



Universidad de Valladolid



**ESCUELA DE INGENIERÍAS
INDUSTRIALES**

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

**Método Directo de Rigidez para el cálculo
plástico de estructuras de barras esbeltas
solicitadas por carga distribuida uniforme**

Autor:

Pérez Nicolás, Sergio

Tutor(es):

Cacho Pérez, Mariano

**Departamento de Construcciones
Arquitectónicas, Ingeniería del
Terreno y Mecánica de los Medios
Continuos y Teoría de Estructuras**

Valladolid, Junio 2022.

Agradecimientos

Deseo agradecer a mi familia todo el apoyo recibido, especialmente a mis padres y a mi hermano por haberme apoyado y confiado siempre en mí.

Agradezco a mi tutor, Mariano Cacho Pérez, por las orientaciones recibidas a lo largo de este trabajo.

RESUMEN

Los métodos de cálculo plástico nos permiten el estudio de los mecanismos de colapso que presentan las estructuras. La información que obtenemos a partir del cálculo plástico se utiliza para diseñar y conocer la seguridad de una estructura ante la rotura.

El método de cálculo utilizado para la sistematización ha sido el Método Directo y el Método Paso a Paso, en caso de que tengamos mecanismo incompleto. Con la solución obtenida a través de estos métodos proporcionamos el lugar donde se producen las rótulas plásticas, la carga crítica y el valor de los momentos en el punto de plastificación..

En este trabajo se ha sistematizado mediante Wolfram Mathematica, la resolución de un problema de cálculo plástico bidimensional con cargas distribuidas. Para la combinación de cargas se utiliza el capítulo de acciones en la edificación del Código Técnico.

PALABRAS CLAVE: Cálculo plástico, método directo, estructuras, mecanismo de colapso, CTE, rótula plástica, Wolfram Mathematica.

ABSTRACT:

Plastic calculation methods allow us to study the collapse mechanisms of structures. The information obtained from the plastic calculation is used to design and know the safety of a structure in case of rupture.

The calculation method used for the systematization has been the Direct Method and the Step-by-Step Method in case we have incomplete mechanism. With the solution obtained through these methods we provide the place where the plastic hinges are produced, the critical load and the moment diagram.

In this work, the solution of a two-dimensional plastic calculation problem with distributed loads has been systematized with the Wolfram Mathematica program. For the combination of loads, the chapter on actions in building construction of the Technical Code has been used.

KEYWORDS: Plastic calculation, direct method, structures, collapse mechanism, CTE, plastic hinge, Wolfram Mathematica.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN.....	2
1.1. Objetivos.....	2
1.2. Justificación del trabajo	2
1.3. Estructura del documento.....	3
2. Estado del arte. Marco teórico.....	5
2.1. Teoremas del cálculo plástico.....	5
2.2. Métodos de cálculo plástico	6
2.2.1. Método directo	6
2.2.2. Métodos paso a paso	7
2.3. Modelos de rótulas plásticas.....	8
2.3.1. Modelo de rótula distribuida	8
2.3.2. Modelo de rótula concentrada	8
2.4. Factores que afectan al momento plástico	9
2.4.1. Influencias externas	9
2.4.2. No linealidades geométricas.....	11
2.5. Optimización del peso en estructuras.....	12
3. Metodología. Cálculo plástico.....	15
3.1. Hipótesis y teoremas del cálculo plástico.....	15
3.2. Conceptos del cálculo plástico.....	15
3.2.1. Factor de forma.....	16
3.2.2. Rótulas plásticas.....	18
3.2.3. Grado de hiperasticidad (GH)	18
3.3. Aplicación teórico-práctica. Método directo.....	19
3.4. Aplicación teórico-práctica. Método paso a paso.....	25
3.5. Acciones en la edificación	29
3.5.1. Tipos de acciones	29
4. Programación. Código del Ejemplo 1.....	36
4.1. Planteamiento del problema a resolver	36
4.2. Código de resolución para resolver el problema estático	37
4.2.1. Introducción datos enunciado	37
4.2.2. Cálculo Fuerzas locales	38
4.2.3. Cálculo fuerzas en globales	40
4.2.4. Cálculo vector fuerzas globales de la estructura Fest	41
4.2.5. Aplicación de las condiciones de contorno.....	42
4.2.6. Cálculo ecuaciones de equilibrio	43
4.2.7. Cálculo grado hiperasticidad.....	43
4.2.8. Vectores momento y giros.....	44
4.2.9. Coeficientes m_i para las ecuaciones de compatibilidad	45
4.2.10. Cálculo de ecuaciones de compatibilidad.....	46
4.2.11. Resolución del problema estático	47
4.3. Código de resolución método Paso a Paso	48

4.4.	Código de resolución Método Directo	50
5.	Resultados. Problemas de aplicación	55
5.1.	Problema de aplicación 1	55
5.1.1.	Clasificación acciones.....	55
5.1.2.	Combinación de cargas	60
5.1.3.	Planteamiento del problema	61
5.1.4.	Código introducido.....	62
5.1.5.	Solución y conclusiones del problema.....	63
5.2.	Problema de aplicación 2	65
5.2.1.	Planteamiento del problema	65
5.2.2.	Código introducido.....	66
5.2.3.	Solución y conclusiones del problema.....	67
6.	Conclusiones y líneas futuras	70
6.1.	Conclusiones	70
6.2.	Trabajos futuros	71
	Bibliografía	72
	Anexo 1: Presupuesto	74
	Anexo 2: Guía rápida de Wolfram Mathematica.....	77
	Anexo 3: Código de resolución	79

Índice de ilustraciones

Ilustración 1 Modelo de rótula distribuida (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E., 2021)	8
Ilustración 2 Modelo de rótula concentrada (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E., 2021)	9
Ilustración 3 Efecto fuerza normal en sección tipo I ((Neal, 1977) figuras 6.4 y 6.3)	10
Ilustración 4 Efectos de no linealidades geométricas (Hoang, Dang, Jaspert, & Demonceau, 2015)	11
Ilustración 5 Optimización de peso en pórticos (Neal, 1977)	12
Ilustración 6 Representación gráfica, optimización peso (Neal, 1977)	12
Ilustración 7 Diagrama rigidez equivalente estructura (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E., 2021)	16
Ilustración 8 Comportamiento en función del Factor de forma (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E., 2021)	17
Ilustración 9 Formación rótula plástica (Colón, 2015)	17
Ilustración 10 Ejemplo método directo	19
Ilustración 11 Posible mecanismo de colapso 1	20
Ilustración 12 Posible mecanismo de colapso 2	21
Ilustración 13 Mecanismo de colapso, combinación 1 y 2	22
Ilustración 14 M(x) lineal para cargas puntuales (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E., 2021)	23
Ilustración 15 M(x) parabólica para cargas distribuidas (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E., 2021)	25
Ilustración 16 Ejemplo método Paso a Paso	25
Ilustración 17 Mecanismo de colapso	29
Ilustración 18 Valores característicos de las sobrecargas de uso (Acciones, 2022)	31
Ilustración 19 Coeficiente reducción sobrecargas (Acciones, 2022)	31
Ilustración 20 Coeficiente de exposición (Acciones, 2022)	32
Ilustración 21 Coeficiente eólico, cubierta plana (Acciones, 2022)	32
Ilustración 22 Zonas climáticas en España (Acciones, 2022)	33
Ilustración 23 Sobrecarga de nieve en función de la zona y altitud (Acciones, 2022)	34
Ilustración 24 Coeficiente de forma (Acciones, 2022)	34
Ilustración 25 Ejemplo 1	36
Ilustración 26 Código, Introducción enunciado	37
Ilustración 27 Código, Introducción Condiciones de Contorno	38
Ilustración 28 Definición de esfuerzos	38
Ilustración 29 Código, Cálculo de las fuerzas $F_{[i,j]}$ de todos los nudos	39
Ilustración 30 Código, Fuerzas locales	39
Ilustración 31 Código, Vector fuerzas globales	40
Ilustración 32 Código, Cálculo vector Fest	41
Ilustración 33 Código, Solución vector Fest	42
Ilustración 34 Código, Aplicación condiciones de contorno	42
Ilustración 35 Código, Cálculo ecuaciones equilibrio	43
Ilustración 36 Código, Cálculo grado hiperasticidad GH	43
Ilustración 37 Código, Definición vectores momento y giro	44
Ilustración 38 Código, Cálculo índices m_i	45
Ilustración 39 Código, Cálculo Ecuaciones Compatibilidad	46

Ilustración 40 Código, Ecuaciones Compatibilidad.....	47
Ilustración 41 Código, Ecuaciones compatibilidad igualadas a 0	47
Ilustración 42 Código, Resolución sistema ecuaciones	48
Ilustración 43 Código, Paso 1 Método Paso a Paso	48
Ilustración 44Código, Pasos 2, 3 y 4, Método Paso a Paso	49
Ilustración 45 Mecanismo de colapso, rótulas plásticas 1, 3, 4 y 5	50
Ilustración 46 Código, límites momentos	50
Ilustración 47 M(x) parabólico (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E., 2021)	51
Ilustración 48 Código, Obtención $x[i]$ y M_x	51
Ilustración 49 Código, Obtención M_{max}	51
Ilustración 50 Código, Solución Método Directo	52
Ilustración 51 Mecanismo de colapso, rótulas plásticas 1, 3, 4 y 5	52
Ilustración 52 Estructura, problema aplicación 1 (Nicolás, 2021)	55
Ilustración 53 Fuerza distribuida Peso Propio (Pórtico interior 1)	56
Ilustración 54 Carga distribuida de Sobrecarga de uso (Pórtico interior 1).....	57
Ilustración 55 Cargas distribuidas debidas al viento.....	58
Ilustración 56 Carga distribuida Nieve (Pórtico interior 1)	59
Ilustración 57 Combinación de cargas, Problema 1.....	61
Ilustración 58 Código, Problema 1.....	62
Ilustración 59 Rótulas, mecanismo de colapso	64
Ilustración 60 Problema de aplicación 2	66
Ilustración 61 Código, Problema de aplicación 2.....	66
Ilustración 62 Rótulas, mecanismo de colapso	68

Índice de tablas

Tabla 1 Método Directo.....	23
Tabla 2 Resumen pesos propios (Nicolás, 2021)	56
Tabla 3 Acción viento	58
Tabla 4 Sueldo según convenio.....	74
Tabla 5 Desglose trabajos	74
Tabla 6 Material.....	75
Tabla 7 Costes Indirectos.....	75
Tabla 8 Coste Total.....	75

CAPÍTULO 1

Introducción

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo plástico es la parte de las estructuras que estudia un cuerpo deformado de manera irreversible, independientemente del tiempo que comienza a plantearse cuando se llega a un cierto nivel de carga. Para conocer si una estructura es segura ante ciertos estados de carga se realiza el análisis a plastificación.

1.1. Objetivos

Durante el grado, se cursan asignaturas como Resistencia de Materiales en la que se estudia criterios de plastificación Von Mises o Tresca de barras. En el último año, en la asignatura de Estructuras y Construcciones Industriales se resuelven problemas de cálculo plástico para estructuras con geometría sencilla y con cargas puntuales. También se cursa la asignatura de Estructuras Metálicas de la cual se adquieren competencias para aplicar el código técnico y obtener las cargas que se deben aplicar según la norma del CTE.

El objetivo de este trabajo es poder completar el análisis plástico de un pórtico real de una nave a través de los conocimientos adquiridos durante el grado y durante el desarrollo de este trabajo fin de grado.

Para obtener el objetivo marcado se formulará un código para sistematizar el cálculo plástico de estructuras bidimensionales con cargas distribuidas y/o puntuales, a través de diferentes métodos de cálculo.

1.2. Justificación del trabajo

Los problemas de cálculo plástico pueden llegar a ser realmente tediosos de resolver ya que conforme aumenta la complejidad de la estructura, aumentan también significativamente el número incógnitas.

Se habla de una estructura compleja como aquella que presenta barras no alineadas, varios bucles, diferentes tipos de apoyos, y cargas distribuidas las cuales nos van a provocar distribuciones parabólicas.

Esto nos lleva a realizar un código para sistematizar el procedimiento, ya que la realización a mano de un problema de cálculo plástico llevaría una gran cantidad de horas resolverlo correctamente y comprobarlo.

1.3. Estructura del documento

En el *capítulo 2*, se estudian los antecedentes históricos referidos a la creación de teorías de cálculo plástico, modelos y teorías que se necesitan para plantear un problema de cálculo plástico.

En el *capítulo 3* se explican las hipótesis previas y la metodología de resolución que se usará para resolver los problemas mediante el Método Paso a Paso y el Método Directo. También se expone la metodología para aplicar las cargas según el Código Técnico de la Edificación.

En el *capítulo 4*, se planteará un ejemplo de un pórtico bidimensional desarrollado durante la asignatura de Estructuras, para validar el código que se ha creado mediante el software Wolfram Mathematica.

En el *capítulo 5*, se realizarán dos problemas de aplicación en los cuales se discutirán los resultados. En el primer problema se expondrán los resultados de la aplicación de cargas mediante el CTE.

En el *capítulo 6*, se presentan las conclusiones más relevantes sobre el trabajo y una serie de líneas futuras.

Finalmente, hay un anexo sobre el análisis económico del proyecto y otros dos sobre la programación mediante Wolfram Mathematica.

CAPÍTULO 2

Estado del arte. Marco teórico.

2. Estado del arte. Marco teórico

Los problemas de plastificación se basan en determinar la carga crítica de plastificación y en base a ello desarrollar un diseño de la estructura. Para ello en el s.XX diversos autores crearon los teoremas y métodos que se van a desarrollar en el siguiente apartado.

Para este apartado se ha tomado como referencias bibliográficas trabajos doctorales (Demoncean, 2007), (Hoang, 2008), y artículos o libros sobre el análisis plástico (Hoang, Dang, Jaspert, & Demonceau, 2015), (Horne, 1951), (Drucker, 1956), (Green, 1954), (Roderick & Philipps, 1950), (Colón, 2015)).

2.1. Teoremas del cálculo plástico

Los teoremas fundamentales (Colón, 2015) del cálculo plástico en los cuales se han basado los métodos de cálculo son los siguientes:

Teorema estático

Cumpliendo las condiciones de equilibrio y siendo el momento menor o igual que el de plastificación en valor absoluto, la estimación del factor de carga es inferior a la que define el mecanismo de colapso para una sollicitación. También es llamado teorema del límite inferior.

Teorema cinemático

La estimación del factor de carga es superior a la que define el mecanismo de colapso para una sollicitación. También es llamado teorema del límite superior.

Teorema unicidad

Se deben satisfacer simultáneamente las siguientes condiciones:

- Condiciones de equilibrio.
- Condición de plastificación: $-M_p \leq M \leq M_p$
- En el instante de colapso, el momento $M=M_p$ en las rótulas que se producen para dar lugar a un mecanismo.

2.2. Métodos de cálculo plástico

2.2.1. Método directo

El método directo se basa en los teoremas estáticos y cinemáticos, desde la década de los años 50, estos teoremas han sido continuamente estudiados y mejorados.

Los métodos creados inicialmente por Neal, Baker, Symonds y Home, aún hoy en día se usan en el entorno académico como el método de combinación de mecanismos. A partir de 1970 con los desarrollos de programación en los métodos de plastificación, los métodos iniciales pasan a llamarse métodos clásicos.

Los métodos clásicos como puede ser el de combinación de mecanismo para estructuras, con menos de 20 barras son efectivos, pero al aumentar el número de ellas es conveniente usar los métodos de programación matemática.

La programación lineal se empezó a usar en los problemas de plastificación desde que Dantzig desarrolló el método Simplex (Simplex, 2022). Autores como Chame, Maier, Cohn, Grierson y Munro, realizaron estudios sobre la programación lineal en el cálculo plástico.

Desde 1970, se empezaron a desarrollar los primeros programas de ordenador con base en la programación lineal. La programación lineal se desarrolla junto con los métodos de elementos finitos, para conseguir reducir la complejidad del problema y que el costo de computación sea menor. Algunos de los investigadores fueron Domaszewski y Nguyen-Dang en las décadas de los 70-80. El análisis de segundo orden fue desarrollado por Baset en 1973. Los programas que se crearon son: DAPS¹, STRUPL-ANALYSIS² y CEPAO³.

Desde la década de los años 90 prácticamente no ha habido desarrollo en parte por los problemas que aparecen en los métodos directos y por el uso más extendido de los métodos paso a paso.

¹ DAPS: Programa de estructuras de cálculo plástico desarrollado en la Universidad de Waterloo en 1973 (Cohn, Parimi y Ghosh).

² STRUPL-ANALYSIS: Programa de estructuras de cálculo plástico desarrollado en la Universidad de Waterloo en 1979 (Franchi, Grierson y Ghosh).

³ CEPAO: Programa de análisis y optimización de estructuras (Nguyen-Dang), 1984. Utiliza el número mínimo de incógnitas usando formulaciones estáticas y cinemáticas.

2.2.1.1. *Ventajas de los métodos directos*

- Aprovecha los avances conseguidos en la programación matemática y posibilidad de realizar algoritmos para su resolución.
- Es óptimo para resolver estructuras con cargas arbitrarias repetidas.
- No está influenciado por los comportamientos locales de las estructuras, el retorno elástico, el cual si ocurre en ocasiones en el método paso a paso.
- En el método Simplex en ocasiones se producen fenómenos inadecuados.

2.2.1.2. *Desventajas del método directo*

- Cuando se considera la geometría no lineal aparecen dificultades en el método.
- Para estructuras de gran tamaño, no es conveniente utilizar este método.

2.2.2. Métodos paso a paso

Los métodos paso a paso o métodos incrementales elástico-plásticos (Neal, 1977) se basan en los métodos estándar del análisis elástico. El proceso de carga se divide en varios pasos. Después de cada paso de carga, la matriz de rigidez se actualiza para tener en cuenta los efectos no lineales.

En comparación con la solución elástica, solo se varía la matriz física para considerar el comportamiento plástico. Los métodos paso a paso aprovechan grandes experiencias del análisis elástico lineal, por el método de elementos finitos. Se pueden encontrar muchos algoritmos y técnicas computacionales útiles en multitud de libros de texto.

El software comercial para el análisis estructural casi se ha desarrollado adaptando los métodos paso a paso.

2.2.2.1. *Ventajas del método paso a paso*

- La no linealidad geométrica se tiene en cuenta en el método.
- Los métodos paso a paso nos dan la redistribución completa antes del colapso de estructuras.
- Las estructuras de grandes dimensiones de tres dimensiones pueden ser tratadas mediante este método.

2.2.2.2. Desventajas del método paso a paso

- Hay dificultades para resolver los casos con historiales de carga arbitrarios (problema de Shakedown).
- El método está influenciado por el comportamiento local de las estructuras, lo que puede dar lugar a una solución errónea.

Esta información se ha obtenido del capítulo 1 (Hoang, 2008) y (Hoang, Dang, Jaspert, & Demonceau, 2015).

2.3. Modelos de rótulas plásticas

Las rótulas plásticas son los puntos de la estructura en los cuales se ha alcanzado el momento plástico. En el momento que se produzcan un número determinado de rótulas plásticas, la estructura colapsará.

2.3.1. Modelo de rótula distribuida

Las secciones próximas a la rótula plástica poseen un momento $M_e \leq M \leq M_p$. En la ilustración 1 se puede ver una representación del modelo.

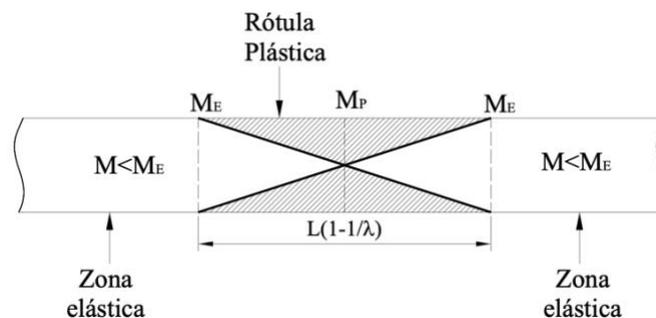


Ilustración 1 Modelo de rótula distribuida (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. 2, 2021)

2.3.2. Modelo de rótula concentrada

Se consideran todas las secciones en régimen elástico excepto en la cual tenemos rótula plástica que tenemos M_p . En la ilustración 2 se puede ver una representación del modelo.

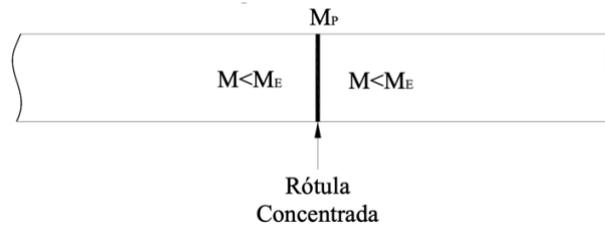


Ilustración 2 Modelo de rótula concentrada (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. 2, 2021)

2.4. Factores que afectan al momento plástico

En el capítulo 6 del libro (Neal, 1977) se consigue la información para abordar los diversos factores que afectan al momento plástico.

Cualquier factor que afecte al límite elástico, afectará también al momento plástico. El límite elástico es dependiente de la composición química y el tratamiento térmico que tenga el material.

En los siguientes puntos se analiza las influencias externas que afecta al momento plástico particularizando en una sección de Tipo I y las no linealidades geométricas.

2.4.1. Influencias externas

2.4.1.1. La tasa de carga, velocidad de deformación.

En los ensayos de tracción el límite elástico se ve afectado por la velocidad de deformación, a una velocidad rápida de carga se conoce que para el acero estructural, el límite elástico se incrementa en un 13% (son ensayos en los que el punto de fluencia se alcanza en menos de 1s).

Normalmente, las tasas de carga que se encuentran no producirían tasas de deformación tan altas, por lo que las variaciones del límite elástico debido a este efecto sean de un orden del 1%.

Los efectos de envejecimiento por deformación después de haber sometido una estructura a cargas que provoquen una o mas rótulas plásticas. A menos que la carga sea cercana a la carga de colapso, el número de rótulas solo sería una pequeña fracción del total involucrado en el mecanismo de colapso.

En flexión la deformación, varía de manera lineal a lo largo de la sección, aunque en estructuras reales raramente ocurren tasas constantes de deformación.

2.4.1.2. Efecto de la fuerza normal en sección I

El efecto de la fuerza normal es reducir el momento plástico. La reducción del momento plástico debido a la fuerza normal es menor de 2% (cuando $n < 0.1$) en los pórticos de una sola planta, por lo que el efecto es muy pequeño. Hay que tenerlo en cuenta en pórticos de varias plantas.

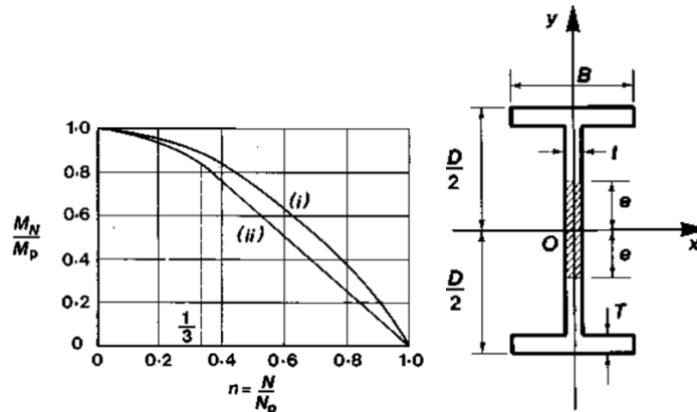


Ilustración 3 Efecto fuerza normal en sección tipo I (Neal, 1977) figuras 6.4 y 6.3)

La N: es la carga normal y la que causa la plastificación es N_p .

En la ilustración 3 tenemos los casos para (i): sección rectangular (ii): sección I. Vemos que el efecto en la sección de tipo I es menor que en las rectangulares.

2.4.1.3. Efecto de la fuerza cortante en sección I

Los efectos de la fuerza cortante son pequeños por lo que no hay una relación de la fuerza cortante con el momento plástico. Los estudios de Drucker (Drucker, 1956), que se han hecho para confirmar esto se han basado en un voladizo de longitud L, con una carga F en su extremo.

2.4.1.4. El efecto combinado de las fuerzas cortantes y axiales

En muy pocas ocasiones las fuerzas cortantes y axiales tendrán un efecto significativo en el momento plástico. Por primera vez este problema fue discutido por Green (Green, 1954), que desarrollo una solución para el límite superior e inferior para una viga de sección rectangular. Para una sección de tipo I fue Horne (Horne, 1951) quien analizó la solución por primera vez a este problema.

2.4.1.5. El efecto de carga central concentrada

Cuando se impone una carga central concentrada se suele observar que el momento plástico es algo mayor. La razón es que, con la carga central concentrada, el momento solo se alcanza debajo de la carga. El efecto que provoca es aumentar la carga de colapso y su momento plástico.

(Roderick & Philipps, 1950) realizaron pruebas en vigas de sección rectangular y confirmaron el siguiente resultado (ec1) semiempírico.

$$M_p = Z_p \sigma_0 \left(1 + \frac{D}{L}\right) \quad (\text{ec1})$$

Para vigas con sección en forma de I no es aplicable si hay un apoyo debajo de la carga.

2.4.2. No linealidades geométricas

El artículo (Hoang, Dang, Jaspart, & Demonceau, 2015) nos trata las no linealidades geométricas con dos efectos principales: efecto membrana y efecto pandeo.

- El **efecto de membrana** aparece cuando se desarrolla un desplazamiento grande. Hasta ahora, el efecto de membrana se considera principalmente en el análisis de robustez para evaluar su grado en las estructuras. En un estado normal de desplazamientos y carga de la estructura es complicado encontrar este efecto presente.
- El **efecto de pandeo** lleva al colapso de los pórticos de acero, y este efecto es uno de los principales aspectos relacionados con la investigación de estructuras de acero.

El efecto de la no linealidad geométrica (ilustración 4) nos produce en la zona elastoplástica de la grafica de Carga-Desplazamiento, un desplazamiento de la curva en función del tipo de efecto no lineal que tengamos.

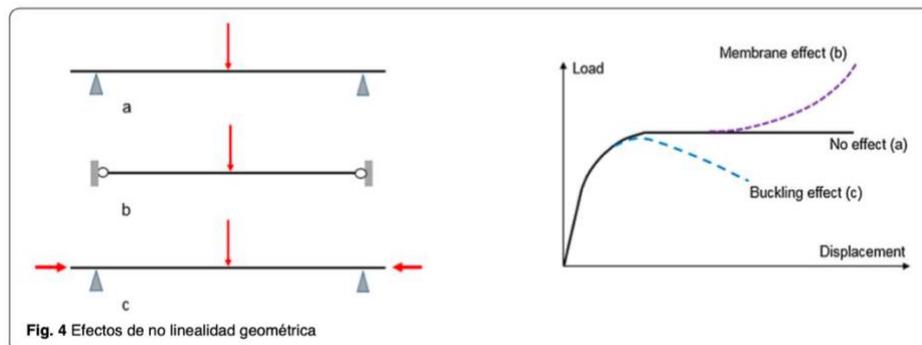


Ilustración 4 Efectos de no linealidades geométricas (Hoang, Dang, Jaspart, & Demonceau, 2015)

2.5. Optimización del peso en estructuras

Para el análisis de este punto tomamos las siguientes simplificaciones. Los pórticos están formados por elementos prismáticos uniformes y los momentos plásticos no consideran los esfuerzos cortantes y axiales.

Se plantea el siguiente procedimiento gráfico, obtenido del capítulo 7 de (Neal, 1977), para conocer la configuración con peso mínimo:

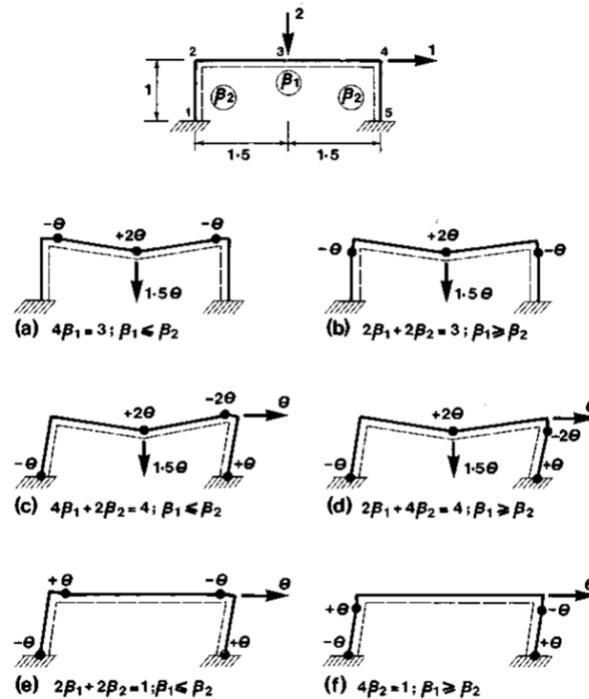


Fig. 7.1 Rectangular frame: mechanisms and work equations

Ilustración 5 Optimización de peso en pórticos (Neal, 1977)

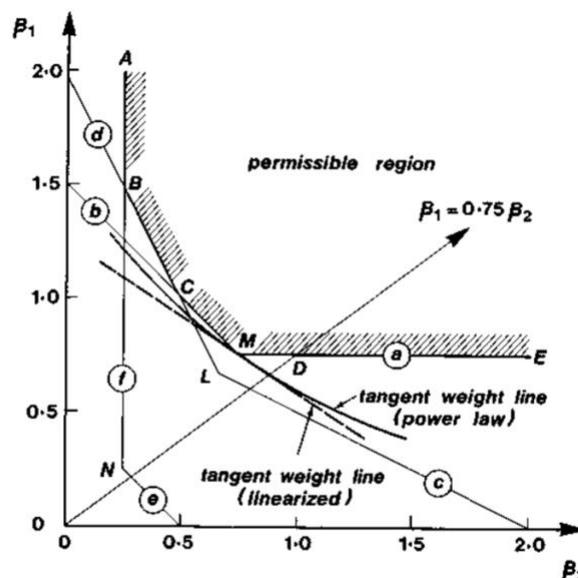


Fig. 7.2 Geometrical analogue for frame of Fig. 7.1

Ilustración 6 Representación gráfica, optimización peso (Neal, 1977)

Las ecuaciones (a, b, c, d, e, f) (ilustración 5) se pueden representar como líneas rectas en un diagrama como vemos en la ilustración 6. Usando el teorema cinemático se realiza las siguientes deducciones.

1. Se considera el caso de $\beta_1=0,75\beta_2$, la cual intersecta en las líneas a, c y e.
2. La intersección de "a" con la recta $\beta_1=0,75\beta_2$, nos da el punto "D". Ese punto representa los valores mas altos de momentos plásticos.
3. Si se que consideran todas las posibilidades de β_1 y β_2 , se consigue la recta ABCME. Esta línea representa todas las posibles combinaciones de colapso de β_1 y β_2 . Los puntos mas alejados del origen son la zona permisible, los cuales podrían soportar cargas mayoradas.
4. El problema del peso mínimo se trata de ubicar el punto en el límite de la relación permisible de la no permisible. **El punto que buscamos es el "M"**. La línea tangente a ese punto $x=3\beta_1+2\beta_2$, es la de peso mínimo.

Para este ejemplo, los valores del momento plástico de $\beta_1=0,75$ y $\beta_2=0,75$ son los de diseño de mínimo peso.

Este procedimiento es válido para pórticos en los haya sola una variable. Cuando hay más de dos parámetros, el procedimiento gráfico para conseguir la línea de peso mínimo es inviable.

CAPÍTULO 3

Metodología. Cálculo plástico

3. Metodología. Cálculo plástico

3.1. Hipótesis y teoremas del cálculo plástico

Las hipótesis que usamos para resolver el problema de cálculo plástico son:

- Las estructuras presentan un equilibrio estable, debe haber un equilibrio en la configuración deformada.
- Materiales son homogéneos e isotrópos (las propiedades son iguales en todas las direcciones).
- El límite elástico del material permanece estable.
- Durante la fase elástico es válido el principio de superposición.
- Hipótesis de pequeños desplazamientos, quiere decir que los desplazamientos de los sólidos, proporcionalmente son muy pequeños. Lo que nos permite que se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio en su posición indeformada.
- Hipótesis de Navier, las secciones permanecerán planas después de la deformación.

3.2. Conceptos del cálculo plástico

Previamente a presentar el desarrollo de los métodos de cálculo se analizan los siguientes conceptos fundamentales para la resolución de un problema.

Momento elástico: momento necesario para que un primer punto de la sección alcance la plastificación, (ec2).

$$M_e = W \sigma_y \quad W: \text{Módulo elástico} \quad (ec2)$$

σ_y : tensión plastificación

Momento plástico: momento en que se produce la plastificación de todos los puntos de una sección, (ec3).

$$M_p = S \sigma_y \quad S: \text{Módulo plástico} \quad (ec3)$$

σ_y : tensión plastificación

En la ilustración 7, vemos la disminución de la pendiente que sufre la estructura (disminución de la rigidez estructura), cada vez que se plastifica una barra de la estructura.

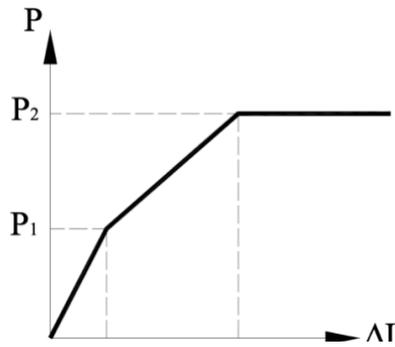


Ilustración 7 Diagrama rigidez equivalente estructura (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. 2, 2021)

3.2.1. Factor de forma

Factor de forma: nos relaciona el momento elástico y el plástico, (ec4). Nos indica la reserva de resistencia que tiene la sección desde que alcanza el momento elástico hasta que llega al momento plástico.

$$\lambda = \frac{M_p}{M_e} \quad (\text{ec4})$$

El factor de forma depende de las propiedades de la sección, pero en casos como la sección circular maciza o rectangular maciza, es independiente de sus propiedades geométricas.

- Sección rectangular maciza: $\lambda=1,5$
- Sección circular maciza: $\lambda=1,698$
- IPE 100: $\lambda=1,151$
- IPE 300: $\lambda=1,129$
- IPE 450: $\lambda=1,137$

Podemos observar como las secciones macizas tienen un factor de forma mayor que las de tipo IPE, las cuales son las secciones más utilizadas en la industria de la estructura metálica.

El factor de forma de las secciones IPE no es lineal, es decir, no crece o decrece según aumenta la sección, sino que depende de su geometría.

3.2.1.1. Comportamiento del factor de forma en función de la deflexión

En la ilustración 8, vemos el comportamiento en función de factor de forma de una sección sometida a una carga.

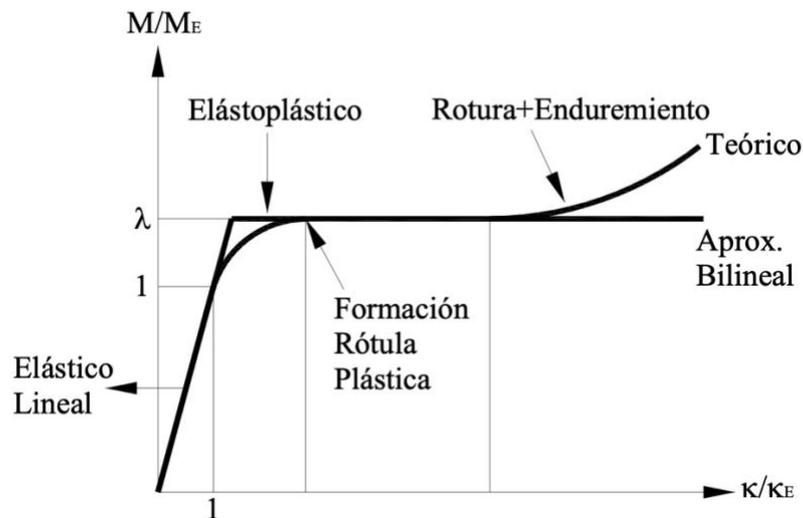


Ilustración 8 Comportamiento en función del Factor de forma (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. 2, 2021)

Las fases o zonas, que se producen hasta llegar a la rótula plástica son las siguientes:

- **Zona elástico lineal:** momento flector es menor al momento elástico.
- **Zona elastoplástica:** estamos en la región comprendida entre la zona elástico lineal y la zona de producción de rótula plástica. En esta zona ya se ha superado el momento elástico por lo que ya hay puntos que han plastificado.
- **Zona de formación de rótula plástica:** el momento llega al momento plástico y la sección plastifica. Se pierda la capacidad de absorber la energía de la carga y seguidamente se produce la rotura.

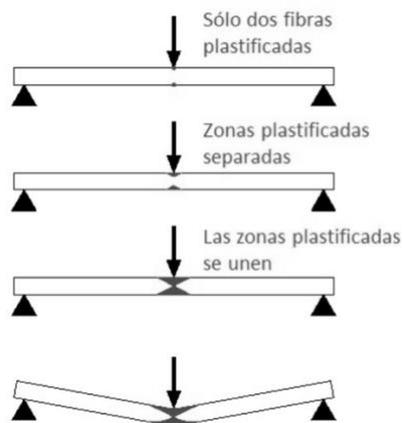


Ilustración 9 Formación rótula plástica (Colón, 2015)

En la ilustración 9, se puede observar el proceso de formación de una rótula plástica. Desde que se plastifican las primeras fibras hasta que se produce la rótula plástica cuando se alcanza el momento plástico.

Según el criterio de plastificación de Von Mises la plastificación comenzará generalmente en las fibras exteriores por tensiones normales, aunque si hay tensiones normales pueden comenzar en la fibra neutra⁴.

3.2.2. Rótulas plásticas

Las rótulas plásticas son los puntos de la estructura en los cuales se ha alcanzado el momento plástico. En el momento que se produzcan un número determinado de rótulas plásticas, la estructura colapsará.

Un concepto importante en los problemas de plastificación son los lugares donde se pueden producir rótulas plásticas. Estos se contabilizan como NPR (número posible de rótulas plásticas).

Los lugares donde tiendes a haber rótulas plásticas son:

- Empotramientos.
- Unión rígida de barras.
- Punto rígido con cambio de dirección de elementos.
- Punto con carga puntual aplicada.
- Secciones intermedias de barras con carga distribuida.

3.2.3. Grado de hiperasticidad (GH)

Es el número de incógnitas que no pueden determinarse a través de las ecuaciones de equilibrio. La determinación del grado de hiperasticidad o también llamado grado de indeterminación estática se obtiene de la siguiente forma, (ec5):

$$GH = r - (3 + L); \quad r = \text{número reacciones} \quad (\text{ec5})$$
$$L = \text{número de libertades}$$

Para los métodos de resolución de las estructuras es importante conocer el grado de hiperasticidad para saber el número de ecuaciones de compatibilidad que son necesarias.

En el método paso a paso también es importante tener en cuenta que la estructura plastificará cuando el número de rótulas plásticas sea $GH+1$.

⁴ Fibra neutra: superficie que separa la zona comprimida de la zona traccionada.

3.2.3.1. Tipo de estructura en función del grado de hiperasticidad:

- **Hiperestática ($GH > 0$):** el número de ecuaciones de equilibrio es menor que el número de incógnitas estáticas. Tiene infinitas combinaciones estáticamente válidas.
- **Isostática ($GH = 0$):** el número de ecuaciones de equilibrio coincide con el número de incógnitas estáticas.
- **Hipostática ($GH < 0$):** el número de ecuaciones de equilibrio es mayor que el número de incógnitas estáticas. Es una estructura inestable, no puede resolverse por lo tanto es un mecanismo.

3.2.3.2. Tipo de mecanismo en función del grado de hiperasticidad:

- **Mecanismo incompleto:** menos de $GH + 1$ rótulas plásticas.
- **Mecanismo completo:** $GH + 1$ rótulas plásticas.
- **Mecanismo supercompleto:** más de $GH + 1$ rótulas plásticas.

3.3. Aplicación teórico-práctica. Método directo

En el siguiente apartado se va a presentar, como se resolvería manualmente un problema de cálculo plástico por el método directo.

El ejemplo (ilustración 10) que se plantea es un ejercicio realizado durante la asignatura de 4º de Estructuras y Construcciones Industriales (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. 2, 2021).

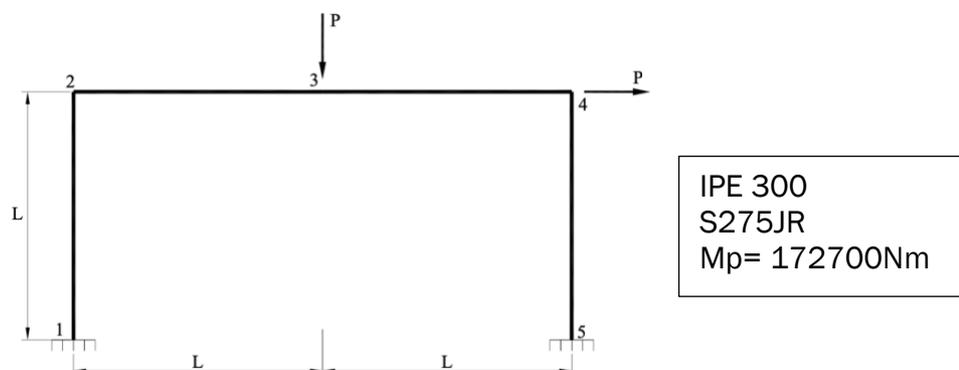


Ilustración 10 Ejemplo método directo

Pasos para la resolución:

1. Deben cumplirse las hipótesis descritas en el apartado 3.1.
2. Se calcula el NPR, GH y EQ

$$GH = R - (3 + L) = 3 \quad R = \text{tenemos 6 reacciones (Fx1, Fy1, M1, Fx2, Fy2, M2)}$$

$$L = 0 \text{ (no tenemos rótulas que nos den libertad)}$$

NPR = 5 Número posible rótulas plásticas (Nudo 1, 2, 3, 4, 5)

$$EQ = NPR - GH = 2 \quad (\text{ec6})$$

3. Plantear mecanismos de colapso y cálculo de la Pc

Tenemos que plantear 2 posibles mecanismos de colapso (con 3 o más rótulas plásticas).

- Mecanismo 1:

El mecanismo 1, presenta 3 rótulas plásticas en los nudos b, c, d. Como todas las barras son de longitud L, tenemos una sola variable θ .

La ecuación de este mecanismo es (ec8):

$$P * (L \theta) = M_2(-\theta) + M_3(2\theta) + M_4(-\theta) \quad (\text{ec7})$$

$$P * L = -M_2 + 2M_3 - M_4 \quad \text{EQ1} \quad (\text{ec8})$$

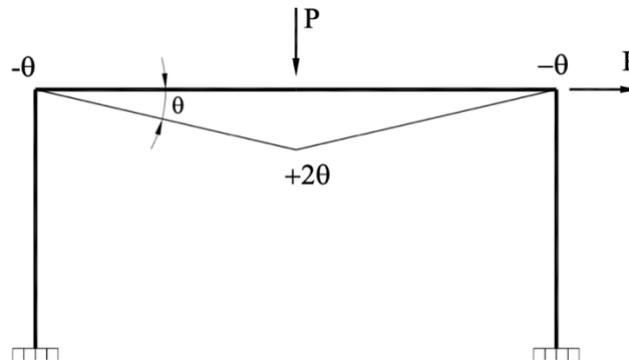


Ilustración 11 Posible mecanismo de colapso 1

Calculo la carga crítica P_c para conocer el mecanismo a ensayar. Los signos de los momentos, (ec9), se consiguen a partir de los signos de las θ que hemos representado en el mecanismo de colapso.

$$M_2 = -M_p \quad M_3 = M_p \quad M_4 = -M_p \quad (\text{ec9})$$

Despejando la carga P , conseguimos la carga crítica (ec10):

$$P_{c1} = \frac{4 M_p}{L} \quad (\text{ec10})$$

- Mecanismo 2:

El mecanismo 2, presenta 4 rótulas plásticas en los nudos 1, 2, 4, 5. Como todas las barras son de longitud L , tenemos una sola variable θ .

La ecuación de este mecanismo es (ec12):

$$P(L\theta) = M_1(-\theta) + M_2(\theta) + M_4(-\theta) + M_5(\theta) \quad (\text{ec11})$$

$$P * L = -M_1 + M_2 - M_4 + M_5 \quad \text{EQ2} \quad (\text{ec12})$$

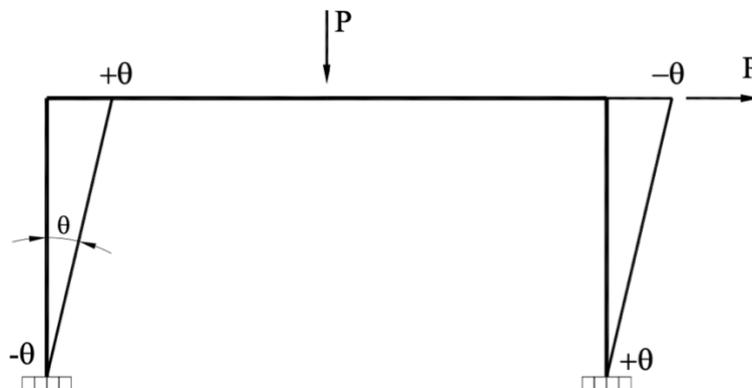


Ilustración 12 Posible mecanismo de colapso 2

Para saber si puede ser un posible mecanismo de colapso, hay que ensayarlo. Los signos de los momentos, (ec13), se consiguen a partir de los signos de las θ que hemos representado en el mecanismo de colapso.

$$M_1 = -M_p \quad M_2 = M_p \quad M_4 = -M_p \quad M_5 = M_p \quad (\text{ec13})$$

Despejando la carga P , conseguimos la carga crítica, ec14:

$$P_{c2} = \frac{4 M_p}{L} \quad (\text{ec14})$$

4. Ensayo mecanismos

Para ensayar los mecanismos se introduce los valores de los momentos del mecanismo a ensayar en la ecuación de equilibrio del otro mecanismo.

-Mecanismo 1: $4 M_p = M_5 - M_1 \rightarrow$ No Seguro (M_1 y M_5 son menores que M_p)

-Mecanismo 2: $2 M_p = M_3 \rightarrow$ No Seguro ($M_3 \leq M_p$)

5. Combinación mecanismos

Ensayamos un mecanismo que es combinación de los mecanismos 1 y 2 (ilustración 13).

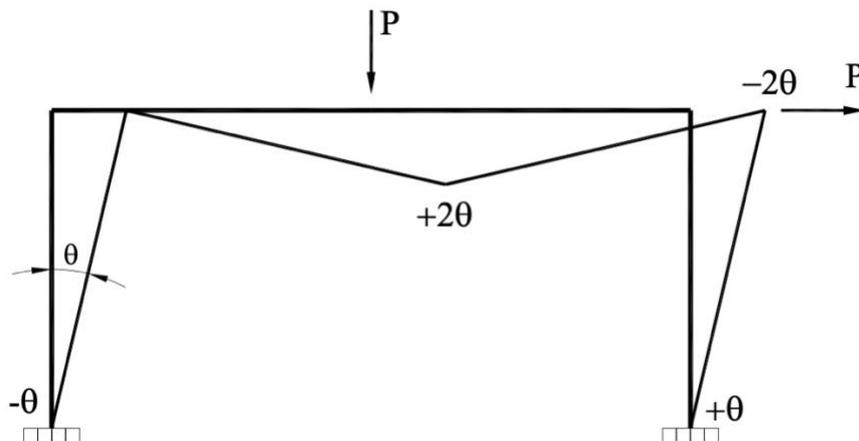


Ilustración 13 Mecanismo de colapso, combinación 1 y 2

EQ1:

$$P L = -M_2 + 2 M_p + M_p$$

EQ2:

$$P L = M_p + M_2 + M_p + M_p$$

- Al ensayar el mecanismo final que se ha planteado, el cual es combinación de los mecanismos 1 y 2, obtenemos que es un mecanismo seguro ($M_2=0$).
- Necesitamos aplicar 3 veces la ecuación de compatibilidad, ya que el $GH=3$.
- Los giros desconocidos son en los que tenemos rótula plástica $\theta_1, \theta_3, \theta_4$ y θ_5 .

	Nodos				
	1	2	3	4	5
M	-Mp	0	Mp	-Mp	Mp
θ	θ_1	-	θ_3	θ_4	θ_5
EC1 ⁵	1	1	0,5	0	0
EC2 ⁶	0	0	0,5	1	1
EC3 ⁷	0	1	1	1	0

Tabla 1 Resolución Método Directo

6. Cálculo de las ecuaciones de compatibilidad

Estamos en un caso en el cual solo tenemos **cargas puntuales** (ilustración 14) en nuestras barras por lo que utilizaremos la formula lineal de la ecuación de compatibilidad.

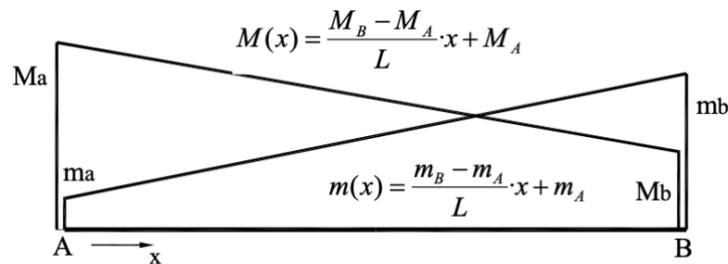


Ilustración 14 M(x) lineal para cargas puntuales (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. 2, 2021)

$$\sum_{i \text{ tramos}} \frac{L}{6EI} (m_A(2M_A + M_B) + m_B(2M_B + M_A)) + \sum m_i * \theta_i = 0 \quad (\text{ec15})$$

Aplicando esta ecuación a los índices que se han detallado en la tabla, en las filas EC1, EC2 y EC3. Se consiguen las siguientes ecuaciones (ec16, ec17, ec18):

$$\text{EC1:} \quad \frac{-Mp \cdot L}{12EI} + \theta_1 + \frac{\theta_3}{2} = 0 \quad (\text{ec16})$$

$$\text{EC2:} \quad \frac{Mp \cdot L}{12EI} + \theta_5 + \theta_4 + \frac{\theta_3}{2} = 0 \quad (\text{ec17})$$

^{5 12 13} Se consiguen los índices (m_i) de las ecuaciones de compatibilidad, equilibrando las ecuaciones de los mecanismos con las cargas sustituidas por 1. Se puede sacar infinitos conjuntos de valores, aunque lo que se debe hacer es sacar los más sencillos con el mayor número de 0 para que sea sencilla la resolución.

$$\text{EC3: } \frac{M_p * L}{6EI} + \theta_3 + \theta_4 = 0 \quad (\text{ec18})$$

7. Cálculo de incógnitas

Supongo como última rótula plástica 1, $\theta_1 = 0$. Resuelvo el sistema formado por las ecuaciones de compatibilidad, la EQ1 y EQ2.

Tenemos como incógnita θ_3 , θ_4 y θ_5 .

Se obtiene la siguiente solución:

$\theta_3 = \frac{M_p L}{6EI}$ $\theta_4 = -\frac{M_p L}{3EI}$ $\theta_5 = \frac{M_p L}{6EI}$	$M_1 = -M_p = -172700 \text{ Nm}$ $M_2 = 0 \text{ Nm}$ $M_3 = M_p = 172700 \text{ Nm}$ $M_4 = -M_p = -172700 \text{ Nm}$ $M_5 = M_p = 172700 \text{ Nm}$
---	--

Como ya conocíamos las rótulas se producen en 1, 3, 4 y 5.

8. Comprobación soluciones

Hay que comprobar que la solución encontrada es segura y compatible.

- **Segura:** los puntos en los que no hemos puesto rótula plástica, el momento debe ser inferior al plástico: $M_2 < M_p$
- **Compatible:** el signo de θ_3 , θ_4 y θ_5 , debe coincidir con el de los momentos M_3 , M_4 y M_5 .

Como la solución cumple los dos requisitos, la suposición de primera rótula plástica $\theta_1 = 0$, es correcta.

9. Otras consideraciones

En el caso que tuviésemos una **carga distribuida** (ilustración 15), el planteamiento es el mismo, pero para resolver la ecuación de compatibilidad hay que usar la distribución parabólica.

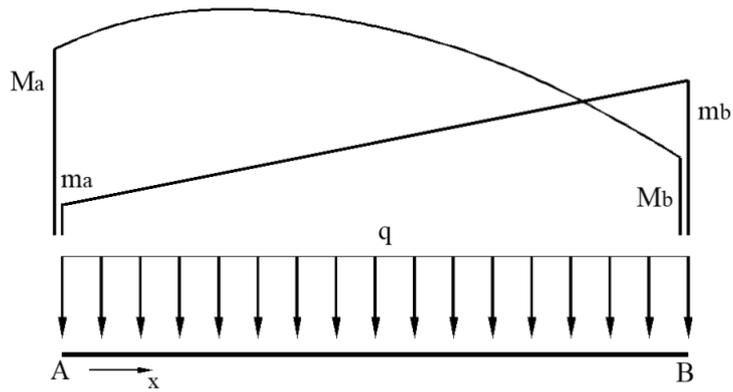


Ilustración 15 $M(x)$ parabólica para cargas distribuidas (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. 2, 2021)

Es como (ec15), pero se le añade un término de la carga distribuida, (ec19).

$$\sum_{i \text{ tramos}} \frac{L}{6EI} \left(m_A(2M_A + M_B) + m_B(2M_B + M_A) + \frac{qL^2}{4}(m_A + m_B) \right) + \sum mi * \theta i = 0 \quad (\text{ec19})$$

3.4. Aplicación teórico-práctico. Método paso a paso.

En el siguiente apartado se va a presentar, como se resolvería manualmente un problema de cálculo plástico por el método paso a paso.

El ejemplo que se plantea es un ejercicio realizado durante la asignatura de 4º de Estructuras y Construcciones Industriales.

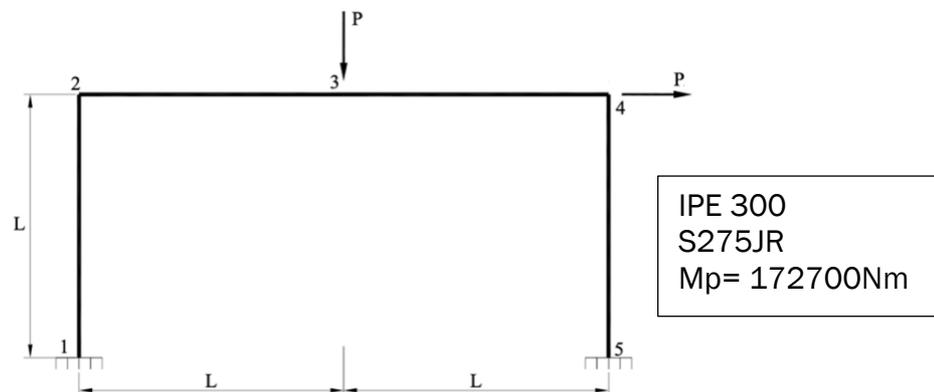


Ilustración 16 Ejemplo método Paso a Paso

Pasos para la resolución:

1. Deben cumplirse las hipótesis descritas en el apartado 3.1.

2. Se calcula el NPR, GH y EQ:

$$GH = R - (3 + L) = 3 \quad R = \text{tenemos 6 reacciones (Fx1, Fy1, M1, Fx2, Fy2, M2)}$$
$$L = 0 \text{ (no tenemos rótulas que nos den libertad)}$$

$$NPR = 5 \text{ Número posible rótulas plásticas (Nudo 1, 2, 3, 4, 5)}$$

$$EQ = NPR - GH = 2$$

3. Cálculo de los momentos, rótulas plásticas y mecanismo de colapso

En la resolución de problemas académicos de cálculo plástico mediante el método paso a paso, se suele dar una tabla en la cual nos aparecen varias configuraciones de rótulas plásticas y una serie de coeficientes de los momentos, los cuales hay que ir mayorando hasta llegar a la rótula plástica.

Como para este problema no dispongo de la tabla, voy a explicar la forma de resolverlo que he utilizado en el programa. Los pasos son los siguientes:

- i. Se resuelve el **problema estático (ec20)** para conocer el valor de los momentos. Lo resolvemos a partir un sistema formado por:
 - Ecuaciones de equilibrio
 - Ecuaciones de compatibilidad

$$\begin{aligned} M[1, 1] &= 1.0625 \text{ Nm} \\ M[2, 1] &= -0.0625 \text{ Nm} \\ M[2, 2] &= -0.0625 \text{ Nm} \\ M[3, 2] &= 1.5 \text{ Nm} \\ M[3, 3] &= 1.5 \text{ Nm} \\ M[4, 3] &= -1.9375 \text{ Nm} \\ M[4, 4] &= -1.9375 \text{ Nm} \\ M[5, 4] &= 2.0625 \text{ Nm} \end{aligned} \quad (\text{ec20})$$

La carga P, es unitaria por eso dan valores tan bajos al resolver el sistema.

- ii. El nudo que tenga el momento con menos reserva de resistencia para llegar a su momento plástico será la **1ª rótula plástica**.

Teniendo en cuenta que todas las barras tienen la misma sección (en este caso será el mismo momento plástico para todos), ese **nudo** es el **5** ya que es el que mayor momento nos da.

iii. Se vuelve a resolver (ec21) un sistema formado por:

- Ecuaciones de equilibrio
- Ecuaciones de compatibilidad
- El $M[5, 4] = M_p^8$

$$\begin{aligned}
 M[1, 1] &= -88967 \text{ Nm} \\
 M[2, 1] &= -5233 \text{ Nm} \\
 M[2, 2] &= -5233 \text{ Nm} \\
 M[3, 2] &= 125600 \text{ Nm} \\
 M[3, 3] &= 125600 \text{ Nm} \\
 M[4, 3] &= -162233 \text{ Nm} \\
 M[4, 4] &= -162233 \text{ Nm} \\
 M[5, 4] &= 172700 \text{ Nm}
 \end{aligned}
 \tag{ec21}$$

iv. De los momentos calculados en el paso “iii”, el que contenga el momento con menos reserva de resistencia para llegar a su momento plástico será la siguiente rótula plástica. La **2ª rótula plástica** será la de **4**.

v. Se resuelve (ec22) vuelve un sistema formado por:

- Ecuaciones de equilibrio
- Ecuaciones de compatibilidad
- El $M[5, 4] = M_p / M[4, 3] = -M_p$
- $\theta[5] = 0$

$$\begin{aligned}
 M[1, 1] &= -100527 \text{ Nm} \\
 M[2, 1] &= -2577 \text{ Nm} \\
 M[2, 2] &= -2577 \text{ Nm} \\
 M[3, 2] &= 134036 \text{ Nm} \\
 M[3, 3] &= 134036 \text{ Nm} \\
 M[4, 3] &= -172700 \text{ Nm} \\
 M[4, 4] &= -172700 \text{ Nm} \\
 M[5, 4] &= 172700 \text{ Nm}
 \end{aligned}
 \tag{ec22}$$

⁸ M_p : si un nodo es la unión de dos barras con diferente sección, se coge siempre la de menor momento plástico al ser la que va a fallar antes.

vi. De los momentos calculados en el paso “v”, el que contenga el momento con menos reserva de resistencia para llegar a su momento plástico será la siguiente rótula plástica. La **3ª rótula plástica** será la de **3**.

vii. Se resuelve (ec23) vuelve un sistema formado por:

- Ecuaciones de equilibrio
- Ecuaciones de compatibilidad
- El $M[5, 4] = M_p / M[4, 3] = -M_p / M[3, 2] = M_p$
- $\theta[5] = 0 / \theta[4] = 0$

$$\begin{aligned}
 M[1, 1] &= -157683 \text{ Nm} \\
 M[2, 1] &= 7509 \text{ Nm} \\
 M[2, 2] &= 7509 \text{ Nm} \\
 M[3, 2] &= 172700 \text{ Nm} \\
 M[3, 3] &= 172700 \text{ Nm} \\
 M[4, 3] &= -172700 \text{ Nm} \\
 M[4, 4] &= -172700 \text{ Nm} \\
 M[5, 4] &= 172700 \text{ Nm}
 \end{aligned}
 \tag{ec23}$$

viii. De los momentos calculados en el paso “vii”, el que contenga el momento con menos reserva de resistencia para llegar a su momento plástico será la siguiente rótula plástica. La **3ª rótula plástica** será la de **1**.

ix. Finalmente, se resuelve (ec24) vuelve un sistema formado por:

- Ecuaciones de equilibrio
- Ecuaciones de compatibilidad
- El $M[5, 4] = M_p / M[4, 3] = -M_p / M[3, 2] = M_p$
- $\theta[5] = 0 / \theta[4] = 0$

$ \begin{aligned} M[1, 1] &= -172700 \text{ Nm} \\ M[2, 1] &= 0 \text{ Nm} \\ M[2, 2] &= 0 \text{ Nm} \\ M[3, 2] &= 172700 \text{ Nm} \\ M[3, 3] &= 172700 \text{ Nm} \\ M[4, 3] &= -172700 \text{ Nm} \\ M[4, 4] &= -172700 \text{ Nm} \\ M[5, 4] &= 172700 \text{ Nm} \\ P_c &= 103620 \text{ N} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} N_x[1] &= -34540 \text{ N} \\ N_x[2] &= 34540 \text{ N} \\ N_x[3] &= 34540 \text{ N} \\ N_x[4] &= -69080 \text{ N} \end{aligned} $
--	---

Con esta resolución llegamos al mecanismo de colapso (ilustración 17) formado por las rótulas en 1, 3, 4 y 5. Sería el siguiente mecanismo:

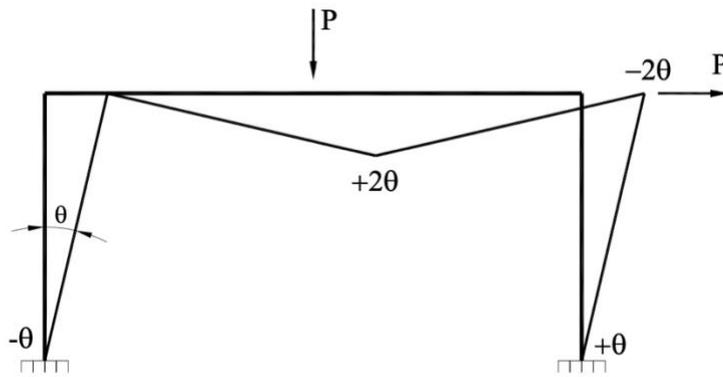


Ilustración 17 Mecanismo de colapso

Hemos comprobado como usando el método paso a paso y el método directo, la solución al problema es la misma.

3.5. Acciones en la edificación

Para verificar el cumplimiento de los requisitos de seguridad estructural, se utiliza el Capítulo de acciones en la edificación del Código Técnico de la edificación (Acciones, 2022). En este capítulo no consideran acciones procedentes de puentes grúas o aparatos elevadores.

Para el desarrollo de este capítulo se ha usado tanto el CTE (Acciones, 2022), como los apuntes de Estructuras Metálicas (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. 1, 2021).

3.5.1. Tipos de acciones

La acción es todo aquello que provoca una respuesta resistente en la estructura.

3.5.1.1. Acciones permanentes

3.5.1.1.1. Peso propio

El peso de los elementos estructurales, cerramientos, revestimientos y equipos fijos. En el capítulo de acciones del Código Técnico (Acciones, 2022) nos vienen las tablas para hacer una estimación del peso propio que estará soportando nuestra estructura. Las tablas son las siguientes:

- *Tabla C.1 Peso específico aparente de materiales de construcción.*

- *Tabla C.2 Peso por unidad de superficie de elementos de cobertura.*
- *Tabla C.3 Peso por unidad de superficie de elementos de pavimento.*
- *Tabla C.4 Peso por unidad de superficie de tabiques.*
- *Tabla C.5 Peso propio de elementos constructivos.*
- *Tabla C.6 Peso específico y ángulo de rozamiento de materiales almacenables y a granel.*

3.5.1.1.2. Pretensado

Debidas al pretensado en un elemento estructural. Esta acción se evaluará según la norma EHE⁹.

3.5.1.1.3. Acciones del Terreno

Debidas al empuje del terreno sobre las partes de la estructura que están en contacto. Esta acción se evaluará según el libro de cimentaciones DB-SE-C¹⁰

3.5.1.2. Acciones variables

3.5.1.2.1. Sobrecarga de uso

Es la acción de todos los elementos que pueden gravitar por el uso. Se excluyen la sobrecarga debido a equipos pesados o acumulación de materiales en almacenes, bibliotecas.

En la ilustración 18, podemos ver los valores característicos para las siguientes categorías de uso que hay. Los efectos de la sobrecarga de uso se simularán por una carga uniformemente distribuida.

En el caso de querer hacer comprobaciones locales de la estructura, se debe considerar una carga concentrada actuando en cualquier punto.

⁹ EHE: norma Española del Hormigón Estructural.

¹⁰ DB-SE-C: documento en el que se recogen las medidas de seguridad, capacidad portante y aptitudes de los elementos de cimentación.

Tabla 3.1 Valores característicos de las sobrecargas de uso

Categoría de uso		Subcategorías de uso		Carga uniforme [kN/m ²]	Carga concentrada [kN]
A	Zonas residenciales	A1	Viviendas y zonas de habitaciones en, hospitales y hoteles	2	2
		A2	Trasteros	3	2
B	Zonas administrativas			2	2
C	Zonas de acceso al público (con la excepción de las superficies pertenecientes a las categorías A, B, y D)	C1	Zonas con mesas y sillas	3	4
		C2	Zonas con asientos fijos	4	4
		C3	Zonas sin obstáculos que impidan el libre movimiento de las personas como vestíbulos de edificios públicos, administrativos, hoteles, salas de exposición en museos, etc.	5	4
		C4	Zonas destinadas a gimnasio u actividades físicas	5	7
		C5	Zonas de aglomeración (salas de conciertos, estadios, etc)	5	4
D	Zonas comerciales	D1	Locales comerciales	5	4
		D2	Supermercados, hipermercados o grandes superficies	5	7
E	Zonas de tráfico y de aparcamiento para vehículos ligeros (peso total < 30 kN)			2	20 ⁽¹⁾
F	Cubiertas transitables accesibles sólo privadamente ⁽²⁾			1	2
G	Cubiertas accesibles únicamente para conservación ⁽³⁾	G1	Cubiertas con inclinación inferior a 20°	1 ⁽⁴⁾	2
		G2	Cubiertas con inclinación superior a 40°	0	2

Ilustración 18 Valores característicos de las sobrecargas de uso (Acciones, 2022)

Los siguientes elementos requieren de un incremento de la sobre carga de uso:

- Portales, mesetas y escaleras (de categorías A y B), se incrementará el valor en un 1kN/m².
- Balcones volados, se considerará una sobrecarga lineal en sus bordes de 2kN/m.
- Porches, aceras y espacios de tránsito situados sobre un elemento portante, se considera una sobrecarga de uso de 1kN/m² en espacios privados y 3kN/m² en públicos.

En el caso de que la edificación tuviese más de dos plantas se puede aplicar un coeficiente de reducción de las sobrecargas de uso (ilustración 19).

Tabla 3.2 Coeficiente de reducción de sobrecargas

Elementos verticales			Elementos horizontales			
Número de plantas del mismo uso			Superficie tributaria (m ²)			
1 o 2	3 o 4	5 o más	16	25	50	100
1,0	0,9	0,8	1,0	0,9	0,8	0,7

Ilustración 19 Coeficiente reducción sobrecargas (Acciones, 2022)

3.5.1.2.2. Viento

Es una fuerza perpendicular a la superficie, se considerarán dos direcciones ortogonales, viene dada por la siguiente expresión (ec25):

$$q_e = q_b C_e C_p \quad q_b: \text{presión dinámica (se puede poner } 0,5\text{kN/m}^2\text{)}$$

(ec25) C_e : coeficiente de exposición

C_p : coeficiente eólico

Coefficiente de exposición: depende de la altura del punto considerado y de la aspereza del entorno. Se saca de la siguiente tabla:

Tabla 3.3 Valores del coeficiente de exposición c_s

Grado de aspereza del entorno	Altura del punto considerado (m)							
	3	6	9	12	15	18	24	30
I Borde del mar o de un lago, con una superficie de agua en la dirección del viento de al menos 5 km de longitud	2,2	2,5	2,7	2,9	3,0	3,1	3,3	3,5
II Terreno rural llano sin obstáculos ni arbolado de importancia	2,1	2,5	2,7	2,9	3,0	3,1	3,3	3,5
III Zona rural accidentada o llana con algunos obstáculos aislados, como árboles o construcciones pequeñas	1,6	2,0	2,3	2,5	2,6	2,7	2,9	3,1
IV Zona urbana en general, industrial o forestal	1,3	1,4	1,7	1,9	2,1	2,2	2,4	2,6
V Centro de negocio de grandes ciudades, con profusión de edificios en altura	1,2	1,2	1,2	1,4	1,5	1,6	1,9	2,0

Ilustración 20 Coeficiente de exposición (Acciones, 2022)

Coefficiente de eólico: depende de la forma de la edificación (cubierta a un agua, a dos aguas, plana, a cuatro aguas, en diente de sierra, marquesina, cilíndricas o esféricas), de la orientación geográfica y de la ubicación del punto considerado.

Para cada tipo de forma de la cubierta y ángulo del viento hay tablas con los valores característicos, en la siguiente ilustración podemos ver el ejemplo de una cubierta a un agua con una incidencia del viento entre $\pm 45^\circ$.

Vemos como se definen diferentes zonas (F, G, H, I) en la cubierta, en las cuales presentan una carga diferente entre ellas. El caso particular para la cubierta plana, ilustración 21.

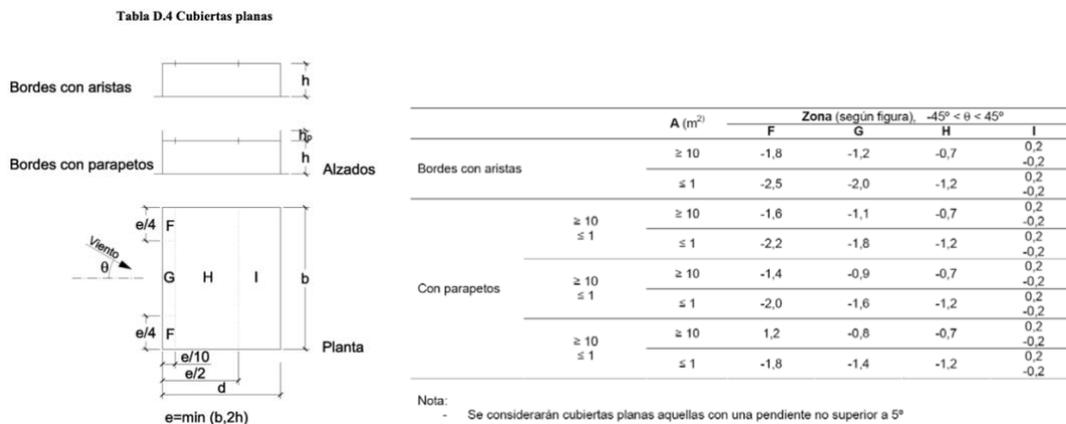


Ilustración 21 Coeficiente eólico, cubierta plana (Acciones, 2022)

3.5.1.2.3. Acciones térmicas

Las variaciones térmicas provocan deformaciones, lo que provoca tensiones en los elementos afectados. Para ello se instalan juntas de dilatación, para disminuir los efectos de las variaciones de temperatura.

En edificaciones en los que no se tengan elementos continuos de más de 40m de longitud, no es necesario instalar juntas de dilatación.

3.5.1.2.4. Nieve

El valor de la carga de nieve se calcula de la siguiente forma (ec26):

$$q_n = \mu s_k \quad \mu: \text{coeficiente de forma de la cubierta}$$

(ec26) s_k : valor de la carga de nieve

Para voladizos, en cotas superiores a los 1000m, se deben considerar una carga lineal (ec27):

$$p_n = k \mu^2 s_k \quad (\text{ec27})$$

La carga de nieve depende de los siguientes factores:

- **Lugar** geográfico y altitud (ilustración 22 y 23).
- **Tipo** de las **precipitaciones**, en función de si es recién caída (0,12kN/m³), nieve dura (0,2 kN/m³) o nieve mezclada con granizo (0,4 kN/m³).
- **Tipo** del **relieve** del entorno.
- **Forma** de la **edificación**.
- Efectos del **viento**, si la construcción está protegida por el viento, el valor de la carga de nieve se puede disminuir en un 20%. Si está expuesta al viento deberá aumentarse en un 20%.

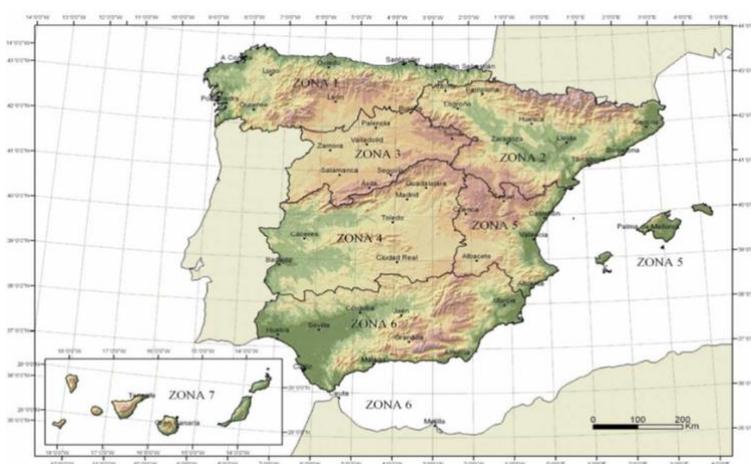


Ilustración 22 Zonas climáticas en España (Acciones, 2022)

Tabla E.2 Sobrecarga de nieve en un terreno horizontal (kN/m²)

Altitud (m)	Zona de clima invernal, (según figura E.2)						
	1	2	3	4	5	6	7
0	0,3	0,4	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
200	0,5	0,5	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2
400	0,6	0,6	0,2	0,3	0,4	0,2	0,2
500	0,7	0,7	0,3	0,4	0,4	0,3	0,2
600	0,9	0,9	0,3	0,5	0,5	0,4	0,2
700	1,0	1,0	0,4	0,6	0,6	0,5	0,2
800	1,2	1,1	0,5	0,8	0,7	0,7	0,2
900	1,4	1,3	0,6	1,0	0,8	0,9	0,2
1.000	1,7	1,5	0,7	1,2	0,9	1,2	0,2
1.200	2,3	2,0	1,1	1,9	1,3	2,0	0,2
1.400	3,2	2,6	1,7	3,0	1,8	3,3	0,2
1.600	4,3	3,5	2,6	4,6	2,5	5,5	0,2
1.800	-	4,6	4,0	-	-	9,3	0,2
2.200	-	8,0	-	-	-	-	-

Ilustración 23 Sobrecarga de nieve en función de la zona y altitud (Acciones, 2022)

El viento puede provocar acumulaciones de nieve de forma irregular en la cubierta, por ello se aplica el coeficiente de forma. Como vemos en la ilustración 24, para cubiertas cuya inclinación sea menor de 30°, será $\mu=1$. Mientras que para cubiertas con inclinación sea entre 30° y 60° se irá reduciendo hasta llegar a 0.

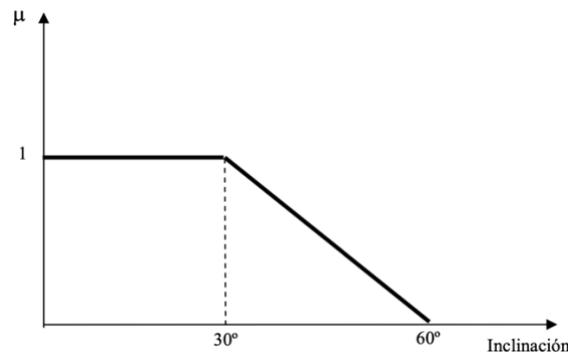


Ilustración 24 Coeficiente de forma (Acciones, 2022)

3.5.1.3. Acciones accidentales

- **Sismo:** reguladas por la NCSE¹¹.
- **Incendio:** reguladas en DB-SI¹².
- **Impacto:** se representa mediante una fuerza estática equivalente considerando la masa, geometría, capacidad de deformación y velocidad.
- **Otras:** Explosiones, inundaciones...

¹¹ NCSE: Norma de Construcciones Sismoresistentes

¹² DB-SI: Documento Básico de Seguridad en caso de Incendio.

CAPÍTULO 4:

Programación. Código del ejemplo 1

4. Programación. Código del Ejemplo 1

En este apartado se va a exponer el código realizado para resolver un problema de cálculo plástico mediante Wolfram Mathematica.

El código realizado resuelve estructuras de barras con cargas puntuales, distribuidas, estructuras con varios bucles, con apoyos (móvil, fijo, empotramiento).

4.1. Planteamiento del problema a resolver

Para la sistematización y la comprobación de que el código se ha realizado de la manera correcta se va a utilizar el siguiente ejemplo (ilustración 1):

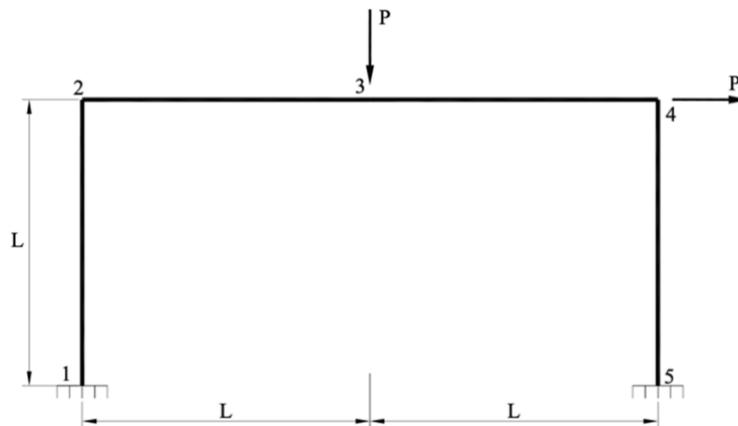


Ilustración 25 Ejemplo 1

Lo primero que necesitamos son los datos del problema a resolver:

- **Momento plástico:** $M_p = 172700 \text{ Nm}$
- **Módulo elástico:** $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ MPa}$
- **Momento de Inercia:** $I_y = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
- **Longitud barra:** $L = 5 \text{ m}$
- **Número nodos (nn):** 5
- **Número barras (nb):** 4
- **Apoyos:** empotramientos en 1 y 5.
- **Número de rótulas elásticas:** 0
- **Cargas puntuales:** $F_{y3} = -P$; $F_{x4} = P$
- **Cargas distribuidas:** no tenemos.
- **Sistemas de referencia locales:**
 - Barra 1: eje x (1->2), girado 90° respecto global.
 - Barra 2: eje x (2->3)
 - Barra 3: eje x (3->4)
 - Barra 4: eje x (4->5), girado -90° respecto global.
- **Sistema referencia global:** coincide con el local de las barras 2 y 3.

4.2. Código de resolución para resolver el problema estático

4.2.1. Introducción datos enunciado

Lo primero que tenemos en el código es la carga del enunciado que vamos a resolver, según el formato que vamos a definir a continuación:

- Los vectores $\text{bjn}[\text{"número nudo"}] = \{\text{"barras que llegan al nudo"}, \text{"nudo } i \text{ próximo"}, \text{"barra a la que pertenece ese nudo } i\}$.
 - $\text{bjn}[1] = \{1, 2, 1\}$: Nudo 1 al cual llega una sola barra, el nudo próximo es el 2 y la barra a la que pertenece es la 2.
 - $\text{bjn}[2] = \{2, 1, 1, 3, 2\}$: Nudo 2 al cual llegan dos barras, los nudos próximos son los 1 y 3, y las barras a la que pertenecen estos nudos son 1 y 2 respectivamente.
 - $\text{bjn}[3] = \{2, 2, 2, 4, 3\}$: Nudo 3 al cual llegan dos barras, los nudos próximos son los 2 y 4, y las barras a la que pertenecen estos nudos son 2 y 3 respectivamente.
 - $\text{bjn}[4] = \{2, 3, 3, 5, 4\}$: Nudo 2 al cual llegan dos barras, los nudos próximos son los 3 y 5, y las barras a la que pertenecen estos nudos son 3 y 4 respectivamente.
 - $\text{bjn}[5] = \{1, 4, 4\}$: Nudo 1 al cual llega una sola barra, el nudo próximo es el 4 y la barra a la que pertenece es la 4.
- Vector **Ángulos**: se definen los ángulos a los que están las barras respecto al sistema global para aplicar la matriz de cambio de base.
- Vector **Rot**: se define los nudos en los cuales hay una rótula elástica.
- Vector **fd**: se define las barras en la cuales tenemos una carga distribuida.

```
nn = 5; nb = 4; L = 5;
(*Datos del material y del perfil*)
Mp = 172700; vE = 2.1 × 10^11; Iy = 8360.0 × 10^-8;
(*Informacion nudo[...] = numero barras unen nudo,
--que nudos proximos--barras de los nudos proximos*)
bjn[1] = {1, 2, 1};
bjn[2] = {2, 1, 1, 3, 2};
bjn[3] = {2, 2, 2, 4, 3};
bjn[4] = {2, 3, 3, 5, 4};
bjn[5] = {1, 4, 4};

(*Angulos barras respecto sistema referencia global*)
angulos = {90, 0, 0, -90};

(*Datos: Rotulas en nudos (0→ no hay rotula // 1→ si hay rotula)*)
rot = {0, 0, 0, 0, 0};

(*Informacion de las cargas distribuidas, {{numero barra, carga},{...}}*)
fd = {{1, 0}, {2, 0}, {3, 0}, {4, 0}};
```

Ilustración 26 Código, Introducción enunciado

Las condiciones de contorno se definen de la siguiente forma:

- Condiciones de contorno de reacciones: **ccR**
- Condiciones de contorno de fuerzas: **ccF**

El vector **ccFdd**: es un vector en el que introducimos información a cerca de las barras con carga distribuida. se introducen los siguientes términos:

- Barra con carga distribuida
- Nodo inicial y final
- Valor de la carga distribuida

```
(*Condiciones contorno: Reacciones y Fuerzas puntuales*)
ccR = {"Fx1", "Fy1", "M1", 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, "Fx5", "Fy5", "M5"};
ccF = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -P, 0, P, 0, 0, 0, 0, 0};
(*Formato para poner (Condiciones contorno Fuerza distribuida) ccFd---->
  {{barra de la carga distribuida,nodo inicial,nodo final,carga},{...}*)
ccFdd = {};
```

Ilustración 27 Código, Introducción Condiciones de Contorno

4.2.2. Cálculo Fuerzas locales

En este apartado se obtienen los vectores de las fuerzas locales de cada barra. Para definir el vector se sigue la siguiente notación:

- F[1,2]-> Las fuerzas para el nudo 1, de la barra cuyos nudos son el 1 y el 2 .
- F[2,1]-> Las fuerzas para el nudo 2, de la barra cuyos nudos son el 1 y el 2 .

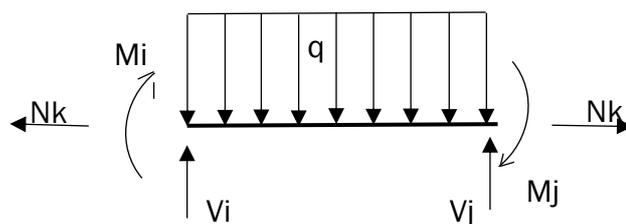


Ilustración 28 Definición de esfuerzos

El vector genérico que se ha programado ha sido para una barra longitud L. Equilibrando el sistema que vemos dibujado en la anterior figura conseguimos las siguientes ecuaciones (ec28) y (ec29):

$$\mathbf{F}[i, j] = \left(-Nk, \frac{Mi - Mj}{L} + \frac{qL^2}{2}, Mi\right) \quad (\text{EC28})$$

$$\mathbf{F}[j, i] = \left(Nk, \frac{Mi - Mj}{L} + \frac{qL^2}{2}, Mi\right) \quad (\text{EC29})$$

Estos vectores de fuerzas se han dejado en función de los axiles y momentos de cara a la resolución de las ecuaciones de compatibilidad.

```
(*Con lo que tenemos a continuacion sacamos todas
las fuerzas locales que necesitamos F[1,2],F[2,1].....*)
For[s = 1, s ≤ nn, s++, {j = bjn[s][1];
para cada
i = j - (j - 2);
k = i + 1;
While[j > 0, Print[If[s < bjn[s][i], F[s, bjn[s][i]] =
mientras escribe si
(-Nx[bjn[s][k]], - (M[s, bjn[s][k]] - M[bjn[s][i], bjn[s][k])) / L,
-M[s, bjn[s][k]]}, F[s, bjn[s][i]] = {Nx[bjn[s][k]],
(-M[s, bjn[s][k]] + M[bjn[s][i], bjn[s][k])) / L, M[s, bjn[s][k]}}];

j--;
i = i + 2;
k = k + 2}}];
```

Ilustración 29 Código, Cálculo de las fuerzas $F_{i,j}$ de todos los nudos

El término de la fuerza distribuida lo añado en la siguiente parte del código:

```
(*Para los casos en los que tenemos fuerza distribuida hay que aplicar
esto a las ecuaciones de equilibrio que le afecta la fuerza*)
i = 1;
While[i ≤ Length[ccFdd], F[ccFdd[i][2], ccFdd[i][3]] = {-Nx[ccFdd[i][1]],
mientras longitud
(M[ccFdd[i][3], ccFdd[i][1]] - M[ccFdd[i][2], ccFdd[i][1]] - q * L^2 / 2) / L +
q * L, -M[ccFdd[i][2], ccFdd[i][1]}}];
i++;

i = 1;
While[i ≤ Length[ccFdd], F[ccFdd[i][3], ccFdd[i][2]] = {Nx[ccFdd[i][1]],
mientras longitud
- (M[ccFdd[i][3], ccFdd[i][1]] - M[ccFdd[i][2], ccFdd[i][1]] - q * L^2 / 2) / L,
M[ccFdd[i][3], ccFdd[i][1]}}];
i++;
```

$$\left\{ -N_x[1], \frac{1}{5} (-M[1, 1] + M[2, 1]), -M[1, 1] \right\}$$

$$\left\{ N_x[1], \frac{1}{5} (M[1, 1] - M[2, 1]), M[2, 1] \right\}$$

$$\left\{ -N_x[2], \frac{1}{5} (-M[2, 2] + M[3, 2]), -M[2, 2] \right\}$$

$$\left\{ N_x[2], \frac{1}{5} (M[2, 2] - M[3, 2]), M[3, 2] \right\}$$

$$\left\{ -N_x[3], \frac{1}{5} (-M[3, 3] + M[4, 3]), -M[3, 3] \right\}$$

$$\left\{ N_x[3], \frac{1}{5} (M[3, 3] - M[4, 3]), M[4, 3] \right\}$$

$$\left\{ -N_x[4], \frac{1}{5} (-M[4, 4] + M[5, 4]), -M[4, 4] \right\}$$

$$\left\{ N_x[4], \frac{1}{5} (M[4, 4] - M[5, 4]), M[5, 4] \right\}$$

Ilustración 30 Código, Fuerzas locales

4.2.3. Cálculo fuerzas en globales

A partir de los vectores de las fuerzas locales en los nudos, necesito sacar el vector $f[i]$, el cual es el vector de las fuerzas locales de cada barra.

Por ejemplo, para la barra 1, $f[1] = (F[1,2], F[2,1])$

Para sacar los vectores $fg[i]$ de cada barra, necesitamos pasarlo al sistema de referencia global cada vector “ $f[i]$ ” por lo que usamos la matriz de cambio de base.

El ángulo θ definido en el apartado del enunciado, es el que tiene el sistema referencia local de cada barra respecto el sistema global.

- La **matriz de cambio** (ec30) de locales a globales es:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ec30})$$

- Paso de **globales a locales**, (ec31):

$$fg[i] = -T^t * f[i] \quad (\text{ec31})$$

```
(*Saco las f[i] en locales de cada barra i=1,2...*)
i = 1;
While[i ≤ nb, f[i] = {F[i, (i + 1)], F[(i + 1), i]}; i++]
[mientras

(*Saco las fg[i] en globales de cada barra i=1,2...*)
i = 1;
While[i ≤ nb, fg[i] = Partition[
[mientras
    -Transpose[T[Cos[angulos[[i]] °], Sin[angulos[[i]] °]], Flatten[f[i]], 3];
    [transposición [coseno [seno [aplana
i++]
```

Ilustración 31 Código, Vector fuerzas globales

4.2.4. Cálculo vector fuerzas globales de la estructura Fest

El vector que nos define las fuerzas de nuestra estructura es el **Fest** y para nuestro ejemplo lo conseguimos de la siguiente forma.

- El vector **Fest**, estará compuesto por tantos vectores **F[i]** como nudos tiene nuestro problema.
- Forma los vectores **F[i]**, los cuales están compuestos por la suma de la parte¹³ de los **fg[i]** que componen ese nudo.
- Para nuestro problema:

$$\begin{aligned}
 F[1] &= fg[1, 1]^{14} \\
 F[2] &= fg[1, 2] + fg[2, 1] \\
 F[3] &= fg[2, 2] + fg[3, 1] \\
 F[4] &= fg[3, 2] + fg[4, 1] \\
 F[5] &= fg[4, 2]
 \end{aligned}
 \tag{ec32}$$

- El vector **Fest**:

$$\text{Fest} = \begin{bmatrix} F[1] \\ F[2] \\ F[3] \\ F[4] \\ F[5] \end{bmatrix}
 \tag{ec33}$$

```

(*Calculo las F1...Fnn para sacar la Fest*)
i = 1;
While[i ≤ nn,
  |mientras
  F[i] = Sum[fg[bjn[i][v]] |If[i ≠ bjn[i][v], 2, 1]], {v, 3, (bjn[i][1] * 2) + 1, 2}];
  |suma |si
  i++];

(*Formo el vector Fest.....Cuando las componentes tienen dos índices [..., ...]
el primero significa el nudo y el segundo la barra que pertenece*)
(*Los axiles el [...]es referido a la barra que pertenece*)

Fest = Flatten[Array[F, nn]];
|aplana |arreglo

Print[
|escribe
  "Las fuerzas de la estructura sin aplicar las condiciones de contorno:"]
Fest // MatrixForm
|forma de matriz
  
```

Ilustración 32 Código, Cálculo vector Fest

¹³ Cada vector **fg[i]** está compuesto por 6 términos. La barra está compuesta por 2 nudos, por lo que los 3 primeros términos son los referidos al primer nudo y los 3 siguientes al segundo.

¹⁴ Para aclarar la resolución, pongo un 1 si se refiere a los 3 primeros términos del vector **fg[i]** o un 2 si se refiere a los 3 últimos.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} (-M[1, 1] + M[2, 1]) \\ Nx[1] \\ M[1, 1] \\ \frac{1}{5} (M[1, 1] - M[2, 1]) + Nx[2] \\ \frac{1}{5} (M[2, 2] - M[3, 2]) - Nx[1] \\ -M[2, 1] + M[2, 2] \\ -Nx[2] + Nx[3] \\ \frac{1}{5} (-M[2, 2] + M[3, 2]) + \frac{1}{5} (M[3, 3] - M[4, 3]) \\ -M[3, 2] + M[3, 3] \\ \frac{1}{5} (M[4, 4] - M[5, 4]) - Nx[3] \\ \frac{1}{5} (-M[3, 3] + M[4, 3]) - Nx[4] \\ -M[4, 3] + M[4, 4] \\ \frac{1}{5} (-M[4, 4] + M[5, 4]) \\ Nx[4] \\ -M[5, 4] \end{pmatrix}$$

Ilustración 33 Código, Solución vector Fest

4.2.5. Aplicación de las condiciones de contorno

Se aplican las condiciones de contorno ccR y ccF definidas en la introducción de datos del enunciado, obteniendo el vector **Festcc**.

```
Festcc = Table[x, {nn * 3}];
(*Aplico condiciones contorno a Fest*)
i = 1;
While[i <= (nn * 3),
  If[ccR[[i]] != 0, Festcc[[i]] = ccR[[i]], Festcc[[i]] = Festeq[[i]] + ccF[[i]];
  i++];
Print[
  "Las fuerzas de la estructura aplicando las condiciones de contorno son:"
Festcc // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} Fx1 \\ Fy1 \\ M1 \\ \frac{1}{5} (M[1, 1] - M[2, 1]) + Nx[2] \\ \frac{1}{5} (M[2, 2] - M[3, 2]) - Nx[1] \\ -M[2, 1] + M[2, 2] \\ -Nx[2] + Nx[3] \\ -P + \frac{1}{5} (-M[2, 2] + M[3, 2]) + \frac{1}{5} (M[3, 3] - M[4, 3]) \\ -M[3, 2] + M[3, 3] \\ P + \frac{1}{5} (M[4, 4] - M[5, 4]) - Nx[3] \\ \frac{1}{5} (-M[3, 3] + M[4, 3]) - Nx[4] \\ -M[4, 3] + M[4, 4] \\ Fx5 \\ Fy5 \\ M5 \end{pmatrix}$$

Ilustración 34 Código, Aplicación condiciones de contorno

4.2.6. Cálculo ecuaciones de equilibrio

Para obtener las ecuaciones de equilibrio, **EQ**, se utiliza el vector **Festcc**, del cual quitamos los términos de las reacciones de los apoyos y las igualamos a 0:

```
(*Para sacar las ECUACIONES DE EQUILIRBIO*)
eq = {};
i = 1;
While[i ≤ (nn * 3), If[ccR[[i]] == 0, AppendTo[eq, Festcc[[i]]]; i++];
|mientras |si |añade al final
val = Table[x, {x, 1, nn}];
|tabla
```

```
(*Para sacar las ECUACIONES DE EQUILIRBIO igualadas a 0*)
Print["Las ecuaciones de equilibrio son:"]
|escribe
EQ = {};
i = 1;
While[i ≤ (nn * 3), If[ccR[[i]] == 0, AppendTo[EQ, Festcc[[i]] == 0]];
|mientras |si |añade al final
i++;
EQ // MatrixForm
|forma de matriz
```

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} (M[1, 1] - M[2, 1]) + Nx[2] = 0 \\ \frac{1}{5} (M[2, 2] - M[3, 2]) - Nx[1] = 0 \\ -M[2, 1] + M[2, 2] = 0 \\ -Nx[2] + Nx[3] = 0 \\ -P + \frac{1}{5} (-M[2, 2] + M[3, 2]) + \frac{1}{5} (M[3, 3] - M[4, 3]) = 0 \\ -M[3, 2] + M[3, 3] = 0 \\ P + \frac{1}{5} (M[4, 4] - M[5, 4]) - Nx[3] = 0 \\ \frac{1}{5} (-M[3, 3] + M[4, 3]) - Nx[4] = 0 \\ -M[4, 3] + M[4, 4] = 0 \end{pmatrix}$$

Ilustración 35 Código, Cálculo ecuaciones equilibrio

4.2.7. Cálculo grado hiperasticidad

El GH nos va a definir el número de ecuaciones de compatibilidad del problema.

```
(*CALCULO VALOR DE GH*)
GH = 3 * nn - Count[ccR, 0] - 3;
|conteo
For[i = 1, i ≤ nn, i++,
|para cada
If[rot[[i]] == 1, GH = GH - 1];
|si
];
Print["Ecuaciones de compatibilidad = ", GH];
|escribe
Ecuaciones de compatibilidad = 3
```

Ilustración 36 Código, Cálculo grado hiperasticidad GH

4.2.8. Vectores momento y giros

Necesito los vectores de momentos, axiles y giros de cada barra para los pasos posteriores por lo que los defino como:

- **Mt**: nos engloba los momentos¹⁵ y axiles¹⁶.
- **θt** : nos engloba los giros¹⁷.

```
(*Hago un vector Mt con los momentos y los axiles que tenemos*)
i = 1;
While[i ≤ nn, M[i] = {}; i++];
[mientras
i = 1; j = 1; k = 3;
While[i ≤ nn, While[j ≤ bjn[i][1], AppendTo[M[i], M[i, bjn[i][k]]];
[mientras [mientras [añade al final
j++;
k = k + 2];
i++;
j = 1;
k = 3]

Mt = Flatten[Array[M, nn]];
[aplana [arreglo
i = 1;
While[i ≤ nb, AppendTo[Mt, Nx[i]]; i++]
[mientras [añade al final
Mt
(*Hago un vector  $\theta$  con los giros que tenemos*)
i = 1;
While[i ≤ nn,  $\theta$ [i] = {}; i++];
[mientras
i = 1; j = 1; k = 3;
While[i ≤ nn, While[j ≤ bjn[i][1], AppendTo[ $\theta$ [i],  $\theta$ [i, bjn[i][k]]];
[mientras [mientras [añade al final
j++;
k = k + 2];
i++;
j = 1;
k = 3]

 $\theta t$  = Flatten[Array[ $\theta$ , nn]];
[aplana [arreglo
 $\theta t$ 
{M[1, 1], M[2, 1], M[2, 2], M[3, 2], M[3, 3],
M[4, 3], M[4, 4], M[5, 4], Nx[1], Nx[2], Nx[3], Nx[4]}
{ $\theta$ [1, 1],  $\theta$ [2, 1],  $\theta$ [2, 2],  $\theta$ [3, 2],  $\theta$ [3, 3],  $\theta$ [4, 3],  $\theta$ [4, 4],  $\theta$ [5, 4]}
```

Ilustración 37 Código, Definición vectores momento y giro

¹⁵ Los momentos están definidos por dos índices M[... ..], el primero se refiere al nodo y el segundo a la barra.

¹⁶ Los axiles N[...] están definidos únicamente por el número de barra.

¹⁷ Los giros están definidos por dos índices θ [... ..], el primero se refiere al nodo y el segundo a la barra.

4.2.9. Coeficientes m_i para las ecuaciones de compatibilidad

Como ya se vio en la aplicación del método Directo teórica se necesitan una serie de índices " m_i ¹⁸" que son función de las ecuaciones de equilibrio. Se necesitan tantos conjuntos como grado de hiperasticidad tiene nuestra estructura.

- Pongo las ecuaciones de equilibrio en función de índices numéricos mediante la función Coefficient (ver Anexo 2).
- Mediante la función Nullspace (ver Anexo 2) consigo los GH conjuntos de valores.

(*Saco los coeficientes m y los meto todos en un vector de vectores mM*)

L = 5;

i = 1;

While[i ≤ long, Print[m[i] = Coefficient[eq[[i], Mt]]; i++];

[mientras [escribe [coeficiente

mM = Array[m, long];

[arreglo

(*Aplico Nullspace para sacar la solucion del sistema*)

[espacio nulo

Print["Los indices de las ecuaciones de compatibilidad son:"]

[escribe

mi = NullSpace[mM]

[espacio nulo

$\left\{ \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0 \right\}$

$\left\{ 0, 0, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0 \right\}$

$\left\{ 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$

$\left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0 \right\}$

$\left\{ 0, 0, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$

$\left\{ 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$

$\left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 0, -1, 0 \right\}$

$\left\{ 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0, 0, 0, 0, -1 \right\}$

$\left\{ 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$

Los indices de las ecuaciones de compatibilidad son:

{{-10, -10, -10, -5, -5, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1},

{0, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 0, 1, 1, 0}, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}}

Ilustración 38 Código, Cálculo índices m_i

¹⁸ Cada vector de índices " m_i " tiene tantos componentes como el vector Mt que definimos en el apartado anterior

4.2.10. Cálculo de ecuaciones de compatibilidad

Tendremos tantas ecuaciones de compatibilidad, **EC**, como GH tiene nuestra estructura. Con la sistematización de la fórmula, (ec34), que vemos a continuación, obtenemos la ecuación de compatibilidad para casos con cargas puntuales o distribuidas.

$$\sum_{itramos} \frac{L}{6EI} \left(m_A(2M_A + M_B) + m_B(2M_B + M_A) + \frac{qL^2}{4}(m_A + m_B) \right) + \sum mi * \theta i = 0 \quad (ec34)$$

- En la primera operación de “While“ se introducen los dos primeros términos de la expresión de la ecuación de compatibilidad, en los cuales no nos interviene la presencia de carga distribuida.
- En la segunda se introduce el término de la carga distribuida. Se ha definido un nuevo giro, θb , para el caso en el que tengamos carga distribuida, pero como veremos en pasos posteriores no nos va a afectar ya que al resolver el sistema $\theta b \rightarrow 0$.
- Finalmente, se introduce el término de los giros.

```

While[j ≤ Length[mi],
  [mientras [longitud]
    ec[j] = ((L / (6 * vE * Iy)) * Sum[ ((mi[[j, i]] * (2 * (Mt[[i]] + Mt[[i + 1]])) +
      [suma]
      (mi[[j, i + 1]] * (2 * (Mt[[i + 1]] + Mt[[i]]))), {i, 1, (nb * 2) - 1, 2}]);
    j++]

(*Añado el termino a mayores de la parte
parabolica de la zona con carga distribuida*)
j = 1; i = 1;
While[j ≤ Length[mi], While[i ≤ Length[ccFdd], ec[j] = ec[j] +
  [mientras [longitud] [mientras [longitud]
    (θb * ((mi[[j, ccFdd[[i][3]]] - mi[[j, ccFdd[[i][2]]] * L) + mi[[j, ccFdd[[i][2]]])) +
    ((L / (6 * vE * Iy)) * q * L^2 * (mi[[j, i]] + mi[[j, i + 1]]) / 4);
    i++];
    j++;
    i = 1]

j = 1;
While[j ≤ Length[mi], EC[j] = ec[j] + (Sum[mi[[j, i]] * θt[[i]], {i, 1, nb * 2, 1}]);
  [mientras [longitud] [suma]
    j++
  ]

(*Imprimo las ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD *)
Print["Las ecuaciones de compatibilidad son:"]
[escribe
i = 1;
While[i ≤ GH, Print[EC[i]];
  [mientras [escribe]
    i++]

```

Ilustración 39 Código, Cálculo Ecuaciones Compatibilidad

Las tres ecuaciones de compatibilidad, dependientes de los momentos y giros de nuestra estructura, que obtengo son:

Las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\begin{aligned}
 & 4.74672 \times 10^{-8} (-10 (2 M[1, 1] + M[2, 1]) - 10 (M[1, 1] + 2 M[2, 1]) - \\
 & \quad 10 (2 M[2, 2] + M[3, 2]) - 5 (M[2, 2] + 2 M[3, 2]) - 5 (2 M[3, 3] + M[4, 3])) - \\
 & \quad 10 \theta[1, 1] - 10 \theta[2, 1] - 10 \theta[2, 2] - 5 \theta[3, 2] - 5 \theta[3, 3] \\
 & 4.74672 \times 10^{-8} (5 (M[1, 1] + 2 M[2, 1]) + 5 (2 M[2, 2] + M[3, 2]) + 5 (M[2, 2] + 2 M[3, 2]) + \\
 & \quad 5 (2 M[3, 3] + M[4, 3]) + 5 (M[3, 3] + 2 M[4, 3]) + 5 (2 M[4, 4] + M[5, 4])) + \\
 & \quad 5 \theta[2, 1] + 5 \theta[2, 2] + 5 \theta[3, 2] + 5 \theta[3, 3] + 5 \theta[4, 3] + 5 \theta[4, 4] \\
 & 4.74672 \times 10^{-8} \\
 & \quad (3 M[1, 1] + 3 M[2, 1] + 3 M[2, 2] + 3 M[3, 2] + 3 M[3, 3] + 3 M[4, 3] + 3 M[4, 4] + 3 M[5, 4]) + \\
 & \quad \theta[1, 1] + \theta[2, 1] + \theta[2, 2] + \theta[3, 2] + \theta[3, 3] + \theta[4, 3] + \theta[4, 4] + \theta[5, 4]
 \end{aligned}$$

Ilustración 40 Código, Ecuaciones Compatibilidad

4.2.11. Resolución del problema estático

Para la resolución del problema estático, nos falta igualar a 0 las ecuaciones de compatibilidad e incluir la incógnita θb que como ya se dijo en el punto anterior no nos influirá porque al resolver el sistema $\theta b \rightarrow 0$, porque en este caso no se ha formado rótula plástica y no hay giro acumulado.

```

(*Añado el nuevo giro y los igualo a 0*)
θT = AppendTo[θt, θb];
    [añade al final]
i = 1; θt0 = {};
While[i ≤ Length[θT], AppendTo[θt0, θT[[i]] == 0]; i++]
    [mientras] [longitud] [añade al final]
(*Igualo las ecuaciones de compatibilidad a 0*)
i = 1; EC0 = {};
While[i ≤ GH, AppendTo[EC0, EC[i]] == 0]; i++]
    [mientras] [añade al final]

```

Ilustración 41 Código, Ecuaciones compatibilidad igualadas a 0

Finalmente, se realizará el siguiente sistema de ecuaciones:

- Ecuaciones de compatibilidad igualadas a 0.
- Ecuaciones de equilibrio igualadas a 0.
- Los giros igualados a 0.

```
sol = Solve[Join[EQ, EC0, et0] /. P -> 1, Join[Mt, et]]
[resuelve junta] [junta]
```

Ilustración 42 Código, Resolución sistema ecuaciones

M[1, 1] = 1.0625Nm	M[2, 1] = -0.0625Nm	Nx[1] = -0.3125N
M[2, 2] = -0.0625Nm	M[3, 2] = 1.5Nm	Nx[2] = 0.2N
M[3, 3] = 1.5Nm	M[4, 3] = -1.9375Nm	Nx[3] = 0.2N
M[4, 4] = -1.9375Nm	M[5, 4] = 2.0625Nm	Nx[4] = -0.6875N

Estos resultados son para una carga P unitaria.

4.3. Código de resolución método Paso a Paso

Para este problema se van a plantear los dos métodos de resolución de un problema de cálculo plástico.

Comprobaremos como para la resolución de un mecanismo completo¹⁹, la solución con el método directo y con el método paso a paso es idéntica. Si estuviésemos en el caso de un mecanismo incompleto (*Ver Problema de aplicación 1*), el diagrama de momentos nos varía mientras que la carga crítica y las rótulas formadas si son correctas.

En el apartado 3.4 ya se explicó el método de resolución que se ha obtenido para los problemas de paso a paso. El código²⁰ lo muestro a continuación:

```
(*PASO 1*)
sol = Solve[Join[EQ, EC0, et0, {M[5, 4] == Mp}], Join[{P}, Mt, et]]
[resuelve junta] [junta]

{{P -> 83 733.3, M[1, 1] -> -88 966.7, M[2, 1] -> -5233.33, M[2, 2] -> -5233.33,
M[3, 2] -> 125 600., M[3, 3] -> 125 600., M[4, 3] -> -162 233.,
M[4, 4] -> -162 233., M[5, 4] -> 172 700., Nx[1] -> -26 166.7, Nx[2] -> 16 746.7,
Nx[3] -> 16 746.7, Nx[4] -> -57 566.7, et[1, 1] -> 4.11681 x 10^-18,
et[2, 1] -> 0., et[2, 2] -> 0., et[3, 2] -> 0., et[3, 3] -> -2.3203 x 10^-18,
et[4, 3] -> 0., et[4, 4] -> 5.1346 x 10^-18, et[5, 4] -> 0., eb -> 0}}

et0 = Delete[et0, {{8}}];
[elimina]
```

Ilustración 43 Código, Paso 1 Método Paso a Paso

¹⁹ Mecanismo completo: mecanismo con rótulas plásticas > GH

²⁰ El código que se ha realizado para el Método Paso es un código “asistido” en el cual tenemos que elegir nosotros en cada paso, la siguiente rótula plástica. El código que veremos para el método directo es completamente sistematizado en el cual solo es necesario introducir los datos del problema.

(*PASO 2*)

```
sol =  
Solve[Join[EQ, EC0, et0, {M[5, 4] == Mp, M[4, 3] == -Mp}, {}], Join[{P}, Mt, etT]]  
[resuelve junta] [junta]  
{ {P -> 88 669.9, M[1, 1] -> -100 527., M[2, 1] -> -2577.61, M[2, 2] -> -2577.61,  
M[3, 2] -> 134 036., M[3, 3] -> 134 036., M[4, 3] -> -172 700.,  
M[4, 4] -> -172 700., M[5, 4] -> 172 700., Nx[1] -> -27 322.7, Nx[2] -> 19 589.9,  
Nx[3] -> 19 589.9, Nx[4] -> -61 347.2, et[1, 1] -> 0., et[2, 1] -> 0.,  
et[2, 2] -> -5.29768 x 10^-18, et[3, 2] -> 0., et[3, 3] -> -2.49376 x 10^-18,  
et[4, 3] -> 0., et[4, 4] -> -2.64575 x 10^-17, et[5, 4] -> 0.00146822, eb -> 0 } }
```

```
et0 = Delete[et0, {{6}}];  
[elimina]
```

(*PASO 3*)

```
sol = Solve[  
[resuelve  
Join[EQ, EC0, et0, {M[5, 4] == Mp, M[4, 3] == -Mp, M[3, 2] == Mp}], Join[{P}, Mt, etT]]  
[junta] [junta]  
{ {P -> 102 118., M[1, 1] -> -157 683., M[2, 1] -> 7508.7, M[2, 2] -> 7508.7,  
M[3, 2] -> 172 700., M[3, 3] -> 172 700., M[4, 3] -> -172 700.,  
M[4, 4] -> -172 700., M[5, 4] -> 172 700., Nx[1] -> -33 038.3,  
Nx[2] -> 33 038.3, Nx[3] -> 33 038.3, Nx[4] -> -69 080., et[1, 1] -> 0.,  
et[2, 1] -> 0., et[2, 2] -> 0., et[3, 2] -> 0., et[3, 3] -> -3.46825 x 10^-18,  
et[4, 3] -> -0.0106925, et[4, 4] -> 2.44467 x 10^-18, et[5, 4] -> 0.0064155, eb -> 0 } }
```

```
et0 = Delete[et0, {{4}}];  
[elimina]
```

(*PASO 4*)

```
sol = Solve[Join[EQ, EC0, et0,  
[resuelve junta  
{M[5, 4] == Mp, M[4, 3] == -Mp, M[3, 2] == Mp, M[1, 1] == -Mp}], Join[{P}, Mt, etT]]  
[junta]  
{ {P -> 103 620., M[1, 1] -> -172 700., M[2, 1] -> 1.33965 x 10^-11,  
M[2, 2] -> 1.45519 x 10^-11, M[3, 2] -> 172 700., M[3, 3] -> 172 700.,  
M[4, 3] -> -172 700., M[4, 4] -> -172 700., M[5, 4] -> 172 700., Nx[1] -> -34 540.,  
Nx[2] -> 34 540., Nx[3] -> 34 540., Nx[4] -> -69 080., et[1, 1] -> 0.,  
et[2, 1] -> 0., et[2, 2] -> 0., et[3, 2] -> 0.00819758, et[3, 3] -> -4.34276 x 10^-18,  
et[4, 3] -> -0.0163952, et[4, 4] -> 2.28567 x 10^-18, et[5, 4] -> 0.00819758, eb -> 0 } }
```

Ilustración 44 Código, Pasos 2, 3 y 4, Método Paso a Paso

La solución en el momento de colapso, con rótulas plásticas (1, 3, 4 y 5) es:

M[1, 1] = -172700 Nm
M[2, 1] = 0 Nm
M[2, 2] = 0 Nm
M[3, 2] = 172700 Nm
M[3, 3] = 172700 Nm
M[4, 3] = -172700 Nm
M[4, 4] = -172700 Nm
M[5, 4] = 172700 Nm
Pc = 103620 N

Nx[1] = -34540 N
Nx[2] = 34540 N
Nx[3] = 34540 N
Nx[4] = -69080 N

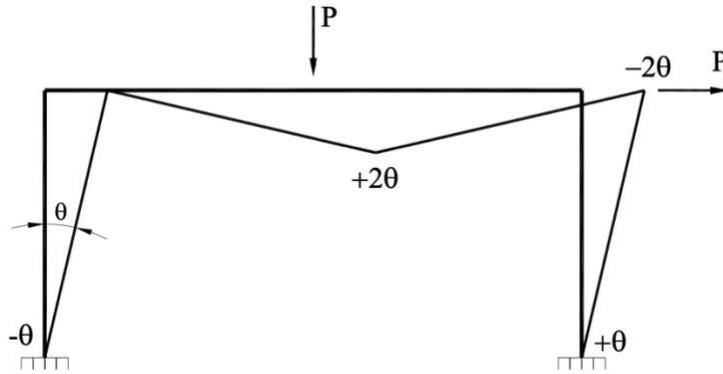


Ilustración 45 Mecanismo de colapso, rótulas plásticas 1, 3, 4 y 5

Se obtiene un mecanismo completo (ilustración 45) debido a que el $GH=3$ y el número de rótulas plásticas es 4 para el mecanismo de colapso.

4.4. Código de resolución Método Directo

Con este método comprobaremos la solución de este problema mediante el método Paso a Paso.

```

i = 1;
Mij = Table[x, (Length[Mt] - nb)];
      [tabla      [longitud]
While[i ≤ (Length[Mt] - nb), Mij[[i]] = {-Mp ≤ Mt[[i]] ≤ Mp}; i++]
      [mientras  [longitud]
sMij = Flatten[Mij]
      [aplana]
{-172 700 ≤ M[1, 1] ≤ 172 700, -172 700 ≤ M[2, 1] ≤ 172 700,
-172 700 ≤ M[2, 2] ≤ 172 700, -172 700 ≤ M[3, 2] ≤ 172 700, -172 700 ≤ M[3, 3] ≤ 172 700,
-172 700 ≤ M[4, 3] ≤ 172 700, -172 700 ≤ M[4, 4] ≤ 172 700, -172 700 ≤ M[5, 4] ≤ 172 700}

```

Ilustración 46 Código, límites momentos

El código que he realizado es tanto para casos con cargas distribuidas como sin ella. En el problema que estamos resolviendo en este apartado no contiene carga distribuida por lo que estas líneas van a ser inertes para este caso.

Por cada barra distribuida se nos generan 2 nuevas incógnitas:

- Un momento Mx , el cual es dependiente de x .
- El lugar exacto en el cual donde se produce la plastificación de la barra $\rightarrow x$
Lo obtenemos derivando Mx respecto de x e igualando a 0.

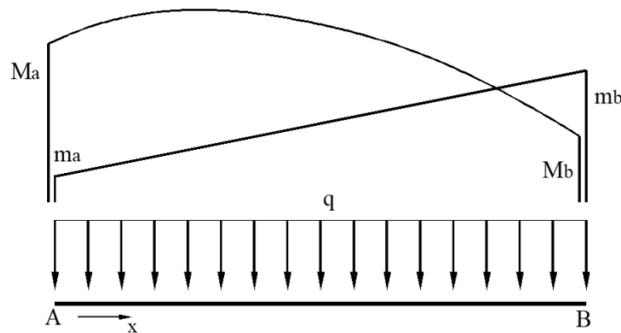


Ilustración 47 $M(x)$ parabólico (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. 2, 2021)

```
(*Saco las ecuaciones adicionales que necesita al tener carga distribuida*)
(*Con la formula de M(x) parabolico saco las ecuaciones "MX"*)
MX = Table[0, Length[ccFdd]];
      [tabla]      [longitud]
i = 1;
While[i ≤ Length[ccFdd], Print[Mx[ccFdd[[i]][1]] =
  [mientras] [longitud] [escribe]
    ((M[ccFdd[[i]][3], ccFdd[[i]][1]] - M[ccFdd[[i]][2], ccFdd[[i]][1]]) / L) * x) +
    M[ccFdd[[i]][2], ccFdd[[i]][1]] +
    ((ccFdd[[i]][4] * L * x) / 2) - ((ccFdd[[i]][4] * x * x) / 2)];
    i++];

(*Calculo las x[i] mediante de la dereivada de las
ecuaciones que he obtenido anteriormente igualadas a 0*)
i = 1;
While[i ≤ Length[ccFdd], Print[x[i] = Solve[D[Mx[1], x] == 0, x]];
  [mientras] [longitud] [escribe] [resuelve] [deriva]
    i++];
```

Ilustración 48 Código, Obtención $x[i]$ y Mx

En la siguiente parte del código se obtiene:

- **Mmax**: sustituyendo en la ecuación de Mx , la x que hemos conseguido anteriormente en la barra que corresponda. En este caso no tenemos al no tener carga distribuida.

```
(*Hago las nuevas restricciones de intervalos de momentos*)
i = 1;
Mmax = Table[0, Length[ccFdd]];
      [tabla]      [longitud]
While[i ≤ Length[ccFdd], Mmax[[i]] = Mx[i] /. x[i];
  [mientras] [longitud]
    i++];
rm = {-Mp ≤ Mmax ≤ Mp}
{-172 700 ≤ {} ≤ 172 700}
```

Ilustración 49 Código, Obtención $Mmax$

Finalmente, se consigue la solución del problema de cálculo plástico:

```
(*Calculo la solucion de la carga critica de plastificacion*)
If[Length[ccFdd] == 0,
  [si] [longitud]
  NMaximize[Join[{P}, EQ, sMij] /. Mp -> 172700, Join[{P}, Mt]] // Quiet,
  [maximiza ap...] [junta] [silencioso]
  NMaximize[Join[{P}, EQ, sMij, rm] /. Mp -> 172700, Join[{P}, Mt]] // Quiet]
  [maximiza ap...] [junta] [silencioso]

{103620.,
 {P -> 103620., M[1, 1] -> -172700., M[2, 1] -> 0., M[2, 2] -> 0., M[3, 2] -> 172700.,
 M[3, 3] -> 172700., M[4, 3] -> -172700., M[4, 4] -> -172700., M[5, 4] -> 172700.,
 Nx[1] -> -34540., Nx[2] -> 34540., Nx[3] -> 34540., Nx[4] -> -69080.}}
```

Ilustración 50 Código, Solución Método Directo

Los giros, momentos, axiles y el mecanismo de colapso (ilustración 51) son los siguientes:

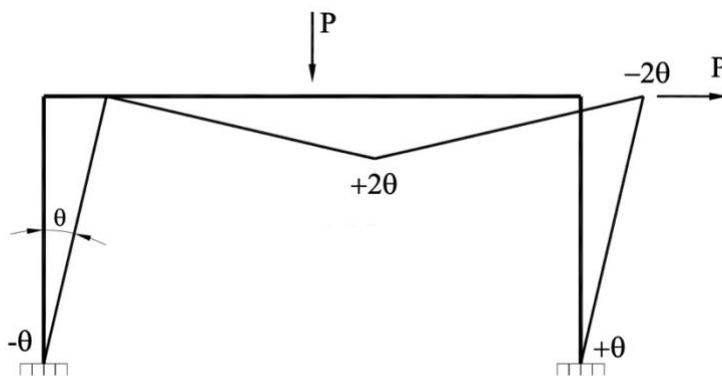
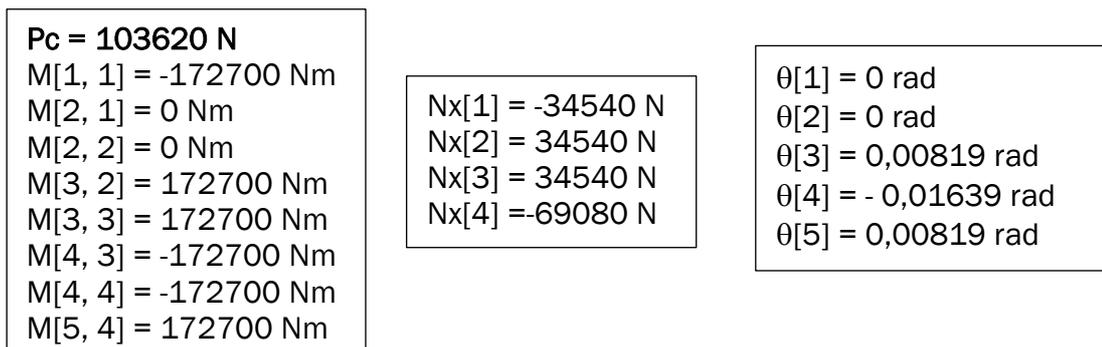


Ilustración 51 Mecanismo de colapso, rótulas plásticas 1, 3, 4 y 5

La solución obtenida con el método paso a paso y el método directo, es la misma. Esto es debido a que este mecanismo es un mecanismo completo, Rótulas Plásticas (4) > GH(3).

En la solución de giros se puede comprobar que la última rótula plástica es la 1, ya que de los nudos que poseen rótula plástica es el único con solución nula.

El código de sistematización del método directo ha sido desarrollado con funciones monobjetivo lo que nos provoca una diferencia en la solución, únicamente cuando se nos presentan mecanismos incompletos. Este tipo de mecanismos se estudian en el *Problema de aplicación 1*.

CAPÍTULO 5:
Resultados. Problemas de aplicación

5. Resultados. Problemas de aplicación

5.1. Problema de aplicación 1

Durante la asignatura de 4º de Estructuras Metálicas (Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. 1, 2021), realicé (Nicolás, 2021) la aplicación de las acciones de la edificación del Código Técnico en una estructura.

En este apartado haré un breve resumen de lo realizado en ese momento, para posteriormente aplicar el código realizado de cálculo plástico.

Se trata nave plana ubicada en Segovia (ilustración 52), con una cubierta de fibrocemento con manta de fibra de vidrio colocado bajo la placa. Posee paneles fotovoltaicos en la cubierta, y en la parte central paneles traslucidos.



Altura pilares: 5m
Anchura nave: 10m
Profundidad nave: 55m
Separación max pórticos: 5m

Ilustración 52 Estructura, problema aplicación 1 (Nicolás, 2021)

5.1.1. Clasificación acciones

Para el análisis se considerará únicamente el Pórtico interior 1, ya que es el que más carga soporta como veremos a continuación.

5.1.1.1. Acciones permanentes

5.1.1.1.1. Peso propio (PP)

Aplicamos el peso de todos los elementos que componen nuestra nave para obtener la carga. En la tabla 2, tenemos tres casos:

- Pórtico Fachada
- Pórtico interior 1: el cual soporta mayor peso propio como veremos en la tabla 2.
- Pórtico interior 2

		PÓRTICO FACHADA		PÓRTICO INTERIOR 1 (SOLO CUBIERTA FIBROCEMENTO)		PÓRTICO INTERIOR 2 (PARTE CUBIERTA TRASLUCIDA)	
		Longitud tributaria	Carga (G)	Longitud tributaria	Carga (G)	Longitud tributaria	Carga (G)
Clasificación	N/m ²	m	N/m	m	N/m	m	N/m
Estructura	122	2,5	305	5	610	5	610
Cubierta Fibrocemento	137	2,5	342,5	5	685	2,5	342,5
Cubierta Traslucida	17	2,5	42,5	5	85	2,5	42,5
Manta Fibra vidrio	13	2,5	32,5	5	65	0	0
Correas	130	2,5	325	5	650	5	650
Paneles Fotovoltaicos	118	2,5	295	5	590	0	0
Estructura paneles	79	2,5	197,5	5	395	0	0
Instalaciones	255	2,5	637,5	5	1275	5	1275
TOTAL	871		2177,5		4355		2920

²¹Tabla 2 Resumen pesos propios (Nicolás, 2021)

Considero únicamente el pórtico 1 ya que es el que más carga soporta (ilustración 53).



Ilustración 53 Fuerza distribuida Peso Propio (Pórtico interior 1)

5.1.1.2. Acciones variables

5.1.1.2.1. Sobrecarga de uso

Buscando en la *Tabla 3.1. Valores característicos de las sobrecargas de uso.*

- **Categoría de uso:** G
- **Subcategoría de uso:** G1

Carga sobre la cubierta: $SU = 1,00 \text{ kN/m}^2$

- **Pórtico fachada:**

$$Q_U = 2,5\text{m} * 1,00 \text{ kN/m}^2 = 2,5 \text{ kN/m} \quad (\text{ec35})$$

²¹ La longitud tributaria: es la longitud de nave que tiene que soportar cada pórtico. Viene dada por la distancia existente entre pórticos.

- **Pórtico interior (solo fibrocemento):**

$$Q_U = 5\text{m} * 1,00 \text{ kN/m}^2 = \mathbf{5 \text{ kN/m}} \quad (\text{ec36})$$

- **Pórtico interior (parte cubierta traslucida):**

$$Q_U = 5\text{m} * 1,00 \text{ kN/m}^2 = \mathbf{5 \text{ kN/m}} \quad (\text{ec37})$$

Para realizar los cálculos consideraré el caso más restrictivo, el de 5kN/m (ilustración 54).



Ilustración 54 Carga distribuida de Sobrecarga de uso (Pórtico interior 1)

5.1.1.2.2. Viento

$$Q_e = Q_b * C_e * C_p \quad (\text{ec38})$$

Q_b : presión dinámica del viento.
 C_e : coeficiente de exposición.
 C_p : coeficiente eólico.

- **Presión dinámica del viento (q_b):**

Mirando en el ANEJO D (D.1 Presión dinámica), Segovia pertenece a la zona A por lo que $q_b=0,42 \text{ kN/m}^2$

- **Coeficiente de exposición (c_e):**

Mirando la *Tabla 3.3 Valores del coeficiente de exposición*, nos encontramos en la Zona IV (Zona urbana en general, industrial o forestal) y la altura del punto considerado²² lo tenemos entre 3 y 6m. Por lo tanto, $c_e = (1,4 ; 1,9)$

- **Cubierta:** Hmax = 10m interpolado -> $c_e = 1,76$
- **Fachada:** Hmax= 10m interpolado -> $c_e = 1,76$

²² Altura del punto considerado: es la medida respecto a la rasante media de la fachada a barlovento.

- Coeficiente eólico (C_p):

Tenemos una cubierta plana y se obtienen los datos de la *Tabla D.4 Cubiertas planas* para los parámetros de cubierta (Acciones, 2022). Los valores de la carga de viento obtenidos se representan en la tabla 3 y el la figura 55.

VIENTO							
ÁREA	ZONA	q_b (kN/m ²)	C_e	C_p	q_e (kN/m ²)	$Q_e(L = 2,5m)$ kN/m	$Q_e(L = 5m)$ kN/m
Cubierta	F	0,42	1,76	-1,8	-1,33	-3,325	-6,65
	G	0,42	1,76	-1,2	-0,89	-2,225	-4,45
	H	0,42	1,76	-0,7	-0,52	-1,3	-2,6
	I	0,42	1,76	-0,2	-0,33	-0,81	-1,62
Paredes	A	0,42	1,76	-1,2	-0,89	-2,22	-4,44
	B	0,42	1,76	-0,8	-0,59	-1,48	-2,96
	C	0,42	1,76	-0,5	-0,37	-0,92	-1,85
	D	0,42	1,76	0,72	0,53	1,33	2,66
	E	0,42	1,76	-0,35	-0,26	-0,64	-1,28

Tabla 3 Acción viento

Considero el caso de longitud tributaria $L=5m$, el cual va a ser el más restrictivo.

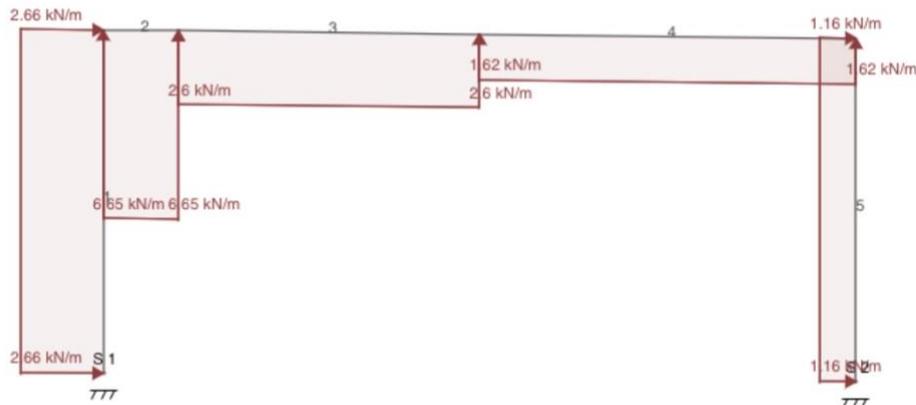


Ilustración 55 Cargas distribuidas debidas al viento

5.1.1.2.3. Nieve

Acción en proyección horizontal a la superficie de la cubierta. La carga de nieve es, (ec39)

$$q_n = \mu * S_k = 1 * 0,7 \text{ kN/m}^2 = 0,7 \text{ kN/m} \quad (\text{ec39})$$

μ : Coeficiente de forma de la cubierta; $\mu=1$ (Pendientes menores de 30°)

S_k : Valor característico de la carga de nieve sobre un terreno horizontal.

-Nuestra nave se encuentra en Segovia por lo que se encuentra en la zona 3 de la *Figura E.2 Zonas climáticas de invierno*.

-Segovia está a una altitud de 1005m por lo que en la *Tabla E.2 Sobrecarga de nieve en un terreno horizontal*, tenemos una sobrecarga $S_k = 0,7 \text{ kN/m}^2$.

- Pórtico fachada:

$$Q_n = 2,5\text{m} * 0,7 \text{ kN/m}^2 = 1,75 \text{ kN/m} \quad (\text{ec40})$$

- Pórtico interior (solo fibrocemento):

$$Q_n = 5\text{m} * 0,7 \text{ kN/m}^2 = 3,5 \text{ kN/m} \quad (\text{ec41})$$

- Pórtico interior (parte cubierta traslucida):

$$Q_n = 5\text{m} * 0,7 \text{ kN/m}^2 = 3,5 \text{ kN/m} \quad (\text{ec42})$$



Ilustración 56 Carga distribuida Nieve (Pórtico interior 1)

Represento (ilustración 56) el caso de mayor carga, ya que es el caso que se analizará en las hipótesis de carga.

5.1.2. Combinación de cargas

Una vez que tenemos todas las acciones que intervienen sobre nuestra nave lo siguiente sería utilizar la siguiente fórmula, (ec43), para las combinaciones de carga.

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} * G_{k,j} + \gamma_P * P + \gamma_{Q,1} * Q_{k,1} + \sum_{i > 1} \gamma_{Q,i} * \psi_{0,i} * Q_{k,i} \quad (\text{ec43})$$

- Los dos primeros términos se refieren a las cargas permanentes.
- El tercer término se refiere a la carga variable que actúa como principal.
- El último término son el resto de las cargas variables.

Programas informáticos como Cype²³ realizan gran cantidad de casos de combinaciones, para buscar la más restrictiva.

Combinación de cargas a analizar:

La combinación de cargas a analizar es en la cual tendremos el Peso Propio, Carga Uso y Nieve.

- **Peso Propio:**

$$G=4.355\text{kN/m}$$

- **Nieve:**

$$Q_n= 3.5 \text{ kN/m}$$

En la (ec44), la carga permanente, G, la mayoramos 1,35 según nos dicen las normas del CTE y la carga variable que actúa como principal es la Qn, la cual se mayoramos en 1,5:

$$1,35 G + 1,5 Q_n \quad (\text{ec44})$$

²³ Cype: posee programas de cálculo de estructuras como son Cype Cad para estructuras de hormigón o Cype 3D para estructuras metálicas.

5.1.3. Planteamiento del problema

Se va a resolver el problema de cálculo plástico de la estructura que se propuso en el apartado en el cual se hizo una aplicación de las acciones del CTE. Lo primero que necesitamos son los datos del problema a resolver:

- **Sección de las barras:** IPE 300
- **Momento plástico:** $M_p = 173700 \text{ Nm}$
- **Módulo elástico:** $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ MPa}$
- **Material:** S275JR
- **Momento de Inercia:** $I_y = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
- **Longitud barra:** $L = 5 \text{ m}$
- **Número nodos (nn):** 5
- **Número barras (nb):** 4
- **Apoyos:** empotramientos en 1 y 5.
- **Número de rótulas elásticas:** 0
- **Cargas puntuales:**
- **Cargas distribuidas:** definido como hipótesis de carga
- **Sistemas de referencia locales:**
 - Barra 1: eje x (1->2), girado 90° respecto global.
 - Barra 2: eje x (2->3)
 - Barra 3: eje x (3->4)
 - Barra 4: eje x (4->5), girado -90° respecto global.
- **Sistema referencia global:** coincide con el local de las barras 2 y 3.

La combinación de carga (ilustración 57) que se propuso en el apartado 5.1.2.:

- **Peso Propio:** $G = 4.355 \text{ kN/m}$
- **Nieve:** $Q_n = 3.5 \text{ kN/m}$

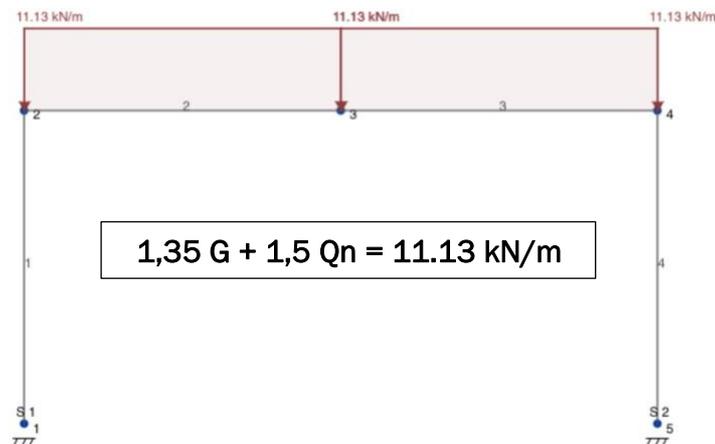


Ilustración 57 Combinación de cargas, Problema 1

5.1.4. Código introducido

El siguiente código (ilustración 58), es el introducido como enunciado para obtener la solución del problema de aplicación 1. En el Anexo 3 se puede leer el código completo del programa realizado para este problema de aplicación 1.

```
(*SISTEMATIZACION CALCULO PLASTICO para
estructuras con cargas puntuales y/o distribuidas*)

(*Datos: nn=numero de nudos//nb=numero de barras//L=longitud barras*)
nn = 5; nb = 4; L = 5;
(*Datos del material y del perfil*)
Mp = 172700; vE = 2.1 × 1011; Iy = 8360 × 10-8;
(*Informacion nudo[...] = numero barras unen nudo,
--que nudos proximos--barras de los nudos proximos*)
bjn[1] = {1, 2, 1};
bjn[2] = {2, 1, 1, 3, 2};
bjn[3] = {2, 2, 2, 4, 3};
bjn[4] = {2, 3, 3, 5, 4};
bjn[5] = {1, 4, 4};
(*Angulos barras respecto sistema referencia global*)
angulos = {90, 0, 0, -90};

(*Datos: Rotulas en nudos (0→ no hay rotula // 1→ si hay rotula)*)
rot = {0, 0, 0, 0, 0};

(*Informacion de las cargas distribuidas, {{numero barra, carga},{...}}*)
q = 11130 * λ;
fd = {{1, 0}, {2, q}, {3, q}, {4, 0}};

(*Condiciones contorno: Reacciones y Fuerzas puntuales*)
ccR = {"Fx1", "Fy1", "M1", 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, "Fx5", "Fy5", "M5"};
ccF = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
(*Formato para poner (Condiciones contorno Fuerza distribuida) ccFd---->
{{barra de la carga distribuida,nudo inicial,nudo final,carga},{...}}*)
ccFdd = {{2, 2, 3, q}, {3, 3, 4, q}};
```

Ilustración 58 Código, Problema 1

5.1.5. Solución y conclusiones del problema

- **Solución a estático**

Para el problema de aplicación 1 se obtiene la siguiente solución a estático con la configuración de cargas descrita en el enunciado.

$$\begin{aligned} M[1, 1] &= 37100 \text{ Nm} \\ M[2, 1] &= -74200 \text{ Nm} \\ M[2, 2] &= -74200 \text{ Nm} \\ M[3, 2] &= 64925 \text{ Nm} \\ M[3, 3] &= 62925 \text{ Nm} \\ M[4, 3] &= -74200 \text{ Nm} \\ M[4, 4] &= -74200 \text{ Nm} \\ M[5, 4] &= 37100 \text{ Nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_x[1] &= -55650 \text{ N} \\ N_x[2] &= -22260 \text{ N} \\ N_x[3] &= -22260 \text{ N} \\ N_x[4] &= -55650 \text{ N} \end{aligned}$$

Al ser un problema simétrico vemos como la solución de momentos y axiles también lo es.

- **Solución a plastificación (Método Directo)**

La solución que obtenemos para el problema de aplicación 2 mediante el Método Directo es la siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2,48 \\ M[1,1] &= -121731 \text{ Nm} \\ M[2,1] &= -172700 \text{ Nm} \\ M[2,2] &= -172700 \text{ Nm} \\ M[3,2] &= 172700 \text{ Nm} \\ M[3,3] &= 172700 \text{ Nm} \\ M[4,3] &= -172700 \text{ Nm} \\ M[4,4] &= -172700 \text{ Nm} \\ M[5,4] &= -121731 \text{ Nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_x[1] &= -138160 \text{ N} \\ N_x[2] &= -10194 \text{ N} \\ N_x[3] &= -10194 \text{ N} \\ N_x[4] &= -138160 \text{ N} \end{aligned}$$

Los puntos en los cuales su momento llega al momento plástico, será donde se generarán rótulas plásticas.

Al igual que la solución a estático, la solución a plastificación de momentos y axiles es simétrica.

Para llegar al mecanismo de colapso, según la configuración de cargas mostrada en el enunciado de este problema de aplicación, se necesitará incrementar las cargas

2,48 veces. Para problemas con varias cargas se utiliza λ para obtener cuanto habría que incrementar todas las cargas.

El mecanismo de colapso (ilustración 59) es el cual produce las rótulas plásticas (3) en 2, 3 y 4.

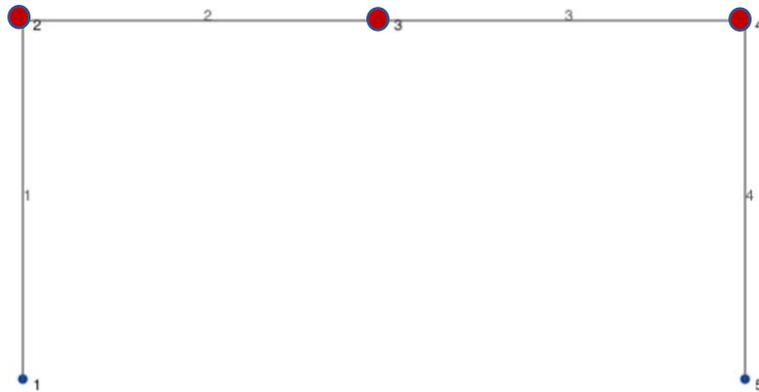


Ilustración 59 Rótulas, mecanismo de colapso

El grado de hiperasticidad es 3 mientras que el número de rótulas plásticas es también 3, en consecuencia, se nos está generando un **mecanismo incompleto**.

Mediante el método directo hemos obtenido una solución de carga crítica y de lugar de producción de las rótulas correcta (2, 3, 4) pero el valor de los momentos no lo es. Para solucionar este problema se va a evaluar mediante el método paso a paso este problema.

- **Solución a plastificación (Método Paso a Paso)**

El método de resolución de paso a paso se pudo ver en el *Apartado 4.4* para el primer ejemplo mostrado. Particularizando para este problema de aplicación, el código completo se puede ver en el *Anexo 3*.

La solución que obtenemos mediante el método paso a paso es la siguiente:

$\lambda = 2,48$
 $M[1,1] = 86350 \text{ Nm}$
 $M[2,1] = -172700 \text{ Nm}$
 $M[2,2] = -172700 \text{ Nm}$
 $M[3,2] = 172700 \text{ Nm}$
 $M[3,3] = 172700 \text{ Nm}$
 $M[4,3] = -172700 \text{ Nm}$
 $M[4,4] = -172700 \text{ Nm}$
 $M[5,4] = 86350 \text{ Nm}$

$Nx[1] = -138160 \text{ N}$
 $Nx[2] = -51810 \text{ N}$
 $Nx[3] = -51810 \text{ N}$
 $Nx[4] = -138160 \text{ N}$

$\theta[1] = 0 \text{ rad}$
 $\theta[2] = 0,0041 \text{ rad}$
 $\theta[3] = 0 \text{ rad}$
 $\theta[4] = 0,0041 \text{ rad}$
 $\theta[5] = 0 \text{ rad}$

A partir de la solución de giros se ve como la última rótula plástica se producirá en 3, al ser el único nodo con rótula plástica y giro nulo. Comparando los resultados que obtenemos con el Método Directo y con el Método Paso a Paso, la diferencia la obtenemos en los momentos y los axiles. La carga crítica es la misma y la posición de las rótulas también.

En conclusión, para obtener los valores de momentos y axiles en el instante de colapso de manera correcta en un mecanismo incompleto, sería necesario implementar funciones multiobjetivo al método directo. Se debería maximizar la carga o energía de deformación a la vez que se minimiza la energía disipada.

5.2. Problema de aplicación 2

5.2.1. Planteamiento del problema

Con el siguiente problema (ilustración 60) de aplicación se va a obtener la solución de un problema con geometría más compleja que los anteriores, dos bucles abiertos, cargas distribuidas y carga puntual. Lo primero que necesitamos son los datos del problema a resolver:

- **Sección de las barras:** IPE 300
- **Momento plástico:** $M_p = 172700 \text{ Nm}$
- **Material:** S275JR
- **Módulo elástico:** $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ MPa}$
- **Momento de Inercia:** $I_y = 8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$
- **Longitud barra:** $L = 7 \text{ m}$
- **Número nodos (nn):** 7
- **Número barras (nb):** 6
- **Apoyos:** empotramientos en 1, 5 y 7.
- **Número de rótulas elásticas:** 0
- **Cargas puntuales:** $F_{y6} = -3 \text{ kN/m}$
- **Cargas distribuidas:** barras 1, 2 Y 3 (carga $q=5000$).
- **Sistemas de referencia locales:**
 - Barra 1: eje x (1->2), girado 90° respecto global.
 - Barra 2: eje x (2->3), girado 30° respecto global.
 - Barra 3: eje x (3->4), girado -30° respecto global.
 - Barra 4: eje x (4->5), girado -90° respecto global.
 - Barra 5: eje x (4->6)
 - Barra 6: eje x (6->7), girado -90° respecto global.
- **Sistema referencia global:** coincide con el local de la barra 5.

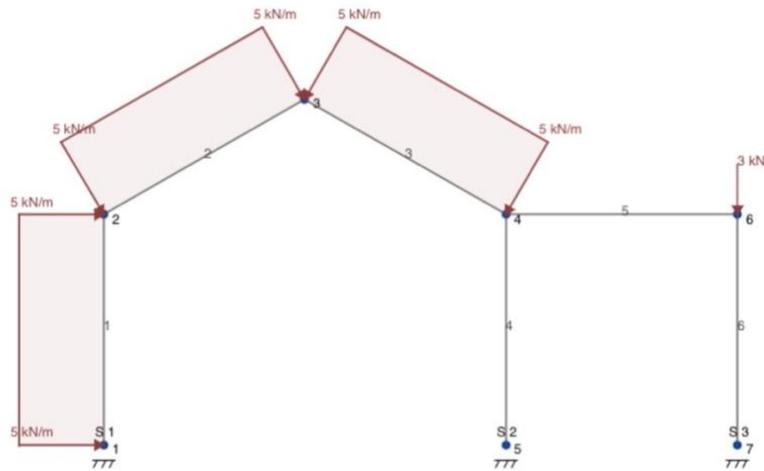


Ilustración 60 Problema de aplicación 2

5.2.2. Código introducido

El siguiente código (ilustración 16), es el introducido como enunciado para obtener la solución del problema de aplicación 2.

```
(*Datos: nn=numero de nudos//nb=numero de barras//L=longitud barras*)
nn = 7; nb = 6; L = 7;
(*Datos del material y del perfil*)
Mp = 172700; vE = 2.1 × 10^11; Iy = 8360.0 × 10^-8;
(*Informacion nudo[...] = numero barras unen nudo,
--que nudos proximos--barras de los nudos proximos*)
bjn[1] = {1, 2, 1};
bjn[2] = {2, 1, 1, 3, 2};
bjn[3] = {2, 2, 2, 4, 3};
bjn[4] = {3, 3, 3, 5, 4, 6, 5};
bjn[5] = {1, 4, 4};
bjn[6] = {2, 4, 5, 7, 6};
bjn[7] = {1, 6, 6};
(*Angulos barras respecto sistema referencia global*)
angulos = {90, 30, -30, -90, 0, -90};

(*Datos: Rotulas en nudos (0→ no hay rotula // 1→ si hay rotula)*)
rot = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};

(*Informacion de las cargas distribuidas, {(numero barra, carga),{}}...*)
q = 5000 * λ;
fd = {{1, q}, {2, q}, {3, q}, {4, 0}, {5, 0}, {6, 0}};

(*Condiciones contorno: Reacciones y Fuerzas puntuales*)
ccR = {"Fx1", "Fy1", "M1", 0, 0, 0, 0, 0, 0,
       0, 0, 0, "Fx5", "Fy5", "M5", 0, 0, 0, "Fx7", "Fy7", "M7"};
ccF = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3000λ, 0, 0, 0, 0};
(*Formato para poner (Condiciones contorno Fuerza distribuida) ccFd---->
{(barra de la carga distribuida,nudo inicial,nudo final,carga),{}}...*)
ccFdd = {{1, 1, 2, q}, {2, 2, 3, q}, {3, 3, 4, q}};
```

Ilustración 61 Código, Problema de aplicación 2

5.2.3.Solución y conclusiones del problema

- **Solución a estático**

Para el problema de aplicación 2 se obtiene la siguiente solución a estático con la configuración de cargas descrita en el enunciado.

$M[1, 1] = -23140 \text{ Nm}$
$M[2, 1] = -6733 \text{ Nm}$
$M[2, 2] = -6733 \text{ Nm}$
$M[3, 2] = -3428 \text{ Nm}$
$M[3, 3] = -3428 \text{ Nm}$
$M[4, 3] = -16529 \text{ Nm}$
$M[4, 4] = -25528 \text{ Nm}$
$M[4, 5] = 8999 \text{ Nm}$
$M[5, 4] = 28733 \text{ Nm}$
$M[6, 5] = -23018 \text{ Nm}$
$M[6, 6] = -23018 \text{ Nm}$
$M[7, 6] = 28733 \text{ Nm}$

$Nx[1] = -29503 \text{ N}$
$Nx[2] = -27877 \text{ N}$
$Nx[3] = -28685 \text{ N}$
$Nx[4] = -26544 \text{ N}$
$Nx[5] = -7399 \text{ N}$
$Nx[6] = -1574 \text{ N}$

- **Solución a plastificación**

La solución que obtenemos para el problema de aplicación 2 mediante el Método Directo es la siguiente:

$\lambda \rightarrow 7,5$
$M[1, 1] = -172700 \text{ Nm}$
$M[2, 1] = 55483 \text{ Nm}$
$M[2, 2] = 55483 \text{ Nm}$
$M[3, 2] = 55483 \text{ Nm}$
$M[3, 3] = 55483 \text{ Nm}$
$M[4, 3] = -172700 \text{ Nm}$
$M[4, 4] = -172700 \text{ Nm}$
$M[4, 5] = 0 \text{ Nm}$
$M[5, 4] = 172700 \text{ Nm}$
$M[6, 5] = -172700 \text{ Nm}$
$M[6, 6] = -172700 \text{ Nm}$
$M[7, 6] = 172700 \text{ Nm}$

$Nx[1] = -208569 \text{ N}$
$Nx[2] = -189749 \text{ N}$
$Nx[3] = -208569 \text{ N}$
$Nx[4] = -221538 \text{ N}$
$Nx[5] = -49343 \text{ N}$
$Nx[6] = -2166 \text{ N}$

Los puntos en los cuales su momento llega al momento plástico, será donde se generarán rótulas plásticas.

Para llegar al mecanismo de colapso, según la configuración de cargas mostrada en el enunciado de este problema de aplicación se necesitaría incrementar las cargas 7,5 veces.

Para la barra 2, el punto de momento máximo es en la posición $x=2.5$ y su momento es 172700 Nm.

El mecanismo de colapso (ilustración 62) es el cual produce las rótulas plásticas (7) en 1, 2, 4 (2), 5, 6 y 7. El nudo 4 es un nudo de 3 barras en las cuales obtenemos 2 rótulas.

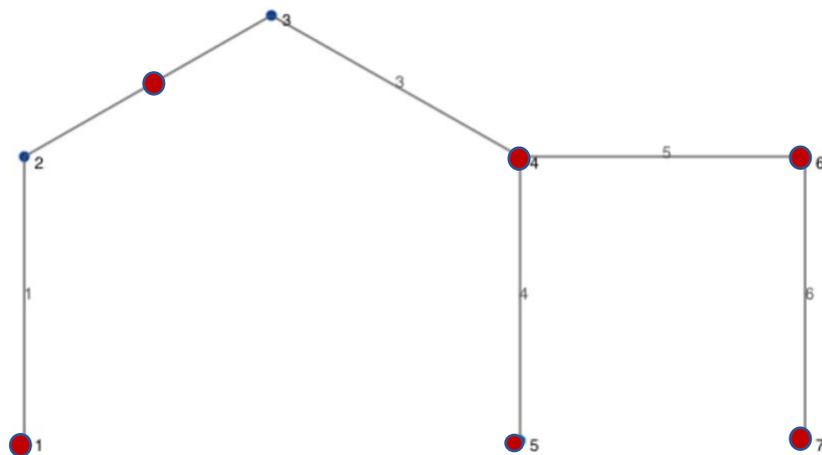


Ilustración 62 Rótulas, mecanismo de colapso

La solución que se ha obtenido mediante el Método Directo es correcta al estar ante el caso de un mecanismo completo, ya que el número de rótulas plásticas (7) que se producen es mayor que el grado de hiperstaticidad (6).

CAPÍTULO 6:
Conclusiones y líneas futuras

6. Conclusiones y líneas futuras

6.1. Conclusiones

Durante los años en la Escuela de Ingenieros, se estudiaron asignaturas que permitieron desarrollar conocimientos en la programación, en métodos de resolución matriciales, en teorías de cálculo plástico, cálculo de estructuras y utilización de normas, las cuales me han permitido desarrollar este Tfg.

Se han logrado los objetivos propuestos al inicio de proyecto y se han obtenido las siguientes conclusiones:

- Estado del arte: el método paso a paso se ha desarrollado más en los últimos años que el método directo, debido a los problemas que presentan este último con las no linealidades geométricas. Otro aspecto importante que presenta el método paso a paso es que permite el análisis de estructuras de gran tamaño tridimensionales.
- Problema con cargas distribuidas: se ha observado como para la resolución del método directo se genera una nueva incógnita M_x , con una distribución de momentos parabólica.
- Problema de un Mecanismo Incompleto: se ha comprobado en el problema de aplicación 1, como el método directo con funciones monobjetivo, nos da la carga crítica correcta pero la distribución de momentos que obtenemos no lo es. Para obtener la distribución de momentos correcta sería necesario funciones multiobjetivo para maximizar la carga o la energía de deformación a la vez que se minimiza la energía disipada.
- Problema de aplicación con geometría compleja: se ha concluido como la sistematización del método permite realizar problemas con geometrías más complejas como puede ser la del problema de aplicación 2, el cual sería realmente tedioso llegar al resultado final sin un método sistematizado como el propuesto.

6.2. Trabajos futuros

Para la resolución de un mecanismo incompleto mediante el Método Directo, este código no está lo suficiente desarrollado puesto que se ha hecho con funciones monobjetivo. Un trabajo futuro sería la aplicación de funciones multiobjetivo con técnicas de optimización más avanzada, en las que se pudiese maximizar varias variables y se pudiesen resolver mecanismos incompletos, con el método directo.

En lo referente a las distribuciones de cargas, otro posible trabajo sería incluir distribuciones triangulares o trapezoidales.

De manera experimental sería interesante a través de estructuras a escala comparar la carga crítica de plastificación con la que obtenemos de manera analítica.

Por último, se podría estudiar el análisis a plastificación de estructuras tridimensional, aunque supondría un reto importante.

Bibliografía

- Acciones, C. D.-A. (3 de Abril de 2022). Obtenido de <https://www.codigotecnico.org/pdf/Documentos/SE/DBSE-AE.pdf>
- Alarcón, E., & Doblaré, M. (1979). *Teoría de plasticidad: conceptos generales*. Madrid: E.T.S.I. Industriales (UPM).
- Colón, J. C. (2015). *Teoría Avanzada de Estructuras. Capítulo I: Introducción al Análisis en Rotura*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Demoncean, J.-F. (2007). *Steel and composite building frames: sway response under conventional loading of membrane effects in beams further to an wxceptional action*. Université de Liège.
- Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. (2021). *Asignatura Estructuras Metálicas. Acciones en la edificación*. Valladolid: Escuela de Ingenieros Industriales de Valladolid.
- Departamento Construcciones Arquitectónicas, I.T. y M.M.C y T.E. (2021). *Asignatura Estructuras y Construcciones Industriales. Cálculo Plástico*. Valladolid: Escuela de Ingenieros Industriales de Valladolid.
- Drucker, D. (1956). *The effect of shear on the plastic bending of beams*.
- Green, A. (1954). *A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and fixer-ended beams*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*.
- Hoang. (2008). *Automatic plastic-hinge analysis and design of 3D steel frames*. UNIVERSITÉ DE LIÈGE.
- Hoang, V.-L., Dang, H. N., Jaspert, J.-P., & Demonceau, e.-F. (2015). *An overview of the plastic-hinge analysis of 3D steel frames*. *Asia Pacific Journal on Computational Engineering*.
- Horne, M. R. (1951). *The plastic theory of bending of mild steel beams with particular reference to the effect of shear forces*. Royal Society of London.
- JCYL. (Septiembre 2021). *Convenio Colectivo para la Industria Siderometalúrgica de la Provincia de Valladolid para los años 2020, 2021 y 2022*. Valladolid : BOLETÍN OFICIAL DE LA PROVINCIA DE VALLADOLID.
- Long, H. V. (2008). *Automatic plastic-hinge analysis and design of 3D steel frames*. UNIVERSITÉ DE LIÈGE.
- Neal. (1977). *The Plastic Methods of Structural Analysis 3ª Edition*. En B. Neal. New York: Chapman & Hall.
- Nicolás, S. P. (2021). *Estudio acciones de la edificación para un pórtico. Trabajo Asignatura Estructuras Metálicas*. Valladolid.
- Roderick, & Philipps. (1950). *The carrying capacity of simply supported mild beams*. BWRA.
- Simplex, A. M. (27 de abril de 2022). Obtenido de <https://www.aner.com/blog/metodo-simplex.html>
- UVa. (29 de Mayo de 2022). *Bibliografía Tfg*. Obtenido de http://www.emp.uva.es/biblio/docs/Tutcova/Emp_referenciasB_TFG.pdf
- Wolfram, S. (2019). *Wolfram Language*. Wolfram Research.

ANEXO 1:
Presupuesto

Anexo 1: Presupuesto

Se realiza el análisis de la estimación de costes que ha supuesto la realización de este trabajo.

Como veremos a continuación, se analizan los costes directos e indirectos.

- **Costes directos**

Son los costes que están relacionados con la mano de obra de los trabajadores y con el material amortizable.

Suponiendo que es un contrato fijo según el convenio del metal de la provincia de Valladolid (JCYL, Septiembre 2021), el salario que tiene un ingeniero es el siguiente:

Sueldo bruto anual según convenio	28.885 €
Contingencias comunes Seguridad Social (23,6%)	6.817 €
TOTAL € ANUALES	35.702 €
€/hora	20 €

Tabla 4 Sueldo según convenio

El desglose de los trabajos realizados en el proyecto es el siguiente:

DESGLOSE TRABAJOS	HORAS	€/h	COSTE (€)
Análisis previo del trabajo	20	20	400
Análisis y estudio del software Wolfram Mathematica	15	20	300
Estudio documentación, artículos investigación y libros relacionados	35	20	700
Planteamiento y escritura del código	130	20	2600
Estudio de aplicaciones del código	25	20	500
Preparación y redacción del informe	75	20	1500
TOTALES	300 h		6000 €

Tabla 5 Desglose trabajos

Los materiales amortizables que tenemos son:

MATERIAL	COSTE (€)
Aparatos electrónicos (portátil, monitor...)	1.500 €
Otros materiales	300 €
TOTAL	1.800 €

Tabla 6 Material

- **Costes indirectos**

Todos los costes que van vinculados a bienes fungibles y elementos que se adquiere propiedad.

DESGLOSE COSTES INDIRECTOS	COSTE (€)
Alquiler de la Licencia de Wolfram Mathematica	2.068 €
Gastos energía, internet y telefonía	500 €
Otros gastos administrativos	350 €
TOTAL	2.918 €

Tabla 7 Costes Indirectos

- **Costes totales**

El coste total que ha supuesto la realización de este trabajo han sido 10718€.

Coste Directo	7800 €
Coste Indirecto	2918 €
COSTE TOTAL	10718 €

Tabla 8 Coste Total

ANEXO 2:
Wolfram Mathematica

Anexo 2: Guía rápida de Wolfram Mathematica

Previamente a la realización del código en Wolfram Mathematica de este trabajo se necesitó una familiarización de lenguaje que presenta Wolfram Mathematica. Durante los estudios, he usado lenguajes de programación de programas como C++ o Matlab, por lo que la familiarización fue rápida.

Para el estudio del lenguaje se usó tanto la ayuda que presenta el programa como el libro de introducción a Wolfram (Wolfram, 2019).

A continuación, presento un formulario realizado para la utilización y entendimiento del programa.

- **Operaciones con vectores:**

Vector: $v = \{ , , , \}$

Crear vector de 10 componentes x: **Table[x, 10]**

Crear vector según una fórmula $f[i]$: **Table[f[i], {i, empieza, acaba, intervalo}]**

Generar una lista de n términos i de $f[i]$: **Array[f, n]**

Producto escalar vectores: **u.v**

Producto vectorial vectores: **cross[v, w]**

Extracción un a componente: **v[[]]**

Extraer varias componentes de un vector v: **Part [v, desde; hasta]**

Simplificar: **....//Simplify**

Introducir un nuevo elemento al final de la lista: **AppendTo[Lista, valor]**

Partir en n elemento un vector o lista: **Partition[v, n]**

Unir varios vectores: **Join[, ,]**

- **Operaciones con matrices:**

Definición de matriz: **A={{ , , }, { , , },....}**

Para ponerla en forma de matriz: **//MatrixForm**

Producto componente a componente matriz: **A*B**

Producto de matrices: **A.B** o **Dot[A, B]**

Producto matriz A con vector v: **v.A**

Producto de matriz n veces: **MatrixPower[A, n veces]**

Extraer elemento matriz A: **A[[fila, columna]]**

Extraer fila matriz A: **A[[fila]]**

Extraer elemento matriz A: **A[[A//, columna]]**

Extraer varias filas y columnas: **Take[A, {intervalo filas}, {intervalo columnas}]**

Borrar varias filas y columnas: **Drop[A, {intervalo filas}, {intervalo columnas}]**

Matriz A inversa: **Inverse[A]**

Determinante matriz A: **Det[A]**

Matriz A transpuesta: **Transpose[A]**

Matriz identidad: **IdentityMatrix[orden]**

Matriz con valor seleccionado: **ConstantArray[valor seleccionado, {forma matriz}]**

Crear de una matriz un vector: **Flatten[matriz]**

- **Solucionadores y otras funciones**

Para crear una función dependiente de un parámetro: `f[x_]:= x`

Resolver un sistema: `Solve[{ecuación 1, ecuación 2,...}, {variable 1, variable 2,...}]`

Resolver un sistema de manera aproximada: `NSolve`

Resolución por iteración: `FindRoot[ecuaciones, {variable, semila}]`

Despejar variable: `Reduce[ecuación, variable a despejar]`

Para obtener una solución con condiciones: `Refine[expresión, condición]`

Maximizar respecto de una variable: `NMaximize[funciones, variable]`

Para sacar por pantalla una expresiones o comentario: `Print[...]`

Para obtener una serie de índices que hacen nulo un sistema de ec: `Nullspace[ecuaciones a evaluar]`

- **Funciones condicionales**

Para crear funciones condicionales y funciones que hagan bucles de términos, se pueden utilizar las siguientes expresiones.

For: crear un bucle a través de: un inicio, un incremento de la variable y la condición de parada. En cada salida se evalúa una expresión. `For[comienzo, condición parada, incremento de la variable, expresión]`

While: crear un bucle a través de: un inicio, un incremento de la variable y la condición de parada. En cada salida se evalúa una expresión. A diferencia de la función For, la variable de iteración se debe declarar antes de la función. `While[condición parada, expresión, incremento de la variable]`

If: se utiliza para evaluar si una expresión es verdadera o no, reportando un valor o expresión en cada caso. `If[condición, verdadero, falso]`

Anexo 3: Código de resolución

En el siguiente anexo se va a incluir el código, sin comentarios, realizado para la sistematización de un problema de cálculo plástico. Se particularizará para el problema de aplicación 1.

```
(*SISTEMATIZACION CALCULO PLASTICO para estructuras con cargas puntuales
y/o distribuidas*)

(*Datos: nn=numero de nudos//nb=numero de barras//L=longitud barras*)
nn = 5; nb = 4; L = 5;
(*Datos del material y del perfil*)
Mp = 172 700; vE = 2.1×10^11; Iy = 8360×10^-8;
(*Informacion nudo[...] = numero barras unen nudo,
--que nudos proximos--barras de los nudos proximos*)
bjn[1] = {1, 2, 1};
bjn[2] = {2, 1, 1, 3, 2};
bjn[3] = {2, 2, 2, 4, 3};
bjn[4] = {2, 3, 3, 5, 4};
bjn[5] = {1, 4, 4};
(*Angulos barras respecto sistema referencia global*)
angulos = {90, 0, 0, -90};

(*Datos: Rotulas en nudos (0→ no hay rotula // 1→ si hay rotula)*)
rot = {0, 0, 0, 0, 0};

(*Informacion de las cargas distribuidas, {{numero barra, carga},{...}}*)
q = 11 130 * λ;
fd = {{1, 0}, {2, q}, {3, q}, {4, 0}};

(*Condiciones contorno: Reacciones y Fuerzas puntuales*)
ccR = {"Fx1", "Fy1", "M1", 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, "Fx5", "Fy5", "M5"};
ccF = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
(*Formato para poner (Condiciones contorno Fuerza distribuida) ccFd---->
{{barra de la carga distribuida,nudo inicial,nudo final,carga},{...}}*)
ccFdd = {{2, 2, 3, q}, {3, 3, 4, q}};

(*matriz de paso: globales → locales*)
T[x_, y_] := {{x, y, 0, 0, 0, 0}, {-y, x, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
             {0, 0, 0, x, y, 0}, {0, 0, 0, -y, x, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}};

(*Con lo que tenemos a continuacion sacamos todas las fuerzas locales
que necesitamos F[1,2],F[2,1].....*)
For[s = 1, s ≤ nn, s++, {j = bjn[s][1];
para cada
i = j - (j - 2);
k = i + 1;
While[j > 0,
mientras
Print[If[s < bjn[s][i],
escribe si
F[s, bjn[s][i]] = {-Nx[bjn[s][k]],
```

```

    - (M[s, bjn[s][k]] - M[bjn[s][i], bjn[s][k]]) / L, -M[s, bjn[s][k]]},
    F[s, bjn[s][i]] = {Nx[bjn[s][k]],
    (-M[s, bjn[s][k]] + M[bjn[s][i], bjn[s][k]]) / L, M[s, bjn[s][k]]}}];
j--;
i = i + 2;
k = k + 2]};

```

(*Para los casos en los que tenemos fuerza distribuida hay que aplicar esto a las ecuaciones de equilibrio que le afecta la fuerza*)

```

i = 1;
While[i ≤ Length[ccFdd],
  |mientras |longitud
  Print[F[ccFdd[i][2]], ccFdd[i][3]] =
  |escribe
  {-Nx[ccFdd[i][1]],
  (-M[ccFdd[i][2], ccFdd[i][1]] + M[ccFdd[i][3], ccFdd[i][1]]) / L +
  ccFdd[i][4] * L / 2, -M[ccFdd[i][2], ccFdd[i][1]]}}; i++]

```

```

i = 1;
While[i ≤ Length[ccFdd],
  |mientras |longitud
  Print[F[ccFdd[i][3], ccFdd[i][2]] =
  |escribe
  {Nx[ccFdd[i][1]],
  (M[ccFdd[i][2], ccFdd[i][1]] - M[ccFdd[i][3], ccFdd[i][1]] +
  ccFdd[i][4] * L^2 / 2) / L, M[ccFdd[i][3], ccFdd[i][1]]}}; i++]

```

$$\left\{ -Nx[1], \frac{1}{5} (-M[1, 1] + M[2, 1]), -M[1, 1] \right\}$$

$$\left\{ Nx[1], \frac{1}{5} (M[1, 1] - M[2, 1]), M[2, 1] \right\}$$

$$\left\{ -Nx[2], \frac{1}{5} (-M[2, 2] + M[3, 2]), -M[2, 2] \right\}$$

$$\left\{ Nx[2], \frac{1}{5} (M[2, 2] - M[3, 2]), M[3, 2] \right\}$$

$$\left\{ -Nx[3], \frac{1}{5} (-M[3, 3] + M[4, 3]), -M[3, 3] \right\}$$

$$\left\{ Nx[3], \frac{1}{5} (M[3, 3] - M[4, 3]), M[4, 3] \right\}$$

$$\left\{ -Nx[4], \frac{1}{5} (-M[4, 4] + M[5, 4]), -M[4, 4] \right\}$$

$$\left\{ Nx[4], \frac{1}{5} (M[4, 4] - M[5, 4]), M[5, 4] \right\}$$

$$\left\{ -Nx[2], 27825 \lambda + \frac{1}{5} (-M[2, 2] + M[3, 2]), -M[2, 2] \right\}$$

$$\left\{ -Nx[3], 27825 \lambda + \frac{1}{5} (-M[3, 3] + M[4, 3]), -M[3, 3] \right\}$$

$$\left\{ Nx[2], \frac{1}{5} (139125 \lambda + M[2, 2] - M[3, 2]), M[3, 2] \right\}$$

$$\left\{ N \times [3], \frac{1}{5} (139125 \lambda + M[3, 3] - M[4, 3]), M[4, 3] \right\}$$

In[147]:=

```
(*Saco las f[i] en locales de cada barra i=1,2...*)
i = 1;
While[i ≤ nb, f[i] = {F[i, (i + 1)], F[(i + 1), i]}; i++]
  mientras

(*Saco las fg[i] en globales de cada barra i=1,2...*)
i = 1;
While[i ≤ nb,
  mientras
    fg[i] = Partition[Transpose[T[Cos[angulos[[i] °], Sin[angulos[[i] °]]],
      particiona transposición coseno seno].
      Flatten[f[i]], 3]; i++]
    aplana

(*Calculo las F1...Fnn para sacar la Fest*)
i = 1;
While[i ≤ nn,
  mientras
    F[i] = Sum[fg[bjn[i][[v]]][If[i ≠ bjn[i][[v]], 2, 1]], {v, 3, (bjn[i][[1]] * 2) + 1, 2}];
      suma si
    i++];

(*Formo el vector Fest.....Cuando las componentes tienen dos
  índices [..., ..] el primero significa el nodo y el segundo la barra
  que pertenece*)
(*Los axiles el [...] es referido a la barra que pertenece*)

Fest = Flatten[Array[F, nn]];
  aplana arreglo
Print["Las fuerzas de la estructura sin aplicar las condiciones de contorno:"]
  escribe
Fest // MatrixForm
  forma de matriz
```

Las fuerzas de la estructura sin aplicar las condiciones de contorno:

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} (M[1, 1] - M[2, 1]) \\ -Nx[1] \\ -M[1, 1] \\ \frac{1}{5} (-M[1, 1] + M[2, 1]) - Nx[2] \\ 27825 \lambda + \frac{1}{5} (-M[2, 2] + M[3, 2]) + Nx[1] \\ M[2, 1] - M[2, 2] \\ Nx[2] - Nx[3] \\ 27825 \lambda + \frac{1}{5} (139125 \lambda + M[2, 2] - M[3, 2]) + \frac{1}{5} (-M[3, 3] + M[4, 3]) \\ M[3, 2] - M[3, 3] \\ \frac{1}{5} (-M[4, 4] + M[5, 4]) + Nx[3] \\ \frac{1}{5} (139125 \lambda + M[3, 3] - M[4, 3]) + Nx[4] \\ M[4, 3] - M[4, 4] \\ \frac{1}{5} (M[4, 4] - M[5, 4]) \\ -Nx[4] \\ M[5, 4] \end{pmatrix}$$

In[156]:=

(*Saco el vector de las fuerzas equivalentes de la carga distribuida
NO LO USAMOS PARA RESOLVER*)

i = 1;

While[i ≤ Length[fd],

mientras longitud

ccFd[fd[[i]][1]] = {0, (1/2) * fd[[i]][2] * L, (1/12) * fd[[i]][2] * L * L, 0,
(1/2) * fd[[i]][2] * L, -(1/12) * fd[[i]][2] * L * L}; i++;

(*Saco las fg[i] en globales *)

i = 1;

While[i ≤ Length[fd],

mientras longitud

feq[fd[[i]][1]] =

Partition[-Transpose[T[Cos[angulos[fd[[i]][1]] °], Sin[angulos[fd[[i]][1]] °]].

particiona transposición coseno seno

ccFd[i, 3]; i++]

(*Las pongo en un vector FEQt*)

i = 1;

While[i ≤ nn,

mientras

FEQ[i] = Sum[feq[bjn[i][v]]][If[i ≠ bjn[i][v], 2, 1]],

suma si

{v, 3, (bjn[i][1] * 2) + 1, 2}]; i++];

FEQt = Flatten[Array[FEQ, nn]]

aplana arreglo

Festeq = Fest - 0 * FEQt

(*APLICO CONDICIONES DE CONTORNO DE FUERZAS Y REACCIONES*)

(*En pasos posteriores voy a necesitar saber la longitud del vector de ccR de ceros*)

long = 0; i = 0;

While[i ≤ (nn*3), **If**[ccR[[i]] == 0, long = long + 1, 0]; i++]

(*Hago un vector generico*)

Festcc = Table[x, (nn*3)];

(*Aplico condiciones contorno a Fest*)

i = 1;

While[i ≤ (nn*3), **If**[ccR[[i]] ≠ 0, **Festcc**[[i]] = ccR[[i],

Festcc[[i]] = **Festeq**[[i]] + ccF[[i]]; i++];

Print[

"Las fuerzas de la estructura aplicando las condiciones de contorno son:"]

Festcc // MatrixForm

$$\text{Out}[*]= \left\{ 0, 0, 0, 0, -27825 \lambda, -\frac{46375 \lambda}{2}, 0, -55650 \lambda, 0, 0, -27825 \lambda, \frac{46375 \lambda}{2}, 0, 0, 0 \right\}$$

$$\text{Out}[*]= \left\{ \frac{1}{5} (M[1, 1] - M[2, 1]), -N_x[1], -M[1, 1], \frac{1}{5} (-M[1, 1] + M[2, 1]) - N_x[2], \right. \\ 27825 \lambda + \frac{1}{5} (-M[2, 2] + M[3, 2]) + N_x[1], M[2, 1] - M[2, 2], N_x[2] - N_x[3], \\ 27825 \lambda + \frac{1}{5} (139125 \lambda + M[2, 2] - M[3, 2]) + \frac{1}{5} (-M[3, 3] + M[4, 3]), M[3, 2] - M[3, 3], \\ \frac{1}{5} (-M[4, 4] + M[5, 4]) + N_x[3], \frac{1}{5} (139125 \lambda + M[3, 3] - M[4, 3]) + N_x[4], \\ \left. M[4, 3] - M[4, 4], \frac{1}{5} (M[4, 4] - M[5, 4]), -N_x[4], M[5, 4] \right\}$$

Las fuerzas de la estructura aplicando las condiciones de contorno son:

Out[*]//MatrixForm=

$$\left(\begin{array}{c} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M1 \\ \frac{1}{5} (-M[1, 1] + M[2, 1]) - N_x[2] \\ 27825 \lambda + \frac{1}{5} (-M[2, 2] + M[3, 2]) + N_x[1] \\ M[2, 1] - M[2, 2] \\ N_x[2] - N_x[3] \\ 27825 \lambda + \frac{1}{5} (139125 \lambda + M[2, 2] - M[3, 2]) + \frac{1}{5} (-M[3, 3] + M[4, 3]) \\ M[3, 2] - M[3, 3] \\ \frac{1}{5} (-M[4, 4] + M[5, 4]) + N_x[3] \\ \frac{1}{5} (139125 \lambda + M[3, 3] - M[4, 3]) + N_x[4] \\ M[4, 3] - M[4, 4] \\ F_{x5} \\ F_{y5} \\ M5 \end{array} \right)$$

```

In[171]:= (*Para sacar las ECUACIONES DE EQUILIBRIO*)
eq = {};
i = 1;
While[i ≤ (nn*3), If[ccR[[i]] == 0, AppendTo[eq, Festcc[[i]]]; i++];
(*mientras [si añade al final*)
val = Table[x, {x, 1, nn}];
(*tabla*)

(*Para sacar las ECUACIONES DE EQUILIBRIO igualadas a 0*)
Print["Las ecuaciones de equilibrio son:"]
(*escribe*)
EQ = {};
i = 1;
While[i ≤ (nn*3), If[ccR[[i]] == 0, AppendTo[EQ, Festcc[[i]] == 0]]; i++];
(*mientras [si añade al final*)
EQ // MatrixForm
(*forma de matriz*)

Las ecuaciones de equilibrio son:

```

Out[171]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
 \frac{1}{5} (-M[1, 1] + M[2, 1]) - Nx[2] == 0 \\
 27825 \lambda + \frac{1}{5} (-M[2, 2] + M[3, 2]) + Nx[1] == 0 \\
 M[2, 1] - M[2, 2] == 0 \\
 Nx[2] - Nx[3] == 0 \\
 27825 \lambda + \frac{1}{5} (139125 \lambda + M[2, 2] - M[3, 2]) + \frac{1}{5} (-M[3, 3] + M[4, 3]) == 0 \\
 M[3, 2] - M[3, 3] == 0 \\
 \frac{1}{5} (-M[4, 4] + M[5, 4]) + Nx[3] == 0 \\
 \frac{1}{5} (139125 \lambda + M[3, 3] - M[4, 3]) + Nx[4] == 0 \\
 M[4, 3] - M[4, 4] == 0
 \end{pmatrix}$$

In[180]:=

```

(*Para calcular ECUACIONES COMPATIBILIDAD*)

(*CALCULO VALOR DE GH*)
GH = 3*nn - Count[ccR, 0] - 3;
(*conteo*)
For[i = 1, i ≤ nn, i++,
(*para cada*)
  If[rot[[i]] == 1, GH = GH - 1];
(*si*)
];
Print["Ecuaciones de compatibilidad = ", GH];
(*escribe*)

Ecuaciones de compatibilidad = 3

```

In[183]:=

```
(*Hago un vector Mt con los momentos y los axiles que tenemos*)
i = 1;
While[i ≤ nn, M[i] = {}; i++];
  mientras
i = 1; j = 1; k = 3;
While[i ≤ nn, While[j ≤ bjn[i][[1]], AppendTo[M[i], M[i, bjn[i][[k]]]];
  mientras      mientras      añade al final
    j++;
    k = k + 2];
  i++;
  j = 1;
  k = 3]

Mt = Flatten[Array[M, nn]];
  aplana      arreglo
i = 1;
While[i ≤ nb, AppendTo[Mt, Nx[i]]; i++];
  mientras      añade al final
Mt
(*Hago un vector  $\theta$  con los giros que tenemos*)
i = 1;
While[i ≤ nn,  $\theta$ [i] = {}; i++];
  mientras
i = 1; j = 1; k = 3;
While[i ≤ nn, While[j ≤ bjn[i][[1]], AppendTo[ $\theta$ [i],  $\theta$ [i, bjn[i][[k]]]];
  mientras      mientras      añade al final
    j++;
    k = k + 2];
  i++;
  j = 1;
  k = 3]

 $\theta$ t = Flatten[Array[ $\theta$ , nn]];
  aplana      arreglo
 $\theta$ t

Out[ ] = {M[1, 1], M[2, 1], M[2, 2], M[3, 2], M[3, 3],
  M[4, 3], M[4, 4], M[5, 4], Nx[1], Nx[2], Nx[3], Nx[4]}

Out[ ] = { $\theta$ [1, 1],  $\theta$ [2, 1],  $\theta$ [2, 2],  $\theta$ [3, 2],  $\theta$ [3, 3],  $\theta$ [4, 3],  $\theta$ [4, 4],  $\theta$ [5, 4]}
```

In[197]:=

```
(*Saco los coeficientes m y los meto todos en un vector de vectores mM*)
L = 5;
i = 1;
While[i ≤ long, Print[m[i] = Coefficient[eq[[i]], Mt]]; i++];
  mientras      escribe      coeficiente
mM = Array[m, long];
  arreglo
(*Aplico NullSpace para sacar la solucion del sistema*)
Print["Los indices de las ecuaciones de compatibilidad son:"];
  escribe
mi = NullSpace[mM]
  espacio nulo
```

```

    }
    { -1/5, 1/5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0 }
    { 0, 0, -1/5, 1/5, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0 }
    { 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 }
    { 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0 }
    { 0, 0, 1/5, -1/5, -1/5, 1/5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 }
    { 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 }
    { 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1/5, 1/5, 0, 0, 1, 0 }
    { 0, 0, 0, 0, 1/5, -1/5, 0, 0, 0, 0, 0, 1 }
    { 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0 }

```

Los indices de las ecuaciones de compatibilidad son:

```

Out[*]= { {-10, -10, -10, -5, -5, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1},
          { 0, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 0, 1, 1, 0}, { 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0} }

```

In[203]=

```

(*Aplico la formula de ECUACION DE COMPATIBILIDAD,
lo saco primero sin sumar los  $\theta$  y despues en EC ya los sumo*)
(*Tengo las dos opciones de PFV lineal y parabólico para los casos
que hay fuerza distribuida*)
j = 1;

While[j ≤ Length[mi],
  mientras longitud
  ec[j] =
    ((L / (6 * vE * Iy)) *
      Sum[ ((mi[[j, i]] * (2 * (Mt[[i]]) + Mt[[i + 1]])) + (mi[[j, i + 1]] * (2 * (Mt[[i + 1]] + Mt[[i]]))),
        suma
        {i, 1, (nb * 2) - 1, 2}]); j++]

(*Añado el termino a mayores de la parte parabolica de la zona con
carga distribuida*)
j = 1; i = 1;
While[j ≤ Length[mi],
  mientras longitud
  While[i ≤ Length[ccFdd],
    mientras longitud
    ec[j] =
      ec[j] +
      (θb * ((mi[[j, 2 * ccFdd[[i][1]]] - mi[[j, 2 * ccFdd[[i][1]]] - 1] * x / L) +
        mi[[j, 2 * ccFdd[[i][1]]] - 1]) +
      ((L / (6 * vE * Iy)) * ccFdd[[i][4]] * L ^ 2 *
        (mi[[j, 2 * ccFdd[[i][1]]] - 1] + mi[[j, 2 * ccFdd[[i][1]]]) / 4);
    i++];
  j++;
  i = 1]

```

```

j = 1;
While[j ≤ Length[mi], EC[j] = ec[j] + (Sum[mi[[j, i]] * et[[i]], {i, 1, nb*2, 1}]); j++
]

```

(*Imprimo las ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD*)

```

Print["Las ecuaciones de compatibilidad son:"]

```

```

i = 1;
While[i ≤ GH, Print[EC[i]];
i++]

```

Las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\begin{aligned}
& \left(-6 - \frac{x}{5}\right) \theta b + \left(-1 - \frac{x}{5}\right) \theta b - 0.0660387 \lambda + \\
& 4.74672 \times 10^{-8} (-10 (2 M[1, 1] + M[2, 1]) - 10 (M[1, 1] + 2 M[2, 1]) - \\
& 10 (2 M[2, 2] + M[3, 2]) - 5 (M[2, 2] + 2 M[3, 2]) - 5 (2 M[3, 3] + M[4, 3])) - \\
& 10 \theta[1, 1] - 10 \theta[2, 1] - 10 \theta[2, 2] - 5 \theta[3, 2] - 5 \theta[3, 3] \\
& 2 \left(4 - \frac{x}{5}\right) \theta b + 0.0660387 \lambda + \\
& 4.74672 \times 10^{-8} (5 (M[1, 1] + 2 M[2, 1]) + 5 (2 M[2, 2] + M[3, 2]) + 5 (M[2, 2] + 2 M[3, 2]) + \\
& 5 (2 M[3, 3] + M[4, 3]) + 5 (M[3, 3] + 2 M[4, 3]) + 5 (2 M[4, 4] + M[5, 4])) + \\
& 5 \theta[2, 1] + 5 \theta[2, 2] + 5 \theta[3, 2] + 5 \theta[3, 3] + 5 \theta[4, 3] + 5 \theta[4, 4] \\
& - \frac{2 x \theta b}{5} + 0.0132077 \lambda + 4.74672 \times 10^{-8} \\
& (3 M[1, 1] + 3 M[2, 1] + 3 M[2, 2] + 3 M[3, 2] + 3 M[3, 3] + 3 M[4, 3] + 3 M[4, 4] + 3 M[5, 4]) + \\
& \theta[1, 1] + \theta[2, 1] + \theta[2, 2] + \theta[3, 2] + \theta[3, 3] + \theta[4, 3] + \theta[4, 4] + \theta[5, 4]
\end{aligned}$$

In[212]:=

(*Añado el nuevo giro y los igualo a 0*)

```

et = AppendTo[et, eb];
i = 1; et0 = {};
While[i ≤ Length[et], AppendTo[et0, et[[i]] == 0]; i++]
(*Igualo las ecuaciones de compatibilidad a 0*)
i = 1; EC0 = {};
While[i ≤ GH, AppendTo[EC0, EC[i]] == 0]; i++]

```

(*Saco la solucion del sistema con los giros nulos y x→0*)

```

sol = Solve[Join[EQ, EC0, et0] /. x → 0, Join[Mt, et]][[1]]

```

```

Out[*]= {M[1, 1] → 0. + 37100. λ, M[2, 1] → 0. - 74200. λ,
M[2, 2] → 0. - 74200. λ, M[3, 2] → 0. + 64925. λ, M[3, 3] → 0. + 64925. λ,
M[4, 3] → 0. - 74200. λ, M[4, 4] → 0. - 74200. λ, M[5, 4] → 0. + 37100. λ,
Nx[1] → 0. - 55650. λ, Nx[2] → 0. - 22260. λ, Nx[3] → 0. - 22260. λ,
Nx[4] → 0. - 55650. λ, θ[1, 1] → 0., θ[2, 1] → 0., θ[2, 2] → 0.,
θ[3, 2] → 0., θ[3, 3] → 0., θ[4, 3] → 0., θ[4, 4] → 0., θ[5, 4] → 0., eb → 0.}

```

```
(*RESOLUCION METODO DIRECTO*)
(*Primero hago los intervalos de los momentos*)
i = 1;
Mij = Table[x, (Length[Mt] - nb)];
      |tabla      |longitud
While[i ≤ (Length[Mt] - nb), Mij[[i]] = {-Mp ≤ Mt[[i]] ≤ Mp}; i++]
      |mientras   |longitud
sMij = Flatten[Mij]
      |aplana
Out[8]= {-172 700 ≤ M[1, 1] ≤ 172 700, -172 700 ≤ M[2, 1] ≤ 172 700,
-172 700 ≤ M[2, 2] ≤ 172 700, -172 700 ≤ M[3, 2] ≤ 172 700, -172 700 ≤ M[3, 3] ≤ 172 700,
-172 700 ≤ M[4, 3] ≤ 172 700, -172 700 ≤ M[4, 4] ≤ 172 700, -172 700 ≤ M[5, 4] ≤ 172 700}
```

```
(*CALCULO DE CONDICIONES EN CASO DE FUERZA DISTRIBUIDA q*)
```

```
(*Saco las ecuaciones adicionales que necesita al tener carga distribuida*)
(*Con la formula de M(x) parabolico saco las ecuaciones "MX"*)
```

```
MX = Table[0, Length[ccFdd]];
      |tabla      |longitud
i = 1;
While[i ≤ Length[ccFdd],
      |mientras   |longitud
  Mx[ccFdd[[i]][1]] =
    ((M[ccFdd[[i]][3], ccFdd[[i]][1]] - M[ccFdd[[i]][2], ccFdd[[i]][1]]) / L) * x) +
    M[ccFdd[[i]][2], ccFdd[[i]][1]] + ((ccFdd[[i]][4] * L * x) / 2) -
    ((ccFdd[[i]][4] * x * x) / 2);
  i++];
```

```
(*Las ecuaciones Mx que obtengo son:*)
```

```
In[227]:= (*Calculo las x[i] mediante de la derivada de las ecuaciones que he
obtenido anteriormente igualadas a 0*)
```

```
i = 1;
While[i ≤ Length[ccFdd],
      |mientras   |longitud
  Print[x[ccFdd[[i]][1]] = Solve[D[Mx[ccFdd[[i]][1]], x] == 0, x]];
      |escribe     |resuelve |deriva
  i++];
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{139\,125\lambda - M[2, 2] + M[3, 2]}{55\,650\lambda} \right\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{139\,125\lambda - M[3, 3] + M[4, 3]}{55\,650\lambda} \right\} \right\}$$

In[230]:=

```
(*Hago las nuevas restricciones de intervalos de momentos*)
i = 1;
Mmax = Table[0, Length[ccFdd]];
While[i ≤ Length[ccFdd], Mmax[[i]] = Mx[ccFdd[[i]][1]] /. x[ccFdd[[i]][1]];
  i++];
rm = {-Mp ≤ Mmax ≤ Mp}
```

$$\text{Out[8]} = \left\{ -172700 \leq \left\{ \left\{ M[2, 2] + \frac{1}{2} (139125\lambda - M[2, 2] + M[3, 2]) + \frac{1}{278250\lambda} (-M[2, 2] + M[3, 2]) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. (139125\lambda - M[2, 2] + M[3, 2]) - \frac{(139125\lambda - M[2, 2] + M[3, 2])^2}{556500\lambda} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ M[3, 3] + \frac{1}{2} (139125\lambda - M[3, 3] + M[4, 3]) + \frac{1}{278250\lambda} (-M[3, 3] + M[4, 3]) \right. \right. \\ \left. \left. \left. (139125\lambda - M[3, 3] + M[4, 3]) - \frac{(139125\lambda - M[3, 3] + M[4, 3])^2}{556500\lambda} \right\} \leq 172700 \right\}$$

In[234]:=

```
(*Calculo la solucion a ESTÁTICO*)
```

```
solEstatico = Solve[Join[EQ, EC0, et0] /. x → 0 /. λ → 1, Join[Mt, θT]][1]
```

$$\text{Out[9]} = \{M[1, 1] \rightarrow 37100., M[2, 1] \rightarrow -74200., M[2, 2] \rightarrow -74200., M[3, 2] \rightarrow 64925., \\ M[3, 3] \rightarrow 64925., M[4, 3] \rightarrow -74200., M[4, 4] \rightarrow -74200., M[5, 4] \rightarrow 37100., \\ Nx[1] \rightarrow -55650., Nx[2] \rightarrow -22260., Nx[3] \rightarrow -22260., Nx[4] \rightarrow -55650., \\ \theta[1, 1] \rightarrow -8.95102 \times 10^{-19}, \theta[2, 1] \rightarrow 0., \theta[2, 2] \rightarrow 0., \theta[3, 2] \rightarrow 0., \\ \theta[3, 3] \rightarrow 2.70986 \times 10^{-18}, \theta[4, 3] \rightarrow 0., \theta[4, 4] \rightarrow 8.33902 \times 10^{-18}, \theta[5, 4] \rightarrow 0., \theta b \rightarrow 0.\}$$

In[235]:=

```
i = 1;
While[i ≤ Length[ccFdd],
  Print[{"La barra con carga distribuida", ccFdd[[i]][1],
    "la x y el momento en ella es :"},
    xe[i] = x[ccFdd[[i]][1]] /. solEstatico /. λ → 1,
    eMx[i] = Mx[ccFdd[[i]][1]] /. solEstatico /. xe[i] /. λ → 1};
  i++];
```

```
(*Calculo la solucion de la carga critica de PLASTIFICACION*)
```

```
(La barra con carga distribuida, 2, la x y el momento en ella es :, {{x → 5.}}, {64925.})
(La barra con carga distribuida, 3, la x y el momento en ella es :, {{x → 0.}}, {64925.})
```

In[237]:=

```
solPlastific = NMaximize[Join[{λ}, EQ, sMij, rm] /. Mp → 172 700, Join[{λ}, Mt]] //  
[maximiza ap...] [junta]
```

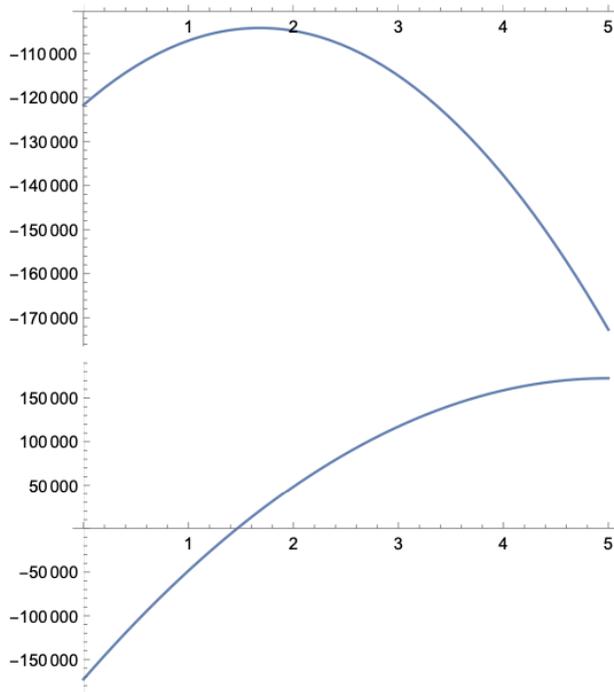
```
Quiet  
[silencioso]
```

```
Out[*]= {2.48266, {λ → 2.48266, M[1, 1] → -121 731., M[2, 1] → -172 700.,  
M[2, 2] → -172 700., M[3, 2] → 172 700., M[3, 3] → 172 700.,  
M[4, 3] → -172 700., M[4, 4] → -172 700., M[5, 4] → -121 731.,  
Nx[1] → -138 160., Nx[2] → -10 193.7, Nx[3] → -10 193.7, Nx[4] → -138 160.}}
```

(*CALCULO EL MOMENTO Y LA SECCION DONDE SE PRODUCE LA PLASTIFICACION*)

```
i = 1;  
While[i ≤ Length[ccFdd],  
[mientras] [longitud]  
Print[{"El punto de plastificación para la distribuida", ccFdd[[i]][1],  
[escribe]  
"de la barra y su momento:", xp[i] = x[ccFdd[[i]][1]] /. solPlastific[[2],  
pMx[i] = Mx[ccFdd[[i]][1]] /. solPlastific[[2]] /. xp[i]};  
i++];  
(*Hago una representacion grafica del momento de la barra distribuidad*)  
i = 1;  
While[i ≤ Length[ccFdd], Print[Plot[Mx[i] /. solPlastific[[2]], {x, 0, 5}]]; i++];  
[mientras] [longitud] [escribe] [representación gráfica]
```

```
{El punto de plastificación para la distribuida,  
2, de la barra y su momento:, {{x → 5.}}, {172 700.}}  
{El punto de plastificación para la distribuida, 3,  
de la barra y su momento:, {{x → 2.91036 × 10-11}}, {172 700.}}
```



In[238]:=

In[243]:=

(*METODO PASO A PASO*)

(*PASO 0*)

sol = Solve[**Join**[EQ, EC0, θ t0] /. P → 1, **Join**[Mt, θ T]]
[resuelve junta] [junta]

Out[]:= { {M[1, 1] → 0. + 37100. λ , M[2, 1] → 0. - 74200. λ ,
M[2, 2] → 0. - 74200. λ , M[3, 2] → 0. + 64925. λ , M[3, 3] → 0. + 64925. λ ,
M[4, 3] → 0. - 74200. λ , M[4, 4] → 0. - 74200. λ , M[5, 4] → 0. + 37100. λ ,
Nx[1] → 0. - 55650. λ , Nx[2] → 0. - 22260. λ , Nx[3] → 0. - 22260. λ ,
Nx[4] → 0. - 55650. λ , θ [1, 1] → 0., θ [2, 1] → 0., θ [2, 2] → 0., θ [3, 2] → 0.,
 θ [3, 3] → 0., θ [4, 3] → 0., θ [4, 4] → 0., θ [5, 4] → 0., θ b → 0.}}

In[251]:= (*PASO 1*)

sol = Solve[**Join**[EQ, EC0, θ t0, {M[2, 2] == -Mp}], **Join**[{ λ }, Mt, θ T]]
[resuelve junta] [junta]

Out[]:= { { λ → 2.32749, M[1, 1] → 86350., M[2, 1] → -172700., M[2, 2] → -172700.,
M[3, 2] → 151113., M[3, 3] → 151113., M[4, 3] → -172700., M[4, 4] → -172700.,
M[5, 4] → 86350., Nx[1] → -129525., Nx[2] → -51810., Nx[3] → -51810.,
Nx[4] → -129525., θ [1, 1] → 0., θ [2, 1] → 0., θ [2, 2] → 0., θ [3, 2] → 0.,
 θ [3, 3] → 0., θ [4, 3] → 0., θ [4, 4] → 0., θ [5, 4] → 0., θ b → 0.}}

In[253]:=

θ t0 = Delete[θ t0, {{3}}];
[elimina]

In[260]:= (*PASO 2*)

sol = Solve[**Join**[EQ, EC0, θ t0, {M[2, 2] == -Mp, M[4, 3] == -Mp}, {}],
[resuelve junta]
Join[{ λ }, Mt, θ T]]
[junta]

Out[]:= { { λ → 2.32749, M[1, 1] → 86350., M[2, 1] → -172700., M[2, 2] → -172700.,
M[3, 2] → 151113., M[3, 3] → 151113., M[4, 3] → -172700., M[4, 4] → -172700.,
M[5, 4] → 86350., Nx[1] → -129525., Nx[2] → -51810., Nx[3] → -51810.,
Nx[4] → -129525., θ [1, 1] → 0., θ [2, 1] → 0., θ [2, 2] → 0., θ [3, 2] → 0.,
 θ [3, 3] → 0., θ [4, 3] → 0., θ [4, 4] → 0., θ [5, 4] → 0., θ b → 0.}}

In[261]:= **θ t0 = Delete**[θ t0, {{6}}];
[elimina]

In[]:= (*PASO 3*)

sol = Solve[**Join**[EQ, EC0, θ t0, {M[2, 2] == -Mp, M[4, 3] == -Mp, M[3, 3] == Mp}],
[resuelve junta]
Join[{ λ }, Mt, θ T]]
[junta]

Out[]:= { { λ → 2.48266, M[1, 1] → 86350., M[2, 1] → -172700., M[2, 2] → -172700.,
M[3, 2] → 172700., M[3, 3] → 172700., M[4, 3] → -172700., M[4, 4] → -172700.,
M[5, 4] → 86350., Nx[1] → -138160., Nx[2] → -51810., Nx[3] → -51810.,
Nx[4] → -138160., θ [1, 1] → 0., θ [2, 1] → 0., θ [2, 2] → -0.00409879, θ [3, 2] → 0.,
 θ [3, 3] → 0., θ [4, 3] → 0., θ [4, 4] → -0.00409879, θ [5, 4] → 0., θ b → 0.}}