Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Economía

Ejemplos Clásicos de la Teoría de Juegos

Presentado por:

Juan Camilo Hernández Blandón

Valladolid, 25 de Julio de 2022

Resumen:

El presente Trabajo Fin de Grado busca realizar una aproximación a una disciplina matemática tan estudiada como es la Teoría de Juegos. El nacimiento de esta se atribuye al matemático John Von Neumann y al economista Oskar Morgenstern con la publicación de su libro “Theory of Games and Economic Behaviour” en 1944. Más tarde y gracias a economistas como John Nash, William Vickrey o Paul Milgrom la Teoría de Juegos alcanzaría su máxima relevancia al ganar estos estudiosos, entre otros, los Premios Nobel de Economía.

Por otro lado, este trabajo versará exclusivamente en los juegos no cooperativos y en concreto se expondrán los ejemplos clásicos de la Teoría de Juegos y se hallarán los Equilibrios de Nash de estos, tanto en los juegos en forma normal, siendo el más conocido el Dilema del Prisionero, como en los juegos en forma extensiva, siendo uno de los ejemplos más conocidos el Duopolio de Stackerlberg. No sin antes repasar la terminología y los conceptos básicos de la materia, como podrían ser los tipos de estrategias (puras o mixtas), o el tipo de información existente en el juego, a modo de introducción.

Palabras Clave: Teoría de Juegos, Equilibrio de Nash, Juegos no Cooperativos, Premios Nóbel.

Clasificación JEL: C7, C72, C70

Summary:

This Final Degree Project seeks to make an approximation to a mathematical discipline as studied as Game Theory. The birth of this is attributed to the mathematician John Von Neumann and the economist Oskar Morgenstern with the publication of his book "Theory of Games and Economic Behavior" in 1944. Later and thanks to economists such as John Nash, William Vickrey or Paul Milgrom Game Theory would reach its maximum relevance when these scholars won, among others, the Nobel Prizes in Economics.

Furthermore, this essay focuses purely on non-cooperative games, addressing classical examples of Game Theory and their Nash Equilibrium, both in normal form, where the Prisoner's Dilemma stands out, and in extensive form, where Stackerlberg's Duopoly is best known. Before this and as an introduction to the topics, the terminology and basic concepts such as the type of strategies (pure or mixed), or the type of information that exists in the game, will be reviewed.

Key Words: Game Theory, Nash Equilibrium, Non Cooperative Games, Nobel Prizes

JEL Classification: C7, C72, C70

INDICE DE CONTENIDO

INDICE DE TABLAS:

INDICE DE FIGURAS:

1 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS, OBJETIVOS DEL TRABAJO Y METODOLOGÍA

La Teoría de Juegos es una rama de las matemáticas utilizada para el estudio de las relaciones de conflicto y de cooperación entre los integrantes de un juego. Los campos de aplicación son varios, como la sociología o la biología, pero donde más se emplea es en la economía.

En el análisis de un juego la premisa fundamental es que sus integrantes son individuos racionales, es decir, optarán por aquella elección, entre las posibles, que más utilidad les otorgue.

Existen dos tipos de juegos, los no cooperativos, en los que los integrantes de dicho juego están en conflicto de interés, o los juegos cooperativos en los que los integrantes buscan obtener las mejores recompensas para el grupo analizando las estrategias óptimas, teniendo en cuenta que tomarán acuerdos vinculantes.

Este trabajo se basará en los juegos no cooperativos y a los premios que han sido otorgados en este ámbito, especialmente a John Nash (1928-2015), no obstante, cabe destacar la importancia de los juegos cooperativos, gracias especialmente a Lloyd Shapley (1923-2016), a quien se le otorgó el Premio Nobel en el año 2012.

El objetivo de este trabajo es realizar un estudio básico sobre la Teoría de Juegos, comentando brevemente sus inicios y los premios importantes que se han otorgado a investigadores y académicos en este campo. También exponer los ejemplos clásicos de juegos que existen y hallar sus Equilibrios de Nash.

Para dar a conocer la Teoría de Juegos, primero se explicará brevemente los conceptos básicos de esta teoría, la definición, las partes de un juego y los tipos de juegos. Posteriormente se hará hincapié en su historia y en los investigadores que han hecho que la Teoría de Juegos sea tan importante, en especial John Nash y su gran aportación llamada “el Equilibrio de Nash”, cuya importancia es fundamental. Se verá un análisis de los tipos de juegos, los de forma normal y los de forma extensiva, para después ver los ejemplos más clásicos de estos juegos y los Equilibrios de Nash en cada uno de ellos. Para finalizar se extraerán unas conclusiones y se terminará exponiendo la bibliografía utilizada para la realización del trabajo.

A modo de simplificación, en el trabajo solo se va a referir a juegos en los que participan dos individuos, ya que es más sencilla su representación, tanto de forma matricial (forma normal), como de forma de árbol (forma extensiva).

2 HISTORIA SOBRE LA TEORÍA DE JUEGOS

Según el texto de Tenorio y Martín (2015), el nacimiento de la Teoría de Juegos actual se atribuye al matemático John Von Neumann y al economista Oskar Morgenstern y su libro común "*Theory of Games and Economic Behaviour*" en 1944, siendo esta publicación clave, ya que gracias a ella se consiguieron formalizar todas las ideas anteriores a la publicación del libro. En él se establecieron los resultados de los juegos de suma cero.

Los primeros escritos sobre Teoría de Juegos datan de 1704, gracias al matemático y filósofo Gottfired Wilhelm Leibniz, quien en su obra *Nouveaux Essais sur l'entendement humain* habla de la existencia de una nueva lógica que depende de la probabilidad.

En 1713 por parte de Waldegrave, establece el concepto de estrategias mixtas y su resolución de minimax, con la que más adelante se conocería la denominada actualmente solución "minimax".

Posteriormente, en 1838, el economista Antoine Agustin Cournot, desarrolló su modelo de dos empresas (duopolio), el resultado de este modelo coincide con el que halló John Nash un siglo después en su denominado Equilibrio de Nash.

Otros matemáticos que estudiaron la Teoría de Juegos durante esta época fueron Zermelo con su artículo *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachpiels* (1913), Borel con su artículo ´*La théorie du jeu et les équations intégrales au noyau symétrique"* (1921) o John Von Neumann con su *artículo Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* (1928), este último realizando una demostración del minimax y en este mismo trabajo proponiendo la definición de estrategia que se utiliza hoy en día.

En la década de los años 50 y 60, y a raíz de la publicación en 1944 del libro "*Theory of Games and Economic Behaviour*", se publicaron numerosos artículos sobre la Teoría de Juegos y sus aplicaciones a las diversas situaciones económicas. John

Nash destacó durante estos años presentando su Tesis Doctoral en 1950 sobre los juegos no cooperativos y estableciendo el punto de equilibrio o Equilibrio de Nash. En ese mismo año los matemáticos Melvin Dresher y Merril Meeks Flood desarrollaron el "Dilema del Prisionero", formalizado poco después por Tucker. Durante los años 60 se trató de aplicar la Teoría de Juegos a distintos ámbitos como la biología o la economía y a la resolución de problemas en el mundo real y se aplicó dentro de la llamada "Guerra Fría".

Finalmente, en 1994 llegó el anhelado reconocimiento para la Teoría de Juegos dentro de la economía cuando John Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten fueron galardonados con el Premio Nobel de la Academia Sueca en Ciencias Económicas.

En este apartado del trabajo se expondrán brevemente las biografías y los reconocimientos por los que fueron premiados los distintos economistas o matemáticos en las diferentes ediciones de los Premios Nobel, relacionadas con la Teoría de Juegos.

Los Premios Nobeles de Economía no son exactamente Premios Nobel, ya que no es otorgado por la Fundación Nóbel, sino por el Banco Central de Suecia, que en 1968 creó el premio "Premio Sveriges Riksbank de Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel" y desde ese momento el premio ha sido otorgado por la Academia de Ciencias Sueca con las mismas condiciones que las otras categorías de premios que se llevaban entregando desde 1901 (medicina, química, física, literatura e iniciativas por la paz).

2.1 John Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten

El otorgado en el año 1994 por la Real Academia de las Ciencias de Suecia por "su papel pionero en el análisis de los equilibrios en la Teoría de Juegos No Cooperativos".

John Forbes Nash (1928-2015)

Economista y matemático estadounidense. Estudió matemáticas en el Carnegie Institute of Technology y posteriormente realizó un Doctorado en Economía en la Universidad de Princeton. Publicó en 1949 en la revista Annals of Mathematics un artículo llamado *"Non-cooperative Games"* que resumió varias ideas de su tesis doctoral. En el artículo se exponían las estrategias y las predicciones que se pueden dar en los juegos no cooperativos con información incompleta. Otro artículo que es necesario señalar de este autor es el titulado "*Equilibrium Points in n-person games*", publicado en la revista PNAS en enero de 1950.

Fue profesor en el MIT de Massachusetts. Su labor más reseñable en la Teoría de Juegos es la de distinguir entre juegos cooperativos y los no cooperativos, además de ponerle nombre al que es el equilibrio más importante de la Teoría de Juegos, el "Equilibrio de Nash".

Lamentablemente John Nash es conocido por la enfermedad que sufría, esquizofrenia, y que le mantuvo fuera del foco durante tres décadas. Aunque al final de su vida pudo volver a incorporarse al trabajo y escribió varios artículos relacionados con la teoría de ecuaciones en derivadas parciales no lineales y sus aplicaciones al análisis geométrico, motivos que le valieron para ser premiado con el prestigioso premio ABEL en el año 2015.

John Harsanyi (1920-2000)

Nacido en Budapest en 1920. Estudió farmacia en la Universidad de Budapest y tras la Segunda Guerra Mundial se doctoró en Filosofía. En 1956 emigró a Estados Unidos y gracias a una beca de la Fundación Rockefeller estudió un Doctorado en Economía en la Universidad de Standford. Inició una investigación para demostrar que determinados juegos servían de modelo para ejemplificar interacciones económicas complejas y analizó los juegos con información incompleta. Es decir, aquellos en los que no todos los jugadores conocen toda la información del juego, en este caso, se desconocía la totalidad de pago (preferencias de los jugadores) y los transformaba en juegos con información completa, con el fin de poder analizarlos más fácilmente.

Reinhard Selten (1930-2016)

Fue un economista y matemático alemán. Comenzó sus estudios de Matemáticas y Economía en la Universidad de Fráncfort y en 1969 se convirtió en profesor de esta universidad. Posteriormente se trasladó a la Universidad de Berlín y a la de Bielefeld para continuar con su labor docente y siendo finalmente Catedrático de Ciencias Económicas en 1984 en la Universidad del Rhin Fiedrich Wilheln de Bonn.

Se dedicó a estudiar las situaciones en las que las decisiones de un jugador tomadas en el presente pueden influir tanto la decisión de este como la del otro. También introdujo un refinamiento en el Equilibrio de Nash en su aplicación a la interacción estratégica.

2.2 William Vickrey y James Mirrlees:

Se otorgó el premio Nobel de Economía por parte de la Academia de Ciencias Sueca en 1996 a William Vickrey junto con James A. Mirrlees “por sus contribuciones fundamentales a la teoría económica de los incentivos bajo información asimétrica".

William Vickrey (1914-1996).

Vickrey, canadiense de nacimiento, estudió Matemáticas en la Universidad de Yale, y posteriormente en 1935 se trasladó a la Universidad de Columbia para estudiar un posgrado en Economía. En 1946 comenzó su labor docente en la Universidad de Columbia, en 1948 presentó su tesis doctoral y en 1958 fue nombrado catedrático por esta misma Universidad.

A lo largo de su carrera se preocupó y estudió temas tan diversos como la equidad o los servicios públicos.

Vickrey es conocido por las llamadas “subastas al segundo precio” o “subastas Vickrey”. Este tipo de subasta se realiza a sobre cerrado y al segundo precio, esto quiere decir que cada licitador escribe solo una oferta, la mete en un sobre y la cierra y en este caso ganará la subasta quien haya realizado la puja más alta. El concepto de al segundo precio quiere decir que el ganador paga la cantidad de la segunda puja más alta. Estas subastas se realizan de esta manera ya que es una forma de que los licitadores no sean contenidos, es decir, no pujen a la baja escondiendo su verdadera valoración del artículo subastado a la hora de proponer una oferta, ya que el presentar una puja menor afecta si se quiere ganar la subasta, pero no si se observa el precio final a pagar.

Las subastas Vickrey se diferencian de las convencionales, entre otras cosas, en que en este tipo de subastas se conoce el precio máximo que el licitador que realiza la puja podría llegar a pagar. Esto fue muy polémico, ya que el gobierno neozelandés fue tachado de incompetente por aplicar las subastas vickrey en el año 1990, con el fin de subastar el espectro radioeléctrico.

Otro ejemplo de subasta Vickrey más cercano en el tiempo es un estudio realizado por la Universidad Miguel Hernández para evaluar las preferencias hacia las mandarinas por el mercado británico, presentando diferentes variedades de estas, dos de ellas españolas. La metodología de este trabajo consiste en aplicar la subasta Vickrey de segundo precio con dos tratamientos experimentales, la mitad realizó una prueba de las mandarinas antes de realizar las pujas y la otra mitad simplemente realizó las pujas. Los resultados que salieron en el estudio fueron, entre otros, grandes diferencias entre las valoraciones de las mandarinas y el dinero que se está dispuesto a pagar por ellas y la preferencia por las mandarinas españolas, pero sólo tras la cata de estas.

James Mirrlees (1936-2018)

Inició sus estudios de Matemáticas en la Universidad de Edimburgo en 1954. Posteriormente fue admitido en la Trinity College de la Universidad de Cambridge y en 1963 finalizó un Doctorado en Economía. Al finalizar los estudios Mirrlees comenzó a investigar sobre crecimiento económico y trabajó para el MIT entre 1962 y 1963. Más tarde inició su labor como profesor de Economía en la Universidad de Cambridge y en la Universidad de Oxford, en esta última siendo nombrado catedrático.

Mirrlees se especializó en las economías de los países pobres y aplicó técnicas de matemáticas avanzadas para comprender aspectos económicos y sociales. Por otro lado, entre otros, analizó la eficacia social del IVA y elaboró una solución para el problema propuesto por Vickrey en el modelo de transacciones por ingresos personales.

Entre otras distinciones, fue elegido presidente de la Sociedad de Econometría y miembro honorífico de la Academia Americana de Artes y Ciencias y de la Asociación Americana de Economistas. Y entre sus obras se puede destacar el Manual de análisis de proyectos industriales en los países en desarrollo (1969).

2.3 Robert Aumann y Thomas Schelling

Otorgado en el año 2005 “por haber mejorado nuestra comprensión del conflicto y la cooperación a través del análisis de la Teoría de Juegos”, el cual se podía aplicar, según la Academia Real de Ciencias Sueca, en” políticas de seguridad y desarme, en la formación de precios en los mercados, así como en negociaciones políticas y económicas”. Con este estudio lograron acercar la economía y otras ciencias sociales.

Robert Aumann (1930-)

Economista israelí nacionalizado estadounidense. En 1955 emigró a Estados Unidos y se doctoró en el Massachusetts Institute of Technology. En 1959 comenzaron sus inquietudes por la Teoría de Juegos analizando las diferencias entre juegos con repetición finita e infinita. Fue de los primeros en realizar un análisis formal de las acciones repetidas hasta el infinito y estudiar las aplicaciones de estos a las relaciones interpersonales.

Thomas Schelling (1921-2016)

Economista estadounidense nacido en California. Se graduó en Economía en la Universidad de Berkeley en 1944 para posteriormente doctorarse en Harvard. Entre otras labores, como la docente, fue investigador en materias tan diversas como la estrategia militar, el cambio climático o el terrorismo. Algunos de sus trabajos han servido para la resolución y prevención de conflictos**.**

Fue el encargado de desarrollar las ideas, que tiempo después se formalizaron y que según la Academia sueca "un gran mérito de Schelling fue emplear los conceptos de equilibrio previos a juegos que recogían aspectos esenciales de interacciones económicas y sociales relevantes".

2.4 Robert B. Wilson y Paul Milgrom

Otorgado en 2020 por "la mejora en la teoría de subastas e invenciones de nuevos formatos de subastas" (The Nobel Prize, 2022).

Robert B. Wilson (1937-)

Estudió Matemáticas en Harvard y posteriormente hizo un doctorado en Empresariales. Trabajó en la Universidad de California y en la de Stanford, esta última desde 1964. Fue uno de los primeros economistas que utilizó la Teoría de Juegos para analizar las situaciones de mercado en la que los jugadores no cuentan con la misma información. Investigó el diseño de subastas y estrategias de licitación en ámbitos tan variados como las comunicaciones o la energía.

La Academia Sueca justificó el otorgar el Nobel a Wilson diciendo "mostró por qué los postores racionales tienden a colocar ofertas por debajo de su mejor estimación del valor común: están preocupados por la maldición del ganador, es decir, por pagar demasiado y perder".

Paul Milgrom (1948-)

Estudió Matemáticas en la Universidad de Michigan y se doctoró en Economía en la Universidad de Standford. Fue profesor y catedrático en la Universidad de Northwestern, en la Universidad de Yale y finalmente en la Universidad de Standford. Dentro de la Economía abarcó su investigación en una amplia variedad de temas, como las subastas, el diseño de mercado, la economía industrial o la Teoría de Juegos.

La idea clave de su teoría de subastas se basa en abandonar el sistema de subastas en sobre cerrado y optar por realizar pujas abiertas con el fin de que las empresas puedan ver lo que otras les ofrecen. Este sistema ha llegado a ser adoptado por diferentes administraciones en todo el mundo en el espectro radioeléctrico y en subastas públicas.

2.5 Alvin Roth y Lloyd Shapley

Cabe destacar el premio Nobel otorgado a la Teoría de Juegos en juegos cooperativos, por ello hay una mención breve en este trabajo a Alvin Roth y Lloyd Shapley.

El premio otorgado por la Real Academia de Ciencias Sueca en 2012 por "La teoría de las asignaciones estables y la práctica del diseño del mercado" (The Nobel Prize, 2022).

Alvin E. Roth (1951-)

En 1971 obtuvo una licenciatura en Investigación Operativa por la Universidad de Columbia. Posteriormente, en 1974 se doctoró en Stanford en Investigación de Operaciones. Fue profesor de diferentes universidades como la de Illinois, Pittsburgh, Harvard y Stanford. Roth es miembro de la Academia Americana de Artes y Ciencias, de la Oficina Nacional de Investigación Económica y de la Sociedad Econométrica.

Lloyd S. Shapley (1923-2016)

En 1943, mientras estudiaba en Harvard fue reclutado para luchar en la II Guerra Mundial. Al terminar la contienda, en 1948 se graduó en Matemáticas, para posteriormente doctorarse en esta misma materia en la Universidad de Princeton (1953). De 1954 a 1981 trabajó en la corporación RAND para posteriormente ejercer como docente en la Universidad de California.

Entre otros, algunos de sus galardones son el Premio de la Academia Americana de Artes y Ciencias (1974) o el de la Academia Nacional de Ciencias (1978).

3 DEFINICIÓN TEORÍA DE JUEGOS

Según el manual de referencia en este Trabajo Fin de Grado "Teoría de Juegos" de Pérez, Jimeno y Cerdá (2013)**,** la Teoría de Juegos "estudia las relaciones de conflicto y cooperación a los que llamamos juegos, en las que interactúan individuos racionales, analizando los comportamientos y resultados que son de esperar, bien mediante decisiones individuales (juegos no cooperativos), bien entre acuerdos entre los participantes (juegos cooperativos)".

Como bien se señaló en la introducción del trabajo, la Teoría de Juegos es aplicada en diversos ámbitos, pero la más reseñable es la Economía y las diferentes Ciencias Sociales.

3.1 Terminología básica

Para entender las explicaciones sobre la Teoría de Juegos vamos a visualizar previamente los conceptos básicos de la misma siguiendo el texto de Pérez, Jimeno y Cerdá (2013).

- Jugadores: participantes del juego cuyo cometido es encontrar la decisión que optimice su utilidad. Se necesita de al menos dos jugadores para poder realizar el juego.
- Acciones: las distintas estrategias que puede elegir cada jugador en su turno. Estas pueden ser finitas o infinitas.
- Información: datos que tienen los jugadores sobre las distintas variables del juego.

    - Esta información puede ser perfecta o imperfecta, dependiendo de si los jugadores serán conocedores(perfecta) o no(imperfecta) de lo que haya realizado el otro anteriormente.
    - Otra forma de clasificación puede ser completa (los jugadores conocen toda la información relativa a las consecuencias de las jugadas), o incompleta (los jugadores desconocen algo de información relativa a las consecuencias de las jugadas).
- Estrategias: conjunto de acciones que realiza cada jugador.
- Perfil de estrategias: vector de estrategias perteneciente a cada jugador en el que se reflejan sus decisiones según el desarrollo del juego.
- Resultados del juego: las distintas formas en las que un juego puede terminar, dependiendo de las estrategias elegidas por los jugadores.
- Pagos: al finalizar un juego, son los resultados que obtienen los distintos jugadores dependiendo del desarrollo del juego. El valor de estos pagos dependerá de cada jugador y de su utilidad.

3.2 Categorías de juegos

- Simétricos o asimétricos: Los juegos simétricos son aquellos en los que las recompensas y castigos son los mismos para cada jugador, un ejemplo de ello es el dilema del prisionero. Los juegos asimétricos son aquellos en los que las recompensas son distintas para cada jugador.
- Juegos de suma cero: Son los juegos en los que el jugador ganador obtiene la misma cantidad que ha perdido el otro jugador, ejemplos de ello sería tirar la moneda y el póker.
- Simultáneos o secuenciales: Juegos en los que los jugadores actúan a la vez o uno toma la decisión después del otro.
- Forma estratégica: una de las formas en las que podemos representar un juego, también llamada forma normal. En ella la información acerca de los pagos se ve reflejada en una tabla, en ella podemos ver las estrategias de cada uno de los jugadores, así como los pagos correspondientes a cada perfil de estrategias tomadas por los jugadores si el juego se realiza de forma simultánea.

- Forma extensiva: la otra forma de representación de un juego, también conocida como forma de árbol, el juego se desarrolla de forma secuencial, empezando por la decisión del primer jugador y de ella dependerá la decisión que tome el próximo jugador.
- Estrategias puras: en este tipo de estrategia el jugador lleva a cabo una acción con total certeza.
- Se denomina S al conjunto de perfiles de estrategias del juego, tal que $S=s_1 x s_2 x \ldots s_n$. También se denomina como u_i (s_1, s_2, ...s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n) a la utilidad que recibe el jugador i cuando el resto de los jugadores realizan el conjunto de estrategias puras (s_1, s_2, ...s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n) Un juego finito en formal normal puede ser representado como:

$$G = \{J_i, (S_i)_{i \in J}, (u_i)_{i \in J}\}$$

- Estrategias mixtas**:** en este caso los jugadores, aparte de las estrategias con 100% de probabilidad, pueden elegir estrategias que no tengan una certeza total, asignando distintas probabilidades a las estrategias puras.

4 FORMAS DE REPRESENTACIÓN DE UN JUEGO

4.1 Juegos en forma normal o estratégica

Según el trabajo de Gibbons (1993), en los juegos en forma normal o estratégica, cada jugador elige su estrategia de forma simultánea y al conjunto de estas estrategias elegidas por cada jugador le corresponde una ganancia para cada uno.

Este tipo de juegos se les considera de dominio público, ya que los jugadores son conocedores de todas las estrategias de todos los jugadores y de las ganancias que obtendría cada uno de ellos.

Para poder llevar a cabo la representación de un juego de forma normal, se van a necesitar de los siguientes elementos siguiendo el manual de referencia:

- El conjunto J= {1, 2, ..., n} de los jugadores
- El conjunto de estrategias de cada jugador, S_i para cada i de J
- La función de pagos de cada jugador: u_i para cada i de J

Con estos elementos el juego se representa de la siguiente manera:

$$G = \{J_i, (S_i)_{i\in J}, (u_i)_{i\in J}\}$$

Se utilizará un pequeño ejemplo para sintetizar estos conceptos con un juego de 2 jugadores y con número finito de estrategias puras.

Ejemplo 1:

Celia y Marta son dos amigas que viven cerca y tienen el problema de cómo volver a casa, si andando o en autobús. A Celia le interesa más volver andando, mientras que a Marta todo lo contrario.

En la representación matricial de este tipo de juegos es común que en las tablas se representa al jugador 1 en las filas y al jugador 2 en las columnas.

Tabla 4-1:Representacion del Ejemplo 1 en forma estratégica

		Celia (B)	
		Andando	Autobús
Marta (A)	Andando	2,5	5,3
	Autobús	7,3	8,1

Fuente: elaboración propia

Aquí se puede observar cómo Marta (en adelante jugadora A) decide si volver a casa andando o en autobús. Mientras que Celia (jugadora B) elige de igual forma entre las mismas opciones. Por ejemplo, si A eligiera ir en autobús y B andando, los pagos correspondientes serían 7 para A y 3 para B.

4.2 Juegos en forma extensiva

Los juegos en forma extensiva representan los modelos dinámicos, aquellos en los que los jugadores toman sus decisiones después de saber la decisión que ha tomado el jugador anterior. En este tipo de juego hay que especificar los siguientes datos:

número de jugadores, cuánto juega cada jugador, que puede hacer, la información que posee cuando tiene que jugar y sus posibles ganancias según las distintas posibilidades del juego. Estos juegos de representación extensiva son conocidos también como juegos en forma de árbol porque para su representación se utilizan diagramas en árbol.

Basándonos en el texto de Pérez, Jimeno y Cerdá (2013). Un juego en forma extensiva vendría representado de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \{J, (X, \sigma), (A, \boldsymbol{\alpha}), \{x_i\}_{i \in J}, \{H_i\}_{i \in J}, (A(h))_{h \in H}, \rho, r\}$$

siendo:

- J es el número de jugadores, J= {0,1,2, …, n}. El 0 representa el azar, en caso de no existir el azar en el juego, J= {1, 2, ..., n}

- X simboliza el conjunto de nodos, cada nodo representa una posible situación del juego. Al nodo inicial, el que es la raíz del juego, se le representa con 0, para los demás tenemos la siguiente función:

$$\begin{array}{cccc} \sigma: & X & \rightarrow & X \\ & x & \rightarrow & \sigma(x) \end{array}$$

- A simboliza el conjunto de todas las acciones posibles y α(x) la acción que lleva desde el nodo predecesor σ(x) al nodo actual x. Se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} \alpha: & X - \{O\} & \rightarrow & A \\ & x & \rightarrow & \alpha(x) \end{array}$$

- Xi simboliza el conjunto de nodos de decisión en los que el jugador i puede elegir la acción que va a realizar. En los nodos particulares de decisión solamente es un jugador el que realiza la acción, por lo que:

$$\bigcup_{i \in J} X_i = D(X)$$

$$\forall\, i, j \in J, \text{ con } i \neq j, \text{ se verifica que } X_i \cap X_j = \varnothing$$

Con ello comprobamos que $\{X_i\}_{i \in J}$ constituye una partición, por jugadores, del conjunto de nodos de decisión.

-H_i simboliza una familia de conjuntos de información y la función:

$$\begin{array}{llll} h: & X & \rightarrow & H \\ & x & \rightarrow & h(x) \end{array}$$

que le asigna a cada nodo x un conjunto de información h(x) al que pertenece.

- p simboliza la función que asigna la probabilidad de cada acción por cada conjunto de información.

$$\begin{array}{llll} \rho: & H_0 \times A & \rightarrow & [0,\ 1] \\ & (h,\ a) & \rightarrow & \rho(h,\ a) \end{array}$$

Tendrá que verificarse:

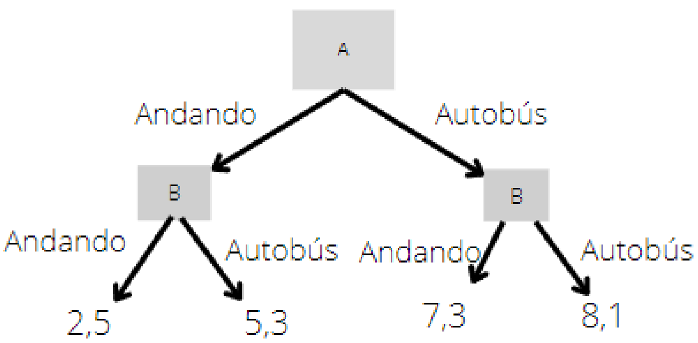
$$\rho(h,a) = 0, \quad \text{si} \quad a \notin A(h) \quad \text{y} \quad \sum_{a \in A(h)} \rho(h,a) = 1, \forall h \in H_0$$

- r simboliza la función de pagos que tiene el jugador i:

$$\begin{array}{llll} r: & T(X) & \rightarrow & R^n \\ & x & \rightarrow & r(x) = (r_1(x),\ \ldots,\ r_n(x)) \end{array}$$

Si el ejemplo 1 tratara de un juego en el que las jugadoras realizarán sus jugadas de forma secuencial, la forma de representarlo sería en un diagrama de árbol:

Figura 4-1:Representación el Ejemplo 1 en forma extensiva



Fuente: Elaboración propia

En este diagrama de árbol, se observa que Marta, jugadora A, realizará primero su jugada, mientras Celia, jugadora B esperará su turno para luego tomar su decisión entre las posibles. Según el desarrollo del juego se llegará a los pagos de un nodo u otro. Por ejemplo, si Marta eligiera en primer lugar ir en autobús, en su turno, la jugadora B podrá elegir entre ir andando y obtener un pago de 3 o elegir ir en autobús y obtener un pago de 1.

5 EQUILIBRIO DE NASH

A raíz del análisis de equilibrio se puede hablar del concepto de Equilibrio de Nash siendo éste una de las posibles resoluciones de un juego. “Un Equilibrio de Nash es un perfil de estrategias del que ningún jugador desearía desviarse unilateralmente, es decir, ninguno se arrepiente de la decisión tomada, dadas las estrategias decididas por el resto de los jugadores. Un Equilibrio de Nash está formado por estrategias que son óptimas para cada jugador dadas las estrategias del resto de jugadores” (Pérez, Jimeno y Cerdá, 2013, 90).

En un Equilibrio de Nash un jugador no está logrando el mejor resultado, sino que este está condicionado por las acciones del resto. Finalmente, en un juego pueden existir múltiples Equilibrios de Nash.

Para completar esta definición se van a realizar una serie de puntualizaciones tomando como referencia el manual de Pérez, Jimeno y Cerdá (2013). En primer lugar, como es de suponer con la explicación anterior, cada jugador tiene que jugar una respuesta óptima teniendo en cuenta lo que cree que van a hacer los demás jugadores. A raíz de esto, estas creencias sobre las estrategias del resto de jugadores tienen que ser correctas, si no de nada servirían.

A continuación, se podrá ver la forma de hallar los Equilibrios de Nash en los juegos en forma normal y posteriormente en los juegos en forma extensiva.

5.1 Juegos en forma normal

Una vez visto el concepto de Equilibrio de Nash y con ayuda del Ejemplo 1, se podrá ver la forma de hallar el Equilibrio de Nash en juegos de representación normal.

La forma de encontrar la solución es mediante la correspondencia de respuesta óptima, aquella en la que el jugador en cuestión tomará su decisión en busca de la que le otorgue un pago mayor dependiendo de la estrategia que haya elegido (o haya supuesto que elegirá) el resto de los jugadores.

En la siguiente tabla se observa la aparición de * y de ´, estos símbolos indican que, si el jugador 2 elige una estrategia, la estrategia óptima para el jugador 1 sería la que porte el *. Si se trata del jugador 2, dada la estrategia que seguirá el jugador 1, la estrategia óptima sería la que porte el ´

Tabla 5-1: Equilibrio de Nash en el Ejemplo 1.

		Celia (B)	
		Andando	Autobús
Marta (A)	Andando	2,5´	5,3
	Autobús	7*,3´	8*,1

Fuente: elaboración propia

Se observa en la tabla anterior que la casilla que muestra los pagos correspondientes a la estrategia (Autobús, Andando) es el Equilibrio de Nash. En dicha casilla se encuentra a la vez el * y la ´ que indican que ambas jugadoras elegirían dicha estrategia como la óptima dada una de la otra.

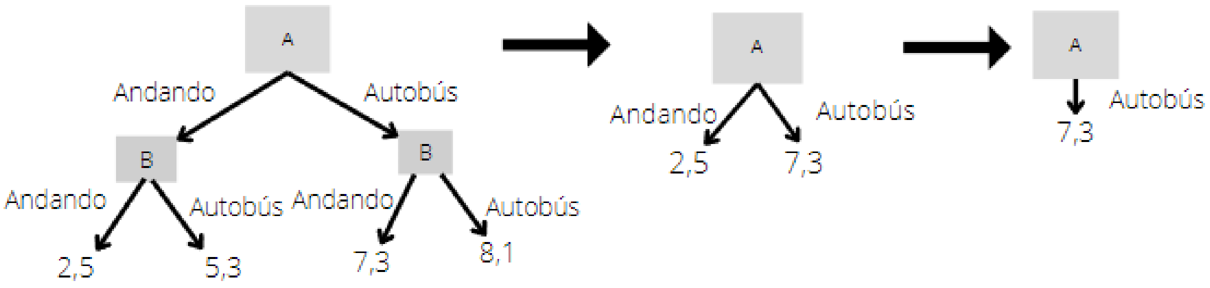
Si el juego tuviera estrategias mixtas, habría que hacer su resolución mediante matrices que nos permitan hallar el Equilibrio de Nash en estrategias mixtas. En el ejemplo 1 no es posible hallar dicha solución. No obstante, en el apartado 6.2 se expondrá la forma de hallar el Equilibrio de Nash para estrategias mixtas sirviéndose del juego *la batalla de los sexos*.

5.2 Juegos en forma extensiva

Para los juegos de forma extensiva, el método para encontrar los Equilibrios de Nash es mediante la inducción hacia atrás. En dicho proceso, observamos cómo se eliminan los nodos del árbol que no elegiría el jugador que tenga que tomar la decisión en ese momento, ya que obtendría un pago menor.

Como en el caso anterior, el Ejemplo 1 servirá de ayuda para entender este concepto.

Tabla 5-2:Equilibrio de Nash mediante la Inducción hacia atrás.



Fuente: elaboración propia

Se puede observar como la jugadora B, en sus nodos de decisión elige la opción que más pago le otorga, por lo que esa estrategia sustituirá al nodo de elección. En el primer nodo elegiría la rama cuyo pago final es (2,5) ya que le otorga más utilidad que el pago de la otra rama (5,3). Misma forma de selección para el otro nodo de elección de la jugadora B. Por lo que nos quedaría en el paso intermedio, un árbol cuya única elección es para la jugadora A, que elegirá aquella decisión que más pago le oferta, al ser los jugadores racionales. Al final, con el método de inducción hacia atrás, el primer árbol que representaba el juego en forma extensiva queda reducido a una única rama con un pago, en este ejemplo 1, el (7,3), que nos representa el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (ENPS).

Al referirse a ENPS indica que la forma de resolución del juego es mediante la inducción hacia atrás. Empezando desde el ultimo nodo de elección y siguiendo el camino inverso, es decir, del último al penúltimo y así sucesivamente, hasta llegar al primer nodo de elección. Este método es posible si los jugadores tienen información completa del juego, ya que serán conocedores de las posibles decisiones y los efectos que tendrá lo que decidan los demás jugadores.

6 EJEMPLOS CLÁSICOS DE TEORÍA DE JUEGOS EN FORMA NORMAL

Siguiendo el manual de referencia de Pérez, Jimeno y Cerdá (2013) se intenta describir y analizar muy brevemente ejemplos clásicos muy recurrentes que aparecen en la Teoría de Juegos.

6.1 El dilema del prisionero

Se trata del juego más famoso dentro de los ejemplos clásicos de Teoría de Juegos y a la vez es el más representativo.

Dos malhechores son arrestados tras cometer un delito grave, aparte de este han cometido otro de menor grado. Los delincuentes son interrogados en habitaciones separadas. En el caso de que ambos callen (a menudo llamado cooperación) y no delaten al otro serán condenados a un año de cárcel por el delito de menor gravedad, si los dos confiesan (a menudo denominado no cooperación) serán encarcelados por el delito grave, pero se les reducirá la pena a cuatro años por confesar. Y, por último, si uno de ellos confiesa y el otro no, el delator quedará absuelto pero el otro cumplirá cinco años de cárcel.

Tabla 6-1: Dilema del prisionero

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	-1,-1	-5,0
	Confesar	0,-5	-4,-4

Fuente: Teoría de Juegos (2013).

Equilibrio de Nash: En este juego clásico existen 4 perfiles de soluciones posibles: (Callar, Callar), (Confesar, Callar), (Callar, Confesar) y (Confesar, Confesar).

Si el jugador 2 decide callar, la estrategia que más pagó le otorga al jugador 1 sería la opción de confesar. En el caso de que el jugador 2 decidiera confesar, para el jugador 1 la estrategia que le otorga un pago mayor será la de confesar.

Si el jugador 1 decidiera callar, para el jugador 2 su mejor estrategia sería confesar. Si el jugador 1 tomará la decisión de confesar, para el jugador 2 la mejor respuesta sería la de confesar también.

Tabla 6-2:Equilibrio de Nash en el Dilema del Prisionero.

		Preso 2	
		Callar	Confesar
Preso 1	Callar	-1,-1	-5,0´
	Confesar	0*, -5	-4*, -4´

Fuente: Teoría de Juegos (2013)

Se observa en la tabla anterior que la estrategia (Confesar, Confesar) es el Equilibrio de Nash, ya que es la estrategia donde coinciden las respuestas óptimas de cada jugador dada la estrategia del otro.

El dilema del prisionero refleja que para los jugadores, es mejor pensar en el bien común del grupo, lo que implica tomar la decisión de no confesar, ya que ambos jugadores tendrían una pena menor, el problema radica en que ambos jugadores están motivados para pensar en su propio beneficio, tomando la opción de Confesar, pero como esta estrategia la podrían tomar los dos jugadores, al final si deciden ambos Confesar, sería más perjudicial para el grupo, ya que ambos tendrían una pena de cárcel mayor.

En resumen, el dilema del prisionero nos deja entrever que hay situaciones en las que buscar el beneficio del grupo nos otorga una mayor recompensa que si todos integrantes del juego pensaran solo en el beneficio propio ya que al hacerlo todos individualmente, se acabaría por perjudicar al grupo al actuar todos de la misma manera.

6.2 Batalla de los sexos

Dos novios tienen que elegir que van a hacer después del trabajo, si ir al cine o al fútbol. Tras la salida del trabajo no tienen forma de comunicarse, por lo que cada uno decide ir a un lugar, al cine o al fútbol, y solo les queda esperar a los dos el haber ido al mismo sitio. Ambos prefieren ir juntos a cualquiera de los dos sitios antes que ir solos cada uno a uno distinto. El jugador 1 prefiere ir al fútbol y la jugadora 2 prefiere ir al cine.

Tabla 6-3:Batalla de los sexos

		Jugadora 2	
		Cine	Fútbol
Jugador 1	Cine	1,2	0,0
	Fútbol	0,0	2,1

Fuente: Teoría de Juegos (2013).

Equilibrio de Nash:

En este caso, hay 4 perfiles posibles de EN: (Cine, Cine), (Cine, Fútbol), (Fútbol, Cine), y (Fútbol, Fútbol):

En este juego, si la jugadora 2 decidiera ir al cine, el jugador 1 elegiría la misma estrategia. Si la jugadora 2 decidiera ir al fútbol, el jugador 2 también elegiría ir al fútbol.

Si el jugador 1 decidiera ir al cine, la jugadora 2 tomaría la misma decisión, mientras que, si el jugador 1 decidiera ir al fútbol, la jugadora dos también optaría por esta decisión.

Tabla 6-4:Equilibrio de Nash en la Batalla de los sexos.

		Jugadora 2	
		Cine	Fútbol
Jugador 1	Cine	1*,2´	0,0
	Fútbol	0,0	2*,1´

Fuente: Teoría de Juegos (2013).

Para el juego de la batalla de los sexos en estrategias puras existen dos Equilibrios de Nash: (Cine, Cine) y (Fútbol, Fútbol).

Existe en este juego la posibilidad de realizarlo mediante estrategias mixtas. En este caso a cada estrategia se le otorgara una probabilidad.

Si ella decide ir al cine con la probabilidad p, entonces iría al fútbol con la probabilidad (1-p). Para él, elegiría ir al cine con la probabilidad q, por lo que el chico tendría la probabilidad de ir al fútbol (1-q).

Tabla 6-5:Batalla de los sexos con estrategias mixtas.

		Jugadora 2		
		Cine	Fútbol	
Jugador 1	Cine	1*,2´	0,0	q
	Fútbol	0,0	2*,1´	1-q
		p	1-p	

Fuente: Teoría de Juegos (2013)

Siguiendo la tabla anterior, las siguientes estrategias quedarían definidas por estas probabilidades:

(Cine, Cine): qp (Fútbol, Cine): (1-q)p

(Fútbol, Fútbol) : (1-q) (1-p) (Cine, Fútbol): q (1-p)

El Equilibrio de Nash en estrategias mixtas para este juego sería $\left[\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right]$

La forma de hallarlo es mediante matrices:

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ 1-q\end{pmatrix} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ 1-q\end{pmatrix}$$

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix}q\\ 1-q\end{pmatrix} = (0 \quad 2)\begin{pmatrix}q\\ 1-q\end{pmatrix}$$

$$q = 2(1-q) \rightarrow q = 2-2q \rightarrow q = \frac{2}{3} \quad 1-q = \frac{1}{3}$$

$$(p \quad 1-p)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = (p \quad 1-p)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$(2p \quad 1-p)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = (2p \quad 1-p)\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$2p = 1-p \rightarrow 3p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{3} \quad 1-p = \frac{2}{3}$$

En resumen, el juego de la batalla de los sexos, indica que los jugadores obtendrán un beneficio solo en el caso de que todos los jugadores elijan seguir la misma estrategia, ya que en el caso contrario ninguno de los jugadores obtendría beneficio alguno.

6.3 Caza del ciervo

Dos personas deciden ir de caza juntas. Se les presenta el siguiente dilema: quedarse quieto en el lugar donde están para cazar el ciervo, o intentar cazar un ciervo, pero estando también atentos a las liebres que se pueda encontrar por el camino. En el caso de que los dos cazadores se mantengan en su puesto, saben que los dos podrán cazar al ciervo. En el caso de que uno de los dos decida no cooperar en el objetivo de cazar los ciervos y se entretenga con las liebres, no podrán cazar al ciervo. Los dos prefieren un ciervo a las liebres y las libres a no cazar nada (lo que se llevaría el que se dedicase a intentar cazar al ciervo en solitario)

Tabla 6-6:Caza del ciervo

(donde V>2W, W>0)		Jugador 2	
		Cooperar	Buscar liebre
Jugador 1	Cooperar	V, V	0, 2W
	Buscar liebre	2W, 0	W, W

Fuente: Teoría de Juegos (2013).

En este juego, existen 4 perfiles que pueden ser Equilibrios de Nash:(Cooperar, Cooperar), (Cooperar, Buscar liebres), (Buscar liebres, Cooperar) y (Buscar liebres, Buscar liebres).

Para este juego, si el jugador 2 decide Cooperar, la mejor respuesta del jugador 1 sería cooperar también. Mientras que, si el jugador 2 decide buscar liebres, el jugador 1 también decidirá buscar liebres.

La misma similitud para el caso del jugador 2, es decir, si el jugador 1 decide cooperar, el jugador 2 tomará la misma decisión, al igual que si el jugador 1 decide buscar liebres, el jugador 2 también optará por esta estrategia.

Tabla 6-7:Equilibrio de Nash en la caza del ciervo.

		Jugador 2	
		Cooperar	Buscar liebre
Jugador 1	Cooperar	V*, V´	0,2W
	Buscar liebre	2W,0	W*, W´

Fuente: Teoría de Juegos (2013).

Los equilibrios de Nash para este juego serían las estrategias de (Cooperar, Cooperar) y (Buscar liebres, Buscar liebres).

En resumen, este juego nos indica que hay circunstancias en las que los jugadores obtendrán un beneficio mayor si deciden cooperar. En el caso de que no lo hagan las recompensas que obtiene serán menores a la que podrían obtener cooperando, e incluso, al no cooperar acabarían repartiéndose esa menor recompensa entre los dos.

Tabla 6-8 La caza del ciervo con estrategias mixtas.

		Jugador 2		
		Cooperar	Buscar liebre	
Jugador 1	Cooperar	V, V	0, 2W	p
	Buscar liebre	2W, 0	W, W	1-p
		q	1-q	

Fuente: Teoría de Juegos (2013)

Siguiendo la tabla anterior, las siguientes estrategias quedarían definidas por estas probabilidades:

Cooperar, Cooperar:	pq	Buscar liebre, Cooperar:	(1-p) q
Cooperar, Buscar liebre:	p(1-q)	Buscar liebre, Buscar liebre:	(1-p) (1-q)

Para hallar el Equilibrio de Nash en estrategias mixta se siguen los siguientes pasos:

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix} V & 0 \\ 2W & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} V & 0 \\ 2W & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$$

$$(V \quad 0)\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} = (2W \quad W)\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$$

$$Vp = Wp + W \rightarrow p = \frac{W}{V-W} \qquad 1 - p = \frac{V-2W}{V-W}$$

$$(q \quad 1-q)\begin{pmatrix} V & 2W \\ 0 & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (q \quad 1-q)\begin{pmatrix} V & 2W \\ 0 & W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(Vq \quad W + Wq)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (Vq \quad W + Wq)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Vq = W + Wq \rightarrow q = \frac{W}{V-W} \qquad 1 - q = \frac{V-2W}{V-W}$$

Con las matrices anteriores se halla que el Equilibrio de Nash en estrategias mixta para este juego es: $\left\{\left(\frac{W}{V-W},\frac{V-2W}{V-W}\right),\left(\frac{W}{V-W},\frac{V-2W}{V-W}\right)\right\}$

6.4 El halcón y la paloma

Dos seres vivos se pueden comportar de dos maneras diferentes: de forma violenta (halcón) o de forma pacífica (paloma) a la hora de enfrentarse por un objeto V. En el caso de que decidan comportarse ambos seres vivos de forma violenta, se les acarrearán unos costes C y si los dos se comportan de forma pacífica se podrán dividir el objeto. Si cada uno toma una decisión diferente, el que se comporta de forma agresiva se queda todo el objeto V, mientras que el pacífico no obtendría nada.

Tabla 6-9:El halcón y la paloma.

		Jugador 2	
		Paloma	Halcón
Jugador 1	Paloma	V/2, V/2	0, V
	Halcón	V, 0	V/2-C, V/2-C

Fuente: Teoría de Juegos (2013).

En este juego existen 4 perfiles posibles de Equilibrios de Nash: (Paloma, Paloma), (Paloma, Halcón), (Halcón, Paloma) y (Halcón, Halcón).

Si el jugador 2 decidiera mantener una postura de paloma, para el jugador 1 le sería más beneficioso adoptar una postura agresiva. Mientras que, si el jugador 2 adoptará la postura agresiva, la del halcón, al jugador 1 le otorgará beneficio adoptar esa misma postura.

Este mismo razonamiento se aplicaría al jugador 2, en el caso de suponer que posturas adoptaría su contrincante, por lo que, sea la postura que adopte el jugador 1, al jugador 2 su mejor respuesta sería adoptar la postura del halcón.

Tabla 6-10:Equilibrio de Nash en el halcón y la paloma.

		Jugador 2	
		Paloma	Halcón
Jugador 1	Paloma	V/2, V/2	0, V´
	Halcón	V*, 0	V/2-C*, V/2-C´

Fuente: Teoría de Juegos (2013).

Se observa en la tabla anterior, que el Equilibrio de Nash de este juego es el perfil de estrategias: (Halcón, Halcón).

El juego indica que hay contexto en los que los competidores pueden obtener una recompensa a partes igual si deciden no competir por una misma recompensa, pero en el caso contrario de que alguno de ellos decida competir para obtener toda la recompensa, los demás jugadores podrían optar por esta misma estrategia por lo que al final se repartirán dicha recompensa entre todos, pero pagando un coste por competir entre ellos.

Tabla 6-11 Halcón y la paloma: Equilibrio de Nash en estrategias mixtas

		Jugador 2		
		Paloma	Halcón	
Jugador 1	Paloma	V/2, V/2	0, V´	P
	Halcón	V*, 0	V/2-C*, V/2-C´	1-p
		q	1-q	

Fuente: Teoría de Juegos (2013)

Con ayuda de los pagos y las probabilidades de la tabla anterior, se intentará hallar el Equilibrio de Nash en estrategias mixtas para este juego mediante el uso de matrices:

$$(1 \quad 0)\begin{pmatrix} V/2 & 0 \\ V & V/2-C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} V/2 & 0 \\ V & V/2-C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$$

$$(V/2 \quad 0)\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix} = (V \quad V/2-C)\begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$$

$$Vp/2 = Vp/2 + V/2 - C + Cp \rightarrow p = 1 - \frac{VC}{2} \qquad\qquad 1-p = \frac{VC}{2}$$

$$(q \quad 1-q)\begin{pmatrix} V/2 & V \\ 0 & V/2-C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (q \quad 1-q)\begin{pmatrix} V/2 & V \\ 0 & V/2-C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(Vq/2 \quad Vq/2 + Cq + V/2 - C)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (Vq/2 \quad Vq/2 + Cq + V/2 - C)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Vq/2 = Vq/2 + Cq + V/2 - C \rightarrow q = 1 - \frac{VC}{2} \qquad\qquad 1-q = \frac{VC}{2}$$

El equilibrio de Nash seria: $\left\{\left(\frac{1-VC}{2}, \frac{VC}{2}\right), \left(\frac{1-VC}{2}, \frac{VC}{2}\right)\right\}$

Pero este resultado no es posible, ya que si VC>1 la probabilidad tendría un valor negativo, cosa que es imposible, por lo que no existen equilibrio de Nash en estrategias mixtas para este juego.

6.5 Piedra-papel-tijera

Dos jugadores eligen a la vez uno de los tres objetos: piedra (R), papel (P) o tijera (T). Cada jugador hace un gesto que representa cada uno de los objetos: piedra (puño cerrado), papel (mano abierta), tijeras (dedos anular y corazón extendidos). En el caso de que los dos jugadores elijan el mismo gesto existe un empate y cada uno recibe un pago cero. En el caso de que elijan distinto gesto el que gana obtiene un euro de la persona que pierde de acuerdo a estas normas:

a) Piedra gana a tijera
b) Tijera gana a papel
c) Papel gana a piedra

Tabla 6-12:Piedra-papel- tijera

		Jugador 2			
		R	P	T	
Jugador 1	R	0,0	-1,1	1,-1	r
	P	1,-1	0,0	-1,1	s
	T	-1,1	1,-1	0,0	1-r-s
		q	p	1-q-p	

Fuente: Teoría de Juegos (2013)

Siguiendo la tabla anterior, las siguientes estrategias quedarían definidas por estas probabilidades:

Piedra,Piedra:	rq	Papel,Piedra:	sq	Tijera,Piedra:	(1-r-s)q
Piedra,Papel:	rp	Papel,Papel:	sp	Tijera,Papel:	(1-r-s)p
Piedra, Tijera:	r(1-q-p)	Papel,Tijera:	s(1-q-p)	Tijera,Tijera:	(1-r-s)(1-q-p)

El Equilibrio de Nash en estrategias mixta para cualquier jugador es (⅓, ⅓, ⅓)

$$(1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \\ 1-r-s \end{pmatrix} = (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \\ 1-r-s \end{pmatrix}$$
$$= (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \\ 1-r-s \end{pmatrix}$$

$$(0\ 1\ \ -1)\begin{pmatrix} r \\ s \\ 1-r-s \end{pmatrix} = (-1\ 0\ 1)\begin{pmatrix} r \\ s \\ 1-r-s \end{pmatrix} = (1\ \ -1\ 0)\begin{pmatrix} r \\ s \\ 1-r-s \end{pmatrix}$$

$$s - 1 + r + s = -r + 1 - r - s = r - s$$

$$s - 1 + r + s = r - s \rightarrow 3s = -1 \rightarrow s = \frac{1}{3}$$

$$-r+1-r-s=r-s \rightarrow -3r=-1 \rightarrow r=\frac{1}{3}$$

$$(q \;\; p \;\; 1-q-p)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (q \;\; p \;\; 1-q-p)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= (q \;\; p \;\; 1-q-p)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2p-1+q \quad 1-2q-p \quad q-p)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (2p-1+q \quad 1-2q-p \quad q-p)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= (2p-1+q \quad 1-2q-p \quad q-p)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2p-1+q=1-2q-p=q-p$$

$$2p-1+q=q-p \rightarrow p=\frac{1}{3}$$

$$1-2q-p=q-p \rightarrow q=\frac{1}{3}$$

6.6 Peticiones de Nash

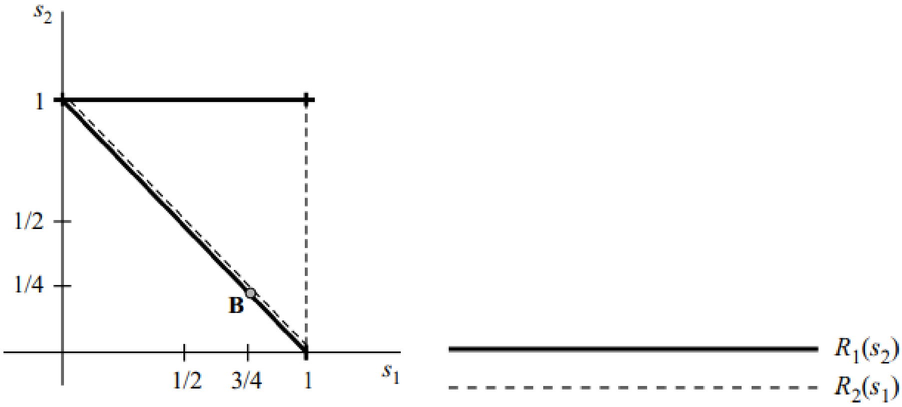
Se reparte un pastel entre dos jugadores de acuerdo con lo siguiente: los dos jugadores tienen que escribir al mismo tiempo un número entre el 0 y el 1, el significado de estos números es la porción de pastel que quieren. Si la suma de ambos números es menor o igual que 1, cada jugador recibe la parte que quería. Si la suma de ambos números es mayor a 1, entonces ninguno de los jugadores recibirá nada.

Como este juego tiene infinitas posibilidades no se puede representar de forma bimatricial. Los elementos son los siguientes:

$$J=\{1,2\},\ S_1=S_2=[0,\ 1]$$

$$u_1(s_1,\ s_2)=\begin{cases} s_1 & \text{si} \quad s_1+s_2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad s_1+s_2 > 1 \end{cases} \qquad u_2(s_1,\ s_2)=\begin{cases} s_2 & \text{si} \quad s_1+s_2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad s_1+s_2 > 1 \end{cases}$$

Figura 6-1Representación del juego de las peticiones de Nash



Fuente: Teoría de Juegos (2013).

En la gráfica anterior se puede ver el conjunto de respuestas optimas de soluciones.

$$\text{Para J1:} \quad R_1(s_2) = \begin{cases} 1 - s_2 & \text{si} \quad s_2 < 1 \\ [0,\ 1] & \text{si} \quad s_2 = 1 \end{cases} \qquad \text{Para J2:} \quad R_2(s_1) = \begin{cases} 1 - s_1 & \text{si} \quad s_1 < 1 \\ [0,\ 1] & \text{si} \quad s_1 = 1 \end{cases}$$

Por lo que el Equilibrio de Nash seria: $\{(s_1, s_2): s_1 + s_2 = 1\} \cup \{(1,1)\}$

6.7 La estrategia maximin

Este tipo de estrategias son las empleadas para la resolución de los juegos de suma cero, aquellos en los que los jugadores obtienen la misma ganancia que pierden el resto, como se ha comentado anteriormente.

La estrategia maximin consisten en asegurarse un pago mínimo en un juego, es el valor de seguridad por el que se decide cada jugador.

Para poder entender este concepto, la siguiente tabla será de ayuda.

Tabla 6-13 Estrategias Maximin

		JUGADOR 2			
		A	B	C	mínimos
JUGADOR 1	A	9,1	1,9	2,8	1
	B	6,4	5,5	4,6	4
	C	7,3	8,2	3,7	3
	mínimos	1	2	6	

Fuente: Junta de Andalucía (s.f.)

En la tabla anterior se puede observar los valores mínimos que obtendría cada jugador dependiendo de la estrategia que decidan seguir.

Si el jugador 1 decidiera elegir la estrategia A obtendrá un pago mínimo de 1, si eligiera la B un pago mínimo de 4 y si eligiera la C un pago mínimo de 3.

Mismo analices para el jugador 2, si elige A, obtiene 1, si elige B obtendrá 2 y si elige C obtendría el pago mínimo de 6

La estrategia maximin consiste en elegir el mayor de los pagos anterior, es decir, de los pagos mínimos que podría obtener un jugador dependiendo la estrategia que elijan, decidirse entre la que mayores pagos le otorgue. En el caso del jugador 1 será la estrategia B y en el caso del jugador 2 será la estrategia C.

6.8 Duopolio de Cournot

Un reducido número de empresas compite en el mercado vendiendo un producto homogéneo y eligiendo de forma simultánea ambas empresas la cantidad que van a producir para el mercado. El precio queda establecido por la cantidad total aportada de acuerdo con la función de demanda inversa. Al equilibrio llegado este modelo se le denomina Equilibrio de Cournot o de Cournot-Nash, ya que se alcanza el Equilibrio de Nash mediante Cournot en este modelo. A continuación, se encuentra el modelo de duopolio de Cournot para dos empresas basándose en el manual de referencia

La función de demanda inversa es:

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & \text{si} \quad bQ < a \\ 0 & \text{si} \quad bQ \geqslant a \end{cases} \quad (\text{donde } b > 0 \text{ y } Q = q_1 + q_2)$$

Las funciones de costes de las empresas son:

$$C_1(q_1) = cq_1, \qquad C_2(q_2) = cq_2 \quad \text{donde} \quad c < a$$

la función de beneficios:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2) - cq_1 = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$
$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2) - cq_2 = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

Hay dos empresas cuyo espacio de estrategias son $S_{1=}S_2 = [0, \frac{a}{b}]$ y que suponiendo que los beneficios coincidan con las utilidades tienen la siguiente función de ganancias:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$
$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

A continuación, se observa el cálculo del Equilibrio de Nash para la empresa 1:

$$\max_{q_1} \ u_1(q_1, \ q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$
$$\text{sujeto a}: \ 0 \leqslant q_1 \leqslant a/b$$

Hay que obtener la condición de primer orden:

$$\partial u_1(q_1, q_2)/\partial q_1 = q_1(-b) + (a - bq_1 - bq_2 - c) = 0; \qquad q_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

También, buscar la condición de segundo orden, que será la condición suficiente de máximos.

$$\partial^2 u_1(q_1, q_2)/\partial q_1^2 = -2b < 0$$

Con todo lo anterior, se obtiene que la función de respuesta optima de la empresa 1, E1 sería:

$$R_1(q_2) = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

Para el cálculo del equilibrio de Nash de la empresa 2, E2, se resuelve de:

$$\max_{q_2} \ u_2(q_1, \ q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$
$$\text{sujeto a}: \ 0 \leqslant q_2 \leqslant a/b$$

Realizando los mismos procesos que se han visto para E1, se obtiene para E2 su función de respuesta optima:

$$R_2(q_1) = \frac{a - c - bq_1}{2b}$$

El Equilibrio de Nash ha de ser (q_1^*, q_2^*), por lo que q_1^*sera respuesta optima de q_2^* y viceversa.

$$q_1^* = \frac{a - c - bq_2^*}{2b}, \qquad q_2^* = \frac{a - c - bq_1^*}{2b}$$

Resolviendo el sistema anterior se obtiene el conjunto de los puntos de equilibrio:

$$\mathbf{S}^{\mathrm{EN}} = \left\{ \left(q_1^* = \frac{a-c}{3b}, \qquad q_2^* = \frac{a-c}{3b} \right) \right\}$$

La cantidad: $Q* = 2\,\dfrac{a-c}{3b}$

Los beneficios de cada empresa:

$$u_1^* = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

$$u_2^* = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

El precio: $P* = a - bQ* = \dfrac{a+2c}{3}$

El beneficio total en equilibrio $U* = \dfrac{2(a-c)^2}{9b}$

6.9 Duopolio de Bertrand

Se propone cuarenta años después que el modelo de Cournot. Este modelo consiste en que las empresas compiten en precios, y estas se comprometen a producir todo lo que los consumidores demanden a el precio que las empresas decidan. Al equilibrio llegado en este modelo se le denomina Equilibrio de Bertrand o Equilibrio de Bertrand-Nash, ya que se alcanza un Equilibrio de Nash mediante Bertrand en este juego.

Basándonos en el manual de referencia, se tiene la siguiente información´:

Las hipótesis iniciales del duopolio son las siguientes:

- Los consumidores solo compran a la empresa con precios más bajos, o a ambas en partes iguales si sus precios son los mismos.
- La función q(p) es estrictamente decreciente en precios entre 0 y p_c y nula para los precios iguales o superior a p_c.
- Las empresas tienen la misma función de costes, sin costes fijos y con los costes marginales constates e iguales a c
- Se cumple que: $0<c<p_m<p_c$, donde p_m es el precio óptimo de monopolio de haber solo una empresa.

Con las anteriores hipótesis se concreta la función de demanda para cualquier empresa:

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_i > p_j \\ q(p_i) & \text{si} \quad p_i < p_j \\ \dfrac{q(p_i)}{2} & \text{si} \quad p_i = p_j \end{cases}$$

Las funciones de costes:

$$C_1(q_1) = cq_1, \qquad C_2(q_2) = cq_2$$

La función de beneficios:

$$u_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_i > p_j \\ (p_i - c)q(p_i) & \text{si} \quad p_i < p_j \\ \dfrac{(p_i - c)q(p_i)}{2} & \text{si} \quad p_i = p_j \end{cases}$$

Para una compresión más fácil, se tratará de la existencia de dos empresas, E1 Y E2, por lo que i=1,2. Con espacio de estrategias $S_1=S_2= [0, +\infty)$

El Equilibrio de Nash para el duopolio de Bertrand es aquel en el que las empresas tienen sus precios iguales al coste marginal tal que: $p_1^* = c, p_2^* = c$

Razonando mediante la correspondencia de respuesta optima se comprueba porque ese punto es el EN.

- Si $p_1<c$, cualquier precio en el que $p_2>p_1$ sería optimo, mientras que si fueran $p_2 \leq p_1$ obtendría beneficios negativos
- Si $p_1=c$, cualquier precio $p_2 \geq c$ daría un óptimo, pero de ser $p_2<c$ obtendría beneficios negativos.
- Si $p_m \geq p_1>c$, no hay precio posible de la otra empresa que otorgue beneficios.
- Si $p_1>p_m$, la única respuesta optima de E_2 sería un $p_2=p_m$

7 EJEMPLOS CLÁSICOS JUEGOS EN FORMA EXTENSIVA

7.1 Duopolios: Stackelberg

Ejemplo de juego en dos etapas, propuesto por Stackelberg en 1934. Dos empresas se enfrentan en un mercado (duopolio) produciendo un producto homogéneo y compitiendo en las cantidades. Pero esta vez, a diferencia del duopolio de Cournot, una de ellas tendrá la ventaja de tomar la decisión de producción antes que la otra, empresa líder y empresa seguidora, la cual decidirá la cantidad a producir tras observar el comportamiento de la empresa líder.

Función de demanda inversa:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & \text{si} \quad Q < a \\ 0 & \text{si} \quad Q \geqslant a \end{cases} \quad (\text{donde } a > 0 \text{ y } Q = q_1 + q_2)$$

Funciones de costes:

$$C_1(q_1) = cq_1, \qquad C_2(q_2) = cq_2 \qquad \text{donde } c < a$$

Beneficios:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a - q_1 - q_2) - cq_1 = q_1(a - q_1 - q_2 - c)$$
$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a - q_1 - q_2) - cq_2 = q_2(a - q_1 - q_2 - c)$$

Como se ha comentado antes, la empresa líder tomará la decisión mientras que la otra esperará.

Por el método de inducción hacia atrás, la E_2, va a suponer una cantidad fija q_1, y con ello resolver el siguiente planteamiento:

$$\max u_2(q_1, q_2) = q_2[a - c - q_1 - q_2]$$

condición de primer orden:

$$\partial u_2(q_1, q_2)/\partial q_2 = 0 \quad a - c - q_1 - 2q_2 = 0, \quad q_2 = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

Condición de segundo orden:

$$\partial^2 u_2(q_1,\ q_2)/\partial q_2^2 = -2 < 0$$

Con los procesos anteriores, se obtiene que la E_2 responderá a cualquier estrategia de la E_1 de la siguiente manera:

$$R_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}, \qquad \text{para } 0 \leqslant q_1 \leqslant a - c$$

Ahora se verá los pasos a seguir de la E, teniendo en cuenta la R_2 de la otra empresa.

$$\max u_1(q_1,\ R_2(q_1)) = q_1[a - c - q_1 - R_2(q_1)] = \frac{q_1(a - q_1 - c)}{2}$$

Condición de primer orden:

$$du_1(q_1,\ R_2(q_1))/dq_1 = 0 \quad \frac{a-2q_1-c}{2}=0,\ q_1=\frac{a-c}{2}.$$

Condición de segundo orden:

$$d^2u_1(q_1,\ R_2(q_1))/dq_1^2 = -1 < 0$$

La solución para el Duopolio de Stackerlberg mediante la inducción hacia atrás es la siguiente:

$$q_1^* = \frac{a - c}{2} \quad \text{y} \quad R_2(q_1^*) = \frac{a - q_1^* - c}{2} = \frac{a - c}{4},$$

El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es el que viene determinado por el siguiente perfil de estrategias:

$$s^* = \left(s_1^* = q_1^* = \frac{a - c}{2},\ s_2^* = R_2(.)\right)$$

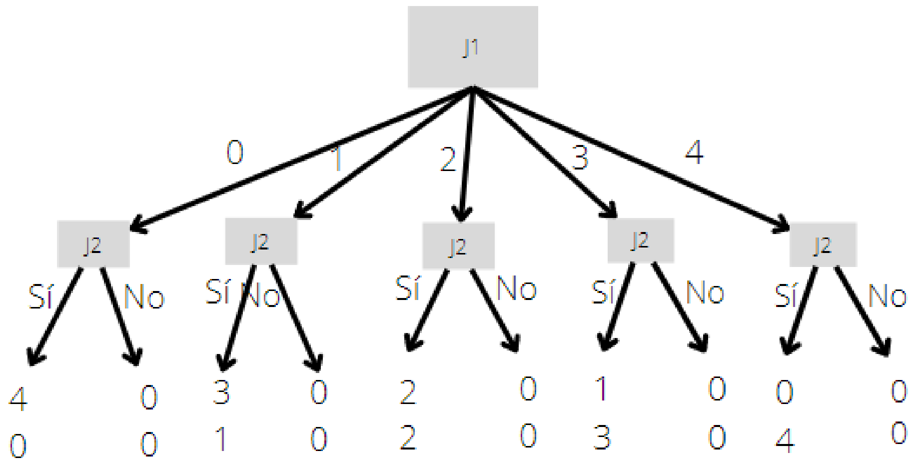
Donde $R_2(.)$:

$$R_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

7.2 Juego del ultimátum

Existe una bolsa con n monedas iguales (siendo n un número mayor que 1) entre dos jugadores. El jugador 1 saca un número m (siendo 0 el mínimo de monedas y el n el número máximo) de monedas para dárselas al jugador 2. Este último jugador ve las monedas y dice Si o No, respectivamente en el caso de que acepte o no acepte. Si dice sí, entonces se lleva las m monedas y el jugador 1 se llevaría n-m (las monedas iniciales menos las que le ha dado al jugador 2). Si este dice que no, entonces ninguno de los dos se llevaría monedas.

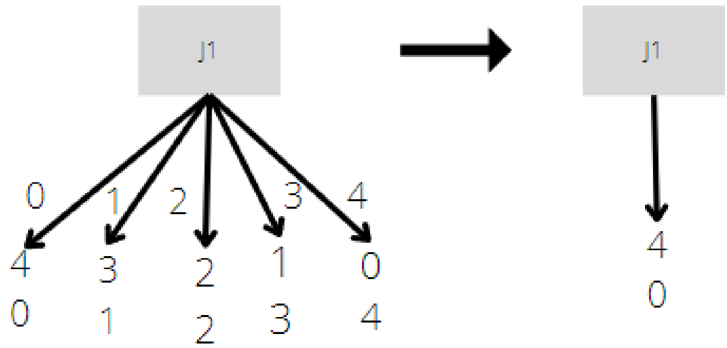
Figura 7-1:Juego del ultimátum con n=4



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Teoría de Juegos (2013).

A continuación, se observa la solución del juego mediante el método de inducción hacia atrás para obtener el Equilibrio de Nash en este juego. Aunque este juego tiene una particularidad, tiene dos soluciones posibles.

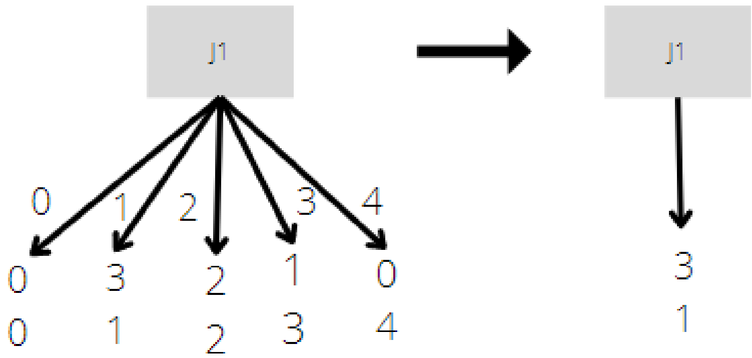
Figura 7-2: Equilibrio de Nash para juego del ultimátum (1)



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Teoría de Juegos (2013).

En este primer Equilibrio de Nash para este juego, se observa como en el primer nodo de decisión de la izquierda, el elegido por el jugador 2 en este primer caso es el que otorga un pago de (4,0) para los jugadores y que además finalmente acabará siendo el Equilibrio de Nash.

Figura 7-3: Equilibrio de Nash para juego del ultimátum (2)



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Teoría de Juegos (2013).

En este segundo Equilibrio de Nash, hay que volver a fijarse en el primer nodo de decisión de la izquierda, en esta ocasión el jugador 2 ha elegido la opción que otorga unos pagos de (0,0). Con ello en el siguiente paso de la inducción hacia atrás, esta opción estaría descartada por el jugador 1 en beneficio de la opción que otorga un pago de (3,1) siendo esta el Equilibrio de Nash.

La peculiaridad de este juego radica en que el Equilibrio de Nash siempre va a ser la opción que dé al jugador 2 un pago de 0 o un pago de 1, dependiendo de la decisión que tome en el primer nodo de elección de la izquierda. Este resultado es independiente del valor de n, ya que, por ejemplo, n =1000 y el Equilibrio de Nash para el juego sería (1000,0) o (999,1) (dependiendo de la primera decisión).

7.3 Juego del dictador

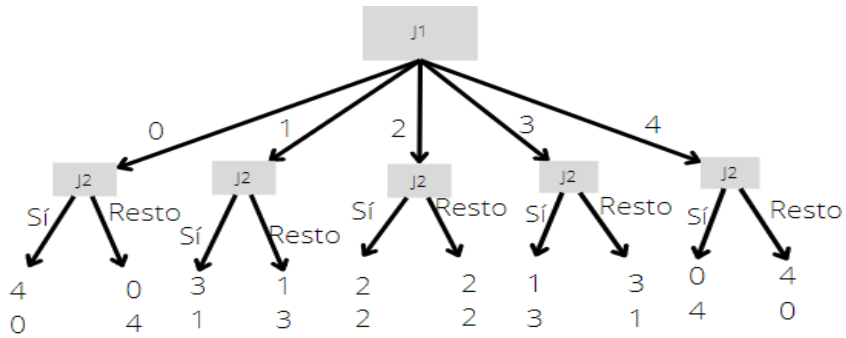
Este juego es similar al juego del ultimátum, se le diferencia en la actividad pasiva que tiene el recipiente, ya que, en este, el dictador dice la cantidad del bien que decide repartir entre él y el recipiente, pero este no tiene la posibilidad de aceptar o rechazar dicha cantidad. Este juego es muy famoso por ser usado en economía experimental, para comprobar los comportamientos del dictador, de si se trata de una persona altruista o egoísta.

Según el estudio realizado por Heinrich et al (2004) se puede comprobar como los individuos que siendo racionales deberían quedarse con todo el bien de ser el dictador, pero se observa que los dictadores suelen destinar una pequeña parte al otro jugador.

7.4 Juego del reparto

Existe una bolsa con n monedas iguales (siendo n un número mayor que 1) entre dos jugadores. El jugador 1 saca un número m (siendo 0 el mínimo de monedas y n el número máximo) de monedas para dárselas al jugador 2. Al ver este el número de monedas puede decir “Si” o puede decir “Resto”. En el caso que diga Si, entonces recibe las monedas y si dice “Resto” entonces se queda con las monedas que queden en la bolsa tras haber sacado las m monedas. El jugador 1 se queda con las monedas que no ha adquirido el jugador 2.

Figura 7-4: Juego del reparto para n=4

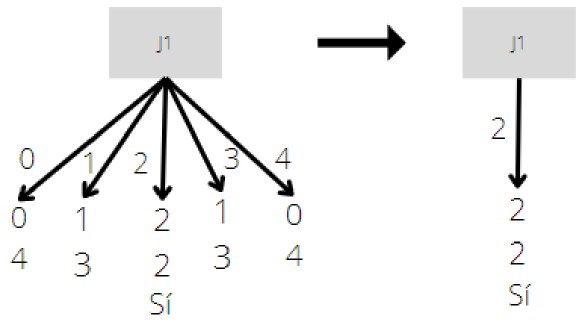


Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Teoría de Juegos (2013).

A continuación, se observa la solución del juego mediante el método de inducción hacia atrás para obtener el Equilibrio de Nash en este juego.

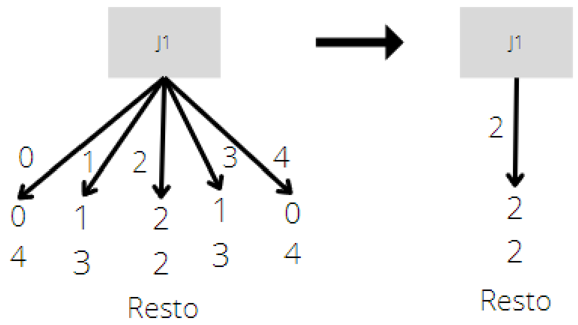
Partiendo de la figura anterior, se obtiene la siguiente:

Figura 7-5: Equilibrio de Nash para juego del reparto (1)



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Teoría de Juegos (2013)

Figura 7-6: Equilibrio de Nash para juego del reparto (2)



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Teoría de Juegos (2013)

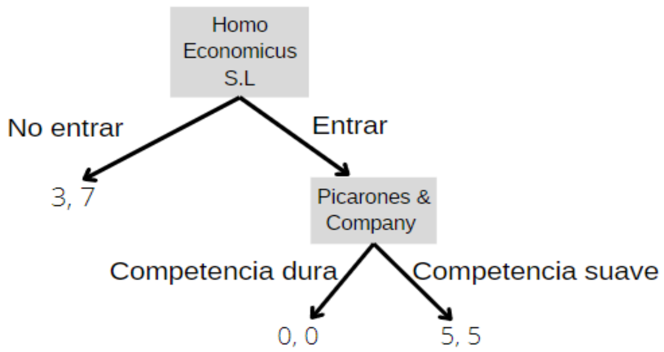
Con este juego, se observa, que existen dos equilibrios de Nash. Uno cuando el jugador 2 decide quedarse con el resto y otro cuando decide decir que acepta la propuesta del jugador 1. Curiosamente, en este juego los equilibrios de Nash coinciden con el mismo pago para cada jugador, ya que para el jugador 1 el mejor método es realizar un reparto equitativo, que de no ser así corre el riesgo de que el otro jugador elija quedarse con la opción que más beneficio le otorgue.

7.5 Juego de disuasión

La empresa Picarones & Company tiene poder de monopolio en el mercado de un bien, este monopolio del bien le producen unos beneficios de 7 u.m. Por otro lado, la empresa Homo Economicus S.L, decide estudiar la viabilidad de entrar al mercado monopolizado por la empresa Picarones & Company, ya que, de hacerlo, aumentaría sus beneficios de 3 u.m. a 5 u.m. siempre y cuando la empresa instaurada tenga una buena actitud a su entrada estableciendo una competición razonable.

De permitir la entrada en el mercado de la empresa Homo Economicus S.L, la empresa Picarones & Company, tendría unos beneficios moderados de 5 u.m. De darse el caso de que ambas empresas entren en conflictos, y decidan, por ejemplo, competir en precios, ambas empresas se quedarían sin beneficios.

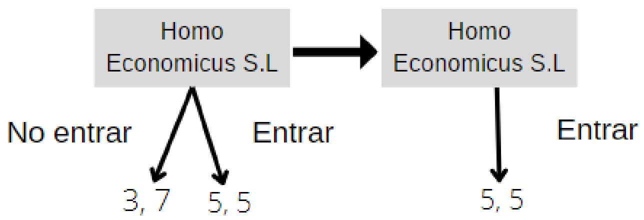
Figura 7-7: Juego de disuasión



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Teoría de Juegos (2013).

A continuación, mediante la inducción hacia atrás se verá reflejado el Equilibrio de Nash del juego.

Figura 7-8: Equilibrio de Nash para el juego de disuasión



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de Teoría de Juegos (2013)

Se observa como en un mercado monopolizado por una empresa, en la que en el supuesto de que al entrar empresas a competir sus beneficios son 0, la mejor decisión es dejar entrar al resto de empresas y optar por una postura de competencia suave que no haga ver reducidos aún más sus beneficios.

8 CONCLUSIONES

Las principales conclusiones a las que se han podido llegar con la realización de este trabajo son las siguientes.

En primer lugar, la Teoría de Juegos es una de las ramas de las Matemáticas que más aplicaciones tiene en el mundo real, como puede ser la Economía, la Biología o la Psicología. Por otro lado, el atrevimiento por parte del Banco Central de Suecia para crear el premio “Premio Sveriges Riksbank de Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel” ayudó enormemente a que la Teoría de Juegos tuviera el reconocimiento merecido, siendo el primero y más famoso el ganado por John Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten en 1994 por ser los pioneros en la materia.

Por otro lado, se ha repasado la terminología básica de la materia y la definición de Equilibrio de Nash con el fin de que resultara más sencilla la comprensión posterior de los ejemplos clásicos.

Finalmente se han hallado los Equilibrios de Nash en los diferentes ejemplos clásicos de Teoría de Juegos, tanto en forma extensiva como en forma normal, destacando entre estos últimos el Dilema del Prisionero (planteado por Merril M. Flood y Melvin Dresher en 1950). Todos estos equilibrios hallados han servido para entender como existen ocasiones en las que la búsqueda del beneficio individual cabe la posibilidad de perjudicar al resto de jugadores, incluido uno mismo.

9 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Biografías y Vidas (2022): "James A. Mirrlees". Disponible en: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/m/mirrless.htm [consulta: 6/7/2022].
- Biografías y Vidas (2022): "John F. Nash". Disponible en: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/n/nash_john_f.htm#:~:text=John%20F.-,Nash,John%20Harsanyi%20y%20Reinhard%20Selten. [consulta: 15/6/2022].
- Biografías y Vidas (2022): "John Harsanyi". Disponible en: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/h/harsany.htm [consulta: 15/6/22].
- Biografías y Vidas (2022): "Reinhard Selten". Disponible en: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/s/selten.htm#:~:text= [consulta: 15/6/2022].
- Biografías y Vidas (2004-2022): "William Vickrey". Disponible en: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/v/vickrey.htm [consulta: 15/6/2022]
- Borel, E. (1921) "*La théorie du jeu et les équations intégrales au noyau symétrique*", Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences 173, pp.1304–1308.
- Buscabiografias (1999-2022): "Lloyd S. Shapley". Disponible en: https://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/9903/Lloyd%20S.%20Shapley [consulta: 1/07/2022].
- Buscabiografías (1999-2022): "Robert B. Wilson". Disponible en: https://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/11214/Robert%20B.%20Wilson%20-%20Robert%20Wilson [consulta: 14/6/2022].
- Cournot, A. (1838.) " *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses"*, L. Hachette, París
- Economipedia (2022): "Juego del Dictador". Disponible en:https://economipedia.com/definiciones/juego-del-dictador.html#:~:text=El%20juego%20del%20dictador%20es,utilizado%20al%20combinarlo%20con%20otros [consulta: 16/6/2022].
- Economipedia (2022): "Teoría de juegos". Disponible en: https://economipedia.com/definiciones/teoria-de-juegos.html [consulta: 20/6/2022].

- Fundación BBVA (2022): "Paul R. Milgrom. Premio Fronteras del Conocimiento". Disponible en: https://www.premiosfronterasdelconocimiento.es/galardonados/paul-r-milgrom/#:~:text=Paul%20Milgrom%20(Detroit%2C%20Estados%20Unidos,)%2C%20donde%20obtuvo%20la%20c%C3%A1tedra [consulta: 15/6/2022].
- Gibbons, R. (1993): "*Un primer curso de teoría de juegos"*. Antoni Bosch, Barcelona.
- Harford, T. (2008): El Economista Camuflado. La economía de las pequeñas cosas. DeBolsillo Editorial, Barcelona.
- Henrich, J., Boyd R., Bowles S., Camerer C., Fehr E., y Gintis H. (2004): "*Foundations of Human Sociality: Economic Experiments and Ethnographic Evidence from Fifteen Small-Scale Societies"*. Oxford University Press.
- J. Von Neumann, "*Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*", Mathematische Annalen 100 (1928), 295–320.
- Junta de Andalucía (s.f.): "Manual básico: La economía de mercado: virtudes e inconvenientes. Introducción a la Teoría de Juegos. La estrategia maximin." Disponible en: La estrategia MAXIMIN (juntadeandalucia.es) [consulta: 18/7/2022].
- L. Martínez-Carrasco, F. Vidal y N. Poole (2006): "Evaluación de preferencias hacia las mandarinas en el mercado británico. Aplicación a las subastas Vickrey." Economía Agraria y Recursos Naturales, Vol.6,11, 2006, pp. 157-175.
- Leibniz, G. W. (1704): *Nouveaux Essais sur l'entendement humain.*
- MCN biografías (s.f.): "Robert J. Aumann". Disponible en; https://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key=aumann-robert-j [consulta: 15/6/22].
- MCN biografías (s.f.): "Thomas C. Schelling". Disponible en: https://www.mcnbiografias.com/app-bio/do/show?key=aumann-robert-j [consulta: 15/6/22].
- Nash, J.F. (1950): *"Equilibrium points in n-person games"*. Revista PNAS, vol 36,1, pp.48-49.
- Nash, J.F. (1951): "*Non-Cooperative Games"*, Annals of Mathematics, vol 54, pp.286-295.
- Pérez, J., Jimeno, J.L., y Cerdá, E (2013): Teoría de Juegos. Editorial Gaceta, Madrid.

- Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras (2011): “Excmo. Sr. Dr. D. Alvin E. Roth”. Disponible en: https://racef.es/es/academicoscorrespondiente-extranjero/aroth [consulta: 1/07/2022].
- Software Delsol (2022): “Teoría de juegos”. Disponible en: https://www.sdelsol.com/glosario/teoria-de-juegos/ [consulta: 20/6/2022].
- Tenorio, A.F. y Martín, A.M. (2015): “Un paseo por la historia de la Teoría de Juegos”. Boletín de Matemáticas, 22, 2015, pp. 77-95.
- The Nobel Prize (2022): “All prizes in economic sciences”. Disponible en: https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-prizes-in-economic-sciences/ [consulta: 15/6/2022].
- The Nobel Prize (2022): “Nomination and selection of economic sciences laureates”. Disponible en: https://www.nobelprize.org/nomination/economic-sciences/ [consulta: 4/07/2022].
- Von Neumann J., Morgenstern O. (1994): “*Theory of Games and Economic Behaviour*”, Princeton University Press
- Zermelo E. (1913): “*Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachpiels”* Proceedings of the Fifth Congress of Mathematicians (Cambridge) (E. W. Hobson and A. E. H. Love, eds.), vol. II, Cambridge University Press, 1913, pp. 501–504.