http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351

Educación Matemática en la Infancia

Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles

María Asunción Bosch Saldaña

Universidad de Almería, mabosch@ual.es

Fecha de recepción: 27-01-2012
Fecha de aceptación: 27-03-2012
Fecha de publicación: 3-09-2012

RESUMEN

En el presente artículo analizamos, en primer lugar, los conceptos de pensamiento matemático y multiplicativo, junto a otras nociones como la de pensamiento relacional o sentido numérico. En segundo lugar, realizamos un breve repaso acerca de lo que se conoce, desde la investigación, sobre el desarrollo del pensamiento matemático y multiplicativo, haciendo especial hincapié en lo referente a las primeras edades.

Palabras clave: Pensamiento matemático, pensamiento multiplicativo, Educación Infantil.

Theoretical notes on mathematical and multiplicative thinking in the early years

ABSTRACT

This article presents some conceptual meanings of mathematical and multiplicative thinking, among other concepts as relational thinking or number sense. Secondly, we do a brief review on what is known, from research, on the development of mathematical and multiplicative thinking, with an emphasis in relation to the first ages.

Key words: Mathematical thinking, multiplicative thinking, Early Childhood Education.

1. El concepto de pensamiento

Marta Molina (2006), en su tesis doctoral, realiza un excelente recorrido por las distintas acepciones del término pensamiento, desde la Lengua, la Filosofía o la Psicología. Entre ellas, destacamos aquéllas que definen la noción de pensamiento en torno a las operaciones involucradas en la resolución de problemas, como la de Dorsch, de 1985, que diferencia entre pensamiento divergente (obtención de diversas conclusiones lógicamente posibles) y pensamiento convergente (obtención de una conclusión lógicamente necesaria); la de Mayer, de 1986, quien señala que el pensamiento es cognitivo pero se refiere a la conducta, y que tiene como resultado la resolución de problemas; o la de García y Moreno, de 1988, quienes explican que el pensamiento se manifiesta en situaciones de resolución de problemas o en la búsqueda de la toma de una decisión o en la extracción de una conclusión, cuando el sujeto construye representaciones y manipula la información con el fin de lograr un objetivo.

Molina (2006) también hace referencia a Honderich, en 2001, el cual define el término pensar asociado a procesos como razonar, creer, reflexionar, calcular, deliberar. Según este autor, el pensar puede realizarse sin palabras (aunque en ocasiones esté limitado por ellas) e implica un dominio de los conceptos, una respuesta mental interna. Molina (2006), termina adoptando, como pensamiento, el siguiente constructo:

> La actividad intelectual (interna) mediante la cual el hombre entiende, comprende, y dota de significado a lo que le rodea; la cual consiste, entre otras acciones, en formar, identificar, examinar, reflexionar y relacionar ideas o conceptos, tomar decisiones y emitir juicios de eficacia; permitiendo encontrar respuestas ante situaciones de resolución de problemas o hallar los medios para alcanzar una meta (p. 74).

Por su parte, Carretero y Asensio (2008), en el manual "Psicología del Pensamiento", realizan un repaso por algunas definiciones de pensamiento a través de la historia, desde un punto de vista psicológico, entre las que destacamos que pensamiento sería todo lo que media entre la percepción y la acción, de Johnson-Laird, en 1993. Y finalmente, ofrecen su propia definición de pensamiento, como un conjunto de actividades mentales u operaciones intelectuales, como razonar, hacer abstracciones, generalizaciones, etc., cuyas finalidades son, entre otras, tomar decisiones y representarse la realidad externa.

Recientemente, Prellezo (2010), en su "Diccionario de Ciencias de la Educación", nos indica que la noción de pensamiento comprende toda una serie de procesos cognitivos y actividades psíquicas superiores y que no es fácil describirla de un modo preciso. No obstante, el autor ofrece varias definiciones posibles de pensamiento, desde diferentes ópticas. En la primera de ellas, destaca la función comunicativa del pensamiento, tanto interna como externa, indicándonos que en el pensamiento se reúnen una serie de actividades mentales dirigidas a establecer la comunicación consigo mismo y con los demás, y a plantear hipótesis sobre el mundo y nuestro modo de pensar. A continuación, realiza un recorrido por distintas clasificaciones posibles de los tipos de pensamiento, contraponiendo de este modo pensamiento racional a pensamiento intuitivo, pensamiento creativo a pensamiento estereotipado, pensamiento autista a pensamiento realista y pensamiento productivo a pensamiento ciego, entendiendo éste último como el que procede "a ciegas" según el clásico esquema de "tentativas y errores". Este tipo de pensamiento podemos observarlo con frecuencia en los niños más pequeños, como una forma poderosa de comprender y aprender en su día a día.

En las distintas nociones de pensamiento expuestas, aparecen varias claves que nos parecen especialmente relevantes para el trabajo con niños pequeños, y que son:

- el carácter intencional del pensamiento como vía de construcción del conocimiento y la toma de decisiones,
- la importancia de la resolución de problemas en el proceso mismo de pensamiento,
- la relación de dicho proceso con las representaciones, internas y externas, del sujeto, y
- el hecho de que el pensamiento pertenece a la dimensión intelectual del sujeto, aunque se manifiesta, en ocasiones, en su conducta observable.

En el caso de la investigación con niños pequeños, esta última apreciación resulta crucial para interpretar los datos recogidos, ya que en muchas ocasiones, las actividades de pensamiento de los niños han de ser inferidas de sus actos, puesto que sus palabras aún no consiguen describir de forma precisa o comprensible, el proceso mental seguido a la hora de resolver una determinada tarea.

En palabras de Castro y Cañizares (2003), las matemáticas son una actividad mental que las personas desarrollan internamente, pero se puede intuir lo que sucede en la mente del sujeto, gracias a las acciones externas que éste lleva a cabo. Y para ello, podemos apoyarnos en todo lo gestual, que nos abre una ventana a la mente de los niños y resulta ser una fuente poderosa para analizar los procesos implicados en el desarrollo cognitivo (Alibali & Goldin, 1993).

2. El pensamiento matemático

El concepto de pensamiento matemático puede interpretarse de distintas maneras, dependiendo del foco de atención y de los protagonistas implicados.

Cantoral y otros (2005), en su libro sobre "Desarrollo del pensamiento matemático", refieren varios modos de entender el concepto de pensamiento matemático y, por tanto, de analizar el desarrollo del mismo. Por un lado, atribuyen el término de pensamiento matemático a las formas en que piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas. Por otro lado, entienden el pensamiento matemático como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas.

Finalmente, Cantoral y otros (2005) concluyen observando que el pensamiento matemático incluye, por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos, y por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis. Desde esta perspectiva, el pensamiento matemático no encuentra sus raíces en las tareas propias y exclusivas de los matemáticos profesionales, sino que están incluidas todas las formas posibles de construcción de ideas matemáticas en una gran variedad de tareas. Por lo tanto, el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a sus múltiples tareas.

Recientemente, Olive Chapman (2011) ha descrito de forma sintética el pensamiento matemático como el tipo de pensamiento que ponemos en juego al hacer matemáticas, con motivo del panel plenario que coordinaba en el último PME, en Turquía, acerca del Desarrollo del Pensamiento Matemático (lo que muestra que se trata de un tema de rabiosa actualidad, a nivel mundial, para los investigadores en Educación Matemática).

En dicho panel intervinieron los siguientes investigadores: En primer lugar, participó Uri Leron, el cual abordó el pensamiento matemático desde las relaciones entre el pensamiento intuitivo y el pensamiento analítico, tratando de tender un puente que conecte ambos e indicando cómo dicha conexión puede ayudar a desarrollar el pensamiento matemático (PM). A continuación, Carolyn Maher expuso una noción de PM equiparable tanto al pensamiento que se pone en juego cuando resolvemos problemas como al proceso de razonamiento que conlleva dicha resolución. Seguidamente, Gabriele Kaiser analizó el PM a través de los procedimientos de modelización, cuando se relacionan e interactúan el mundo real y el matemático. Y finalmente, Frederick Leung examinó el PM como un aprendizaje de tipo cultural, insistiendo en la idea de que los docentes deben motivar al alumnado para que se esfuerce y se interese en las actividades de índole matemática.

Por último, recordaremos que Mason, Burton y Stacey (1982), en un libro que ha servido de referencia durante décadas, "Thinking Mathematically", nos hicieron ver que el pensamiento es un proceso dinámico que, al permitirnos aumentar la complejidad de las ideas que podemos manejar, extiende nuestra capacidad de comprensión, así como que para pensar de una manera efectiva, hay que tener suficiente confianza para poner a prueba las ideas propias y enfrentarse a los estados emocionales conscientemente, poniendo sobre la mesa el enormemente trascendente aspecto motivacional y emocional de los procesos de pensamiento, especialmente en matemáticas.

2.1. El pensamiento matemático temprano

> El conocimiento matemático de los niños es más amplio de lo que tradicionalmente se ha pensado (Warfield, 2001, p. 161)

Durante mucho tiempo, se ha creído que los niños pequeños carecían esencialmente de pensamiento matemático (Baroody, 1988). Sin embargo, investigaciones posteriores han comprobado que los bebés pueden distinguir entre conjuntos de uno, dos y tres elementos, mediante una metodología basada en la deshabituación. De este modo, si se le muestran tarjetas con conjuntos de, por ejemplo, 3 elementos, al principio, el bebé presta atención por la novedad, pero se va aburriendo paulatinamente hasta que el investigador muestra una tarjeta con 4 o 2 elementos, momento en que el bebé vuelve a prestar atención, indicando así que se percata de la diferencia. De hecho, Rick Caulfield (2001), en su artículo "Number matters: Born to count", describe cómo incluso recién nacidos muestran un incipiente pensamiento matemático, al distinguir grupos de dos o de tres objetos, ante la muestra de cartas con 2 o 3 osos dibujados en ellas.

Baroody (1988) también nos indica que hay dos teorías generales del aprendizaje: la teoría de la absorción y la teoría cognitiva. Durante décadas, la teoría de la absorción ha sido la principal directriz en la enseñanza de las matemáticas y esta teoría implicaba la organización jerárquica de las tareas, para ir sistemáticamente pasando de lo (teóricamente) más sencillo a lo más complejo. No obstante, la teoría cognitiva ha aportado una explicación más profunda del aprendizaje significativo, por ejemplo de los conceptos aritméticos o de la resolución de problemas de enunciado verbal.

De hecho, el estudio del desarrollo matemático de los niños pequeños representa una parte importante del trabajo de investigación de la comunidad del PME desde sus inicios hasta la actualidad, particularmente entre los investigadores de perspectivas cercanas a la psicología cognitiva (Mulligan & Vergnaud, 2006).

Numerosos estudios han comprobado que los niños nacen con muchas aptitudes hacia las matemáticas o que éstas pueden desarrollarse en los primeros años de vida (Baroody, Lai & Mix, 2006; Clements & Sarama, 2009). Y aunque el interés por comprender cómo es y cómo se adquiere el conocimiento matemático de los niños no es nuevo, es a raíz de los trabajos de Piaget cuando el tema adquiere mayor interés y la investigación ejerce una influencia real en el terreno educativo (Ayllón, Castro y Molina, 2010).

Clements y Sarama (2006) hacen una revisión de las investigaciones en materia de educación matemática temprana, realizando un recorrido exhaustivo por las distintas perspectivas teóricas sobre el desarrollo del pensamiento matemático, desde el empirismo inicial hasta el constructivismo actual, pasando por el racionalismo o nativismo. A continuación, analizan los tres tipos de constructivismo más extendidos, esto es, el constructivismo trivial, el radical y el social. De este último, queremos destacar la perspectiva de Vigotsky, quien considera que el pensamiento científico es una de las herramientas más valiosas de la sociedad, y que se desarrolla mediante la interacción del niño, con los profesores, en la escuela (Lozano, 2008).

Ayllón, Castro y Molina (2010), por su parte, señalan tres etapas en la apreciación de las capacidades y conocimientos matemáticos de los niños:

1ª) En un principio, autores entre los que destacan Piaget y sus colaboradores, centraron sus investigaciones en lo que los niños no eran capaces de hacer, subestimando dichas capacidades y proporcionando una visión restrictiva de su competencia matemática.

2ª) Con posterioridad, surge un movimiento de autores, entre los que se encuentra Gelman, que se centran en poner de manifiesto lo que los niños son capaces de hacer, con lo que se adopta un punto de vista muy optimista que propicia una sobrevaloración de la competencia matemática de los niños en edades tempranas.

3ª) Y en las últimas décadas, algunos autores, entre ellos Baroody, en desacuerdo con cualquiera de las dos visiones anteriores, adoptan una posición intermedia y centran su atención en detallar lo que los niños hacen y cómo lo hacen, cuando se enfrentan a situaciones problemáticas.

Respecto a las semejanzas o diferencias entre el pensamiento matemático infantil y adulto, podemos observar también varias corrientes al respecto:

- Por una parte, hay autores que defienden que los niños no piensan las matemáticas de la misma forma que los adultos, entre ellos Piaget, quien afirmaba que el pensamiento del niño es cualitativamente diferente al del adulto (Kamii y De Vries, 1995). Y, posteriormente, otros investigadores también han indicado que los niños suelen tener concepciones bastante distintas a las de los adultos acerca de, por ejemplo, la suma, la resta, la multiplicación y la división (Carpenter y otros, 1999).
- Sin embargo, otros autores opinan que los niños piensan matemáticamente como los adultos, pero las estructuras y operaciones tienen que ser construidas en actividades propias de niños (Olive, 2001). De hecho, la analogía del "niño como científico" se ha utilizado para caracterizar la manera en la que los niños dan sentido al mundo, suponiendo que los niños, como los científicos, exploran su entorno y construyen y comprueban modelos que le ayudan a entenderlo (Garnham y Oakhill, 1996).

En uno u otro caso, lo que resulta evidente es que los niños pequeños, de manera informal, en sus juegos, ya realizan numerosas actividades de índole matemático: exploran modelos, formas y relaciones espaciales, comparan magnitudes, cuentan objetos, etc. Por lo tanto es algo natural que, en el aula, los niños de Educación Infantil lleven a cabo, espontáneamente, actividades que requieren habilidades matemáticas. Pero en la escuela, además, hemos de hacer matemáticas más sistemáticas, preparadas y dirigidas por los maestros, porque el sistema educativo tiene como finalidad potenciar todos los aprendizajes (Alsina, 2006; Bosch, Castro y Segovia, 2012; Canals, 2001).

Desafortunadamente, como hasta hace poco no hemos reconocido claramente cuál es la comprensión de los niños pequeños acerca de las ideas matemáticas básicas, la enseñanza de las matemáticas no ha sabido capitalizar la riqueza de su conocimiento informal y los conocimientos informales de los niños han pasado a menudo inadvertidos, especialmente los referidos a la multiplicación y la división. Como consecuencia, las matemáticas de la escuela han estado frecuentemente desconectadas del modo que tienen los niños de resolver problemas en su día a día (Carpenter y otros, 1999; Nunes y Bryant, 1997; Rodríguez y otros, 2008).

Nosotros pretendemos ayudar a modificar esta práctica educativa arraigada, insistiendo, como Alsina (2011), en que las situaciones cotidianas tienen que ser la base de las actividades que realicemos en las Aulas de Educación Infantil.

Y la razón es que, al igual que otros muchos investigadores y educadores:

> Vemos a los niños como capaces y competentes, como seres que saben mucho de la mayoría de las personas, lugares y cosas que conforman su mundo. Sin embargo, también vemos a los niños como seres vulnerables en contextos que no le son familiares o ante relaciones en las que se encuentran en desventaja. En el contexto de la educación infantil, existen muchas oportunidades de reconocer los conocimientos y las competencias que los niños ya tienen, así como de implementar cambios que les animen o estimulen para refinarlos, ampliarlos, (re)elaborarlos o modificarlos. (Perry&Dockett, 2008, p. 80)

3. Los conceptos de pensamiento numérico y de sentido numérico

Encarna Castro (2008), en su conferencia sobre "Pensamiento Numérico y Educación Matemática", señala que el pensamiento numérico trata de aquello que la mente puede hacer con los números, y que está presente en todas aquellas actuaciones que realizan los seres humanos relacionadas con los números. Asimismo, nos recuerda que las investigaciones llevadas a cabo dentro de este campo, ponen el énfasis en los procesos cognitivos de los sujetos, y en ellas se contemplan, entre otros aspectos, los siguientes:

- La naturaleza y características de los aprendizajes numéricos, así como los errores y dificultades que se presentan en dichos procesos,
- las semejanzas y diferencias en la construcción de los conocimientos por parte de diferentes individuos, y
- las componentes culturales, que influyen, tanto en la construcción de los conocimientos como en los modos de abordar la enseñanza de los mismos.

Castro (2008), indica también que algunos autores, como, Dehaene (1997), identifican, desde un punto de vista psicológico, Pensamiento Numérico con Sentido Numérico, pero que desde la Educación Matemática se realiza cierta distinción entre ambos constructos. De hecho, desde esta Área de Conocimiento, numerosos investigadores consideran el sentido numérico como una forma especial de pensar sobre los números, no algorítmica, que conlleva una profunda comprensión de su naturaleza así como de las operaciones que se pueden realizar entre ellos.

Este último aspecto, relacionado directamente con las operaciones numéricas, lo definen algunos autores con el término específico de sentido operacional. Éstos afirman también que la habilidad de usar el sentido numérico juega un papel integral en la resolución de problemas y que un buen sentido numérico se muestra útil tanto para el establecimiento de la magnitud y el tipo esperado de números respuesta, como para ayudar a seleccionar la operación apropiada, esto es, para tener un buen sentido operacional, y que con la aplicación adicional de la estimación y del cálculo mental, el sentido numérico y operacional disminuyen la probabilidad de obtener una respuesta poco razonable en la resolución de problemas, especialmente en aquéllos en los que intervienen números grandes o en aquéllos que incluyen multiplicaciones o divisiones (Daugherty, 1989; Sowder, 1992).

La denominación de sentido, utilizada en los términos sentido numérico y sentido operacional, procede de la consideración de los alumnos como pensadores, como personas capaces de comprender los dominios matemáticos (Molina, 2006)

Clements y Sarama (2006, 2009), por su parte, en su discusión sobre operaciones, no se limitan a las operaciones aritméticas estándares, esto es, suma, resta, multiplicación y división, sino que incluyen, entre otras, el conteo, la comparación, la composición o la partición. En este sentido, Sowder (1992) indica que entre las acciones (u operaciones) que ayudan a desarrollar el sentido numérico en los niños, están, por ejemplo, la estimación y la invención de estrategias.

Berch (2005), realiza un compendio de las distintas acepciones del término sentido numérico, observando que comprende, entre otras muchas cuestiones, una intuición, un conocimiento, una herramienta, una habilidad, una expectativa, un proceso o una estructura conceptual. Y añade que el sentido numérico permite una comprensión numérica que facilita, entre otros, el desarrollo de estrategias para resolver problemas matemáticos complejos o la capacidad para reconocer errores realizados en procesos cuantitativos al comunicar, procesar o interpretar información.

Por último, destacamos que Àngel Alsina (2002, 2006) describe el (buen) sentido numérico como la capacidad de aplicar buenos razonamientos cuantitativos en situaciones reales, y también que se refiere a la capacidad de emplear, en diversos contextos, los números y operaciones de manera flexible y poder emitir juicios sobre informaciones y/o resultados numéricos.

3.1. El sentido numérico básico

Alonso y Fuentes (2001), se realizan la siguiente pregunta: Nuestro sentido numérico, ¿es innato o adquirido? Para responderla, recuerdan que Piaget creía que el origen de nuestra capacidad para pensar sobre el mundo en términos numéricos aparecía sobre los 5 años de edad y necesitaba la presencia previa de algunas habilidades de razonamiento lógico tales como la propiedad transitiva y la llamada conservación del número. Sin embargo, hoy se cuenta con gran cantidad de resultados que apoyan la hipótesis de que los niños, ya en el primer año de vida, cuentan con un conocimiento numérico rudimentario e independiente del lenguaje. En consecuencia, algunos autores, como Dehaene (1997) afirman que, al igual que sucede con los colores, los humanos nacemos con circuitos cerebrales especializados en identificación de números pequeños.

Baroody (1988) ya nos explicaba que el ser humano, como algunas otras especies, parece estar dotado de un sentido numérico primitivo, que podemos percibir fácilmente la diferencia entre un conjunto de un elemento y una colección de muchos elementos y que podemos ver si se añade o se quita algo de una colección. Sin embargo, nos cuesta distinguir entre una bandada de 8 aves y una de 9.

Esto sucede debido a que algunas habilidades numéricas básicas, como la de subitización (o repentización), nos permiten distinguir, a primera vista, el número de objetos de una colección pequeña (hasta 4 o 5 elementos, si no están organizados de un modo familiar para el que subitiza, o más de 5 elementos, si están dispuestos de forma ordenada y familiar para el que los visualiza, como en el caso de los puntos en las fichas de dominó o las señales en los recuentos estadísticos). No obstante, para colecciones mayores (o desordenadas), requerimos estrategias de conteo para poder indicar el cardinal del conjunto observado.

4. El pensamiento multiplicativo

4.1. De la estructura aditiva a la multiplicativa

Vergnaud (1983), en su teoría de los campos conceptuales, pone como ejemplos las estructuras aditivas y multiplicativas, entendiendo las primeras como aquéllas que involucran operaciones aritméticas y nociones aditivas, tales como adición, sustracción, diferencia, intervalo o traslación, mientras que las estructuras multiplicativas son consideradas como aquéllas que involucran operaciones y nociones de tipo multiplicativo, tales como multiplicación, división, fracción o proporción. Y añade que las estructuras multiplicativas cuentan en parte con las estructuras aditivas, pero tienen su propia organización intrínseca, que no puede reducirse a los aspectos aditivos.

Por su parte, Freudenthal (1983) señala que el modelo aditivo es agregativo y está vinculado a tareas como agregar y trasladar, mientras que el modelo multiplicativo se refiere a la interacción de un número en función de otro, procurando un esquema más cercano a la proporcionalidad que a la adición repetida. Asimismo, este autor nos indica que la multiplicación modela situaciones de áreas y combinatoria, entre otras.

Una década después, Harel y Confrey (1994), en el e-libro que editan, bajo el título "The development of multiplicative reasoning in the development of mathematics”, consideran una operación de carácter multiplicativo como aquélla que determina el total de elementos dispuestos en grupos de igual cantidad.

En dicho texto, Leslie Steffe nos aclara que para que una situación pueda ser considerada como multiplicativa, al menos es necesario coordinar dos unidades compuestas, en el sentido de que una de las unidades compuestas se distribuye a lo largo de los elementos de la otra unidad compuesta (Steffe, 1994, p. 19).

Desde esta perspectiva, la adquisición de una estructura compuesta de grupos iguales está en el corazón del razonamiento multiplicativo, aunque la coordinación entre las unidades compuestas es compleja y los modelos físicos pueden ayudar inicialmente (Sullivan y otros, 2001).

Por su parte, Clarke y Kamii (1996), indican que la multiplicación necesariamente requiere la construcción de dos tipos de relaciones que no son requeridas en la suma: La correspondencia uno a muchos y la inclusión jerárquica de clases, yendo ésta última más allá de la adición repetida de grupos iguales.

Y Olive (2011), en su teoría sobre la adquisición completa de la Secuencia Numérica, señala que la construcción de una unidad iterativa es la llave para el desarrollo de esquemas multiplicativos, ya que las unidades iterativas son los ladrillos de las unidades compuestas. Según este autor, para establecer los esquemas multiplicativos, los niños comienzan formando unidades compuestas; a continuación, usan dichas unidades como entradas en operaciones posteriores, tales como contar, combinar, comparar, segmentar y repartir; seguidamente, consiguen formar una composición numérica de las unidades compuestas como resultado de las operaciones; y por último, son capaces de “(re)interiorizar” la secuencia numérica para tomar los resultados de las operaciones con unidades compuestas como “material” de operaciones posteriores.

En nuestro trabajo, partimos de una noción de esquema de tipo cognitivo. Consideramos los esquemas como herramientas de la memoria del individuo que le permiten organizar nuevas experiencias y afrontar situaciones-problema (Marshall, 1995). En lo referente a la resolución de problemas, un aspecto fundamental de los esquemas lo constituyen las relaciones que se establecen entre las proposiciones del problema, ya que éstas nos descubren la esencia del problema.
En nuestra investigación, consideramos un camino de 12 piedras y una rana que ha de saltar sobre ellas. Y los grupos de piedras forman unidades compuestas, ya que han de considerarse conjuntamente, como un todo, en las tareas que se les propone a los niños.

4.2. Modelos intuitivos asociados a las operaciones multiplicativas

Según Fischbeim, Deri, Nello y Marino (1985), los niños construyen tempranamente modelos intuitivos sobre la multiplicación y la división, y cada operación aritmética está vinculada a un modelo intuitivo, que se mantiene en el tiempo incluso mucho después de la formalización de dicha operación.

Para estos autores, el modelo asociado a la multiplicación es de adición repetida, en el que participan una serie de colecciones del mismo tamaño, mientras que son dos los modelos asociados a la división:

- El del reparto equitativo un grupo de objetos, o modelo partitivo.
- El de obtención del número de grupos iguales en un total de elementos dado o modelo cuotitivo.

Dicho de otro modo, los modelos asociados a la división serían dos (Caballero, 2005):

- El modelo partitivo, cuando una colección se subdivide en subcolecciones iguales y el cociente es el tamaño de cada subcolección.
- El modelo cuotitivo o de medida, que se refiere a cuántas veces una cantidad dada está contenida en otra.

En cuanto a la evolución de los modelos de división, Fischbein y otros (1985) consideraban que los niños tienen inicialmente un modelo partitivo y sólo después de la instrucción surge un modelo de medida. Sin embargo, otras investigaciones, como la de Neumann (1999), han probado que los niños conciben la división en términos partitivos, pero el modelo a través del cual los niños se acercan a la misma, de forma espontánea, es el de medida, de manera que, al enfrentarse a un problema de división de tipo partitivo, extraían del dividendo, repetidas veces, la cantidad representada por el divisor.

Muchas investigaciones posteriores han sido explicadas con éxito bajo esta teoría de los modelos implícitos de Fischbein y sus colaboradores. No obstante, aún hoy persisten varias cuestiones sobre el origen y el desarrollo de dichos modelos; por ejemplo, si los modelos primitivos reflejan rasgos innatos en el pensamiento humano o si son adquiridos en la escuela (o una conjunción de ambos), así como su papel específico en la resolución de los problemas de multiplicación y división (De Corte y Verschaffel, 1996; Verschaffel, Greer y De Corte, 2007).

De hecho, algunos investigadores han considerado que no eran tan diferentes estos dos modelos, como Kouba (1989), quien no concebía grandes diferencias entre ambos tipos de división y afirmaba que no era correcto el modelo de sustracciones repetidas para la división, ya que en sus estudios los niños resolvían los problemas de división tanto quitando repetidamente como por acumulación repetida.

Otros investigadores, en cambio, sí apostaron por estas diferencias y las analizaron en sus investigaciones. Por ejemplo, Kornilaki y Nunes (1997) proponían a niños de entre 5 y 7 años, problemas de medida y partitivos, con divisor idéntico y diferente; en esta ocasión, resultaron más difíciles a los niños los problemas de división de medida que los partitivos.

Por su parte, Squire & Bryant (2003), presentaron a niños de entre 5 y 8 años, problemas de división partitiva y cuotitiva, de tipo reparto, y observaron que la división partitiva les resultaba más fácil si los objetos se agrupaban respecto al divisor, no al cociente, mientras que en la división cuotitiva resultaba al revés.

También Caballero (2005), en su tesis doctoral sobre conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil, afirma que las diferencias entre división partitiva y de medida ponen de manifiesto la distinción psicológica entre ambos conceptos. Comprender la división en medida supone, para esta autora, la coordinación de las experiencias previas con la división partitiva y con la sustracción. Ella vincula, además, la sustracción a la división, ya que los modelos implícitos de acumular y quitar, propios de la primera, aparecen también en la segunda.

En lo que sí están de acuerdo la mayoría de investigadores, es en que los modelos intuitivos arraigan fuertemente en la mente de los alumnos, ejerciendo un control inconsciente sobre su conducta, incluso después de haber recibido instrucción formal sobre las operaciones matemáticas. Y, además, señalan que esto da lugar a errores cuando los alumnos tienen que resolver problemas elementales con datos que conducen a contradicciones, entre el resultado de la operación y las imposiciones del modelo correspondiente, como el hecho de considerar que el resultado de una multiplicación siempre es mayor que los factores de la misma (Lago y otros, 1999; Caballero, 2005).

4.3. Resolución de problemas verbales multiplicativos

Los problemas verbales han atraído durante mucho tiempo la atención de los investigadores, tanto de los psicólogos como de los educadores matemáticos, aunque hasta los 90, las investigaciones se han concentrado en torno a los problemas aditivos de una sola etapa (Verschaffel, Greer y De Corte, 2007). De hecho, se han dedicado numerosos esfuerzos a proponer problemas de estructura aditiva a los niños y analizar su comportamiento y respuesta ante ellos, así como las estrategias usadas al resolverlos, mientras que la investigación sobre problemas de estructura multiplicativa ha sido muy escasa (Rodríguez y otros, 2008).

Posteriormente, han sido muchas las investigaciones que han mostrado que los niños pueden resolver variados problemas verbales multiplicativos, mucho antes de la instrucción directa sobre ellos (Caballero, 2005; Carpenter y otros, 1993; Clarke y Kamii, 1996; Mulligan y Mitchelmore, 1997; Murray, Olivier & Human, 1991 y 1992).

Algunos autores tratan de explicar estas habilidades basándose en la existencia de los modelos implícitos que Fischbein y otros (1985) describieron sobre la multiplicación y la división. Por ejemplo, Mulligan y sus colaboradores, inspirados en la teoría sobre modelos intuitivos de Fischbein, integran la clasificación de estructuras multiplicativas de Vergnaud y el análisis de esquemas de multiplicación de Steffe, para investigar las soluciones informales de los niños a problemas verbales de multiplicación y división antes y después de la instrucción sobre los mismos (Mulligan y Vergnaud, 2006).

Así pues, en Mulligan y Mitchelmore (1997), se infieren tres modelos intuitivos de la resolución de problemas multiplicativos respecto a la multiplicación, que son el de conteo directo, el de adición repetida y el de operación multiplicativa, y añaden un modelo más, para el caso de la división, que es el de sustracción repetida. En este estudio, parece confirmarse el hecho de que los niños van adquiriendo un repertorio de modelos intuitivos y que el modelo que emplean para resolver los problemas, deja patente la estructura matemática que los pequeños le imponen.

Además, Mulligan & Wright (2000), describen cinco niveles en la comprensión de la multiplicación y la división, en orden ascendente de sofisticación, desde el agrupamiento simple y el conteo perceptivo hasta la consideración de las operaciones de multiplicación y división, en abstracto, pasando por consideración de unidades compuestas a un nivel figurativo y la adición y sustracción repetidas.

El grupo de Murray y sus colaboradores (Murray, Olivier & Human, 1991 y 1992), por su parte, tratan de desarrollar un currículo para los primeros años de primaria (en particular, para el trabajo con la división), a través del cual se construya el conocimiento conceptual y procedimental de la misma, a partir de los conocimientos informales de los niños. En sus estudios, describen las estrategias usadas por los niños en la resolución de problemas de división y señalan que dichas estrategias tienden a reflejar la acción o la relación escrita en el problema.

Nunes y sus colaboradores también han tratado de indagar acerca del concepto de división en los niños pequeños, así como acerca de la riqueza de su conocimiento informal sobre la misma. Por ejemplo, Correa, Nunes y Bryant (1998), proponían a niños de entre 5 y 7 años que repartieran caramelos a grupos de conejos distintos y quedaba manifiesta la dificultad de los niños para comprender la relación inversa entre el tamaño del divisor y el del cociente cuando se trataba de comparar dos conjuntos, una vez efectuado el reparto.

Entre los colaboradores de Terezinhe Nunes, destacamos a Squire & Bryant (2002), quienes propusieron problemas de reparto, de caramelos entre muñecas, a niños entre 5 y 8 años. En los problemas, los datos estaban bien agrupados respecto al divisor (esto es, el número se pedía era el de caramelos/muñeca) como agrupados respecto al cociente (con un número de caramelos total dado, se pedía entre cuántas muñecas podríamos repartir esa cantidad, para que cada una de ellas tocara a una cantidad concreta). Los problemas del primer tipo se mostraron mucho más sencillos que los segundos. Los autores sugieren, que esto puede ser debido a que la agrupación por el divisor coincide con el estado final del reparto. En nuestro caso, proponemos a niños entre 4 y 6 años, los problemas siguientes:

- de tipo quotitivo o de medida:
- "de n en n piedras, ¿cuántos saltos dará la rana para llegar al final del camino?" (hasta completar las 12 piedras totales)
- de tipo partitivo:
- "para hacer el camino en m saltos iguales, ¿cuántas piedras tiene que pasar a la vez (en cada salto)?"

Pero resultan mucho más fáciles de resolver los primeros, tal vez porque se adecúan a la acción concreta de la rana, lo que los ingleses llaman problemas tipo *doing*, mientras que en los segundos partimos del resultado final y hay que desandar lo andado, esto es, que se trata de problemas tipo *undoing*. Estos últimos casi siempre eran resueltos por estimación y mediante un proceso de ensayo y error.

4.4. Los problemas de división en educación infantil. Más allá del reparto

A nivel de Educación Infantil, hay numerosas investigaciones sobre problemas de división tipo reparto (*sharing*), en los que se dan un número de objetos que es posible separar uno a uno, desde los trabajos de Davis y colaboradores, recogidos en Davis y Hunting (1990), Davis y Pitketly (1990) o Davis y Pepper (1992). En ellos, se ofrecían un conjunto de unidades discretas, generalmente galletas, y se proponía un reparto de las mismas entre una serie de comensales o una modificación de un reparto anterior, al cambiar alguna de las condiciones iniciales (número de galletas o de comensales).

En todas las actividades propuestas en dichas experiencias, se podían separar uno a uno los objetos motivo del reparto (Bosch, Castro y Segovia, 2007), al igual que en las investigaciones que hemos expuesto en los apartados anteriores.

Y ciertamente, Correa, Nunes y Bryant (1998) indican que en sus inicios, la división no aparece vinculada a la multiplicación, sino a la idea de reparto, ya que no se entiende (en los más pequeños) como una operación binaria. Y que es a partir de que los niños tienen un esquema de acción para realizar una distribución equitativa, cuando empiezan a comprender la división, luego la experiencia con el reparto favorece la aparición del concepto de división. Sin embargo, estos autores también consideran que no se debe limitar el concepto de dividir al reparto (Nunes, 1997; Bryant, 1997).

En nuestras investigaciones, al considerar las piedras agrupadas en unidades compuestas (dando saltos de n en n, o alcanzando el final del camino en m saltos iguales), proponemos una situación de división en la que no es posible usar el reparto como método de resolución, lo que favorece que los niños busquen estrategias de resolución distintas, que obligan a considerar los grupos de piedras como unidades compuestas (o de segundo orden), que les ayuden a construir los esquemas multiplicativos.

4.5. El pensamiento relacional y el pensamiento multiplicativo

Para algunos autores, las relaciones constituyen una parte esencial de las Matemáticas, ya que los diversos conceptos matemáticos se encuentran organizados en estructuras interrelacionadas (Castro, Rico y Castro, 1987; Molina, 2006).

Por ejemplo, Ruesga (2002) concibe la Matemática como la Ciencia de las relaciones. Según esta autora, los métodos de resolución de problemas proponen estrategias cuyo fundamento está basado en el establecimiento y descubrimiento de relaciones. Y, en ocasiones, es posible resolver situaciones problemáticas sin utilizar una representación formal, pero esto nunca es posible sin la determinación fidedigna de las relaciones que expresan las condiciones y los datos.

A nivel educativo, Piaget y sus colaboradores descubrieron que cada ser humano debe construir su propio conocimiento, creando y coordinando relaciones (Kamii, 1982, p.23). Y entre las implicaciones generales para estimular la construcción activa del conocimiento señaladas por Baroody (1988), queremos destacar, desde la enseñanza, la importancia de estimular el aprendizaje de relaciones, así como de ayudar a los niños a ver conexiones y a modificar sus puntos de vista.

En los niños de Educación Infantil, las competencias matemáticas iniciales, junto a la adquisición de la regla de cardinalidad y el conteo, implican también la capacidad de establecer relaciones entre las cantidades en términos de adicción, sustracción, multiplicación y división. Es más, los niños de Educación Infantil no sólo tienen una amplia gama de habilidades matemáticas, sino que las utilizan de manera flexible (Rodríguez y otros, 2008).

No obstante, apenas hay trabajos en Educación Infantil que hayan estudiado estos procesos detenidamente, con honrosas excepciones, como la de Ruesga (2002), en su tesis doctoral "Educación del Razonamiento Lógico Matemático en Educación Infantil".

Conceptualizando, en nuestras investigaciones entenderemos el pensamiento relacional como la actividad intelectual (interna) consistente en examinar objetos o situaciones, considerándolos como totalidades, detectar o buscar relaciones entre ellos, y utilizar dichas relaciones para alcanzar un objetivo. Este tipo de pensamiento conlleva no sólo observar relaciones existentes entre objetos matemáticos, sino que dichas relaciones pasen a ser herramientas útiles para la resolución de problemas o para tomar decisiones (Molina, 2006; Castro, 2008).

En lo que se refriere a la relación entre el pensamiento multiplicativo y el relacional, Lamon (1993) observa en sus investigaciones, que un pensamiento relacional emergente parece ser una señal de que el estudiante está comenzando a crear un puente entre las estructuras aditivas y multiplicativas. Así pues, en los problemas que esta autora proponía a los estudiantes, ellos se mostraban incapaces de alcanzar un nivel de razonamiento proporcional cualitativo hasta que conseguían manifestar pensamiento relacional en más de un contexto. Los resultados de este estudio sugieren que es útil ver la razón como una unidad, como el resultado de la composición múltiple de unidades compuestas, y esta perspectiva nos proporciona otro nexo entre el aprendizaje temprano de las estructuras aditivas y las multiplicativas.

Conceptualizando de nuevo, podemos considerar el pensamiento proporcional como un tipo particular de pensamiento relacional (Bosch, Castro y Segovia, 2007; Bosch y Castro, 2009). Como indican Sophian y Wood (1997), el razonamiento proporcional es, en esencia, un proceso de comparación entre una cantidad relativa con otra.

En nuestras investigaciones, planteamos cuestiones sobre pensamiento relacional de tipo proporcional cuando preguntamos al niño, después de haber buscado cuántos saltos de 2 en 2 tendría que dar la rana para llegar al final del camino, que si la rana fuese de 4 en 4, si tendría en ese caso que dar más o menos saltos que antes. O también, después de haber observado cuántas piedras tendría que pasar a la vez la rana para hacer el camino en 2 saltos (iguales), le preguntamos que, de hacer el camino en 4 saltos, si tendría que pasar más o menos piedras "a la vez" que antes (Bosch, Castro y Segovia, en prensa).

5. Desarrollo del pensamiento matemático y multiplicativo

5.1. Necesidad de conocimientos acerca de cómo aprenden los niños

Cantoral y otros (2005) nos indican que a lo largo de la historia, matemáticos destacados como Hadamard, Poincaré, Polya o Freudenthal, se han interesado por explorar la psicología del pensamiento matemático, y que lo hicieron analizando su propia actividad personal o mediante el estudio sistemático de las producciones de jóvenes escolares. Aunque estos resultados han tenido una importante repercusión en el terreno de la investigación, sin embargo los currículos de matemáticas escolares han seguido durante mucho tiempo anclados en ideas que provienen de las estructuras matemáticas formales, así como en métodos didácticos centrados en la realización de procedimientos algorítmicos y la memorización.

Ahora bien, si queremos dar a los niños la oportunidad de construir su comprensión desde dentro, necesitamos entender cómo piensan las matemáticas y es fácil observar cuánto son capaces de aprender los niños cuando sus maestros comprenden su manera de pensar y les proporcionan una oportunidad para que construyan su propio pensamiento (Carpenter et al, 1999 y 2003).

Los educadores deberían comprender cómo aprenden matemáticas los niños para tomar decisiones eficaces en cuanto a, por ejemplo, la idoneidad de los métodos, los materiales y la secuencia del currículo. La planificación educativa debería tener en cuenta cómo aprenden y piensan los niños (factores cognoscitivos) y qué necesitan, sienten y valoran (factores afectivos) Baroody (1988, 2003).
En este sentido, la investigación es una poderosa herramienta para el desarrollo profesional de los maestros, ya que nos ayuda a entender, desarrollar y evaluar el desarrollo del pensamiento matemático de los niños (Clarke, 2001). Y en nuestro caso, cobra especial relevancia la investigación que se realiza en el seno del Área de Conocimiento "Didáctica de la Matemática", ya que una de las tareas que se le encomiendan es la de proporcionar al educador matemático los instrumentos necesarios para que desarrolle su trabajo de modo competente (Castro, Olmo y Castro, 2002).

Y para ayudar a este cometido, en los últimos años se ha considerado el constructo *Profesional Noticing of Children's Mathematical Thinking*, entendido como un conjunto de herramientas interrelacionadas que incluyen: atender a las estrategias de los niños, interpretar sus comprensiones y decidir cómo responder en base a dichas interpretaciones. De modo sintético, el proceso sería el de "atender-interpretar-decidir" (Jacobs y otros, 2010).

5.2. Desarrollo del pensamiento matemático y del sentido numérico

El ser humano tiene la capacidad innata de realizar tareas matemáticas para conseguir unos fines determinados, que le ayuden en su vida diaria. Las Matemáticas ocupan un lugar destacado entre las disciplinas que ayudan a organizar la realidad, facilitando tanto la identificación de sus distintas componentes como las relaciones entre ellas.

En particular, el mundo sería caótico sin números, que nos sirven para enumerar, medir, codificar, calcular, etc. Es lógico, pues, que los niños se tropiecen, en su vida diaria, con numerosas situaciones que les proporcionan la oportunidad de contactar con símbolos y significados relacionados con los números. Por ejemplo, en los ritmos, los relojes o los calendarios, los autobuses o las camisetas de los deportistas (Treffers, 2008).

Desde esta premisa, podemos afirmar que el trabajo con números permitiría a los niños descubrir y usar estrategias propias para resolver problemas de su vida cotidiana, y que el desarrollo de un buen sentido numérico les ayudaría a apreciar los conceptos numéricos y a construir conocimiento a través de ellos (Carboni, 2008).

En consecuencia, el desarrollo del sentido numérico debería ser el foco principal del currículo en los primeros niveles, tal y como proclama la Sociedad de Profesores de Matemáticas Norteamericana, que señala la resolución de problemas y el sentido numérico como componentes imprescindibles de un programa de matemáticas efectivo, en todos los niveles educativos (NCTM, 2008).

En España, importantes investigadores en Educación Infantil, como Alsina (2006) y Castro (2008), señalan que las personas deben desarrollar su sentido numérico desde que son niños y que la finalidad del trabajo con números y operaciones, de los 0 a los 6 años, es precisamente ayudar a los niños a desarrollar su sentido numérico, de acuerdo con sus posibilidades y capacidades.

Coincidimos con estas apreciaciones. De hecho, consideramos que los niños pequeños pueden y deben enfrentarse a situaciones que impliquen, entre otros, el uso de la estimación, la medida o los hechos numéricos, en un contexto de resolución de problemas, ya que dichos procesos les ayudarán a desarrollar un pensamiento numérico más flexible y un sentido numérico más profundo y rico en relaciones.

Asimismo, coincidimos con Saiz (2008), en que, a largo plazo, sería muy rentable dedicar mayor esfuerzo al desarrollo y a la mejora de nuestras habilidades generales de pensamiento, resolución de problemas o toma de decisiones, ya que éstas nos ayudarían a seleccionar información más eficazmente; en definitiva, a desenvolvernos mejor en nuestra compleja sociedad.

Pero el aprendizaje en matemáticas requiere de modos de pensamiento variados, lo que supone bastante más que una colección de procedimientos disconexos para llevar a cabo ciertos cálculos, ya que conlleva un aprendizaje acerca de cómo generar esas ideas, cómo expresarlas usando palabras y símbolos y cómo justificar que dichas ideas son verdaderas. Los niños de la escuela elemental son capaces de introducirse en este tipo de pensamiento matemático, pero a menudo no se les ofrece la oportunidad para ello (Carpenter, Franke y Levi, 2003).

Chapman (2011), por su parte, insiste en que, puesto que el pensamiento matemático es algo fundamental en el proceso de hacer matemáticas, debería también ser fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a todos los niveles. Y ya que, tal y como hemos argumentado anteriormente, el pensamiento matemático surge de manera natural en un ambiente de resolución de problemas, entendemos que bien debería ofrecerse dicho ambiente en el aula, para permitir e incentivar el desarrollo del pensamiento matemático infantil.

En palabras de Mason, Burton y Stacey (1982):

> El razonamiento matemático se apoya en una atmósfera de interrogantes, desafíos y reflexión, y necesita de un tiempo y un espacio amplios.

Invitamos, pues, a todo el profesorado de Educación Infantil a procurar una atmósfera de este tipo en el aula, con idea de facilitar la construcción de conocimientos científicos y matemáticos en los niños, desde las primeras edades.

Aunque somos conscientes de que la instrucción basada en la teoría de la absorción, dominante durante prácticamente todo el siglo XX, es más sencilla de llevar a cabo que la cognitiva, cuando los recursos son limitados y las clases grandes.

En palabras de Baroody (1988):

> La enseñanza y la práctica repetitiva de datos y técnicas son más manejables que el fomento del conocimiento conceptual y la aptitud para el razonamiento.

Pero es que, al igual que Castro, Olmo y Castro (2002), estamos convencidos de que la etapa de educación infantil es de una importancia fundamental para la educación matemática, ya que en ella se van a formar los conceptos básicos y los esquemas primarios sobre los que, posteriormente, se construirá todo el aprendizaje.

Luego debemos realizar el esfuerzo necesario para llevar a cabo esta labor de manera eficaz y comprometida. Ya lo decía Mialaret, en 1986 (referido en Ruesga, 2002):

> Se nos confían niños; nosotros somos responsables de su educación. Traicionamos nuestra función humana si no nos esforzamos en desarrollar al máximo las posibilidades que lleva cada niño. Debemos mantener una inquietud constante y debemos responder con todas nuestras capacidades, todos nuestros métodos científicos de estudio y de investigación, todo nuestro amor al niño y nuestra total devoción a nuestra bella misión: formar hombres (personas). (Mialaret, 1986. Pág. 174)

5.3. Desarrollo de las habilidades de resolución de problemas

Algunos autores han argumentado que el desarrollo del razonamiento y de las habilidades de resolución de problemas debería ser el principal foco en cualquier intento de ayudar a los niños a desarrollarse en matemática (Clements & Sarama, 2006). De forma complementaria, otros autores consideran que una de las principales razones para el estudio de las matemáticas es la de desarrollar la habilidad para resolver problemas, y que dicho desarrollo debe comenzar con los niños pequeños (Worth, 1990).

Además, el trabajo con problemas aritméticos es una herramienta potente en el proceso de ir formalizando el conocimiento informal que poseen los niños en el aula, a través de la ayuda de sus educadores (Van de Valle, 1990). Pero, como el aprendizaje de Resolución de Problemas es un tipo de conocimiento, en parte de carácter cognitivo y en parte de carácter afectivo, resulta esencial, especialmente en este caso, un clima positivo en el aula, que favorezca una actitud de confianza en el niño (Worth, 1990).

Los maestros de Educación Infantil han sabido siempre que las ideas matemáticas que los niños pequeños desarrollan en sus primeras etapas son fundamentales para las matemáticas posteriores, y que durante esos primeros años, los niños desarrollan también actitudes y creencias sobre sus habilidades para aprender matemáticas, que les acompañarán probablemente en su proceso educativo posterior.

De hecho, los problemas verbales aritméticos constituyen una parte importante del programa matemático de la escuela elemental, aunque históricamente han tenido la función de enseñar a los niños a aplicar el conocimiento de las herramientas aprendidas previamente (Verschaffel, Greer y De Corte, 2007).

Y es que, a pesar de toda la investigación realizada en este campo, ésta no ha tenido una repercusión directa (aún) en las aulas, de modo que la instrucción del conocimiento matemático se sigue iniciando con tareas rutinarias y se relega el planteamiento de problemas verbales. Y los problemas que se proponen suelen tener la misma estructura semántica, lo que produce una automatización de las respuestas (Caballero, 2005).

Por ejemplo, los problemas de división que se plantean inicialmente suelen ser problemas de reparto. Y es cierto, como hemos indicado anteriormente, que la división comienza con la experiencia del reparto, pero no se puede limitar a ella. Proponemos, pues, plantear a los niños de Educación Infantil problemas de división en los que no sea posible realizar un reparto, junto a otros en los que sí funcione esta práctica, tan cercana a la experiencia del niño.

5.3.1. Errores y dificultades en la resolución de problemas multiplicativos

En el estudio de Anghileri (1989), entre las dificultades que observó en niños entre 4 y 12 años, a la hora de resolver problemas multiplicativos, destacamos las relacionadas con el procesamiento de la información, cuando los niños no usan los números implicados con sus roles naturales. En este sentido, incluso en el caso más sencillo de conjuntos equivalentes de elementos discretos, la dificultad aparece al tener que coordinar las tres piezas de información siguientes:

1º) El número de elementos de cada conjunto (o multiplicando).
2º) El número de conjuntos (o multiplicador).
3º) El procedimiento en sí para realizar la multiplicación.

En España, el grupo de Purificación Rodríguez y sus colaboradores han trabajado sobre problemas de división en educación Infantil. Por ejemplo, Caballero (2005), nos habla de un estudio sobre división partitiva y de medida en educación infantil (de Caballero, Rodríguez y Lago, de 1999). En dicho estudio, se planteaban a los niños de infantil, problemas de división (de reparto) en el contexto de una granja, donde "la vaca Paca guarda gallinas en distintas casas", o "gallinas de distinto color van a jugar a varias casas". Obtuvieron errores que atañen directamente al papel desempeñado por los distintos términos de la división, esto es:

- Errores de cociente, cuando distribuyen el dividendo sin tener en cuenta que todos los subconjuntos formados deben tener el mismo número de elementos
- Errores en el dividendo, cuando aumentan o disminuyen, irregularmente, el número de elementos del dividendo, normalmente por errores de conteo.
- Errores en el divisor:
    - En los problemas de división partitivos, cuando hacen agrupaciones con un número distinto de subconjuntos de los que indica el divisor.
    - En los problemas de división de medida, cuando distribuyen un número de elementos distinto al indicado por el divisor.

5.4. Desarrollo del pensamiento multiplicativo

Como sabemos, hasta la década de los noventa, ha habido muchas investigaciones sobre esquemas de acción y modelos mentales en aritmética temprana, pero concentradas en torno a la suma y la resta (Castro, 1995).

Sin embargo, desde los años noventa, se ha ido prestando una considerable atención a la investigación sobre multiplicación (y división) en el aprendizaje matemático temprano (Sullivan et al, 2001). De hecho, en los últimos años, el estudio de tópicos de investigación tales como el razonamiento multiplicativo o proporcional, que antes se enfocaban en niños mayores, se ha extendido a niños más pequeños (Charles & Nason, 2000; Lamon, 2007; Mulligan & Vergnaud, 2006; Sophian & Wood, 1997).

Y el interés por el desarrollo del pensamiento multiplicativo en los primeros niveles se debe a que éste resulta crucial para el aprendizaje aritmético posterior, principalmente porque está implícito en el valor posicional de nuestro sistema decimal y porque es una base de otros conocimientos matemáticos importantes, tales como las proporciones o las funciones lineales (Nunes y otros, 2008). Brissiaud (1989), ya analiza el tipo de problemas de multiplicación y división que se proponen en las escuelas y concluye que todas las situaciones en que una colección deba cuantificarse tomando sucesivamente como unidades las unidades individuales y los grupos de n pueden favorecer el aprendizaje del sistema de numeración decimal.

Como hemos señalado anteriormente, para enseñar la multiplicación con números naturales, es muy importante la extensión del concepto de unidad (simple), al de unidad compuesta, y ello se consigue a partir de la idea de grupo (Isoda y Olfos, 2009). Además, es algo que forma parte de las actividades cotidianas de los niños, ya que éstos, en numerosas ocasiones, se encuentran con pequeños grupos de objetos, como caramelos en una bolsa o puntos en una ficha o dado, que deben reconocer, contar o interpretar (Treffers, 2008).

Castro, E. y Castro, E. (2010), en "El desarrollo del pensamiento multiplicativo", subrayan algunos aspectos del desarrollo temprano del pensamiento multiplicativo, resaltando su diferencia respecto al aditivo y aportando información para una toma de decisiones en el desarrollo curricular de esta temática, aunque centrados en enseñanzas posteriores a la del ciclo de Educación Infantil. Estos autores analizan el origen del pensamiento multiplicativo y exponen resultados de investigación que apuestan porque este origen se encuentra en el esquema de correspondencia uno a muchos, antes que en el esquema de adición repetida.

Por ejemplo, Park y Nunes (2001), en un estudio destinado a observar si la comprensión de la correspondencia uno a muchos constituía la base de la multiplicación, concluyeron que los niños que fueron animados a resolver los problemas de multiplicación usando correspondencias entre dos variables fueron mejores resolutores que aquéllos que fueron instruidos en la multiplicación como adición repetida.

No obstante, algunos estudios recientes con niños de Educación Infantil, como el de Rodríguez y otros (2008), sólo contemplan estrategias de adición repetida entre las manifestadas por los distintos resolutores de esta etapa.

En nuestras investigaciones, hemos podido comprobar que a los niños de 4 años les cuesta mucho trabajo resolver los problemas que les planteamos, incluso el más sencillo ("si va la rana de 2 en 2 piedras, ¿cuántos saltos dará?"), y que en muchas ocasiones parecen incluso no llegar a comprender la tarea planteada (Bosch y Castro, 2009). No obstante, muchos niños de 5 años sí resuelven satisfactoriamente los problemas que les planteamos, y las diferencias, respecto a los niños de 6 años, son escasas. Este resultado resulta coherente con estudios anteriores, en los que se pone de manifiesto que el pensamiento multiplicativo aparece de forma temprana pero se desarrolla lentamente (Clark y Kamii, 1996; Empson y Turner, 2006).

5.5. Desarrollo del pensamiento proporcional

Tradicionalmente, razón y proporción han sido consideradas como tópicos para la enseñanza media, principalmente por las teorías de Piaget sobre que la comprensión de dichos tópicos no se alcanza hasta la adolescencia. Jean Piaget se basaba en que el razonamiento proporcional es de segundo orden, ya que las proporciones son relaciones entre cantidades, y por tanto, las comparaciones entre proporciones serían relaciones entre relaciones. Sin embargo, visto en un contexto más amplio, sus estrechas relaciones con las fracciones así como con otros conceptos multiplicativos, sugieren que deba tratarse a todos los niveles del currículo, desde la escuela elemental hasta las enseñanzas universitarias (Lamon, 2007).

En España, el grupo de Luis Puig y sus colaboradores han trabajado sobe los tópicos de razón y proporción en la escuela primaria, como se muestra en los trabajos de Alejandro Fernández. Por ejemplo, en Fernández, A. F., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O. y Puig, L. (2009), se explica que la mayoría de los estudios realizados hasta la fecha sobre pensamiento relacional y proporcional han sido sobre adolescentes y preadolescentes. Esto motiva estudios en México sobre los contenidos y las formas didácticas que deben trabajarse con los alumnos de educación primaria para desarrollar, paulatina y progresivamente, el razonamiento proporcional. Estos investigadores proponen a los estudiantes problemas de proporcionalidad, tanto con cantidades discretas (por ejemplo, respecto a unos niños que van a escuchar un cuento situados sobre unas marcas en el suelo; se les pregunta en qué ocasión estarán más apretados), como con cantidades continuas (como en el clásico ejemplo de mezclas de refrescos en las que interviene el agua junto a un tipo de zumo de fruta y se le pregunta cuál tendrá más sabor a fruta).

Puede que este tipo de razonamiento se considere demasiado complejo para ser abordado en Educación infantil, pero en los primeros niveles, las cantidades relativas que no son cuantificadas suponen un importante tipo de razonamiento proporcional fácilmente accesible para los niños cuando se sitúan en un contexto cercano y comprensible para ellos (Lamon, 2006).

Considérese, por ejemplo, el siguiente problema:

> Ayer repartiste algunas galletas entre unos amigos. Hoy vas a repartir menos galletas entre un número mayor de amigos. ¿Cada uno tocará a más, menos o igual cantidad de galletas que ayer? (Lamon, 2006, p. 631)

En este caso, tanto la cantidad de personas como la cantidad de galletas son cuantificables, pero incluso sin necesidad de cuantificar esa cantidad, la pregunta puede ser respondida. Este tipo de razonamiento resulta "fácil" para los niños, porque se construye sobre su conocimiento previo y su experiencia en el reparto, a nivel discreto.

También es cierto que los niños pequeños presentan dificultades para razonar sobre las relaciones parte-todo, pero que fácilmente razonan si una parte es mayor que otra, y que pueden usar esta relación de primer orden como base para comparar proporciones Spinillo y Bryant (1999). En el caso de las magnitudes continuas, se ha demostrado, por ejemplo, que alumnos de primer curso de primaria saben que si una cantidad se divide en muchas piezas (partes), entonces cada pieza será menor que si se divide en pocas piezas (partes) (Sophian &Wood, 1997).

Como hemos señalado anteriormente, un razonamiento de este tipo, entre otros de carácter multiplicativo, ponemos a prueba en nuestras investigaciones con niños de 4 a 6 años. Y nuestra intención es la de colaborar en la ampliación del conocimiento que tiene la comunidad de educadores, sobre el desarrollo del pensamiento multiplicativo y proporcional en los primeros niveles. En ello continuamos.

Arrieros somos…

Agradecimientos
Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto "Modelización y Representaciones en Educación Matemática" (ref. EDU 2009-11337, Plan I + D + i del Ministerio de Ciencia e Innovación), cuyo investigador principal es D. Enrique Castro Martínez, Catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Referencias

Alibali, M. & Goldin-Meadow, S. (1993). Gesture-Speech Mismath and Mechanisms of Learning: What the Hands Reveal about a Child's State of Mind. *Cognitive Psychology, 25*, 468-523.

Alonso, D. & Fuentes, L. J. (2001). Mecanismos cerebrales del pensamiento matemático. *Revista de Neurología, 33*(6), 568-576.

Alsina, A. (2002) De los contenidos a las competencias numéricas en la enseñanza obligatoria. *UNO, 29*, 55-66.

Alsina, A. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático en niños de 0 a 6 años*. Octaedro.

Alsina, A. (2011). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años*. Cuadernos de Educación. Horsori.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 367-385.

Ayllón, M., Castro, E. & Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. M. Moreno y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XIV*, 223-233. Universitat de Lleida.

Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor aprendizaje.

Baroody, A.J. (2003). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of Conceptual and Procedural Knowledge. En Baroody & Dowker (Eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise*, pp. 1-34. Lawrence Erlbaum.

Baroody, A. J., Lai, M. & Mix, K. (2006). The development of young children's number and operation sense and its implication for early childhood education. En B. Spodeck & O. N. Saracho (Eds.), *Handbook of research on the education of young children*, pp. 187-221. Erlbaum.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38*, 333-339.

Bosch, M. A., Castro, E. & Segovia, I. (2007). El Pensamiento Multiplicativo en los Primeros Niveles. *PNA, 1*, 179-190.

Bosch, M.A. & Castro, E. (2009). El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles. Un estudio evolutivo de corte transversal. *INDIVISA. Boletín de Estudios e Investigación. Monografía XII*, 248-259.

Bosch, M. A., Castro, E. & Segovia, I. (in press) Pensamiento multiplicativo en los primeros niveles. Una tesis en marcha. En Lupiáñez y otros (Eds.) SEIEM.

Brissiaud, R. (1989). *El aprendizaje del cálculo*. Madrid: Visor.

Bryant, P. (1997). Mathematics understanding in the nursery school years. En Nunes & Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics*, 53-67. Psychology Press.

Caballero, S. (2005). *Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil*. Tesis doctoral. UCM.

Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. & Weisbeck, L. (1993). Models of Problem Solving: A Study of Kindergarten Children's Problem-Solving Processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 428-441.

Canals, M. A. (2001). *Vivir las Matemáticas*. Barcelona: Octaedro- Rosa Sensat.

Cantoral, R. y otros (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Universidad Virtual.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L. y Empson, S.B. (1999). Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction. Postmourth, NH: Heinemann. Trad. de C. De Castro y M. Linares: Las Matemáticas que hacen los niños.

Carpenter, T., Franke, M.L. & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic And Algebra in Elementary School*. Heinemann. Postmouth, USA.

Carretero, M. y Asensio, M. (2008). *Psicología del Pensamiento*. Madrid: Alianza Editorial.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Comares. Granada.

Castro, E. (2008). Pensamiento numérico y Educación Matemática. "Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas". Universidad de Granada.

Castro, E. & Cañizares, M. (2003). *Desarrollo Lógico-Matemático. Enciclopedia de la Educación Infantil*, pp. 395-410. Málaga: Aljibe.

Castro, E. & Castro, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 54*, 31-40.

Castro, E., Olmo, M. A. & Castro, E. (2002). *Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro, E., Rico, L. & Castro, E. (1988). *Números y operaciones*. Síntesis: Madrid.

Clarke, D. (2001). Understanding, assessing and developing young children's mathematical thinking: Research as a powerful tool for professional growth. En J. Bobis, B. Perry & M. Mitchelmore (Eds.), *Numeracy and beyond. Proceedings of the 24th annual conference of the Mathematics Education Group of Australasia* (pp.9-26). Sydney: MERGA.

Caulfield, R. (2000). Number Matters: Born to Count. *Early Childhood Educational Journal, 28*(1), 63-65.

Charles, K. & Nason, R. (2000). Young Children Partitioning Strategies. *Educational Studies in Mathematics, 43*, 191-221.

Chapman, O. (2011). Supporting the development of mathematical thinking. En B. Ubuz (Ed.). *Proceedings of the 35th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 69-75. Ankara, Turkey: PME.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2006). Early Childhood Mathematics Learning. En B. Spodeck & O. N. Saracho (Eds.), *Handbook of research on the education of young children*, pp. 187-221. Erlbaum.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.

Correa, J.; Nunes, T.; Bryant, P. (1998). Young Children's Understanding of Division: The Relationship Between Division Terms in a Noncomputational Task. *Journal of Educational Psychology, 90*(2), 321-329.

Daugherty, B. (1989). Applying Number Sense to Problem Solving. *Arithmetic Teacher*, Febrero de 1989, pp. 22-25.

Davis, G. & Hunting, R.P. (1990). Spontaneus Partitioning: Pre-schoolers and Discrete Items. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 367-374.

Davis, G. & Pepper, K. (1992). Mathematics Problem Solving by Pre-school Children. *Educational Studies in Mathematics, 23* (4), 397-415

Davis, G. & Pitkethly, A. (1990). Cognitive Aspects of Sharing. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 145-153

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning and Instruction, 6*(3), 219-242.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the mind Creates Mathematics*. Oxford University Press.

Empson, S. & Turner, E. (2006) The emergente of multiplicative thinking in children's solutions to paper holding tasks. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 46-56.

Fernández, A. F. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la Escuela Primaria*. Valencia: Gráficas Marí Montañana.

Fernández, A. y otros (2009). *Competencias en razón y proporción en la Escuela Primaria*. Valencia: Gráficas Marí Montañana.

Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años*. Tesis doctoral. Universidad de Málaga.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (1), 3-17.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel. Dordrecht.

Garnham, A. & Oakhill, J. (1996). *Manual de psicología del pensamiento*. Barcelona: Paidós.

Harel, G. & Confrey, J. (1994). *The development of multiplicative reasoning in the development of mathematics*. N.Y. Press. (e-LIBRO)

Isoda, M. & Olfos, R. (2009). *La enseñanza de la multiplicación*. Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Jacobs, V., Lamb, L. & Philipp, R. (2010). Profesional Noticing of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Kamii, C. & De Vries, R. (1995). *La Teoría de Piaget y la Educación Preescolar*. Visor Aprendizaje.

Kouba, V. L. (1989). Children's Solution Strategies for Equivalent Set Multiplication and Division Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 2*(20), 147-158.

Lago, M. O., Rodríguez, P., Zamora, A. & Madroño, L. (1999). Influencia de los modelos intuitivos en la comprensión de la multiplicación y la división. *Anuario de Psicología, 30*(3), 71-89.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

Lamon, S.J. (1996). The Development of Unitizing: Its Role in Children Partitioning Strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 170-193.

Lamon, S. J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning. En Lester, F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 629-667. USA: NCTM.

Lozano, A. (2008). Diseño y validación de software para evaluar las estrategias de aprendizaje autorregulado en educación infantil. Tesis doctorales. Universidad de Almería.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Addison Wesley. London.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del signo igual por alumnos de Tercero de Educación Primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M.C. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Mulligan, J. & Vergnaud, G. (2006). Research on Children's Early Mathematical Development. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research in the Psychology of the Mathematics Education*, pp. 117-146.

Mulligan, J. T., & Wright, R J. (2000). An assessment framework for early multiplication and division. En T.Nakahara & M. Koyarna (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, pp. 17-25).

Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1991) Young children's division strategies. In F. Furinghetti (Ed.). *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3*, pp.49-56. Assisi, Italy

Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1992) The development of young students' division strategies. In W. Geeslin, & K. Graham (Eds.). *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*, pp.152-159. Durham, NH.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. SAEM. THALES. Sevilla.

Neuman, D. (1999). Early learning and awareness of division: phenomenographic approach. *Educational Studies in Mathematic, 40*, 101-128.

Nunes, T. (1997). Systems of signs and mathematical reasoning. En T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: an international perspective*, 29-44. Psychology Press.

Nunes, T. Bryant, P. & Otros (2008). Deaf Children's Informal Knowledge of Multiplicative Reasoning. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education Advance Access*, published October 23, 2008. Extraído de jdsde.oxfordjournals.org.

Olive, J. (2001). Children's Number Sequences: An Explanation of Steffe's Cosntructs and an Extrapolation to Rational Numbers of Arithmetic. *The Mathematics Educator, 11*(1), 4-9.

Park, J.H. & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development, 16*, 763-773.

Perry, B. & Dockett, S. (2008). Young Children's Access to Powerful Mathematical Ideas. En *Handbook for International Research in Mathematics Education*, pp. 75-112.

Prellezo, J. M. (2010). Diccionario de Ciencias de la Educación. Editorial CCS.

Rodríguez, P., Lago, M. O., Caballero, S., Dopico, C., Jiménez, L. & Solbes, I. (2008). El desarrollo de las estrategias infantiles. Un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo. Anales de Psicología, 24 (2), 240-252.

Ruesga, P. (2002). Educación del Razonamiento Lógico Matemático en Educación Infantil. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Saiz, C. (2008). Enseñar a pensar. En Carretero y Asensio (Coords.), Psicología Del Pensamiento. Madrid: Alianza Editorial.

Sophian, C. & Wood, A. (1997). Proportional reasoning in young children: The parts and the whole of it. Journal of Educational Psychology, 89, 309-317.

Sowder, J. (1992). Estimation and Number Sense. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 371-389). NY: Macmillan Publishing Company and NCTM.

Spinillo, A. G. & Bryant, P. E. (1999). Proportional reasoning in young children: Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. Mathematical Cognition, 5, 181-197.

Squire, S. & Bryant, P. (2002). The Inflluence of Sharing on Children's Initial Concept of Division. Journal of Experimental Child Psychology, 81, 1-43.

Squire, S.; Bryant, P. (2003). Children's models of division. Cognitive Development, 18, 255-376.

Steffee, L. P. (1994). Children's multiplying scheme. In G. Harel and J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 3-39). State University of New York Press.

Sullivan, P., Clarke, D., Cheesman, J., & Mulligan, J. T. (2001). Moving beyond physical models in learning multiplicative reasoning. En M. van den Heuvel- Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 233-241.

Treffers, A. (2008). Kindergarten 1 and 2. Growing number sense. En M. Van den Heuvel-Panhuzen (Ed.), *Children Learn Mathematics. A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 31-42). Rotherdam: Sense Publishers.

Van De Walle, J. A. (1990). Concepts of Number. En J. N. Payne (Ed.), *Mathematics for the Young Children*, pp. 63-87. Reston, VA: NCTM.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. En Lesh, R. & Landau, M. (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 128-174). London: Academic Press.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole Number and Operations. Lester, F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Reston, VA: NCTM.

Worth, J. (1990). Developing problem solving abilities and disabilities. En J. N. Payne (Ed.), *Mathematics for the Young Children* (pp. 39-61). Reston, VA: NCTM.