Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

SISTEMA LSM MONTE CARLO PARA VALORACIÓN DE OPCIONES REALES

Trabajo Fin de Grado

Autor:

Sergio González Velasco

Tutores:

Susana Alonso Bonis

Gabriel de la Fuente Herrero

Julio 2022

Resumen

El objetivo de este trabajo es tratar el sistema LSM Monte Carlo, el cual permite valorar opciones financieras de naturaleza americanas para aplicarlo a opciones reales. Se expondrán las bases teóricas que avalan el algoritmo para opciones financieras, con el fin de aplicarlo a un proyecto de inversión real y estudiar la robustez del sistema.

Índice

Lista de tablas

Capítulo 1

Introducción

1. Motivación del trabajo:

Cada día los métodos numéricos basados en el sistema Monte Carlo se vuelven más útiles y populares ya que permiten la modelización de todo tipo de problemas, desde modelos físicos para estudiar la colisión de partículas hasta el estudio de la expansión enfermedades como la del Covid-19. En este contexto de pandemia fue la primera vez que oí hablar de este método que predice la incidencia y las zonas de mayor influencia de este virus. El sistema Monte Carlo se basa en la generación de números aleatorios; esta aleatoriedad está presente en multitud de procesos cotidianos, tan complejos, que dependen de muchas variables. Por ejemplo: el precio de la electricidad, la demanda de un cierto producto o la probabilidad de un desastre natural. Lo fascinantes de este método es la base matemática la cual nos permite estudiar desde el comportamiento de una enfermedad hasta la valoración de un proyecto de inversión.

2. Objeto del trabajo

El objeto de este trabajo consiste en analizar la aplicación de la simulación de Monte Carlo en la valoración de proyectos de inversión empresarial. Las ventajas que presenta este procedimiento a la hora de modelizar la evolución estocástica de múltiples variables -financieras o no financieras- se antoja muy interesante para la valoración de la empresa y sus proyectos de inversión.

Concretamente, se analiza la utilización del método de Monte Carlo en la valoración de los derechos de decisión a disposición de la empresa y que ponen de manifiesto la flexibilidad con que cuenta la gerencia a la hora de gestionar las inversiones. La posibilidad de retrasar en marcha la puesta de un proyecto, de abandonar una aventura empresarial antes de lo previsto o de intensificar un compromiso de recursos ante la evolución favorable del entorno en el que se lleva a cabo, son ejemplos ilustrativos de la capacidad de la empresa para actuar sobre sus proyectos.

La similitud de las potenciales decisiones que pueden adoptarse respecto a un proyecto con derechos de decisión a disposición de la empresa se enmarca en el Enfoque de Opciones Reales. Se trata de un enfoque novedoso -su origen data de 1977, con el trabajo de Myers- que complementa al convencional modelo del descuento de flujos a la hora de ofrecer una valoración más completa de la empresa y sus inversiones.

En el origen del enfoque de opciones reales, se encuentra la superación de una importante limitación del modelo del descuento de flujos (cuyo criterio más representativo es el VAN) y que está relacionada con la valoración de la corriente no monetaria que se genera a partir de una inversión.

En el cálculo del VAN únicamente se considera la corriente de flujos de tesorería que se deriva de un proyecto ignorando otro tipo de resultados, de naturaleza intangible, que pueden generarse a partir de un compromiso de recursos, como el conocimiento, la imagen de marca, … Estos activos intangibles constituyen la base a partir de la que la empresa puede adoptar decisiones posteriores (crecimiento, abandono, modificación de input o output del proyecto, aplazamiento, …) y que pueden representar un valor, incluso más elevado, que la corriente monetaria que se deriva del proyecto.

La teoría de opciones financieras constituye el marco en el que se lleva a cabo la valoración de estos derechos de decisión a disposición de la empresa. De este modo, se plantean numerosas posibilidades de aplicación de un amplio abanico de modelos de opciones financieras a la evaluación de la inversión empresarial.

El procedimiento *Least-Square Monte Carlo* (en adelante LSM) es, probablemente, el modelo de valoración de derivados financieros más potente, ya que se apoya en el empleo de la simulación de Monte Carlo, en combinación con otras técnicas como la programación dinámica y la regresión estadística.

Por ello, en este trabajo, nos planteamos la aplicación del procedimiento LSM a un caso real de inversión empresarial, con el fin de poner de manifiesto las ventajas asociadas al empleo de la simulación en la valoración de la empresa y sus inversiones.

3. Estructura del trabajo:

En lo que sigue el trabajo se desarrolla en cuatro capítulos a partir de los cuales se pretende alcanzar la consecución del objetivo.

En el capítulo primero hay una breve introducción sobre las opciones financieras y sus principales características que permitirá sentar las bases para la analogía de estos activos financieros con los derechos de decisión a disposición de la empresa. En el capítulo segundo, se presenta el método de valoración de opciones americanas, LSM, que desarrollaron Longstaff y Schwartz (2001). Posteriormente, el capítulo tercero, se dedica a la simulación de Monte Carlo, y se tratan los procesos estocásticos y sus principales características. Finalmente, en el capítulo cuarto, se presenta la aplicación del método LSM a la evaluación de un proyecto de inversión real.

Capítulo 2

Opciones financieras

1. Opciones financieras:

Las opciones financieras son un producto derivado que se formaliza en un contrato, por el cual el poseedor de la opción tiene la posibilidad, pero no la obligación de comprar o vender el subyacente a un precio pactado de antemano, E. La única obligación que tiene el poseedor de la opción es la de pagar la prima. Por su parte el emisor de la opción, que recibe la prima, está obligado a entregar o comprar el subyacente si el poseedor ejerce la opción en el periodo pactado.

2. Clasificación de las opciones financieras:

Existen dos tipos de opciones, la opción de **compra** (o *call*) proporciona a su dueño el derecho a comprar el subyacente a un precio de ejercicio o precio de ejecución especificado en o antes de una fecha también especificada y la opción de **venta** (o *put*) que proporciona a su dueño el derecho a vender el subyacente a un precio de ejercicio o precio de ejecución especificado en o antes de una fecha también especificada.

En relación con el momento en el cual se puede ejercer el derecho, se plantea otro criterio de clasificación de las opciones. Por un lado, están aquellas que solo se puede ejercer en el momento final, llamadas **opciones europeas**. En el otro extremo están aquellas que se pueden ejercer en cualquier tiempo intermedio entre el momento del pacto y el momento final, **opciones americanas**[1].

Como se ha señalado, el poseedor de la opción tiene que pagar una prima, que es el precio que paga el poseedor de la opción por tener el derecho a comprar o vender el activo

1 Ente medias existen otras opciones, llamadas **opciones exóticas**, como las bermudas. Estas se pueden caracterizar porque en el momento de la compra se fijan los periodos intermedios de ejercicio.

subyacente. El valor de la prima se puede desgranar como la suma entre el *valor intrínseco* y el *valor temporal.*

El valor intrínseco: hace referencia al valor de la opción si se ejerciese en ese preciso momento. El valor de las opciones viene dado por la siguiente igualdad:

$$Call = \max\{S - E, 0\}$$

$$Put = \max\{E - S, 0\}$$

El valor temporal: hace referencia a la posibilidad de que en el futuro el subyacente pudiera tomar un valor tal que la opción valga más de lo que vale ahora, es decir, el valor a lo largo del tiempo siempre tiene que ser positivo ya que la evolución del subyacente siempre puede ir a tu favor. El *valor del tiempo* o *valor extrínseco* se expresa como $VE = P - VI$.

A partir de la descomposición de la prima, podemos tener otra clasificación de las opciones atendiendo al valor intrínseco:

In the money (en dinero): valor intrínseco positivo.

Out of the money (fuera del dinero): valor intrínseco nulo.

At the money (a la par): valor intrínseco nulo.

3. Analogía con los derechos de decisión empresariales:

La posibilidad de adoptar una nueva decisión de inversión a partir de un proyecto ya existente, es decir, la opción de crecimiento a disposición de la empresa tiene un gran parecido con una opción de compra, *call* financiera.

Así, el precio de ejercicio en la opción real de crecimiento representa el coste de la inversión requerida por el nuevo compromiso de recursos. El valor del activo subyacente viene dado por el valor actual de los flujos de caja netos totales que se espera obtener a partir de la nueva decisión. La fecha de vencimiento representa el momento final del periodo de decisión disponible hasta que desaparezca la oportunidad de crecimiento. Y, finalmente, la volatilidad del activo subyacente viene dado por el riesgo del proyecto en la opción real.

Del mismo modo, la posibilidad de liquidar un proyecto de manera prematura, es decir, una opción de abandono tiene un gran parecido con una opción de venta, *put* financiera. El precio de ejercicio en la opción de abandono viene dado por el valor de liquidación, es decir, la retribución que se espera obtener mediante la venta o empleo para otros usos de los activos destinados en dicho proyecto. Mientras que el valor del activo subyacente representa el valor actual de los flujos netos totales futuros del propio proyecto a los que se va a renunciar con el abandono.

La analogía de las decisiones asociadas a la inversión empresarial con opciones *call* y *put* financieras permite la aplicación de los modelos desarrollados en el ámbito de los derivados financieros a la valoración de empresas y sus proyectos. Como ya se ha comentado, en el presente trabajo, se presenta la adaptación del procedimiento LSM al análisis de un proyecto de inversión empresarial real.

Capítulo 3

Modelo LSM Monte Carlo

1. Introducción:

En el año 2001, los científicos Longstaff y Schwartz publicaron el artículo "Valuing American Options by simulation: a Simple Least-Squares Approach". Este artículo ha supuesto una auténtica revolución en los sistemas de valoración de opciones, ha sido citado en más de 4.000 publicaciones académicas y ha servido como base teórica para el desarrollo de numerosos y diversos artículos científicos.

Longstaff y Schwartz (2001) proponen un método de valoración de opciones americanas que parte del uso de simulaciones y las combina con la regresión estadística.

Gracias a las simulaciones podemos estudiar opciones cuyo valor depende de varias fuentes de incertidumbre, las cuales pueden seguir cualquier proceso estocástico, como *jump diffusions*, *procesos no markovianos* o *semimartingala*. Estas simulaciones dependen de procesos aleatorios que tomarán diferentes valores, lo que se plasmará en diferentes posibilidades y por ello se harán diferentes caminos.

El método LSM se fundamenta en que el poseedor de una opción compara en cada momento de ejercicio el valor de ejecución inmediato con el valor *esperado* de los pagos por continuar con la opción. Esta comparación permite al poseedor de la opción elegir en cada momento de ejercicio cual es la mejor decisión, ejercer la opción o mantenerla viva. Siguiendo este algoritmo es posible obtener una estrategia óptima que nos permita maximizar el valor de la opción. Nótese que el proceso de optimización que requiere la valoración de las opciones americanas requiere la aplicación de un método inductivo hacia atrás (la valoración comienza en la fecha de vencimiento y se va hacia atrás en el tiempo hasta el momento actual), sin embargo, la simulación de los flujos supondrá la aplicación de un procedimiento inductivo hacia adelante, lo cual es un gran inconveniente ya que es necesario una gran capacidad de computación para resolver el problema.

La idea fundamental de este enfoque reside en que el valor asociado a la expectativa de mantener la opción viva puede ser estimado a través de las simulaciones y la regresión por mínimos cuadrados. El valor ajustado de esta regresión provee una estimación directa del valor esperado de continuar con la opción. Una vez determinada la estrategia óptima de cada camino, podemos obtener el valor de la opción para cada trayectoria, que no es otro que el valor de la decisión óptima a tomar actualizado a t = 0[2]. Una vez actualizado todos los valores de cada camino se hará un promedio obteniendo el valor de la opción.

Los caminos simulados reflejan posibles valores que puede tomar el subyacente. Sin embargo, el subyacente va a tomar en cada periodo de ejercicio un único valor, el cual puede no corresponder a ninguna trayectoria simulada en el procedimiento. Por ello, una vez se tenga el verdadero valor del subyacente, el decisor tendrá que decidir cuál es la decisión óptima usando los coeficientes que se han generado en las regresiones. En cada momento de ejercicio, el decisor tiene que evaluar la regresión con el verdadero valor del subyacente y este será el valor estimado por continuar. Comparando el valor esperado con el valor de ejecución, el decisor sabrá cual es la decisión optima que maximiza el valor de la opción.

En definitiva, el método LSM es un sistema recursivo que brinda una regla de parada para maximizar el valor de las opciones.

---

[2] La simulación del proceso se realiza a través de un enfoque *neutral risk* del activo subyacente y la actualización se lleva a cabo al tipo de interés del activo libre de riesgo

2. Algoritmo de evaluación:

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P\ )$ un espacio probabilístico y [0,T] el horizonte temporal, donde Ω es el conjunto de todos los posibles resultados estocásticos entre 0 y T. Sea $\mathcal{F}$ una sigma álgebra y P una función de probabilidad de los elementos de $\mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in [0, T\ ]\}$ un filtro generador de los precios relevantes de la economía. Bajo este enfoque, al filtro generador de los precios relevantes de la economía se le conoce como variable estado.

Para reducir la dificultad, nos centraremos en las opciones *Bermudas*, es decir, consideramos que la opción no se puede ejercer en cualquier momento entre 0 y T si no en el espacio discreto $0 \leq t_1 < t_2 <\ldots< t_n = T$. Dada esta partición Δ de [0,T], se define la longitud de la partición como $|\Delta| = max\ \{|t_k - t_{k-1}|\}$, es claro que si se toma particiones cada vez más finas,$|\Delta| \rightarrow 0$, se podrá recorrer el espacio continuo y por tanto podremos evaluar la opción en cada instante de tiempo, pasando de una opción bermudas a una opción americana.

De todos los espacios probabilísticos restringimos nuestra atención en aquellos activos derivados con pagos que son elementos de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P\ )$. Este espacio matemático es un espacio *hilbertiano* que se define como el conjunto de funciones que son cuadrado integrables.

Se denota la función $C(\omega, s, t, T\ )$ como la función de los *cashflows* que la opción genera condicionada con que la opción no ha sido ejercida en *t* o antes y condicionado con que el decisor de la opción sigue la estrategia óptima para todo *s*,

$t < s \leq T$.

En t_k el valor de continuar con la opción se denota por $F\ (\omega, t_k)$ y se define a través de la siguiente expresión:

$$F\ (\omega, t_k) = E_Q\left[\sum_{j=k+1}^{K} e^{\int_{t_k}^{t_j} -r(w,s)ds}\, C\big(\omega, t_j, t_k, T\ \big)\middle|\, \mathcal{F}_{t_k}\right] \quad (1)$$

Donde $r(\omega, t)$ es el tipo de interés a la cual se descuenta en modelo y las expectativas están condicionadas con el filtro de precios relevantes para la economía F_{t_k} en t_k.

3. El algoritmo LSM:

Para determinar la esperanza condicionada descrita anteriormente, se va a aplicar el método de mínimos cuadrados. Se asume que se puede representar (1) como una combinación lineal de funciones bases, medibles y numerables del conjunto F_{t_k}. Esta suposición se puede justificar cuando las expectativas condicionadas son elementos del espacio L^2. Como L^2 es un espacio de Hilbert, tiene una base ortonormal y la esperanza condicionada se puede representar como una combinación lineal de funciones bases. Sea X el valor de una opción que sigue un proceso de Markov, Longstaff y Schwartz (2001) escogen como base:

$$L_n(x) = e^{\frac{-X}{2}} \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-X})\ tal\ que\ n \in \mathbb{N}$$

Luego $F(w, t_k)$ se puede expresar como:

$$F(w, t_k) = \sum_{i=0}^{\mathbb{N}} c_i\, L_i(x)$$

Sin embargo, Longstaff y Schwartz (2001) demuestran que basta con escoger un subconjunto finito de M elementos de una base cuya combinación lineal aproximara el valor esperado de continuar:

$$\widehat{F_M}(w, t_k) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{a}_j L_j\big(x_{t_k}\big)$$

Finalmente, la estimación de los coeficientes a_j se realiza mediante una regresión de mínimos cuadrados. Para obtener la regresión en t_k, se seleccionan los caminos en los cuales la opción está en el dinero en t_k. Comparando el valor de continuar y el valor de ejercicio parar estos caminos desde t_n, hasta t_{k+1} obtenemos el valor de la opción para cada camino hasta t_{k+1}. Se actualiza el valor de la opción de cada trayectoria a t_k y realizamos la regresión tomando como variable independiente el precio del subyacente simulado en t_k y como variable dependiente el valor actualizado. Se realiza este proceso hasta t_0 obteniendo una completa especificación de la estrategia óptima por cada camino. Como se han obtenido la estrategia óptima y el valor actual de la opción para cada trayectoria, se calcula el promedio de todos los valores actuales y obtenemos el valor final de la opción.[3]

Una vez se haya comprado la opción, en cada periodo de ejercicio tendrá un precio del subyacente que es un dato real y el poseedor tendrá que tomar la decisión de ejercer o mantener viva la opción. Para tomar esta decisión basta con que en cada periodo de ejercicio t_k, se evalúe el precio del subyacente en la regresión que se hizo en t_k y obtendremos el valor esperado por continuar con la opción. Comparando el valor esperado con el valor de ejercicio el decisor podrá tomar la decisión que maximice el valor de la opción.

4. Convergencia de resultado:

Sea *V(X)* el verdadero valor de la opción americana. En la proposición 1, de su artículo, Longstaff y Schwatz (2001) demuestran que valor de la opción casi seguro cumpla la siguiente inecuación:

$$V(X) \geq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} LSM(w_i; M, K)$$

[3] Moreno y Navas (2003) establecen que se mejora la precisión del método si se usan un conjunto de trayectorias para estimar la regla de parada y otro conjunto de trayectorias para para calcular el valor de la opción usando las reglas anteriormente calculadas.

Lo que muestra esta desigualdad es que el verdadero valor de la opción es mayor o igual que el promedio del valor de los caminos w_i al aplicar el método LSM con M funciones bases y K periodos de ejercicio, cuando N tiende a infinito.

Este resultado provee una regla de parada que maximiza el valor de la opción. Lo que pone de manifiesto la expresión anterior es que si aumentamos el número de caminos, el número de funciones bases y el número de periodos de ejercicios t_k y el valor del promedio no aumenta, entonces habremos encontrado el verdadero valor de la opción, el número de funciones y el número de caminos. Longstaff y Schwatz (2001) acaban diciendo que es difícil proporcionar un resultado de convergencia general, ya que por su naturaleza es un método que depende del número de periodos de ejercicio, el número de funciones bases y del número de caminos.

Por otro lado, Manuel Moreno y Javier F. Navas (2003) en su artículo "On the Robutness of Least-Squares Monte Carlo for Pricing American Derivatives", concluyen que el método LSM es un método muy robusto para la valoración de opciones americanas. En este artículo usan bases diferentes y comparan el valor simulado con el modelo binomial y el modelo Black-Scholes para concluir que el método es robusto independientemente de la base usada y que no hay diferencias significativas si se usa $\mathbb{P}_3\ a\ \mathbb{P}_{20}$. Por lo que el método solo dependerá del número de periodos de ejercicio y el número de caminos.

En el caso práctico usado en este trabajo con el fin de ilustrar el funcionamiento del método LSM, el número de periodos vendrá determinado por la propia naturaleza del proyecto, que será la posibilidad de ejercer a principio de cada año, por lo que nos centraremos en incrementar el número de trayectorias para dar la mejor aproximación al verdadero valor de la opción.

Capítulo 3

Simulación

1. Ventajas e inconveniente de la aplicación de la simulación en la valoración de opciones

La simulación de Monte Carlo se basa en la generación de muestras particulares que se corresponden con el patrón estocástico de una variable aleatoria. En la valoración de activos derivados, la aplicación de la simulación de Monte Carlo conlleva la obtención de muestras aleatorias del comportamiento dinámico de los parámetros estocásticos –variables de estado o fuentes de incertidumbre– de los que depende el valor del derivado en cuestión.

Obviamente la estimación de una única trayectoria de la evolución de cada factor estocástico no es suficiente para aproximar el valor de la opción. Una correcta aproximación requiere la generación de un gran número de trayectorias. Cuántas trayectorias estimar –y también cuántas particiones realizar del espacio temporal hasta el vencimiento de la opción– son cuestiones que dependen de las características específicas de cada activo y del comportamiento dinámico de sus fuentes de incertidumbre. En general, aumentar el número de trayectorias mejora la precisión del valor del derecho estimado, mientras que incrementar el número de subintervalos temporales normalmente garantiza que dicho valor converja hacia el correcto (Stentoft, 2004).

Las ventajas que ofrece la simulación de Monte Carlo en la valoración de opciones la convierten en una herramienta muy potente a la hora de integrarla en un procedimiento de valoración. Entre las principales ventajas se encuentran:

1) Amplia significativamente el número de fuentes de incertidumbre que es posible incorporar en el problema de valoración. La estimación de las

trayectorias futuras de las variables últimas de las que dependen los flujos proporciona la materia prima de las siguientes fases del proceso de valoración. La simulación permite generar directamente, en cualquier momento futuro, trayectorias acordes con la distribución aleatoria de las variables de estado, manteniendo constante el número de estados de la naturaleza para cada variable. En consecuencia, el incremento de las fuentes de incertidumbre sólo aumenta linealmente el número de estados de la naturaleza (Stentoft, 2004) y con ello el volumen de recursos requerido por el modelo LSM.

2) Admite la modelización de una amplia variedad de evoluciones estocásticas de las fuentes de incertidumbre, resultando sencillo generar muestras representativas de las variables inciertas cuyo proceso estocástico implique saltos, discontinuidades o estructuras de comportamiento con dependencias temporales. Estas circunstancias sueles ser habituales en la modelización de variables como la demanda, los beneficios o los precios de productos y factores.

Sin embargo, la simulación adolece de una importante limitación en la valoración de derivados de naturaleza americana, por lo que tiene que combinarse con alguna otra técnica. Y es que, como ya se ha señalado, el método de Monte Carlo es un procedimiento *de inducción hacia delante*, pero en la valoración de opciones americanas, la estimación de la decisión óptima en un determinado momento se estima en función de su valor en el período siguiente, lo que requiere que la valoración se inicie en la fecha de vencimiento y se mueva cronológicamente hacia atrás en el tiempo.

Por ello, es necesario combinar la simulación de Monte Carlo con la programación dinámica. Mediante la aplicación de esta técnica se resume la secuencia de todas las posibles decisiones de ejercicio en dos únicos elementos: el valor de la decisión inmediata y el valor de continuación o valor de mantener viva la opción, que recoge las consecuencias de todas las decisiones siguientes empezando con la posición resultante de la decisión inmediata.

2. Discretización del proceso estocástico en tiempo continuo

La discretización, necesaria para la posterior simulación, se realiza una vez realizado el ajuste de la evolución estocástica de las variables de estado por su riesgo sistemático, y pasado a un contexto de valoración *risk neutral* para cada variable incierta[4].

Para algunos procesos se conoce la fórmula de discretización exacta, por ejemplo, para el movimiento Geométrico Browniano, los procesos de difusión tipo raíz cuadrada y algunos procesos con saltos, como se mostrará más adelante (Alonso, Azofra y Fuente, 2007).

En estos casos en los que existe fórmula exacta, el error de la discretización es independiente del plazo temporal de cada simulación, por lo que el número de subintervalos de análisis atenderá a la periodicidad de ejercicio anticipado de las opciones. Cuando el proceso no sea integrable, su discretización puede aproximarse a partir de la técnica de Euler. Aunque de fácil implementación, el método de Euler implica la asunción de un error de aproximación que disminuye a medida que se reduce el espacio temporal de cada simulación. En consecuencia, una forma de limitar el error cometido al discretizar el proceso continuo es simular un "gran" número de pasos intermedios entre

[4] En el caso en el que las variables de estado presenten una naturaleza no financiera, su aplicación implica asumir que el mercado de capitales es completo y, por tanto, que es posible construir cualquier patrón de rendimientos a partir de los activos existentes. El supuesto de mercados completos no sólo es común a toda valoración de derivados definidos sobre subyacentes no cotizados, sino también al propio modelo de descuento de flujos de tesorería, que utiliza como tasa de descuento adecuada al riesgo de la corriente de flujos el coste de capital del supuesto "activo gemelo".

cada fecha, con el consiguiente incremento de los recursos requeridos para su implementación (Alonso, et al., 2007).

Una vez realizado el proceso de discretización, se inicia la simulación propiamente dicha. El punto de partida es la generación de números aleatorios que se distribuyan uniformemente en el intervalo (0, 1). Estos valores pueden transformarse fácilmente en muestras de cualquier otra distribución, disponiendo para ello de diversos métodos, entre los que destaca, por su sencillez, el *método de la transformación inversa.* De acuerdo con este procedimiento cada número aleatorio representa la probabilidad acumulada de la distribución del componente estocástico del proceso objeto de simulación. Los valores de la distribución así obtenidos constituyen, precisamente, realizaciones de la muestra artificial o simulada (Alonso, et. al, 2007).

3. Procesos estocásticos en tiempo continuo:

Suponga un sistema que evoluciona o cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo de acuerdo con una cierta ley de movimiento, y sea X_t el estado del sistema al tiempo t. La variable X_t es una variable aleatoria para cada valor del índice t.

En general, las variables aleatorias que conforman un proceso no son independientes entre sí sino que están relacionadas unas con otras de alguna manera particular.La definición de proceso estocástico toma como base un espacio de probabilidad (Ω, F, Q).

<u>Definición</u>: Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t: t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T, llamado espacio parametral y con valores en un conjunto S llamado espacio de estados.

Un proceso estocástico puede considerarse como una función de dos variables:

$$X : T \times \Omega \rightarrow S$$

$$(t, w) \rightarrow X(t, w) = X_t(w)$$

S es el espacio de estados y es el conjunto de valores que puede tomar el proceso estocástico.

3.1.Cadenas de Markov:

<u>Definición</u>: Una cadena de Márkov es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ con espacio discreto y que satisface la propiedad de Márkov, esto es, para cualquier entero n 0, y para cualesquiera estados $\{x_0, \ldots, x_{n+1}\}$ se cumple

$$p(x_{n+1}|x_0, \ldots, x_n) = p(x_{n+1}|x_n)$$

Esta propiedad es muy importante y se llama propiedad de Márkov, lo que expone es que parar cualesquiera estados $x_0, \ldots, x_{n-1}$ pasados, x_n presente, x_{n+1} futuro, se cumple que la probabilidad del evento futuro solo depende del evento inmediatamente anterior y por lo tanto los estados $x_0, \ldots, x_{n-1}$ son irrelevantes.

3.2.Movimiento Browniano:

Un movimiento browniano es un fenómeno físico, es un movimiento errático que se caracteriza por describir una trayectoria continua y que estos desplazamientos no parecen tener relación uno con otro en intervalos de tiempos distinto.

<u>Definición</u>: Un movimiento Browniano unidimensional de parámetro σ^2 es un proceso estocástico $\{B_t : t \geq 0\}$ con valores en $\mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $B_0 = 0$ converge en probabilidad casi seguro.
2. Las trayectorias son continuas.

3. El proceso tiene incrementos independientes.

4. Las variables $B_t - B_t \sim N(0, \sigma^2(t - s))$.

3.3. Movimiento geométrico Browniano:

Sea μ y $\sigma > 0$ dos constantes y $X_0 > 0$. El movimiento Browniano geométrico es el proceso solución de la ecuación estocástica

$$\begin{cases} \partial X_t = \mu X_t \partial t + \sigma X_t \partial Bt \rightarrow \dfrac{\partial X_t}{\partial t} = \mu X_t + \sigma X_t \dfrac{\partial B_t}{\partial t} \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

La solución de la ecuación es: $X_t = x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$ [5]

[5] Esta es la formulación habitual para discretizar el movimiento browniano geométrico, obtenido a través del lema de Itô. Existen numerosas aproximaciones sin embargo esta es la más utilizada en los manuales.

Capítulo 4

Opciones reales

1. Caso de estudio:

A partir de las relaciones que existen entre las opciones financieras y los derechos empresariales de gestión activa, se puede aplicar sistemas de valoraciones de opciones financieras a proyectos de inversión real. En este apartado se realizará una valoración a un proyecto real adaptando el sistema LSM Monte Carlo, para valorar una opción de aplazamiento.

1.1. Descripción del caso de estudio:

El caso de estudio consiste en la aplicación del sistema LSM al proyecto descrito en el trabajo "Real Options versus Traditional Methods to assess Renewable Energy Proyects" realizado por Lucía Santos, Isabel Soares, Carla Mendes y Paula Ferreira (2014).

En el mencionado trabajo los autores ofrecen la valoración de un proyecto consistente en la instalación de una pequeña planta de generación de energía hidráulica a partir del modelo convencional del descuento de flujos y consideran la posibilidad de retrasar su puesta en marcha a través de una opción de aplazamiento evaluada a partir del modelo binomial. Nuestro objetivo es ofrecer una valoración a partir del método LSM que ofrece mayor flexibilidad en la evaluación de las opciones reales asociadas al proyecto.

Las principales características del caso, como se describe en Santos *et. al* (2014), son las siguientes. Se trata de una inversión en una miniplanta hidráulica con capacidad instalada de 500 kW. El proyecto de construcción de la planta se sitúa en 2006 y empezó a operar al final de ese año, teniendo un horizonte temporal de 50 años. Se asume que las turbinas y el generador tienen el mismo horizonte de vida (50 años). Sin embargo, el transformador tiene un horizonte temporal más reducido de 25 años.

Las características de la planta y sus costes asociados se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 1: Costes y características del proyecto

Características planta		*Desembolso (%total)*		*Costes*	
Tipo de turbina	Kaplan	Transformador	14,46%	Operativos y mantenimiento	2,48%
Nº de turbinas	1	Generador	10,24%	Años 1 y 50 costes de mantenimiento	4,97%
Generadores	400 V	Turbinas	10,24%	Años 10 costes de mantenimiento	4,97%
Nº generadores	1	Equipamiento	14,46%	Años 20 costes de mantenimiento	4,97%
Generador ingresos	95%	Construcción	24,10%	Años 30 costes de mantenimiento	4,97%
Transformadores	400 V / 15 KV	Línea de 15 KV	12,05%	Años 40 costes de mantenimiento	77,64%
N.º transformadores	1	Studio y proyecto	2,41%	Nuevo transformador año 25	2,48%
Ingresos de transformadores	90%	Coste del terreno y expropiación	12,05%	Operativo y mantenimiento anual	4,97%
Capacidad de cada turbina	500 KW				
Capacidad del proyecto	500 KW	**TOTAL**	**100%**		

Fuente: Santos *et. al* (2014)[6]

1.2. Hipótesis del caso:

Para la valoración del proyecto se van a considerar las siguientes hipótesis:

1) Se asume que la planta produce a plena capacidad y la energía será vendida durante el período de vida de la inversión.

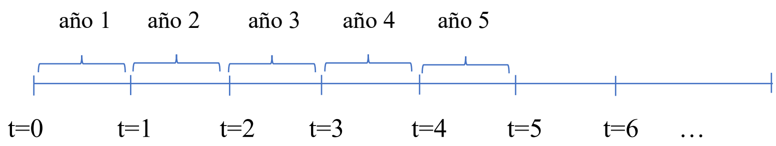
[6] La tabla de costes está extraída directamente del artículo “Real Options versus Traditional Methods to assess Renewable Energy Proyects” y los porcentajes son sobre el desembolso. La suma de los porcentajes no es 100% como consecuencia de una mala representación de los costes por parte de los autores.

2) Se considera una tasa de inflación del 3%.
3) La rentabilidad del proyecto es del 10%.
4) Asumimos que toda la producción se venderá, por lo que se considera una demanda estable a lo largo del tiempo de 130,808 KW.
5) La única fuente de incertidumbre que se considera es el precio de la electricidad. Los costes operativos de la planta no están afectados por niveles elevados de incertidumbre. Además, otras incertidumbres tales como los cambios tecnológicos o las políticas medioambientales no son tenidas en cuenta. Más aún, como los costes de los combustibles tienen un impacto muy pequeño en los costes de producción no son introducidos en el caso.
6) El proceso estocástico asumido para la variable incierta es el habitual para este tipo de variables, el movimiento browniano geométrico. La estimación de los parámetros se realiza a partir de la serie histórica de datos del contrato de futuros resultando una tasa de crecimiento del 6% y un coeficiente de volatilidad del 20%. Como ya se ha comentado, se plantea la simulación del proceso una vez realizado el ajuste por el riesgo sistemático. El tipo de interés del activo libre de riesgo asciende al 5%.

1.3.Solución del caso de estudio:

El objetivo de este apartado es realizar la valoración a través del modelo del descuento de flujos tradicional, sin opción real y obtener el valor del proyecto con opción a través del método LSM, comparando ambos métodos obtendremos el valor de la opción real.

El proyecto de inversión tiene 6 posibilidades de puesta en marcha las cuales se pueden ejercer en los momentos cero, uno, dos, tres, cuatro y cinco . La evaluación de la decisión en el momento t=0 se efectúa a partir del modelo del descuento de flujos (mediante la estimación del criterio del VAN), mientras que la decisión de iniciar el proyecto que puede tomarse en los momentos posteriores se evaluará con el enfoque de opciones reales. Concretamente, se va a considerar que la posibilidad de aplazamiento de la puesta en marcha de la planta se puede ejercer solo al final de cada uno de los años (años 1, 2, 3, 4 y 5).



Ambos enfoques parten de la simulación de la fuente de incertidumbre, por las hipótesis consideramos que la única fuente es el precio de la electricidad. Al ser un proyecto de duración 50 años, es imposible mostrar todos los valores para una trayectoria, por lo que se mostrará una pequeña muestra con el fin de enseñar ambos métodos.

Tabla 2: Representación de 10 trayectorias simuladas a lo largo de la vida de la inversión (en la tabla solo hasta T=5)

Trayectoria	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
1	72,5	88,64	70,44	52,00	66,86	100,68
2	72,5	125,86	148,49	130,24	142,66	204,94
3	72,5	59,77	45,32	43,80	31,39	30,72
4	72,5	82,22	88,63	71,25	56,26	71,17
5	72,5	40,11	44,00	65,71	60,47	59,25
6	72,5	50,58	53,84	41,18	39,34	33,22
7	72,5	82,97	64,90	58,16	62,29	59,96
8	72,5	61,14	62,78	37,16	44,90	40,27
9	72,5	69,97	77,10	72,87	118,62	79,51
10	72,5	54,21	51,23	56,19	55,98	50,66

A partir de los valores simulados en cada momento estimamos los flujos de tesorería equivalentes ciertos del proyecto inicial, sin opción, sin más que multiplicar por la demanda y restando los costes. Los costes están obtenidos del apartado anterior y especificados en el Excel[7] adjuntado al trabajo. Los valores calculados se recogen en la tabla 3.

Tabla 3: Representación de los flujos generados por el proyecto de inversión a lo largo de las 10 trayectorias simuladas (en la tabla solo hasta T=5).

Trayectoria	$F_0 = X$	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	-830000	56303	73298	48718	68523	113607
2	-830000	105907	177329	153007	169558	252559
3	-830000	17833	39819	37793	21251	20354
4	-830000	47753	97538	74375	54406	74276
5	-830000	-8380	38060	66989	60006	58389
6	-830000	5574	51172	34297	31855	23686
7	-830000	48749	65919	56930	62431	59335
8	-830000	19650	63094	28941	39255	33095
9	-830000	31427	82182	76533	137517	85390
10	-830000	10422	47693	54305	54028	46940

El método tradicional consiste en el cálculo del VAN sin opción de aplazamiento por lo que el valor del proyecto es el promedio del valor de cada camino. El valor de cada camino es el valor de ejercicio ya que, al no existir posibilidad de aplazamiento, el proyecto se tiene que realizar, promediando este valor se obtiene el VAN del proyecto.

$$V_i^{ejercicio} = X + \sum_{j=1}^{50} \frac{F_i}{(1 + R_f)^j}$$

Nótese que este desarrollo es exactamente el mismo que realizar para cada tiempo t el promedio de los flujos simulados, actualizarlos, sumarlos y restar el desembolso, obteniendo el VAN.

[7] El Excel esta subido a esta dirección de Google Drive.

Tabla 4: Representación del valor de los flujos actualizados (incluido el desembolso) a T=0 a lo largo de las 10 trayectorias simuladas.

Trayectoria	$V_i^{ejercicio}$
1	436845,0793
2	1417482,244
3	1551972,122
4	268560,3787
5	-1104434,785
6	-1379349,261
7	1305671,439
8	-67935,33309
9	715183,1374
10	-1171805,478
VAN	**1195791,96**

A continuación, aplicaremos el sistema LSM, estimando el valor de la opción de aplazamiento como diferencia entre ambos valores actuales. El objetivo de este procedimiento consiste en generar una regla de parada que maximice el valor ampliado de la inversión en cada oportunidad de ejercicio a lo largo de cada trayectoria simulada.

La valoración comienza en la fecha de vencimiento de la opción. En este momento, la valoración de la opción americana se realiza como si fuera europea. Así que no es necesario generar una regla de parada en este momento. Simplemente se determinan las trayectorias en el dinero para lo cual estimamos los valores del proyecto subyacente en los casos de ejercicio y no ejercicio del derecho, en cada trayectoria. El valor en caso de ejercicio coincide con el resultado de actualizar los flujos que se derivan de la realización del proyecto desde el periodo de ejecución a 50 años, que es lo que dura el proyecto, y deduciendo el coste de la inversión necesaria para llevar a cabo la ampliación.

$$V_{5,i}^{ejercicio}(S_{6,i}) = X + \sum_{j=6}^{55} \frac{F_i}{(1+R_f)^{j-5}}$$

Mientras que, en caso de no ejercer, el proyecto no se realiza por lo cual el valor de la actualización de los flujos es 0.

$$V_{5,i}^{No\ ejercicio}(S_{6,1}) = 0$$

Los cálculos correspondientes se recogen en la Tabla 5. A la vista de los resultados obtenidos para las simulaciones del ejemplo observamos que 5 de las trayectorias están en el dinero. En la fecha de vencimiento, la estrategia que maximiza el valor ampliado de la inversión consiste en llevar a cabo el proyecto para dichas trayectorias en el dinero.

Tabla 5: Representación del valor de ejercer, no ejercer y la decisión óptima en T=5 a lo largo de las 10 trayectorias simuladas.

Trayectoria	$V_{5,i}^{No\ ejercicio}$	$V_{5,i}^{ejercicio}$	*En el dinero*	*Decisión Optima*
1	0	233846,6594	Si	Ejercer
2	0	924734,6908	Si	Ejercer
3	0	1843046,053	Si	Ejercer
4	0	95996,72819	Si	Ejercer
5	0	-1343586,683	No	Continuar
6	0	-1589363,182	No	Continuar
7	0	1486780,609	Si	Ejercer
8	0	22899,38187	Si	Ejercer
9	0	495178,0292	Si	Ejercer
10	0	-1413928,77	No	Continuar

Una vez determinado el valor en la fecha de vencimiento del derecho, retrocedemos hasta el instante anterior en el que puede ejercerse la opción, esto es T=4. El modelo LSM aplicado a opciones reales se fundamenta en la elaboración de una regresión tomando como variable dependiente la diferencia del valor de la política optima en T=4 menos el valor de continuar.

$$Y_{4,i}(S_{5,i}) = V_{4,i}^{ejercicio} - V_{4,i}^{Continuar}$$

El valor de ejercicio se calcula como el VAN en T=5 por cada camino si el proyecto se realiza

$$V_{4,i}^{ejercicio}(S_{5,i}) = X + \sum_{j=5}^{54} \frac{F_i}{(1+R_f)^{j-4}}$$

El valor de continuar se define como el valor actualizado de la política optima de ejercicio entre el periodo que se quiere evaluar y el último periodo de ejercicio. Por lo tanto, el valor de continuar será:

$$V_{4,i}^{Continuar} = \begin{cases} \frac{V_{5,i}^{ejercicio}}{(1+R_f)} & si\ V_{5,i}^{ejercicio} > 0 \\ 0\ si\ V_{5,i}^{ejercicio} < 0 \end{cases}$$

Por otro lado, se toma como variable independiente las simulaciones de la variable estado y se realiza la regresión usando mínimos cuadrados.

$$Y_{4,i}(S_{5,i}) = a_0 + a_1 S_{5,i} + a_2 S_{5,i}^2$$

Tabla 6: Representación del valor de ejercer, no ejercer T=4 a lo largo de las 10 trayectorias simuladas.

Trayectoria	$V_{4,i}^{No\ ejercicio}$	$V_{4,i}^{ejercicio}$	*En el dinero*
1	0	313163,294	Si
2	0	1102112,31	Si
3	0	1774818,403	Si
4	0	131363,2146	Si
5	0	-1286288,038	No
6	0	-1559189,695	No
7	0	1461363,158	Si
8	0	-1414,538404	No
9	0	533734,5817	Si
10	0	-1367913,325	No

La aproximación de la función esperada de la diferencia entre ejercer y mantener viva la opción en T = 4 viene dada por la siguiente expresión:

$$\widehat{Y_4} = -99452,319 - 2105,3705\ S_5 + 14,403411\ {S_5}^2$$

Tabla 7: Representación de las Variables que intervienen en la regresión en T = 4.

Trayect	*Valor de No ejercicio*	*Valor de Ejercicio*	*En el dinero*	*Valor de continuar*	Y_4	S_4	S_4^2	$\widehat{Y_4}$	*Decisión Optima*
1	0	313163	Si	229392	83771	101	10137	79583	Ejercer
2	0	1102112	Si	907121	194992	205	41999	195545	Ejercer
3	0	1774818	Si	1807940	-33122	31	943	-37851	Continuar
4	0	131363	Si	94168	37195	71	5066	33934	Ejercer
5	0	-1286288	No	0	0	59	3511	13889	Ejercer
6	0	-1559190	No	0	0	33	1103	-33106	Continuar
7	0	1461363	Si	1458461	2902	60	3596	15109	Ejercer
8	0	-1415	No	22463	0	40	1622	-19930	Continuar
9	0	533735	Si	485746	47989	80	6322	47407	Ejercer
10	0	-1367913	No	0	0	51	2567	-1128	Continuar

El valor ajustado de la regresión provee al decisor un criterio objetivo de decisión, si $\widehat{Y_3} > 0$ implica que el valor esperado de ejercicio del proyecto es mayor que el valor esperado por continuar con la opción, esto implica que la decisión optima es ejercer. Por otro lado, si $\widehat{Y_3} < 0$ significa que el valor esperado de continuar es mayor que el valor de ejercer, luego la decisión optima es continuar con la opción, es decir no ejercer, aplazar.

La función de la diferencia esperada entre el valor de ejercicio y de continuación para los momentos posteriores para T= 3 viene dada por los siguientes valores:

$$V_{3,i}^{ejercicio}(S_{4,i}) = X + \sum_{j=4}^{53} \frac{F_i}{(1+R_f)^{j-3}}$$

$$V_{3,i}^{Continuar}(S_{4,1}) = \begin{cases} \dfrac{V_{4,i}^{ejercicio}}{(1+R_f)} \quad si\ \widehat{Y_{4,i}} > 0 \\ \dfrac{V_{5,i}^{ejercicio}}{\left(1+R_f\right)^2}\ si \begin{cases} \widehat{Y_{4,i}} < 0 \\ V_{5,i}^{ejercicio} > 0 \end{cases} \\ 0\ si \begin{cases} \widehat{Y_{4,i}} < 0 \\ V_{5,i}^{ejercicio} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Tabla 8: Representación del valor de ejercer, no ejercer T=3 a lo largo de las 10 trayectorias simuladas.

Trayectoria	$V_{2,i}^{No\ ejercicio}$	$V_{2,i}^{ejercicio}$	*En el dinero*
1	0	6226298,97	Si
2	0	3798170,5	Si
3	0	-923873,03	No
4	0	1875828,84	Si
5	0	1850724,61	Si
6	0	140650,039	Si
7	0	1310197,83	Si
8	0	468287,555	Si
9	0	-1508827,14	No
10	0	-917934,266	No

La aproximación de la función esperada de la diferencia entre ejercer y mantener viva la opción en T=3 viene dada por la siguiente expresión:

$$\widehat{Y}_3 = -186809{,}50776 + 4375{,}685 S_4 - 16{,}65607 S_4^2$$

Tabla 9: Representación de las Variables que intervienen en la regresión en T = 3.

Trayect	*Valor de No ejercicio*	*Valor de Ejercicio*	*En el dinero*	*Valor de continuar*	Y_3	S_3	S_3^2	$\widehat{Y}_3$	*Decisión Optima*
1	0	345133	Si	307198	37935	67	4470	31285	Ejercer
2	0	1177690	Si	1081120	96570	143	20353	98442	Ejercer
3	0	1708612	Si	1773503	-64891	31	985	-65874	Continuar
4	0	142289	Si	128861	13428	56	3166	6659	Ejercer
5	0	-1228927	No	-1261787	0	60	3656	16874	Ejercer
6	0	-1521899	No	0	0	39	1548	-40433	Continuar
7	0	1438721	Si	1433528	5193	62	3880	21117	Ejercer
8	0	-22666	No	22035	0	45	2016	-23930	Continuar
9	0	624834	Si	523568	101266	119	14071	97873	Ejercer
10	0	-1315426	No	0	0	56	3134	5948	Ejercer

La función de la diferencia esperada entre el valor de ejercicio y de continuación para los momentos posteriores para T=2 viene dada por los siguientes valores

$$V_{2,i}^{ejercicio}(S_{3,i}) = X + \sum_{j=3}^{52} \frac{F_i}{(1+R_f)^{j-2}}$$

$$V_{2,i}^{Continuar}(S_{3,i}) = \begin{cases} \dfrac{V_{3,i}^{ejercicio}}{(1+R_f)} \quad si\ \widehat{Y_{3,i}} > 0 \\ \dfrac{V_{4,i}^{ejercicio}}{(1+R_f)^2} \ si \begin{cases} \widehat{Y_{3,i}} < 0 \\ \widehat{Y_{4,i}} > 0 \end{cases} \\ \dfrac{V_{5,i}^{ejercicio}}{(1+R_f)^3} si \begin{cases} \widehat{Y_{3,i}}, \widehat{Y_{4,i}} < 0 \\ V_{5,i}^{ejercicio} > 0 \end{cases} \\ 0 \ si \begin{cases} \widehat{Y_{3,i}}, \widehat{Y_{4,i}} < 0 \\ V_{5,i}^{ejercicio} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Tabla 10: Representación del valor de ejercer, no ejercer T=2 a lo largo de las 10 trayectorias simuladas.

Trayectoria	$V_{2,i}^{No\ ejercicio}$	$V_{2,i}^{ejercicio}$	*En el dinero*
1	0	355421	Si
2	0	1242274	Si
3	0	1649876	Si
4	0	173094	Si
5	0	-1165612	No
6	0	-1483112	No
7	0	1396932	Si
8	0	-57277	No
9	0	653367	Si
10	0	-1263245	No

La aproximación de la función esperada de la diferencia entre ejercer y mantener viva la opción en T=2 viene dada por la siguiente expresión:

$$\widehat{Y_2} = -344255{,}842 + 7920{,}3189 S_3 - 35{,}44886 S_3^2$$

Tabla 11: Representación de las Variables que intervienen en la regresión en T = 2.

Trayect	*Valor de No ejercicio*	*Valor de Ejercicio*	*En el dinero*	*Valor de continuar*	Y_2	S_2	S_2^2	$\widehat{Y_2}$	*Decisión Optima*
1	0	355421	Si	338559	16862	52	2704	-28265	Continuar
2	0	1242274	Si	1155258	87016	130	16964	85981	Ejercer
3	0	1649876	Si	1739722	-89847	44	1918	-65352	Continuar
4	0	173094	Si	139579	33515	71	5076	40101	Ejercer
5	0	-1165612	No	-1205519	0	66	4317	23113	Ejercer
6	0	-1483112	No	0	0	41	1696	-78226	Continuar
7	0	1396932	Si	1411317	-14385	58	3382	-3524	Continuar
8	0	-57277	No	21616	0	37	1381	-98896	Continuar
9	0	653367	Si	612933	40434	73	5310	44654	Ejercer
10	0	-1263245	No	-1290371	0	56	3157	-11141	Continuar

La función de la diferencia esperada entre el valor de ejercicio y de continuación para los momentos posteriores para T=1 viene dada por los siguientes valores

$$V_{1,i}^{ejercicio}(S_{2,i}) = X + \sum_{j=2}^{51} \frac{F_i}{(1+R_f)^{j-1}}$$

$$V_{1,i}^{Continuar}(S_{2,i}) = \begin{cases} \dfrac{V_{2,i}^{ejercicio}}{(1+R_f)} \quad si\ \widehat{Y_{2,i}} > 0 \\ \dfrac{V_{3,i}^{ejercicio}}{\left(1+R_f\right)^2} \quad si \begin{cases} \widehat{Y_{2,i}} < 0 \\ \widehat{Y_{3,i}} > 0 \end{cases} \\ \dfrac{V_{4,i}^{ejercicio}}{\left(1+R_f\right)^3} si \begin{cases} \widehat{Y_{2,i}}\widehat{Y_{3,i}} < 0 \\ \widehat{Y_{4,i}} > 0 \end{cases} \\ \dfrac{V_{5,i}^{ejercicio}}{\left(1+R_f\right)^4} si \begin{cases} \widehat{Y_{2,i}}, \widehat{Y_{3,i}}\widehat{Y_{4,i}} < 0 \\ V_{5,i}^{ejercicio} > 0 \end{cases} \\ 0\ si \begin{cases} \widehat{Y_{2,i}}, \widehat{Y_{3,i}}\widehat{Y_{4,i}} < 0 \\ V_{5,i}^{ejercicio} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Tabla 12: Representación del valor de ejercer, no ejercer T=1 a lo largo de las 10 trayectorias simuladas.

Trayectoria	$V_{1,i}^{No\ ejercicio}$	$V_{1,i}^{ejercicio}$	*En el dinero*
1	0	385998	Si
2	0	1341894	Si
3	0	1595346	Si
4	0	227017	Si
5	0	-1132413	No
6	0	-1428440	No
7	0	1348205	Si
8	0	-59101	No
9	0	689755	Si
10	0	-1218787	No

La aproximación de la función esperada de la diferencia entre ejercer y mantener viva la opción en T=1 viene dada por la siguiente expresión:

$$\widehat{Y}_1 = -443051{,}883 + 8927{,}9708 S_2 - 34{,}5016\, S_2^2$$

Tabla 13: Representación de las Variables que intervienen en la regresión en T = 1.

Trayect	*Valor de No ejercicio*	*Valor de Ejercicio*	*En el dinero*	*Valor de continuar*	Y_1	S_1	S_1^2	$\widehat{Y}_1$	*Decisión Optima*
1	0	385998	Si	332110	53887	70	4962	14641	Ejercer
2	0	1341894	Si	1218611	123283	148	22050	121922	Ejercer
3	0	1595346	Si	1706585	-111239	45	2054	-109298	Continuar
4	0	227017	Si	169797	57220	89	7855	77205	Ejercer
5	0	-1132413	No	-1143410	0	44	1936	-117016	Continuar
6	0	-1428440	No	0	0	54	2899	-62392	Continuar
7	0	1348205	Si	1384435	-36230	65	4212	-8937	Continuar
8	0	-59101	No	21204	0	63	3942	-18520	Continuar
9	0	689755	Si	640922	48833	77	5945	40220	Ejercer
10	0	-1218787	No	-1265792	0	51	2624	-76232	Continuar

Debido al enfoque de opciones reales, el algoritmo finaliza en T=1, sin embargo para poder comprar el resultado con el método del VAN tradicional hay que realizar una actualización a T=0 de la decisión óptima de T=1.

Tabla 14: Representación del valor de la decisión optima actualizado a T=0 a lo largo de las 10 trayectorias simuladas.

Trayectoria	$V_i^{Decisión\ optima}$
1	378645,1678
2	1316334,314
3	1674078,487
4	222692,4835
5	-1121630,701
6	0
7	1358064,499
8	20800,00252
9	676616,3861
10	-1241681,869
VAN LSM	**328391,877**

Tabla 15:Representación del resumen del modelo LSM y del modelo Tradicional.

Trayect	*T=1*	*T=2*	*T=3*	*T=4*	*T=5*	*Valor Tradicional*	*Van LSM*	*Valor ampliado*
1	Ejercer	Continuar	Ejercer	Ejercer	Ejercer	436845	378645	-58200
2	Ejercer	Ejercer	Ejercer	Ejercer	Ejercer	1417482	1316334	-101148
3	Continuar	Continuar	Continuar	Continuar	Ejercer	1551972	1674078	122106
4	Ejercer	Ejercer	Ejercer	Ejercer	Ejercer	268560	222692	-45868
5	Continuar	Ejercer	Ejercer	Ejercer	Continuar	-1104435	-1121631	-17196
6	Continuar	Continuar	Continuar	Continuar	Continuar	-1379349	0	1379349
7	Continuar	Continuar	Ejercer	Ejercer	Ejercer	1305671	1358064	52393
8	Continuar	Continuar	Continuar	Continuar	Ejercer	-67935	20800	88735
9	Ejercer	Ejercer	Ejercer	Ejercer	Ejercer	715183	676616	-38567
10	Continuar	Continuar	Ejercer	Continuar	Continuar	-1171805	-1241682	-69876
						197219	**328392**	**131173**

Una vez descrito el método LSM realicé la rutina con 200.000 de caminos para calcular el VAN

Tabla 16: Representación de la solución del caso usando 200.000 caminos.

Van tradicional	*Van LSM*	*Valor ampliado*
192801,541	506011,934	313210,393

Siguiendo el sistema LSM, el decisor obtiene una regla que maximice el valor de la opción, sin embargo, esta regla no se ha explicitado para el último periodo de ejercicio. En el último periodo de ejercicio, una opción americana -o bermuda, como se ha considerado en este trabajo- y una europea se comportan de la misma forma, luego bastará simular partiendo de S_7. A través de estas trayectorias simulaciones se calculará $V_{7,i}^{ejercicio}$ y escogiendo aquellos caminos que estén en el dinero, se realizará una regresión, permitiendo obtener el valor esperado de ejercer en T=6 en función de S_7.

2. Estudio de la robustez:

En este epígrafe vamos a estudiar la robustez del método LSM. Se dice que un sistema o un método numérico es robusto cuando ante pequeñas perturbaciones del sistema, la solución final apenas varía. En el artículo de Longstaff y Schwatz (2001) establecen la siguiente proposición:

$$V(X) \geq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} LSM(w_i; M, K)$$

concluyendo que hay que aumentar el número de caminos, el grado del polinomio de la regresión y el número de ejercicios hasta que el valor de la opción no aumente, entonces tendremos el verdadero valor de la opción. Sin embargo, por la naturaleza de esta opción no se puede aumentar el número de periodos de ejercicios. Longstaff y Schwatz (2001) establecieron la desigualdad para opciones americanas, pero en el caso práctico es una opción del tipo bermudas.

Veamos cómo afecta el aumento del grado del polinomio de la regresión a la estimación del método LSM. Los valores mostrados de las regresiones se han obtenido usando 200.000 caminos, una vez generados estos caminos se han usado para generar todas las regresiones, por lo que todas las regresiones han usado los mismos valores.

Tabla 17: Representación de los regresores en T = 4.

Estimadores	2	3	4	5	6
a_0	-94243,7149	-95404,7254	-106448,201	-144466,095	-53470,7723
a_1	1509,89831	1543,87529	1958,29586	3739,01473	-1460,30344
a_2	-1,26626778	-1,54721386	-6,52263361	-35,3164231	72,8142656
a_3		**0,00065623**	**0,02338858**	**0,22556079**	**-0,83076386**
a_4			**-3,3542E-05**	**-0,00065472**	**0,00450427**
a_5				**6,7461E-07**	**-1,1386E-05**
a_6					**1,0646E-08**

Tabla 18: Representación de los regresores en T = 3.

Estimadores	2	3	4	5	6
a_0	-144784,878	-174614,111	-231245,528	-282332,362	-246322,266
a_1	2342,50219	3255,75457	5459,58892	7916,17855	5831,48846
a_2	-4,26386375	-12,3693445	-40,3646624	-81,9378731	-37,2144831
a_3		**0,02082367**	**0,15834081**	**0,46861207**	**0,01193982**
a_4			**-0,00022022**	**-0,00124443**	**0,00110838**
a_5				**1,2009E-06**	**-4,6359E-06**
a_6					**5,4874E-09**

Tabla 19: Representación de los regresores en T = 2.

Estimadores	2	3	4	5	6
a_0	-201294,625	-249909,137	-432954,872	-380688,693	-555061,781
a_1	3416,53355	5016,34529	12674,6606	10002,5107	20776,4332
a_2	-9,03120319	-24,8098586	-132,731207	-83,5108056	-335,314013
a_3		**0,0466747**	**0,65365598**	**0,24504843**	**3,10245816**
a_4			**-0,00114922**	**0,00038077**	**-0,01627097**
a_5				**-2,0702E-06**	**4,5318E-05**
a_6					**-5,1598E-08**

Tabla 20: Representación de los regresores en T = 1.

Estimadores	2	3	4	5	6
a_0	-255390,814	-397188,816	-545556,616	-712603,976	-823353,805
a_1	4592,63231	9616,76689	16384,0325	25985,0687	33674,555
a_2	-15,2325816	-70,4460223	-178,187378	-384,366242	-593,078438
a_3		**0,188217**	**0,89859325**	**2,96949231**	**5,81170055**
a_4			**-0,00163766**	**-0,01138043**	**-0,03191684**
a_5				**1,7199E-05**	**9,2076E-05**
a_6					**-1,08E-07**

Tabla 21: Representación del VAN Ampliado obtenido por el método LSM (VAN LSM) según el grado de la regresión.

Grado	2	3	4	5	6
VAN LSM	508533,33	498868,391	488806,672	486280,18	489312,04

Como se puede observar en cada periodo de ejercicio los regresores a_3 a a_6 son muy pequeños lo que muestra que no influye en la regresión, además el valor del VAN LSM apenas varía. Podemos concluir que basta con usar regresiones de grado 2.

Por la naturaleza de la opción no se puede aumentar el número de periodos en los que se puede ejercer la opción, por lo que veamos cómo afecta el incremento del número de caminos sobre el VAN Ampliado del proyecto.

Tabla 22: Representación del VAN LSM según el número de caminos simulados.

Caminos	10.000	50.000	100.000	200.000
VAN LSM	531462,168	517612,09	510367,958	506527,125

Como se puede observar en la tabla 24, a medida que se aumenta el número de caminos el VAN LSM se aproxima a su verdadero valor, De hecho, se puede obtener una buena aproximación al verdadero valor usando 50.000 caminos.

La conclusión es que el sistema LSM es un método numérico muy robusto para el cual basta usar regresiones de grado 2 y 50.000 caminos, por lo que basta con usar 25.000 caminos y otros tantos a través de variables antitéticas[8].

8 La técnica de las variables antitéticas consiste en que para cada número aleatorio obtenido al aplicar el sistema Monte Carlo, se genera el numero antitético y se construye la trayectoria. En el caso del sistema LSM los números aleatorios generados siguen la N(0,1), luego para cada número aleatorio B_i se genera el número antitético $B'_i = 1 - B_i$. La ventaja de esta técnica es doble: reduce el número de muestras normales que se deben tomar para generar N trayectorias y reduce la varianza de los trayectos de la muestra, mejorando la precisión.

Conclusiones

Las nuevas propuestas de valoración basadas en la simulación de Monte Carlo, la programación dinámica y la regresión estadística están llamadas a revolucionar la valoración de la empresa y sus inversiones. Se trata de modelos flexibles capaces de valorar las distintas fuentes de valor de cualquier tipo de inversión con independencia de la naturaleza de sus opciones y de sus fuentes de incertidumbre.

El principal inconveniente de este procedimiento radica en que su aplicación requiere un elevado volumen de cálculo, es un método menos intuitivo y más complejo que el modelo binomial. Sin embargo, la incorporación de un número superior de fuentes de incertidumbre en la metodología LSM supone incrementar linealmente el esfuerzo que conlleva la simulación inicial de las variables de estado.

Debido a la complejidad de los cálculos y el volumen de información que requiere el procedimiento LSM es necesario el empleo de paquetes informáticos de valoración, lo que puede suponer una cierta pérdida de transparencia para los responsables de la dirección financiera.

No obstante, como apuntan Amran y Kulatilaka (1999), la búsqueda de la flexibilización de los modelos de valoración queda justificada siempre que los beneficios, en términos de mayor precisión y simplificación operativa de la valoración, compensen los costes de abstracción e implementación de las nuevas propuestas. Concretamente, cuando la opción valorada puede ejercerse en varias fechas anteriores al vencimiento, su valor depende de múltiples fuentes de incertidumbre o éstas siguen procesos estocásticos diferentes del Browniano, el procedimiento LSM aquí explicado se manifiesta como la más eficiente de las alternativas conocidas.

Apéndice A:

```
function TFG(camino)
   mu=0.06;
   sigma=0.2;
   Desembolso=830000;
   S0=72.503;
  variableestado=variable_estado(S0,mu,sigma,camino);
  VAN_tradicional=van_sin_opcion(camino,variableestado);
  VAN_LSM=Lsm2(variableestado,camino);
      %Salida
   xlswrite('TFG',{'Van Tradicional'},'Resumen','H3');
   xlswrite('TFG',VAN_tradicional,'Resumen','H4');
   xlswrite('TFG',{'Van LSM'},'Resumen','I3');
   xlswrite('TFG',VAN_LSM,'Resumen','I4');
   xlswrite('TFG',mean(VAN_LSM),'Resumen','I2');
   xlswrite('TFG',{'Valor ampliado'},'Resumen','J3');

   disp("Fin PROCESO")

end

function Pagos=Pagos_fun(tiempo)
     Desembolso= 830000;
     Pagos=0.0248*Desembolso;
     if tiempo>25
           Pagos = 0.0497*Desembolso;
           if tiempo == 30
               Pagos=2*0.0497*Desembolso;
           end
     end

     if tiempo == 30 || tiempo==50
         Pagos=2*0.0497*Desembolso;
     end

     if tiempo==1 | tiempo==10 |tiempo==20
       Pagos = 0.0497*Desembolso+0.0248*Desembolso;
     end

     if tiempo== 25
         Pagos=0.0248*Desembolso+0.1446*Desembolso;
     end
     if tiempo== 40
         Pagos=685663;
     end

     end
end



function variableestado=variable_estado(S0,mu,sigma,camino)
     tiempo=1.000712329;
     Rcont=0.048790164;
     for i=1:camino
      s(i)=S0;
     end
         for j=1:55
```

```
            for i=1:camino
                numero=rand;
                variableestado(i,j)=s(i)*exp([Rcont-mu-
0.5*sigma^2]*tiempo+sigma*norminv(numero)*(tiempo)^(1/2));
                s(i)=variableestado(i,j);
            end
         end

     %Salida
         xlswrite('TFG',variableestado,'Variable Estado','B2');
         Tabla1={'Tiempo/Caminos'};
         Tabla2=zeros(1,50);
        for i=1:j
            Tabla2(i)=i ;
        end
            for i=1:camino
            Tabla3(i)=i ;
        end
        xlswrite('TFG',Tabla1,'Variable Estado','A1');
        xlswrite('TFG',Tabla2,'Variable Estado','B1');
         xlswrite('TFG',Tabla3','Variable Estado','A2');
        disp("Fin Variable estado")
    end
```

function VA_camino=van_sin_opcion(camino,variableestado)

```
         VA_promedio=0;
         VA_camino=zeros(camino,1);
          h=50;
         for j=50:-1:1
         tasa_descuento=1.05^(-j);
         tasa_inflacion=1.03^j;
            Suma_flujo=0;

            for i=1:camino
                 flujo(i,j)=variableestado(i,j)*1332.808-Pagos_fun(j);
                 variable(i,j)=variableestado(i,j);
                 pagos(i,j)=Pagos_fun(j);
                 Suma_flujo=Suma_flujo+flujo(i,j);

VA_camino(i)=VA_camino(i)+flujo(i,j)*tasa_descuento*tasa_inflacion;

VA_total(i,j)=flujo(i,j)*tasa_descuento*tasa_inflacion;
                 end

flujo(i+1,j)=Suma_flujo/camino*tasa_descuento*tasa_inflacion;
            VA_promedio=VA_promedio+flujo(i+1,j);
             end
         for i=1:camino
             VA_camino(i)=VA_camino(i)-830000;
         end

         VAN_tradicional=VA_promedio-830000;

     %Salida
        Tabla1={'Tiempo/Caminos'};
        Tabla2=zeros(1,50);
        for i=1:50
            Tabla2(i)=i ;
        end
```

```
        Tabla3=zeros(camino+1,1);
        for i=1:camino
            Tabla3(i)=i ;
        end
         xlswrite('TFG',Tabla1,'Flujo Sin opción abandono','A1');
         xlswrite('TFG',Tabla2,'Flujo Sin opción abandono','B1');
         xlswrite('TFG',Tabla3,'Flujo Sin opción abandono','A2');
         xlswrite('TFG',flujo,'Flujo Sin opción abandono','B2');
          xlswrite('TFG',pagos,'Flujo Sin opción abandono','B25');
         xlswrite('TFG',variable,'Flujo Sin opción abandono','B45');
         xlswrite('TFG',Tabla1,'VA Flujo Sin opción abandono','A1');
         xlswrite('TFG',Tabla2,'VA Flujo Sin opción abandono','B1');
         xlswrite('TFG',Tabla3,'VA Flujo Sin opción abandono','A2');
         xlswrite('TFG',VA_total,'VA Flujo Sin opción abandono','B2');
         xlswrite('TFG',VAN_tradicional,'Resumen','H2');
         disp("Fin Van tradicional")

end
```

function Valor_continuar=Lsm(variableestado,camino)

```
    Valor_no_ejercer=zeros(camino,1);
    Valor_continuar=zeros(camino,1);
    h=2;

    tiempo=6
     for i=1:camino
          VA_flujo=0;
         for j=50:-1:1
                        flujo(i,j)=variableestado(i,j+tiempo-
1)*1332.808-Pagos_fun(j);
                 if i==2
                        control(j)=variableestado(i,j+tiempo-1);
                        Pagos(j)=Pagos_fun(j);
                  end
                        VA_flujo=VA_flujo+flujo(i,j)*1.05^(-j)*1.03^j;
         end

         Valor_ejercicio(i)=VA_flujo-830000;
         if Valor_ejercicio(i)>0
             Dinero(i)=["Si"];
             resultado(i)=["Ejercer"];
             Valor_continuar(i)= Valor_ejercicio(i);
             else
                  Dinero(i)=["No"];
                  resultado(i)=["Continuar"];
         end
                Variable_estado(i)=variableestado(i,tiempo);
                Variable_estado_2(i)=variableestado(i,tiempo)^2;
    pagina=strcat('LSM',num2str(tiempo));
    xlswrite('TFG',{'Variable estado'},pagina,'H4');
    xlswrite('TFG',Variable_estado',pagina,'H5');
    xlswrite('TFG',{'Variable estado^2'},pagina,'I4');
    xlswrite('TFG',Variable_estado_2',pagina,'I5');
    xlswrite('TFG',{'Valor No Ejercer'},pagina,'C4');
    xlswrite('TFG',Valor_no_ejercer,pagina,'C5');
    xlswrite('TFG',{'Valor Ejercer'},pagina,'D4');
    xlswrite('TFG',Valor_ejercicio',pagina,'D5');
    xlswrite('TFG',{'En el dinero'},pagina,'E4');
    xlswrite('TFG',Dinero',pagina,'E5');
    xlswrite('TFG',{'Valor Continuar'},pagina,'F4');
```

```
    xlswrite('TFG',Valor_continuar,pagina,'F5');
    xlswrite('TFG',{'Decision optima'},pagina,'K4');
    xlswrite('TFG',resultado',pagina,'K5');

     end

     for i=1:camino
           Valor_continuar(i)=Valor_continuar(i)*1.03/1.05;

    end
    xlswrite('TFG',{'Valor Continuar t+1'},pagina,'L4');
    xlswrite('TFG',Valor_continuar,pagina,'L5');
    xlswrite('TFG',control,pagina,'D28');
    xlswrite('TFG',Pagos,pagina,'D29');
    for i=1:camino
       Decision(i,tiempo)=resultado(i);
    end

    for tiempo=5:-1:1
    k=1;
    tiempo
             for i=1:camino
                 VA_flujo=0;
                     for j=50:-1:1
                        flujo(i,j)=variableestado(i,j+tiempo-
1)*1332.808-Pagos_fun(j);
                        if i==2
                        control(j)=variableestado(i,j+tiempo-1);
                        Pagos(j)=Pagos_fun(j);
                        end
                        VA_flujo=VA_flujo+flujo(i,j)*1.05^(-j)*1.03^j;
                     end
               Valor_ejercicio(i)=VA_flujo-830000;%VAN del proyecto
para cada camino
            if Valor_ejercicio(i)>0
                 Dinero(i)=["Si"];
                 Dato_regresion(k)=Valor_ejercicio(i)-
Valor_continuar(i);
                 Y(i)=Valor_ejercicio(i)-Valor_continuar(i);
                 Dato_variable_estado(k)=variableestado(i,tiempo);
                 k=k+1;
              else
                  Dinero(i)=["No"];
                  Y(i)=0;
            end
                Variable_estado(i)=variableestado(i,tiempo);
                Variable_estado_2(i)=variableestado(i,tiempo)^2;
             end
    resultado=regresion(2,Dato_regresion,Dato_variable_estado,camino,t
iempo,Variable_estado);
    pagina=strcat('LSM',num2str(tiempo));
    xlswrite('TFG',{'Variable estado'},pagina,'H4');
    xlswrite('TFG',Variable_estado',pagina,'H5');
    xlswrite('TFG',{'Variable estado^2'},pagina,'I4');
    xlswrite('TFG',Variable_estado_2',pagina,'I5');
    xlswrite('TFG',{'Valor No Ejercer'},pagina,'C4');
    xlswrite('TFG',Valor_no_ejercer,pagina,'C5');
    xlswrite('TFG',{'Valor Ejercer'},pagina,'D4');
    xlswrite('TFG',Valor_ejercicio',pagina,'D5');
    xlswrite('TFG',{'En el dinero'},pagina,'E4');
    xlswrite('TFG',Dinero',pagina,'E5');
```

```
    xlswrite('TFG',{'Valor Continuar'},pagina,'F4');
    xlswrite('TFG',Valor_continuar,pagina,'F5');
    xlswrite('TFG',Y',pagina,'G5');
    xlswrite('TFG',{'Decision optima'},pagina,'K4');
    xlswrite('TFG',resultado',pagina,'K5');
    for i=1:camino
       if resultado(i)==["Ejercer"];
           if tiempo==1
             Valor_continuar(i)=Valor_ejercicio(i);
           else
           Valor_continuar(i)=Valor_ejercicio(i)*1.03/1.05;
           end
       else
           if tiempo==1
             Valor_continuar(i)=Valor_continuar(i);
           else
           Valor_continuar(i)=Valor_continuar(i)*1.03/1.05;
           end
       end
    end
    xlswrite('TFG',{'Valor Continuar t+1'},pagina,'L4');
    xlswrite('TFG',Valor_continuar,pagina,'L5');
    xlswrite('TFG',control,pagina,'D28');
    xlswrite('TFG',Pagos,pagina,'D29');
    for i=1:camino
       Decision(i,tiempo)=resultado(i);
    end
    xlswrite('TFG',Decision,'Resumen','C4');
    end

end
```

function resultado =regresion(Grado,Datos_regresion, Dato_variable_estado,camino,tiempo,variable_estado)

```
n=numel(Dato_variable_estado);
 for i=1:n
  for j=1:Grado+1
     A(i,j)= Dato_variable_estado(i)^(j-1);
  end
end

Estimadores=inv(A'*A)*A'*Datos_regresion';

k=1;

for i=1:camino
estimacion(i)=0;

            for j=1:Grado+1
            estimacion(i)= variable_estado(i)^(j-
1)*Estimadores(j)+estimacion(i);
            end

         if estimacion(i)>0
                resultado(i)=["Ejercer"];
            else
                resultado(i)=["Continuar"];
                end
```

```
end
pagina=strcat('LSM',num2str(tiempo));
  xlswrite('TFG',Dato_variable_estado',pagina,'A25');
  xlswrite('TFG',A,pagina,'D38');
   xlswrite('TFG',Datos_regresion',pagina,'B25');
   xlswrite('TFG',{'Estimación'},pagina,'J4');
  xlswrite('TFG',estimacion',pagina,'J5');
  xlswrite('TFG',Estimadores,pagina,'A1');

end
```

Bibliografía

Amram, M. & Kulatilaka, N. (1999) Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World. Oxford University Press, Oxford.

Longstaff F. A. & Schwartz, E.S. (2001). Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Aquares Approach. The Society for financial studies, 14, 114-147.

Moreno, M & Navas, F. (2003). On the Robustness of Least-Squares Monte Carlo for Pricing American Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 6, 107-128.

Alonso Bonis, Susana; Azofra Palenzuela, Valentin & Fuente Herrero, Gabriel de la. (2009). What do you do when the binomial cannot value real options: the lSM model . Applied Economics , Volume 41.

Alonso Bonis, Susana; Azofra Palenzuela, Valentin & Fuente Herrero, Gabriel de la. (2009). La valoración de la inversión empresarial, las opciones reales y la simulación de Monte Carlo: propuesta y aplicación de un modelo . Estudios financieros. Revista de contabilidad y tributación: Comentarios, casos prácticos, 310, 111 - 154.

Alonso Bonis, Susana; Azofra Palenzuela, Valentin & Fuente Herrero, Gabriel de la (2009).. Las opciones reales en el sector eléctrico: el caso de la expansión de Endesa en Lationamérica . Cuadernos de economía y dirección de la empresa; 0(38): 65-94.

Alonso Bonis, Susana; Azofra Palenzuela, Valentin & Fuente Herrero, Gabriel de la. Las Opciones Reales y la Simulación de Monte Carlo (2007). Universia Business Review; 0(16): 52-63

Rincón, L. (2011). Introducción a los PROCESOS ESTOCASTICOS. 31/05/2022, de Facultad de Ciencias UNAM Sitio web: https://lya.fciencias.unam.mx/lars/libros/procesos.pdf