http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351

Educación Matemática en la Infancia

Sentido de la medida y magnitud superficie: un experimento de enseñanza con alumnado de primaria

Antonio Codina Sánchez
Universidad de Almería, Almería, España, acodina@ual.es
Isabel María Romero Albaladejo
Universidad de Almería, Almería, España, imromero@ual.es
Catalina Abellán Megías
Universidad de Almería, Almería, España, catiabellan@hotmail.com

Fecha de recepción: 1-08-2017
Fecha de aceptación: 23-11-2017
Fecha de publicación: 31-12-2017

RESUMEN

El sentido de la medida supone un proceso complejo que se inicia con la percepción y comparación de cualidades medibles y se completa con técnicas de medición y estrategias de estimación en situaciones contextualizadas. En la magnitud superficie, la importancia concedida al uso de fórmulas, incluso en los niveles tempranos, en detrimento de la comprensión de las unidades de medida, obstaculiza el desarrollo del sentido de la medida en los escolares. Mediante un experimento de enseñanza llevado a cabo en una clase de 4º de Educación Primaria, se exploran potencialidades y dificultades que emergen al implementar una secuencia didáctica para la introducción de la magnitud superficie. Los escolares trabajan de forma colaborativa resolviendo tareas contextualizadas encaminadas a promover la comprensión de las principales unidades de superficie y de las relaciones entre ellas. La estimación y el principio multiplicativo juegan un papel fundamental a lo largo de la secuencia.

Palabras clave: sentido de la medida, estimación, superficie, pensamiento multiplicativo, Educación Primaria.

Measurement sense for surface area: a teaching experiment with Primary students

ABSTRACT

Measurement sense implies a complex process, which begins with the perception and comparison of measurable attributes, and it´s completed with measurement techniques and estimation strategies in contextualized situations. For surface area, the importance given to the use of formulas, even at early stages, in the detriment of understanding measure units, blocks the development of measurement sense. Through a teaching experiment carried out with students of fourth-grade in primary school, the potentialities and difficulties that arise when implementing a didactical sequence for introducing the surface magnitude are explored. Children work collaboratively solving contextualized tasks, aimed at fostering the understanding of the main surface area units and their relationships. Estimation and the multiplicative principle play a key role along the sequence.

Key words: measurement sense, estimation, surface area, multiplicative thought, Primary education.

1. Introducción

En España son diversos los investigadores que han centrado sus trabajos en la medida de magnitudes en los primeros niveles educativos. Entre ellos, destaca la producción del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico. Dentro de este grupo, el profesor Enrique Castro y sus colaboradores han conformado un núcleo de conocimiento sobre el tópico a lo largo de los últimos 25 años, que sin duda, ha permitido y permite avanzar en el estudio de la comprensión del tema por parte de los escolares (Castro, Segovia y Flores, 1996; De Castro, Castro y Segovia, 2014; Segovia y Castro, 2009; Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989; Segovia, Castro y Flores, 1996; Segovia, Castro, Molina y Castillo, 2015; Segovia y De Castro, 2013). Este trabajo se apoya principalmente en esos estudios.

La medida de magnitudes es un campo de conocimientos con presencia permanente en Educación Matemática y de creciente importancia en el currículo escolar, que actualmente propugna (Consejería de Educación, Cultura y Deportes, 2015a, 2015b; Ministerio de Educación, Cultura y Deportes, 2014):

- Hacer surgir la necesidad de medir a partir de la experiencia de los escolares, con el fin de que sea significativa para ellos.
- Plantear situaciones reales de comparación y considerar la medición como respuesta adecuada a determinados requerimientos.
- Manejar la medida de cantidades en situaciones diversas, eligiendo la unidad apropiada para efectuar mediciones, y pasando por el uso de unidades no estándares antes del empleo de las unidades del Sistema Métrico Decimal (SMD).
- Dominar la estructura del SMD, incidiendo en las unidades de uso más frecuente y necesario, así como en las relaciones entre ellas.
- Utilizar instrumentos de medida diversos, con diferente grado de precisión, y leer adecuadamente las escalas.
- Utilizar estrategias adecuadas para estimar resultados de medidas en contextos familiares, acompañadas de explicaciones del proceso de estimación, y seguidas de la comprobación posterior a través de las mediciones correspondientes.
- No limitar el trabajo sobre medida a manipulaciones aritméticas, sino destacar la interpretación y comprensión de situaciones contextualizadas en las que intervienen cantidades de magnitud.

El desarrollo del sentido de la medida en los escolares está vinculado a lo expresado en las directrices anteriores, y supone un proceso complejo que se inicia con la percepción y comparación de cualidades medibles y se completa con técnicas de medición y estrategias de estimación en situaciones contextualizadas y significativas para los escolares (Moreno, Gil y Montoro, 2015). No obstante, en el caso de la magnitud superficie, en los libros de texto de primaria, este proceso se reduce al recuento de unidades no estándares ya iteradas en algunas figuras, la presentación de las unidades de superficie del SMD, las conversiones entre ellas y el uso de las fórmulas del rectángulo, de algunos polígonos y del círculo de forma descontextualizada. Según Castro, Segovia y Flores (1996), se pierde así la oportunidad de desarrollar el sentido de la medida de la magnitud superficie en los escolares. El principio multiplicativo, que permite comprender las unidades del SMD para esta magnitud, así como las relaciones entre ellas, subyace a este desarrollo. De esta forma, la medida de la superficie constituye un potente modelo para el principio multiplicativo, que posibilita a los escolares enfrentar y superar dificultades inherentes a este.

El trabajo que presentamos forma parte de un experimento de enseñanza llevado a cabo con un grupo de alumnos de 4º de Educación Primaria. El objetivo general de dicho experimento es explorar las potencialidades y dificultades que se presentan al implementar una secuencia didáctica encaminada a desarrollar el sentido de la medida de la magnitud superficie en los escolares. En lo que sigue, expondremos los fundamentos de la propuesta didáctica, la metodología del experimento llevado a cabo y un avance de los resultados obtenidos en el primer ciclo de dicho experimento, junto con las conclusiones que podemos derivar de ellos.

2. Fundamentación

Según Segovia, Castro, Molina y Castillo (2015), el sentido de la medida está caracterizado por el conjunto de capacidades que permiten al sujeto utilizar medidas de forma desenvuelta y adecuada. Sin embargo, en el caso de la magnitud superficie, se da tanta importancia a la fórmula del cálculo del área del rectángulo en la enseñanza obligatoria que hace que se pierda el contacto con elementos clave en la construcción del sentido de esta magnitud, al centrarse en el cálculo de áreas de figuras geométricas básicas a partir de longitudes. Segovia, Castro y Flores (1996) señalan que la reducción del cálculo de áreas en la enseñanza al manejo de la fórmula puede justificar la poca significación que tienen para los estudiantes las unidades de superficie. Esta observación es corroborada por Barret, Clements y Miller (2011), quienes afirman que las concepciones de los estudiantes sobre las unidades de superficie raramente son adecuadas. Aunque estos usen las unidades como etiquetas de cantidades en la resolución de tareas, a menudo lo hacen sin atribuirles un significado apropiado.

Basándose en trabajos precedentes, Barret, Clements y Miller (2011) afirman que centrase en la comprensión de las unidades de medida de superficie es una vía productiva para promover un desarrollo del sentido de la medida de la magnitud superficie en los escolares. En efecto, dicha comprensión implica otros aspectos fundamentales, recogidos por Segovia et al. (2015), como son:

- Reconocer la superficie como un atributo medible de los objetos.
- Comparar cantidades de superficie.
- Conocer y usar las unidades de medida (estándares y no estándares).
- Iterar (superponer sin solaparse ni dejar huecos) unidades en la cantidad de superficie que se quiere medir y realizar el conteo de dichas unidades.
- Cambiar de unidades.
- Manejar diferentes instrumentos de medida.
- Reconocer el carácter aproximado de las medidas en la realidad y realizar aproximaciones adecuadas.
- Realizar estimaciones.

A partir de las consideraciones anteriores, hemos diseñado una secuencia didáctica que parte del reconocimiento de la magnitud superficie en contexto y trata de llevar a los escolares a la comprensión de sus principales unidades de medida y de las relaciones entre ellas. Para ello, hacemos uso de la iteración de unidades y de la inducción del principio multiplicativo cuando no hay suficientes unidades para realizar recubrimientos. El principio multiplicativo es clave para entender las unidades estándares de superficie, puesto que estas son derivadas de las unidades de longitud. Ahora bien, es conocido que "la transición entre el pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo es uno de los principales escollos en el aprendizaje de las matemáticas escolares en los últimos cursos de primaria y primeros de secundaria" (Castro y Castro-Rodríguez, 2010, p. 31). Así, es de esperar que escolares de segundo ciclo de primaria no tengan aún plenamente desarrollado el pensamiento multiplicativo y recurran a modelos intuitivos que, de acuerdo con Bosch (2012), ponen en juego en las primeras etapas y mantienen incluso después del aprendizaje formal de las operaciones aritméticas.

Por otro lado, la estimación, tanto de respuesta directa como comparativa, ocupa un lugar central en nuestra propuesta didáctica, ya que coincidimos con Segovia y Castro (2009), Segovia y De Castro (2013) y Segovia et al. (2015) en que esta incluye el resto de capacidades relativas a la medida, lo que la convierte en un elemento crucial para el desarrollo y la evaluación del sentido de la medida. A este respecto, Rico, Flores y Ruíz-Hidalgo (2015) reafirman el papel clave de la estimación, al posibilitar que los sujetos pongan en práctica su sentido de la medida en procesos de aplicación reflexiva y coherente de estrategias de medida cuando se enfrentan a situaciones problemáticas. En este estudio, centramos la atención en la estimación en el cálculo y la medida de cantidades en relación a la magnitud continua superficie y, consecuentemente, a la magnitud longitud cuando la magnitud superficie es considerada como una magnitud derivada de ella.

3. Objetivo y preguntas de investigación

Nuestro interés en este trabajo radica en explorar modos de ayudar a los escolares a:

- Construir un conocimiento práctico y conceptual sobre la magnitud superficie y las formas de cuantificarla, a través del uso de las principales unidades de medida (estándares y no estándares).
- Usar este conocimiento de forma activa en situaciones contextualizadas que les resulten familiares y de interés.

Con tal fin, diseñamos una secuencia didáctica basada en los supuestos explicitados en el apartado anterior, cuya implementación nos permita avanzar algunas respuestas a los siguientes interrogantes:

- ¿Cómo interviene el principio multiplicativo en el recuento de unidades y en la comprensión de la relación entre unidades de superficie? ¿Qué dificultades encuentran los escolares al tratar de aplicarlo?
- ¿Qué influencia tiene el hecho de que las situaciones sean contextualizadas?
- ¿Qué papel juega la estimación en este proceso?
- ¿Qué papel juega la interacción social en el desarrollo del sentido de la medida en los escolares?

4. Metodología

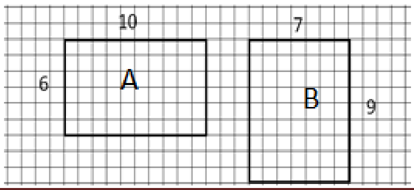
Este trabajo es parte de un experimento de enseñanza, llevado a cabo bajo el paradigma de la Investigación de Diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Siguiendo este paradigma, en el diseño se han tenido en cuenta las necesidades, intereses y potencialidades del alumnado, especialmente el hecho de que los escolares deben aprender matemáticas utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de su vida diaria.

Dado que las investigaciones de diseño se producen en contextos naturales (Barab, 2006), los sujetos que participan lo hacen durante el desarrollo normal de la clase de matemáticas. En nuestro caso, se trata de una clase de 4º de Educación Primaria de un colegio público de la provincia de Almería. Los alumnos son 24 escolares (10 niñas y 14 niños), que habitualmente trabajan con una metodología de aprendizaje basado en proyectos de forma colaborativa. En esta investigación, los tres autores del artículo actúan en distintos momentos como docentes-investigadores de forma coordinada. La tabla 1 sintetiza la secuencia didáctica diseñada, los principales objetivos de cada una de las sesiones que la integran y la temporalización. De las seis sesiones, de 45 minutos cada una, cuatro tienen formato de Rincón-Taller. En estas sesiones, seis equipos de cuatro escolares realizan las tareas propuestas. Siguiendo la metodología colaborativa habitual en el aula, los equipos varían de integrantes para cada sesión. Cada equipo es acompañado de una docente e investigadora, que lleva a cabo una atención individualizada, adaptada a las necesidades particulares del grupo y, a su vez, toma datos observacionales y graba en vídeo la realización del taller o rincón de trabajo. Adoptando la propuesta de Gómez y Romero (2015), a lo largo de cada una de las sesiones de trabajo con los distintos grupos, fijamos el foco de interés en las previsiones de aprendizaje, tanto en la planificación de la experiencia como en el análisis. El contenido de los talleres, junto con las previsiones realizadas se muestra en los apéndices. En las dos sesiones restantes de la secuencia, hay una sesión intermedia en la que una de las docentes e investigadoras imparte una clase sobre el metro cuadrado, con el fin de unificar conocimientos y sentar las bases de las sesiones siguientes. La última sesión tiene formato de prueba final y su finalidad es que los escolares pongan en juego los conocimientos adquiridos en una tarea abierta de comparación de superficies (apéndice 7). La tarea es resuelta en primer lugar de forma individual y luego de forma colaborativa, en equipos de 4 o 5 escolares, sin intervención de las docentes-investigadoras.

Tabla 1. *Secuencia didáctica del taller*

Tópico y formato de sesión	*Objetivos*	*Fechas*
Sesión 1. Publicidad navideña (Rincón-taller) 	-Estimación comparativa de superficies -Recubrimiento de superficies con unidades no estándares (tarjetas rectangulares) -Inducción del principio multiplicativo	14, 15, 17 noviembre
Sesión 2. Unidades estándares de superficie (Rincón-taller) 	-Comprensión de la relación entre el dm^2 y el cm^2 -Manejo del cm^2: diseño de formas con un área dada (no necesariamente rectangulares) -Introducción al m^2	21, 22 Y 24 noviembre
Sesión 3. Medida de la superficie del huerto escolar (Rincón-taller) 	-Trazado de un croquis de la superficie del huerto escolar. -Dibujo a escala del huerto (1m en la realidad es 1 cm en el papel milimetrado) -Diseño de parterres para el huerto	1, 12, 13, 15, 19, 20 y 22 diciembre
Sesión 4. El m^2 en el contexto del aula (Clase) 	-Estimación de la superficie de 1 m^2 -Relación entre el dm^2 y el m^2 (aplicación del principio multiplicativo) -Búsqueda de superficies que midan aproximadamente 1 m^2 en el aula (no necesariamente cuadradas) -Estimación de la superficie de una mesa en m^2 -Medida de la superficie de la mesa	24 febrero
Sesión 5. Comparativa de rectángulos en la realidad (Rincón-taller) 	-Comparativa de la superficie de dos rectángulos (de 6×2 m y de 3×4 m) en el gimnasio del colegio	11 y 18 mayo
Sesión 6. Comparativa de rectángulos en el papel	-Comparativa de la superficie de dos	16 junio

Tabla 1. *Secuencia didáctica del taller*

<table>
<tr><th>Tópico y formato de sesión</th><th>Objetivos</th><th>Fechas</th></tr>
<tr><td>(Prueba final)

</td><td>rectángulos (de 6×10 cuadrados y 7×9 cuadrados) en el papel</td><td></td></tr>
</table>

5. Análisis

Presentamos un análisis preliminar del primer ciclo de este experimento de enseñanza, realizado a partir de la visualización de las grabaciones en video y de las notas observacionales recogidas por varios docentes-investigadores. Exponemos una serie de episodios, extraídos de las distintas sesiones, en donde damos cuenta de aspectos significativos en relación con las preguntas de investigación planteadas. Dado que los escolares cambiaban de equipo para cada actividad, no hemos seguido el rastro de niños concretos, sino de las ideas surgidas en el seno de la clase.

5.1. Sesión 1

En esta sesión, con formato de rincón-taller, se aprovechó el trabajo sobre el tópico de la Navidad para realizar un trabajo que tiene dos focos de interés: el primero sobre la estimación comparativa de superficies y el segundo sobre las unidades no estándares, su iteración y recuento. Puesto que se trata del primer contacto en el contexto escolar con la noción de superficie, la docente-investigadora indaga sobre las concepciones iniciales acerca de esta magnitud.

5.1.1. Noción de superficie

Los siguientes extractos[1] dan cuenta de las respuestas de algunos escolares en torno a su percepción de la superficie. Así, podemos notar en el extracto 1, cómo los escolares, a partir de sus primeras ideas y con la ayuda de la docente-investigadora, son capaces de diferenciar la magnitud superficie de las magnitudes longitud y volumen. También pueden identificar la superficie de objetos reales, prácticamente todos rectangulares; en esta ocasión, podría haberse aprovechado la oportunidad para llamar su atención sobre superficies no rectangulares, como la piel de las frutas.

Extracto 1

Doc-inv:	¿Qué pensáis vosotros de superficie? ¿Qué concepto tenéis vosotros de superficie?
Niño 1:	El agua, lo del agua.
Niño 2:	La superficie del agua.
Niño 1:	Yo soy un pez, y quiero ir a la superficie a mirar.
Doc-inv:	¿Qué pensáis que es la superficie?
Niña 1:	Esto [señalando la superficie del tablero de la mesa].
Niña 1:	Mira, la superficie de una mesa.
Doc-inv:	La superficie de una mesa, ¿cuál es? ¿La podrías señalar?
Niña 1:	Mira, es todo plano [pasa las manos sobre la mesa].
Doc-inv:	¿Y la pizarra, tiene superficie?
Niños:	También, también.
Doc-inv:	¿Tiene una superficie grande o pequeña?
Niña 1:	Grande.
Niño 2:	¿Y la pared?
Doc-inv:	¿La pared tiene superficie?
Niños:	Sí, sííí...

[1] Para cada extracto de las sesiones, identificamos a los escolares por niño/a y al docente-investigador por doc-inv.

Niño 1: Mira, todo esto [señalando toda la pared con los brazos abiertos].
Niño 3: La goma tiene una superficie.
Doc-inv: ¿Cuántas superficies tiene la goma?
Niña 1: Cuatro.
Doc-inv: ¿Tú, ahora mismo, le ves cuatro?
Niño 2: No, cinco, seis…
Niño 1: Cuatro, son cuatro, una, dos, tres y cuatro.
Niño 2: No, mira,… una, dos, tres, cuatro, cinco y seis.
Doc-inv: ¿Una superficie cuántas dimensiones tiene?
Niño 2: Una.
Doc-inv: ¿Una? ¿Esta? [Señalando el largo del tablero de la mesa].
Niño 2: ¿Dos?
Doc-inv: ¿Y esta? [Señalando el ancho de la mesa].
Niño 1: Aahhh, vale.
Doc-inv: Una sería solamente así [señalando el largo].
Niño 2: Ah, ¡son dos!
Doc-inv: Tiene largo y…
Niño 2: Ancho.
Niño 1: Largo y ancho.
Doc-inv: ¿Y profundo, tiene? ¿Así? [Señalando el grueso del tablero de la mesa].
Doc-inv: No.

5.1.2. Primera aproximación a la estimación comparativa de superficies

La estimación de medidas se basa en la habilidad perceptiva de estimar la cantidad. La primera actividad del taller de publicidad navideña pide a los escolares que ordenen los tres anuncios publicitarios de la figura 1, solo a través de la estimación visual. Ante este requerimiento, los escolares piensan que el anuncio con forma de cuadrado es el que mayor superficie posee. Esta creencia no es superada hasta que la comprueban a través de la técnica de romper-rehacer.

Figura 1. Taller de publicidad navideña: los tres carteles

En la estimación visual, los escolares activan el reconocimiento de la cualidad y privilegian las formas regulares frente a las irregulares, por el mero hecho de ser regulares. No obstante, ante la necesidad de comprobar una ordenación, y dado que pueden manipular los anuncios, los escolares establecen distintas estrategias que inicialmente están basadas en la comparación visual. Pronto surgen discrepancias, al hacerse patente que dichas comprobaciones pueden llevar a confusión. En el extracto 2 se refleja cómo, aunque los escolares habían reconocido previamente la magnitud, la estimación realizada está basada en la medida de longitud (ancho), y no en la medida de superficie. Además, se observa como la niña 1, pone en juego un modelo intuitivo de comparación: la superposición de superficies (aunque solo esté comparando la medida de longitud "ancho").

Extracto 2
Niño 2: Mirad, mirad, es por más gordo. Así que este es menos largo que este [señala primero el ancho del anuncio situado en medio, para luego referirse al ancho del anuncio rectangular exterior].
Niña 1: Claro, este es más gordo [señalando al anuncio rectangular exterior].
Niña 2: ¡Este es más chico! [confirmando la propuesta de la niña 1].
Niño 2: ¡Ah! ¡Sí, es más largo que este! [señala el anuncio cuadrado para a continuación superponer los anuncios rectangulares].
Niña 1: Ellos dicen que así, y yo digo que así [sitúa el anuncio rojo al final].

Doc-inv: ¿Cómo podríamos comprobar que ordenación es la adecuada?
Niña 1: Porque esta es más gorda, ¡porque mira![Dobla el anuncio cuadrado y lo superpone sobre el anuncio verde mientras los demás observan].

Figura 2. Alumnos realizando la estrategia de superposición

La estrategia de superposición pronto se muestra insuficiente para ordenar los anuncios (según los sitúen, parte de la superficie de estos sobresale y otros no). Entonces, los escolares deciden recortar las partes sobrantes, como se observa en la figura 3, y tomando como referente el anuncio del cuadrado (que recordemos había sido elegido en el inicio de la actividad como el de mayor superficie), lo van recubriendo.

Figura 3. Alumnos realizando el taller de publicidad navideña

Durante el proceso de cortar y superponer, detectan cómo el anuncio rectangular cubre completamente al anuncio cuadrado y aún les sobra alguna parte sin recortar, lo que les hace reconocer que dicho anuncio tiene mayor superficie. Aquí aparece por primera vez la estrategia de romper-rehacer, estrategia que es invariante respecto de la magnitud superficie.

5.1.3. Unidades no estándares, embaldosado y principio multiplicativo

La siguiente situación se corresponde con la actividad del diseño de un cartel de navidad (apéndice 2) de tamaño A4 (21x27,9cm). Los escolares deben colocar adecuadamente 16 tarjetas-anuncios de un producto navideño de tamaño de 5x7cm. Al inicio, completan el lado menor del cartel (21cm) con 3 tarjetas (7cm). Esta disposición provoca que sobre una de las tarjetas anunciadoras. Entonces, los escolares deciden cambiar la orientación de las tarjetas, apoyándolas ahora sobre el lado menor (5cm) y el lado menor del cartel. Esta configuración les permite situar todas las tarjetas, como se aprecia en la figura 4.

Figura 4. Taller de publicidad navideña, cartel de productos

A continuación, y sobre la misma superficie (cartel A4), se les entregan 16 tarjetas, esta vez de 2,5x3,5cm, insuficientes para cubrir el cartel. Se le informa de que cada tarjeta ahora mide la mitad de ancho y de largo que las anteriores. En el extracto 3 se refleja un acercamiento natural al modelo intuitivo de la medida de superficie, en el que están presentes al menos 4 de las 8 componentes que según Lehrer (2003), citado en Segovia et al. (2015), deben abordarse para el desarrollo del sentido de la medida: (a) relaciones unidad-atributo, (b) iteración de la unidad, (c) teselación de la cantidad mediante la unidad, (d) conteo de unidades idénticas. Al no disponer de unidades suficientes, los escolares ponen en juego un incipiente pensamiento multiplicativo, aplicado a la medida de la superficie.

Extracto 3

Niño 2: Sí [empieza a colocar siguiendo uno de los bordes], ¡treinta y dos!

Niña 1: Una, dos, …, cuatro, cuatro, dieciséis filas [A continuación, el niño 1 cuenta por bloques las filas realizando una estimación visual con referente auxiliar presente, nótese como sitúa las manos en las imágenes].

Doc-inv: ¿Dieciséis filas?

Niña 1: ¡Anda!, dieciséis filas, uno, dos, tres filas.

Niño 1: Uno, dos [cuenta el espacio que ocuparía utilizando como referente presente el ancho de la mano con los dedos].

Niño 2: ¡Cuatro!

Niña 1: Cuatro [vuelve a contar simulando el largo con sus dedos]…, uno, dos, tres, …, dieciséis. Dieciséis por cuatro: sesenta y cuatro.

5.2. Sesión 2

La sesión 2 tiene por objeto que los escolares se familiaricen con las unidades estándares de pequeño tamaño, con su significado y con la relación entre ellas, retomando el principio multiplicativo utilizado en la sesión anterior. También se pretende que los escolares apliquen la recién adquirida noción de centímetro cuadrado para dibujar en el papel milimetrado superficies no rectangulares de un área dada. Los siguientes extractos ilustran cómo se llevó a cabo la sesión, la cual no tuvo mucha dificultad para los equipos.

5.2.1. Relación entre unidades estándares: principio multiplicativo

En el inicio de la actividad, cuando la docente-investigadora explica el significado gráfico de las unidades dm^2 y cm^2 en el papel milimetrado y pregunta por la relación entre ellas, hay escolares que comienzan contando los centímetros cuadrados que hay en el decímetro cuadrado uno a uno. Ante la llamada de atención de la docente-investigadora, otros escolares aplican el principio multiplicativo. Algunos lo hacen incluso espontáneamente para medir la superficie de todo el papel milimetrado, como puede verse en la segunda parte del extracto 4. En dicho extracto se refleja la diferencia de ritmos de asimilación del principio multiplicativo por parte de los escolares y de su capacidad de aplicarlo a situaciones concretas.

Extracto 4

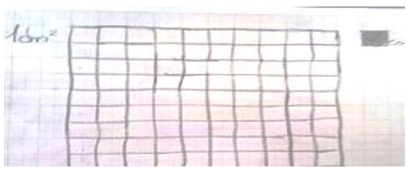
Doc-inv: ¿Cuántos cm^2 hay dentro de un dm^2?

Niño 1: [Se pone a contarlos uno a uno].

Doc-inv: ¿Los vas a contar todos?

Niño 2: Diez por diez.

Doc-inv: Y diez por diez, ¿cuántos son?



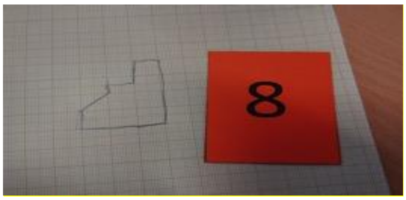
Niño 2: Cien.
Doc-inv: Entonces, un dm^2 tiene cien cm^2 dentro, ¿a que sí? ¡Muy bien!
Niño 1: Es que esto son todos diez [señalando las filas dentro del dm^2].
Doc-inv: Un decímetro cuadrado es un cuadrado de diez centímetros por cada lado [lo dibuja en papel milimetrado].
Doc-inv: Ahora una pregunta, una pregunta...
Niño 1: Yo sé cuánto hay en total, en todo el folio [de papel milimetrado].
Doc-inv: ¿Tú ya lo has calculado? ¿Cuántos hay?
Niño 1: No, digo que aquí hay veintinueve, y aquí diecinueve [señalando el largo y el ancho del folio].
Doc-inv: Entonces... ¿Cuántos centímetros cuadrados tendríamos?
Niño 1: Veintinueve, y aquí diecinueve.
Doc-inv: ¿Y qué operación habría que hacer con esos números?
Niño 1: Veintinueve por diecinueve.
Doc-inv: Vale, ¿y en este decímetro cuadrado? ¿Cuántos centímetros cuadrados hay aquí dentro?
Niños: [silencio].
Doc-inv: ¿Cuántos centímetros cuadrados tiene un decímetro cuadrado?
Niños: [silencio].
Doc-inv: Es fácil.
Niño 2: Diez por diez.

5.2.2. Dibujar superficies de área dada

Los escolares, en general, disfrutaron ideando y dibujando superficies de formas no rectangulares, y partiendo los centímetros cuadrados de diversas formas para no dibujarlas todas a base de cuadrados, como muestra el extracto 5. De este modo, avanzaron en su comprensión de la medida de superficies no poligonales con unidades estándares (centímetros cuadrados) y en el significado de dichas unidades.

Extracto 5

Doc-inv: Ahora tenéis que dibujar superficies en vuestro papel milimetrado, que tengan el número de centímetros cuadrados que os salga en la tarjeta. Las podéis hacer con centímetros cuadrados enteros, con medios, como queráis... [Los niños escogen tarjetas y van dibujando superficies].
Niña 1: Ya está.
Doc-inv: ¿A ti te ha salido el ocho? A ver, vamos a contarlos. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete... Aquí tienes un medio ¡Ay, qué bonita! y aquí otro medio rectangular. Efectivamente, tiene ocho cm^2.



5.3. Sesión 3

La sesión 3 se ubica en el contexto de la medida de la superficie del huerto escolar (apéndice 4). La forma del huerto es un trapecio rectangular como se muestra en la figura 5. No obstante, una vez medidas las longitudes de los lados, se instó a los escolares a considerar una forma rectangular para el cálculo de la superficie del huerto, recortando el triángulo como se indica en la figura.

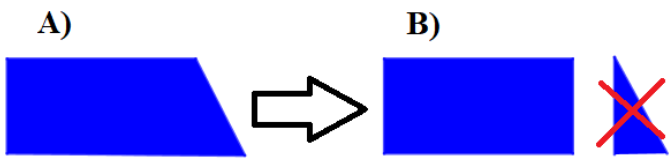


Figura 5. Forma del huerto

5.3.1. Uso de instrumentos en medidas reales y del principio multiplicativo

En el extracto 6, se observa cómo los escolares, al enfrentarse con medidas reales y lectura de instrumentos tienen varias dificultades relacionadas con la interpretación de la escala. No obstante, su sentido de la medida y su capacidad de estimar, les permite redondear adecuadamente y aclararse sobre las unidades apropiadas para las dimensiones lineales. Por otra parte, el equipo realiza el cálculo del área del rectángulo a través de la multiplicación de los lados del rectángulo (pensamiento multiplicativo). Aunque todavía incurren en el error de utilizar unidades lineales a la hora de expresar el resultado, reaccionan adecuadamente cuando la docente-investigadora les llama la atención sobre el hecho.

Extracto 6

Niño 1: Es diecisiete, porque le he sumado estos [suma a la marca de los doce metros, los cinco cm en la cinta métrica restantes hasta el final de la piedra].

Niña 2: Son once metros con noventa centímetros [No considera la piedra e interpreta adecuadamente las marcas de la cinta métrica].

[El otro miembro del equipo tiene también similares dificultades midiendo el lado oblicuo]
[Una vez colocado el metro].

Niño 3: Cuatro y pico: cuatro y medio.
Niña 4: Cuatro centímetros.
Doc-inv: ¿Cuatro centímetros?
Niño 4: No espérate, cuatro y medio.
Doc-inv: ¿Cuatro y medio qué?
Niño 3: Metros.
Doc-inv: ¿Puedes señalarme tu medición? [El niño 3 señala la mitad de la piedra. Tras un intercambio de ideas, deciden no contar el borde y declarar que la medida es cuatro metros con cuarenta centímetros].

[Anotan las medidas, escriben 11’92 m, aunque dicen centímetros. Luego tachan “M”, la sitúan tras el 11 y anotan detrás 92cm].

Niño 1: El lado sur sería casi doce mientras que el lado norte sería once más o menos.

[El equipo dibuja el huerto].

Doc-inv: ¿Podéis calcular entonces la superficie? Considerad solo el rectángulo. [Los escolares dicen con cierta rapidez 11,10 por 4,40, y proceden a calcular la operación con la calculadora] [El dato 11,10 proviene de considerar la longitud del lado menor del trapecio inicial, al trabajar con un rectángulo, como sugiere la docente-investigadora (Figura 4)].

Niño 3: Cuarenta y ocho con ochenta y cuatro.
Doc-inv: ¿Cuarenta y ocho con ochenta y cuatro qué?
Niño 1: ¿Eh?,... metros.
Doc-inv: ¿Metros? ¿Igual que esto? [Señala un lado].
Niño 1: De superficie.
Niño 3: Metros cuadrados.

5.4. Sesión 4

La sesión 4 corresponde a una clase impartida por una de las docentes-investigadoras, dedicada al metro cuadrado. Puesto que habían transcurrido dos meses desde la sesión anterior, se vio oportuno comenzar pidiendo a los escolares que estimaran la superficie de un metro cuadrado de papel, colocado en la pizarra. Las respuestas de los equipos de trabajo pueden verse en la columna izquierda de tabla de la figura 6. En la segunda columna de la tabla, se muestran las respuestas de los equipos a la pregunta "¿Cuántos decímetros cuadrados caben en un metro cuadrado?" Como puede verse, a excepción del equipo 4 (y del equipo 5, que expresó la solución en unidades lineales en la segunda columna), todos los equipos dieron respuestas correctas, en distintas unidades. Es importante advertir que no todos los escolares daban respuestas adecuadas inicialmente, sin embargo, las discusiones en grupo les permitieron reconocerlas cuando alguno de los miembros planteaba la opción correcta y la argumentaba a los demás.

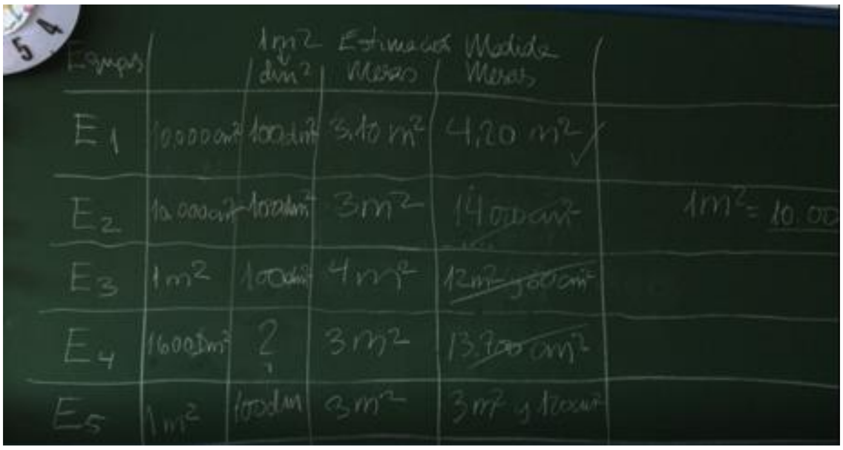


Figura 6. Respuestas de los equipos a las tareas de la sesión 4

A continuación, se pidió a los escolares que buscaran en la clase objetos cuya superficie fuera aproximadamente $1m^2$, cosa que hicieron de buen grado. Al principio, buscaban objetos con forma cuadrada. Una vez advertidos por las docentes-investigadoras de buscar otras posibilidades, pronto comenzaron a encontrarlas y a comprobar sus estimaciones mediante transformaciones de romper y rehacer, como lo muestra la figura 7.

Figura 7. Búsqueda de supuerficies en el aula de $1m^2$

Para finalizar la sesión, se pidió a los escolares que averiguaran la medida de dos mesas grandes que habían formado en el aula uniendo sus pupitres, tal como se evidencia en la figura 8. En un primer momento, se pidió que estimaran la superficie y luego que la midieran. En las columnas tercera y cuarta de la tabla de la figura 6, pueden verse los resultados, tanto de las estimaciones (que hicieron tomando como referente el metro cuadrado de papel), como las medidas de la superficie de la mesa, calculadas en la mayoría de los casos midiendo los lados de la mesa con cintas métricas. Las estimaciones realizadas previamente permitieron a la docente-investigadora descartar algunos resultados de las mediciones, argumentando el motivo a los escolares. Los fallos cometidos por estos se debieron en gran medida a la dificultad para interpretar las escalas y para realizar operaciones con los números decimales obtenidos.

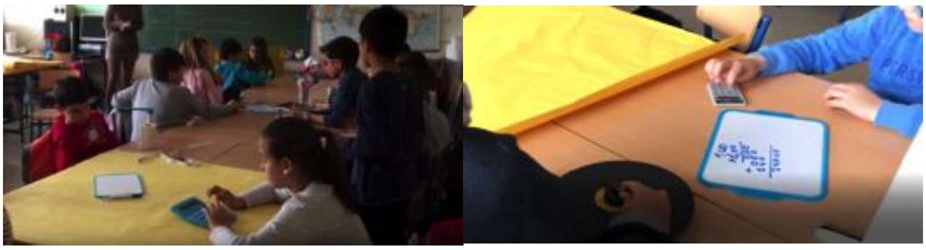


Figura 8. Cálculo de la superficie de la mesa formada por unión de los pupítres

5.5. Sesión 5

La siguiente sesión corresponde con una actividad de comparación de dos rectángulos, de 6x2m (rectángulo A) y de 3x4m (rectángulo B), marcados en el gimnasio del colegio (apéndice 6). En ella, se solicita a los equipos de escolares que se pongan de acuerdo en cuál de los rectángulos tiene mayor superficie y que justifiquen su respuesta. Al comienzo, se les pide que den una estimación comparativa y, a continuación, que comprueben el juicio emitido. Para la comprobación disponen de un metro enrollable y de papeles de 1m^2 de superficie (no suficientes para recubrir un rectángulo). A continuación, mostramos extractos de las estrategias llevadas a cabo por distintos equipos, así como de algunas dificultades que los escolares tuvieron que enfrentar y de errores en que incurrieron.

5.5.1. Estimación comparativa de superficies

En principio, al igual que ocurrió con las tarjetas navideñas, varios escolares se muestran inclinados a pensar que el rectángulo más "proporcionado" (cuya forma es más próxima a la del cuadrado) es el que tiene mayor superficie. Luego intentan comparar las dimensiones lineales, para ver en qué medida se compensan. Incluso llegan a fijarse, en una aproximación más analítica, en la proporción mitad-doble de los lados de ambos rectángulos, como puede verse en el extracto 7.

Extracto 7

Niños: El B, el B. ¡El B!
Doc-inv: ¿Todo el mundo piensa que el B?
Niños: Sí.
Doc-inv: ¿Por qué?
Niño 1: Porque este es más estrecho [rectángulo A]. En cambio este es más ancho y por el otro lado también (señala, abriendo los brazos, las dos dimensiones del rectángulo B), así que este.
Niño 2: Porque este lado, aunque sea más largo, el otro es más "metido pá dentro", vamos, que tiene poco espacio [estrecha la longitud con sus manos, señalando el lado corto del rectángulo A], en cambio el A tiene casi el mismo espacio por los dos lados.
Doc-inv: ¿Habéis decidido cómo grupo?
Niño 3: Si, por que este es más ancho.
Niña 1: ¡Que te he dicho que no es más ancho! ¡A lo mejor este es más largo y este más ancho, pero eso no importa!
Niño 1: Yo creo que los dos serían más o menos iguales.
Doc-inv: ¿Por qué?

Niño 2: ¡Y Yo! Porque este a lo mejor es más largo [señalando rectángulo A], pero este [señalando rectángulo B] de pequeño es la mitad. Este aquí es igual que aquí [se sitúa sobre el lado para tener una visión más amplia de la amplitud del rectángulo B]. Yo creo que son los dos, porque este trozo es la mitad de este.

A continuación, se pide a los equipos que se aseguren de su respuesta, pudiendo ayudarse del metro enrollable y de los papeles de un metro cuadrado de superficie.

5.5.2. Errores en aplicación de instrumentos y lectura de escalas

En general, los escolares tienden a utilizar el metro enrollable en primera instancia para medir las longitudes de los lados de ambos rectángulos. Al hacerlo, incurren en errores, por una parte, de procedimiento (considerar los bordes del rectángulo a veces por el interior y otras por el exterior de la cinta que los delimita, incorrecta situación del origen de la cinta métrica, no tener en cuenta dobleces en esta, …). Por otra parte, vuelven a surgir diversas dificultades con la lectura de escalas, como se pone de manifiesto en el extracto 8.

Extracto 8

Niño 1: Ten de ahí.

Niña 1: ¡Uno con veinte! Mira. Ven, ven para acá [En la cinta métrica, la niña 1 tiene delante la marca de los 6 metros, diez centímetros y dos milímetros].

Niño 1: ¡Un metro y, …! [Señala la marca de los primeros 10cm de la cinta métrica].

Niña 1: A ver… Pero, ¿cómo va a ser un metro ese trocito?

Niña 2: ¿Esto va a ser un metro, R?

Niño 1: No. Un metro es de donde tú estabas hasta aquí [Su compañera estaba al otro extremo del lado de 2m del rectángulo A]. Y, luego, esto son …

Niña 2: ¡Que nooo!

Niña 1: Dos metros y cuatro.

Niña 2: ¡Dos metros treinta!

Niña 1: ¿Dos metros treinta?

Niña 2: Pero esto dice que son dos metros [Señala la marca de 20 cm].

Doc-inv: ¿Tú crees que eso son dos metros?

Niña 1 No eso son dos centímetros.

Niño 1: ¿Dos centímetros?

Niña 2: Dos centímetros, Tres centímetros, … [señalando las marcas de 20, 30, 40 del metro],…, aquí está el metro [hace un salto, y lo señala].

Niño 1: Dos metros.

Niño 1: ¡Dos metros y treinta! [En realidad, son dos metros y tres centímetros].

Niño 3: ¡Y seis cincuenta! [En lugar de seis metros y cinco centímetros].

5.5.3. Confusión área-perímetro

Una vez obtenidas las medidas de los lados del rectángulo, un error habitual es el que se produce por la confusión área-perímetro y que se refleja en el extracto 9.

Extracto 9

Niño 1: ¡Son dieciséis con sesenta! ¡Dieciséis con sesenta!
Niña 1: ¿Cómo van a ser dieciséis con sesenta?
Niño 1: A ver, hay dos partes de seis con cincuenta y dos partes de dos con tres.
Niño 2: No hay una de seis con cincuenta y otra de dos con treinta. Así que después hay que sumar ocho con ochenta más ochenta [Se equivoca al decirlo].
Niña 1: Pero ¿cómo podemos sumar dos cosas?... ¡Habría que multiplicar! Porque sumar no se puede, no se puede sumar dos cosas que son diferentes, tienen que ser iguales. ¡Nos lo explicaron en segundo!
Niño 1: Ocho con ochenta es lo que nos ha salido con las dos cosas juntas, ¡pero aquí hay cuatro partes! ¡No dos! [Calcula correctamente el perímetro del rectángulo. Los demás miembros del equipo están confusos sobre si la operación que tiene que realizar es sumar o multiplicar. Finalmente, acaban centrándose en la complejidad de la suma con decimales y acaban aceptando el método propuesto por niño 1].

5.5.4. Aplicación correcta del principio multiplicativo y respaldo empírico

Otros escolares, en cambio, son capaces de aplicar el principio multiplicativo casi inmediatamente después de averiguar la medida de los lados de los rectángulos, si bien hay que insistir en la cuestión de las unidades de medida, como se refleja a continuación en el extracto 10.

Extracto 10

Niño 1: Doce, son doce.
Doc-inv: ¿Por qué dices que son doce?
Niño 1: Porque he multiplicado tres por cuatro.
Niño 2: El B no es doce metros.
Niño 1: Sí, porque hay que multiplicar el ancho por el largo.
Niño 2: Aquí dos metros [Señalando el lado corto del rectángulo A]. Entonces dos por seis.
Niño 2: Los dos iguales. Los dos son iguales.
Doc-inv: ¿Por qué los dos iguales?
Niño 1: Porque hemos multiplicado el largo por el ancho, y ahí nos sale doce y aquí también.
Doc-inv: ¿Doce qué?
Niño 2: Metros.
Niño 1: Metros cuadrados.

A continuación, la docente-investigadora indaga si los escolares son capaces de atribuir significado a la aplicación del principio multiplicativo para averiguar el área del rectángulo y a la unidad empleada en el resultado (como se aprecia en el extracto 11). En este extracto se pone de manifiesto, por un lado, como los escolares realizan una estimación visual con referente auxiliar presente, en la que valoran numéricamente la medida por medio de la iteración mental del metro cuadrado auxiliar. En la segunda parte, el niño 2 emplea, sin dudar, la fórmula para el cálculo del área, derivada de la actividad de iterar el referente auxiliar (el metro cuadrado) mentalmente. La utilización apropiada del principio multiplicativo refleja un sentido de la medida bastante desarrollado para un nivel de segundo ciclo de Primaria.

Extracto 11

Doc-inv: ¿Vosotros creéis que ahí caben doce metros cuadrados? ¿Qué quiere decir que el rectángulo mide doce metros cuadrados?
Niño 2: Pues lo podemos mirar [señalando a los metros cuadrados de papel. Como no tienen bastantes, una vez situados, los, cuentan y retiran dos iniciales para situarlos al final, sin perder dicha cuenta].
Niño 1: Doce, doce. Nueve, diez, once y doce [señalando los huecos].
Niño 2: Profe, profe: ¡Son doce!

Doc-inv: ¿Y aquí?
Niño 2: Vamos a mirarlo. [Colocan cuatro, momento en el que directamente dicen doce].
Doc-inv: ¿Por qué?
Niño 2: Porque tres por cuatro son doce. Porque tres por cuatro que nos ha dado antes… Son tres y cuatro filas [Las cuatro filas son visualizadas mentalmente, no llegan a ponerlas].

5.6. Sesión 6

Recogemos a continuación extractos de la grabación en vídeo de uno de los equipos trabajando sobre la comparación de la superficie de dos rectángulos en una hoja de papel (rectángulo A, de 10×6 cuadrados, y rectángulo B, de 7×9 cuadrados). La elección de este equipo viene motivada por la diversidad de estrategias que pusieron en juego durante la resolución de la tarea, así como por la calidad del trabajo colaborativo que realizaron.

5.6.1. Recuerdo de situación anterior y pensamiento aditivo

Al comienzo, los miembros del equipo se fueron turnando para exponer cómo cada uno había resuelto el problema individualmente. La variedad de posiciones iniciales, de distinto nivel de madurez, queda recogida en el extracto 12.

Extracto 12

Niña 1: [comienza leyendo la pregunta]. ¿Cuál de los dos rectángulos tiene mayor superficie? Lo que hicimos en el gimnasio fue que medimos, hicimos la superficie que tiene cada uno y los dos eran igual, doce folios en la A y doce folios en la B, entonces de superficie tienen lo mismo. Luego, como lo hemos averiguado, pues pensando lo que hicimos en el gimnasio, fui recordando y recordando…
Niño 1: Pero esos no son los cuadrados que había en el gimnasio.
Niña 1: Es verdad, no son, son distintos.
Niño 1: Mi idea fue que, como nos explicó la profesora, para saber cuál es la superficie, tenías que medir, lo ancho y lo largo. Y yo, esto de aquí era siete folios y nueve folios. Y entonces eso lo sumé, me salió dieciséis, y luego este me salió, diez folios y seis folios aquí, y entonces los sumé y me salió también dieciséis. Y pensé, que, eran iguales [No son folios, sino unidades cuadradas].
Niño 2: Hay una manera más rápida, mira aquí seis y diez. ¿Cuál de los dos rectángulos tiene mayor superficie? Yo puse ninguno, porque si os fijáis serían iguales. Aquí bajan un número y para recuperar ese número y que sean iguales, aquí le suman un número, como lo podéis ver… Y a la vez que he hecho eso, pues escribí que son iguales, solo que uno pone diez y seis, otro pone nueve y siete por que a uno se le baja y a otro se le sube [el niño 1 asiente con la cabeza, el niño 3 dice vale, la niña 1 no dice nada y la niña 2 parece no estar de acuerdo].
Niña 2: Pues yo he puesto que la B es más grande porque este es 7 por 9, que es más grande que 10 por 6. [Se quedan todos como callados, mirando a la niña 2]. ¿No sabéis? ¿No os habéis dado cuenta? [Voltea la hoja para que lo vean los compañeros].
Niño 1: Yo pienso que no me he dado cuenta.
Niño 2: Ni yo… Si pudiéramos recortar la B y recortar la A, la B la pondríamos mirando hacia la A o la A la pondríamos mirando para la B y sería un cuadrado iguales, ¿no? [la niña 2 mueve la cabeza indicando que no].
Niña 2: ¡No!

5.6.2. Uso de las estrategias de romper-rehacer y pensamiento multiplicativo

Justo a continuación, la docente-investigadora proporciona otra hoja con la tarea y unas tijeras para que el niño 1 y el niño 2 puedan llevar a cabo la estrategia sugerida por el último. Por su parte, la niña 2 procede a convencer a la niña 1 sobre la bondad de su respuesta, para ello, decide contar los cuadraditos uno a uno. En el extracto 13 se recogen parte de los diálogos que mantienen los escolares.

Extracto 13

Niño 2: Podemos saberlo recortando. Los ponemos en una superficie... que sean iguales..., y vemos si son iguales [y se dispone a cortar].
Niña 2: O contar cuadraditos.
Niño 2: Contar cuadraditos sería más difícil,... [Recortan y superponen].
Niña 1: Entonces el más grande es la B.
Niño 2: El más grande es B. Entonces el más grande es el B [suelta las tijeras].
Niña 1: ¿Te enseño un truco, M [niña 2]? Mira, cuentas estos de aquí y estos de aquí, y multiplicas esto de aquí por esto de aquí, y sabemos cuántos cuadraditos hay.
Niña 2: Pero, para asegurarse lo que hacemos, para asegurarse, lo que siempre hago yo es contarlos, por eso los dos te he dicho que eran diferentes.

5.6.3. Acuerdo sobre la solución definitiva y la mejor estrategia

Finalmente, los miembros del equipo se ponen de acuerdo sobre la respuesta que van a dar en conjunto, reconociendo cuál es la "mejor" estrategia.

Extracto 14
Niña 1: Entonces M [niña 2] lo ha hecho bien.
Niño 1: Entonces es mucho más rápida hacer la multiplicación que nos enseñó la profesora.
Niño 2: Entonces el de M [niña 2] es mejor.
Niña 1: La que, la que mejor lo ha explicado.
Niño 1: Lo ha explicado mejor que el nuestro.

En esta tarea final, los escolares ponen de manifiesto una serie de estrategias para comparar la superficie de los dos rectángulos, fruto de su aprovechamiento de las experiencias en las sesiones precedentes. Dichas estrategias van desde las aproximaciones más ingenuas, que consisten en asociar situaciones sin tener en cuenta sus especificidades, hasta aplicar el principio multiplicativo para resolver adecuadamente la tarea. Además, se muestran estrategias elementales, como las de comparación con un referente mediante composiciones de romper y rehacer, o erróneas, como la de aplicar razonamientos de compensación propios del pensamiento aditivo, que no son válidos cuando el principio multiplicativo es el que modela la situación (extractos 13 y 12, respectivamente). Es interesante notar que la misma niña 1 que propone la primera estrategia ingenua (extracto 12) es la que luego sugiere el principio multiplicativo para facilitar el conteo de unidades (extracto 13), lo que indica que los escolares asimilan experiencias que son capaces de usar en determinados momentos y no en otros, cuando las concepciones vinculadas a estas experiencias no están definitivamente asentadas. Por otra parte, la niña que sugiere al comienzo el principio multiplicativo (niña 2) necesita asegurarse, contando cuadraditos, de que este modela bien la situación. De nuevo, los escolares muestran que pueden reconocer y validar las respuestas correctas, en este caso la más sofisticada, cuando son propuestas por otros compañeros, como se mostró en el extracto anterior.

6. Conclusiones

Siguiendo la recomendación de Segovia, Castro y Flores (1996), para superar el escaso significado que los estudiantes de varios niveles atribuyen a la magnitud superficie y a sus unidades, hemos propuesto una secuencia didáctica en la que el paso de la comparación de superficies al cálculo del área mediante la fórmula se realiza de forma gradual. En el proceso, se trabajan diversos aspectos que refuerzan el sentido de la medida en los escolares, como son: la estimación comparativa y la comprobación de esta, la iteración de unidades estándares y no estándares, el uso del principio multiplicativo para realizar conteos, la atribución de significado a las principales unidades mediante representaciones gráficas y contextualizadas, y la elección de instrumentos para realizar mediciones.

Un análisis preliminar del material recogido en el primer ciclo de implementación de la secuencia diseñada nos permite avanzar respuestas parciales a las preguntas formuladas en este estudio.

Con relación a la incidencia del principio multiplicativo en el recuento de unidades de superficie, los extractos presentados muestran como estos escolares de 4º curso de primaria son capaces de inducir el principio multiplicativo en varias instancias. Sin embargo, no todos y no siempre son capaces de aplicarlo en situaciones que así lo requieren, como las de comparar rectángulos en distintos contextos. En estas ocasiones, pueden recurrir a estrategias visuales, de comparación parcial de dimensiones lineales, superposición y transformaciones de romper y rehacer, así como a razonamientos inadecuados propios del pensamiento aditivo. No obstante, varios escolares de este nivel se muestran capaces de entender y aplicar correctamente el principio multiplicativo, tanto con unidades no estándares, como para razonar adecuadamente las relaciones entre unidades estándares. Ellos sirven como referencia a sus compañeros para ir avanzando en la comprensión, ya que muchos de ellos reconocen y adoptan estrategias más adecuadas que las que inicialmente proponen individualmente, cuando vienen de parte de otros miembros del equipo. En este sentido, hemos observado como una interacción rica entre los escolares eleva el nivel de comprensión en el grupo clase, incluyendo alumnos con diferentes ritmos de aprendizaje que colaboran unos con otros en el desarrollo de su sentido de la medida.

Por otro lado, el hecho de que varias de las situaciones propuestas sean contextualizadas implica la toma de medidas en la realidad, con las dificultades que eso supone. En primer lugar, los escolares han de aprender a utilizar correctamente los instrumentos, pero el principal problema se plantea con la lectura de escalas, la interpretación de los números de la escala en relación a las unidades de medida y las operaciones aritméticas con decimales. En relación a este último aspecto, hemos observado que los escolares no están habituados al cálculo mental ni a la estimación en cálculo, menos aún con cifras decimales, lo cual dificulta enormemente la valoración de estrategias seguidas en el proceso de medir. Ello es así porque las operaciones con algoritmos tradicionales consumen sus esfuerzos y los dejan sin capacidad de valorar la plausibilidad de los resultados y, por ende, la adecuación de los procesos de medición que dan lugar a estos. En consecuencia, es fundamental desarrollar en los escolares el sentido numérico, respecto a la suma y a la multiplicación con números enteros y decimales. Según De Castro, Castro y Segovia (2014), hay necesidad de que los programas de enseñanza permitan a los alumnos calcular con fluidez, hacer estimaciones razonables y juzgar la razonabilidad de resultados obtenidos por otros medios de cálculo. La medida de la superficie puede constituir un modelo valioso en este sentido, por cuanto proporciona modos de contrastar los resultados de estimaciones numéricas a través de la estimación métrica. El trabajo con este último tipo de estimación no resulta difícil para los escolares, pero no se desarrolla de forma espontánea, sino a través del empleo de referentes, de unidades con significado y de la práctica reiterada.

A partir de estas primeras observaciones, esperamos seguir avanzando, en sucesivos ciclos de diseño, en nuestro conocimiento de cómo favorecer el sentido de la medida de la magnitud superficie en los escolares. Las sesiones diseñadas para este ciclo están disponibles en los apéndices, para que otros docentes e investigadores las consideren, perfeccionen, adapten a sus contextos particulares y generen nuevas evidencias que sirvan para enriquecer el conocimiento y las buenas prácticas en torno a este tópico.

Referencias

Barab, S. (2006). Design-based research: A methodological toolkit for the learning scientist. En R. Keith (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (Vol. 13, pp. 153-169). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Barret, J. E., Clements, D. H., y Miller, A. L. (2011). Children's unit concepts in measurement: a teaching experiment spanning grades 2 through 5. *ZDM. Mathematics Educations*, *43*, 637-650. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0368-8

Bosch, A. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *Edma 0-6: Educación Matemática en la infancia*, *1*(1), 15-37.

Castro, E. y Castro-Rodríguez, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *54*, 31-40.

Castro, E., Segovia, I. y Flores, P. (1996). El área del rectángulo. *Uno: Revista de Didáctica de la Matemática*, *10*, 63-78.

Consejería de Educación, Cultura y Deportes (2015a). Decreto 97/2015, de 3 de marzo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. *Boletín Oficial del la Junta de Andalucía*, 50, 11-22.

Consejería de Educación, Cultura y Deportes (2015b). Orden de 17 de marzo, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. *Boletín Oficial del la Junta de Andalucía*, 60, 9-142.

De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2014). Estimación en cálculo multiplicativo con números decimales. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(2), 171-190. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1018

Gómez, P. y Romero, I. M. (2015). Enseñarlas matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. (pp. 61-88). Madrid, España: Pirámide.

Ministerio de Educación, Cultura y Deportes (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, 19349-19420.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En Flores, P. y Rico, L. (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 147-168). Madrid, España: Pirámide.

Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 499-536.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid, España: Síntesis.

Segovia, I., Castro, E. y Flores, P. (1996). El área del rectángulo. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *10*, 63-77.

Segovia, I. y De Castro, C. (2013). La estimación y el sentido de la medida. En Rico, L. y otros (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática: Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 43-49). Granada, España: Comares.

Segovia, I., Castro, E., Molina, M. y Castillo, J. J. (2015). Evaluación del sentido de la medida. *Uno. Revista de Didáctica de la Matemática*, *70*, 21-30.

Rico, L., Flores, P., y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *Uno. Revista de Didáctica de la Matemática*, 70, 48-54.

Antonio Codina Sánchez. Profesor de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Almería. Licenciado en Matemáticas y Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada. Principales líneas de investigación: Pensamiento numérico y algebraico; Resolución de Problemas; Enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en entornos tecnológicos; formación de profesores.
Email: acodina@ual.es

Isabel Mª Romero Albaladejo. Profesora de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Almería. Licenciada en Matemáticas y Doctora en Matemáticas (programa de doctorado Didáctica de la Matemática) por la Universidad de Granada. Principales líneas de investigación: Aprendizaje Basado en Proyectos; Aspectos afectivos en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; Enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en entornos tecnológicos; Evaluación formativa.
Email: imromero@ual.es

Catalina Abellán Megías. Maestra de Educación Primaria. Graduada en Educación Primaria por la Universidad de Almería. Principales líneas de investigación: Enseñanza-aprendizaje de las Magnitudes; Geometría a través de materiales manipulativos; Proposición de Problemas.
Email: catiabellan@hotmail.com

Apéndice 1

ELEMENTOS COMUNES DE LOS RINCONES-TALLERES

CURSO AL QUE VAN DIRIGIDOS

4º de Educación Primaria (Segundo ciclo).
CEIP Clara Campoamor (Huércal de Almería).

AGRUPAMIENTOS

6 equipos de 4 niños y niñas.
El rincón-taller se realiza con un grupo distinto cada día de los previstos, hasta completar los 6 equipos (toda la clase).

TEMPORALIZACIÓN Y ESPACIOS

Duración: 6 sesiones de 45 minutos de duración.
Rincón-taller de publicidad navideña:
Fechas: 14, 15 y 17 de noviembre.
Lugar: Aula habitual de clase.
Rincón-taller de unidades estándares:
Fechas: 21, 22 y 24 de noviembre.
Lugar: Aula habitual de clase.
Rincón-taller del huerto:
Fechas: 1, 12, 13, 15, 19, 20 y 22 de diciembre.
Lugar: Huerto y aula habitual de clase.
Rincón-taller de comparativa de rectángulos:
Fechas: 31 de marzo y 5 de mayo de 2017 (tres grupos por día).
Lugar: Gimnasio.

RECURSOS MATERIALES DE LAS SESIONES

Tabla 1. Recursos materiales de las distintas sesiones

Publicidad navideña	Unidades estándares	Huerto
-3 anuncios navideños impresos, de magnitudes cercanas en superficie; 2 rectangulares de igual ancho y distinto largo, 1 cuadrada -1 cartulina verde-A4 -16 tarjetas de 7×5 cm., con imágenes de platos y bebidas para un menú navideño -16 tarjetas de 3,5×2,5 cm -5 hojas de papel milimetrado -Lápices y gomas de borrar -Tijeras -Varias imágenes impresas, de revistas, de superficie irregular -1 carpeta de plástico, tamaño folio -4 metros de costura	-Papel milimetrado -Tarjetas numeradas del 1 al 10 -4 metros de costura -1 pizarra tipo Vileda con rotulador	-2 pizarras tipo Vileda con rotulador -1 hoja de papel milimetrado -2 metros enrollables, de 50 metros -1 calculadora -Lápices y gomas
Metro cuadrado	**Comparativa de rectángulos**	**Prueba final**
-18 cuadrados de papel de colores de 1×1 m -Lápices y gomas	-Cinta de carrocero -Tiza -2 pizarras tipo Vileda, con rotulador -Calculadora -18 cuadrados de papel de colores de 1×1 m -2 metros enrollables de 20 metros	-Hoja de la prueba -1 Tijeras

Apéndice 2

PUBLICIDAD NAVIDEÑA
Noviembre de 2016

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

1. CONCEPTO DE SUPERFICIE

Preguntaremos al alumnado qué entiende por superficie, tratando de obtener sus ideas y preconcepciones al respecto. Utilizando objetos del entorno, intentaremos que vayan puliendo la definición hasta acercarse lo más posible y con sus propias palabras a "magnitud que expresa la extensión de un cuerpo en dos dimensiones, longitud y anchura".

2. COMPARAR/ORDENAR

Se presentarán a los niños tres anuncios publicitarios impresos relacionados con la Navidad. Dos de ellos rectangulares, similares en una de sus dimensiones (ancho o largo) y diferentes en la otra. El tercer anuncio será cuadrado. La diferencia entre los tres, en cuanto a superficie, no debe ser demasiado evidente como se muestra en la Figura.

Trabajando grupalmente, en una primera parte deberán compararlos visualmente y ordenarlos de menor a mayor superficie (no podrán manipular los anuncios). En una segunda parte, podrán compararlos a través de la manipulación. Y en la tercera parte, deberán contrastar los resultados entre la estimación y la realidad. Se fomentará el contraste a través de preguntas sobre las diferencias encontradas y sus causas.

Hay que tener en cuenta que el uso de la estrategia de superposición resulta insuficiente para la comparación entre la forma cuadrada y cualquiera de las otras dos. Llegado a este punto, en caso necesario, se invita a cortar y recomponer la forma rectangular (apoyándose en la invariancia de la medida de la superficie en las acciones de cortar y recomponer).

3. TRABAJAR CON UNIDADES DE MEDIDA NATURALES

Introducimos a los escolares en una hipotética situación real de trabajo con unidades de medida de superficie no estándares. Para ello se facilita una cartulina A4 (21×29,7 cm.) y 16 tarjetas de 5×7 cm. con un producto navideño ofertado por un supermercado. La cartulina representa el cartel anunciador del supermercado y los escolares son el equipo de marketing de la cadena. Su tarea es diseñar un cartel que incluya todos los productos navideños (tarjetas).

Las formas en las que más se optimiza la superficie a cubrir (a las que se prevé que se vayan acercando de forma natural), son: a) Horizontal respecto a la hoja en vertical (caben 15 tarjetas 5×7, sobrando una tarjeta y por tanto, no válida); b) Vertical respecto a la cartulina en vertical (cogen las 16 tarjetas 5×7, todas las tarjetas son colocadas). De cualquiera de las dos formas, el resultado final es un mosaico de tarjetas que no cubren totalmente la superficie. El cálculo del número de tarjetas involucra al pensamiento multiplicativo (fila por columna).

A continuación, presentamos la misma cartulina y 16 tarjetas pequeñas (2,5 × 3,5 cm.) que también son insuficientes para cubrir toda la superficie. Después se les pregunta cuántas tarjetas de ese tamaño cogerían en la superficie. Dado que estas tarjetas tienen la mitad de longitud y la mitad de anchura que las grandes, les planteamos entonces si sabrían cuántas tarjetas pequeñas cogen dentro de una grande. Previsiblemente contestarían a esta última cuestión que dos, ocasión que se aprovecha para comprobar manipulativamente que son cuatro. Después invitaríamos a que establezcan la relación entre el número de tarjetas grandes y el número de tarjetas pequeñas que cubren la superficie (proporcionalidad no lineal en la medida de superficie).

PREVISIÓN DE CAPACIDADES Y DIFICULTADES:

Capacidades perseguidas desde el punto de vista docente:

- Acercamiento y definición intuitiva del concepto de superficie.
- Familiaridad con unidades de medida de superficie no estándares.
- Ordenación y comparación de superficies.
- Deducción intuitiva de la fórmula para la medida de superficies cuadradas y rectangulares (largo x ancho)
- Propiedad de conservación de medida de superficie frente a roturas y recomposiciones.

Aspectos a observar por parte del equipo de investigadores/docentes a lo largo de todo el proceso del taller:

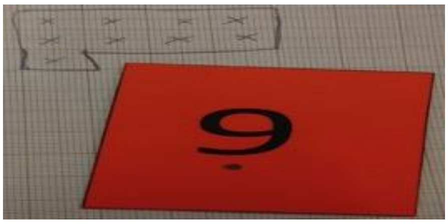
- Dificultades y/o errores en el cálculo de la superficie.
- Aceptación de resultados sin sentido o poco razonables.
- Contestaciones al azar y sin reflexionar, ni utilizar estrategia alguna.
- Dificultades en la expresión de los procesos de pensamiento seguidos y de las estrategias utilizadas.
- Errores aritméticos en el cálculo de superficie.
- Dificultades en la ordenación visual de superficies.
- Falta de estrategias de comparación de superficies.
- Falta de estrategias en la medición de superficie con unidades no estándares.

Apéndice 3

SUPERFICIE
UNIDAD ESTÁNDAR
Noviembre de 2016

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

1. TRABAJAR CON UNIDADES DE MEDIDA ESTÁNDARES (Acercamiento a las nociones de cm^2 y dm^2 y m^2)
Se facilita a cada estudiante una hoja de papel milimetrado.
Centímetro cuadrado
Primero dibujamos un cm^2 en un trozo de papel milimetrado y pedimos que nos imiten. Después se divide dicho cm^2 por la mitad mediante una diagonal y se colorea una de las mitades. Se pregunta a continuación cuánto es la parte coloreada (medio cm^2).
A continuación, se dibujan varias figuras sencillas (cuadrados y rectángulos) de pocos centímetros cuadrados. Se pide cuál es su superficie a través del recuento de los cm^2 interiores. Seguidamente se dibuja una figura irregular que delimite cm^2 enteros y se plantea igual pregunta. Finalmente se dibuja una figura que contenga varias mitades de cm^2, se les pregunta por su superficie.
A continuación, los escolares elegirán a ciegas entre varias tarjetas con los números de 1 y 10 y tendrán que dibujar una figura con dicha superficie en cm^2. Finalmente, se les proporciona una imagen de un anuncio publicitario (de unos 12 o 15 cm^2) para que primero estimen de forma grupal su superficie, y luego la comprueben mediante el papel milimetrado.
Decímetro cuadrado
Primero se dibuja en papel milimetrado un dm^2 y se pide que nos imiten. Seguidamente se pregunta cuántos centímetros cuadrados hay en un decímetro cuadrado (se espera que utilicen el pensamiento multiplicativo). A continuación, se muestra varios dm^2 de lados iguales (10×10 cm.), se corta por la mitad uno de ellos y se recompone de diversas formas. Durante este proceso se pregunta si la superficie varía. Finalmente pediré que estimen cuántos decímetros cuadrados serán necesarios para cubrir la tapa de uno de sus libros de texto o bien la superficie de un pupitre.



Metro cuadrado
Se pregunta directamente qué será un metro cuadrado. Después con cuatro metros de costura, se insta a formar un metro cuadrado en el suelo. Seguidamente, se pide que señalen en el entorno superficies que puedan medir aproximadamente un metro cuadrado (puertas de armarios, murales en la pared, conjuntos de losas en el suelo, etc.), recordando que no tienen por qué ser cuadradas.

PREVISIÓN DE CAPACIDADES Y DIFICULTADES:

Capacidades perseguidas desde el punto de vista docente:
- Familiaridad con unidades de medida de superficie estándares (cm^2 y dm^2).
- Propiedad de conservación de medida de superficie frente a roturas y recomposiciones.
- Generar diferentes perímetros para una misma área.
- Realizar estimaciones de medida de superficie.
- Expresión correcta de las unidades de superficie.
- Realizar conversiones sencillas entre cm^2 y dm^2.
- Calcular la superficie de un cuadrado o rectángulo a través de su fórmula.

Aspectos a observar por parte del equipo de investigadores/docentes a lo largo de todo el proceso del taller:
- Omisión o explicitación incorrecta de la unidad de medida de superficie.
- Dificultades y/o errores en la representación gráfica de una superficie partiendo de medidas.
- Dificultades y/o errores en el cálculo de la superficie.
- Aceptación de resultados sin sentido o poco razonables.
- Contestaciones al azar y sin reflexionar, ni utilizar estrategia alguna.
- Dificultades en la expresión de los procesos de pensamiento seguidos y de las estrategias utilizadas.
- Errores aritméticos en el cálculo de superficie.

Apéndice 4

MEDIDA DE SUPERFICIE DEL HUERTO
Diciembre de 2016

JUSTIFICACIÓN

Actualmente, hay en el centro escolar un huerto que se encuentra yermo. Está situado en el patio, a uno de los lados de las pistas deportivas, en una elevación del terreno que cuenta con numerosos pinos y suelo de tierra. La zona del huerto está delimitada por un perímetro de piedras grandes, y ha sido abonado recientemente por el Ayuntamiento.

Estaba previsto que el mes de enero se comenzaran con las plantaciones de los diferentes cultivos a cargo del alumnado del centro, que ha sido dividido en siete grupos para esta tarea. Cada grupo se responsabilizará de una parte del huerto hasta la recolección de las diferentes cosechas (elección de cultivo, plantación, riego, abono, recolección, etc.)

La clase de 4ºA quiere presentar al centro educativo una propuesta creativa de diseño para el huerto a través de la cual se trabajará con la clase la medida de superficie y otros contenidos interdisciplinares.

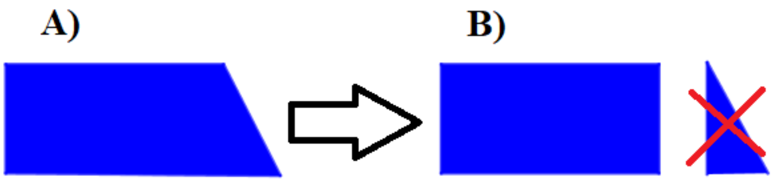
DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

1. MEDICIÓN DEL PERÍMETRO DEL HUERTO

En parejas, los escolares medirán utilizando el metro enrollable de 50 metros el perímetro del huerto (una pareja los lados norte y este, y la otra los lados sur y oeste). Cada pareja anota los resultados en una pizarra tipo Vileda.

2. DISEÑO DEL HUERTO, A MANO ALZADA

En clase, se recopilan los datos de las mediciones en un papel. Se pide a los escolares la identificación de la forma del huerto (trapecio rectángulo, Figura 1. Para facilitar la tarea, se informa que durante el resto del taller trabajaran sobre la parte rectangular del huerto (Figura 1). A continuación, se pide un diseño a mano alzada del huerto con la condición de que debe contar con siete zonas de plantación y sus correspondientes zonas de paso.



3. CÁLCULO DE LA SUPERFICIE TOTAL DEL HUERTO

Con las medidas del huerto y una calculadora, se solicita la superficie total del huerto.

4. APLICACIÓN DE MEDIDAS AL DISEÑO PROPUESTO:

Seguidamente, se traslada el diseño a una hoja de papel milimetrado, aplicando las medidas recogidas y consensuadas por el grupo.

4.1. Escala

Se acerca al grupo de escolares al concepto de escala a través de una serie de preguntas dirigidas:

¿Cuánto tendríamos que encoger el largo del huerto para que cogiese en este papel?

¿Qué operación deberíamos hacer para comprobar si estamos en lo cierto?

¿Cómo se ha transformado la medida?

¿Cómo se traslada la información del papel milimetrado a la escala real del huerto?

Una vez determinado el número de veces que hay que "encoger" el largo del huerto para poder representarlo en el papel milimetrado, se explica que ese número es la escala a utilizar, y que se representa *1:X*, siendo *X* el número de veces por el que se ha dividido la longitud.

4.2. Diseño definitivo con medidas

En papel milimetrado se pide dibujar el huerto, a la escala resultante de las operaciones anteriores. Seguidamente, se solicita que trasladen al papel milimetrado el diseño guiándose de la cuadrícula, y cuidando que todas las zonas de cultivo tengan la misma superficie y las zonas de paso, la misma anchura.

PREVISIÓN DE CAPACIDADES Y DIFICULTADES

Capacidades perseguidas desde el punto de vista docente:

- Familiaridad con las unidades de longitud: metro y centímetro.
- Identificación correcta de las dimensiones largo y ancho.
- Utilización de procedimientos de medida directa.
- Conversión de metros a centímetros.
- Imaginar, y representar aproximadamente, la forma de una superficie, a partir de su largo y ancho.
- Imaginar y representar una propuesta de diseño para el huerto, a mano alzada.
- Percepción de la magnitud Superficie como atributo medible.
- Calcular la superficie de un rectángulo a través de su fórmula.
- Familiaridad con las unidades de superficie: metro cuadrado y centímetro cuadrado.
- Familiaridad con el concepto de escala.
- Representación a escala del diseño propuesto para el huerto.

Aspectos a observar por parte del equipo de investigadores/docentes a lo largo de todo el proceso del taller:

- Dificultades con el uso de instrumentos de medida
- Dificultades y/o errores en la aplicación de procedimientos de medición directa.
- Alineación incorrecta del segmento a medir con el cero.
- Formación de volutas en el metro, posición inclinada o laxa del mismo.
- Identificación de referentes erróneos en la medición (puntos inicial y final).
- Dificultades y/o errores en la lectura de los instrumentos de medida.
- Omisión o explicitación incorrecta de la unidad de medida, tanto de longitud como de superficie.
- Dificultades y/o errores en la conversión de metros a centímetros.
- Dificultades y/o errores en la representación gráfica de una superficie.
- Dificultades en la identificación trapezoide rectangular del huerto.
- Ausencia de ideas para el diseño del huerto, planteamiento de ideas no practicables, etc.
- Dificultades y/o errores en el cálculo de la superficie del huerto.
- Dificultades en la comprensión del concepto de escala.
- Dificultades y/o errores en la representación a escala del diseño propuesto para el huerto.
- Aceptación de resultados sin sentido o poco razonables.
- Contestaciones al azar y sin reflexionar ni utilizar estrategia alguna.
- Dificultades en la expresión de los procesos de pensamiento seguidos y de las estrategias utilizadas.
- Errores aritméticos en el cálculo de superficie.

Apéndice 5

METRO CUADRADO
Febrero 2017

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD DE CLASE

Actuación de aula en la que se trabaja la estimación y medición de superficies de 1 m^2. Para ello se preparan 18 metros cuadrados de papel de color. Cada estudiante, por su parte, debe traer de casa un decímetro cuadrado en papel milimetrado.
Se sitúa un metro cuadrado sobre la pizarra y se pregunta sin con todos los decímetros cuadrados de los escolares se puede recubrir el metro cuadrado. Se pide que justifiquen su respuesta. Dado que probablemente la respuesta sea negativa, se pregunta cuántos hacen falta.
A continuación, pedimos que busquen por el aula superficies que midan aproximadamente 1 m^2. Tenemos que advertir, si es necesario, que no necesariamente tienen que ser superficies cuadradas. Una vez localizadas y discutidas por el grupo clase, se solicita realizar una estimación en m^2 de la mesa rectangular formada por la unión de los pupitres de los escolares. Finalmente se mide dicha superficie utilizando como instrumento de medida cuatro metros de costura.

PREVISIÓN DE CAPACIDADES Y DIFICULTADES

Capacidades perseguidas desde el punto de vista docente:

- Realizar estimaciones con sentido, de medida de superficie.
- Comparación de superficies.
- Identificación correcta de las dimensiones largo y ancho.
- Relación entre el dm^2 y el m^2, aplicación del principio multiplicativo.
- Estimación de superficies.
- Utilización de procedimientos de medida directa.
- Expresión correcta de las unidades de longitud correspondientes: metro, decímetro.
- Calcular/estimar la superficie recubriéndola con metros cuadrados de papel.
- Expresión correcta de las unidades de superficie correspondientes: metro cuadrado.

Aspectos a observar por parte del equipo de investigadores/docentes a lo largo de todo el proceso del taller:

- Dificultades y/o errores en el cálculo de la superficie.
- Aceptación de resultados sin sentido o poco razonables.
- Contestaciones al azar y sin reflexionar ni utilizar estrategia alguna.
- Dificultades en la expresión de los procesos de pensamiento seguidos y de las estrategias utilizadas.
- Falta de estrategias de comparación de superficies.
- Falta de estrategias en la medición de superficies.
- Dificultades y/o errores en la aplicación de procedimientos de medición directa.
- Alineación incorrecta de la cinta métrica de costura con el cero de la misma.
- Identificación de referentes erróneos en la medición (puntos inicial y final).
- Dificultades y/o errores en la lectura del instrumento de medida.
- Omisión o explicitación incorrecta de la unidad de medida de superficie.

Apéndice 6

MEDIDA DE SUPERFICIE COMPARATIVA DE RECTÁNGULOS
Marzo-Mayo 2017

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Se marcan en el suelo del gimnasio dos rectángulos con cinta de carrocero, uno de 2*x*6 metros, y otro de 3*x*4 metros. El primero de ellos se identifica con una "A" de tiza en su interior, y el segundo con una "B".

Estimación visual de la superficie
Se pregunta a los escolares cuál de los dos rectángulos tiene mayor superficie. La respuesta ha de ser grupal y justificada.

MEDICIÓN-COMPROBACIÓN DE ÁREAS DE RECTÁNGULOS
A continuación, se les pregunta cómo pueden comprobar su conjetura. Para ello se les informa que disponen de dos cintas métricas enrollables de 20 metros y de 18 metros cuadrados recortados en papel de colores.
Es previsible que en esta actividad menos dirigida los escolares midan el perímetro en primer lugar con la cinta métrica. Si se detecta confusión entre área y perímetro (también a nivel de unidades), o que piensen que las figuras con mayor perímetro tienen mayor área, se indaga en las causas y se orienta al grupo (orientar para comprobar su conjetura, dos estrategias, uso del pensamiento multiplicativo o el recubrimiento con rectángulos, o ambas).

PREVISIÓN DE CAPACIDADES Y DIFICULTADES

Capacidades perseguidas desde el punto de vista docente:

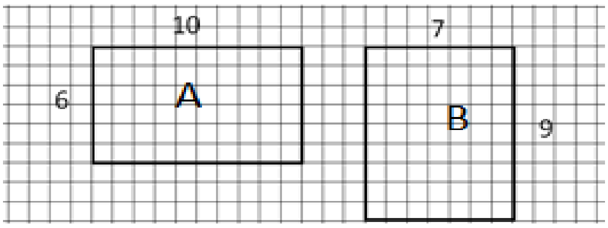
- Realizar estimaciones con sentido, de medida de superficie.
- Comparación de superficies.
- Identificación correcta de las dimensiones largo y ancho.
- Utilización de procedimientos de medida directa.
- Expresión correcta de las unidades de longitud correspondientes: metro.
- Calcular la superficie de un rectángulo a través de su fórmula.
- Calcular la superficie recubriéndola con metros cuadrados de papel, recortados.
- Expresión correcta de las unidades de superficie correspondientes: metro cuadrado.

Aspectos a observar por parte del equipo de investigadores/docentes a lo largo de todo el proceso del taller:

- Dificultades y/o errores en el cálculo de la superficie.
- Confusión de área y perímetro.
- Aceptación de resultados sin sentido o poco razonables.
- Contestaciones al azar y sin reflexionar ni utilizar estrategia alguna.
- Dificultades en la expresión de los procesos de pensamiento seguidos y de las estrategias utilizadas.
- Errores aritméticos en el cálculo de superficie.
- Falta de estrategias de comparación de superficies.
- Falta de estrategias en la medición de superficies.
- Dificultades y/o errores en la aplicación de procedimientos de medición directa:
- Alineación incorrecta del segmento a medir con el cero.
- Formación de volutas en el metro, posición inclinada o laxa del mismo.
- Identificación de referentes erróneos en la medición (puntos inicial y final).
- Dificultades y/o errores en la lectura de los instrumentos de medida.
- Omisión o explicitación incorrecta de la unidad de medida, tanto de longitud como de superficie.

Apéndice 7

PRUEBA FINAL
Junio 2017

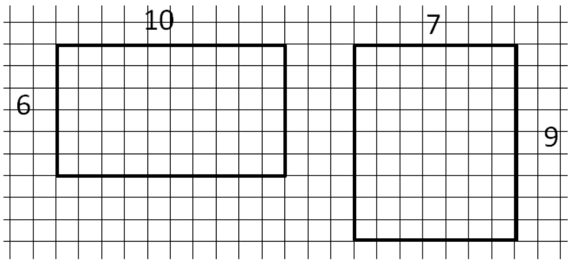


DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA

Trabajando en primer lugar de forma individual y luego de forma colaborativa, en equipos de 4 o 5 escolares y sin intervención de los docentes-investigadores, se solicita resolver la siguiente tarea abierta de comparación de superficies, cuya finalidad es que los escolares pongan en juego los conocimientos adquiridos a lo largo de la secuencia.

COMPARATIVA DE RECTÁNGULOS

Nombre y apellidos:_______________________________________ **Fecha:**__________



¿Cuál de los rectángulos tiene mayor superficie? Explica cómo lo has averiguado.