previamente fijada: *"Tienes que colocar un hueso y solo uno en todos y cada uno de los comederos de los perritos de Julia, si pones más de un hueso en un comedero, el perrito se pondrá malo y si no pones ninguno, pasará mucha hambre, si todos los perritos tienen su hueso habrás ganado y conseguirás tu medalla de súper veterinario."*

Para el alumnado de tres años se van a considerar el conjunto de variables didácticas que a continuación se detallan:

1. V_1 . Número de elementos que constituyen la colección: 8 comederos.
2. V_2 . Disposición espacial de los elementos: para la fase uno, se dispondrán en dos filas de cuatro elementos cada una, en círculo y de forma aleatoria, tal como se puede observar en las Figuras 4a, 4b y 4c. Para la fase dos, a Tito y Pedro se les presentara en forma aleatoria (Figura 4d), y a Ana en fila, en tabla 2×4 y en forma aleatoria. No se consideró conveniente plantear una situación igual que la de Tito y Pedro porque en la primera fase no resolvió con éxito, en ninguno de los intentos.
3. V_3 . Posibilidad de movilidad y o desplazamiento de los elementos: para la fase uno sí, en cambio para la fase dos no, al estar pegados a un círculo de poliespán para que no puedan moverlos ni desplazarlos, para Pedro y Tito (Figura 4d). Para Ana sí se permite el desplazamiento y movimiento en esta fase.
4. V_4 . Opciones de marcaje o no de los elementos de la colección: no. El caso del marcaje de la colección no se tuvo en cuenta en ninguna fase pues hay que inducirlos a ello, hasta el punto incluso de tener que decirle que utilicen las pegatinas dadas para saber los elementos que enumeran.
5. V_5 . Naturaleza del espacio en que se sucede la actividad: micro-espacio.
6. V_6 . Posibilidad o no de control visual: no.



(a)



(b)

(c)

(d)

Figura 4. Colección de comederos y de huesos, distribuciones.

Las estrategias esperadas en función de los valores que toman las variables didácticas para la fase 1 son:

1. E_2 : mover los objetos a fin de determinar a través del sentido del oído si por él ha pasado o no.
2. E_3 : utilización del espacio, separando los elementos por los que ya se ha pasado de los que quedan por enumerar. Cada vez que el alumnado pasa por un elemento lo separa del resto.
3. E_4 : organizar el espacio según una estructura de orden total.
4. E_5 : estructurarlos objetos de la colección mentalmente a través de ciertas marcas o hitos interiores o exteriores a la colección, a fin de conseguir un orden total en la misma.

En cambio, para la fase dos, las estrategias que se esperan son las siguientes:

1. E_0 : enumeración instantánea, basada en un control visual fugaz.
2. E_5 : estructurarlos objetos de la colección mentalmente a través de ciertas marcas o hitos interiores o exteriores a la colección, a fin de conseguir un orden total en la misma.
3. E_6 : no seguir un orden para recorrer la colección. Introducir el objeto de forma arbitraria, al azar.

3.2.2. Alumnado de cuatro años

Los perritos de Julia están enfermos, debemos ayudarla para que sus cachorros se curen, para ello debemos poner una inyección a cada uno de ellos.

Dada una colección de doce botiquines se ha de colocar una jeringa y solo una en todos y cada uno de los botiquines.



Figura 5. Colección de botiquines y jeringas.

Al ser una caja de cerillas transformada en un botiquín que se abre y se cierra como si de verdad fuese un mini armario, el alumnado al finalizar su actividad, podrá comprobar por sí mismo, si hay jeringa o no, si hay más de una en un botiquín o si está todo correcto.

En este caso la consigna o indicaciones que se van a dar al alumnado de cuatro años es *“Tienes que colocar una jeringa y solo una en todos y cada uno de los botiquines de los perritos de Julia, si pones más de una jeringa en un botiquín, al perrito le tendrán que pinchar tantas veces como jeringas pongas y si no pones ninguna, el perrito no se curará. Si consigues que todos los botiquines tengan una jeringa te convertirás en súper veterinario”*.

Las variables didácticas que se gestionan, a fin de provocar el conocimiento matemático pretendido, figuran en la siguiente lista.

1. V1. Número de elementos que constituyen la colección: 12 botiquines.
2. V2. Disposición espacial de los elementos: para la fase uno, se disponen en círculo (Figura 6a) y en forma aleatoria (Figura 6b) y para la fase dos en forma aleatoria, pero sin posibilidad de desplazamiento (Figura 6c).
3. V3. Posibilidad de movilidad y o desplazamiento de los elementos: para la fase uno, sí se pueden desplazar o mover. En cambio, para la fase dos, no, al estar adheridos a un panel que simula un clínico veterinario.
4. V4. Opciones de marcaje o no de los elementos de la colección: no.
5. V5. Naturaleza del espacio en que se sucede la actividad: micro-espacio.
6. V6. Posibilidad o no de control visual: no.

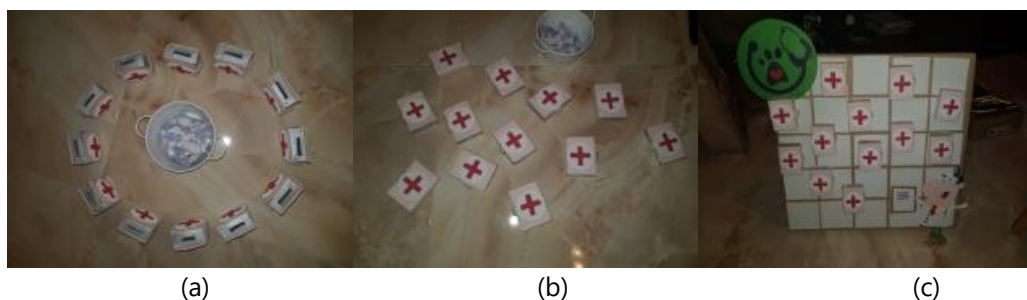


Figura 6. Colección de botiquines dispuesto en forma circular y aleatoria

Las estrategias esperadas en función de los valores que toman las variables didácticas para la fase uno, son:

1. E₂: mover los objetos a fin de determinar a través del sentido del oído si por él ha pasado o no.
2. E₃: utilización del espacio, separando los elementos por los que ya se ha pasado de los que quedan por enumerar. Cada vez que el alumnado pasa por un elemento lo separa del resto.
3. E₄: organizar el espacio según una estructura de orden total.
4. E₅: estructurarlos objetos de la colección mentalmente a través de ciertas marcas o hitos interiores o exteriores a la colección, a fin de conseguir un orden total en la misma.

Para la fase dos en cambio se espera que el alumnado ponga en marcha estrategias que supongan una superación de la fase anterior, caminando hacia la construcción del conocimiento matemático pretendido, la enumeración. Tales estrategias son:

1. E₀: enumeración instantánea, basada en un control visual fugaz.
2. E₅: estructurarlos objetos de la colección mentalmente a través de ciertas marcas o hitos interiores o exteriores a la colección, a fin de conseguir un orden total en la misma.
3. E₆: no seguir un orden para recorrer la colección. Introducir el objeto de forma arbitraria, al azar.

En cuanto a la actuación docente ante las estrategias y errores del alumnado de tres y cuatro años y una vez estos han comprobado qué es lo que han hecho, abriendo las cajas (que simulan los comederos o botiquines) haremos preguntas del tipo: ¿qué ha sucedido?, ¿tienen todos los comederos/botiquines hueso/inyección?, ¿qué ha pasado en este comedero/botiquín? (si hay más de un hueso/inyección), ¿cómo sabías que todos los comederos/botiquines tenían hueso/jeringa?, ¿puedes explicarlo a tus compañeros? (en caso de que algún niño o niña lo realice bien, provocando una situación de validación entre iguales).

Todo ello con la finalidad de que tome conciencia de sus actuaciones y así hacerle avanzar en sus futuras estrategias.

3.3. Experimentación. Análisis a posteriori

3.3.1. Alumnado de tres años

En la fase uno, donde los comederos se disponen en tabla 2x4, la actuación que se observa en los diferentes alumnos y alumnas es la que se describe a continuación. Tito y Pedro, dada esta distribución de la colección, pasan por todos y cada uno de los elementos de la misma, siguiendo un orden de izquierda a derecha, sin saltar ningún elemento, en ambas filas, empezando por la fila inferior. La particularidad es que Tito en los dos últimos elementos pierde el control de la colección introduciendo dos huesos en un mismo comedero.

Ana, introduce los huesos en los comederos de forma aleatoria, no hay orden en el recorrido de la colección, introduciendo siete huesos, varios de ellos en el mismo comedero. Una vez que cree haber terminado, indica el fin. Al no seguir un orden al pasar revista a los elementos de la colección, pierde el control y no sabe en cuáles ha introducido el hueso y en cuáles no.

En cuanto a las estrategias que emergen, hablamos de la E_5 en el caso de Pedro y Tito (con errores en este último) y en el caso de Ana no podemos hablar de estrategia alguna, más que de la introducción arbitraria de huesos en comederos, sin orden ni pauta alguna.

Al devolver el medio la información, el alumnado abre las cajas sin necesidad de tener que indicárselo, poniendo de manifiesto los resultados de sus acciones.

Para el caso de Ana, la colección se distribuye en tabla 2x3 comederos (se decide aquí un cambio de variable, la reducción del tamaño de la colección). En este caso, donde disponemos de los elementos en forma de tabla con tres comederos en la fila superior y otros tres en la fila inferior, la alumna tampoco sigue un orden aparente, va dando saltos de la fila inferior a la superior, lo que sucede es que al estar formada la colección por un número menor de elementos, el control es mayor, es decir, sabe dónde ha introducido un hueso y dónde no, al menos así lo parece pues finalmente pone un solo hueso en todos los comederos, podemos hablar de enumeración instantánea (E_0).

Decido cambiar el diseño de la situación previsto y dispongo los elementos en fila, pues considero que es la situación más básica dentro del conjunto de situaciones a-didácticas de enumeración.

Al igual que en el caso anterior no es capaz, aún, de pasar por todos y cada uno de los elementos de la colección una sola vez, no ayuda ni siquiera el orden total que la fila única proporciona, dejando varios elementos sin enumerar.

Una vez realizada la situación anterior se distribuyen los comederos en forma de círculo, observando lo que a continuación se detalla. Tito y Pedro empiezan por el comedero que tienen justo delante de ellos y continúan en orden, en sentido de las agujas del reloj. Pedro introduce siete huesos en siete comederos consecutivos, pierde la referencia de partida, por lo que el último comedero queda sin hueso, poniendo en funcionamiento la estrategia E_5 con errores en el último elemento.

En cambio, Tito, al llegar al cuarto elemento vuelve al anterior y lo abre, ve que tiene un hueso, entonces introduce el hueso en el cuarto; pasa al quinto, metiendo dos huesos en él, lo mismo hace con el sexto; a partir de aquí intenta mirar el interior para asegurarse, pero ante la indicación de que no puede abrir los comederos, comienza a moverlos a fin de determinar por el sonido si tienen hueso o no, surgiendo la estrategia E_2 . Los comederos que quedan los hace así, mueve, si suena no mete hueso, si no suena sí, lo que le permite introducir un hueso y solo uno en todos y cada uno de los comederos.

Para finalizar esta primera fase, se van a distribuir los elementos de la colección en forma aleatoria. Tito, en los cuatro primeros comederos pone en funcionamiento la estrategia E_2 , mueve, escucha, enumera o no. A partir del cuarto se empieza a hacer un lío. Pues mueve todos los comederos, los vuelve a mover, hasta que de repente separa todos los que suenan de los que no; entonces coge un comedero mete un hueso y lo separa, así con los tres restantes, antes de proceder a la comprobación los mueve todos, surgiendo una nueva estrategia, la E_3 .

Pedro realiza un primer barrido de izquierda a derecha, pero pronto pierde el control de los elementos en los que ha introducido hueso, por lo que empieza a moverlos y a escuchar si suenan o no, surgiendo la estrategia E_2 , determinando así los que faltan por enumerar. Finalmente queda un comedero sin hueso. Resulta curiosa la explicación de este alumno, sobre cómo ha introducido los

huesos; nos dice que ha pasado con su dedo por todas las cajitas sin repetir, en este repaso, ninguna, manifestando que una de ellas no tiene porque se le ha olvidado.

En la fase dos, como se ha descrito en el diseño de situaciones, se bloquea la posibilidad de mover o desplazar los comederos.

Tito, tal como se desprende de la observación sobre la realización de la actividad, parece haber desarrollado la estrategia óptima al menos para una colección de ocho elementos, dispuestos aleatoriamente, sin posibilidad de movimiento alguno, pues introduce metódicamente un hueso en cada comedero estableciendo hitos o señales internas, que le han permitido pasar una sola vez, por todos y cada uno de los elementos de la colección de referencia. La estrategia que pone en marcha es la marcada como E₅. Como dato significativo, al comprobar la situación y observar que lo ha hecho bien, manifiesta que la clave es poner atención.

Pedro por su parte, realiza esta situación dos veces, en ambas comete el mismo error, no establecer hitos o señales internas que le permitan ir fijando los elementos por los que ha pasado. El resultado ha sido el que sigue: en el primer intento deja un comedero sin hueso y en el segundo, son dos los que quedan sin enumerar.

Hubiese sido interesante repetirlo una tercera vez, reduciendo el tamaño de la colección, pues el alumno sigue un orden interno en un principio, pero al ser una colección demasiado grande, para su estadio de desarrollo, pierde el control y las referencias que va estableciendo.

Para Ana la distribución varía, se empieza con una fila de seis elementos, la cual enumera sin dificultad y sin necesidad de movimiento en los cuatro primeros comederos, para el quinto y el sexto, lo que hace es coger el comedero, moverlo, soltarlo en su lugar e introducir el hueso. Esta alumna comete un error derivado de un obstáculo ontogenético, relativo a la propia maduración cognitiva, ya que no es capaz de seguir el orden dado por la fila, recordando el elemento por el que pasa y necesitando por tanto poner en marcha estrategias más básicas como es el movimiento de los elementos (E₂).

Cuando la colección se presenta en tabla 2x3 y posteriormente 2x4, la alumna introduce un hueso en todos y cada uno de los comederos, siguiendo el orden dado por la disposición espacial de la colección, de derecha a izquierda en las dos filas, pero necesita asegurarse y, antes de introducir el hueso, mueve el comedero (E₂).

Dada la colección en forma aleatoria, la alumna procede de la misma forma que en las situaciones anteriores, cometiendo el mismo error. Necesita mover los elementos de la colección para asegurarse si hay o no hueso dentro. En este caso se genera un "caos", propio de actuaciones de alumnos que está construyendo este conocimiento y son enfrentados a situaciones de este tipo, donde la colección está dispuesta de forma aleatoria en el espacio. La niña mueve varias veces los comederos, los cambia de sitio, los vuelve a mover, así sucesivamente, hasta que pone fin a la situación. Finalmente consigue poner solo un hueso en todos y cada uno de los comederos, pero tal cual ha transcurrido la actividad hubiese sido probable el fracaso de esta estrategia.

3.3.2. Alumnado de cuatro años

En la fase uno para el alumnado de cuatro años se empieza distribuyendo la colección en forma de círculo, pudiendo observar que Leandro sigue el orden que proporciona la distribución (E₅), en principio sin necesidad de movimientos ni desplazamientos; cuando pierde la referencia inicial, realiza movimientos para determinar por el sentido del oído si hay o no jeringa (E₂).

Alex no es capaz de seguir el orden que la propia distribución le proporciona en el primer momento, después de cuatro botiquines ya sí, y además no conserva el elemento por el que comenzó a enumerar, lo que le lleva a dejar un botiquín sin su jeringa e introducir dos jeringas en el primero de los botiquines, la única estrategia que se puede considerar es el azar (E_6)

José sigue el orden que la distribución circular proporciona, pero en dos momentos pierde el control, uno cuando introduce dos jeringas en un mismo botiquín y otro cuando manifiesta que ha terminado, pues no recuerda cuál fue el elemento por el que comenzó (E_5 , con errores).

Lucía sin necesidad de mover ni desplazar los botiquines, los enumera apoyándose en el orden que proporciona la colección, uno tras otro sin saltar ningún botiquín. Al ser una colección de doce elementos pierde el control en uno de ellos, el resto lo hace bien (E_5 con errores).

Paula sigue el orden dado por la propia colección (un elemento tras otro), durante los ocho primeros botiquines, luego cambia la estrategia y utiliza el azar (E_6). Comprueba la situación y ella misma se sorprende de haberlo hecho bien, pues dudaba todo el rato y preguntaba si, señalando un botiquín, tenía o no jeringa.

Elsa determina un primer elemento por el que comenzar a enumerar, a partir del cual sigue un estricto orden (uno tras otro) introduciendo una jeringa en todos los botiquines de la colección. Al llegar al botiquín por el que empezó, duda, pero finalmente no introduce jeringa (E_5)

Izan sigue el orden que proporciona la colección, aunque en dos ocasiones pierde dicho orden y es el momento en que comete el error. En los dos botiquines donde hay dos jeringas actuó de la misma forma: intenta ver (asomándose por la raja) si hay o no jeringa, no hay desplazamiento ni movimiento de los elementos (E_6).

Julián intenta seguir el orden dado por la colección, pero salta algunos elementos, pasando por otros varias veces. No recurre al movimiento de los elementos para determinar por el sentido del oído si hay o no jeringa, tampoco desplaza los botiquines enumerados de los que no (E_6).

Al presentar la colección en forma aleatoria se suceden las siguientes actuaciones. Leandro va introduciendo las jeringas en los botiquines sin repetir ninguno, lo que hace es cogerlos, meter el elemento y los vuelve a soltar en el mismo sitio. Cuando le faltan por enumerar tres sí realiza movimientos para saber si tienen o no jeringa, cuando uno no suena, introduce la jeringa, así hasta que finaliza (E_5 y E_2).

Alex, que realiza la situación dos veces, en el primer intento empieza comprobando si hay o no jeringa, abriendo los botiquines. Ante la indicación de que no puede hacer eso, enumera cuatro elementos de la colección, perdiendo el control y entonces recurre a separar los botiquines en los que introduce la jeringa. Lo que sucede es que los primeros no los ha separado y los que separa los pone junto a estos, por lo que no sabe si hay o no, por ello deja tres sin enumerar (E_3). En el segundo intento pone en funcionamiento otra estrategia, el movimiento de los elementos de la colección de referencia a fin de determinar por el sonido si hay jeringa o no (E_2).

José introduce una jeringa y separa el botiquín, por lo que va dejando a un lado de la mesa los botiquines que ha enumerado de los que no (E_3). Es significativo como antes de comprobar si lo ha realizado bien o no, él dice haberlo hecho correctamente: "Ahora sí he metido una jeringa en cada uno", entonces comprueba y dice: "lo ves".

Lucía, a medida que introduce una jeringa, separa el botiquín a un lado de la mesa, cuando le quedan tres elementos, mueve uno para ver si suena (pues está junto a los que ha ido separando). Al ver que no suena, introduce la jeringa y lo separa. Después, termina con los dos que faltan (E_2 y E_3).

Paula separa los elementos por los que ya ha pasado de los que no, aunque no quedan bien delimitados los que se han separado, tal vez por el poco espacio del que disponía, es lo que le lleva a cometer un error (E_3).

Elsa realiza un barrido de derecha a izquierda; pronto pierde el orden y no conserva los elementos por los que ya ha pasado, por lo que empieza a dudar e introduce jeringas en aquellos que cree que no tienen (E_6), no recurre al movimiento ni separación de los elementos, como ha sucedido con los alumnos y alumnas anteriores.

Izan y Julián introducen una jeringa y ponen en vertical el botiquín (de pie) y así sucesivamente con todos, por lo que podemos decir que tienen un control total de la colección que van enumerando. En cuanto a las estrategias puestas en funcionamiento se puede hablar de separación de los elementos de la colección en los que ya han introducido las jeringas (no es que las cojan y las pongan aparte, sino que las ponen en pie, el resultado es el mismo), pero también se puede considerar como un marcaje, pues en cierto modo han "señalado" los botiquines por los que han pasado. Por tanto, se considera la estrategia E_3 , incluso la E_1 , no prevista en el diseño de la situación.

Pasamos a la fase dos donde al presentar la colección en forma aleatoria pero adherida a un panel que bloquea las estrategias descritas en el caso anterior, las actuaciones puestas en marcha son las que se narran a continuación.

Leandro, en principio va estableciendo hitos o señales internas a fin de controlar los elementos por los que ha pasado y pierde dichas referencias cuando faltan dos elementos por enumerar. En uno de los botiquines intenta mirar por la ranura buscando ver si hay jeringa dentro o no, duda, pues no se puede observar, e introduce al azar, pues no sabe si ha pasado o no. Finalmente quedan dos botiquines por enumerar.

Alex comienza con un barrido de derecha a izquierda en los cuatro primeros botiquines, tras lo cual pierde todo hito o señal fijada en un principio y comienza con el azar como estrategia para colocar una jeringa en cada botiquín, por lo que pierde el control y no sabe por cuál ha pasado y por cuál no. Deja cuatro botiquines sin jeringa.

José establece hitos o señales internas, siguiendo un orden mental para introducir una jeringa en cada botiquín. Al ser la colección muy grande pierde las referencias y entonces ya no sabe si por ciertos elementos ha pasado, por lo que introduce varias jeringas en un mismo botiquín. Conforme va enumerando, es curioso, aunque para esta situación no es significativo, va recitando la serie numérica.

Lucía. Esta alumna realiza el ejercicio dos veces. La primera es el azar la estrategia empleada, lo que le lleva al error y fracaso en la situación que ella misma comprueba. En el segundo intento, sí parece poner en marcha la estrategia esperada, estructurar mentalmente la colección en columnas, se pone de manifiesto por la forma en que introduce los elementos, pasando por casi todos, solo deja un botiquín sin enumerar.

Paula, en un primer intento, no establece hitos o señales internas para establecer un orden mental de la colección a fin de ir enumerando sin errores, va introduciendo jeringas, saltando de un lado a otro del panel, de arriba hacia abajo, por lo que no es posible fijar en la memoria los elementos por los que ya ha pasado. Deja dos botiquines sin jeringa. En un segundo intento, al ver que la estrategia puesta en marcha, anteriormente, no ha funcionado, pone en funcionamiento otra, ahora sí establece hitos o señales que le permiten seguir un orden y enumerar la colección sin error. Empieza por arriba y parece establecer mentalmente filas, va de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo. Consigue poner una jeringa en todos y cada uno de los botiquines.

Elsa parece estructurar mentalmente la colección "en filas" por la forma en que va introduciendo las jeringas de arriba hacia abajo, de izquierda a derecha. Establece hitos o señales internas que le permiten ir recordando los elementos por los que ha pasado, enumerando la colección casi a la perfección, pues solo queda un botiquín por el que pasar. Tal como transcurre la situación, creo poder afirmar que ha sido el despiste que se produce al caerse la jeringa al suelo y el tener que cogerla, lo que produce que pierda el control del último elemento a enumerar.

Izan. De este alumno hay que destacar en primer lugar que intenta todo tipo de "peripecias" para conseguir introducir de forma correcta en cada botiquín su jeringa. Se sube a la mesa, se asoma por las ranuras y en su desesperación al no poder controlar la situación, se pone a llorar. Tras tranquilizarse hay un segundo intento en el que hay una aparente estructuración mental de la colección por filas, pero se muestra inseguro, además en este momento se produce un despiste importante, porque otro niño empieza a gritar y él mira a ver qué pasa, momento en que pierde totalmente el poco control que tenía e intenta de nuevo mirar por la ranura y despegar los botiquines del panel. Finalmente deja dos botiquines sin enumerar.

Julián hace una estructuración mental de la colección por columnas, de derecha a izquierda, tal como su comportamiento demuestra, en todo momento sabe los elementos por los que ha pasado, la situación se desarrolla con bastante fluidez y seguridad por parte del alumno. Enumera la colección, pasando por todos y cada uno de los elementos, solo que en el último botiquín introduce dos. La segunda vez que lo hace, coge un puñado de jeringas y las va introduciendo, permitiendo de este modo, no perder de vista la colección de botiquines, es decir, como las jeringas están en una cesta junto a la colección, hace que tengan que girar la cabeza y cogerlas, perdiendo, por segundos, la colección de botiquines de vista. De este modo al tener las jeringas en la mano, no tiene que girarse y hay un mejor control de la situación. Sigue la misma estrategia anterior, estructuración mental por columnas de derecha a izquierda, pasa por once de los doce elementos de la colección, introduciendo una sola jeringa en cada uno de ellos.

4. Evaluación

En cuanto a los comportamientos manifestados por todo el alumnado, tanto de tres años como de cuatro, podemos decir que, en el caso de las cajas dispuestas en fila, siguen el orden dado por la propia colección, salvo una alumna, como ya se ha comentado en el apartado anterior; igual sucede con la disposición en tabla $2 \times n$; cuando se dispone en círculo, las dificultades se incrementan en todos los sujetos, en general, independientemente de la edad, pues a pesar de poder mover los elementos, no lo hacen, tampoco los desplazan, la mayoría sigue el orden dado por esta distribución. Los errores que surgen se derivan de un obstáculo ontogenético, que no es otro que, aún, no son capaces de recordar el elemento por el que comenzaron la enumeración. Cuando la disposición es en forma aleatoria, las estrategias fijadas a priori se manifiestan en todos los alumnos y alumnas, destacando, la del movimiento de las cajas para determinar con el sentido del oído si hay elemento dentro.

La autocrítica, en cuanto a la actuación docente, en este caso, la mía, redundará de modo positivo en futuras actuaciones. En cuanto al diseño del material, en la primera fase, con el alumnado de tres años, hay un fallo, que contamina toda la situación, pues la ranura de los comederos es tan fina, que, dada su poca destreza psicomotriz, les impide introducir con facilidad el hueso en el mismo, tardando demasiado, lo que les hace perder la referencia del elemento por el que ya han pasado. En la siguiente fase se mejora esta circunstancia, y ahora sí, se desarrolla con normalidad, con los errores y dificultades ya manifestados, pero no derivados en este caso del material.

Para el caso de los botiquines, el diseño ha sido correcto, pero quizá ha fallado el tamaño de la colección en la segunda fase, de haber tenido menos elementos, la construcción del conocimiento matemático pretendido se hubiese facilitado. Actuar directamente con una colección fija de doce elementos resulta de una complejidad tal que produce lo observado, la pérdida de control sobre la colección una vez que se han enumerado algunos elementos. Se ha procurado en todo momento respetar las consignas y restricciones diseñadas.

5. Conclusiones

A modo de síntesis de la primera fase. En el alumnado de tres años, dos de los alumnos no han mostrado dificultad alguna cuando la colección se ha presentado en fila y en tabla de 2×4 , en cambio cuando se distribuye en forma circular el error se reproduce en todas las repeticiones, pues a pesar de poder mover y desplazar los elementos, no lo intentan, y pretenden la enumeración siguiendo el orden que proporciona la colección, intento tras intento. Es curioso cuando la distribución es aleatoria como pronto abandonan su estrategia base por ineficaz y ponen en juego otras como el movimiento de los elementos, a fin de determinar por el sentido del oído si hay o no hueso, así como la separación de los elementos enumerados de los que no.

En el caso del alumnado de cuatro años, pasa lo mismo, tienen más dificultad cuando la colección se presenta en una distribución circular que cuando la colección se distribuye aleatoriamente. En círculo, intentan enumerar, siguiendo el orden que da la colección, sin recurrir al movimiento ni desplazamiento, a pesar de que la estrategia base falla intento tras intento. En cambio, cuando la distribución es aleatoria muchos de ellos en el primer intento ya ponen en funcionamiento la separación de los elementos enumerados de los que no; otros recurren al movimiento y al sonido.

Por todo ello, en la siguiente fase lo que se pretende es bloquear las estrategias base que han puesto en funcionamiento para provocar que desarrollen la estrategia óptima que no es otra que la enumeración de una colección dada. En esta segunda fase se bloquea la separación y movimiento de los elementos, donde tanto los comederos para tres años, como los botiquines para cuatro años, están fijados a un panel, que bloquea la estrategia de la fase anterior, consiguiendo un avance muy importante y por tanto una evolución significativa en la construcción del conocimiento matemático objeto de estas intervenciones.

Hay que destacar las intervenciones de una de las alumnas de tres años, pues ha sido el ejemplo claro y evidente de que este es el camino hacia la verdadera y significativa construcción de conocimientos. Ella ha pasado por las diferentes fases, estrategias, errores, que se prevén en este tipo de situaciones. Ha faltado tiempo, para conseguir los objetivos fijados, pero sin duda un curso académico da para mucho, da para madurar, reposar, la enumeración, el conteo, la composición y descomposición y todo el elenco de contenidos descritos en el currículum de Educación Infantil, pero desde la construcción autónoma por el alumnado, con la guía y mediación del docente.

De cara a una tercera intervención, sería muy interesante, poder gestionar variables didácticas como son el meso-espacio y el macro-espacio. En el meso-espacio, la situación sería similar a las propuestas, con menos elementos, por ejemplo, seis comederos dispersos por la clase y han de ser enumerados por el alumnado de tres años. Para cuatro años, ocho botiquines dispersos por la clase, dispuesto en forma de tabla de 2×4 (pero con una separación significativa entre unos y otros) o en forma aleatoria, tal como se valore en cada caso. Para el macro-espacio se podría proponer que el alumnado reparta una invitación a cada una de las clases del centro escolar, para ver a sus perritos, de modo que tengan que tener en cuenta las clases por las que han pasado y las que quedan por pasar, la dificultad es mucho mayor, pues es necesario un control, en este caso del espacio, un espacio que aún no está estructurado mentalmente para el alumnado de infantil, es decir, no existe esquema mental bien definido de cómo se distribuyen las clases.

Se ha de destacar que en todo momento se ha respetado el ritmo de cada alumno y alumna, en principio cuando se diseña la primera fase, se hace de modo general para todo el alumnado. Durante la primera experimentación en el aula, hay un momento en que hay que adaptar la situación y reducir la colección, así como modificar la disposición espacial, para el correcto desarrollo de esta. En el diseño de la segunda fase se tienen en cuenta todos los errores que surgen en la intervención anterior, derivados de obstáculos ontogenéticos, así como las estrategias puestas en marcha, diseñando una situación para cada niño y niña. En el caso de tres años, es la misma para Tito y Pedro; en cambio, para Ana se manejan otras variables a fin de un correcto desarrollo de su propio conocimiento. Para cuatro años el diseño es el mismo para todos, pues así lo permite el análisis de los datos que sobre el alumnado de esta edad se lleva a cabo.

Referencias

- Artigue, M. (1990). *Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Belmonte, J.J. (2007). *Evolución de las nociones temporales en alumnos de Educación primaria. Investigación de la ingeniería didáctica* (Tesis Doctoral). Universidad Nacional de Educación a Distancia, España.
- Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections*. Bordeaux : Université de Bordeaux I.
- Briand, J. y Chevalier, M. C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. París: Hatier.
- Brousseau, G. (1984). *Quel qu'es conduites déterminantes en Didactique des Mathématiques*. Bordeaux: IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation des Phénomènes d'enseignement des Mathématiques* (Thèse d'État). Université de Bordeaux I, Bordeaux, Francia.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée Sauvage.
- Chamorro, Ma. del C. (2005). *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil*. Madrid: Pearson Educación.
- Godino, J.D., Batanero, C., Contreras, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M.R. (2013). La Ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el CERME 8 (Turquía, 2013) con el título, Didactic engineering as design-based research in mathematics education.
- Margolinas, C. (2014). ¿Saberes en la Escuela Infantil? Sí, pero ¿cuáles? *Edma 0-6: Educación matemática en la infancia*, 3(1), 1-20.
- Perrin, M.J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. En Margolinas, C., Abboud Blanchard, M., Bueno Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck F. & Wozniak, F. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp.57 - 78). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Rouchier, A. (1991). *Étude de la conceptualization dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itératives-récurrentes, institutionnalisation* (Thèse d'État). Université d'Orléans, Orléans, Francia.
- Ruiz-Higueras, L. (2005). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En Chamorro, M.C. (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para Educación Infantil* (pp. 181-219). Madrid: Pearson Educación.

Pilar Sánchez Padilla. Graduada en Magisterio de Educación Infantil por la Universidad de Jaén.

Email: sanchezpadillapilar@gmail.es