



Resultados PISA y resolución de problemas matemáticos en los currículos de Educación Primaria

Juan Luis Piñeiro

Universidad de Granada, juanluis.pineiro@gmail.com

Elena Castro-Rodríguez

Universidad de Granada, elenacastro@ugr.es

Enrique Castro Martínez

Universidad de Granada, ecastro@ugr.es

Fecha de recepción: 20-05-2016

Fecha de aceptación: 18-07-2016

Fecha de publicación: 1-11-2016

RESUMEN

Los resultados de las sucesivas evaluaciones PISA muestran diferencias sustanciales entre países. En este contexto, nos preguntamos si estas diferencias están relacionadas con los niveles de concreción en resolución de problemas de los currículos de estos países. Particularmente, en el presente trabajo mostramos un estudio comparativo de los currículos de Educación Primaria de seis países los cuales han recibido puntajes altos, medios y bajos en el estudio PISA 2012. Mediante un análisis de contenido describimos cómo se configura la competencia de resolver problemas en estos currículos. Los resultados revelan diferentes niveles de explicitación en cada documento y dicotomías sobre lo que se explicita como una concepción de la resolución de problemas y lo que se exige a los escolares. Se concluye que los países que presentan currículos con mayor nivel de explicitación no se corresponden necesariamente con aquellos que obtuvieron mayor puntaje en el estudio PISA.

Palabras clave: comparación curricular, currículo, Educación Primaria, resolución de problemas

PISA results and mathematical problem solving in primary education curriculums

ABSTRACT

The results of successive PISA assessments show substantial differences between countries. In this context, we wonder if these differences are related to levels of specificity in solving problems of curricula of these countries. Particularly, in this paper we present a comparative study of curricula for primary education from six countries, which have received high, middle and lower scores in PISA 2012. Through a content analysis, we describe how problem solving competency is set to these curricula. The results reveal different levels of explicitness in each document and dichotomies what is explicit as a concept of problem solving and what requires school. We conclude that countries with curricula with higher levels of explicitness not necessarily correspond with those who obtained the highest score in the PISA study.

Key words: curricular comparison, curriculum, problem solving, curriculum, primary education.

1. Introducción

Los diversos estudios internacionales que evalúan el conocimiento de los escolares en materias específicas han adquirido relevancia en los sistemas educativos de los países participantes, ya que son considerados indicadores de calidad (Rico, 2007). La participación de gran variedad de países en tales estudios, junto con la relevancia que han adquirido, ha impulsado el interés de los investigadores en la realización de estudios complementarios (Goldstein, 2004; Kanes, Morgan y Tsatsaroni, 2014; Schmidt et al., 2001), algunos de ellos son investigaciones centradas en comparativas curriculares entre países.

En este contexto, podemos encontrar estudios que analizan el desarrollo de contenidos matemáticos escolares, como es el caso de la división y la multiplicación de fracciones en dos currículos, con la finalidad de entender las diferencias existentes al momento de conceptualizar el desarrollo de un contenido matemático escolar (Son y Senk, 2010). Con un espectro más amplio, Wu y Zhang (2006) analizan las diferencias existentes entre currículos orientales y occidentales en función de su centralización, desarrollo, dependencia y otros factores. Otro estudio curricular es el realizado por Bessot y Comiti (2006), quienes analizan el desarrollo histórico de los currículos francés y vietnamita, y posteriormente lo concretizan con estudios que ellos llaman currículum real, es decir, el implementado a través de un tópico matemático para analizar el comportamiento de cada documento en la salas de clases. Como vemos, existen diferentes enfoques para analizar las directrices curriculares, sin embargo, todos ellos coinciden en la búsqueda de diferencias y coincidencias entre los documentos oficiales que permitan dar entendimiento a las concepciones que los sistemas educativos tienen de la enseñanza de las matemáticas.

En el caso de España, destaca su participación en el Programme for International Student Assessment (PISA), establecido en el año 1997 por la Organization for Economic Cooperation and Development (OCDE) como un estudio de evaluación internacional de la competencia matemática de los estudiantes a la edad de 15 años. En el marco de este estudio, la resolución de problemas presenta un papel destacado: “su innovador concepto de alfabetización concierne a la capacidad de los estudiantes de analizar, razonar y comunicar efectivamente cuando inventan, resuelven e interpretan problemas en una variedad de materias” (OCDE, 2005, p. 3), y con más énfasis dentro de la matemática, donde se considera esta área como un conjunto de herramientas que sirve para resolver problemas mediante la puesta en funcionamiento de determinadas competencias (Rico, 2006).

La conceptualización de la resolución de problemas ha cambiado a raíz de las demandas de la sociedad. Así, los currículos escolares de matemáticas han de formar ciudadanos que apliquen las matemáticas en problemas de la vida diaria en situaciones sociales, laborales e interdisciplinarias (English y Gaingsburg, 2016). Dentro del currículum matemático, la resolución de problemas se presenta desde diversas perspectivas, entre las que destacan dos: a) como un medio o camino para lograr objetivos más amplios, y b) como una habilidad o fin por sí misma (Stacey, 2005; Stanic y Kilpatrick, 1989). En el currículum español se otorga un lugar central a la resolución de problemas, sin embargo, ofrece directrices poco precisas y reduccionistas de las componentes de los procesos involucrados en la resolución de problemas, y a pesar de considerarse en muchos lugares, no está presente en uno propio y específico, lo que podría provocar su ausencia en el aula (Puig, 2008).

Debido a la relevancia de la resolución de problemas en educación matemática, junto con el creciente interés por los estudios comparativos internacionales y su influencia en los sistemas educativos y por consiguiente en los currículos escolares, nos planteamos si las diferencias entre países que plantean los resultados del estudio PISA están relacionadas con el nivel de concreción en resolución de problemas de los currículos de dichos países. Particularmente, en este trabajo presentamos un estudio comparativo, centrado en la resolución de problemas, de los currículos de Educación Primaria de seis países los cuales han recibido puntajes altos, medios y bajos en el estudio PISA 2012.

2. Método

Para la realización de este estudio se ha desarrollado un enfoque cualitativo no interactivo. Hemos utilizado la técnica del análisis de contenido, pues nos permite estudiar la naturaleza del discurso con detalle y profundidad pudiendo descubrir la estructura interna que subyace en la muestra de documentos (Rico y Fernández-Cano, 2013). Así, nos permitirá identificar si existe relación entre la concreción curricular de cada país y los resultados en la prueba PISA.

2.1. Muestra y unidades de análisis

La muestra está constituida por documentos curriculares de seis países escogidos a través de un muestreo de casos extremos (Hernández, Fernández y Baptista, 2010) a partir de los puntajes de PISA 2012¹ (OECD, 2014). En este contexto, se escogieron dos currículos² de los países del tercio superior, Finlandia y Singapur (Curriculum Planning and Development Division, 2007; National Core Curriculum for Basic Education, 2004), dos del tercio medio, España y Estados Unidos (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014; NCTM, 2000) y dos del tercio inferior, Chile y Argentina (Consejo Federal de Educación, 2011a, 2011b; Ministerio de Educación, 2012). El procedimiento de selección utilizado para establecer las unidades de análisis surgen desde el propósito de este estudio: comparar y describir la presencia de la resolución de problemas en los currículos escolares. Para cumplir con este objetivo, se utilizaron dos tipos de unidades que conjuntamente colaboran a dar una mayor fiabilidad al estudio: sintácticas y temáticas (Krippendorff, 2004). Por tanto, las unidades de análisis las definimos como las frases u oraciones que hagan referencia explícita a las palabras "resolución de problemas", "situación problema" y "problema", pero que además incluyan elementos sobre que debería lograrse con ellas, cómo deberían trabajarse o que a través de ellas se logre otro cometido.

2.2. Procedimiento y categorías de análisis

Para la realización del análisis seguimos el procedimiento que Rico y Fernández-Cano (2013) exponen como adecuado para llevar a cabo un análisis de contenido. Nuestro primer paso fue establecer mediante un proceso deductivo categorías de análisis generales. Dichas categorías surgen de la investigación en resolución de problemas, partimos de la categorización de Chapman (2015), y la ampliamos a partir de las ideas de Schoenfeld (1992), Castro (2008) y Kilpatrick (1978). Una vez realizado dicho análisis en un primer vuelco de las unidades de análisis, se realizó un proceso inverso, es decir, inductivo dentro de cada categoría general. De este proceso surgen las subcategorías. La Tabla 1 muestra la categorización obtenida, tanto deductiva como inductivamente.

¹ Cabe destacar que uno de los documentos analizados no corresponde específicamente a un documento curricular oficial; nos referimos a los "Principios y estándares para la educación matemática" del NCTM. Sin embargo, hemos decidido utilizar este texto, en sustitución de los "Common core state standards for mathematics" (National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010) pues ambos documentos plantean un visión común del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, diferenciándose en la amplitud del escogido para este estudio, que proporciona ejemplos e indicaciones para su implementación (NCTM, 2010).

² Si bien los países seleccionados presentan diferentes niveles de concreción curricular oficial, hemos utilizado los currículos generados por los ministerios de educación de cada país. Entendemos que aunque existan estados o comunidades que expliciten en mayor o menor medida algunos aspectos, todos ellos se regulan por el marco del documento oficial que se utiliza en este estudio.

Tabla 1. Categorías de análisis

Categorías	Subcategorías
Problemas matemáticos (pm)	a. Caracterización de problema b. Clasificación de problemas según criterios diversos
Resolución de problemas matemáticos (rp)	a. Heurísticos generales b. Heurísticos específicos c. Estrategias de otras áreas de contenido d. Estrategias personales
Invencción de problemas (ip)	a. Contextos en dónde realizarla b. Beneficios de su uso c. Estrategias metodológicas
Formas de pensar la resolución de problemas (prp)	a. Pensamiento de los estudiantes b. Dificultades de los estudiantes c. Conductas de resolutores exitosos
Formas de trabajar la resolución de problemas (erp)	a. Enfoques o vías de acceso b. Metacognición c. Evaluación d. Estrategias metodológicas
Factores afectivos y creencias (fa)	a. Papel e implicaciones de diferentes emociones b. Rol del profesor

La primera categoría, *problemas matemáticos*, se refiere a la naturaleza de los problemas. Esta se corresponde con su estructura y clasificación. Ejemplos de esta categoría, serían definiciones de problemas, clasificaciones según número de operaciones, el número de variables, el proceso heurístico específico necesario para su resolución, estructura semántica, etc.

La segunda categoría, *resolución de problemas matemáticos*, se define como la resolución de problemas desde la perspectiva del resolutor. Incluye comprensión sobre estrategias de resolución según el contenido matemático implicado, selección de éstas, interpretación de la información contenida en el problema, diversidad de soluciones a un mismo problema, heurísticas generales y específicas, fases de resolución, etc.

La categoría *invencción de problemas* se relaciona con la resolución, pues permite generar nuevos problemas o reformular los dados. Su importancia radica en la potencialidad que tiene este tipo de tarea en el pensamiento matemático de los estudiantes. Algunos elementos contenidos en esta categoría son: los diferentes propósitos y beneficios de acuerdo al momento en que se utilizan, tipos de invencción, etc.

Una cuarta categoría se corresponde con *formas de pensar la resolución de problemas*. La comprensión de la naturaleza conceptual de las dificultades y su interpretación desde la perspectiva de quién resuelve, características de los resolutores exitosos y las heurísticas que utilizan, la disposición a resolver problemas y las formas de pensar la resolución de problema, entre otras, son ejemplos de conocimientos de esta clase.

Las formas de trabajar *la resolución de problemas* determina la quinta categoría. Las prácticas instruccionales deben ser planificadas en función de lo que se quiere lograr, para ayudar a los estudiantes a convertirse en buenos resolutores. Para ello, se señalan como tipos de conocimiento referidos a esta categoría, las estrategias usadas para dirigir experiencias de aprendizaje exitosas, saber cómo y cuándo intervenir, formas de trabajo (individual o grupal), uso de tecnologías, papel de la metacognición, enfoques o vías de acceso, y formas de evaluar la resolución de problemas.

Finalmente, la última categoría corresponde a los *factores afectivos y creencias* y su posible impacto en los estudiantes. También se incluyen las referidas al profesor y cómo afectan los procesos de aprendizaje sobre resolución de problemas.

3. Resultados

Los resultados los hemos estructurado a partir de dos ejes: el tercil en el que se ubican los países de la muestra (superior, medio e inferior), y las categorías de análisis utilizadas (Tabla 1). Estos ejes se establecen desde una técnica analítica discriminante por la necesidad de extraer máximos que muestren todas las características de la resolución de problemas en los currículos, aunque también presenta algunas características de la técnica de conglomerado (Krippendorff, 2004).

3.1. Problemas matemáticos

Los países que se encuentran en el tercil más alto, en ambos casos, explicitan la enseñanza de problemas en el currículo de manera escueta. El currículo de Finlandia (2004) solo alude a esta categoría señalando que el estudiante debe:

Ser capaz de notar la información necesaria en problemas simples del día a día (p. 160).

Por su parte, el currículo de Singapur hace referencia a diferentes clasificaciones de problemas según ciertas características: problemas no rutinarios, de respuesta abierta y de enunciado verbal realista; así mismo, se explicitan problemas de la vida cotidiana. Además se recoge una clasificación sobre el número de pasos para resolverlos: uno, dos y tres pasos. Se destacan también como aspectos diferenciadores el contenido matemático que toma como contexto el problema, entre las que se incluyen las operaciones aritméticas, el sistema monetario o las fracciones. Se hace mención a los modelos utilizados en la creación de un problema, por ejemplo, problemas que promuevan las representaciones pictóricas. Todas estas clasificaciones se combinan a lo largo de los seis cursos que establece la educación primaria.

En ninguno de los dos currículos anteriores se hace mención explícita a los PAEV (problemas aritméticos elementales verbales), sin embargo, se puede deducir su inclusión a partir de enunciados como el que señala que los estudiantes deben:

Resolver problemas de hasta dos pasos que involucren las cuatro operaciones (Curriculum Planning and Development Division, 2007, p. 18).

En los currículos de los países del tercil medio, hemos observado mayor cantidad de especificaciones referidas a la categoría de resolución de problemas. Al igual que en el currículo de Singapur, en el español, se hace mención a problemas según el contexto: vida cotidiana. La mayor cantidad de menciones se encuentra en la clasificación de problemas según el área de contenido, es decir, problemas que impliquen su resolución con contenidos de geometría, medida, porcentajes, proporcionalidad y probabilidad o estadística. Se debe hacer una mención especial a los PAEV, pues en este currículo se nombran numerosas veces, problemas en los que intervengan las cuatro operaciones y específicamente el uso y automatización de los algoritmos a través de la resolución de problemas, explícitamente se señala que el estudiante:

Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos trabajados (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19390).

Un aspecto complementario a esto es la explicitación de la estrategia a utilizar para resolverlos: estimación, cálculo mental o relaciones numéricas, por tanto, se deducen variables de tarea de los PAEV para su correcta utilización en el aula. Sobre el significado de problema y su caracterización aparecen escasas menciones, solo explicitando la diferenciación entre problema y ejercicio.

Los estándares curriculares del NCTM presentan una de las pocas caracterizaciones sobre lo qué entienden por este tópico, estableciendo que:

La resolución de problemas significa comprometerse en una tarea para la que el método de resolución no se conoce de antemano (NCTM, 2000, p. 55).

Los estándares incluyen distintas clasificaciones de los tipos de problemas según diversos criterios: contexto (vida diaria, laboral o ámbito científico); se habla de identificar este tipo de problemas para tener estrategias metacognitivas para resolverlos; también aparece el criterio del contenido matemático, señalando problemas geométricos, con proporciones y algebraicos (patrones y funciones). Además se habla de problemas que permitan modelizar y de investigaciones matemáticas. Respecto a los PAEV, en estas directrices aparecen con cierta frecuencia las *interpretaciones* de las operaciones básicas, especificando acciones (juntar, separar, igualar, iteración de una medida, distribución, etc.) aludiendo a que:

Puede generarse una interpretación de la adición y de la sustracción cuando los alumnos resuelven problemas de "juntar" y de "separar" (NCTM, 2000, p. 87).

En el tercio más bajo, el currículo chileno, muestra en sus directrices esta categoría de forma más desarrollada que cualquier otro de los países analizados. Junto a los estándares curriculares de Estados Unidos, son las dos propuestas curriculares que explicitan qué entienden por problema, al señalar que:

Se habla de resolver problemas, en lugar de simples ejercicios, cuando el estudiante logra solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir (Ministerio de Educación, 2012, p. 89).

Aparecen clasificaciones ligadas al contexto, a que sean rutinarios o no rutinarios y a la organización según el área de contenido en el que se deben resolver. Sobre los PAEV, aparecen indicaciones como las cuatro operaciones básicas, las estrategias utilizadas para resolverlos (representaciones, familia de operaciones, combinaciones multiplicativas básicas, paréntesis) y las variables de tarea: cantidad de cifras de los números y de pasos para resolverlo.

Finalmente, el documento argentino, también condensa sus objetivos en esta categoría. En las metas propuestas, se encuentran dos tipos de clasificaciones, una referida al tipo de contenido involucrado: números, orientación espacial y geometría, unidades de medida, fracciones y números decimales. Y la otra, las estrategias que intervienen para su resolución: estimación, relaciones numéricas y propiedades. En relación a los PAEV, se hace referencia a los significados de las operaciones, es decir, tipos de problemas según la acción involucrada. Es frecuente encontrar referencias relativas a ellos en los diferentes niveles educativos a través de indicaciones para que el estudiante realice:

El reconocimiento y uso de las operaciones con distintos significados en la resolución de problemas (Consejo Federal de Educación, 2011a, p. 14).

3.2. Resolución de problemas matemáticos

En los documentos curriculares de los países situados el primer tercil del informe PISA, se encuentran muy pocas referencias que se ajusten a los descriptores de la categoría resolución de problemas. El de

Finlandia hace mención a la mediación del profesor para encontrar la solución de un problema y en la elaboración de justificaciones a sus actos y presentación de soluciones, infiriéndose que se entiende como un proceso por etapas. El currículo de primaria de Singapur, es algo más detallado, relacionando la resolución de problemas con el pensamiento matemático y las habilidades de resolución de problemas. Al igual que en el de Finlandia, el documento de Singapur entiende la resolución de problemas como un proceso, pero en él se hacen más explícitas las fases de resolución en el sentido de Pólya (1981), señalando que se debe:

Proporcionar a los estudiantes problemas que requieran planificación (antes de resolverlos) y evaluación (después de resolverlos) (Curriculum Planning and Development División, 2007, p. 9).

Además, se hace referencia a la importancia de la planificación en el acto de resolución, uso de heurísticos (sin especificar cuáles), justificación de acciones, explicación y discusión de estrategias, presentación y evaluación de las soluciones, y estrategias personales.

En los documentos de los países ubicados en el tercil medio de los resultados de la prueba PISA, hallamos una descripción muy detallada en el currículo estadounidense, no así en el español. Este último, hace un especial énfasis en la resolución de problemas como un proceso, explicitando cada una de las fases de manera muy minuciosa. También se mencionan el uso de heurísticos específicos (por ejemplo buscar un patrón) y estrategias de otras áreas de contenido (geometría). Esto se manifiesta en un objetivo que se repite en dos niveles, pidiendo que el estudiante:

Resuelve problemas... utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19390).

Sin embargo, como ya se vio en la categoría anterior, se pone mayor énfasis en enseñar contenidos matemáticos *para* resolver problemas que en los procesos de resolución de estos.

Por su parte, los estándares del NCTM, siguen la tendencia de utilizar los pasos de Pólya, poniendo de relieve el empleo de heurísticos específicos como: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar hacia atrás, tantear y comprobar, crear un problema equivalente y crear un problema más sencillo. Se le otorga importancia al uso de representaciones (manipulativas, pictóricas y gráficas) como estrategias para resolver problemas.

Las características representaciones que hacen los estudiantes cuando resuelven problemas e investigan ideas matemáticas, pueden jugar un importante papel ayudándoles a comprender y resolver los problemas y proporcionándoles modos útiles de registrar un método de resolución y de describirlo a los demás (NCTM, 2000, p. 72).

En este documento se recogen estrategias provenientes de áreas de contenido específicas: ideas geométricas, descomposición de números, conteo, algoritmos, estimación, propiedades de las operaciones y equivalencias. Se especifica un uso flexible de éstas y la capacidad de justificar y argumentar su utilización. También se propicia el uso de estrategias personales y se relaciona el uso de estrategias con el desarrollo de ideas matemáticas, razonamientos y flexibilidad mental. Sobre los pasos en la resolución, se señala la importancia de planificar la actuación, la selección adecuada de estrategias o heurísticos, evaluar la estrategia escogida y la pertinencia de la respuesta. Se menciona el factor del tiempo necesario para resolver un problema y el uso de las TIC's como estrategia metodológica. Finalmente, se hace una conexión con otra área de conocimiento (artes plásticas) y cómo se relaciona con la resolución de problemas a través de la comunicación de los resultados.

Por último, en los currículos de los países del tercil más bajo, sólo el de Chile se mantiene en la línea de utilizar el modelo de Pólya como un patrón de pasos para resolver problemas.

Emplear diversas estrategias para resolver problemas y alcanzar respuestas adecuadas, como la estrategia de los 4 pasos: entender, planificar, hacer y comprobar (Ministerio de Educación, 2012, p. 106).

Las directrices chilenas nombran los heurísticos específicos presentes en el NCTM. Al describir sus objetivos para los cuatro pasos de Pólya, especifica una estrategia para comprender el problema: usar material manipulativo o gráfico. Se hace hincapié en el uso de diversidad de estrategias (sin detallarlas), saber seleccionarlas y usarlas de manera flexible; admitiendo posibilidad de crear nuevas. También se señala el uso de la generalización de tipos de problemas a partir de la estrategia utilizada para resolverlo. Aparece la argumentación y comunicación como elementos importantes en estas fases. Un aspecto que no había aparecido hasta ahora, es la relación que hacen con la creatividad a través de la adaptación y creación de estrategias. El currículo argentino señala aspectos generales referidos a los pasos de Pólya, sin mencionarlos. Se establece como relevante la identificación de datos y preguntas, la comunicación de las estrategias utilizadas y su comparación, donde se hace mención a la elaboración de estrategias propias, y la valoración de las respuestas.

3.3. Invención de problemas

En la categoría de invención de problemas, encontramos que el documento curricular finlandés solo hace mención a guiar en la invención de problemas y a presentar problemas en nuevas formas. En el caso del documento de Singapur solo se alude una vez, pidiendo aplicar habilidades de resolución de problemas para inventar nuevos.

En el tercil medio, la situación no es muy distinta. En el currículo español encontramos dos referencias, ambas referidas a la invención de problemas a partir de otros ya resueltos, es decir, estrategias metodológicas para usarla, al mencionar que:

Se debe trabajar en la profundización en los problemas resueltos, planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, etc. (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19387).

En el documento del NCTM de los Estados Unidos se explicita la relación entre formular problemas y ser mejor resolutor de éstos. Hace énfasis en lo natural de hacer preguntas de los estudiantes y cómo el profesor debe aprovechar esto, relacionándolo estrechamente con inventar y reformular problemas, pues:

Mediante estas extensiones de los problemas y de la formulación de distintas preguntas, los alumnos llegan a ser tan buenos proponiendo problemas como resolviéndolos (NCTM, 2000, p. 189).

En este documento se sugieren como contextos para formular nuevos problemas la literatura infantil y los propios problemas.

Los currículos de los países situados en el tercil inferior, muestran pocas referencias relativas a la invención de problemas. El documento chileno hace énfasis en la invención de problemas utilizando operaciones aritméticas. También señala, en menor medida, el contexto familiar para realizar esta tarea y el uso de TIC's y representaciones (manipulativas, pictóricas y gráficas) para realizarlo. En las directrices argentinas solo encontramos dos referencias. De invención (enunciados y preguntas) y otra a la comparación de éstas una vez realizadas.

3.4. Formas de pensar la resolución de problemas

Con respecto a la categoría formas de pensar la resolución de problemas, encontramos dos únicas referencias en los documentos del primer tercil. La primera de ella en el currículo finlandés referida a la importancia del punto de vista del alumno al hacer observaciones de los problemas. La segunda, en el documento de Singapur, donde se nombran los componentes del desarrollo de la habilidad de resolver problemas, sin detallar qué entienden por cada una. Esto se materializa exponiendo que:

Estos componentes (comprensión conceptual, ser competente en habilidades y destrezas de pensamiento) son parte integral del desarrollo de la habilidad de resolver problemas matemáticos (Curriculum Planning and Development División, 2007, p. 2).

Los documentos de los países situados en el segundo tercil presentan una dicotomía en sus referencias a esta categoría. El currículo español, no presenta ninguna mención sobre el pensamiento de los alumnos mientras resuelven problemas. En cambio, en las directrices del NCTM, encontramos un gran número de referencias, que pueden agruparse en tres grandes grupos: las dificultades que presentan, las conductas de los buenos resolutores y las formas de pensar la resolución de problemas. En esta última, destacan dos aspectos: las representaciones y la modelización.

Sobre dificultades de los estudiantes al resolver problemas, aparecen estándares como el tiempo que los estudiantes tardan en aprender las estrategias, saber cuándo el profesor debe ayudar a los estudiantes y cuándo no, y la necesidad que presentan algunos niños de ser acompañados en los procesos de resolución, o que:

Muchas veces, los fallos de los estudiantes en la resolución de problemas no se deben a falta de conocimientos matemáticos, sino a un uso ineficaz de lo que saben (NCTM, 2000, p. 58).

En relación con la actuación de resolutores exitosos, en los estándares se encuentran referencias relativas a caracterizar o explicitar qué hacen estos estudiantes; mencionando explícitamente la fluidez en cálculos al señalar que:

Comprender, pero no tener la fluidez necesaria para calcular, puede inhibir el proceso de resolución de problemas (NCTM, 2000, p. 37).

Junto a lo anterior, también aparecen el análisis cuidadoso en términos matemáticos, uso eficiente y eficaz de estrategias, uso de la metacognición (saber qué hacer y porqué se hace), planificar, actuar, buscar soluciones y no entraparse al no conseguir lo que se busca, y capacidad para comunicar su pensamiento.

Finalmente, sobre las formas de pensar la resolución, y en lo referido a las representaciones, encontramos indicaciones sobre el alumno y sobre cómo el profesor debe acompañar este proceso. En el primer tipo se encuentra la relación entre la capacidad de representar y el éxito al resolver problemas, y el desarrollo del razonamiento que provocan; seleccionar, aplicar y traducir representaciones; diferentes tipos de representaciones. Sobre las representaciones y el profesor aparecen ideas del tipo: uso de representaciones como una forma de pensar del estudiante, y la importancia de comunicarlas; dar oportunidades para representar los problemas; fomentar la comunicación y escuchar sus formas de representar; conocer las diferentes maneras de representar de los estudiantes. Esto se manifiesta indicando que los estudiantes:

Deberían utilizar representaciones informales, tales como dibujos, para destacar diversas características de los problemas (NCTM, 2000, p. 210).

Sobre modelización aparecen dos menciones, una haciendo énfasis en la reciprocidad de representación y modelización, y la segunda, detallando que las representaciones ayudan a modelizar, y que este proceso estimula el uso y el análisis de las representaciones.

Los currículos de los países ubicados en el tercil más bajo siguen la tendencia de presentar pocos focos sobre esta categoría. En el currículo argentino no se encontraron referencias, y en el chileno aparecen cuatro menciones. La primera de ellas detalla las habilidades, destrezas y conocimientos que se ponen en juego para resolver problemas, sin explicar ninguna de ellas. Otra hace referencia a la potencialidad que tiene conocer las formas de pensar de los estudiantes cuando utilizan estrategias. Las dos restantes, corresponden a ejemplos de tareas que ayudan a reconocer como piensan los estudiantes mientras resuelven problemas usando patrones o representaciones.

3.5. Formas de trabajar la resolución de problemas

Con respecto a la quinta categoría, formas de trabajar la resolución de problemas, encontramos que en el primer tercil las orientaciones curriculares de Finlandia hacen referencia a dos vías de incorporación a la resolución de problemas: enseñar *para* resolver problemas, utilizando los conocimientos matemáticos adquiridos y *a través* de la resolución, es decir, utilizar esta actividad matemática para enseñar nuevos conceptos e ideas. Esto queda de manifiesto señalando que los estudiantes sean capaces de:

Demostrar una comprensión de los conceptos asociados con las matemáticas mediante el uso de ellos para resolver problemas (National Core Curriculum for Basic Education, 2004, p. 159).

El currículo de Singapur por su parte, hace referencia a las tres vías de acceso, las dos antes nombradas y enseñar *sobre* la resolución de problemas. Además de estas menciones, aparecen ideas sobre la metacognición y sus aportes en la enseñanza por cualquiera de los tres enfoques, también aparece el uso de TIC's, específicamente el uso de las calculadoras. Esto se observa al señalar que:

Los estudiantes desarrollan... habilidades para resolver problemas a través del aprendizaje y la aplicación de las matemáticas (Curriculum Planning and Development Division, 2007, p. 5).

O explicando que:

La metacognición o "pensar sobre el pensamiento", se refiere a la toma de conciencia y la capacidad de controlar los procesos del propio pensamiento, en particular la selección y uso de estrategias de resolución de problemas (Curriculum Planning and Development Division, 2007, p. 9).

En el segundo tercil, el caso del documento español, se centra principalmente en el enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas:

Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19386).

No obstante, y como ya se señaló, el mayor énfasis está dado en la aplicación de diferentes contenidos matemáticos, infiriendo un enfoque de enseñanza para la resolución de problemas. Otro aspecto al que se hace referencia es el uso de TIC's, especialmente del uso de la calculadora. El NCTM por su parte, establece como necesarios conocimientos referidos a los tres enfoques, la metacognición, estrategias metodológicas y la evaluación de la resolución de problemas. Esto queda explicitado explicando que:

Los Estándares de procesos de resolución de problemas,... apoyan el aprendizaje de los Estándares de contenidos y se desarrollan a través de éstos: aprender contenidos supone aprender y utilizar procesos matemáticos (NCTM, 2000, p. 81).

En lo referido a los enfoques de enseñanza, se explicita cada uno de ellos y sus propósitos, además de detallar ampliamente cada uno. Sobre metacognición se mencionan su función y beneficios. En cuanto a la evaluación se mencionan instrumentos y sentido. Sobre las estrategias metodológicas, se observan algunos ejemplos: secuenciar grados de dificultad, contextos dónde usar la resolución de problemas, selección de problemas según metas, uso de feedback, conectar con otras áreas de conocimiento, uso de TIC's y la forma de agrupar a los estudiantes.

En el último tercil, las directrices argentinas hacen alusión en la mayoría de sus objetivos al modo y el lugar en que se debe utilizar la resolución de problemas. Especificando que el contenido matemático debe hacerse *a través de* situaciones problemas y *en* la resolución de problemas. Se señala que:

El reconocimiento y uso de los números naturales, de su designación oral y representación escrita y de la organización del sistema decimal de numeración en situaciones problemáticas (Consejo Federal de Educación, 2011a, p. 16).

De esta afirmación es posible inferir una de las vías o enfoques de la resolución de problemas, la enseñanza *a través de* la resolución de problemas. Esta es la única alusión referida a este tipo de categoría derivada del currículo argentino. Chile, en sus orientaciones curriculares para primaria, presenta solo dos enfoques de forma explícita: enseñar a través y para la resolución de problemas. Sin embargo, al ser declarada como una habilidad transversal que debe enseñarse en todos los niveles, se puede inferir que también está presente el enfoque de enseñanza sobre resolución de problemas. En esta línea se centran las menciones de este currículo, además de ellas, encontramos dos más, una sobre evaluación y otra sugerencia metodológica específica.

3.6. Factores afectivos y creencias

En general, en los currículos de la muestra no se hace mención a los factores afectivos y menos aún las creencias. En las directrices para primaria de los países situados en el primer tercil, encontramos dos menciones, una en cada país. El documento finlandés, muestra cómo la satisfacción y el placer deben encontrarse al resolver problemas, y en el documento de Singapur se recoge el desarrollo de la perseverancia en la resolución de problemas.

En los currículos del tercil medio, encontramos más menciones que en los anteriores, sin embargo, son pocas si se comparan con el resto de las categorías. En España, se pueden observar objetivos que apuntan a la seguridad y a la motivación frente a la resolución de problemas. En los estándares se pueden encontrar directrices similares al currículo español. Se detalla cómo se relacionan los factores afectivos y las creencias y el papel que juega el profesor en planificar experiencias de aprendizaje que contemplen estos factores afectivos. En este documento se explicita que

Es importante lo que pueden hacer los profesores para desarrollar la disposición de los alumnos para la resolución de problemas, creando y manteniendo un ambiente de clase que... les anime a explorar, arriesgarse, compartir fracasos y éxitos y preguntarse unos a otros (NCTM, 2000, p. 56).

Finalmente, en los países del último tercil, se encuentra una mención en el currículo argentino y tres en el chileno. En las directrices argentinas se hace referencia a la seguridad y confianza que propicia la resolución de problemas. En las orientaciones chilenas, se mencionan la perseverancia, seguridad y confianza y el disfrute de resolver problemas, todas estas relacionadas y expuestas como resultado de la resolución de un problema.

4. Discusión y conclusiones

Sobre el concepto de problema, se observan dos tendencias. Un grupo de países (España, Estados Unidos y Chile) que explicitan en sus currículos qué se entenderá por problema y sus clasificaciones, mientras otro grupo (Singapur, Finlandia y Argentina) solo presenta algunas clasificaciones sobre los problemas que deberán aprender los estudiantes.

En lo que respecta a la categoría de resolución de problemas encontramos que todos los documentos presentan contenidos referidos a heurísticos generales. No obstante, solo en los de España, Estados Unidos y Chile se manifiestan heurísticos específicos, mientras que en los de Estados Unidos y Argentina van aún más allá al plantear estrategias de otras áreas de contenido. Por último, en los de Finlandia y España no hacen mención a las estrategias personales de resolución. Con esto, podemos afirmar que la propuesta curricular del NCTM de los Estados Unidos es el documento más completo en esta categoría, seguido por las directrices de España, Chile y Argentina, y finalmente Singapur y Finlandia.

En la categoría de invención de problemas, nuevamente el currículo de Estados Unidos es el que más información aporta. Seguido de las orientaciones de Chile y Argentina, que cumplen con dos subcategorías: explicitación de contextos dónde usarlos y estrategias posibles. Por su parte, los documentos de Singapur, Finlandia y España solo hacen referencia a estrategias con las que realizar la invención de problemas.

Respecto a la categoría sobre las formas de pensar la resolución de problemas, todos los países estudiados, a excepción de España y Argentina hacen mención sobre el pensamiento de los estudiantes, la importancia de conocerlo y qué aspectos tener en cuenta. Sobre las demás subcategorías, solo el currículo de Estados Unidos cumple con mencionar las dificultades y conductas de resolutores exitosos.

Referente al papel que la resolución de problemas debiese jugar en el aula, nuevamente los estándares del NCTM de Estados Unidos es el único que cumple con la totalidad de las subcategorías. Las directrices de Singapur y Chile cubren casi la totalidad y las de España, Argentina y Finlandia solo mencionan el enfoque prioritario.

Finalmente, en la categoría sobre factores afectivos y creencias, Todos los currículos hacen referencia a ellas, pero solo los estándares del NCTM señalan el papel del profesor.

La Tabla 2 nos muestra una síntesis de los aspectos más relevantes obtenidos.

Tabla 2. Presencia de componentes de la resolución en los currículos

Categorías	Subcategorías	Singapur	Finlandia	España	EEUU	Chile	Argentina
Problemas matemáticos	a. Caracterización de problema			a	a	a	
	b. Clasificación de problemas según criterios diversos	b	b	b	b	b	b
Resolución de problemas matemáticos	a. Heurísticos generales	a	a	a	a	a	a
	b. Heurísticos específicos			b	b	b	
	c. Estrategias de otras áreas de contenido			c	c		c
	d. Estrategias personales	d			d	d	d
Invención de problemas	a. Contextos en dónde realizarla				a	a	a
	b. Beneficios de su uso						
	c. Estrategias metodológicas	c	c	c	b	c	c

<i>Categorías</i>	<i>Subcategorías</i>	<i>Singapur</i>	<i>Finlandia</i>	<i>España</i>	<i>EEUU</i>	<i>Chile</i>	<i>Argentina</i>
Formas de pensar la resolución de problemas	a. Pensamiento de los estudiantes	a	a		a	a	
	b. Dificultades de los estudiantes				b		
	c. Conductas de resolutores exitosos				c		
Formas de trabajar la resolución de problemas	a. Enfoques o vías de acceso	a	a	a	a	a	a
	b. Metacognición	b			b		
	c. Evaluación				c	c	
	d. Estrategias metodológicas	d		d	d	d	
Factores afectivos y creencias	a. Papel e implicaciones de diferentes emociones	a	a	a	a	a	a
	b. Rol del profesor				b		

En suma, en una primera mirada notamos la constante referencia a los estándares del NCTM como detallado y extenso. Esta situación puede deberse a lo que planteábamos al explicar la selección de la muestra: no es un documento estrictamente curricular.

Además, la revisión realizada nos muestra diferentes niveles de especificidad en las categorías analizadas que se espera de los estudiantes al resolver problemas en los diferentes currículos, no obstante estos niveles no implican un mejor rendimiento en evaluaciones internacionales. Esto nos lleva a pensar que la dificultad de llevar la resolución de problemas al aula no se encuentra en la información incluida en el documento curricular, sino en su implementación. Por tanto, los profesores y la complejidad intrínseca de resolver problemas, debiese ser un interés para la investigación. En este contexto, el trabajo que presentamos sirve como punto de partida para reflexionar sobre los factores que podrían influir en las prácticas docentes que realizan los docentes dónde se utilice la resolución de problemas, pues el currículo pareciera no ser determinante en esta situación.

Por otro lado, esta comparación y descripción hecha, nos permite encontrar puntos coincidentes con Stacey (2005) al señalar que la resolución de problemas toma dos posiciones en los currículos: como una meta por sí misma y como un camino para lograr lo que entendemos como competencia matemática. No obstante, al igual que en estudios anteriores (e.g. Benavides, Brieba, Castro y Villarraga, 2004; Stacey, 2005) a pesar de este posicionamiento de los currículos, se observan numerosas alusiones a aplicar los contenidos en la resolución de problemas. Esta dicotomía podría provocar que los profesores interpreten el proceso de resolver problemas como resolver PAEV o problemas rutinarios, dejando de lado la resolución de problemas que involucre a los estudiantes en tareas de alto nivel cognitivo para las que no tienen estrategias inmediatas y que fomenten su desarrollo del pensamiento matemático (English y Gainsburg, 2016; Lesh y Zawojewski, 2007; Lester y Kehle, 2003). En esta misma línea, sería interesante la identificación de cuál es la repercusión que tienen los documentos curriculares propuestos en las prácticas docentes que utilizan la resolución de problemas.

Este estudio nos permite afirmar que la investigación sobre la enseñanza de la resolución de problemas debiese centrar el interés de la comunidad científica, pues el conocimiento que exige a los docentes es amplio y complejo. En síntesis, pareciera ser que la complejidad en la naturaleza del resolver un problema y los énfasis diferentes que muestran los currículos es un factor más, al difuso escenario que ha mostrado la enseñanza de la resolución de problemas en los últimos 30 años (Lester, 2013).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con ayuda del Proyecto «Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico)

Referencias

- Benavides, M., Briebe, C., Castro, E. y Villarraga, M. (2004). La resolución de problemas en el currículum chileno. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 17, pp. 807-812). DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Bessot, A. y Comiti, C. (2006). Some comparative studies between french and vietnamese curricula. En F. K. S. Leung, K.-D. Graf y F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions-A Comparative Study of East Asia and the West* (pp. 159-179). New York, NY: Springer.
http://dx.doi.org/10.1007/0-387-29723-5_10
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz, España: SEIEM.
- Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT*, 3(1), 19-36.
- Consejo Federal de Educación. (2011a). *Núcleos de aprendizajes prioritarios. 1° Ciclo Educación Primaria. 1°, 2° y 3° Años*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación.
- Consejo Federal de Educación. (2011b). *Núcleos de aprendizajes prioritarios. 2° Ciclo Educación Primaria. 4°, 5° y 6° Años*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación.
- Curriculum Planning and Development Division. (2007). *Mathematics syllabus primary*. Singapore: Ministry of Education.
- English, L. D. y Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st century mathematics curriculum. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd ed.) (Vol. 3, pp. 313-335). New York, NY: Taylor and Francis.
- Goldstein, H. (2004). International comparisons of student attainment: Some issues arising from the PISA study. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practice*, 11(3), 319-330.
<http://dx.doi.org/10.1080/0969594042000304618>
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5a ed.). DF, México: McGraw-Hill.
- Kanes, C., Morgan, C. y Tsatsaroni, A. (2014). The PISA mathematics regime: knowledge structures and practices of the self. *Educational Studies in Mathematics*, 87(2), 145-165. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-014-9542-6>
- Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Papers from a research workshop* (pp. 7-20). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 763-804). Charlotte, NC: NCTM.
- Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1 y 2), 245-278.
- Lester, F. K. y Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematical problem solving, learning, and teaching* (pp. 501-517). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la educación primaria. *BOE*, (52), 19349-19420.
- Ministerio de Educación (2012). *Bases curriculares educación básica*. Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.
- National Core Curriculum for Basic Education (2004). *National core curriculum for basic education intended for pupils in compulsory education*. Helsinki, Finlandia: National Board of Education.
- National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: Autores.
- NCTM (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Trans.). Sevilla, España: SAEM THALES.

- NCTM (2010). *Makingithappen. A guide to interpreting and implementing common core state standards for mathematics*. Reston, VA: Autor.
- OECD (2005). *The definition and selection of key competencies. Executive summary*. París, Francia: OECD Publishing.
- OECD (2014). *PISA 2012 results: What students know and can do (Volume I, Revised edition, February 2014)*. París, Francia: OECD Publishing.
- Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación, (Extraordinario 2006)*, 275-294.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.
- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., et al. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grows (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan.
- Son, J. W. y Senk, S. L. (2010) How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 117-142. <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9229-6>
- Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 341-350. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.004>
- Wu, M. y Zhang, D. (2006). An overview of the mathematics curricula in the west and east. En F. K. S. Leung, K.-D. Graf y F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions-A Comparative Study of East Asia and the West* (pp. 181-193). New York, NY: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/0-387-29723-5_11

Juan Luis Piñeiro. Licenciado en Educación por la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Postítulo en Educación Matemática por la Universidad de Santiago de Chile. Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada. Doctorando en el programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada en el grupo de investigación FQM-0193 "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico". Se ha desempeñado como docente en colegios y universidades chilenas.

Email: juanluis.pineiro@gmail.com

Elena Castro-Rodríguez. Doctora en Didáctica de las Matemáticas. Profesora contratada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de Universidad de Granada. Su investigación se centra en el ámbito del pensamiento numérico y la formación inicial del profesorado. Es miembro del grupo de investigación FQM-0193 "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" (<http://fqm193.ugr.es/>).

Email: elenacastro@ugr.es

Enrique Castro Martínez. Catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Miembro del grupo de investigación FQM-0193 "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" (<http://fqm193.ugr.es/>)

Email: ecastro@ugr.es