









UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería Mecánica

Estudio de la metodología de filtrado de datos de presión para realización del diagnóstico de la combustión en MCIA

Autor: Fraile San Martín, Julio

> Tutor(es): Dr. Melgar Bachiller, Andrés Departamento de Ingeniería Energética y Fluidomecánica

> D. Gabana Molina, Pedro Departamento de Ingeniería Energética y Fluidomecánica

> > Valladolid, Julio 2022









RESUMEN

El compromiso actual en el mundo por reducir el vertido a la atmósfera de sustancias contaminantes conlleva la limitación del uso de combustibles fósiles y el desarrollo de nuevos combustibles menos contaminantes para su uso en motores de combustión interna alternativos. En la investigación de cualquier tipo de combustible es vital estudiar los procesos termodinámicos que ocurren en el interior del cilindro y para conocer estos se debe medir los valores de presión en función del ángulo mediante captadores piezoeléctricos. Como cualquier medida, esta sufre ruido e inexactitud en lo valores obtenidos experimentalmente por lo que hay que filtrarlos. Los datos de presión del presente trabajo han sido filtrados mediante polinomios de regresión. El objetivo es establecer un método para el estudio de los datos de presión filtrados y encontrar un número de puntos de regresión y grado de regresión óptimos a la hora de crear los polinomios y que faciliten un posterior estudio.

PALABRAS CLAVE

Presión, combustión, filtrar, MCIA, ajuste polinomial.





ABSATRACT

The present worldwide commitment to reduce the emissions of polluting substances to the atmosphere involves limiting the use fossil fuels and the development of new fewer polluting fuels for use then in alternative internal combustion engines. In the investigation of any type of fuel, it is vital to study thermodynamic processes that happen inside the cylinder. The pression values must be measured in relation to an angle measured with piezoelectric sensors. Like any measurement, it suffers from noise and imprecision in the experimentally values. The pressure data of the current work have been filtered using polynomial regressions. The main objective is to establish a method for the study of filtered pressure data that involves finding an ideal number of regression points and degree of regression in order to create the polynomials that make easier a later study.

KEYWORDS

Pressure, combustion, filter, engine, polynomial fit.





ÍNDICE GENERAL.

1	INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS			9	
	1.1	Orig	gen		9
	1.2	Inst	alac	ión	12
	1.3	Ens	ayos	5	14
	1.4	Mot	tivac	ión del trabajo	14
	1.5	Her	rami	entas	16
	1.6	Obj	etivo	S	17
	1.7	Esti	ructu	ıra	18
2	REC	GRE	SIÓN		19
	2.1	Mo	delo	general de la regresión	19
	2.1	.1	Esti	mación de los parámetros por mínimos cuadrados	20
	2.1	.2	Para	ámetros estadísticos	22
	2	2.1.2	2.1	Media aritmética	22
	2	2.1.2	2.2	Máximo y mínimo	22
	2	2.1.2	2.3	Deviación típica	22
	2.2	Cre	aciór	n de los polinomios de regresión	23
3	DES	SARF	ROLL	0	27
	3.1	Des	scripo	ción del error	27
	3.2	Erro	or de	continuidad y su derivada	28
	3.3	Met	todol	ogía del trabajo	28
	3.4	Núr	nero	óptimo de ciclos	32
	3.4	.1	Gas	natural	33
	3.4	.2	Mez	zcla de gas natural e hidrógeno	35
	3.4	.3	Hid	rógeno	37
	3.4	.4	Con	clusiones	39
	3.5	Est	udio	parámetros óptimos	39
	3.5	.1	Gas	natural	40
	3	8.5.1	1	Dosado 0,7	40
	3	8.5.1	2	Dosado 1.	42
	3	8.5.1	3	Conclusiones del gas natural	45



4

5



3.5.2 Hic	Irogeno	47
3.5.2.1	Dosado 0,4	47
3.5.2.2	Conclusiones del hidrógeno	51
3.5.3 Err	ores de continuidad en función de los errores	53
3.5.3.1	Gas natural	53
3.5.3.2	Hidrógeno	55
CONCLUSIO	DNES	57
BIBLIOGRA	FÍA	59





ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.

llustración 1.1. a) Reducción de emisiones en un turismo o vehículo industrial
ligero propulsado por gas natural. b) Reducción de emisiones en un barco
propulsado por gas natural. [3]9
Ilustración 1.2. Esquema instalación. [9]12
Ilustración 1.3. Instalación del departamento13
llustración 1.4. Gráfica de los datos de presión filtrados, su derivada y los de la
derivada de presión sin filtrar15
Ilustración 1.5. Editor de texto para cambiar la configuración16
Ilustración 1.6. Editor de comandos16
Ilustración 1.7. Macro de Excel proporcionada por el tutor17
Ilustración 2.1. Distancias verticales [8]20
Ilustración 2.2. Distribución normal de la desviación
Ilustración 2.3. División de los ciclos23
Ilustración 2.4. Esquema de los puntos sobre los que se hace la regresión. 25
Ilustración 3.1. Signo del error27
Ilustración 3.2. Error de continuidad28
Ilustración 3.3. Esquema del promedio de los datos entre N ciclos29
Ilustración 3.4. Gráfica del promedio de los errores en función del ángulo30
llustración 3.5. Gráfica del promedio del error de continuidad en función del
ángulo
llustración 3.6. Gráfica del promedio del error de la derivada de continuidad en
función del ángulo31
Ilustración 3.7. Gráfica de la desviación máxima del error en el gas natural. 33
Ilustración 3.8. Gráfica del máximo menos mínimo del error en el gas natural.
Ilustración 3.9. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en el gas
Malural
nustración 3.10. Granca del promedio de la desviación en valor absoluto en el
gas llatural
Ilustración 3.11. Gráfica de la diferencia del máxima menos mínima del error
on la mozela
en la mezula
Ilustración 3.14. Gráfica del promedio de la desviación en valor absoluto en la
mezela
Ilustración 3 15. Gráfica de la desviación máxima del error en el hidrógeno. 37
Ilustración 3.16. Gráfica de la diferencia del máximo menos mínimo del error
en el hidrógeno





Ilustración 3.17. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en el
hidrogeno
Ilustración 3.18. Gráfica del promedio de la desviación en valor absoluto en el hidrógeno
Ilustración 3.19. Gráfica de la desviación máxima del error en gas natural con
dosado 0,7
Ilustración 3.20. Gráfica del máximo menos mínimo del error en gas natural
con dosado 0.7
Ilustración 3.21. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en gas natural
con dosado 0,7
Ilustración 3.22. Gráfica del máximo menos mínimo del error de continuidad en
gas natural con dosado 0,741
Ilustración 3.23. Gráfica del promedio del error de continuidad en gas natural
con dosado 0,7
Ilustración 3.24. Gráfica del máximo menos mínimo del error de la derivada de
continuidad en gas natural con dosado 0,7
Ilustración 3.25. Gráfica del promedio del error de la derivada de continuidad
en gas natural con dosado 0,742
Ilustración 3.26. Gráfica de la desviación máxima del error en gas natural con
dosado 142
Ilustración 3.27. Gráfica del máximo menos mínimo del error en gas natural con
dosado 143
Ilustración 3.28. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en gas natural
con dosado 143
Ilustración 3.29. Gráfica del máximo menos mínimo del error de continuidad en
gas natural con dosado 143
Ilustración 3.30. Gráfica del promedio del error de continuidad en gas natural
con dosado 144
Ilustración 3.31. Gráfica del máximo menos mínimo del error de la derivada de
continuidad en gas natural con dosado 144
Ilustración 3.32. Gráfica del promedio del error de la derivada de continuidad
en gas natural con dosado 144
Ilustración 3.33. Gráfica de la desviación máxima del error en hidrógeno con
dosado 0,447
Ilustración 3.34. Gráfica del máximo menos mínimo del error en hidrógeno con
dosado 0,447
Ilustración 3.35. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en hidrógeno
con dosado 0,4
Ilustración 3.36. Gráfica del máximo menos mínimo del error de continuidad en
hidrógeno con dosado 0,448
Ilustración 3.37. Gráfica del promedio del error de continuidad en hidrógeno
con dosado 0,4





Ilustración 3.38. Gráfica del máximo menos mínimo del error de la derivada de
Unitradián 2.20. Créfice del promodio del error de la derivede de continuidad
ilustración 3.39. Granca del promedio del error de la derivada de continuidad
en nidrogeno con dosado 0,4
Ilustración 3.40. Grafica de la desviación máxima del error en hidrogeno con
dosado 0,749
Ilustración 3.41. Gráfica del máximo menos mínimo del error en hidrógeno con
dosado 0,749
Ilustración 3.42. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en hidrógeno
con dosado 0,7
Ilustración 3.43. Gráfica del máximo menos mínimo del error de continuidad en
hidrógeno con dosado 0,750
Ilustración 3.44. Gráfica del promedio del error de continuidad en hidrógeno
con dosado 0,7
Ilustración 3.45. Gráfica del máximo menos mínimo del error de la derivada de
continuidad en hidrógeno con dosado 0,751
Ilustración 3.46. Gráfica del promedio del error de la derivada de continuidad
en hidrógeno con dosado 0,751
Ilustración 3.47. Gráfica del logaritmo del máximo menos de mínimo del error
de continuidad en función del máximo menos de mínimo del error en el gas
natural
Ilustración 3.48. Gráfica del logaritmo del promedio del error de continuidad en
función del promedio del error en valor absoluto en el gas natural
Ilustración 3.49. Gráfica del logaritmo del máximo menos de mínimo del error
de continuidad en función del máximo menos de mínimo del error en el
hidrógeno 55
Ilustración 3.50. Gráfica del logaritmo del promedio del error de continuidad en
función del promedio del error en valor absoluto en el hidrógeno.

ÍNDICE DE TABLAS.

Tabla 1.1. Todos los ensayos disponibles	.14
Tabla 3.1. Ensayos utilizados para evaluar el número de ciclos óptimos	.32
Tabla 3.2. Ensayos utilizados para el estudio de los parámetros óptimos	.40









NOMENCLATURA.

MCIA: Motor de Combustión Interna Alternativo.

NOx: Óxidos de Nitrógeno.

HC: Hidrocarburos no quemados.

CO2: Dióxido de Carbono.

CO: Monóxido de Carbono.

HCNG: Gas Natural Comprimido y un porcentaje de Hidrógeno.

GIR MyER: Grupo de Investigación Reconocido de Motores y Energías Renovables.

FQL: Fracción de Calor Liberado.

DFQL: Derivada de la Fracción de Calor Liberado.

E: Error de los datos filtrados.

Ec: Error de continuidad.

 E_{dC} : Error de la derivada de la continuidad.

GN: Gas Natural.

H2: Hidrógeno.







1 INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.

1.1 ORIGEN.

Es bien conocida la dirección hacia la que camina el ser humano respecto al uso óptimo de los recursos energéticos. Descubriéndose y desarrollándose nuevas fuentes de energía para intentar reducir el uso de combustibles fósiles. Todo esto ha llevado a la investigación con nuevos combustibles como pueden ser el Gas Natural y el Hidrógeno para su uso en Motores de Combustión Interna Alternativos (MCIA).

Sí, es cierto que el gas natural es un combustible de origen fósil, pero el uso de este en comparación con la gasolina y el diésel reduce las emisiones de NOx y HC, que son los responsables del smog en las ciudades, en un 85-95%. También produce un 25% menos de CO2 y CO, que son, entre otros, responsables del efecto invernadero [3]. (Ilustración 1.1)

Por lo que puede ser un elemento clave a la hora de hacer la transición energética hacia usos finales más limpios, como puede ser la sustitución de los MCIA por motores eléctricos, o incluso utilizarse como combustible en motores que por sus características no puedan sustituirse como pueden ser los motores de vehículo comerciales, barcos, aviones, etc.



llustración 1.1. a) Reducción de emisiones en un turismo o vehículo industrial ligero propulsado por gas natural. b) Reducción de emisiones en un barco propulsado por gas natural. [3]

Respecto al hidrógeno, a pesar de que es un elemento muy abundante en la naturaleza, no es fácil de obtener ya que no se encuentra de forma aislada. Para la obtención del hidrógeno hay muchas vías, algunas más contaminantes como son el hidrógeno gris cuya obtención se produce a partir del reformado de gas natural, u otras más limpias como el hidrógeno verde, cuya obtención es a partir de la electrólisis del agua, siempre que la energía eléctrica utilizada se obtenga mediante fuentes de energía que no imputen emisiones de CO2. A



pesar de esto su principal ventaja es que su combustión no produce CO2, aunque sí NOx.

Además, el hidrógeno puede ser utilizado para enriquecer el gas natural comprimido y ser utilizados como combustible (HCNG). Con esto se consigue reducir las emisiones y es una vía como otro método de transición o como combustible para autobuses y vehículos pesados [15].

Por estas razones, en el Grupo de Investigación Reconocido de Motores y Energías Renovables (GIR MyER) se lleva un tiempo investigando con la combustión de estos dos combustibles: gas natural e hidrógeno y sus mezclas.

Cuando se está estudiando cualquier combustible, lo primero de todo es entender cómo se produce la combustión dentro del cilindro. ¿Cómo de rápido se produce? ¿Cómo se produce? ¿Se quema todo el combustible? Es decir, entender los procesos termodinámicos que suceden en el interior de la cámara de combustión.

Para dar respuesta a todas estas preguntas hay que conocer una serie de parámetros como son: la fracción de calor liberado (FQL) que nos indica el porcentaje de combustible que se ha quemado en función del ángulo; la derivada de la fracción de calor liberado (DFQL) que refleja potencia térmica que está liberando en cada ángulo, es decir, la velocidad de combustión; etc. Y para conocer todas estas magnitudes es necesario, entre otras cosas, saber la presión dentro de la cámara de combustión.

Por ello, en la investigación y el análisis de cualquier motor una parte clave es el estudio de la presión en la cámara de combustión. Con esta magnitud se puede conocer la presión máxima, la presión media indicada, la temperatura, etc.

Por ejemplo, con la presión se obtiene la temperatura media en el cilindro para cada ángulo:

$$T = \frac{P_i V_i}{M_{mcc} \cdot R} \qquad \qquad \text{Ec. 1.1}$$

Con esa temperatura se calcula la variación de energía interna (ΔU):

$$\Delta U = M_{mcc} \cdot c_v \cdot (T_i - T_{i-1})$$
 Ec. 1.2





Conociendo la presión y el ángulo se puede obtener el trabajo (ΔW) que se está produciendo en el pistón:

$$\Delta W = \frac{P_i - P_{i+1}}{2} (V_i - V_{i-1})$$
 Ec. 1.3

Con la temperatura conocida calculada anteriormente se puede calcular el calor trasmitido a las paredes (ΔQ_w):

$$\Delta Q_w = A \cdot h \cdot \left(\frac{T_i - T_{i+1}}{2} - T_w\right) \frac{\Delta \alpha}{360n}$$
 Ec. 1.4

Y con todo los valores anteriores se puede obtener la fracción de calor liberado (FQL) para cada ángulo:

$$\Delta Q_{comb} = M_{mcc} \cdot H_p \cdot (FQL_i - FQL_{i-1}) = \Delta Q_w + \Delta U + \Delta W \qquad \text{Ec. 1.5}$$

Y evidentemente, una vez conocida la FQL se puede obtener la derivada de la fracción de calor liberado (DFQL):

$$DFQL = \frac{FQL_i - FQL_{i-1}}{\alpha_i - \alpha_{i-1}}$$
 Ec. 1.6

Donde:

 M_{mcc} : Masa de mezcla fresca en un ciclo.

 c_{v} : Calor específico a volumen constante.

R: Constante de los gases ideales.

 T_w : Temperatura de la culata.

A: Area de trasferencia de calor a las paredes.

h: Coeficiente de película.

 H_p : Poder calorífico de la mezcla.

 α : Ángulo del cigüeñal.

Como se puede comprobar en las anteriores ecuaciones, la señal de la presión en la cámara de combustión es una información de mucho valor. Se podría decir que es la raíz para conocer los procesos termodinámicos que ocurren en el interior del cilindro.

Conocer esta señal conlleva una cierta metodología, una instalación para experimentar y una serie de sensores. A continuación, se describirá la instalación que hay en el Laboratorio de Motores del Departamento de Ingeniería Energética de la Universidad de Valladolid.



1.2 INSTALACIÓN.

Universidad deValladolid

Como se ha comentado, se requiere de unos medios para estudiar estos combustibles. En la sala de investigación del departamento se dispone de un motor monocilíndrico MINSEL 380, de 380 centímetros cúbicos, con un pistón de 80 mm de diámetro y 75 mm de carrera. A este motor se le han realizado una serie de modificaciones para convertirlo en un motor de encendido provocado cuando anteriormente era de encendido por compresión, como son la adaptación de la culata para alojar la bujía y el captador piezoeléctrico, y la modificación de la geometría del pistón.

La instalación se puede observar esquematizada en la siguiente llustración 1.2:



Ilustración 1.2. Esquema instalación. [9]

Ya se ha comentado que lo importante eran los datos de presión, estos se obtienen mediante un transductor piezoeléctrico cuyo funcionamiento se basa en el fenómeno de la piezoelectricidad. Esta consiste en la creación de una diferencia de potencial y cargas eléctricas cuando ciertos materiales cristalinos como el cuarzo (SO2) u otros materiales sintéticos están sometido a cargas externas. El usado en esta instalación es el captador de presión piezoeléctrico AVL GU21D, junto con un amplificador de carga KISTLER 5018A.

Un problema cuando se quiere procesar la señal de la presión en la cámara de combustión es que se quiere conocer el ángulo exacto del cigüeñal para cada muestra de presión. Para determinar el ángulo se utiliza un codificador angular AVL 360C / 600 con 0.6 grados de resolución y para indicar un paso por ciclo se usa la leva de accionamiento de la bomba de inyección junto con un sensor de efecto hall. Este codificador angular está unido al cigüeñal. Los datos de



presión se adquieren sincronizados en un osciloscopio digital de 16 bit de resolución YOKOGAWA DL750.

De esta forma se obtiene un dato de presión cada 0,6 grados junto con el ángulo de cigüeñal que le corresponda. Por tanto, si un ciclo dura 720 grados, se obtienen 1200 datos de presión con su correspondiente ángulo por cada ciclo de combustión del motor. Estos datos son con los que posteriormente se trabajará.

Aunque lo que atañe a este TFG son los datos de presión en cámara de combustión en función del ángulo del cigüeñal, por eso estas magnitudes se han explicado de forma más exhaustiva, también se va a explicar brevemente el resto de la instalación.



Ilustración 1.3. Instalación del departamento.

En la anterior llustración 1.3, se puede ver la instalación completa montada en el laboratorio de Ingeniería Energética de la Universidad de Valladolid.

El motor está unido a un motor eléctrico asíncrono que junto con un variador de frecuencia establece el régimen de giro del motor. Con un conjunto de resistencias, la energía eléctrica generada se disipa al aire en forma de calor.

Para la formación de la mezcla se utilizan una serie de controladores másicos, uno para cada corriente de posible entrada a la admisión: hidrógeno, aire y gas natural. Con ellos se puede modificar la composición de la mezcla o el dosado requerido y ajustar la mezcla al grado de carga que se quiera tener en el motor.

Hay un microprocesador que utilizando la señal del codificador angular ajusta el momento de inicio del encendido, que también es posible modificar.



1.3 ENSAYOS.

Universidad deValladolid

Con esta instalación se han llevado a cabo diferentes ensayos con diferentes combinaciones de régimen de giro y dosado o porcentaje de hidrógeno en el caso de la mezcla de gas natural más hidrógeno.

En la siguiente Tabla 1.1 se detallan todas las combinaciones de ensayos que se han hecho. Posteriormente para los cálculos en este TFG solo se utilizarán algunos ensayos.

Combustible	Régimen (rpm)	Dosado o porcentaje
Gas Natural		0,7 0,8 0,9 1
Gas natural + Hidrógeno	1000	0% 25% 50% 75% 100%
Hidrógeno	2500	0,3 0,35 0,4 0,45 0,5 0,567 0,6 0,65 0,7

Tabla 1.1. Todos los ensayos disponibles.

1.4 MOTIVACIÓN DEL TRABAJO.

La captación de la señal mediante transductores piezoeléctricos conlleva diferentes fuentes de error que influyen en la medida. Estos gérmenes de error pueden ser la mala calibración del conjunto de medición, el choque térmico debido a las altas temperaturas que se alcanzan, la vibración del motor, el ruido que pueden producir los componentes eléctricos y electromagnético, etc. [7].

Los diferentes fabricantes han ido mejorando y solucionando parte de estos problemas con las nuevas generaciones de transductores. Pero no es posible erradicarlos completamente y obtener unos valores de presión totalmente precisos.



Siempre existirá un cierto grado de error que sobre todo influirá en la derivada de la fracción de calor liberado (DFQL) por lo que el objetivo es filtrar los datos de presión obtenidos para obtener unos datos los más parecidos a los que teóricamente deberían salir. En la Ilustración 1.4 se puede observar los perjuicios que tiene el usar los datos de presión experimental cuando se realiza su derivada, y esto influirá en la DFQL.



Ilustración 1.4. Gráfica de los datos de presión filtrados, su derivada y los de la derivada de presión sin filtrar.

En el GIR, la forma de filtrar estos datos es mediante la creación de polinomios de regresión cuyo método se explicará posteriormente.

Para crear dichos polinomio hay que concretar un número de puntos sobre los que realizar la regresión y un grado del polinomio. Esto es en lo que radica este TFG, encontrar los mejores valores para cada tipo de ensayo, que faciliten el posterior estudio de la combustión en la cámara.

El ajuste polinomial también cumple otra función muy importante dentro del diagnóstico del proceso de combustión, ya que convierte una señal muestreada de forma discreta en una señal continua de la que posteriormente se puede extraer más información. El proceso de combustión queda registrado en un número de datos de presión que posteriormente puede ser ampliado gracias al ajuste polinomial pudiendo así, llevar a cabo cálculos más precisos.



1.5 HERRAMIENTAS.

Para la obtención de los datos de presión filtrados mediante los polinomios, se ha utilizado un programa realizado en C++. El tutor de este TFG ha proporcionado al alumno la herramienta ya construida en el lenguaje de C++. La tarea de alumno ha sido crear los polinomios ajustando el número de puntos de regresión y el orden del polinomio mediante un editor de texto que modifica la configuración del programa. Esta se puede ver en la siguiente llustración 1.4.

Posteriormente la ejecución del programa se realiza con el editor de comandos de Windows, hay que dirigirse al directorio (Ilustración 1.5) donde se encuentra la carpeta y recorrer todos los ensayos para crear los datos filtrados a partir de los datos de presión experimentales.

	C:\Users\julio\Documents\TFG\Prueba\Config\cfg_dgPr2z_Calc.txt - Notepad++					
	Archivo) Editar Buscar Vista Codificación Lenguaje Configuración Herramientas Macro Eje				
	2 🚽	🗄 🛍 🗟 🕼 🚔 🕹 🛍 🚺 Ə 🗲 🏙 🍖 🍕 🔍 🖾 🖼 🎫 1 🎼 🖉 💹				
l	📑 chan	ge.log 🛛 📙 variables_ambiente.bat 🖾 🔚 DgPr2z_V9_alggen.exe 🔀 📑 recorre_GN_Y_GNH2_1000.bat				
Γ	1	Npts_Cal=1500				
I	2	Ang_Ini=-120				
L	3	Ang_Fin=120				
L	4	Npts_Reg=4				
L	5	Orden=5				
L	6	KAcul=1.				
L	7	KApis=1.4				
L	8	AcilPMS=0.				
L	9	Aef=0.				
L	10	Kwos=1.				
L	11	EneIgn=0.025				
L	12	Pendiente=0.0001				
L	13	RfMin=0.011				
1	14	Selec=0.001				
I	15	FICH_PISTON=C:\Publico\DiagPred\GNH2Frn5_d\Config\Piston2.txt				
I	16					

Ilustración 1.5. Editor de texto para cambiar la configuración.



Ilustración 1.6. Editor de comandos.

La herramienta sobre la que se apoyará el TFG para realizar todos los estudios será Microsoft Excel. Se utilizará una macro proporcionada por el tutor de este proyecto capaz de leer los datos de presión obtenidos anteriormente mediante





la ejecución del programa con el editor de comandos, que los muestra en las distintas hojas una vez seleccionado el ensayo que se quiere estudiar. Con este archivo de Excel se calcularán los distintos parámetros estadísticos (posteriormente se explicarán). (Ilustración 1.7).



Ilustración 1.7. Macro de Excel proporcionada por el tutor.

1.6 OBJETIVOS.

El presente trabajo consiste en realizar un estudio para encontrar los parámetro que mejor resultados den a la hora de filtrar los datos experimentales de presión. Para ello se apoyará en el uso de una serie de herramientas y se llegará a unas conclusiones mediante el uso de parámetros estadísticos. Los objetivos de este trabajo final de grado desde los más generales a los más concretos son:

- Adquirir conocimientos sobre la toma de datos de presión dentro de la cámara de combustión por la importancia que estos tienen.
- Conocer los modelos de regresión y la creación de estos para su posterior uso.
- Determinar que parámetros estadísticos son de mayor importancia y como implementarlos a los datos experimentales.
- Establecer un número de ciclos mínimos suficientes para obtener datos fiables en los posteriores estudios.
- Obtener un número de puntos de regresión y un orden de polinomio óptimos para el procesado de los datos de presión y sus posteriores usos.



1.7 ESTRUCTURA.

Universidad deValladolid

La memoria consta de los siguientes capítulos:

- Introducción: Se describen las motivaciones y objetivos del presente proyecto.
- **Regresión:** En este capítulo se resumen los modelos de regresión de forma general y luego se profundiza en la creación propia de estos.
- **Desarrollo:** Estudio con el que se pretenden encontrar los parámetros óptimos y se muestran la gráficas resultantes.
- **Conclusiones:** Se resume brevemente el proyecto además de unas conclusiones del estudio y se plantea una posterior línea de trabajo.
- **Bibliografía:** Recopilación de todas aquellas fuentes sobre las que se apoya el presente trabajo final de grado.





2 REGRESIÓN.

2.1 MODELO GENERAL DE LA REGRESIÓN.

Como se ha comentado, la forma de filtrar estos datos de presión es mediante polinomios obtenidos mediante regresión. Primeramente, se va a definir en qué consiste un polinomio de regresión.

Se va a explicar cómo desarrollar un modelo que represente la dependencia de una variable respuesta (y) respecto a otra variable (x) u otras.

Estos modelos fueron utilizados inicialmente en los campos de la astronomía y física por Gauss y Laplace. Pero recibe su nombre de *modelos de regresión,* por los trabajos de Dalton en biología en el siglo XIX, donde Dalton estudió la relación entre la altura de los hijos con la altura sus padres y lo denominó una *regresión a la media.* [8].

A raíz de eso, los modelos estadísticos que busquen explicar la dependencia que existe entre una variable dependiente (y) respecto a otra u otras variables explicativas (x), se llaman modelos de regresión. En este caso, los datos de la variable dependiente son los datos de presión, que se obtienen en función de los datos del ángulo que son los de la variable explicativa.

Se busca encontrar el polinomio de grado (k < m-1) que mejor se adapte a una serie de datos (*m*). Por eso se está ante un caso particular de regresión múltiple: regresión polinómica.

Mientras que una regresión múltiple tiene esta fórmula:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_k \cdot x_k + u$$
 Ec. 2.1

Una regresión polinómica simplemente consiste en asignar:

$$x_1 = x$$
; $x_2 = x^2$, $x_3 = x^3$; ...; $x_k = x^k$ Ec. 2.2

Se considera que los valores de la variable dependiente (y) han sido generados por una combinación de los valores de una o más variables explicativas y un término aleatorio (u). Los coeficientes del polinomio se obtienen de forma que el cuadrado entre la resta del valor observado y el pronosticado sea mínima.



2.1.1 Estimación de los parámetros por mínimos cuadrados.

Evidentemente, para encontrar el polinomio que mejor se adapte a los datos hay que calcular los coeficientes del dicho polinomio. Para calcularlos, se recurre a los residuos del modelo. Estos residuos son la diferencia entre el dato obtenido experimentalmente y el dato que se estime. [16]

Residuo (e) = Valor observado (y) – Valor estimado (\hat{y})

El proceso consiste en minimizar el cuadrado de estos residuos. A esto se lo conoce como método de mínimos cuadrados. Dicho método busca la función que minimice las distancias verticales entre la función estimada y los puntos experimentales como se ve en la siguiente ilustración (2.1).



Ilustración 2.1. Distancias verticales [8].

$$Min(E)$$
; $E = \sum_{i=1}^{m} (e_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \widehat{y}_i)^2$ Ec. 2.3

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 \cdot x_i + b_2 \cdot x_i^2 + \dots + b_k \cdot x_i^k$$
 de grado k

Con unos datos: { $(x_i, y_i) | i = 1, 2, ..., m$ }. Es necesario que:

$$\frac{\partial E}{\partial b_j} = 0$$
 para cada j=0,1, ... ,k. Ec. 2.5





El sistema de ecuaciones que queda definido con k+1 ecuaciones e incógnitas es el siguiente:

$$\sum_{\substack{i=1\\m}}^{m} y_i \cdot x_i^0 = b_0 \cdot \sum_{\substack{i=1\\m}}^{m} x_i^0 + b_1 \cdot \sum_{\substack{i=1\\m}}^{m} x_i^1 + \dots + b_k \cdot \sum_{\substack{i=1\\m}}^{m} x_i^k \qquad \text{Ec. 2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot x_i^1 = b_0 \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \dots + b_k \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^{k+1} \qquad \text{Ec. 2.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot x_i^k = b_0 \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^k + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^{k+1} + \dots + b_k \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^{2k}$$
 Ec. 2.8

Ahora puesto de forma matricial, eliminando el subíndice *i* e igualando $x_i^0 = 0$ para simplificar:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1^1 & \cdots & x_m^1 \\ \vdots \\ x_1^k & \cdots & x_m^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1^1 & \cdots & x_m^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^k & \cdots & x_m^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & \cdots & x_1^k \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_m^1 & \cdots & x_m^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \cdots \\ b_k \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 2.9}$$

Llamando X a la matriz de datos de las variables explicativas, Y al vector de observaciones y B al de parámetros, el sistema de puede escribir:

$$X'Y = X'XB$$
 Ec. 2.10

$$B = (X'X)^{-1} X'Y$$
 Ec. 2.11

Esta es la ecuación final para la estimación de los parámetros de la regresión. Además:

$$X'Y - X'X B = 0$$
 Ec. 2.12

$$X'(Y - X B) = 0$$
 Ec. 2.13

$$X' U = 0$$
 Ec. 2.14



Esto quiere decir que los residuos obtenidos no van a estar correlacionados con las variables explicativas. [11].

Como el número de datos disponibles es mayor que k+1 y ninguna de la variables explicativas es una combinación lineal de las demás, no existe el problema de que X'X sea singular y su determinante sea cero.

2.1.2 Parámetros estadísticos.

Posteriormente se utilizarán una serie de parámetros estadísticos para evaluar cómo de buena resultan las regresiones para eliminar el ruido en lo datos de presión. A continuación, se definirán los parámetros estadísticos que se utilizarán, estos son ampliamente conocidos.

2.1.2.1 Media aritmética.

También llamada promedio. Se obtiene al dividir la suma del valor de los datos entre el número de datos. Es una medida de tendencia central.

$$\overline{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i$$
 Ec. 2.15

2.1.2.2 Máximo y mínimo.

Estos valores son bastante básicos y no necesitan explicación. Simplemente son los valores mayores o menores de un conjunto de datos.

2.1.2.3 Deviación típica.

Tras filtrar los datos de presión mediante el método de regresión, será interesante comprobar la variabilidad de dichos datos entre los diferentes ciclos.

Para eso, se va a definir que es la desviación típica. Es una medida de dispersión de una cantidad de datos con respecto a su media. La desviación es la separación que existe entre un dato cualquiera y la media de ellos. La desviación típica o estándar se calcula como la raíz cuadrada del cuadrado de dichas desviaciones entre el número de datos.

$$\sigma = S = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{N}}$$
 Ec. 2.16



La desviación estándar, según el teorema central del límite seguirá una distribución normal en forma de campana. Por tanto, el 68,27% de las observaciones tendrán un valor a menos de una desviación estándar de la media, un 95,45% a dos desviaciones y un 99,73 a tres. (Ilustración 2.2)



2.2 CREACIÓN DE LOS POLINOMIOS DE REGRESIÓN.

Tal y como se ha explicado en la introducción se obtienen los datos experimentales de presión en función del ángulo. Se desechan un número de datos N_{malos} , que se corresponden con el primer ciclo que no está completo.

Evidentemente en un motor los ciclos ocurren me forma sucesiva, no se puede medir un ciclo únicamente. Por tanto, lo primero que se debe realizar es dividir los datos experimentales por ciclos. (Ilustración 2.3)



Ilustración 2.3. División de los ciclos.



Tras este paso inicial ya se obtienen los puntos sobre los que se va a realizar los diferentes polinomios de regresión para intentar filtrar los errores que haya de medición.

¿Cómo se van a construir los polinomios regresores?

Se realiza el polinomio entre dos puntos sucesivos que se denominan *Inicial* y *Final,* teniendo en cuenta puntos anteriores y puntos posteriores, así hasta recorrer todos los puntos del ciclo. Es decir, tras elegir *N°_puntos_Regresión* tanto por delante como por detrás, se realiza el polinomio de regresión entre esos *N°_puntos_Regresión* x 2. Aunque realmente solo se quiere el trozo de polinomio entre el punto *Inicial* y *Final.*

El grado del polinomio y el número de puntos sobre los que se realizará la regresión, son unas variables que se tendrán que ajustar y encontrar las que mejor resultado den. Esa es la raíz del trabajo.

Los datos de presión están en pascales mientras que entre los ángulos hay una diferencia de 0,6° entre cada dato sucesivo. La escala de ángulo y presión es muy diferente. Si se obtuviera el polinomio de regresión con los datos tal cual, los parámetros obtenidos serían de una magnitud muy grande que produciría errores debido a los redondeos y sería muy complicado trabajar con semejantes valores. Por tanto, hay que normalizar los datos para obtener unos parámetros de regresión coherentes.

El método para la normalización de los datos es el siguiente:

- 1. Lo primero de todo, se busca el (X_{min}, Y_{min}) . y el (X_{max}, Y_{max}) . entre los datos sobre los que se realizará la regresión. También se guardan los puntos inicial $(X_{inicial})$ y final (X_{final}) entre los que el polinomio tendrá validez.
- 2. Se establece el rango de valores entre los datos de *X* e *Y*.

$$X_0 = X_{min}$$
 $X_{range} = (X_{max} - X_{min})/2$ Ec. 2.17

$$Y_0 = Y_{min}$$
 $Y_{range} = (Y_{max} - Y_{min})/2$ Ec. 2.18

3. Se realiza el cambio de variable.

$$X = X_0 + X_{range} \cdot (X'+1) \implies X' = \frac{X-X_0}{X_{range}} - 1$$
 Ec. 2.19

$$Y = Y_0 + Y_{range} \cdot (Y' + 1) \implies Y' = \frac{Y - Y_0}{Y_{range}} - 1$$
 Ec. 2.20





Por tanto:

$$X \in (X_{min}, X_{max})$$
 $X' \in (-1, 1)$ Ec. 2.21
 $Y \in (Y_{min}, Y_{max})$ $Y' \in (-1, 1)$ Ec. 2.22

En la siguiente llustración 2.4 quizá se entienda mejor lo de las X_{min} , X_{max} , etc.



Ilustración 2.4. Esquema de los puntos sobre los que se hace la regresión.

Tras obtener los datos cambiados de variable, en forma de $X' \in Y'$, se calcula el polinomio de regresión por el método expuesto en el capítulo anterior.

Se quiere conseguir los datos de presión filtrados de alguna manera, por lo que el polinomio en sí mismo no interesa. Hay que deshacer el camino.

Sustituyendo los datos X' en el polinomio, se obtienen los datos Y'_{NUEVOS} e introduciendo estos datos en la ecuación del cambio de variable se extrae:

$$Datos_presión_{filtrados} = Y_{NUEVOS} = Y_0 + Y_{range} \cdot (Y'_{NUEVOS} + 1)$$
 Ec. 2.23

Tan solo se guardan los datos de presión que corresponden con los puntos *Inicial y Final.* Cada punto experimental participa en la creación de varios polinomios dependiendo del número de puntos de regresión que se configure.



Como se calcula un polinomio entre dos puntos, en un punto experimental será posible calcular dos puntos mediante los polinomios, uno con el polinomio del intervalo anterior al punto experimental y otro con el polinomio del intervalo posterior al del punto experimental. Los resultados que se obtienen con los polinomios anteriores y posteriores son similares.

Tras la obtención de los datos de presión filtrados hay que evaluar la idoneidad del grado del polinomio y del número de puntos de regresión con los que se ha construido el polinomio. Este es el principal objetivo del TFG.



3 DESARROLLO.

Para la creación del polinomio de regresión que disminuya el ruido de los datos de presión y que mejor se ajuste a los datos existentes hay que elegir un número de puntos de regresión y un grado óptimos.

Evidentemente hay que determinar qué parámetros son los idóneos para cada ensayo o por lo menos para cada tipo de combustible. Para ello se van a explicar unos valores que se han tenido en cuenta a la hora de realizar el trabajo:

3.1 DESCRIPCIÓN DEL ERROR.

Una vez se tienen todos los datos de presión nuevos hay que comprobar su idoneidad y su bondad como filtrado de los originales.

Hay que buscar una forma o un parámetro sobre el que realizar el estudio posterior. Una vez se han obtenido los datos de presión filtrados hay que evaluar estos resultados. Para ello se recurre al *error*. Al igual que ocurría con los datos de presión, estos errores estarán en función del ángulo.

$$E(Error) = Dato_{Experimental} - Dato_{Polinomio}$$
 Ec. 3.1

Un menor error indica que los polinomios se ajustan mejor a los datos experimentales, pero también supone que el filtrado es menor.

Si el dato experimental es menor que el obtenido tras el filtrado el error será negativo y si es lo contrario, el error será positivo. (Ilustración 3.1)



Ilustración 3.1. Signo del error.

Estos errores se mostrarán en las tablas de Excel mediante la macro mencionada.



3.2 ERROR DE CONTINUIDAD Y SU DERIVADA.

El error de continuidad consiste en la diferencia que existe entre el dato de presión filtrada obtenido mediante un polinomio y el dato del polinomio siguiente.

 $E_{c} = Dato_Polinomial_{anterior}(x_0) - Dato_Polinomial_{posterior}(x_0)$ Ec. 3.2

Son las discontinuidades entre los diferentes polinomios. Se podría decir que son los "escalones" que existen entre los polinomios. (Ilustración 3.2)



Ilustración 3.2. Error de continuidad

El segundo es el *error de la derivada de continuidad*. La definición es la misma, pero en este caso entre la derivada de los polinomios.

$$E_{dC} = \frac{dD_{ant}}{dx}|_{x0} - \frac{dD_{post}}{dx}|_{x0} \qquad \qquad \text{Ec. 3.3}$$

Y el motivo de querer estudiar la continuidad es debido a que un error elevado en la continuidad, y en la derivada de esta, es decir, una mayor discontinuidad indica que el filtrado no es lo suficiente efectivo y los valores son muy cercanos a los experimentales.

3.3 METODOLOGÍA DEL TRABAJO.

Para evaluar la idoneidad de los parámetros elegidos a la hora de crear los polinomios y buscar un número suficiente de ciclos, el trabajo se ha apoyado en la evaluación de una serie de parámetros estadísticos obtenidos del error, del error de continuidad y del error de la derivada de continuidad.

Los datos experimentales de presión para cada ángulo son diferentes en cada ciclo y consecuentemente los errores también. Por lo que habrá que promediar



los datos que se corresponden para cada ángulo entre un número N de ciclos para evitar que los datos que buscamos dependan de la aleatoriedad que puede tener un ciclo de otro. En la Ilustración 3.3 se puede ver a modo de esquema como se realiza este promedio del error de los ciclos en cada ángulo. El motivo de promediar un número de ciclos se explicará en el siguiente apartado.

		Error Polinomio			Promedio	
Ángulo	Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3		Ciclo N	error entre ciclos
-360						
-359.4						
-358.8						
•						
•						
•						
358.8						
359.4						
360						

Ilustración 3.3. Esquema del promedio de los datos entre N ciclos.

Una vez se tienen los errores, errores de continuidad y de su derivada promediados en función del ángulo, se han buscado los parámetros que mejor representarán las tendencias de los ensayos en función del número de ciclos elegidos o en función de los parámetros de los polinomios elegidos, estos son:

1) Desviación máxima del error.

$$Max(\sigma) = Max(\sigma_i(E)) \qquad i \in (-360^\circ, 360^\circ) \qquad \text{Ec. 3.4}$$

2) Promedio de la desviación en valor absoluto.

Promedio
$$(\sigma) = \bar{\sigma} = \frac{1}{1200} \sum_{i=1}^{1200} \sigma_i(E)$$
 i ϵ (-360°, 360°) Ec. 3.5

3) Diferencia del error máximo menos el mínimo.

$$Diferencia = Max(E_i) - Min(E_i) \qquad i \in (-360^\circ, 360^\circ) \qquad \text{Ec. 3.6}$$

<u>Nota:</u> Los promedios se realizan sobre 1200 puntos porque como se ha indicado anteriormente, si un ciclo dura 720° y se toman los valores cada 0.6° grados, se tienen 1200 datos.





4) Promedio del error en valor absoluto.

Promedio(E) =
$$\overline{E} = \frac{1}{1200} \sum_{i=1}^{1200} |E_i|$$
 $i \in (-360^\circ, 360^\circ)$ Ec. 3.7

5) Diferencia del error de continuidad máximo menos mínimo.

$$Diferencia = Max(Ec_i) - Min(Ec_i) \qquad i \in (-360^\circ, 360^\circ) \qquad Ec. 3.8$$

6) Promedio del error de continuidad en valor absoluto.

Promedio(*Ec*) =
$$\overline{Ec} = \frac{1}{1200} \sum_{i=1}^{1200} |Ec_i|$$
 i ϵ (-360°, 360°) *Ec.* 3.9

7) Diferencia del error de la derivada de continuidad máximo menos mínimo.

$$Diferencia = Max(E_{dC i}) - Min(E_{dC i}) \qquad i \in (-360^{\circ}, 360^{\circ}) \qquad \text{Ec. 3.10}$$

8) Promedio del error de la derivada de continuidad en valor absoluto.

Promedio
$$(E_{dC}) = \overline{E_{dC}} = \frac{1}{1200} \sum_{i=1}^{1200} |E_{dC\,i}| \qquad i \in (-360^\circ, 360^\circ) \qquad \text{Ec. 3.11}$$

En las siguientes llustraciones 3.4, 3.5 y 3.6 se puede observar estos parámetros estadísticos explicados.



Ilustración 3.4. Gráfica del promedio de los errores en función del ángulo





Respecto a la anterior Ilustración 3.4, en la leyenda se puede ver claro que es cada gráfico. La línea azul con puntos amarillos son los errores (ya promediados por los ciclos elegidos) en función del ángulo. Con línea morada y cruces del mismo color está la desviación del error que se obtiene para cada ángulo. Representado con color azul claro, se muestra la envolvente de $+2\sigma y - 2\sigma$ donde se encuentran en 95,45% de los valores.



Ilustración 3.5. Gráfica del promedio del error de continuidad en función del ángulo.

En la llustración 3.5 lo mismo que se ha explicado respecto a la llustración 3.4 pero esta vez referido al error de continuidad. Y lo mismo ocurre en la llustración 3.6 pero respecto al error de la derivada de continuidad.



Ilustración 3.6. Gráfica del promedio del error de la derivada de continuidad en función del ángulo.





3.4 NÚMERO ÓPTIMO DE CICLOS.

El proceso de combustión dentro del cilindro de un motor tiene una enorme dependencia de la turbulencia. Además, la turbulencia es un proceso con un carácter aleatorio. Por lo que la velocidad de combustión y el inicio concreto de esta es diferente de un ciclo a otro. A esto se le llama dispersión cíclica.

Hay que establecer un número de ciclos sobre los que realizar el estudio. Ya que un número elegido al azar puede no ser una muestra correcta del verdadero funcionamiento del motor. El número óptimo de ciclos pueden depender del tipo de ensayo o incluso del parámetro estadístico que se esté midiendo. Por eso se han promediado los errores en función de los ciclos elegidos para cada ángulo como se ha comentado en el apartado 3.3.

Los parámetros estadísticos utilizados para conocer el número óptimo de ciclos son:

- Desviación máxima del error.
- Diferencia del error máximo menos el mínimo.
- Promedio del error en valor absoluto.
- Promedio de la desviación en valor absoluto.

Estos estadísticos se obtienen de los N ciclos promediados.

Para encontrar el número óptimo de ciclos solo se han evaluado una serie de ensayos de todos los disponibles. Se han estudiado los que representan dosados y regímenes de giro opuestos (Tabla 3.1). Las combinaciones son las siguientes:

Combustible	Régimen	Dosado
Combustible	Regimen	Dosado
Coo poturol	1000 rpm	0,7
Gas natural	2500 rpm	1
Gas natural	1000 rpm	25%
+ hidrógeno	2500 rpm	75%
		0,3
Hidrógeno	1000 rpm 2500 rpm	0,5
		0,7

Tabla 3.1. Ensayos utilizados para evaluar el número de ciclos óptimos.





3.4.1 Gas natural.







Diferencia máximo-mínimo del error







Ilustración 3.9. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en el gas natural.



Universidad de Valladolid



Ilustración 3.10. Gráfica del promedio de la desviación en valor absoluto en el gas natural.

Observando las diferentes gráficas anteriores es complicado sacar conclusiones concretas respecto al gas natural.

Para los ensayos de 2500 *rpm* producen mayores valores en todos los parámetros estadísticos, lo que significa que a mayor régimen mayores errores se producen.

El ensayo de 2500 rpm y dosado 1 (color morado) no se aprecia que siga un clara tendencia observando las dos primeras llustraciones 3.7 y 3.8, en la llustración 3.8 se ve como primero decrece para luego aumentar y posteriormente volver a disminuir la *diferencia del máximo menos mínimo*. En esa misma ilustración, el ensayo de 2500 rpm y dosado 0,7 (color verde) tampoco tiene una tendencia. Se puede afirmar que para ensayos de 2500 rpm no existe un número de ciclos a partir de los que la *desviación máxima* y la *diferencia del máximo menos mínimo* se estabilicen o presenten una tendencia.

Sobre esas dos primeras llustraciones 3.7 y 3.8, en los otros ensayos, a partir de los 50-100 ciclos se puede declarar cierta estabilidad además de que muestran mayor uniformidad en sus valores.

De la gráfica del promedio del error en valor absoluto (Ilustración 3.9) se puede comentar que todos los ensayos decrecen en valor cuando se aumentan los ciclos, pero se puede ver que los valores decrecen bastante al inicio, pero a partir de los 100 ciclos el valor decrece levemente.

Respecto a la *gráfica del promedio de la desviación* (Ilustración 3.10). Al contrario que los anteriores parámetros estadísticos, esta aumenta con el mayor número de ciclos. Pero estos valores aumentan muy ligeramente. Además de que hay una cierta estabilidad y los valores son prácticamente constantes a partir de los 50-100 ciclos otra vez.



3.4.2 Mezcla de gas natural e hidrógeno.

Nota: El porcentaje que se muestra en las leyendas es el tanto por ciento de hidrógeno que hay en la mezcla.



Ilustración 3.11. Gráfica de la desviación máxima del error en la mezcla.



Ilustración 3.12. Gráfica de la diferencia del máximo menos mínimo del error en la mezcla.



Ilustración 3.13. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en la mezcla.







Ilustración 3.14. Gráfica del promedio de la desviación en valor absoluto en la mezcla.

En las gráficas de los ensayos de la mezcla de gas natural más hidrógeno es más fácil observar una tendencia.

Se sigue observando los mismo que en los ensayos de gas natural. Cuanto mayor es el régimen de giro del motor mayor son los errores.

En las dos primeras llustraciones 3.11 y 3.12 que son las gráficas de máxima desviación y la diferencia entre el valor máximo menos el mínimo, los valores de los ensayos decrecen de forma más apreciable hasta los 50-100 ciclos. A partir de ahí, los valores o decrecen menos o permanecen casi constantes. Esto se ve en la llustración 3.12, el ensayo de *1000 rpm y 25%* (color azul) decrece hasta los 50 ciclos luego es una línea recta. O en esa misma gráfica también, el ensayo de *2500 rpm y 75%*, que decrece y un luego prácticamente es constante.

Sobre la Ilustración 3.13 de la *gráfica de promedio del error en valor absoluto,* las conclusiones son las mismas que para el gas natural. A partir de los 100 ciclos los valores decrecen levemente.

Respecto a la Ilustración 3.14 de la gráfica del promedio de la desviación, exactamente lo mismo que para el gas natural, los valores son prácticamente constantes.



3.4.3 Hidrógeno.











Ilustración 3.17. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en el hidrógeno.





Ilustración 3.18. Gráfica del promedio de la desviación en valor absoluto en el hidrógeno.

En el hidrógeno, se ve un cambio con respecto al gas natural y a la mezcla de ambos, en los errores y los valores de los parámetros relacionados con ellos. Estos son mayores para un dosado de 0,7 aunque su régimen sea de 1000 *rpm*. Es decir, influye más el dosado que el régimen de giro. Y esto se ve en las llustraciones 3.15 y 3.16 de *desviación máxima* y del *promedio del error en valor absoluto* respectivamente, con los ensayos de 1000 *rpm* y dosado 0,7 (color verde), y el de 2500 y dosado 0,7 (color naranja); estos dos ensayos siempre dan los valores más grandes.

Primero de todo, hay que comentar que la combustión del hidrógeno es mucho más rápida que la del gas natural (para el mismo dosado). El hidrógeno con dosado de 0,3 y 0,5 tiene una combustión similar en cuanto a velocidad a la del gas natural con dosados de 0,7 y 1. Esto explica en parte lo comentado anteriormente y por qué influye más el dosado que el régimen en el hidrógeno ya que su combustión es mucho más violenta cuanto mayor es el dosado.

En el hidrógeno, los valores de casi todos los ensayos en las gráficas son prácticamente constantes como se observa en las Ilustraciones 3.15, 3.16 y 3.18. Solo algunos ensayos sufren un cierto decremento o cierta inestabilidad, pero, a partir de los 50-100 ciclos se vuelve a observar cierta constancia o mayor estabilidad, como puede ser el de 1000 rpm y dosado 0,7 (color verde) en la gráfica de desviación máxima (Ilustración 3.15).

Solamente la gráfica de promedio del error en valor absoluto (Ilustración 3.17) tienen una tendencia clara a disminuir sus valores con el aumento del número de ciclos. A partir de los 100 ciclos los valores de los ensayos decrecen levemente como ocurre exactamente en las gráficas de gas natural y de mezcla (Ilustraciones 3.9 y 3.13).



3.4.4 Conclusiones.

No se puede observar que haya un número de ciclos concreto sobre los que los distintos parámetros estadísticos permanezcan constantes en todos y cada uno de los ensayos. Pero sí que se puede concluir que a partir de los 50-100 ensayos, estos valores o decrecen muy levemente o en algunos casos sí que son prácticamente constantes como ya se ha comentado anteriormente en las gráficas.

En el único parámetro estadístico en el que no ocurre esto es en el de *promedio del error en valor absoluto* (Ilustraciones 3.9, 3.13 y 3.17) pero si se puede decir que sus valores decrecen bastante menos a partir de los 100 ciclos y estos valores son de un orden muy pequeño.

Además, hay que tener en cuenta que cuantos más ciclos, mayor es el esfuerzo computacional.

Tras todo esto, se establece que el número de ciclos con los que se van a calcular los parámetros estadísticos y se van a buscar en número de puntos de regresión y el grado del polinomio óptimos es **100 ciclos.**

3.5 ESTUDIO PARÁMETROS ÓPTIMOS.

Una vez ya se conoce el número de ciclos, se van a mencionar los parámetros estadísticos que se van a utilizar para el estudio. Estos parámetros se mostrarán en gráficas en función del número de puntos de regresión y el grado del polinomio utilizados para obtener los datos de presión filtrados. Algunos son los mismos que se han utilizado para evaluar el número óptimo de ciclos.

Estos son los parámetros estadísticos usados:

- Desviación máxima del error.
- Diferencia del error máximo menos el mínimo.
- Promedio del error en valor absoluto.
- Diferencia del error de continuidad máximo menos mínimo.
- Promedio del error de continuidad en valor absoluto.
- Diferencia del error de la derivada de continuidad máximo menos mínimo.
- Promedio del error de la derivada de continuidad en valor absoluto.

Como ocurría con el número óptimo de ciclos. Para realizar el estudio se utilizarán un serie de ensayos que se ven en la Tabla 3.2:





Combustible	Régimen	Dosado
	1000 rpm	0,7
Gas natural	2500 rpm	1
Hidrágono	1000 rpm	0,4
niurogeno	2500 rpm	0,7

Tabla 3.2. Ensayos utilizados para el estudio de los parámetros óptimos.

3.5.1 Gas natural.

3.5.1.1 Dosado 0,7



Ilustración 3.19. Gráfica de la desviación máxima del error en gas natural con dosado 0,7.



Ilustración 3.20. Gráfica del máximo menos mínimo del error en gas natural con dosado 0,7.







Ilustración 3.21. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en gas natural con dosado 0,7.



llustración 3.22. Gráfica del máximo menos mínimo del error de continuidad en gas natural con dosado 0,7.



Ilustración 3.23. Gráfica del promedio del error de continuidad en gas natural con dosado 0,7.





Universidad de Valladolid



Ilustración 3.24. Gráfica del máximo menos mínimo del error de la derivada de continuidad en gas natural con dosado 0,7.



Ilustración 3.25. Gráfica del promedio del error de la derivada de continuidad en gas natural con dosado 0,7.



3.5.1.2 Dosado 1.

Ilustración 3.26. Gráfica de la desviación máxima del error en gas natural con dosado 1.





GN 1 0.12 Grado 3 Máx-min error 0.1 Grado 5 Grado 7 0.08 0.06 0.04 0.02 0 4 6 8 10 4 6 8 10 1000 rpm 2500 rpm Nº de ptos regresión

Ilustración 3.27. Gráfica del máximo menos mínimo del error en gas natural con dosado 1.



Ilustración 3.28. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en gas natural con dosado 1.



Ilustración 3.29. Gráfica del máximo menos mínimo del error de continuidad en gas natural con dosado 1.







Ilustración 3.30. Gráfica del promedio del error de continuidad en gas natural con dosado 1.



llustración 3.31. Gráfica del máximo menos mínimo del error de la derivada de continuidad en gas natural con dosado 1.



Ilustración 3.32. Gráfica del promedio del error de la derivada de continuidad en gas natural con dosado 1.



3.5.1.3 Conclusiones del gas natural.

El número de puntos de regresión con el que se ha construido el polinomio en realidad está multiplicado por dos, como ya se ha explicado en el apartado de 2.2, ya que se cogen los mismo puntos por delante y por detrás. Por eso los datos que aparecen en el eje de abscisas: 4 puntos en realidad son 8, 6 son 12 y así sucesivamente. Por eso con *grado* 7 y *4 puntos de regresión* no se puede construir un polinomio ya que no se cumple la condición de la ecuación 2.8. No se cumple: 7<8-1

Aunque habrá que estudiar el caso del hidrógeno, se van a dictar una serie de conclusiones que se extraen de los ensayos de gas natural.

Las gráficas de diferencia del máximo menos mínimo tienen una tendencia similar a las de promedio, tanto en los errores como en los errores de continuidad o de la derivada de continuidad. Por lo que cualquiera de ambas valdría para sacar conclusiones, aunque de aquí en adelante, se nombrarán las gráficas de promedio debido a que son más limpias como se puede ver comparando las gráficas: Máximo menos mínimo del error en gas natural con dosado 0,7 (Ilustración 3.20) con la de Promedio del error en valor absoluto en gas natural con dosado 0,7 (Ilustración 3.21) o la de Máximo menos mínimo del error de continuidad en gas natural con dosado 1 (Ilustración 3.29) con la de Promedio del error de son dosado 1 (Ilustración 3.30) entre otras.

Primero de todo. Hay que comentar que los mayores errores se producirán en los instantes en los que se está produciendo la combustión. En esos momentos es cuando la presión se eleva desde un valor mínimo hasta su valor máximo dentro del cilindro, y se producen los mayores gradientes de presión entre datos consecutivos como se ve en la Ilustración 1.4, y a los polinomios creados les cuesta más adaptarse a los sucesivos datos. Por tanto, los errores que se producen durante el intervalo angular que dura la combustión son mayores que los del resto del ciclo. Evidentemente esos momentos son los más importantes, ya que como se ha explicado, el fin último de todo esto es estudiar la combustión del gas natural, del hidrógeno y de las mezclas.

Es lógico que, si se aumenta el régimen de giro, un ciclo dura menos tiempo. Si la duración en tiempo de la combustión varía poco al aumentar el régimen, conlleva que si aumente la duración en grados del intervalo angular de la combustión.

Fijándonos en cualquiera de los parámetros estadísticos de cualquiera de las ilustraciones, los ensayos de 2500 *rpm* producen mayor error que los de 1000 *rpm*. Es decir, una aumento de las revoluciones de giro del motor conlleva un aumento del error.





Relacionando que los errores durante el intervalo angular de la combustión son mayores y que con un mayor régimen de giro este intervalo angular es mayor, esto explica por qué los valores de los errores en los ensayos de 2500 rpm son mayores que los de 1000 rpm.

Respecto al número de puntos de regresión. Observando las gráficas de deviación máxima y del promedio del error en valor absoluto (Ilustraciones 3.19, 3.21, 3.26 y 3.28), sus magnitudes disminuyen con un menor número de puntos de regresión. En este caso los mejores resultados se obtienen para 4 puntos de regresión para cualquiera que sea el grado del polinomio, es decir, su valor es el más bajo.

Se puede concluir que construir los polinomios con el menor número de puntos produce menos error. Esto es normal ya que cuantos más puntos sean, sobre los que hay que hacer la regresión más dificultades tendrá el polinomio para ajustarse a todos ellos.

Pero observando las gráficas de promedio del error de la continuidad y el de la derivada de la continuidad (Ilustraciones 3.23, 3.25, 3.30 y 3.32), ocurre lo contrario, disminuye el error de continuidad y su derivada al aumentar el número de puntos de regresión. Esto es debido a que cuanto más sean los puntos elegidos más uniformes serán los polinomios y más similares será los polinomios consecutivos.

Respecto al grado del polinomio, los de *grado* 3 producen mayores valores de *deviación máxima y promedio del error en valor absoluto* (sus gráficas están por encima), Ilustraciones: 3.19, 3.21, 3.26 y 3.28. Sin embargo, produce menores valores en *promedio del error de la continuidad* y el de la *derivada de la continuidad* (sus gráficas están por debajo), Ilustraciones: 3.23, 3.25, 3.30 y 3.32. Ocurre todo los contrario con los de *grado* 7. También se observa que los resultados de los polinomios de *grado* 3 dan unos resultados más diferentes mientras que los de *grado* 5 y 7 son más similares entre ellos.

También se puede concluir que los polinomio de grado 3 con un número de puntos de regresión elevado, para los ensayos de dosado 1, quedan descartados ya que produce unos errores muy grandes, se ve en las gráficas de la ilustraciones: 3.26, 3.27 y 3.28.

Por tanto, es difícil, escoger unos parámetros en concreto ya que los que mejores resultados producen para los *errores del polinomio*, que son los de un número bajo de puntos de regresión, no son los mismos que los que mejor resultan para los *errores de continuidad*, que son un número alto de puntos de regresión. Y ocurre igual para el grado del polinomio.





3.5.2 Hidrogeno.





Ilustración 3.33. Gráfica de la desviación máxima del error en hidrógeno con dosado 0,4.



Ilustración 3.34. Gráfica del máximo menos mínimo del error en hidrógeno con dosado 0,4.



Ilustración 3.35. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en hidrógeno con dosado 0,4.





Universidad de Valladolid



llustración 3.36. Gráfica del máximo menos mínimo del error de continuidad en hidrógeno con dosado 0,4.



Ilustración 3.37. Gráfica del promedio del error de continuidad en hidrógeno con dosado 0,4.



Ilustración 3.38. Gráfica del máximo menos mínimo del error de la derivada de continuidad en hidrógeno con dosado 0,4







Ilustración 3.39. Gráfica del promedio del error de la derivada de continuidad en hidrógeno con dosado 0,4.



Ilustración 3.40. Gráfica de la desviación máxima del error en hidrógeno con dosado 0,7.



Ilustración 3.41. Gráfica del máximo menos mínimo del error en hidrógeno con dosado 0,7.





Universidad de Valladolid



Ilustración 3.42. Gráfica del promedio del error en valor absoluto en hidrógeno con dosado 0,7.



Ilustración 3.43. Gráfica del máximo menos mínimo del error de continuidad en hidrógeno con dosado 0,7



Ilustración 3.44. Gráfica del promedio del error de continuidad en hidrógeno con dosado 0,7.





Universidad de Valladolid



Ilustración 3.45. Gráfica del máximo menos mínimo del error de la derivada de continuidad en hidrógeno con dosado 0,7.



llustración 3.46. Gráfica del promedio del error de la derivada de continuidad en hidrógeno con dosado 0,7.

3.5.2.2 Conclusiones del hidrógeno.

Al igual que ocurría en el gas natural se nombrarán las gráficas de promedio debido a que son más limpias que las de diferencia de máximo menos mínimo.

En cuanto al *hidrógeno con dosado de 0,4*, su comportamiento es similar al gas natural debido a que su velocidad de combustión es solo ligeramente superior. Por lo tanto, se pueden sacar un poco las mismas conclusiones. Es decir, los ensayos de *2500 rpm* producen mayor error que los de *1000 rpm*. El motivos es el mismo que antes, el cambio en la duración angular de la combustión.

Las gráficas siguen la misma tendencia, el *promedio del error en valor absoluto* disminuye con un menor número de puntos de regresión mientras que los *errores de continuidad* y su *derivada* aumentan.



La diferencia con respecto al gas natural radica que en los ensayos de hidrógeno con *dosado 0,7*, los valores son más próximos para *1000 rpm* que para *2500 rpm que en el caso del gas natural*. Esto ya se ha explicado en el apartado 3.3.3, en el hidrógeno influye más el dosado que el régimen de giro ya que la combustión es muy diferente para *dosado 0,4*, la cual es similar al gas natural que para *dosado 0,7*.

Respecto al *hidrógeno con dosado 0,7*. Vuelve a ocurrir los mismo que en el gas natural, los polinomios de grado 3 producen errores muy grandes, pero en esta caso magnificados, se puede ver en las llustraciones 3.40 y 3.42.

Otra peculiaridad del hidrógeno con dosado 0,7 es que sus errores de continuidad y de la derivada de continuidad no disminuyen con el aumento del número de puntos de regresión como si ocurría con el gas natural o con el hidrógeno de dosado 0,4. Se puede ver en las llustraciones 3.44 y 3.46, en ellas los ensayos no siguen un tendencia clara.

Por lo tanto, se está en la misma posición que con el gas natural. No hay unos parámetros óptimos que den los mejores resultados para cada uno de los estadísticos estudiados. Lo que mejor resultado da para el error del polinomio es lo opuesto que da para el error de continuidad.

Para intentar encontrar eso parámetros óptimos se va a estudiar los errores de continuidad en función de los errores del polinomio en el siguiente apartado. Representando uno en función del otro se busca encontrar una combinación de parámetros concreta.







3.5.3 Errores de continuidad en función de los errores.



3.5.3.1 Gas natural.

Ilustración 3.47. Gráfica del logaritmo del máximo menos de mínimo del error de continuidad en función del máximo menos de mínimo del error en el gas natural.



Ilustración 3.48. Gráfica del logaritmo del promedio del error de continuidad en función del promedio del error en valor absoluto en el gas natural.



Los parámetros estadísticos se han representado en escala logarítmica para que resulte más fácil la representación del gráfico ya que la magnitud de los valores de la variables son bastante diferentes. Los *errores del polinomio* son más de 10 veces más grandes que los *errores de continuidad*.

Ambas Ilustraciones 3.47 y 3.48, representan cosas muy similares, pero se puede comprobar lo comentado anteriormente, los promedios producen gráficas más limpias, se ve en la Ilustración 3.48 ya que los datos están más agrupados.

Se aprecia en la Ilustración 3.48 como hay dos nubes de datos, con lo que se puede comprobar cómo influye más el régimen de giro que el dosado a la hora de la magnitud de los errores ya que cada nube de puntos se corresponde con un régimen diferente.

Se puede descartar de forma clara los polinomios de *grado 3* (datos de color azul), se ve claramente como producen más errores que los otros grados.

También se vuelven a confirmar sentencias dichas anteriormente. Entre los de *grado* 5 y *grado* 7 no hay grandes diferencias, solamente en los *ensayos de* 2500 rpm se puede declarar que el *grado* 7 tiene una mejor combinación de valores. Tampoco se ve con estas gráficas que haya unos parámetros óptimos que den los mejores resultados. Lo que mejor resultado da para el error del polinomio es lo opuesto que da para el error de continuidad.









llustración 3.49. Gráfica del logaritmo del máximo menos de mínimo del error de continuidad en función del máximo menos de mínimo del error en el hidrógeno.



llustración 3.50. Gráfica del logaritmo del promedio del error de continuidad en función del promedio del error en valor absoluto en el hidrógeno.



Se vuelve a observar lo mismo en las llustraciones 3.49 y 3.50, estas representan cosas muy similares, pero se puede comprobar que los promedios producen gráficas más limpias, donde los datos están más agrupados.

Con estas gráficas no se aprecian dos nubes de puntos marcadas, ya que los datos de los *ensayos de 1000 rpm y dosado 0,7* se mezclan con los datos de *ensayos de 2500 rpm*. Lo que viene a confirmar lo ya comentado antes varias veces, para el hidrógeno influye más el dosado que el régimen de giro.

Se vuelve a ver que lo polinomios de *grado* 3 (color azul) están descartados también para los ensayos de hidrógeno. Su combinación de valores es peor que la de los otros.

Al igual que ocurre en el gas natural, en el hidrógeno no hay una combinación de número de puntos de regresión y de grado de polinomio que sea ideal y que de los menores errores tanto de un tipo como de otro. Pero si se pueden descartar las combinaciones de parámetros que no son buenas.





4 CONCLUSIONES.

Tras establecer una serie de objetivos se puede concluir que se ha cumplido con los siguientes:

- En primer lugar, se ha estudiado la instalación disponible en el departamento, con los diferentes elementos y sensores que la componen explicando la función de los intervienen es este trabajo final de grado como son el captador de presión y el codificador angular. Además, se ha estudiado la metodología que existe para el filtrado de los datos de presión tras ser medidos dentro del cilindro y la importancia que estos tienen para el diagnóstico de la combustión.
- Posteriormente se han estudiado los polinomios de regresión y como se construyen. Y también se ha explicado cómo es la creación e implementación en el presente trabajo para filtrar los datos de presión experimentales y obtener unos datos filtrados.
- Se ha descrito lo que eran los errores de los polinomios y los errores de continuidad y de la derivada de continuidad, y la importancia que tenía cada uno. Posteriormente se ha creado una metodología de estudio con una serie de parámetros estadísticos para encontrar primero el número de ciclos a estudiar y posteriormente para establecer un número de puntos de regresión y un grado de polinomio óptimos.
- Tras estudiar el número de ciclos óptimos para realizar los posteriores estudios se ha llegado a la conclusión de que no hay un número concreto para todo los ensayos. Pero se puede concluir que 100 ciclos es un número correcto ya que a partir de ese momento los ensayos se estabilizan y además el tiempo de cálculo no es demasiado elevado.
- Se ha planteado una metodología de trabajo que permite identificar las combinaciones que son buenas, aunque no haya ninguna que sea ideal pero que permite descartar las configuraciones malas.
- Para el número de puntos de regresión y un grado de polinomio óptimos es más complicado establecer una conclusión generalista. Pero atendiendo a una combinación aceptable de todos parámetros estadísticos estudiados se ha llegado a que el número de puntos de regresión es 8 debido a que debía de ser un dato intermedio, es decir, 6 o 8 puntos, pero el error de continuidad es menor para 8 puntos mientras que el error del polinomio es prácticamente igual. También se concluye que el grado del polinomio es 5, ya que los resultados son muy



similares que los de grado 7 pero el esfuerzo computacional de filtrar los datos es mayor cuantos más grande sea el grado del polinomio.

 Respecto a trabajos futuros. Puede resultar interesante estudiar otras formas de realizar los polinomios creados mediante la regresión u otras maneras que no sean mediante regresiones. También puede ser una buena línea de trabajo futura, el estudiar la viabilidad de crear diferentes tipos de polinomios (con diferente grado y número de puntos de regresión) en función de la zona angular del ciclo.





5 BIBLIOGRAFÍA.

- [1] Burden. R.L, Faires. J.D. (1988). *Analisis numérico*. México, D.F: Grupo Editorial Iberoamericana.
- [2] El-Ghamrya. M, Steela. J .A, Reubena. R.L, Fog. T.L. (2005). Indirect measurement of cylinder pressure from diesel engines using acoustic emission. Mechanical Systems and Signal Processing 19, 751–765. <u>https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S088832700</u> 4001554
- [3] GASNAM. (2021). Gas natural y gases renovables, energías para la movilidad del presente y futuro. [Informe de resultados]. <u>https://gasnam.es/wp-</u> <u>content/uploads/2021/12/211213 GASNAM PwC Informe-gasmovilidad_vfinal.pdf</u>
- [4] Kumar Maurya. R, Datt Pal. D, Kumar Agarwal. A. (2013). Digital signal processing of cylinder pressure data for combustion diagnostics of HCCI engine. Mechanical Systems and Signal Processing 36, 95–109. <u>https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S088832701</u> 1003037?via%3Dihub
- [5] Montero Granados, R. (2016). Modelos de regresión lineal múltiple. [Documentos de Trabajo en Economía Aplicada]. Universidad de Granada. <u>https://www.ugr.es/~montero/matematicas/regresion_lineal.pdf</u>
- [6] Ostertagová. E. (2012). Modelling using polynomial regression. Procedia Engineering 48, 500 – 506. <u>https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705812046</u> 085
- [7] Payri. F, Luján. J.M, Martín. J, Abbad. A. (2010). Digital signal processing of in-cylinder pressure for combustion diagnosis of internal combustion engines. Mechanical Systems and Signal Processing 24, 1767–1784. <u>https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S088832701</u> 0000518
- [8] Peña. D. (2002). Regresión y diseño de experimentos. Madrid: Alianza.



- [9] Pérez Rodríguez. A. (2021). Estudio de combustión de mezclas de Hidrógeno y Gas Natural en motores de encendido provocado. Medida de dispersión cíclica. [Tesis doctoral]. <u>https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/48668/TESIS-1890-</u> 210907.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- [10] Rhoades Shanock. L, Baran. B.E, Gentry. W.A, Clever Pattison. S, Heggestad. E.D. (2010). Polynomial Regression with Response Surface Analysis: A Powerful Approach for Examining Moderation and Overcoming Limitations of Difference Scores. J Bus Psychol 25:543– 554. <u>https://link.springer.com/article/10.1007/s10869-013-9317-6</u>
- [11] Rojo Abuín. J. M. (2007). *Regresión lineal múltiple.* Instituto de Economía y Geografía.
- [12] San Fabián, N. (2018). Índice de calidad y evaluación de un sistema PPG. [Trabajo final de máster]. Universidad Pública de Navarra. <u>https://academica-</u> e.unavarra.es/xmlui/bitstream/handle/2454/31636/TFM_NoeSanFa bian.pdf;jsessionid=875BE6088F05BE93C90F1130D1090F78?sequ ence=1
- [13] Sobre el Ajuste de Funciones. Método de los mínimos cuadrados. Polinomios ortogonales (s.f). <u>http://casanchi.org/mat/safunciones01.pdf</u>
- [14] Tena Calvera. J. (2020). Análisis de las prestaciones de vehículos industriales de hidrógeno para el transporte de mercancía pesada por carretera con vehículos DuoTrailer y su operativa de abastecimiento.
 [Trabajo final de grado]. Universidad de Zaragoza.
 <u>https://zaguan.unizar.es/record/96631/files/TAZ-TFG-2020-1659.pdf?version=1</u>
- [15] T.Raíl. (s.f). Las ventajas del hidrógeno como combustible alternativo. https://www.trenyrail.com/las-ventajas-del-hidrogeno-comocombustible-alternativo/
- [16] Vázquez Espí. C. (2010). Métodos numéricos. I: Interpolación y aproximación polinómica: Aproximación por mínimos cuadrados. Madrid: García-Maroto.
- [17] Vázquez Espí. C. (2014). Splines cúbicos y mínimos cuadrados. Madrid: García-Maroto.