http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351

Educación Matemática en la Infancia

Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización

Eduardo Merino
Universidad de Granada, edumc15@hotmail.com
María C. Cañadas
Universidad de Granada, mconsu@ugr.es
Marta Molina
Universidad de Granada, martamg@ugr.es

Fecha de recepción: 14-02-2013
Fecha de aceptación: 14-04-2013
Fecha de publicación: 15-07-2013

RESUMEN

En este artículo presentamos parte de los resultados de una investigación más amplia cuyo principal objetivo es indagar sobre las estrategias y representaciones que utilizan alumnos de quinto de educación primaria cuando abordan una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. Recogimos información en el aula habitual de un grupo de 20 alumnos del citado curso, mediante una tarea escrita constituida por diez cuestiones que involucran relaciones funcionales entre dos variables. En este artículo mostramos el análisis y resultados de las respuestas a cuatro de esas cuestiones. Destacamos la diversidad de representaciones utilizadas, el uso de diferentes patrones como estrategia más frecuente, y las evidencias obtenidas de la capacidad de generalización de los escolares de quinto de educación primaria.

Palabras clave: Educación primaria, ejemplo genérico, generalización, patrón, relación funcional, representación.

Representations and patterns used by fifth grade students in a generalization task

ABSTRACT

In this article we present some of the results of a wider research study whose main goal is to investigate the strategies and representations used by Year 5 students in a generalization task which is based on a generic example. We collected information in the regular classroom for a group of 20 students of that year, through a writing generalization task that involves ten questions related to functional relations between two variables. In this paper we present the analysis and results of the answers to four questions. We emphasize the diversity of representations used in the responses, the use of various patterns as the most frequent strategy, and the evidence of students' generalization capacity.

Key words: Functional relationship, generic example, generalization, pattern, primary school, representation.

1. Introducción

Las razones que impulsan esta investigación se asemejan a las consideraciones de las que se nutre la propuesta *early algebra*. Como recoge Molina (2009), esta propuesta de innovación curricular surgida hace poco más de una década en la comunidad internacional de investigadores en Educación Matemática consiste en la "algebrización del currículo" de las matemáticas escolares (Kaput, 2000) y sugiere promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas en un ambiente en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan y argumenten (Blanton y Kaput, 2005). El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) comparte estas consideraciones y afirma que el álgebra ha de ser tratada longitudinalmente desde la educación infantil, para ayudar a los escolares a "construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior" (NCTM, 2000, p. 37). La propuesta *early algebra* también aparece reflejada en documentos curriculares de otros países tales como Australia (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2011), Canadá (Ontario Ministry of Education and Training, 2005), China y Corea (Beberly, 2004, citado por Ali y Alsayed, 2010), Japón (Watanabe, 2008) o Portugal (Canavaro, 2009; Pimentel, 2010). En España, si bien los currículos de educación primaria e infantil no incluyen explícitamente contenidos relacionados con el álgebra, reconocemos algunos elementos acordes con la propuesta early algebra porque se destaca la necesidad de establecer y generalizar patrones numéricos, geométricos y gráficos en la educación primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007).

Una de las aproximaciones al early algebra recomendada para los estudiantes de los primeros cursos de educación primaria, e incluso infantil, es el enfoque funcional. Este enfoque considera el uso del álgebra en situaciones concretas, de una forma significativa, con la función como contenido matemático protagonista (Drijvers, Dekker y Wijers, 2011). Se centra la atención en el concepto de función, destacando su conexión con el desarrollo de habilidades algebraicas y con la noción de sentido numérico: "El trabajo con funciones depende (de) y promueve la comprensión de variables, la manipulación de fórmulas y el establecimiento de relaciones entre representaciones tales como tablas, gráficos y fórmulas" (Doorman y Drijvers, 2011, p. 19). En este marco, nos centramos en los patrones, la generalización, las representaciones y el establecimiento de relaciones entre ellas como elementos útiles para abordar en el aula este enfoque funcional del álgebra.

Existen variados trabajos relacionados con la visión funcional de la early algebra, que constituyen los antecedentes de nuestra investigación. Por ejemplo, Blanton y Kaput (2004) presentan un estudio que aborda cómo los alumnos de grados elementales trabajan con y expresan funciones. Los datos fueron analizados de acuerdo a las formas de representación que los estudiantes usan, la progresión en el lenguaje matemático que ponen de manifiesto, las operaciones que emplean y cómo atienden a una o más variables. Los resultados indican que los estudiantes de las etapas de educación infantil y primaria son capaces de presentar una comprensión de estos elementos en grados más tempranos de los que se les suponen a priori. En particular, los datos sugieren que son capaces de describir relaciones de correspondencia entre variables de primer grado. Aunque el descubrimiento de patrones simples está ya incluido en el currículo elemental de Estados Unidos, a partir de los resultados de este estudio Blanton y Kaput concluyen que sería aconsejable que los alumnos tuvieran oportunidad de trabajar estos contenidos en edades más tempranas de las que usualmente lo hacen.

Carraher, Martínez y Schliemann (2007) analizan la capacidad de generalización de 15 estudiantes de 8 años por medio de la realización de tareas sobre figuras geométricas en las que los alumnos han de generalizar a partir de casos particulares. Trabajan así con patrones e introducen el concepto de función a través de la tarea, proporcionándoles datos para que produzcan valores para $f(n)$ cuando n aumenta. Estos investigadores concluyen que la generalización matemática no debe trabajarse en educación primaria de la misma forma que en niveles superiores. Es necesario trabajar la generalización a partir de la identificación de patrones, relaciones y estructuras, dejando para una introducción posterior y gradual su formulación mediante notación algebraica.

Warren, Miller y Cooper (2013), en el Early Years Generalizing Project (EYGP), investigan cómo escolares australianos de 5 a 9 años comprenden y expresan generalizaciones, y cómo identifican patrones y funciones. Los resultados revelan que los alumnos inicialmente se apoyan en gestos y en conversaciones consigo mismos para buscar y expresar la generalización y que, una vez conseguido esto, el uso de conversaciones y gestos tiende a disminuir.

Brizuela y Martínez (en prensa) se centran en refutar, mediante ejemplos, algunas de las limitaciones en el álgebra que se les suponían a los estudiantes de educación primaria. Entre estas limitaciones se encuentra el que los alumnos únicamente se centran en encontrar respuestas numéricas. Las autoras comprobaron que experiencias tempranas con ciertas tareas vinculadas a la visión funcional del álgebra tuvieron un efecto positivo a largo plazo en los niños en Estados Unidos, quienes pudieron manejar con fluidez un lenguaje matemático caracterizado por el uso de letras para representar variables y cantidades generalizadas (p. 284).

En España, se han realizado varios estudios que exploran las capacidades que los estudiantes de educación secundaria ponen de manifiesto en el contexto de tareas de generalización. Castro (1995) realiza una investigación con estudiantes de 12 a 14 años y señala la efectividad de la enseñanza en el reconocimiento de patrones a través de las configuraciones puntuales para facilitar la comprensión de las nociones de término general, patrones y relaciones numéricas, entre otras. Como continuación de esta línea de investigación, Cañadas, Castro y Castro (2008) describen los patrones y la generalización que llevan a cabo 359 estudiantes de 14 a 16 años en la resolución del problema de las baldosas. Al igual que ocurre en estos estudios, la mayoría de investigaciones desarrolladas en España sobre generalización han trabajado con alumnos de educación secundaria, donde el álgebra tiene un espacio específico en el currículo. En este artículo avanzamos en esta línea para niveles previos del sistema educativo.

Nuestro interés es indagar en la capacidad de generalización de un grupo de alumnos de 5º de educación primaria. En este artículo presentamos parte de un estudio más amplio (para más información, ver Merino, 2012). Nos centramos en describir las representaciones y patrones utilizados en varias cuestiones propuestas a los estudiantes a partir de un ejemplo genérico, que pueden llevar al desarrollo de generalizaciones.

2. Marco conceptual

En este apartado definimos los elementos conceptuales clave que utilizamos en este artículo. Dentro de la early algebra, nos centramos en: (a) generalización, (b) patrones, y (c) representaciones. En la tarea que proponemos a los alumnos utilizamos el ejemplo genérico como un tipo específico de caso particular. A continuación concretamos el significado de estos términos en nuestro trabajo.

2.1. Patrones y generalización

La idea básica del patrón surge de la repetición de una situación con regularidad (Castro, 1995). Polya (1966) señala que el reconocimiento de patrones es esencial en la habilidad para generalizar ya que, a partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos. Para patrones lineales, Stacey (1989) distingue entre generalización cercana, que implica encontrar un patrón para elementos próximos o elementos que pueden ser hallados por conteo, dibujando o haciendo una tabla; y generalización lejana, en la que encontrar un patrón requiere identificar la regla general.

Kaput (1999) considera que la generalización es

> … extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos (p. 136).

Reid (2002) y Cañadas y Castro (2007), con base en la relación entre patrones y generalización establecida por Pólya (1966), presentan diferentes pasos que permiten describir el procedimiento que se puede seguir desde el trabajo con casos particulares para llegar a la generalización, pasando por la identificación de patrones.

Las tareas de generalización involucran la búsqueda de patrones y su solución exige hallar un elemento a partir de otros dados o conocidos. Estas tareas radican en generar, a partir de los casos particulares dados, nuevos casos particulares o la expresión del término general. Para ello, es necesario generar una pauta o patrón de comportamiento de los elementos conocidos. Existen diferentes tipos de tareas de generalización. Una de ellas es la que parte de un ejemplo genérico, definido por Balacheff (2000) como un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase. Dicho ejemplo es el único caso particular conocido en la tarea y, a partir de él, se trata de identificar la generalización.

Entendiendo una estrategia como un "procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual" (Rico, 1997, p. 31), la identificación de patrones es una de las estrategias para resolver una tarea de generalización.

2.2. Representaciones

En este artículo utilizamos el término representaciones para referirnos a las representaciones externas, que son las que proporcionan información perceptible, a través de los sentidos, del trabajo que llevan a cabo los resolutores de tareas. Estas representaciones son "notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes" (Castro y Castro, 1997, p. 96).

Las representaciones verbales, pictóricas, numéricas y simbólicas son las que tienen mayor relevancia para nuestra investigación. Las representaciones verbales se sirven del lenguaje natural para referirse a los conceptos y procedimientos matemáticos a representar. Las representaciones pictóricas utilizan únicamente recursos visuales, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011). Las representaciones numéricas se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático. Las representaciones simbólicas se caracterizan por el uso del simbolismo algebraico, siendo las representaciones que suponen un mayor grado de abstracción para los estudiantes. Así mismo, tenemos en cuenta las representaciones múltiples, que resultan de la combinación de dos o más representaciones diferentes (Kolloffel, Eysink, De Jong y Wilhelm, 2009).

3. Objetivos

En la investigación que describimos abordamos dos objetivos de investigación:

(a) identificar y describir las estrategias utilizadas por alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico, prestando especial atención al uso de patrones, y

(b) describir las representaciones que estos alumnos utilizan en dicha tarea.

4. Método

La investigación realizada es de carácter exploratorio y descriptivo. La recogida de datos tuvo lugar en el curso académico 2011-2012 con una muestra intencional de 20 alumnos de 5º curso de educación primaria, con edades comprendidas entre los 10 y 11 años, de un colegio privado de Málaga (España).

Según la información suministrada por la maestra de dicho grupo de alumnos, durante el mencionado curso académico los alumnos no habían trabajado tareas de generalización.

4.1. Instrumento de recogida de información

El instrumento utilizado para la recogida de información fue una prueba escrita elaborada por los autores de este trabajo para su resolución de forma individual en una hora habitual de clase de matemáticas. Tras la realización de dos estudios piloto, elaboramos la versión definitiva de la prueba que describimos a continuación.

Dado nuestro interés en el enfoque funcional de la propuesta early algebra, la tarea propuesta implica relaciones de dependencia entre variables. En una función, los valores de una variable (variable dependiente) varían según los valores de la otra (variable independiente). Atendiendo a ambos tipos de variables, distinguimos entre “relación directa” y “relación inversa”, según si se conoce el valor de la variable independiente y se desconoce el de la variable dependiente, o viceversa. Esta distinción constituye una de las variables de tarea en el diseño de la prueba. Otras variables de tarea son:

- Generalización cercana/lejana (según términos de Stacey, 1989).
- Número de variables involucradas: dos o tres.

Según estas variables de tarea, enunciamos 10 cuestiones a las que los alumnos debían responder a partir de la información presentada en la figura 1.

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

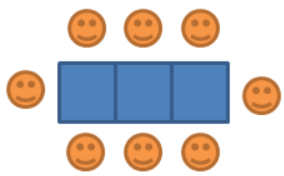

Figura 1. Texto e imagen presentados en la tarea

Las relaciones directa o inversa para esta tarea quedaron definidas del siguiente modo:

- Relación directa: se desconoce el número de niños que se sientan a partir de un número de mesas conocido.
- Relación inversa: se conoce el número de niños que acuden a la fiesta y se desconoce el número de mesas que se necesitan.

En este artículo recogemos el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a las cuestiones 1, 2, 3 y 5, que son las que involucran la relación directa entre las variables consideradas. Estas cuestiones son las siguientes:

- Cuestión 1: ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?
- Cuestión 2: ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.
- Cuestión 3: Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.
- Cuestión 5: Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

4.2. Recogida de información

La sesión se desarrolló en el tiempo (50 minutos) y en el lugar habitual de clase de matemáticas. La aplicación de la prueba la llevó a cabo el primer autor de este trabajo, con la presencia en el aula de la docente del grupo. Él introdujo la situación, insistiendo en la importancia de justificar las respuestas y resolvió las dudas que los estudiantes presentaron durante el trabajo.

4.3. Categorías de análisis

Para abordar nuestros objetivos de investigación, definimos una serie de categorías con base en el marco conceptual, los antecedentes de este trabajo y las respuestas de los alumnos. Las categorías de análisis del trabajo presentado en este artículo son:

- Representación: pictórica, verbal, numérica, simbólica o múltiple.
- Estrategia: conteo (los alumnos cuentan elementos para dar respuesta a la cuestión), uso de patrón (los alumnos identifican algún patrón, que puede ser completo/incompleto y apropiado/inapropiado, para una cuestión concreta), operación sin uso de patrón (los alumnos utilizan alguna operación que no podemos relacionar con un patrón para la cuestión), y repetición de enunciado (los alumnos repiten las instrucciones dadas en el enunciado general de la prueba).
- Caso particular/general: distinguimos entre caso particular o caso general, según el alumno utilice cifras concretas para referirse a uno o varios casos específicos o responda haciendo referencia a una expresión general para cualquier caso.
- Respuesta correcta/incorrecta: hace referencia a la validez de la respuesta a la cuestión.
- Respuesta directa: aquellos casos en los que no hay ninguna explicación para la respuesta dada y, por tanto, la respuesta no aporta evidencias sobre el tipo de estrategia utilizada.

4.4. Proceso de codificación

Utilizamos estas categorías para codificar las respuestas de los alumnos a las cuatro cuestiones presentadas. Inicialmente, elaboramos un listado de valores para la categoría "estrategias". Llevamos a cabo el análisis de datos teniendo en cuenta los valores específicos de la citada categoría. Analizamos los trabajos de los estudiantes, registrando para cada estudiante y cada cuestión, el valor de cada una de las categorías. En algunos casos, adicionalmente realizamos anotaciones que nos ayudaron a interpretar la asignación de un valor determinado o que aportan información de interés en relación a los objetivos de investigación. Entre estas anotaciones se encuentran los tipos de dibujo realizados (completo, incompleto, o no correspondiente al patrón trabajado), o las justificaciones dadas por algunos alumnos al no saber responder la cuestión.

5. Resultados

En cuanto a los resultados, presentamos, en primer lugar, la información referente al uso de estrategias, con especial atención a los patrones; y, en segundo lugar, los resultados de las representaciones empleadas por los estudiantes.

Organizamos los resultados en tablas de doble entrada en las que distribuimos los alumnos por filas y las cuestiones por columnas. Para referirnos a los alumnos, utilizamos la letra A junto con el número que le ha sido asignado aleatoriamente a cada uno (ej., A5). En cuanto al uso de patrones, explicitamos la estructura de cada patrón usando las letras M y N para denotar a un número concreto que el alumno utiliza relativo al número de mesas y/o niños, respectivamente. Por ejemplo, para la Cuestión 2, el patrón M×2+2, indica que el alumno ha multiplicado las 8 mesas por 2 y le ha sumado 2 para obtener el número de niños requerido.

5.1. Estrategias

Con base en las categorías de análisis descritas, en la tabla 1 resumimos las estrategias utilizadas por cada alumno para cada una de las cuatro cuestiones.

Tabla 1. Resumen de estrategias utilizadas

	Estrategias			
Alumnos	**Cuestión 1**	**Cuestión 2**	**Cuestión 3**	**Cuestión 5**[1]
A1	Conteo	Conteo	M×3*	Repite enunciado
A2	Conteo	M×8*	M×3*	M×3
A3	Respuesta directa	Respuesta directa	M×2+2	M×2+2
A4	Respuesta directa	M×8*	M×8*	Opera “dividiendo”
A5	Respuesta directa	M×2+2	(M:3) ×8*	M×2+2
A6	Respuesta directa	Conteo	M:2+2*	M:2
A7	Conteo	M×8*	Opera 120+64*	Opera “sumando”
A8	Conteo	Respuesta directa	M×2+2	Opera “dividiendo”
A9	N+N+1+1	M+M+1+1	M+M+1+1	M×2+1+1
A10	Respuesta directa	Respuesta directa	M×2+2	M×2+1+1
A11	Respuesta directa	Conteo*	Mx3*	Opera 3×8
A12	Respuesta directa	Respuesta directa	M×2+2	Repite enunciado
A13	Respuesta directa	M×2+2	M×2+2	M×2+2
A14	Conteo	Respuesta directa*	M×2*	M+M+2
A15	Respuesta directa	Conteo*	-	-
A16	Conteo	M×2+2	M×2+2	(M-2)×2+2×3
A17	N+N+2	M+M+2	M×2+2	Respuesta directa
A18	Respuesta directa	Conteo	-	Repite enunciado
A19	Conteo	M×4*	M×4*	Repite enunciado
A20	Conteo	M×2+2	M×2+2	M×2+2

Nota. Repite enunciado = repetición de instrucciones ofrecidas en el enunciado. Opera = operación sin uso de patrón, en la que los alumnos ofrecen cálculos concretos, o solo aluden verbalmente al tipo de operación usada “dividiendo” o “sumando”. * = Respuesta incorrecta

[1] No se analiza la corrección o incorrección en la Cuestión 5, debido a que la mayoría de las respuestas no pueden considerarse correctas ni incorrectas.

A partir de la información presentada en la tabla 1, destacamos algunos resultados atendiendo, en primer lugar, de forma global, a cada una de las cuestiones; y, en segundo lugar, a la actuación de cada alumno en el conjunto de las cuestiones objeto de análisis.

En la Cuestión 1, todos los alumnos aludieron solo al caso particular y dieron respuestas correctas. La mitad de los alumnos (10) respondieron de forma directa. Del resto, ocho alumnos llegaron a la respuesta por medio del recuento y dos alumnos (A9 y A17) obtuvieron su respuesta a partir de las sumas correspondientes a los patrones N+N+1+1 (ver figura 2) y N+N+2. Destacamos que identificaron una estructura en la situación propuesta, percibiendo que se sienta un niño por cada lado de la mesa y dos (1+1 o 2) en los extremos de la fila de mesas.

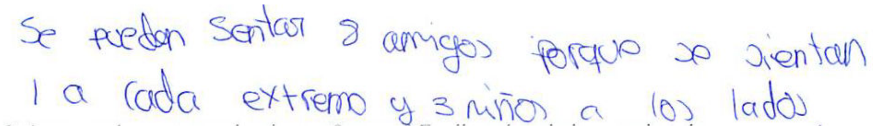

Figura 2. Respuesta de A9 a la Cuestión 1

Cinco de los alumnos dieron una respuesta directa a la Cuestión 2. En las respuestas de los otros 15 alumnos identificamos diversas estrategias. El conteo es la estrategia más frecuente (5 alumnos). El resto de estrategias identificadas implican el uso de patrones, distinguiéndose cinco patrones diferentes, tres de los cuales son apropiados a la cuestión planteada, es decir, conducen a una respuesta correcta. Estos son M+M+1+1, M+M+2 y M×2+2, donde M es 8, que es el número de mesas. Los no adecuados son M×4 y M×8, y como fruto de su uso 4 alumnos dan una respuesta incorrecta. Además, A11 y A15, que usan la estrategia de conteo, y A14 que da una respuesta directa, también ofrecen una respuesta incorrecta a esta cuestión. Por otra parte, todos los alumnos hacen referencia a un caso particular al dar su respuesta a esta cuestión.

Para la Cuestión 3, a diferencia de las cuestiones anteriores, ningún alumno dio una respuesta directa y hubo dos que no respondieron. Todos los alumnos que respondieron salvo uno (A7) utilizaron alguna estrategia basada en el uso de patrones. A7 suma 120 y 64 y no da ninguna explicación al respecto. En esta cuestión, el número de respuestas incorrectas asciende a 9. Al igual que en la cuestión anterior, todos los alumnos hacen referencia a un caso particular.

En la Cuestión 5 se observa una sola respuesta directa (A17) y hay un solo alumno (A15) que no responde. Hay cuatro alumnos que repitieron la información que se les proporcionaba en el enunciado, respuesta que no se había producido en cuestiones anteriores. También en esta cuestión observamos la operación sin uso de patrón con mayor frecuencia que en las otras cuestiones (en el caso de A11, una operación concreta, 8x3, y en otros 3 casos una respuesta verbal en la que los alumnos indicaron que dividirían o sumarían). Centrándonos en el uso de patrones, diez alumnos usaron algún patrón en su respuesta. El patrón M×2+2 es el más utilizado (4 alumnos). Destaca A16 con el uso del patrón correcto y apropiado (M-2)×2+2×3, que es el único caso en que se da. Además, en esta cuestión 11 de los 19 alumnos que responden lo hacen para un caso general, mientras que 8 hablan sobre un caso particular. Se puede decir que los 11 alumnos que responden con una expresión válida para cualquier número de mesas, han llegado a expresar una generalización para el caso de la relación directa entre variables.

En cuanto a las tendencias observadas en los alumnos a lo largo de las cuatro cuestiones, como se puede observar en la tabla 1, por lo general los alumnos mantuvieron el uso de una misma estrategia a lo largo de las cuestiones cuando siguieron como estrategia el uso de un patrón determinado. Si bien en las Cuestiones 1 y 2 el uso del conteo o las respuestas directas son las situaciones más frecuentes, estos tipos de respuestas tienden a desaparecer en las Cuestiones 3 y 5. Solo A17 dio una respuesta directa en la Cuestión 5. La mayoría del resto de los alumnos respondieron a las dos últimas cuestiones con el uso de algún patrón (17 lo usaron en, al menos, una cuestión). Otras estrategias utilizadas fueron operaciones sin evidencia del uso de patrones y repetición del enunciado.

Identificamos el uso de diferentes patrones por parte de los alumnos en todas las cuestiones. El patrón utilizado con mayor frecuencia es M×2+2 (9 alumnos lo usan en alguna cuestión). Mostramos un ejemplo en la figura 3.

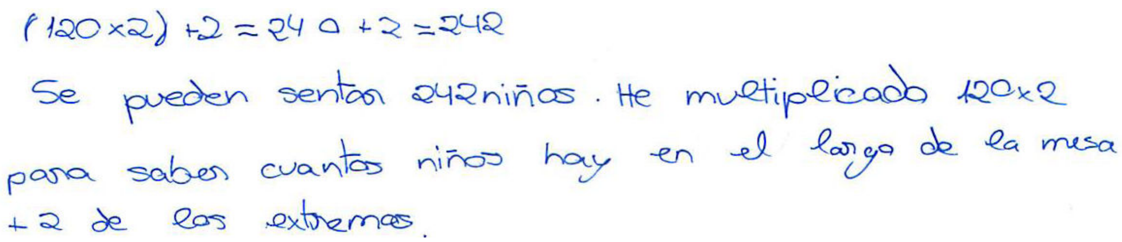
(120×2) +2 = 240 +2 = 242
Se pueden sentar 242 niños. He multiplicado 120×2 para saber cuantos niños hay en el largo de la mesa +2 de los extremos.

Figura 3. Respuesta de A20 a la Cuestión 3

Resaltamos la multiplicación del número de mesas por otro número (M×2, M×3, M×4 o M×8). Esta estrategia, que condujo a los alumnos a una respuesta errónea, fue utilizada por siete alumnos, al menos una vez cada uno.

Destacamos el caso del alumno A16, quien utilizó un patrón correcto en la Cuestión 5 no utilizado por ningún otro alumno en ninguna otra cuestión: (M-2)×2+2×3. Este patrón corresponde a la distinción de las mesas de los extremos del resto de mesas, a la hora de calcular el número de niños que pueden sentarse. Los alumnos A9 y A17 son los únicos que utilizaron un patrón en la Cuestión 1: N+N+1+1 y N+N+2. A9 mantuvo el patrón, usando M+M+1+1 en las Cuestiones 2 y 3, y cambia a M×2+1+1 en la Cuestión 5. Sin embargo, A17 mantuvo M+M+2 en la Cuestión 2, cambia a M×2+2 en la Cuestión 3 y dio una respuesta directa en la Cuestión 5.

También identificamos alumnos que no siguieron una pauta, a priori, lógica en sus respuestas a las diferentes cuestiones. Por ejemplo, A4 respondió con el patrón Mx8 a las Cuestiones 2 y 3, pero en la Cuestión 5 respondió que usaría la división sin dar más detalles. Un caso parecido es A8, quien utilizó el patrón M×2+2 en las Cuestiones 2 y 3, pero en la Cuestión 5 respondió que explicaría el caso "dividiendo".

Por último, si atendemos a la referencia a casos particulares o generales, vemos que en las cuestiones 1, 2 y 3, todos los alumnos aludieron en sus respuestas al caso particular por el que se les preguntó. Sin embargo en la Cuestión 5, solo 8 alumnos se refieren a un caso particular, mientras que 8 dan su respuesta para un caso general.

5.2. Representaciones

En la tabla 2 resumimos las representaciones empleadas por los alumnos, atendiendo además a la corrección o incorrección de las respuestas. Debido a que la información arrojada por la Cuestión 1 a cerca de las representaciones no es relevante, no la incluimos en esta tabla. En esa cuestión, las representaciones que utilizaron los alumnos fueron numérica y/o verbal según la manera de representar el número de niños: "8" u "ocho".

Posteriormente presentamos el análisis de los resultados para cada cuestión, seguido del de las tendencias detectadas en las respuestas de los alumnos a las cuatro cuestiones objeto de análisis.

Tabla 2. Representaciones utilizadas

Alumnos	Representaciones		
	Cuestión 2	**Cuestión 3**	**Cuestión 5**
A1	Múltiple (P/V)	Múltiple (N/V)*	V
A2	Múltiple (N/V)*	Múltiple (N/V)*	V
A3	Múltiple (P/V)	Múltiple (N/V)	Múltiple (S/V)
A4	Múltiple (N/V)*	Múltiple (N/V)*	V
A5	Múltiple (P/V)	Múltiple (N/V)*	V
A6	Múltiple (P/V)	Múltiple (P/N/V)*	V
A7	N*	N*	V
A8	Múltiple (P/V)	Múltiple (N/V)*	V
A9	Múltiple (P/V)	Múltiple (N/V)	Múltiple (P/V)
A10	Múltiple (P/V)	V	V
A11	Múltiple (P/V)*	N*	N
A12	Múltiple (P/V)	Múltiple (P/N/V)	Múltiple (P/V)
A13	Múltiple (N/V)	Múltiple (N/V)	V
A14	V*	Múltiple (N/V)*	V
A15	Múltiple (P/V)*	-	-
A16	Múltiple (N/V)	Múltiple (N/V)	V
A17	Múltiple (N/V)	Múltiple (N/V)	Múltiple (P/V)
A18	Múltiple (P/V)	-	V
A19	Múltiple (N/V)*	Múltiple (N/V)*	V
A20	Múltiple (P/V)	Múltiple (N/V)	V

Nota: P = Pictórica. V = Verbal. N = Numérica. S = Simbólica. * = Respuesta incorrecta.

Como se puede observar en la tabla 2, para la Cuestión 2, todos los alumnos salvo A7 y A14 utilizan una representación múltiple. Entre ellos, la más utilizada es la combinación entre representación pictórica y verbal (12), mientras que 6 alumnos han usado la combinación de representación numérica y verbal.

Aun siendo la representación verbal la más utilizada, 12 alumnos se valieron de la representación pictórica. Cinco de estos alumnos utilizaron el conteo y explicaron haberse ayudado del dibujo para obtener la respuesta. Diez de esos 12 alumnos hicieron un dibujo completo y adecuado para la situación propuesta (por ejemplo, ver figura 4). A8 realizó el dibujo incompleto y respondió adecuadamente la cuestión. Las líneas que delimitan las mesas son el único elemento ausente en su representación. Por otra parte, A11 distribuyó las mesas de forma diferente en su dibujo (ver figura 7), dando una respuesta correcta para la disposición que él asignó, pero no para la descrita en la situación planteada. Todos los alumnos que realizaron el dibujo completo respondieron adecuadamente a la pregunta, salvo A15, quien da como respuesta 64 niños.

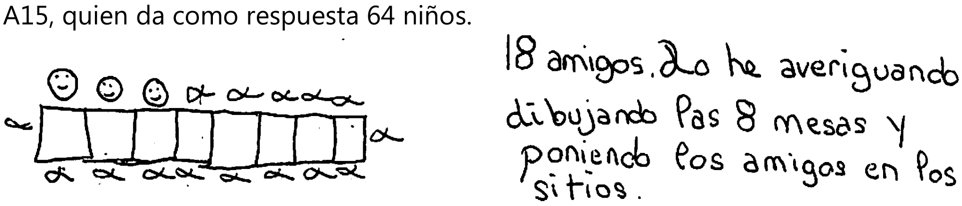

Figura 4. Respuesta de A18 a la Cuestión 2

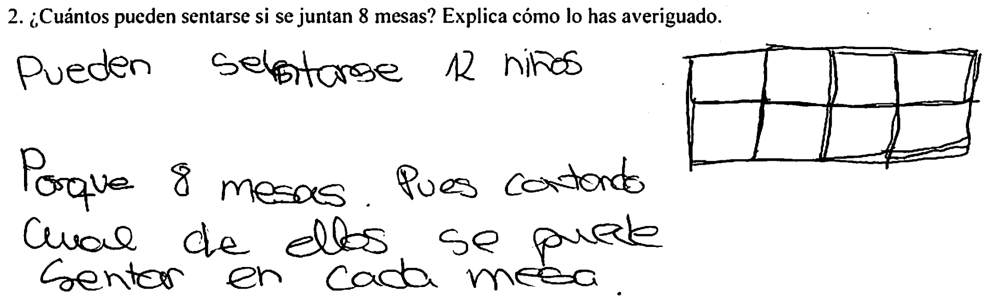

Figura 5. Respuesta de A11 a la Cuestión 2

En la Cuestión 3, como se observa en la tabla 2, 14 alumnos responden con una representación múltiple. Entre ellos, 12 usan la representación numérica y la verbal, mientras que A6 y A12 añaden un dibujo a esta combinación (representación pictórica, numérica y verbal).

Los 12 alumnos que utilizaron una representación numérica y verbal en su respuesta, usaron esta última para dar explicaciones. Solo A6 y A12 hicieron un dibujo (representación pictórica) y, en ambos casos, incompleto. En el caso de A6 (ver figura 6), el alumno hizo el dibujo como apoyo para explicar su respuesta, que basó en el cálculo. Sin embargo, A12 usó el dibujo como principal representación, como hacía en la cuestión anterior pero, al advertir la inviabilidad de dibujar 120 mesas, optó por una estrategia de cálculo. El resto de alumnos no construyó ningún tipo de representación pictórica.

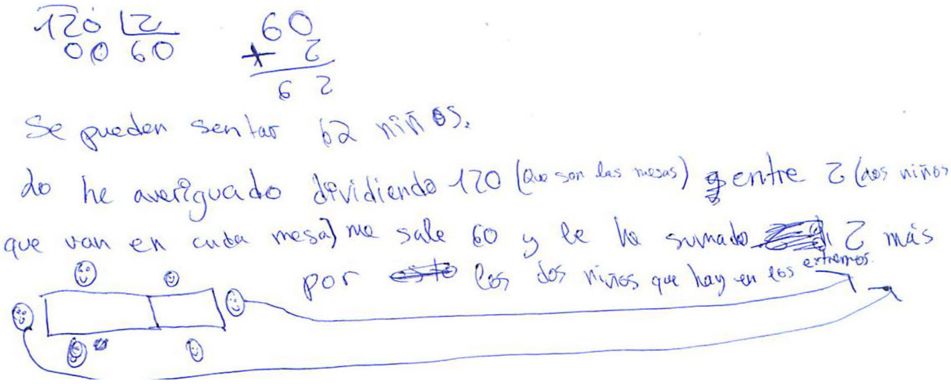

Figura 6. Respuesta a la Cuestión 3 de A6

De los 18 alumnos que responden a la Cuestión 3, diez dan una respuesta incorrecta. Todos ellos utilizan la representación numérica bien como parte de una representación múltiple, o bien por sí sola (A7 y A11). La representación múltiple que incluye a las representaciones numérica y verbal, es la que más respuestas erróneas lleva asociada (7).

En cuanto a la Cuestión 5, la representación verbal es la más común, ya que solo hay uno que no la utilizó (4 de ellos, como parte de representaciones múltiples). Destacamos A3, quien utiliza un interrogante para referirse al número de mesas (ver figura 7) utilizando una representación múltiple (verbal y simbólica).

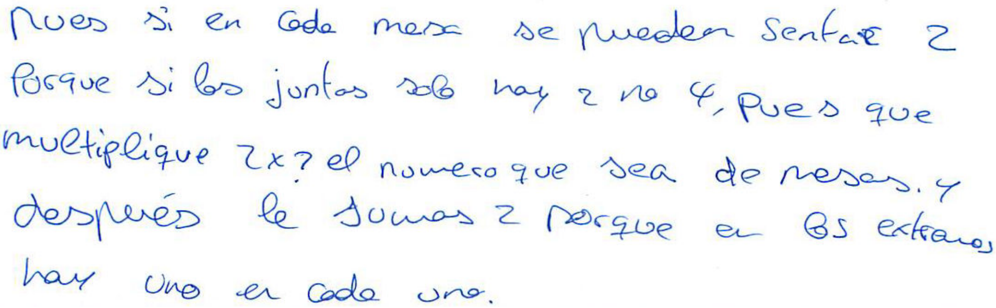

Figura 7. Respuesta a la Cuestión 5 de A3

En lo que concierne a las respuestas de las cuestiones 2, 3 y 5 de forma conjunta, la representación verbal fue la más usada en el conjunto de las tres cuestiones en las que hemos analizado las representaciones. Dieciséis alumnos utilizaron la representación verbal en todas sus respuestas, si bien la mayoría de las veces fue combinada con la numérica (sobre todo en la Cuestión 3) o con la pictórica (sobre todo en las Cuestiones 1 y 2), siendo por tanto las representaciones múltiples utilizadas por gran parte de los alumnos. De hecho, todos los alumnos menos A7, utilizaron una representación múltiple en algún caso.

La representación pictórica dejó de ser utilizada a medida que avanzaron en las cuestiones. Los alumnos la usaron frecuentemente en la Cuestión 2 (12 alumnos), pero su presencia bajó drásticamente en las Cuestiones 3 (2 alumnos) y 5 (3 alumnos). Destacamos que los cuatro alumnos que la usaron en las Cuestiones 3 y/o 5 también la utilizaron en la Cuestión 2, salvo A17, que solo la usó en la Cuestión 5.

La representación numérica fue más utilizada en detrimento de la pictórica en la Cuestión 3, ya que pasa de ser utilizada por 7 alumnos en la Cuestión 2, a 17 alumnos en la Cuestión 3, y terminó siendo usada solo por un alumno (A11) en la Cuestión 5.

Resaltamos algunos casos específicos como A3, que fue el único alumno que utilizó todos los tipos de representaciones considerados en nuestro análisis, combinando la verbal con pictórica en la Cuestión 1 (representación múltiple), numérica en la Cuestión 2 y simbólica en la Cuestión 5, siendo así además el único alumno que utilizó este último tipo de representación. Los alumnos A6 y A12 ofrecieron tres tipos de representación en sus respuestas a la Cuestión 3 (pictórica, numérica y verbal), siendo los únicos casos en que esto sucedió.

6. Discusión de resultados

En este apartado, discutimos los resultados presentados en el epígrafe anterior, distinguiendo lo que concierne a estrategias y a representaciones.

6.1. Estrategias

Una posible causa de que se mantenga el uso de una misma estrategia durante las cuatro cuestiones presentadas puede deberse a que los alumnos observen cierta similitud en los enunciados de las cuestiones, donde cambia el número asignado a las variables involucradas y, así mismo, consideren válido su razonamiento en preguntas anteriores y, por tanto, lo utilicen en las cuestiones sucesivas. Por otra parte, un cambio de estrategia en los alumnos puede ser debido al aumento de complejidad progresivo en estas cuestiones o a una mala comprensión del enunciado.

Que en las cuestiones 1 y 2 se dé una frecuencia mayor en el uso del conteo y en las respuestas directas de los alumnos puede justificarse porque en estas cuestiones se trabaja con números pequeños. Al aumentar la complejidad en las Cuestiones 3 y 5, las respuestas directas y, sobre todo, el conteo prácticamente desaparecen. Para estas últimas cuestiones, los alumnos necesitan utilizar otro tipo de estrategias como los patrones o las operaciones numéricas. Observamos cómo los alumnos que usaron estos dos tipos de estrategias en las primeras cuestiones, dieron respuestas más completas y los patrones condujeron a respuestas correctas (por ejemplo, los alumnos A9 y A17). Concretamente identificamos 5 patrones que dan lugar a respuestas correctas y que, por tanto, son considerados idóneos para obtener una generalización relativa a la situación planteada: $M+M+1+1$, $M+M+2$, $M\times2+1+1$, $M\times2+2$ y $(M-2)\times2+2\times3$.

Entre las estrategias que condujeron a respuestas erróneas, la multiplicación es la más utilizada. Esto puede deberse a una incorrecta comprensión del enunciado o a la utilización, por parte de los alumnos, de la multiplicación como recurso al reconocer cierta reiteración de una cantidad en el contexto presentado y no reconocer otra estrategia posible a utilizar.

El hecho de que los alumnos ofrecieran como respuestas la repetición de enunciado y el uso de operaciones con mayor frecuencia en la Cuestión 5 puede deberse a la mayor abstracción que requiere responder esta cuestión, al no tratar con casos particulares.

Entre los alumnos que han mantenido el uso de patrones como estrategia durante la mayoría de las cuestiones, destacamos a A2 que utilizó patrones multiplicativos (incorrectos), seguramente porque el alumno considere correcta la estrategia, y el caso de A5, que utiliza un patrón incorrecto en la Cuestión 3 (ver figura 8), cuando en las Cuestiones 2 y 5 utiliza el patrón apropiado $M\times2+2$. El uso de este patrón inapropiado parece deberse a una mala comprensión del enunciado teniendo en cuenta la explicación dada por el estudiante en la cual dice utilizar datos de respuestas anteriores.

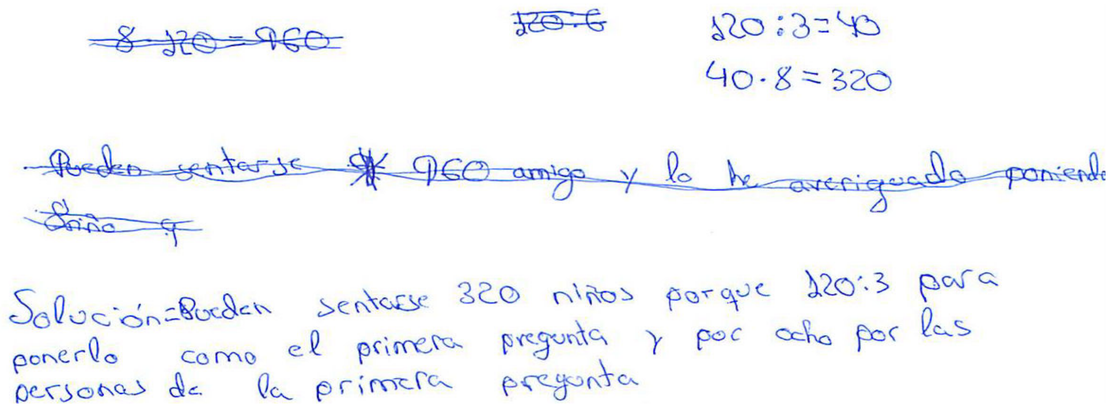

Figura 8. Respuesta de A5 a la Cuestión 3

Por último destacamos el caso de A4, quien utilizó la multiplicación (Mx8) en las Cuestiones 2 y 3 para, en la Cuestión 5, comentar que dividiría. Este alumno muestra de este modo dificultad para reconocer patrones en la situación planteada. La última respuesta puede deberse a una mala comprensión del enunciado, ya que la cifra 8 aparece en el mismo.

En cuanto a la relación entre estrategia usada y corrección o no de las respuestas, destacar que la gran mayoría de respuestas incorrectas (12 de 16) fueron precedidas del uso de un patrón inapropiado (Mx3, Mx4, Mx8, M:2+2). Solo en 4 ocasiones los alumnos usan una estrategia distinta y su respuesta es errónea: respuesta directa, conteo (2 veces) y operación (suma). Además, una vez se ha incurrido en un error los alumnos no vuelven a dar una respuesta correcta. Los 6 alumnos que fallan en la Cuestión 2 también lo hacen en la Cuestión 3, y mantienen su estrategia.

Por otra parte, el hecho de que en las cuestiones 1, 2 y 3 todos los alumnos respondan aludiendo al caso particular por el que se les pregunta, y sin embargo en la Cuestión 5 solo 8 alumnos respondan aludiendo a un caso particular, frente a 11 que lo hacen refiriéndose a un caso general, puede estar relacionado con la forma en la que se le formula la pregunta, pues no se les propone ningún caso particular en el enunciado.

6.2. Representaciones

Que la representación verbal sea la más utilizada puede justificarse por la comodidad que supone para los alumnos explicar con sus propias palabras lo que están haciendo, y más en un contexto en el que se les insistió en la importancia de que explicaran/justificaran sus respuestas. Es posible que les resultara más sencillo o fuera más habitual para ellos hacerlo de esta forma que utilizando otro tipo de representación. Se observa que, a medida que las cuestiones avanzan, y con ello aumenta su grado de complejidad y abstracción, los alumnos dejaron de utilizar las representaciones numéricas y pictóricas, usando más las verbales.

La representación numérica cobra especial protagonismo en la Cuestión 3, en lugar de la pictórica, ante la dificultad de dibujar 120 mesas. Solo dos alumnos intentan, sin éxito, utilizar la representación pictórica.

Destacábamos el caso de A3, que es el único que utiliza una representación simbólica, incluyendo el signo "?" como incógnita en una expresión en su respuesta a la Cuestión 5. Este tipo de representación da muestra de cierto grado de abstracción logrado por el alumno a estas alturas de la tarea.

Por otra parte, entre las respuestas incorrectas, destacamos que tres casos se corresponden con respuestas en las que los estudiantes solo utilizaron la representación numérica, asociada a cálculos que hacían con números involucrados en la tarea. Esto nos lleva a pensar que los alumnos, por lo general, tienen más problemas a la hora de encontrar las respuestas correctas si utilizan una representación numérica (que suele corresponderse con cálculos). Sin embargo entre los que han realizado representaciones pictóricas es mucho mayor el porcentaje de aciertos que de fallos.

7. Conclusiones

En este artículo atendemos a las estrategias y representaciones empleadas en cuestiones relativas a relaciones directas entre variables en una tarea de generalización a partir de un ejemplo genérico. Un primer objetivo de este trabajo es identificar y describir las estrategias utilizadas por los alumnos, prestando especial atención dentro de ellas al uso de patrones. Al analizar las respuestas a las cuestiones que involucran una relación directa, hemos identificado una gran variedad de estrategias utilizadas por los alumnos, con relevancia destacada del uso de patrones. De entre las estrategias utilizadas, el conteo queda relacionado con la realización de una representación pictórica ya que casi todos los alumnos que usan esa estrategia se ayudan de un dibujo para dar respuesta a cuestiones que implican cantidades pequeñas en la variable conocida. La variedad de patrones que son capaces de identificar los alumnos de quinto de educación primaria es amplia, a pesar de no estar acostumbrados a este tipo de tareas.

Considerando el análisis de las respuestas de los alumnos a todas las cuestiones, observamos que el uso de estrategias estuvo, en cierto modo, condicionado por las cantidades de niños o mesas propuestas en los enunciados a las cuestiones. Las estrategias de conteo fueron las más utilizadas cuando el número de niños y mesas era pequeño (en cuestiones relativas a la generalización cercana), mientras que en las cuestiones en que se trabajó con cifras que los alumnos consideraban demasiado grandes para dibujar (120 mesas), la tendencia generalizada fue utilizar el cálculo numérico y recurrir al uso de diferentes patrones. Así mismo, observamos que el uso de patrones al abordar cuestiones relativas a números pequeños de la variable independiente dio lugar a un mayor éxito al abordar las cuestiones relativas a números más grandes o incluso a la expresión general de la relación entre las variables. Este resultado nos conduce a proponer a los docentes que promuevan el uso de este tipo de estrategias cuando aborden cuestiones relativas a relaciones entre variables, en detrimento de estrategias de conteo.

Como segundo objetivo específico nos planteábamos describir las representaciones que los alumnos utilizan en la tarea de generalización. En relación al mismo observamos que el tipo de representación más usado fue la verbal, si bien en la mayoría de los casos estas representaciones aparecen como representaciones múltiples, acompañadas de otras numéricas o pictóricas. Por otro lado, mencionamos la presencia puntual de la representación simbólica (en la Cuestión 5).

La variedad de representaciones y de patrones identificados en una tarea de generalización, pone de manifiesto que los estudiantes de estas edades tienen los conocimientos y las herramientas necesarias para que este tipo de tareas se trabajen en el aula de primaria.

Además, solo en la Cuestión 5 ocho alumnos llegan a dar una respuesta para un caso general. En las cuestiones anteriores todos los alumnos aluden al caso particular por el que se les pregunta, incluso en la Cuestión 3 en la que se propone una generalización lejana. Por tanto la referencia directa a la posibilidad de expresar la generalización en el enunciado de la Cuestión 5, pudo ser clave para que los alumnos dieran este tipo de respuesta.

Por otra parte, observamos que, por lo general, los alumnos que dieron respuestas erróneas a las cuestiones 2 y 3, utilizaron patrones inapropiados, y representaciones numéricas (como parte de representaciones múltiples o por sí solas). Estos alumnos no utilizaron dibujos en sus representaciones y esa puede ser la causa de que tuvieran mayor dificultad. Se deduce además cierta dificultad a la hora de usar patrones, ya que por lo general las respuestas en las que usaron otro tipo de estrategia no son erróneas.

Los resultados presentados contribuyen a la investigación sobre el desarrollo del pensamiento algebraico, centrándonos en el uso de patrones y la generalización en educación primaria. Incorporamos el ejemplo genérico como elemento novedoso en esta investigación respecto a nuestros antecedentes. Entre las vías de continuación de esta investigación destacamos el interés de indagar cómo los alumnos de educación primaria e incluso en educación infantil, se enfrentan a tareas de generalización dentro de una visión funcional del álgebra escolar.

Agradecimientos
Esta investigación ha sido realizada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

Ali, O. y Alsayed, N. (2010). The effectiveness of geometric representative approach in developing algebraic thinking of fourth grade students. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8*, 256-263.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Brizuela, B. M., y Martínez, M. V. (En prensa). Aprendiendo acerca de la comparación de funciones lineales. En J. A. Castorina, M. Carretero y A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo cognitivo y educación*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Canavarro, A. P. (2009). El pensamiento algebraico en el aprendizaje de la Matemática los primeros años. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje, 34*(4), 409-425.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: ICE UB/Horsori.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Drijvers, P., Dekker, T. y Wijers, M. (2011). Algebraic education: Exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kolloffel, B., Eysink, T. H. S., De Jong, T. y Wilhelm, P. (2009). The effects of representational format on learning combinatory from an interactive computer simulation. *Instructional Science, 37*(6), 503-517.

Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de primaria en una tarea de generalización*. Trabajo fin de máster. Universidad de Granada: Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1926/

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria (Vol. BOE Nº 293, pp. 43053-43102)*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Ontario Ministry of Education and Training (2005). *The Ontario curriculum, grades 1-8: Mathematics, revised*. Ontario, CA: Queen's Printer.

Pimentel, T. (2010). *O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?* Tesis doctoral. Braga, Portugal: Universidade do Minho.

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-59). Barcelona: Horsori.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7(*2), 183-192.

Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: a Japanese perspective. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 183-193). Reston, VA: NCTM.

Webgrafía

http://www.australiancurriculum.edu.au/

Eduardo Merino Cortés. Maestro de Educación Primaria actualmente en ejercicio en la enseñanza bilingüe (Inglés). Doctorando en el programa de Doctorado de Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada, rama de Didáctica de las Matemáticas. Obtuvo el título de Máster en Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada, y los de Licenciado en Psicopedagogía y Diplomado en Magisterio de Educación Primaria por la Universidad de Málaga. Es asistente de edición en la revista PNA (www.pna.es).
Email: edumc15@hotmail.com

María C. Cañadas. Profesora Contratada Doctora del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Doctora en Didáctica de la Matemática. De 2003 a 2008 fue profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. Su docencia se centra en asignaturas de Didáctica de la Matemática en programas de formación de futuros profesores y profesores en ejercicio. Es miembro del grupo de investigación FQM-0193 "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" (http://fqm193.ugr.es/). Los temas en los que se centra su investigación son la generalización, los patrones, el pensamiento funcional, la invención y resolución de problemas, y las representaciones. Es editora asociada de PNA (www.pna.es). Sus publicaciones en acceso abierto están disponibles en: http://is.gd/AYjP6Y
Email: mconsu@ugr.es

Marta Molina. Profesora Titular de la Universidad de Granada. Doctora en Didáctica de la Matemática. Se dedica a la formación en educación matemática de futuros docentes y docentes en activo. Sus líneas de investigación son la Didáctica de la aritmética y el álgebra, la modelización, la invención y resolución de problemas y la enseñanza bilingüe de las matemáticas. Es miembro del grupo de investigación FQM-0193 "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" (http://fqm193.ugr.es/) y editora asociada de la revista PNA (www.pna.es). Sus publicaciones en acceso abierto están disponibles en: http://is.gd/ULaI8i
Email: martamg@ugr.es