



Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria

María Teresa Escrivà

Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València, Valencia, España, maeslli@alumni.uv.es

Adela Jaime

Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València, Valencia, España, adela.jaime@uv.es

Ángel Gutiérrez

Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València, Valencia, España, angel.gutierrez@uv.es

Fecha de recepción: 08-05-2018

Fecha de aceptación: 03-08-2018

Fecha de publicación: 27-08-2018

RESUMEN

El software educativo de geometría 3D es una interesante ayuda para que los estudiantes representen y manipulen cuerpos espaciales. En este artículo presentamos una secuencia de actividades basada en la rotación de cubos, combinando cubos reales y representaciones en papel y en ordenador. Las actividades en ordenador se basan en diversos cubos creados en Adobe Flash y en GeoGebra. Un objetivo de esta investigación es observar si los estudiantes de distintos cursos de Educación Primaria, en particular aquellos con alta capacidad matemática, muestran diferencias en la presencia de sus habilidades de visualización y su talento matemático al utilizar uno u otro software. El análisis de los datos muestra además que las actividades planteadas con estas aplicaciones son útiles para que los estudiantes aprendan a visualizar los giros y desarrollen sus habilidades de visualización.

Palabras clave: alta capacidad matemática, cubo, educación primaria, geometría espacial, rotación, software educativo.

Use of 3D software to develop abilities of visualization in Primary School

ABSTRACT

The 3D geometry educational software is an interesting help for students to represent and manipulate spatial objects. In this paper we present a sequence of activities based on the rotation of cubes, by combining real cubes and representations on paper and computer. The activities on computer are based on the manipulation of several cubes created in Adobe Flash and GeoGebra. An objective of this research is to observe possible differences shown by students of different Primary Education grades, particularly those with high mathematical abilities, in the presence of their abilities of visualization and their mathematical talent when using each piece of software. The analysis of data also shows that the activities proposed with these applications are useful for students to learn to visualize the rotations and develop their visualization skills.

Key words: educational software, cube, mathematical giftedness, primary education, rotation, spatial geometry.

1. Introducción

Los datos del informe PISA de 2012 indican que el uso de TICs en los primeros cursos de Educación Secundaria es, internacionalmente, escaso (Drijvers y otros, 2016). Por otra parte, Sacristán (2017) recopila datos de varios estudios que indican que, en todo el mundo e independientemente del nivel económico de los países, se produce una escasa utilización de las TICs en las clases de matemáticas de los niveles educativos no universitarios. España no es una excepción a este fenómeno, pues la enseñanza de las matemáticas, particularmente en Educación Primaria, sigue basándose mayoritariamente en metodologías tradicionales, centradas en el uso de los libros de texto, la pizarra, a veces acompañada de una pantalla de proyección, y la resolución de ejercicios y problemas en las libretas de los estudiantes, con muy escasa implantación real de las TICs en las aulas, es decir, a disposición de los estudiantes. No obstante, en los últimos años estamos asistiendo a un tímido incremento en el uso de las TICs en los centros de enseñanza españoles, mediante el uso de ordenadores, pizarras digitales y tabletas por todos los estudiantes del aula. Los obstáculos que hay que superar para una efectiva incorporación de las TICs a las aulas son diversos, desde la formación del profesorado hasta la disponibilidad de materiales de enseñanza adecuados. Por ello, es necesario disponer de una adecuada fundamentación teórica que permita entender la diversidad de variables que intervienen en la incorporación de las TICs a las aulas y las complejas relaciones entre esas variables (Hoyles, Noss, Kent, 2004), para poder proporcionar a profesores y estudiantes materiales de enseñanza que les ayuden a llevar adelante con éxito la incorporación de las TICs. En particular, no se puede asumir que diferentes aplicaciones informáticas producirán los mismos resultados en todos los estudiantes, pues está comprobado por numerosas investigaciones que los procesos de génesis instrumental (Rabardel, 2002) son dependientes de las características técnicas de los artefactos que se utilizan (en nuestro caso, los programas informáticos) y de los conocimientos y experiencia de los usuarios (en nuestro caso, los estudiantes).

La enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria incluye un uso permanente de representaciones visuales de conceptos, relaciones y operaciones, mediante materiales manipulativos y dibujos, diagramas, etc., tanto reales como digitales. Para que los estudiantes puedan sacar provecho de la información proporcionada por esas representaciones, es necesario que desarrollen sus *habilidades de visualización* y que aprendan a hacer análisis visuales ligados a los análisis matemáticos. Siendo importante el uso de la visualización para la comprensión de todas las áreas de las matemáticas escolares, en geometría, y en particular en geometría espacial, es más necesario disponer de habilidades de visualización bien desarrolladas. Sin embargo, la atención que se presta en los currículos oficiales y en los libros de texto españoles a fomentar la adquisición de habilidades de visualización por los estudiantes es muy escasa, por no decir nula. Por ejemplo, el currículo oficial de Educación Primaria de la Comunidad Valenciana afirma que el uso de materiales manipulativos es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, pero no menciona la importancia del análisis visual y la visualización para obtener el máximo provecho de esos materiales ni del software educativo. Por el contrario, los Principios y Estándares del NCTM afirman que *los programas educativos desde infantil hasta el grado 12 deben capacitar a todos los estudiantes para ... usar visualización, razonamiento espacial y modelización geométrica para resolver problemas* (NCTM, 2000).

Otro reto del sistema educativo español es la implementación generalizada y normalizada de metodologías de atención a los estudiantes con capacidades intelectuales superiores a las normales en las clases ordinarias de los centros de Educación Primaria y Secundaria, en particular a los *estudiantes con alta capacidad matemática* (acm). Aunque las sucesivas leyes de educación han recogido y regulado, desde hace varias décadas, esta atención, la realidad es que su puesta en práctica se hace mayoritariamente de manera voluntaria por una pequeña parte del profesorado, debido principalmente a la escasez de formación especializada en la atención a los estudiantes con acm y de materiales de enseñanza adecuados, si bien es cierto que en los últimos años se están ofreciendo cursos desde los organismos oficiales.

Numerosas investigaciones sugieren, como forma de propiciar una buena formación matemática de todos los estudiantes, el planteamiento de problemas y actividades cuya resolución sea motivadora para los estudiantes y requiera que realicen razonamiento matemático de alto nivel (Schoenfeld, 2013). Pero los requisitos de estos problemas para ser motivadores y propiciadores de ese tipo de razonamiento son diferentes dependiendo de la capacidad matemática de cada estudiante. Un problema adecuado para estudiantes con dificultades de aprendizaje será excesivamente fácil para estudiantes con acm y los problemas adecuados para estos estudiantes serán inabordables por algunos de sus compañeros. Una forma de combinar estas necesidades diferentes es diseñar *actividades matemáticas ricas* (Piggot, 2011), formadas por varias partes de dificultad y complejidad creciente que permiten avanzar a todos los estudiantes más o menos, dependiendo de sus características.

La investigación de la que forman parte las experimentaciones que presentamos en este artículo se sitúa en la intersección entre los tres aspectos que hemos comentado en los párrafos anteriores –desarrollo de las habilidades de visualización, uso de las TICs en las clases de matemáticas y atención a los estudiantes con acm–, pues tiene entre sus objetivos diseñar, implementar y analizar un conjunto de actividades adecuadas para fomentar la adquisición y mejora de destrezas de visualización de todos los estudiantes de las clases ordinarias de Educación Primaria, teniendo en cuenta la diversidad de capacidades matemáticas presentes en las aulas, en particular los estudiantes con acm, y que se basen en la manipulación de cubos en un entorno mixto de uso simultáneo de materiales manipulativos, representaciones en papel y software educativo. Para ello, analizamos la resolución por estudiantes de 5º y 6º cursos de Educación Primaria, parte de ellos con acm, de un conjunto de actividades de geometría espacial basadas en el uso de dos aplicaciones informáticas, prestando también atención a las formas de uso de cada aplicación por los estudiantes. Concretamente, los objetivos específicos de este artículo son:

- Identificar las diferentes estrategias de resolución de los problemas realizadas por los estudiantes y las habilidades de visualización utilizadas en ellas.
- Observar las diferencias que pueda haber en las estrategias de resolución y las habilidades de visualización de los estudiantes al resolver actividades con cada una de las dos aplicaciones informáticas utilizadas.

El artículo continúa ofreciendo un resumen de literatura relacionada con los objetivos planteados; una descripción del marco teórico en el que se ha basado la realización de la investigación que presentamos; la presentación del contexto experimental de la investigación; el análisis de los datos recogidos; y unas reflexiones finales y conclusiones de la investigación.

2. Revisión bibliográfica

Los dos objetos de estudio principales de este artículo son la visualización y los estudiantes con acm de Educación Primaria. Por ello, esta revisión bibliográfica está dividida en tres partes dedicadas a la visualización en matemáticas, a los estudiantes con acm y a la relación entre visualización y acm.

La visualización es una herramienta útil en numerosas áreas, como matemáticas, medicina, ingeniería, geografía, arte, conducción de vehículos y un largo etc. (Gonzato y Godino, 2011), lo cual lleva a que sea objeto de estudio en todas ellas. Esta diversidad de intereses ha hecho que surjan numerosas definiciones de visualización. En la sección 3 indicaremos qué definición de visualización utilizamos en la investigación que presentamos en este texto. Centrándonos en la educación matemática, los primeros estudios sobre la visualización se presentaron durante la década de 1980, gracias a autores como Bishop (1983), Clements (1981, 1982) y Presmeg (1986a). Estos autores toman como referentes trabajos previos producidos en la psicología, entre los que es especialmente relevante Krutetskii (1976), y los adaptan a

las particularidades de las matemáticas, sentando las bases del enfoque investigador más fructífero para entender el uso de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Bishop (1983) identifica dos procesos cognitivos que tienen lugar durante la realización de actividades matemáticas, por ejemplo la resolución de problemas, en las que interviene la visualización como forma de conexión entre la información externa al estudiante y la información procesada en su mente que incluye imágenes visuales mentales, es decir representaciones visuales en la mente: el *procesamiento visual*, que interviene para convertir cualquier tipo de información externa o interna –verbal, escrita, gráfica, visual, etc.– en información mental de tipo visual, en particular para convertir unas imágenes visuales mentales en otras, y la *interpretación de la información figurativa*, que tiene que ver con el procesamiento de la información mental de tipo visual con el fin de extraer información de ella para generar nuevas imágenes o para producir información externa verbal, escrita, gráfica, etc.

Tomando como punto de partida los resultados de Bishop mencionados, Presmeg (1986a) analiza la información mental de tipo visual, que desde entonces denominamos *imágenes mentales*. Esta investigadora identifica varios tipos de imágenes mentales que tienen características diferenciadoras: imágenes *concretas* o *pictóricas*, como fotografías mentales, imágenes *patrones*, que representan relaciones matemáticas de manera visual, imágenes de *fórmulas*, que representan información matemática que los estudiantes han visto en la pizarra, el libro de texto, etc., imágenes *cinéticas*, que se ayudan del movimiento físico de partes del cuerpo como las manos o la cabeza, e imágenes *dinámicas*, es decir imágenes con movimiento en la mente.

Las imágenes mentales y los procesos de visualización son las dos piezas centrales de la actividad de visualización en matemáticas. Pero, del mismo modo que para realizar de manera eficaz cualquier actividad física o intelectual es necesario poseer ciertas habilidades específicas y ponerlas en juego, para poder realizar esos procesos de visualización y relacionar información externa con la información mental de tipo visual, los estudiantes deben adquirir determinadas habilidades que les permitan hacer esas conexiones. Diversos investigadores han analizado este aspecto de la visualización y han llegado a identificar diferentes habilidades necesarias para realizar actividades específicas de visualización. Del Grande (1987, 1990) recopila estos resultados previos y presenta cada habilidad acompañada de ejemplos de actividades o problemas matemáticos en cuya resolución es necesaria: coordinación motriz de los ojos, identificación visual, conservación de la percepción, reconocimiento de posiciones en el espacio, reconocimiento de relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual. Otros autores han identificado habilidades de visualización diferentes de las anteriores, que en algunos casos son específicas de determinados contextos particulares. Así, Gutiérrez (1996) propone la habilidad de rotación mental, Ryu, Ching y Song (2007) aportan las habilidades de manipulación de objetos en la imaginación y de transformar mentalmente un objeto y Miragliotta y Baccaglioni-Frank (2017) trabajan con las habilidades de organización visual, análisis visual planificado, reconstrucción visual y varios tipos específicos de memoria visual. En la sección 3 describimos con detalle las habilidades de visualización que tenemos en cuenta en nuestro análisis de los datos recogidos.

Basándose en los constructos teóricos de Bishop y Presmeg, en los últimos años de la década de 1980 y durante la de 1990 se produjo una importante actividad investigadora sobre el papel de la visualización en matemáticas desde una diversidad de puntos de vista. La revisión de esa literatura excede el objetivo de este artículo, pero puede consultarse en Clements y Battista (1992) y Presmeg (2006). Posteriormente, desde finales de la década de 1990, se produjo una diversificación en los intereses y enfoques relacionados con la visualización en educación matemática, analizada por Presmeg (2006). De entre esos enfoques, nos interesa especialmente el que tiene que ver con el uso de software educativo para la resolución de actividades y problemas de visualización. La generalización de las aplicaciones de geometría dinámica a comienzos del presente siglo dio lugar a numerosas investigaciones con diversidad de enfoques. En relación con la visualización, Sinclair (2003) observa que, para muchos estudiantes, resulta difícil obtener información matemática de las transformaciones producidas durante

las acciones de arrastre. Su interpretación de este hecho es que se debe a la costumbre de los estudiantes de trabajar con dibujos hechos a mano y su escasa capacidad para analizar visualmente el movimiento en la pantalla del ordenador. Cohen (2003) estudia las destrezas de futuros profesores para imaginar desarrollos planos de conos y cilindros y observa diversas dificultades como la de conectar incorrectamente los desarrollos de las caras del sólido o la de imaginar el desarrollo de un cono formado por un triángulo y un círculo.

Una dificultad de los investigadores para observar la actividad de los estudiantes en relación es saber qué piensan y qué imágenes utilizan. El inicio de la observación de los gestos de los estudiantes como forma de exteriorizar sus pensamientos ha sido un elemento importante para la investigación sobre visualización, pues frecuentemente los estudiantes comunican sus ideas apoyándose en acciones físicas. Así, Arzarello, Ferrara, Robutti y Paola (2005) o Escrivà (2016) muestran el uso de los gestos o acciones de los estudiantes como reflejo de sus imágenes mentales durante la resolución de los problemas.

La investigación sobre estudiantes con acm se ha desarrollado desde diversas perspectivas, una de las cuales es la identificación de este tipo de estudiantes. Es necesario diferenciar las altas capacidades de la superdotación. En la psicología educativa conviven varias caracterizaciones de ambas, como muestra Torrego (2011). Podemos considerar que un estudiante *superdotado* es el que destaca en la mayoría de los ámbitos del conocimiento, mostrando una gran capacidad para integrar conocimientos, alta motivación, creatividad y rapidez de aprendizaje y que un estudiante de *altas capacidades* es el que muestra rasgos como los enumerados para la superdotación restringidos a uno o unos pocos ámbitos de conocimiento. Así, podemos hablar de estudiantes con *alta capacidad matemática* como aquellos que destacan en el aprendizaje y la utilización de las matemáticas, independientemente de que sea sobresaliente o no en otras áreas.

La identificación de estudiantes con acm es un tema de investigación destacado, ya que no existe ningún procedimiento universal válido y fiable que permita su detección. La resolución de problemas es la base de la mayoría de las investigaciones realizadas con dicho objetivo. Así, en España, podemos mencionar trabajos como los de Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández (2008), que comparan los resultados de una prueba de selección de estudiantes para el programa Estalmat (Estímulo del TAlento MATemático) y de un test psicométrico de inteligencia, llegando a la conclusión de que los problemas de matemáticas eran mejor identificador de la acm que el test. Escrivà (2016) y Escrivà, Jaime, Gutiérrez y Beltrán-Meneu (2017) se centran en problemas de manipulación de cubos para realizar desarrollos planos, rotaciones y secciones con el objetivo de comparar las estrategias de los estudiantes con mejores resultados y los estudiantes medios.

Diversos investigadores, a partir de los resultados de sus estudios, han identificado rasgos de la alta capacidad matemática (Jaime y Gutiérrez, 2014; Ramírez, 2012). Algunos de estos rasgos son específicos de una determinada actividad, mientras que otros son más generales. De entre los diversos rasgos, algunos están más relacionados con los contenidos de nuestra investigación, pero en dicha relación no hay ninguna característica que aluda explícitamente a la visualización. Un objetivo a medio plazo de nuestra investigación es identificar rasgos diferenciadores de los estudiantes con acm relacionados con la visualización y la geometría espacial, comparando las formas de resolver problemas de los estudiantes ordinarios (es decir los que no destacan en la resolución de problemas) y de los que muestran mayor habilidad para resolver los problemas y mayor capacidad de visualización. El presente artículo supone un paso en esta dirección, ya que en él identificamos estrategias de resolución de los problemas y habilidades de visualización empleadas en dichas resoluciones para, posteriormente, analizar las posibles diferencias entre estudiantes con capacidad matemática media y estudiantes con acm.

No existe unanimidad en los resultados de las pocas investigaciones sobre la respuesta a la cuestión de si existe relación entre capacidad de visualización y alta capacidad matemática. Por una parte, algunos investigadores, como Krutetskii (1976) o Presmeg (1986b) afirman que la buena capacidad de

visualización no es imprescindible para que un estudiante tenga acm. Por otra parte, estudios como los de Escrivà (2016) y Rivera (2011) avalan la existencia de relación entre la buena capacidad de visualización y la acm. Escrivà (2016) muestra que, en grupos ordinarios de 6º de Primaria, los estudiantes que muestran mejor uso de las habilidades de visualización y resuelven correctamente los problemas de manipulación de cubos están entre los que tienen más éxito académico en la asignatura de matemáticas, mientras que otros estudiantes que también tienen éxito académico muestran un uso más pobre de las habilidades de visualización y resuelven peor los problemas. Por su parte, Gruessing (2011), Paz-Baruch, Leikin y Leikin (2016), Ryu, Chong y Song (2007) y van Garderen (2006), experimentando en contextos y con tipos de estudiantes diferentes, llegan a conclusiones similares.

3. Marco teórico

Para fundamentar la investigación realizada que mostramos en este artículo, necesitamos elementos teóricos de visualización matemática que nos permitan analizar las actividades planteadas y las respuestas de los estudiantes. En esta sección presentamos los componentes de la visualización que utilizaremos para analizar las respuestas de los estudiantes.

La visualización en matemáticas es (Gutiérrez, 1996, p. 9) *el tipo de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, desarrollada para resolver problemas o demostrar propiedades*. En este contexto, Gutiérrez (2006, p. 38) detalla la definición anterior:

El conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos. La información visual producida (imágenes) puede ser tanto física (figuras o diagramas) como mental (imágenes mentales). El análisis de información visual se refiere tanto a las imágenes producidas por el propio estudiante como a las recibidas desde el exterior (de estudiantes, profesor, texto, etc.). Las transformaciones pueden hacerse entre una imagen e información verbal (oral o escrita) o de una imagen en otra. La comunicación puede ser gráfica, verbal o mixta.

Cuando una persona utiliza la visualización para resolver tareas matemáticas, intervienen cuatro elementos: imágenes mentales, representaciones externas, procesos de visualización y habilidades de visualización (Gutiérrez, 1996). De esos elementos, en esta investigación nos hemos centrado en las *habilidades de visualización*, de las cuales, las que se han manifestado en las respuestas de los estudiantes son: conservación de la percepción, reconocimiento de posiciones en el espacio, reconocimiento de relaciones espaciales, discriminación visual, memoria visual y rotación mental (Del Grande, 1987, 1990; Gutiérrez, 1996; Miragliotta y Baccaglini-Frank, 2017).

A continuación, definimos estas cinco habilidades y mostramos ejemplos de resoluciones de una actividad propuesta en las experimentaciones en las que se puede manifestar cada habilidad. Los ejemplos se basan en la actividad T3.1 (descrita con detalle en la sección 4), que presenta al estudiante una imagen de un cubo impresa en papel y un cubo de GeoGebra en la pantalla y le pide decidir si los dos cubos son el mismo o no. El entorno 3-dimensional de GeoGebra tiene la característica de que permite girar cualquier cantidad de grados alrededor del eje Z (azul), pero sólo permite girar $\pm 90^\circ$ en otras direcciones, lo cual impide poder alcanzar determinadas posiciones (p. ej., no es posible girar el eje Z para colocarlo en posición horizontal de izquierda a derecha).

3.1. Conservación de la percepción

Es la habilidad que ayuda a reconocer que un objeto y sus partes (p. ej., las caras de un poliedro) mantienen sus propiedades, aunque se vean deformados a causa de la influencia de la perspectiva por un cambio de posición o, aunque deje de verse total o parcialmente.

Para resolver la actividad T3.1, es necesario girar el cubo del ordenador para comparar las posiciones de sus caras con las del cubo impreso. Los estudiantes con la habilidad de conservación de la percepción pueden reconocer que las formas y posiciones de las figuras dibujadas en las caras del cubo del ordenador se mantienen después de haberlo girado, lo cual les permite tener en cuenta también las caras deformadas por la perspectiva u ocultas y comparar los cubos con eficacia.

3.2. Reconocimiento de posiciones en el espacio

Es la habilidad necesaria para relacionar la posición de uno o más objetos con uno mismo (el observador) o con otro objeto fijo, que actúa como punto de referencia.

Para resolver la actividad, el estudiante utilizará la habilidad de reconocimiento de posiciones en el espacio si, para comparar los dos cubos, observa o se imagina las figuras de las caras del cubo de GeoGebra y las orienta usando como referencia su propio punto de vista (el coche mira hacia abajo, etc.).

3.3. Reconocimiento de relaciones espaciales

Es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones internas entre diversos objetos situados en el espacio.

La principal diferencia entre identificar posiciones en el espacio e identificar relaciones espaciales es que, en el primer caso, los objetos se relacionan con el observador o con otro objeto fijo, por lo que dichas relaciones varían si el observador o el objeto de referencia cambia de posición (p. ej., si el estudiante ve en la pantalla que el coche está a la izquierda y el gato a la derecha, esta relación cambia si el estudiante gira el cubo 90° o 180°), mientras que las relaciones espaciales son independientes del observador, por lo que no cambian aunque este cambie de posición (p. ej., si la cometa está junto al techo del coche, esta relación se conserva independientemente de la posición que tenga el cubo en la pantalla).

Al resolver la actividad, un estudiante puede observar las relaciones internas entre las figuras de dos caras contiguas del cubo (p. ej., la cabeza del gato está junto al sol) para determinar si el cubo impreso es igual al cubo de la pantalla.

3.4. Discriminación visual

Es la habilidad que permite comparar diversos objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.

Para resolver la actividad T3.1, los estudiantes deben comparar las formas y posiciones de las figuras dibujadas en las caras de los dos cubos y establecer similitudes y, si es el caso, diferencias entre ellas para determinar si son el mismo cubo o son diferentes (p. ej., darse cuenta de si la cola de la cometa está a la derecha en ambos cubos o no).

3.5. Rotación mental

Es la habilidad para producir imágenes mentales dinámicas y visualizar un objeto en movimiento.

Al resolver algunos casos de la actividad T3.1, el estudiante observará que no puede llevar el cubo de GeoGebra hasta la posición del cubo dibujado en papel. Si el estudiante posee la habilidad de rotación mental, podrá “ver” mentalmente movimientos del cubo del ordenador que no puede hacer en la

pantalla y podrá imaginar el giro del cubo de GeoGebra desde la posición de la pantalla hasta llegar a la posición del cubo impreso.

3.6. Memoria visual

Del Grande (1987, 1990) y Miragliotta y Baccaglini-Frank (2017) incluyen la memoria visual entre las habilidades de visualización, si bien con significados solo parcialmente coincidentes. Para Del Grande, la memoria visual es la habilidad de recordar objetos que ya no están a la vista y poder establecer con otros objetos, que están o no a la vista, relaciones físicas o matemáticas, como forma, tamaño, posición, perpendicularidad, etc. En nuestros experimentos, esta habilidad está presente con bastante frecuencia en la mayoría de las actividades, por ejemplo, para recordar la posición de caras de los cubos que han dejado de verse. Por este motivo, su uso por los estudiantes no nos resulta útil como elemento caracterizador o diferenciador de estrategias de resolución de las actividades.

Miragliotta y Baccaglini-Frank (2017) hacen un análisis más pormenorizado de la habilidad de memoria visual, diferenciando cuatro tipos según usos específicos de la memoria. De entre ellos, nos interesa la *memoria espacial secuencial a corto plazo*, que es la habilidad para recordar una sucesión de ubicaciones.

En nuestras actividades, esa sucesión de ubicaciones recordada puede ser una secuencia ordenada de flechas pulsadas para mover el cubo Flash desde una posición hasta otra. En una de las actividades (T2.7B), pedíamos mover el cubo Flash desde su posición inicial hasta una posición dada en el menor número posible de pasos. Una estrategia de resolución consistió en preplanificar el recorrido haciendo una parte del mismo, volviendo a la posición inicial y repitiendo ese recorrido, para lo cual es necesario recordar la secuencia ordenada de las flechas pulsadas.

4. Metodología

La investigación que presentamos se basa en datos recogidos de varias experimentaciones realizadas con estudiantes de Educación Primaria. En esta sección describimos los diferentes componentes de esas experimentaciones y planteamos los criterios de análisis de los datos recogidos.

4.1. Participantes

Los experimentos se realizaron con estudiantes de Educación Primaria. Participaron un grupo ordinario de clase de 5º curso de un centro público de Valencia, durante las horas de clase de matemáticas, y un grupo de estudiantes de 5º y 6º, identificados como superdotados, que asistían a un taller extraescolar de matemáticas organizado por la Asociación Valenciana de Ayuda al Superdotado y Talentoso (AVAST). En las sesiones experimentales, la primera firmante de este artículo ejerció de profesora. El grupo ordinario estaba formado por 15 niños y el grupo del taller de AVAST por 6 niños.

Con el fin de fomentar la discusión entre los estudiantes durante la resolución de las actividades y poder grabar sus comentarios, los del grupo del colegio trabajaron en tríos. De esta manera, es posible saber cómo razonan y qué uso están haciendo de la visualización. Por su parte, los estudiantes de AVAST trabajaron de manera individual ya que, al ser un grupo pequeño, era posible hacer un seguimiento detallado de todos ellos. Como excepción a este procedimiento de trabajo, un estudiante de AVAST resolvió las actividades en un contexto de entrevista clínica con la profesora-investigadora.

4.2. Los materiales

Las actividades que hemos diseñado se basan en una combinación de representaciones de cubos, mediante cubos físicos (Figura 1a), representaciones en perspectiva impresas en papel (Figura 1b) y

cubos dinámicos en la pantalla de un ordenador o una tableta (Figura 1c). Para hacer las actividades más atractivas y accesibles a los niños de Educación Primaria, los cubos tienen sus caras decoradas con figuras esquemáticas de objetos conocidos. La decoración de las caras es también importante para la comparación entre diferentes representaciones de los cubos; por ejemplo, evitamos las figuras simétricas, pues éstas presentarían ambigüedad al resolver algunas actividades, ya que no se puede estar seguro de cuál es su posición si no se ve también alguna cara contigua.

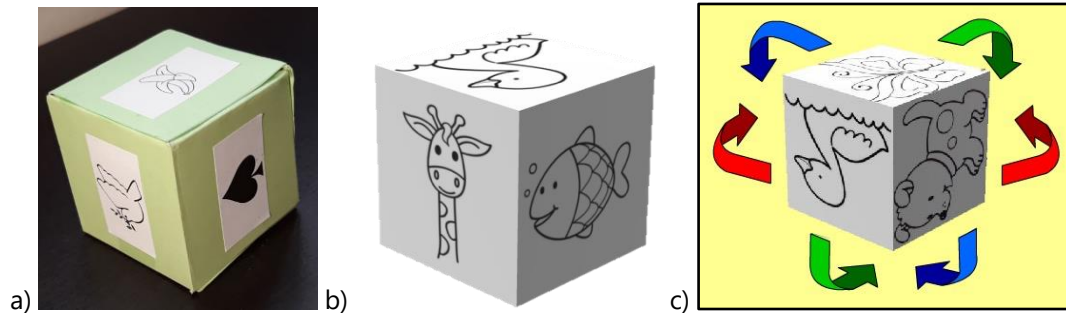


Figura 1. Representaciones de un cubo: física, impresa y en ordenador

Hemos utilizado dos aplicaciones de creación propia para representar en el ordenador cubos y poder girarlos en tres dimensiones. Una de las aplicaciones la hemos creado en Flash (Figura 2) y presenta un cubo que puede girar $\pm 90^\circ$ alrededor de los tres ejes ortogonales que pasan por los puntos medios de sus caras opuestas. Para realizar los giros, la pantalla muestra seis flechas que actúan como botones, de manera que, al pinchar sobre una de las flechas, el cubo realiza la rotación correspondiente. La pantalla muestra también un botón circular que permite llevar automáticamente el cubo a la posición de partida. Esto permite dejar el cubo preparado para empezar de nuevo una actividad, cuando los estudiantes se equivocan, o realizar la actividad siguiente.

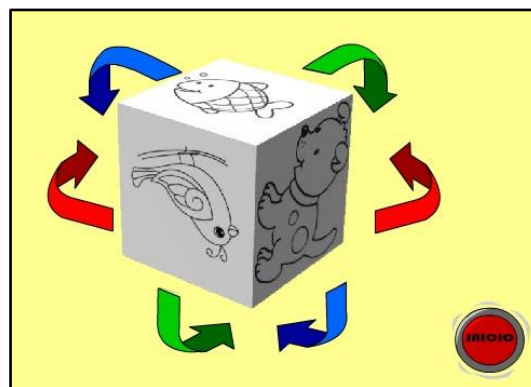


Figura 2. Cubo dinámico creado con Flash

La otra aplicación la hemos creado en GeoGebra (Figura 3a) y presenta un cubo con las caras decoradas, diferente del descrito en el párrafo anterior, que puede girar libremente mediante el procedimiento ordinario de giro de GeoGebra. También tiene un botón para llevar automáticamente el cubo a la posición de partida. Para entender las actividades basadas en manipulaciones con este cubo, es necesario tener en cuenta la peculiaridad de GeoGebra que limita sus posibilidades de rotación en el espacio, pues permite girar libremente alrededor del eje Z (azul), independientemente de la posición en la que se encuentre este eje en la pantalla, pero no permite girar alrededor de los ejes X (rojo) e Y (verde), sino que gira alrededor de un eje invisible horizontal situado en el centro de la pantalla gráfica, que no tiene por qué pasar por el punto (0,0,0) (Figura 3b). Además, los giros alrededor de este eje invisible están limitados a $\pm 90^\circ$. Esta restricción hace, por ejemplo, que sea imposible situar el eje Z en una dirección diferente de la vertical o que no se pueda girar este eje de forma que se vea en la pantalla el semieje positivo Z debajo del semieje negativo.

Estas limitaciones en el giro son relevantes para las actividades que hemos diseñado porque no es posible colocar el cubo en cualquier posición que interese. Por ejemplo, no es posible girar el cubo para situar la cara del coche (Figura 3a) como base del cubo ni en la posición que ocupa la cara de la cometa en la Figura 3a.

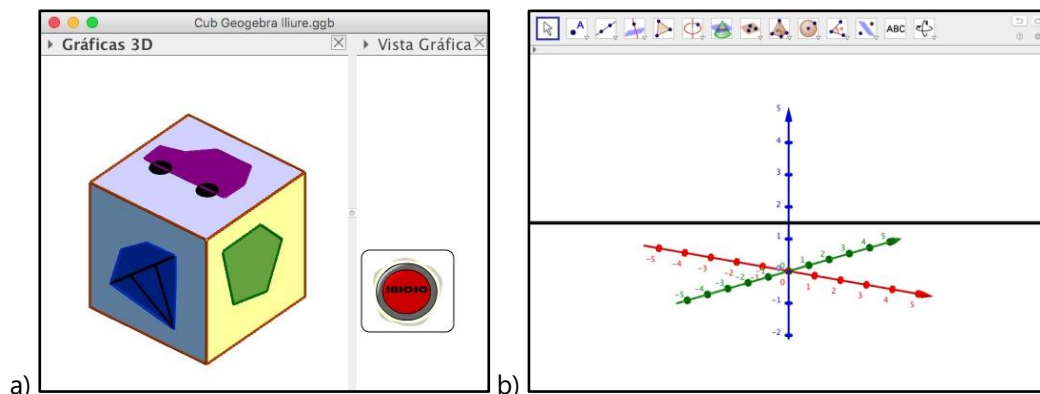


Figura 3. Cubo dinámico creado con GeoGebra y limitaciones de giro en GeoGebra

Cada estudiante tenía a su disposición los cubos físicos, una copia de las actividades y cada grupo tenía un ordenador con el software. Los cubos físicos tienen un tamaño aproximado de 5 cm de arista. Las representaciones impresas son capturas de pantalla del ordenador para garantizar su similitud con las imágenes de la pantalla.

4.3. Las actividades

El experimento de enseñanza estuvo formado por tres bloques de actividades, dedicados a trabajar con desarrollos planos, con secciones y con rotaciones de cubos. Todas las actividades planteaban situaciones en las que era necesario utilizar dos de las tres formas de representación de cubos. La necesidad de combinar diferentes formas de representación potencia el uso de los procesos de visualización para crear, analizar y transformar imágenes mentales de los cubos y, en consecuencia, desarrollar las habilidades de visualización empleadas. En este artículo nos centramos en analizar las actividades basadas en representaciones de cubos en papel y en la pantalla. El bloque de rotaciones comenzó con algunas actividades dirigidas a que los estudiantes aprendieran a realizar rotaciones controladas del cubo, es decir, con un sentido de giro específico, alrededor de alguno de los tres ejes de las caras del cubo. Primero utilizaron cubos físicos y después introdujimos el cubo Flash, en el que tenían que aprender el significado de las flechas de la pantalla, y el cubo GeoGebra, para que aprendieran a manejar el *trackpad* para girar el cubo en el espacio. En este artículo nos centramos en las actividades de rotaciones en las que hay que utilizar los cubos dinámicos del ordenador, que describimos a continuación.

Actividad T2.5 (Figura 4). La actividad muestra varias representaciones de cubos impresos y pide averiguar cuáles corresponden al cubo Flash de la pantalla y justificar la respuesta. Los estudiantes pueden girar el cubo de la pantalla para obtener información que les permita decidir. La primera figura no coincide con el cubo porque el perro impreso es simétrico del perro del cubo Flash. La segunda figura tampoco coincide por el mismo motivo y porque las tres caras mostradas en el cubo impreso están colocadas en otras posiciones en el cubo Flash. La tercera figura sí es correcta. La cuarta figura tampoco coincide con el cubo porque sus caras no están colocadas en esa posición en el cubo Flash.

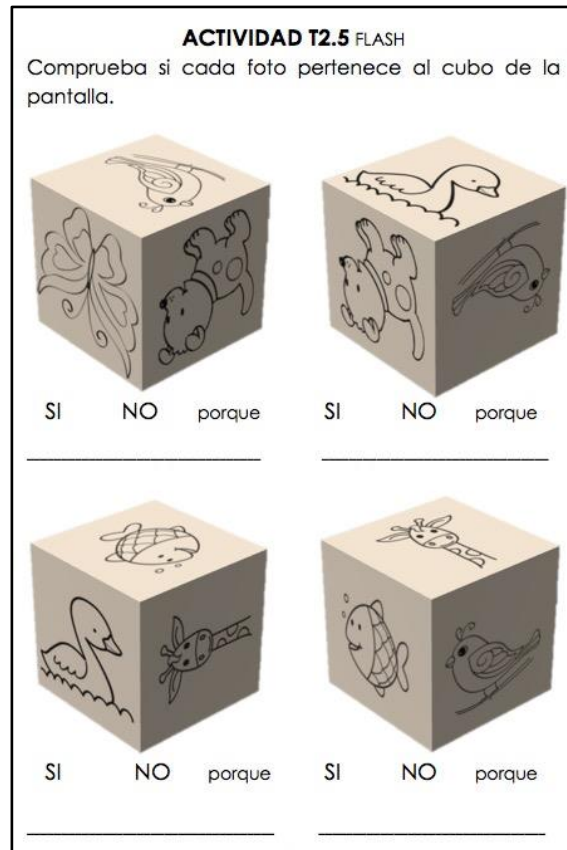


Figura 4. Enunciado de la actividad T2.5, para resolver con el cubo Flash

Actividad T2.6 (Figura 5). La actividad pide mover el cubo Flash hasta situarlo en la posición mostrada en el enunciado. Esta actividad sí tiene solución.




Figura 5. Enunciado de la actividad T2.6, para resolver con el cubo Flash

Actividad T2.7B (Figura 6). La actividad pide, como la anterior, mover el cubo Flash hasta situarlo en cada posición mostrada en el enunciado, pero ahora pide hacerlo en el menor número posible de pasos. Esta actividad tiene solución y, siguiendo una estrategia óptima, siempre se puede alcanzar la posición pedida en un máximo de 3 pasos: Si vemos en la pantalla una de las tres figuras impresas, la podemos llevar a su posición en un máximo de 3 pasos. Si no vemos en la pantalla ninguna de las tres figuras impresas, cualquier giro mostrará una de ellas y, con 2 giros más, podremos llevar esa figura a su posición.


ACTIVITAT T2.7B FLASH

Desde la posición inicial, ¿puedes llegar a la siguiente posición? Inténtalo hacer con el menor número de giros.



¿Con cuántos giros lo has conseguido?

Vuelve a la posición inicial e intenta llegar a la siguiente posición.



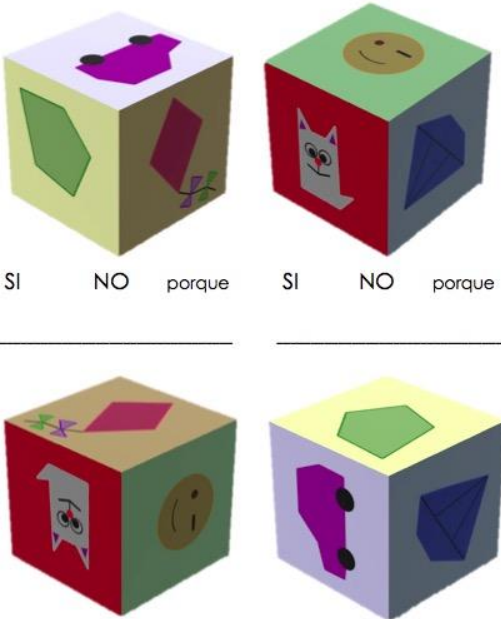
¿Cuántos movimientos has utilizado esta vez?

Figura 6. Enunciado de la actividad T2.7B, para resolver con el cubo Flash

Actividad T3.1 (Figura 7). Esta actividad es similar a la actividad T2.5, con la única diferencia de que se resuelve con el cubo GeoGebra. La actividad se planteó después de que los estudiantes hubieran experimentado con el cubo de GeoGebra para acostumbrarse a controlar los giros con el movimiento del dedo sobre el *trackpad*. El primero y el cuarto cubos sí corresponden al cubo de la pantalla, pero hay una diferencia entre ellos: Mientras que el cubo GeoGebra se puede colocar en la misma posición que el primer cubo, esto no es posible con el cuarto cubo, debido a la limitación de giros en GeoGebra que hemos comentado. Ello obliga a los estudiantes a buscar formas de realizar comparaciones parciales, lo cual requiere del uso de imágenes mentales y habilidades de visualización. El segundo cubo impreso no corresponde al cubo GeoGebra porque el gato está girado 90° respecto del cubo de la pantalla. Tampoco el tercer cubo coincide con el de la pantalla, porque las cometas tienen las colas inclinadas hacia lados contrarios, ya que son simétricas una de la otra.

ACTIVIDAD T3.1 GEOGEBRA

Comprueba si cada foto pertenece al cubo de la pantalla.



SI NO porque SI NO porque

SI NO porque SI NO porque

Detailed description: The image shows four 3D cubes arranged in a 2x2 grid. Each cube has different colored faces with various shapes and characters. The top-left cube has a purple top face with a cat face, a green front face with a pentagon, and a brown right face with a purple trapezoid. The top-right cube has a green top face with a smiley face, a red front face with a cat face, and a blue right face with a pentagon. The bottom-left cube has a brown top face with a purple trapezoid, a red front face with a cat face, and a green right face with a smiley face. The bottom-right cube has a yellow top face with a green pentagon, a purple front face with a cat face, and a blue right face with a pentagon. Below each cube is a set of three horizontal lines for the answer: 'SI', 'NO', and 'porque'.

Figura 7. Enunciado de la actividad T3.1, para resolver con el cubo GeoGebra

Actividad T3.2 (Figura 8). Esta actividad pide, en primer lugar, imaginar dos recorridos diferentes para llegar desde la posición inicial del cubo GeoGebra (Figura 3a) hasta la posición impresa en el enunciado y describirlos por escrito. Después, pide realizar esos recorridos en el ordenador y describir cómo se han hecho realmente. En este caso, sí es posible mover el cubo GeoGebra hasta situarlo en la misma posición que el cubo impreso. El objetivo principal de la actividad es evaluar la capacidad de visualización de los estudiantes, al tener que imaginar dos recorridos sin hacerlos físicamente.

ACTIVITAT T3.2 GEOGEBRA

Desde la posición inicial, explica cómo vas a conseguir la siguiente foto por dos caminos diferentes.



Hazlo y, después, explica cómo lo has hecho.

Detailed description: The image shows a 3D cube with a red bottom face, a yellow left face, and a brown right face. The top face is also brown and has a purple trapezoid. The front face is red and has a cat face. Below the cube are two sets of three horizontal lines for the answer: 'Hazlo y, después, explica cómo lo has hecho.'.

Figura 8. Enunciado de la actividad T3.2, para resolver con el cubo GeoGebra

4.4. Procedimientos de recogida de información y análisis de datos

Para la recogida de datos experimentales, utilizamos un programa de captura de pantalla y audio, que nos permitió ver los movimientos efectuados con los cubos del ordenador y escuchar los comentarios que realizaban los estudiantes durante la manipulación. También hicimos grabaciones en video de las sesiones: seleccionamos dos parejas en el grupo de clase, a las que hicimos un seguimiento continuo durante todas las sesiones, y grabamos al conjunto de estudiantes participantes en el taller extraescolar. Asimismo, recogimos las hojas con las respuestas de los estudiantes y la profesora-investigadora tomó notas de campo.

El objetivo de nuestro análisis de los datos ha sido identificar las estrategias de resolución de los estudiantes y la presencia en ellas de habilidades de visualización descritas en la sección 3. Para ello, hemos revisado los protocolos de las conversaciones, buscando fragmentos en los que los estudiantes mencionaran elementos de los cubos (caras, figuras de las caras, partes de las figuras, etc.). El tipo de elementos mencionados, la forma de referirse a ellos y las relaciones que los estudiantes establecen entre elementos de un cubo y del otro nos permiten identificar las estrategias de resolución y las habilidades de visualización puestas en juego. La comparación de la actividad de los estudiantes del grupo ordinario y de los estudiantes con acm nos puede permitir identificar comportamientos característicos de estos últimos.

5. Análisis de resultados

En esta sección realizamos el análisis de los datos recogidos. A continuación, presentamos ejemplos característicos de cómo resuelven los estudiantes cada actividad y de cómo utilizan las habilidades de visualización descritas en la sección 3. La presencia de estudiantes con acm en la muestra da a esta una mayor diversidad, que se traduce en más variedad de estrategias de resolución.

En la actividad T2.5 (Figura 4), los estudiantes movían el cubo del ordenador y comparaban su posición con la del cubo impreso para ver si coincidían. Para hacerlo, los estudiantes situaban el cubo del ordenador haciendo coincidir la figura de una cara con la correspondiente del cubo impreso, con la finalidad de poderlas comparar y decidir si se correspondían o no. En esta actividad se ve claramente el uso de la habilidad de *discriminación visual*, ya que comparaban ambas figuras identificando sus semejanzas y diferencias. Un estudiante del grupo ordinario mostraba el uso de esta habilidad porque, para determinar si un cubo impreso era igual al de la pantalla, movía el cubo de la pantalla hasta que una cara correspondiese con una de las caras del cubo impreso (Figura 9) y, a continuación, comparaba el resto de caras visibles de ambos cubos y decidía si eran o no el mismo cubo. Refiriéndose al segundo cubo de la actividad el estudiante indicó: "Solo está el pato, las demás no están".

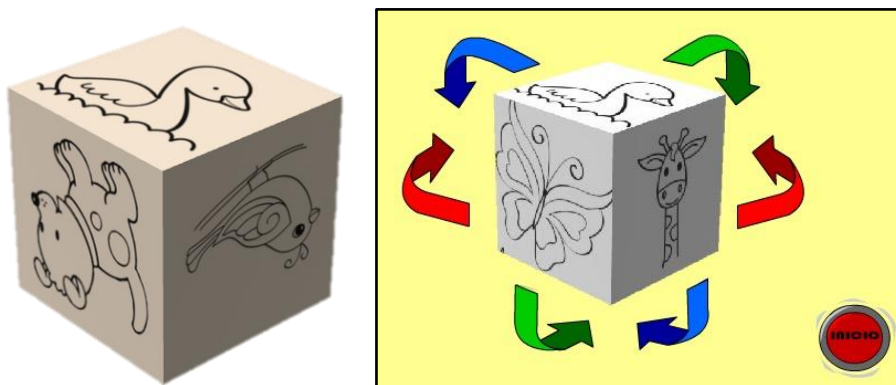


Figura 9. Comparación de las caras de un cubo impreso y del cubo Flash

Este estudiante también manifestó la habilidad de *reconocimiento de relaciones espaciales* en otro momento de resolución de esta actividad, ya que, después de mover el cubo Flash (Figura 10) se fijó en la relación del perro con la mariposa en el cubo impreso y observó que esta relación no se mantenía en el cubo de la pantalla: "El perro mira hacia otro lado", por lo que concluyó que los cubos no eran iguales.

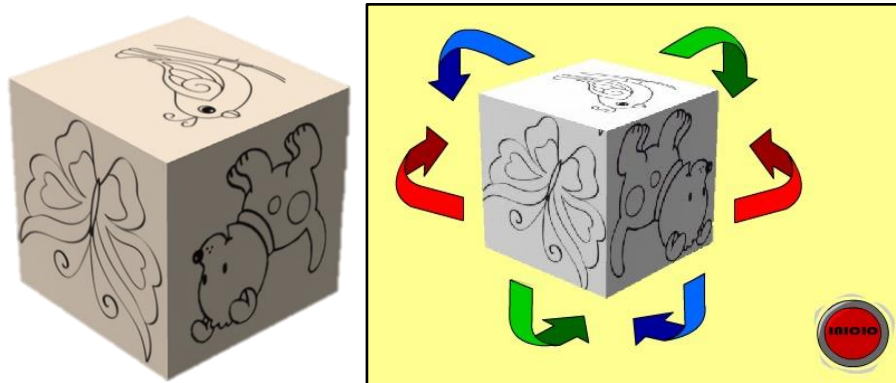


Figura 10. Comparación de la posición relativa del perro y la mariposa en un cubo impreso y el cubo Flash

Por su parte, un estudiante de acm, para resolver el cuarto cubo impreso, también movió el cubo del ordenador buscando la posición del pez impreso. En cierto momento, el estudiante ocultó el pez, pero siguió teniendo en cuenta dónde y en qué posición estaba, lo cual le permitió girar el cubo para recuperar el pez en la posición correcta y situarlo como en la posición de la siguiente imagen (Figura 11). Este estudiante mostró, mientras realizaba estos movimientos, la habilidad de *conservación de la percepción*, ya que era consciente de dónde estaba la cara oculta del pez y la siguió usando para decidir cómo girar el cubo. Al mismo tiempo, necesitó también la habilidad de *rotación mental*, ya que tuvo que imaginarse dónde estaba el pez y qué giros hacer para llevarlo a donde quería, para lo cual el estudiante creó una imagen mental dinámica que le ayudó a saber qué flechas presionar para hacer que volviera a aparecer dicha figura en una posición concreta.

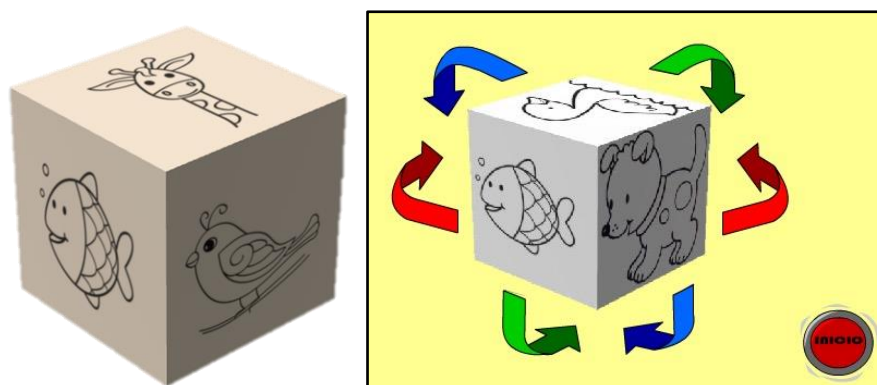


Figura 11. Movimiento del cubo Flash para situar el pez como en el cubo impreso

En la actividad T3.1 (Figura 7), algunos estudiantes mostraron las mismas estrategias de resolución y utilizaron las mismas habilidades de visualización observadas en la actividad T2.5. En este caso, un estudiante del grupo ordinario, para descubrir si un cubo impreso coincidía o no con el cubo GeoGebra, giraba el cubo de la pantalla hasta hacer coincidir una de sus caras con la misma cara del cubo impreso y después comprobaba si coincidían o no las otras dos caras. El estudiante mostraba en estas acciones, especialmente en el tercer cubo impreso, la habilidad de *discriminación visual*, al comparar las caras para

establecer semejanzas y diferencias entre las del cubo impreso y las del cubo de la pantalla. Al mismo tiempo, el estudiante manifestó la habilidad de *reconocimiento de relaciones espaciales* al fijarse en la relación interna entre las figuras de las caras para poder determinar si las posiciones del cubo impresos correspondían a la del cubo GeoGebra.

Por otro lado, un estudiante con acm manifestó la habilidad de *rotación mental* mientras analizaba el cuarto cubo de la actividad, ya que no se puede colocar el cubo GeoGebra exactamente en la misma posición del cubo impreso, debido a la limitación de giros de GeoGebra. En este caso, el estudiante creó una imagen mental dinámica del cubo y observó que esa imagen sí se correspondía con el cubo impreso. Posteriormente, para explicar a la profesora cómo había razonado, giró la hoja de papel y así demostró que sí se correspondían ambos cubos. Además, el estudiante manifestó la habilidad de *conservación de la percepción*, ya que se daba cuenta de que, aunque el programa no permite girar el cubo, si este se pudiera seguir girando, coincidiría con la posición del cuarto cubo de la actividad: "Este cubo [refiriéndose al de la pantalla] muestra las tres caras independientemente de su posición."

Para resolver las actividades T2.6 (Figura 5) y T2.7B (Figura 6), los estudiantes tenían que encontrar un camino correcto para llegar a las posiciones dadas que, en la segunda actividad, también fuera eficiente, es decir con la menor cantidad de movimientos. Los estudiantes que encontraron caminos eficientes mostraron las habilidades de *rotación mental*, ya que fueron capaces de darle significado a las flechas y realizar una coordinación entre el giro que querían hacer y la flecha adecuada.

Varias actividades, por ejemplo la T2.6, piden a los estudiantes mover los cubos hasta situarlos en posiciones concretas mostradas en las hojas de actividades. En estos casos, los estudiantes solían tomar como referencia una de las figuras situadas en las caras superior o inferior izquierda, por ser las más claramente identificables, y buscaban la manera de girar el cubo Flash para llevar esa cara a la posición del cubo de la actividad. Para decidir qué giros debían hacer, los estudiantes, refiriéndose al perro, solían usar expresiones como "lo tengo que llevar a la cara superior" o "voy a girarlo hacia arriba", que indican el uso de la habilidad de *reconocimiento de posiciones en el espacio*.

Al resolver la segunda parte de la actividad T2.7B (Figura 6), los estudiantes se encuentran con que la posición inicial del cubo Flash (Figura 1c) y la posición final no tienen ninguna cara en común, lo cual les supone una dificultad para poder imaginarse cómo iniciar un recorrido óptimo. Uno de los estudiantes con acm, al resolver esta parte de la actividad, realizó unos giros para saber en qué caras estaban las figuras ocultas del cubo y cómo hacer visible la figura que le interesaba usar como referencia. A continuación, devolvió el cubo a la posición inicial mediante el botón Inicio, repitió la secuencia de giros y siguió girando el cubo hasta llegar a la posición de la actividad con un recorrido óptimo. Esta forma de proceder supone, por una parte, el uso de la habilidad de *conservación de la percepción*, al reconocer que las figuras se sitúan en la misma posición cada vez que el cubo vuelve a su posición inicial, y, por otra parte, el uso de la habilidad de *memoria espacial secuencial de corto plazo*, al recordar y reproducir una secuencia de giros (pulsaciones en las flechas) que le interesaba para resolver la actividad.

Las actividades de GeoGebra fueron realizadas a continuación de las de Flash. Esto motivó que algunos estudiantes, para explicar su resolución de la actividad T3.2 (Figura 8) e indicar el camino que habían seguido para llegar a la posición del cubo impreso, dibujaran en la hoja de la actividad flechas como las del cubo Flash. La Figura 12a muestra la respuesta de un estudiante que describió verbalmente los movimientos realizados ("una hacia abajo rodeando la figura y una hacia la derecha") y la Figura 12b muestra la de otro estudiante que utilizó las flechas del cubo Flash. Los estudiantes como el segundo utilizaron la habilidad de *rotación mental* para poder representar los giros hechos con el cubo GeoGebra mediante las flechas del cubo Flash, pues tuvieron que crear imágenes mentales dinámicas que relacionaran los giros del cubo GeoGebra con las flechas del cubo Flash.

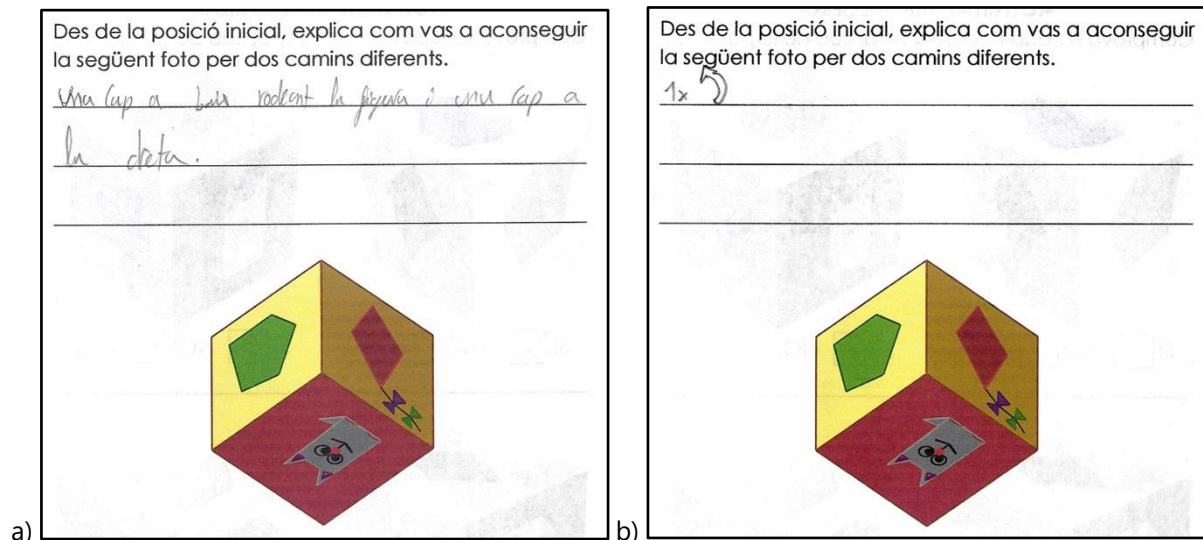


Figura 12. Respuestas a) verbal y b) simbólica a la actividad T3.2

Para terminar este análisis de las respuestas de los estudiantes, la Tabla 1 resume las habilidades que hemos detectado en las estrategias de resolución descritas en las páginas anteriores.

| | T2.5 (F) | T2.6 (F) | T2.7B (F) | T3.1 (G) | T3.2 (G) |
|--|-------------|-------------|--------------|-------------|-------------|
| Conservación de la percepción | X | | X | X | |
| Reconocimiento de posiciones en el espacio | | X | X | | X |
| Reconocimiento de relaciones espaciales | X | | | X | |
| Discriminación visual | X | | | X | |
| Rotación mental | X | X | X | X | X |
| Memoria espacial secuencial a corto plazo | | | X | | |

Tabla 1. Uso de las habilidades de visualización en las actividades con los cubos Flash (F) y GeoGebra (G)

El conjunto de actividades que hemos analizado está dividido en dos tipos: Actividades que piden comparar un cubo del ordenador y una representación impresa, para decidir si la representación corresponde al cubo del ordenador (T2.5 y T3.1). Actividades que piden mover el cubo del ordenador hasta llevarlo a una posición dada mediante una representación impresa (T2.6, T2.7B y T3.2). La tabla muestra con claridad, respecto de las habilidades de visualización empleadas por los estudiantes, la diferencia entre los dos tipos de actividades y la coherencia interna de cada tipo. La diferencia entre las formas de uso de los cubos Flash y GeoGebra no parece que afecte significativamente a la necesidad de emplear determinadas habilidades para la resolución. Esa diferencia parece estar en la intensidad y forma de uso de las habilidades en una y otra actividades, pero no hemos evaluado este aspecto de manera objetiva. En el conjunto de actividades que piden mover el cubo hasta una determinada posición, la mayor complejidad de T2.7B (hacer recorridos mínimos) hace que sea necesario utilizar más habilidades de visualización. Las habilidades de conservación de la percepción y memoria espacial están relacionadas, pues ambas se utilizan para gestionar información visual sobre caras o posiciones de cubos que no están a la vista, y son necesarias en esta actividad para coordinar posiciones del cubo y poder identificar caminos óptimos.

6. Síntesis y conclusiones

En este artículo hemos presentado resultados de un experimento de enseñanza en el que estudiantes de 5º y 6º de Educación Primaria, parte de ellos con acm, resolvieron diversas actividades que requerían

girar cubos en la pantalla de un ordenador mediante dos aplicaciones de Flash y GeoGebra. Las actividades T2.5 (Flash) y T3.1 (GeoGebra) pedían comparar los cubos impresos en la hoja de papel de la actividad con el cubo de la pantalla del ordenador para averiguar si se trataba del mismo cubo o no. Las actividades T2.6, T2.7B (ambas Flash) y T3.2 (GeoGebra) pedían llegar desde la posición inicial del cubo hasta unas posiciones concretas mostradas en las actividades. La resolución de estas actividades permitió que los estudiantes generaran imágenes mentales y utilizaran habilidades de visualización, lo cual ayudó a desarrollar su capacidad de visualización espacial en matemáticas.

Un objetivo de investigación ha sido identificar las diferentes estrategias de resolución de los problemas realizadas por los estudiantes y las habilidades de visualización utilizadas en ellas. En la sección 5 hemos descrito las diferentes estrategias de resolución que hemos identificado para cada actividad y las hemos analizado para identificar las habilidades de visualización empleadas en cada estrategia. En las actividades T2.5 y T3.1, los estudiantes mostraron las habilidades de *conservación de la percepción, reconocimiento de relaciones espaciales, discriminación visual y rotación mental*. En las actividades T2.6, T2.7B y T3.2, los estudiantes utilizaron las habilidades de *conservación de la percepción, rotación mental y memoria espacial secuencial a corto plazo*. Por la propia estructura de las actividades, la habilidad de *rotación mental* estuvo siempre presente, aunque aplicada en diferentes contextos, pero las diferentes actividades ayudaron a los estudiantes a practicar distintas habilidades, además de la mencionada antes.

Un uso adecuado de las habilidades de visualización permitió a los estudiantes resolver de manera correcta las actividades planteadas. En el caso de las actividades de comparación de un cubo impreso con el del ordenador, para poder llegar a identificar si todas las caras de ambos cubos se corresponden, el caso más evidente se observa en una posición de la actividad T3.1 a la que es imposible llegar moviendo el cubo. En el otro grupo de actividades, consistentes en mover el cubo para situarlo como una figura impresa, las habilidades de visualización les permitieron a los estudiantes llegar a la posición dada con el menor número posible de movimientos.

El segundo objetivo de investigación ha sido observar las diferencias que pueda haber en las estrategias de resolución y las habilidades de visualización de los estudiantes al resolver actividades similares (T2.5 y T3.1; T2.6 y T3.2) con los cubos Flash y GeoGebra. Hemos observado que, a pesar de la similitud de las actividades, las diferencias entre las formas de giro de ambos cubos (giro de 90° alrededor de tres ejes ortogonales con el cubo Flash; giro libre continuo en el espacio con el cubo GeoGebra) han dado lugar a estrategias de resolución diferentes. El giro de 90° del cubo de Flash hacía necesario que los estudiantes usaran habilidades de visualización para poder llegar a la posición dada en la actividad de forma eficaz, es decir, con el menor número posible de movimientos. Sin embargo, el giro libre del cubo GeoGebra les permitía llegar fácilmente a cualquier posición alcanzable.

El manejo del cubo Flash ha resultado más sencillo que el del cubo GeoGebra a la hora de identificar si los cubos impresos coincidían con el cubo de la pantalla. La estrategia general consistía en girar el cubo de la pantalla buscando situar una de sus caras en la misma posición de esa cara en el cubo impreso y observar si las demás caras coincidían también. En el cubo GeoGebra, la limitación del giro hacía que esto no siempre se pudiera llevar a cabo, como en la actividad T3.2, lo cual impedía a los estudiantes realizar una comparación directa entre los cubos GeoGebra e impreso, y hacía necesario el uso más intenso de las habilidades de visualización para poder resolver la actividad. Por tanto, las dos aplicaciones ayudan a los estudiantes a utilizar las habilidades de visualización durante la resolución de las actividades de este experimento de enseñanza y, consecuentemente, a desarrollar sus estrategias de visualización.

Las habilidades de visualización en matemáticas son también útiles en la vida cotidiana, por lo que deberían ser uno de los objetivos de enseñanza en Educación Primaria y Secundaria. Al realizar actividades de la vida cotidiana, necesitamos diferentes habilidades de visualización espacial para transmitir, codificar o manipular una determinada información (Gonzato, 2013) y también se utilizan

dichas habilidades en muchas profesiones, como carpinteros, médicos, ingenieros, conductores, entre otras (Gonzato y Godino, 2011).

Por el reducido número de estudiantes que han participado en el experimento de enseñanza y haber experimentado solo en dos cursos de Educación Primaria, no podemos plantear la generalizabilidad de los resultados. Esta es una limitación de este estudio, que intentamos subsanar mediante nuevos experimentos con estudiantes de otros cursos de Educación Primaria.

Agradecimientos

Los autores agradecemos su inestimable colaboración a los estudiantes y profesores que han participado en las experimentaciones. Los resultados presentados en este artículo son parte de las actividades de los proyectos de investigación I+D+i EDU2017-84377-R (MINECO/FEDER) y GVPROMETEO2016-143 (Generalitat Valenciana).

Referencias

- Arzarello, F., Ferrara, F., Robutti, O., y Paola, D. (2005). The genesis of signs by gestures: The case of Gustavo. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 73-80). Melbourne: PME.
- Bishop, A. J. (1983). Spatial abilities and mathematical thinking. En M. Zweng y otros (Eds.), *Proceedings of the 4th I.C.M.E.* (pp. 176-178). Boston, MA: Birkhauser.
- Clements, D. H., y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Nueva York, NY: MacMillan.
- Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics (1). *For the Learning of Mathematics*, 2 (2), 2-9.
- Clements, K. (1982). Visual imagery and school mathematics (2). *For the Learning of Mathematics*, 2 (3), 33-38.
- Cohen, N. (2003). Curved solids nets. En N. Pateman, B. J. Dougherty, y J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 229-236). Honolulu, HI: PME.
- Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary geometry. En NCTM (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 126-135). Reston, VA: NCTM.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37 (6), 14-20.
- Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C., y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Faisca*, 13 (15), 30-39.
- Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., y Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education*. Cham, Suiza: Springer.
- Escrivà, M. T. (2016): *Habilitats de visualització manifestades per alumnes de primària quan resolen activitats de geometria 3D i la seua relació amb el talent matemàtic* (tesis de maestría). Valencia: Universitat de València. Disponible en <http://roderic.uv.es/handle/10550/56732>
- Escrivà, M. T., Jaime, A., Gutiérrez, A., y Beltrán-Meneu, M. J. (2017). Geometría 3D y talento matemático. *Uno*, 77, 7-13.
- Gonzato, M. (2013). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la visualización espacial* (tesis doctoral). Granada: Universidad de Granada.
- Gonzato, M. y Godino, J. D. (2010). Aspectos históricos, sociales y educativos de la orientación espacial. *Unión*, 23, 45-58.
- Gruessing, M. (2011). Spatial abilities and mathematics achievement among elementary school children. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 306). Ankara: PME.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia: PME.

- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz, y M. de la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz: F.E.S.P.M. y Soc. Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Hoyles, C., Noss, R., y Kent, P. (2004). On the integration of digital technologies into mathematics classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9 (3), 309-326.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV. Disponible en <http://www.uv.es/angel.gutierrez>
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.
- Miragliotta, E., y Baccaglioni-Frank, A. (2017). Visuo-spatial abilities and geometry: A first proposal of a theoretical framework for interpreting processes of visualization. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3952-3959). Dublín, Irlanda: ERME.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: N.C.T.M.
- Paz-Baruch, N., Leikin, R., y Leikin, M. (2016). Visual processing in generally gifted and mathematically excelling adolescents. *Journal for the Education of the Gifted*, 39 (3), 237-258.
- Piggott, J. (2011). *Rich tasks and contexts*. Cambridge, G.B.: NRICH. Disponible en <https://nrich.maths.org/5662>
- Presmeg, N. C. (1986a). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6 (3), 42-46.
- Presmeg, N. C. (1986b). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies In Mathematics*, 17 (3), 297-311.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Rabardel, P. (2002). *People and technology. A cognitive approach to contemporary instruments*. París: Université Paris 8. Disponible en <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/Groupes/Modele/Articles/Public/ART375257849869724629.PDF> y en <http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/Groupes/Modele/Articles/Public/ART375254868869724629.PDF>
- Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral). Granada: Univesidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalle/7461
- Rivera, F. D. (2011). *Towards a visually oriented school mathematics curriculum*. Nueva York, NY: Springer.
- Ryu, H., Chong, Y. y Song, S. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. En J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S- Park y D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.137-144). Seúl: PME.
- Sacristán, A. I. (2017). Digital technologies in mathematics classrooms: barriers, lessons and focus on teachers. En E. Galindo y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 90-99). Indianapolis, IN: PME-NA.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM Mathematics Education*, 45, 607-621.
- Sinclair, M. P. (2003). The provision of accurate images with dynamic geometry. En N. Pateman, B. J. Dougherty, y J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 191-198). Honolulu, HI: PME.
- Torrego, J. C. (Coord.) (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa*. Madrid: Fundación SM.
- Van Garderen, D. (2006): Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities, *Journal of Learning Disabilities*, 39 (6), 496-506.

María Teresa Escrivà Llidó. Maestra de Educación Primaria. Ha cursado el Máster en Investigación en Didácticas Específicas (especialidad de Didáctica de las Matemáticas) de la Universitat de València, cuyo TFM está centrado en la geometría espacial y los estudiantes con altas capacidades matemáticas. Actualmente es estudiante de doctorado en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València.
Email: maeslli@alumni.uv.es

Adela Jaime Pastor. Profesora Titular de la Universitat de València. Doctora en matemáticas, desarrolla su actividad docente e investigadora en el Departamento de Didáctica de la Matemática, con sede en la Facultad de Magisterio. Sus líneas de investigación actuales se centran en la didáctica de la geometría y en la atención a estudiantes con alta capacidad matemática. Ha publicado diversos artículos en revistas nacionales e internacionales, algunos de ellos con importante repercusión internacional.

Email: adela.jaime@uv.es

Angel Gutiérrez Rodríguez. Catedrático de la Universitat de València. Doctor en matemáticas, desarrolla su actividad docente e investigadora en el Departamento de Didáctica de la Matemática, con sede en la Facultad de Magisterio. Sus líneas de investigación actuales se centran en la didáctica de la geometría, el uso de entornos de geometría dinámica y en la atención a estudiantes con alta capacidad matemática. Ha publicado diversos artículos en revistas nacionales e internacionales, algunos de ellos con importante repercusión internacional.

Email: angel.gutierrez@uv.es

Web: www.uv.es/angel.gutierrez