132-1

7.

MEMORIA

SOBRE ALGUNOS MÉTODOS NUEVOS

DE CALCULAR LA LONGITUD

POR LAS DISTANCIAS LUNARES:

Y APLICACION DE SU TEÓRICA

Á LA SOLUCION DE OTROS PROBLEMAS DE NAVEGACION.

POR DON JOSEPH DE MENDOZA Y RIOS,
Capitan de Navio de la Real Armada, individuo de la Real Sociedad de Lóndres, y correspondiente de las Reales Academias de las Ciencias de Paris y de Lisboa.

DE ÓRDEN SUPERIOR.

MADRID: EN LA IMPRENTA REAL.

AÑO DE 1795.

ENTRE los objetos relativos á la Navegacion que me he propuesto para asunto de mis tareas, he juzgado conveniente disponer una nueva edicion de las Tablas de los logaritmos de las líneas trigonométricas, de diez en diez segundos para los tres primeros grados, y de minuto en minuto hasta concluir el quadrante. En ellas he comprehendido los logaritmos de las cuerdas, ó, lo que es lo mismo, de los duplos-senos que he calculado á este propósito: como tambien los logaritmos senos-versos para todo el círculo, que hasta ahora no se hallan en ninguna obra. Para mayor utilidad he arreglado los argumentos y las diferencias de modo que pueden usarse los ángulos, sea en tiempo, sea en grados, segun se necesiten ú ocurran en las operaciones, y sin necesidad de reducir á partes del círculo las primeras expresiones.

Mis Tablas, así, son propias para calcular la latitud por dos alturas conforme al método de Douwes. Esta es la primera idea con que emprendí una obra tan penosa; pero que consideraba necesaria aunque solo fuese para aquel objeto. Despues he procurado adaptarlas á otros varios usos para que he visto que son útiles, y de los quales indicaré algunos en adelante.

Igualmente he formado una Tabla completa de los senos-versos naturales de diez en diez segundos.

El uso de los senos-versos es en general muy cómodo; pues por su medio se hallan directamente los ángulos hasta dos rectos, evitando la incertidumbre que se padece sobre la eleccion del arco ó de su suplemento quando se busca por los senos. En muchos casos se acostumbra calcular el quadrado del seno de la mitad del ángulo pedido para deducir la raiz, y por ella el ángulo entero. Pero este procedimiento se reduce á una analisis de la expresion del seno-verso*; y es recurrir á un rodeo quando aquel elemento hubiera podido dar inmediatamente el mismo resultado. Por estas y otras consideraciones me parece que no deberia abandonarse tanto como hasta ahora el uso de los senos-versos.

Yo he procurado establecer los mejores métodos para servirse de los logaritmos senos-versos en las resoluciones de los problemas ordinarios de la Navegacion; suponiendo ademas el auxîlio de los logaritmos duplos-senos que se hallan en mis Tablas. Al fin se verán las demostraciones de las fórmulas que he adoptado para calcular así el ángulo horario, la altura y el azimuth de los astros; como para resolver el problema de la latitud por dos alturas de sol.

En quanto á la reduccion de las distancias de la luna al sol ó á las estrellas, me he propuesto abrazar el problema en toda su generalidad, para deducir las mejores soluciones exâctas que admite la naturaleza del caso, sea por los logaritmos, sea por los senos naturales. Y mis investigaciones, habiendo dado orígen á algunas reflexîones que no juzgo del todo inútiles, me ha parecido oportuno presentarlas, segun la misma progresion que han seguido mis ideas.

Antes de pasar adelante convendrá notar que mis consideraciones se han limitado á los

* Se sabe que seno-verso $A = 2 \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} A$.

métodos cuyas operaciones exîgen el uso de los logaritmos, ó de los senos naturales separadamente. He dexado de comprehender los que piden la combinacion de ambos medios: porque su práctica es siempre mas embarazosa y freqüentemente no ménos larga. Una prueba, entre otras, puede verse comparando el método de Mr. Dunthorne publicado en la primera edicion de las *Requisite Tables* Inglesas, y el que el Doctor Maskelyne nos ha dado en la segunda edicion de la misma obra *. El Astrónomo Real, transformando las equaciones del primer autor de un modo propio para executar todas las operaciones por logaritmos, libertó al calculador de la atencion á las variaciones de los casos, y del trabajo de sacar sus elementos de Tablas de naturaleza diferente.

PROBLEMA PARA REDUCIR LAS DISTANCIAS LUNARES APARENTES.

El problema de que se trata es el siguiente:

Dada la distancia aparente de la luna al sol ó á una estrella, con las alturas aparentes y verdaderas de los dos astros, hallar la distancia verdadera.

Para resolverlo, supongamos (fig. 1.) que Z sea el zenith, y que L y S representen los lugares verdaderos de la luna y del sol ó estrella; y l y s los lugares aparentes de los mismos astros. En los dos triángulos LZS, lZs se tendrá por la trigonometría esférica:

$$\cos.\,LS = \cos.\,Z\ \text{sen.}\,ZL\ \text{sen.}\,ZS + \cos.\,ZL\ \cos.\,ZS$$

$$\cos.\,Z = \frac{\cos.\,ls - \cos.\,Zl\ \cos.\,Zs}{\text{sen.}\,Zl\ \text{sen.}\,Zs}$$

Por consiguiente, substituyendo la segunda expresion en la primera:

$$\cos.\,LS = \frac{\cos.\,ls\ \text{sen.}\,ZL\ \text{sen.}\,ZS - \cos.\,Zl\ \cos.\,Zs\ \text{sen.}\,ZL\ \text{sen.}\,ZS}{\text{sen.}\,Zl\ \text{sen.}\,Zs} + \cos.\,ZL\ \cos.\,ZS$$

Hagamos ahora la altura aparente de la luna $= a$, su altura verdadera $=$ A; la altura aparente del segundo astro $= h$, su altura verdadera $=$ H; la distancia aparente $= d$, y la distancia verdadera $=$ D. Será:

$$\cos.\,D = \frac{\cos.\,d\ \cos.\,A\ \cos.\,H - \text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,h\ \cos.\,A\ \cos.\,H}{\cos.\,a\ \cos.\,h} + \text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,H$$

Tal es la expresion general de la distancia verdadera. Resta ahora el ponerla baxo las formas mas propias para hacer el cálculo por los logaritmos ó por los senos naturales. Tratemos primero de lo que conviene para servirse de los logaritmos.

La equacion general puede expresarse del modo siguiente:

$$\cos.\,D = (\cos.\,d\ \cos.\,A\ \cos.\,H - \text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,h\ \cos.\,A\ \cos.\,H + \cos.\,a\ \cos.\,h\ \cos\,A\ \cos.\,H - \cos.\,a\ \cos.\,h\ \cos.\,A\ \cos.\,H) \times \frac{1}{\cos.\,a\ \cos.\,h} + \text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,H$$

En ella puede substituirse $-\cos.\,(a \sim h)\ \cos.\,A\ \cos.\,H$ en vez de .... $-\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,h\ \cos.\,A\ \cos.\,H - \cos.\,a\ \cos.\,h\ \cos.\,A\ \cos.\,H$, en cuyo caso la equacion es:

I $$\cos.\,D. = (\cos.\,d\ \cos.\,A\ \cos.\,H - \cos.\,(a \sim h)\ \cos.\,A\ \cos.\,H + \cos.\,a\ \cos.\,h\ \cos.\,A\ \cos.\,H) \times \frac{1}{\cos.\,a\ \cos.\,h} + \text{sen.}\,A\ \text{sen.}\,H$$

Ó puede substituirse $\cos.\,(a+h)\ \cos.\,A\ \cos.\,H$ en vez de .... $-\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,h\ \cos.\,A\ \cos.\,H + \cos.\,a\ \cos.\,h\ \cos.\,A\ \cos.\,H$, y entónces se tiene:

II $$\cos.\,D = (\cos.\,d\ \cos.\,A\ \cos.\,H + \cos.\,(a+h)\ \cos.\,A\ \cos.\,H - \cos.\,a\ \cos.\,h\ \cos.\,A\ \cos.\,H) \times \frac{1}{\cos.\,a\ \cos.\,h} + \text{sen}\ A\ \text{sen.}\,H.$$

* London 1781. Appendix.

Aquí se ofrecen dos modos de proceder que derivan inmediatamente de la fórmula primaria como de un punto central. Vamos á exâminar el primero.

Substituyendo $1 - 2\,\text{sen.}^2 \frac{1}{2}D$ en vez de cos. D, y haciendo las reducciones necesarias, se tendrá:

$$2\,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}D = 1 + (\cos.(a \sim h) - \cos.d) \times \frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h} - \cos.A\cos.H - \text{sen.}A\,\text{sen.}H$$

$$= 1 + 2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}(d+(a\sim h))\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}(d-(a\sim h)) \times \frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h} - \cos.(A\sim H)$$

Pero $\cos.(A\sim H) = 1 - 2\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}(A\sim H)$

luego $\text{sen.}^2\frac{1}{2}D = \text{sen.}\frac{1}{2}(d+(a\sim h))\,\text{sen.}\frac{1}{2}(d-(a\sim h)) \times \frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h} + \text{sen.}^2\frac{1}{2}(A\sim H)$

y $\text{sen.}\frac{1}{2}D = \text{sen.}\frac{1}{2}(A\sim H)\sqrt{\left(1+\text{sen.}\frac{1}{2}(d+(a\sim h))\,\text{sen.}\frac{1}{2}(d-(a\sim h)) \times \frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}(A\sim H)}\right)}$

Si se hace $\text{tang.}\,M = \dfrac{\sqrt{\left(\text{sen.}\frac{1}{2}(d+(a\sim h))\,\text{sen.}\frac{1}{2}(d-(a\sim h)) \times \frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h}\right)}}{\text{sen.}\frac{1}{2}(A\sim H)}$

Será $\dfrac{1}{\cos.M} = \sqrt{\left(1+\text{sen.}\frac{1}{2}(d+(a\sim h))\,\text{sen.}\frac{1}{2}(d-(a\sim h)) \times \frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}(A\sim H)}\right)}$

De donde resulta $\text{sen.}\frac{1}{2}D = \dfrac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A\sim H)}{\cos.M}$.

Así calculando primero tangente M, se podrá deducir fácilmente sen. $\frac{1}{2}$ D.

Aquel es el método cuyas reglas ha publicado el Doctor Maskelyne en su Introduccion á las Tablas logarítmicas de Taylor *.

De un modo semejante puede transformarse la equacion II, y se hallará:

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}D = \cos.\tfrac{1}{2}(A+H)\sqrt{\left(1-\cos.\tfrac{1}{2}(a+h+d)\cos.\tfrac{1}{2}((a+h)\sim d) \times \frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h\cos.^2\frac{1}{2}(A+H)}\right)}$$

Haciendo $\text{sen.}\,N = \dfrac{\sqrt{\left(\cos.\frac{1}{2}(a+h+d)\cos.\frac{1}{2}((a+h)\sim d) \times \frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h}\right)}}{\cos.\frac{1}{2}(A+H)}$

resultará $\text{sen.}\frac{1}{2}D = \cos.\frac{1}{2}(A+H)\cos.N$.

Por donde calculando primero seno N, se deducirá sen. $\frac{1}{2}$ D.

Este es el método del célebre Caballero de Bordá, quien ha indagado muchos años hace las mejores soluciones de los problemas de la Navegacion, empleando con preferencia las sumas por la facilidad que ofrecen en las operaciones prácticas.

Pueden hacerse algunas transformaciones en las equaciones del Caballero de Bordá y del Doctor Maskelyne; pero un exâmen muy leve bastará para convencerse de que las fórmulas de aquellos dos autores son las mas simples y las mas cómodas que la naturaleza del problema admite para calcular por las Tablas de los logaritmos-senos y tangentes. Cada uno de los dos métodos tienen tambien ventajas peculiares. El del Caballero de Bordá es un poco mas corto: el del Doctor Maskelyne es algo mas exâcto; porque buscándose en él el ángulo in-

* Taylor's Tables of logarithms. London 1792. Probl. XV. pág. 60.

termediario por la tangente, los errores cometidos en los elementos del cálculo influyen ménos en el resultado.

En los dos métodos pueden aplicarse las diferencias logarítmicas de Dunthorne, en vez de tomar separadamente los quatro logaritmos de la expresion $\frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h}$.

VAMOS á exâminar ahora el modo de hacer uso de los logaritmos senos-versos. Primero por las diferencias.

Se tiene: $\cos. D = \cos. (A \sim H) - 2 \,\text{sen.}\, \frac{1}{2}(d + (a \sim h)) \,\text{sen.}\, \frac{1}{2}(d - (a \sim h)) \times \frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h}$.

Por consiguiente $1 + \cos. D = 1 + \cos. (A \sim H) - 2 \,\text{sen.}\, \frac{1}{2}(d + (a \sim h)) \,\text{sen.}\, \frac{1}{2}(d - (a \sim h)) \times \frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h}$

y* $\text{susen. verso}\, D = \text{susen. verso}\, (A \sim H) - 2 \,\text{sen.}\, \frac{1}{2}(d + (a \sim h)) \,\text{sen.}\, \frac{1}{2}(d - (a \sim h)) \times \frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h}$

$$= \text{susen. verso}\, (A \sim H) \left(1 - 2 \,\text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(d + (a \sim h)) \,\text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(d - (a \sim h)) \times \frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h \;\text{susen. verso}\, (A \sim H)} \right)$$

Tomando $\cos. P = 2 \,\text{sen.}\, \frac{1}{2}(d + (a \sim h)) \,\text{sen.}\, \frac{1}{2}(d - (a \sim h)) \times \frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h \;\text{susen. verso}\, (A \sim H)}$ resultará $\text{susen. verso}\, D = \text{susen. verso}\, (A \sim H) \,\text{sen. verso}\, P$.

Por medio de estas fórmulas podrá deducirse la distancia verdadera, calculando primero coseno P. Y es de notar para el presente y demas casos semejantes, que mis Tablas de los duplos-senos dan inmediatamente el logaritmo de $2 \,\text{sen.}\, \frac{1}{2}(d + (a \sim h))$, ó el de $2 \,\text{sen.}\, \frac{1}{2}(d - (a \sim h))$, salvando el trabajo de agregar el logaritmo del número 2 en las operaciones.

Yo he adoptado este método por las ventajas que ofrece para la práctica; y á fin de facilitarlo he construido una Tabla que da el logaritmo de $\frac{\cos. a \cos. h}{2 \cos. A \cos. H}$. Entónces se busca la secante de P, sin necesidad de los duplos-senos; y las operaciones con los logaritmos se reducen á simples adiciones.

PARA emplear los logaritmos senos-versos por las sumas, se hallará siguiendo un procedimiento semejante:

$$\text{susen. verso}\, D = \text{sen. verso}\, (A + H) \left(1 + 2 \cos. \tfrac{1}{2}(a + h + d) \cos. \tfrac{1}{2}((a + h) \sim d) \times \frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h \,\text{sen. verso}\, (A + H)} \right)$$

Pero debe notarse que el coseno de $\frac{1}{2}(a + h + d)$ puede ser positivo ó negativo; y que así la expresion general es como sigue:

$$\text{susen. verso}\, D = \text{sen. verso}\, (A + H) \left(1 \pm 2 \cos. \tfrac{1}{2}(a + h + d) \cos. \tfrac{1}{2}((a + h) \sim d) \times \frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h \,\text{sen. verso}\, (A + H)} \right)$$

De donde, tomando $\cos. Q = 2 \cos. \frac{1}{2}(a + h + d) \cos. \frac{1}{2}((a + h) \sim d) \times \frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h \,\text{sen. v.}\, (A + H)}$

* Yo he llamado *suseno-verso* de un arco al seno-verso de su suplemento. Así el suseno-verso de A es el seno-verso de 180°—A. El suseno-verso es un correlativo del seno-verso, tan natural y esencial como el coseno lo es del seno, y la cotangente de la tangente.

resulta susen. verso $D = \text{sen. verso}\,(A+H) \left.\begin{matrix}\text{susen. verso}\\ \text{sen. verso}\end{matrix}\right\} Q$

La necesidad de la atencion para tomar unas veces el seno-verso, otras veces el suseno-verso de Q, aunque poco embarazosa, me ha hecho preferir el otro método que no pide distincion de casos.

Volvamos á tomar actualmente la expresion general para hallar fórmulas propias para el cálculo por los senos naturales.

Para este objeto tambien puede hacerse uso de las diferencias ó de las sumas. Sigamos ahora el segundo camino.

La equacion primaria da:

$$\cos. D = (\cos. d + \cos.(a+h)) \times \frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h} - \cos.(A+H)$$

Hágase $\frac{\cos. A \cos. H}{2 \cos. a \cos. h} = \cos. B$; y se tendrá:

$$\begin{aligned}\cos. D &= 2\cos. d \cos. B + 2\cos.(a+h)\cos. B - \cos.(A+H)\\ &= \cos.(d+B) + \cos.(d \sim B) + \cos.(a+h+B) + \cos.((a+h)\sim B) - \cos.(A+H)\end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}1 - \text{sen. verso}\, D = {} & 1 - \text{sen. verso}\,(d+B) + 1 - \text{sen. verso}\,(d \sim B) + 1 - \text{sen. verso}\,(a+h+B)\\ & + 1 - \text{sen. verso}\,((a+h)\sim B) + 1 - \text{susen. verso}\,(A+H)\end{aligned}$$

Ó, representando el radio por R:

$$\begin{aligned}\text{sen. verso}\, D = {} & \text{sen. verso}\,(d+B) + \text{sen. verso}\,(d\sim B) + \text{sen. verso}\,(a+h+B) + \text{sen. verso}\,((a+h)\sim B)\\ & + \text{susen. verso}\,(A+H) - 4R.\end{aligned}$$

Adjunta se verá la Tabla que he calculado de los ángulos B, que convienen á cada grado de altura y cada minuto de paralaxe horizontal de la luna: con las proporcionales para las variaciones de $100'$ en la altura, y $100''$ en la paralaxe. Tambien he agregado las correcciones aditivas que deben aplicarse á los ángulos, segun la altura del sol ó de la estrella. Con el auxîlio de esta Tabla el cálculo de las distancias es muy fácil y expedito, sirviéndose de los senos-versos.

La misma Tabla puede emplearse para calcular las distancias por los senos naturales; pero entónces es necesario mudar los signos de los cosenos de los ángulos que excedan el quadrante; atencion de que se está libre, haciendo uso de los senos-versos. Sin embargo, me parece que podrá recurrirse con ventaja á aquel método, quando no se tengan otras Tablas que las de los senos naturales. Despues se verán las reglas que deben seguirse para las operaciones prácticas y un exemplo.

En mis Tablas se hallarán todas las explicaciones que he juzgado necesarias para facilitar el uso de mi método por los senos-versos (de que tambien incluiré despues las reglas generales y un exemplo); y con presencia de los medios prácticos que he dispuesto al propósito, se podrá juzgar con mas conocimiento de las razones que me lo han hecho adoptar como sumamente útil para los navegantes.

Para deducir un método análogo por las diferencias, se tendrá recurriendo á la fórmula general:

$$\begin{aligned}\cos. D &= (\cos. d - \cos.(a\sim h)) \times \frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h} + \cos.(A\sim H)\\ &= 2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}(d+(a\sim h))\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}(d-(a\sim h)) \times \frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. h} + \cos.(A\sim H)\end{aligned}$$

B

De donde, tomando $\cos. B = \frac{\cos. A \cos. H}{2 \cos. a \cos. h}$, y haciendo las reducciones necesarias, resultarán las equaciones siguientes:

$$\cos. D = \cos.(d+B) + \cos.(d \sim B) - \cos.((a \sim h)+B) - \cos.((a \sim h) \sim B) + \cos.(A \sim H)$$

y $$\text{sen. verso } D = \text{sen. verso }(d+B) + \text{sen. verso }(d \sim B) - \text{sen. verso }((a \sim h)+B) - \text{sen. verso }((a \sim h) \sim B) + \text{sen. verso }(A \sim H)$$

Mr. Krafft acaba de publicar la última fórmula, pero deduciéndola de un modo diferente, en una excelente Memoria, que se halla en el último tomo de las Actas de la Academia de Petersburgo. Para el cálculo por mis Tablas, podrá ponerse su expresion baxo la forma siguiente:

$$\text{sen. verso } D = \text{sen. verso }(d+B) + \text{sen. verso }(d \sim B) + \text{susen. verso }((a \sim h)+B) + \text{susen. verso }((a \sim h) \sim B) + \text{sen. verso }(A \sim H) - 4R.$$

REGLAS Y EXEMPLOS.

Dadas la distancia aparente de la luna al sol ó á una estrella, la altura aparente y la paralaxe horizontal de la luna, y la altura aparente del segundo astro, hallar la distancia verdadera.

PRIMER MÉTODO:

Por los senos naturales.

1. Tómese la suma de las alturas aparentes.
2. Con la altura aparente y la paralaxe horizontal de la luna tómese el correspondiente ángulo de la Tabla adjunta; y agréguesele la correccion que corresponde á la altura del sol ó de la estrella. Se tendrá un ángulo auxîliar.
3. Tómese la suma y la diferencia del ángulo auxîliar y de la distancia aparente.
4. Tómese tambien la suma y la diferencia del ángulo auxîliar y de la suma de las alturas aparentes.
5. Dedúzcase la diferencia entre la paralaxe de altura ménos refraccion de la luna, y la refraccion ménos paralaxe del sol, ó la refraccion sola de la estrella. Si la primera cantidad es la mayor, agréguese; si es la menor, réstese la diferencia de la suma de alturas aparentes; y se tendrá la suma de alturas verdaderas.
6. Búsquense los cosenos naturales de la primera suma, de la primera diferencia, de la segunda suma, de la segunda diferencia, y de la suma de alturas verdaderas. Escríbanse los de los arcos de ménos de 90° en una coluna con el signo $+$; y los de los arcos mayores que 90° en otra coluna con el signo $-$; á excepcion del coseno de la suma de alturas verdaderas que se ha de colocar por la regla inversa.
7. Hágase la adicion de cada coluna; y tomando la diferencia de las sumas, se tendrá el coseno natural de la distancia verdadera. Que será mayor ó menor que 90° segun la mayor suma sea la de la coluna $-$, ó la de la coluna $+$.

EXEMPLO.

Sea la distancia aparente de la luna al sol de $82^{\circ}.\ 10'.\ 56''$, la altura aparente de la luna de $43^{\circ}.\ 4'.\ 6''$, su paralaxe horizontal de $54'.\ 55''$, y la altura aparente del sol de $39^{\circ}.\ 5'.\ 9''$.

Distancia aparente	82°. 10′. 56″	Par. y refr.		
Altura ap. ☾	43 . 4 . 6	+39′.7″		
Altura ap. ⊙	39 . 5 . 9	− 1.3		
Suma de alt. ap.	82 . 9 . 15	+38.4		
Angulo auxîliar	60 . 20 . 41			
Primera suma	142 . 31 . 37	coseno...	−7936395	
Primera diferencia	21 . 50 . 15	coseno...		+9282426
Segunda suma	142 . 29 . 56	coseno...	7933415	
Segunda diferencia	21 . 48 . 34	coseno...		9284246
Suma de alturas verd.	82 . 47 . 19	coseno...	1255304	18566672
			17125114	17125114
Distancia verdadera	81°. 42′. 42″	coseno D.		1441558

SEGUNDO MÉTODO:

Por los senos-versos naturales.

Siganse las reglas del método antecedente hasta la 5 inclusive. Despues:

6. Búsquense los senos-versos naturales de la primera suma, de la primera diferencia, de la segunda suma, y de la segunda diferencia; y el suseno-verso de la suma de alturas verdaderas. Agréguense, y (quitando 4 de la primera cifra de la suma) se tendrá el seno-verso de la distancia verdadera.

EXEMPLO.

Supóngase la distancia aparente de la luna al sol de 63°. 9′. 9″, la altura aparente de la luna de 68°. 40′. 29″, su paralaxe horizontal de 55′. 7″, y la altura aparente del sol de 13°. 35′. 26″.

Distancia aparente	63°. 9′. 9″	Par. y refr.	
Altura ap. ☾	68 . 40 . 29	+ 19′. 41″	
Altura ap. ⊙	13 . 35 . 26	− 3 . 44	
Suma de alt. ap.	82 . 15 . 55	+ 15 . 57	
Angulo auxîliar	60 . 28 . 33		
Primera suma	123 . 37 . 42	seno-verso	155.3803
Primera diferencia	2 . 40 . 36	seno-verso	1091
Segunda suma	142 . 44 . 28	seno-verso	179.5909
Segunda diferencia	21 . 47 . 22	seno-verso	7.1446
Suma de alturas verd.	82 . 31 . 52	suseno-verso	112.9987
Distancia verdadera	63°. 23′. 59″	seno-verso D.	55.2236

NOTA.

El primer exemplo está calculado con los senos naturales que se hallan en las Tablas de Sherwin, el segundo con mis Tablas de senos-versos naturales.

APLICACION DE ESTA TEÓRICA Á LA SOLUCION DE ALGUNOS OTROS PROBLEMAS DE NAVEGACION.

I.

Dadas la latitud geográfica, y la altura y declinacion de un astro, hallar su ángulo horario.

Sea para este y los problemas siguientes L la latitud, D la declinacion, H la altura, y A el ángulo horario. Y represente (fig. 2) Z el zenith, P el polo elevado sobre el horizonte HO, *p* el polo depreso, y EQ el equador.

Por la Trigonometría esférica es $\cos. ZPS = \frac{\cos. ZS - \cos. ZP \cos. PS}{\text{sen. } ZP \text{ sen. } PS}$

Por consiguiente sen. verso $ZPS = 1 - \cos. ZPS = \frac{\text{sen. } ZP \text{ sen. } PS - \cos. ZS + \cos. ZP \cos. PS}{\text{sen. } ZP \text{ sen. } PS}$

$$= \frac{\cos. (ZP \sim PS) - \cos. ZS}{\text{sen. } ZP \text{ sen. } PS} = \frac{2 \text{ sen.} \frac{1}{2}\left(ZS + (ZP \sim PS)\right) \text{sen.} \frac{1}{2}\left(ZS - (ZP \sim PS)\right)}{\text{sen. } ZP \text{ sen. } PS}$$

Esto es, seno-verso $A = 2 \text{ sen.} \frac{1}{2}\left(90^\circ - H + ((90^\circ - L) \sim (90^\circ \pm D))\right) \text{sen.} \frac{1}{2}\left(90^\circ - H - ((90^\circ - L) \sim (90^\circ \pm D))\right) \times \frac{1}{\cos. L \cos. D}$

Si la declinacion es de la especie de la latitud, será:

$$\text{sen. verso} A = 2 \text{ sen.} \frac{1}{2}\left(90^\circ - H + ((90^\circ - L) \sim (90^\circ - D))\right) \text{sen.} \frac{1}{2}\left(90^\circ - H - ((90^\circ - L) \quad (90^\circ - D))\right) \times \frac{1}{\cos. L. \cos. D}$$

$$= 2 \text{ sen.} \frac{1}{2}(90^\circ - H + (L \sim D)) \text{sen.} \frac{1}{2}(90^\circ - H - (L \sim D)) \times \frac{1}{\cos. L. \cos. D}$$

$$= 2 \cos. \frac{1}{2}(90^\circ + H - (L \sim D)) \cos. \frac{1}{2}(90^\circ + H + (L \sim D)) \times \frac{1}{\cos. L \cos. D}$$

Si la declinacion es de diferente especie, será:

$$\text{sen. verso} A = 2 \text{ sen.} \frac{1}{2}\left(90^\circ - H + ((90^\circ - L) \sim (90^\circ + D))\right) \text{sen.} \frac{1}{2}\left(90^\circ - H - ((90^\circ - L) \sim (90^\circ + D))\right) \times \frac{1}{\cos. L. \cos. D}$$

$$= 2 \text{ sen.} \frac{1}{2}(90^\circ - H - L - D) \text{sen.} \frac{1}{2}(90^\circ - H + L + D) \times \frac{1}{\cos. L \cos. D}$$

$$= 2 \cos. \frac{1}{2}(90^\circ + H + L + D) \cos. \frac{1}{2}(90^\circ + H - L - D) \times \frac{1}{\cos. L \cos. D}$$

Así se tendrá generalmente:

$$\text{sen. verso} A = \frac{2 \cos. \frac{1}{2}(90^\circ + H + (L \overset{+}{\sim} D)) \cos. \frac{1}{2}(90^\circ + H - (L \overset{+}{\sim} D))}{\cos. L \cos. D}.$$

El signo + quando la declinacion y la latitud son de diferente especie, el signo ∼ quando son de la misma especie.

II.

Dadas la latitud geográfica, y la declinacion y el ángulo horario de un astro, hallar su altura.

Por la Trigonometría esférica se tiene (fig. 2):

$$\cos. ZS = \cos. ZPS \,\text{sen.}\, ZP \,\text{sen.}\, PS + \cos. ZP \cos. PS$$

Esto es, $\text{sen.}\, H = \cos. A \cos. L \cos. D + \text{sen.}\, L \,\text{sen.}\, D$

$$= \cos. A \cos. L \cos. D - \cos. L \cos. D + \cos. L \cos. D + \text{sen.}\, L \,\text{sen.}\, D$$

$$= -\cos. L \cos. D\,(1 - \cos. A) + \cos.(L \sim D) = \cos.(L \sim D) - \cos. L \cos. D \,\text{sen. verso}\, A$$

$$= \cos.(L \sim D)\left(1 - \frac{\cos. L \cos. D \,\text{sen. verso}\, A}{\cos.(L \sim D)}\right)$$

Tal es la fórmula para quando la declinacion y la latitud son de una misma especie. Pero si fueren de diferente especie, será:

$$\text{sen.}\, H = \cos. A \cos. L \cos. D - \cos. L \cos. D + \cos. L \cos. D - \text{sen.}\, L \,\text{sen.}\, D$$

$$= -\cos. L \cos. D\,(1 - \cos. A) + \cos.(L + D) = \cos.(L + D) - \cos. L \cos. D \,\text{sen. verso}\, A$$

$$= \cos.(L + D)\left(1 - \frac{\cos. L \cos. D \,\text{sen. verso}\, A}{\cos.(L + D)}\right)$$

Y generalmente:

$$\text{sen.}\, H = \cos.(L \overset{\sim}{+} D)\left(1 - \frac{\cos. L \cos. D \,\text{sen. verso}\, A}{\cos.(L \overset{\sim}{+} D)}\right)$$

Tomando pues $\dfrac{\cos. L \cos. D \,\text{sen. verso}\, A}{\cos.(L \overset{\sim}{+} D)} = \text{sen. verso}\, M$

Resultará $\text{sen.}\, H = \cos.(L \overset{\sim}{+} D) \cos. M$.

El signo $\sim$ quando la declinacion y la latitud son de la misma especie, el signo $+$ quando son de diferente especie.

III.

Dadas la latitud geográfica, y la declinacion y la altura de un astro, hallar su azimuth.

Por la Trigonometría esférica se tiene (fig. 2):

$$\cos. PZS = \frac{\cos. SP - \cos. ZP \cos. ZS}{\text{sen.}\, ZP \,\text{sen.}\, ZS}$$

Luego $\text{sen. verso}\, PZS = 1 - \cos. PZS = \dfrac{\text{sen.}\, ZP \,\text{sen.}\, ZS - \cos. SP + \cos. ZP \cos. ZS}{\text{sen.}\, ZP \,\text{sen.}\, ZS}$

$$= \frac{\cos.(ZP \sim ZS) - \cos. SP}{\text{sen.}\, ZP \,\text{sen.}\, ZS}$$

$$= 2 \,\text{sen.}\, \tfrac{1}{2}\left(SP + (ZP \sim ZS)\right) \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}\left(SP - (ZP \sim ZS)\right) \times \frac{1}{\text{sen.}\, ZP \,\text{sen.}\, PS}$$

Esto es, $\text{sen. verso}\, PZS = 2 \,\text{sen.}\, \tfrac{1}{2}\left(90^\circ \mp D + ((90^\circ - L) \sim (90^\circ - H))\right) \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}\left(90^\circ \mp D\right.$

$$\left. - ((90^\circ - L) \sim (90^\circ - H))\right) \times \frac{1}{\cos. L \cos. H}$$

$$= 2 \,\text{sen.}\, \tfrac{1}{2}\left(90^\circ \mp D + (L \sim H)\right) \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}\left(90^\circ \mp D - (L \sim H)\right) \times \frac{1}{\cos. L \cos. H}$$

Si la declinacion y la latitud son de diferente especie, será:

$$\text{Susen. verso } HZS = \text{sen. verso } PZS = 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(90^\circ + D + (L \sim H)) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(90^\circ + D - (L \sim H)) \times \frac{1}{\cos. L \cos. H}$$

Si la declinacion y la latitud son de la misma especie, será, considerando el triángulo pZs, y suponiendo el astro en s.

$$\text{Susen. verso } sZO = \text{sen. verso } pZs = 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(ps + (Zp \sim Zs)) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(ps - (Zp \sim Zs)) \times \frac{1}{\cos. L \cos. H}.$$

$$= 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}\Big(90^\circ + D + ((90^\circ + L) \sim (90^\circ - H))\Big) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}\Big(90^\circ + D - ((90^\circ + L) \sim (90^\circ - H))\Big) \times \frac{1}{\cos. L \cos. H}$$

$$= 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(90^\circ + D + L + H) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(90^\circ + D - L - H) \times \frac{1}{\cos. L \cos. H}$$

Así, representando por E el azimuth de la especie de la declinacion, esto es, contado desde el polo en cuyo hemisferio se halla el astro, se tendrá generalmente:

$$\text{susen. verso } E = \frac{2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(90^\circ + D + (L \pm H)) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(90^\circ + D - (L \pm H))}{\cos. L \cos. H}.$$

El signo $+$ quando la latitud y la declinacion son de la misma especie: el signo $\sim$ quando son de diferente especie.

IV.

Hallar la latitud por dos alturas de sol, el intervalo entre las horas en que se observáron, la declinacion y la latitud de estima.

Sea A la altura mayor, h el correspondiente ángulo horario, a la altura menor, H el correspondiente ángulo horario, d la declinacion, y l la latitud de estima. Por los principios de la Trigonometría esférica es $\cos. H = \frac{\text{sen. } a - \text{sen. } d \text{ sen. } l}{\cos. d \cos. l}$, y $\cos. h = \frac{\text{sen. A} - \text{sen. } d \text{ sen. } l}{\cos. d \cos. l}$.

Consiguientemente $\cos. h - \cos. H = \frac{\text{sen. A} - \text{sen. } a}{\cos. d \cos. l} = 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(H - h) \text{ sen. } \tfrac{1}{2}(H + h)$.

Pero representando el intervalo por t, y el horario medio por M, es:

$$\left.\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}(H + h) = M \\ \tfrac{1}{2}(H - h) = \tfrac{1}{2}t \end{array}\right\} \text{Quando las alturas se observáron al mismo lado del meridiano.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}(H - h) = M \\ \tfrac{1}{2}(H + h) = \tfrac{1}{2}t \end{array}\right\} \text{Quando las alturas corresponden á diferentes lados del meridiano.}$$

Luego en ambos casos, $\text{sen. M} = \frac{\text{sen. A} - \text{sen. } a}{2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2} t \cos. d \cos. l}$; y

$$\text{cosec. M} = \frac{2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2} t \cos. d \cos. l \text{ cosec. A}}{1 - \text{sen. } a \text{ cosec. A}}$$

Hágase $\text{sen. } a \text{ cosec. A} = \text{sen. verso } x$, y resultará

$$\text{cosec. M} = 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2} t \cos. d \cos. l \text{ cosec. A sec. } x$$

Así, calculando primero x, se tendrá M, y por consiguiente h que es $= M \sim \tfrac{1}{2} t$.

Por la fórmula que expresa el valor de $\cos. h$, es

$$\text{sen. } l \text{ sen. } d = \text{sen. A} - \cos. h \cos. d \cos. l$$

de que se deduce:

$$\text{sen.}\, l\, \text{sen.}\, d = \text{sen. A} - \cos.\, d \cos.\, l + \text{sen. v.}\, h \cos.\, d \cos.\, l$$

$$\text{y sen.}\, l\, \text{sen.}\, d + \cos.\, d \cos.\, l = \text{sen. A} + \text{sen. v.}\, h \cos.\, d \cos.\, l$$

Pero sen. d es positivo, quando la declinacion es de la especie del polo elevado, y negativo quando la declinacion es de diferente especie, luego en general:

$$\pm\, \text{sen.}\, l\, \text{sen.}\, d + \cos.\, d \cos.\, l = \text{sen. A} + \text{sen. v.}\, h \cos.\, d \cos.\, l$$

por consiguiente $\cos.\, (d \mp l) = \text{sen. A} + \text{sen. v.}\, h \cos.\, d \cos.\, l$

Y como la cantidad $d \mp l$ representa el complemento de la altura meridiana del sol, será, haciendo esta altura $=$ P,

$$\text{sen. P.} = \text{sen. A} + \text{sen. verso}\, h \cos.\, d \cos.\, l$$

$$= \text{sen. A} \times \left(1 + \frac{\text{sen. v.}\, h \cos.\, d \cos.\, l}{\text{sen. A}} \right)$$

$$= \frac{1 + \text{sen. v.}\, h \cos.\, d \cos.\, l\, \text{cosec. A}}{\text{cosec. A}}$$

Haciendo, pues, $\text{sen. v.}\, h \cos.\, d \cos.\, l\, \text{cosec. A} = \cos.\, z$

$$\text{será sen. P} = \frac{\text{susen. v.}\, z}{\text{cosec. A}}.$$

Por estas expresiones se obtendrá el valor de la altura meridiana P, calculando primero el de z.

Con la altura meridiana se deducirá la latitud por las reglas ordinarias.

NOTA.

El método de Douwes, sea como el autor lo publicó, ó con la variacion que el Doctor Maskelyne ha explicado en su *British Mariner's Guide*, exîge ademas de las Tablas de los logaritmos de las líneas trigonométricas, las de los logaritmos de los números naturales, y tambien la de los senos naturales. La combinacion de elementos de diferente naturaleza, como los logaritmos y los senos naturales, es siempre embarazosa y debe evitarse en lo posible. Lo mismo puede decirse de la multiplicidad de medios auxîliares, quando es dable reducirlos sin alargar las operaciones. Estas consideraciones me han determinado á buscar el método antecedente, para cuya práctica no es necesario emplear los logaritmos de los números naturales, ni los senos naturales. Así he podido tambien arreglar con mas sencillez la Coleccion que comprehende las Tablas de los logaritmos de las líneas trigonométricas, que me propongo publicar, segun tengo anunciado, y que he dispuesto principalmente con el fin de facilitar la averiguacion de la latitud por los datos referidos.

Por el mismo método analítico pueden demostrarse las fórmulas de Douwes, y en la investigacion que antecede las he apuntado expresamente como se hallan en mi Tratado de Navegacion, y en mi Memoria publicada en el Conocimiento de los tiempos de 1793.

APÉNDICE.

Para corregir las alturas observadas de sol y luna, se acostumbra agregar ó restar de la altura aparente del limbo el semidiámetro; y aplicando la refraccion correspondiente, se toma el resultado como la altura aparente del centro (haciendo abstraccion de la paralaxe). Pero como el semidiámetro vertical aparente es algo mas corto que el que dan las Efemérides, aquella práctica no es exâcta; y á las alturas deberia aplicarse ademas una correccion igual á la diferencia entre las refracciones del centro y del limbo.

En las alturas considerables el error cometido por el procedimiento ordinario es despreciable; y en las demas la incertidumbre de las refracciones hace poco necesaria tanta delicadeza. Sin embargo, habiendo encontrado ideas inexâctas entre algunos sugetos que han querido hacerse cargo de aquel fenómeno, no me parece ocioso indagar aquí el modo de atender á su efecto en el cálculo de las distancias.

Trátase de hallar el acortamiento que la diferencia de las refracciones produce en el semidiámetro perteneciente al punto del limbo en que se haya observado el contacto.

Sea (fig. 3) ADB la mitad del limbo en su lugar verdadero, *adb* el mismo en su lugar aparente. Supóngase un punto qualquiera E, cuyo correspondiente es *e*. Tirando las líneas *e*H, *ec*, se concibe que el aplanamiento del limbo procede de la diferencia entre *e*E y *h*H. Prolónguese H*e*, hasta que sea $FE = hH$; y tírese la línea F*c* y la *e*G perpendicular á F*c*. La diferencia entre *e*E y *h*H será entónces $= Fe$. Como esta es siempre muy corta, se ve que FG es la diferencia entre *ec*, y $Fc = EC$; y que, por consiguiente, representa el acortamiento del semidiámetro EC. Tambien se ve que *ec*, y EC pueden considerarse como paralelas, y que el ángulo *eca*, ó la inclinacion aparente del semidiámetro, respecto al horizontal, es igual á ECA, y su complemento *hec* igual á *h*F*c*. Expresando dicha inclinacion por A, se tendrá en el triángulo F*e*G, $FG = \frac{eF \times \cos. F}{R} = \frac{eF \times \text{sen. } A}{R}$; ó en otros términos: *El acortamiento de un semidiámetro es igual á la diferencia entre la refraccion del centro del astro, y la refraccion del punto del limbo á que corresponde el radio, multiplicado por el seno de la inclinacion del mismo semidiámetro respecto al horizontal, dividido por el seno total.*

Suponiendo el seno total igual á uno, la equacion antecedente quedará expresada de este modo $FG = (\text{Refracc. en } C - \text{Refracc. en } e) \times \text{sen. } A$.

Como representando por D'' el semidiámetro horizontal en segundos, es altura de $E =$ altura de $C + D''$ sen. A, se podrá determinar la altura de E, deduciendo ántes la altura de C, esto es, la altura verdadera del centro, por la altura de *d*, ó la altura aparente del punto superior del limbo. Para esto, suponiendo el semidiámetro de $16'$, no habrá mas que buscar el seno natural de la inclinacion A, y multiplicarlo por 960: el producto dará el número de segundos que debe agregarse á la altura verdadera del centro para tener la altura verdadera de E. Tomando su refraccion correspondiente, y restándola de la refraccion del centro (que se hallará restando de la altura aparente del punto superior *d*, la correspondiente refraccion aumentada de $16'$; y buscando la refraccion correspondiente á la altura verdadera resultante) el residuo deberá multiplicarse por el seno natural de A, y resultará el acortamiento pedido.

Así se podrá calcular una Tabla que dé á la vista los acortamientos que convienen á diferentes inclinaciones y alturas.

Convendrá calcular para cada 2° ó 4° de las alturas y de la distancia de los astros quál es la inclinacion del radio en que se observa el contacto. El uso de una Tabla de inclinaciones dispuesta así será mas exâcto que el aprecio á ojo, que generalmente ha de ser muy erróneo.

Antes de concluir esta pequeña obra, me parece oportuno indicar un adelantamiento considerable que puede hacerse en la práctica de mi método para reducir las distancias lunares por los senos-versos naturales. Las sumas de los senos-versos de la suma y de la diferencia de dos ángulos qualesquiera pueden disponerse en una Tabla, y hallarse así inmediatamente, en vez de buscar el seno-verso de cada uno separadamente. Tambien se salvarán las adiciones y substracciones del ángulo auxíliar con los demas elementos; y las operaciones preliminares quedarán reducidas á la deduccion de las sumas de las alturas aparentes y de las alturas verdaderas. La simple suma de tres cantidades dará entónces el seno-verso de la distancia verdadera.

Yo tengo ya principiada la construccion de aquella Tabla: y tambien la de otra Tabla mas extensa para hallar los ángulos auxíliares, sin necesidad de aplicar proporcionales. Con la facilidad que ofrecen estos medios, juzgo que el cálculo de las distancias lunares vendrá á ser, no solo muy cómodo y fácil, sino tal vez exâcto y expedito, quanto puede considerarse necesario en la Navegacion.

TABLA

DE ÁNGULOS AUXÎLIARES,

PARA CALCULAR LA LONGITUD

POR LAS DISTANCIAS LUNARES.

Los números correspondientes á los dos argumentos contienen los minutos y segundos del ángulo auxîliar: los grados están indicados en la parte superior de cada coluna. Para los dos primeros grados de altura se tiene 59°: desde dos grados en adelante, 60°.

Las correcciones correspondientes á la altura del sol ó de estrella son aditivas.

Paralaxe horizontal de la luna.

Alt. ap. ☾	53′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	54′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	55′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	56′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	57′	Prop. á 100″	Prop. á 100′
0°	59° 59′. 29″	0″	32″	59° 59′. 29″	2″	33″	59° 59′. 30″	0″	33″	59° 59′. 30″	0″	35″	59° 59′. 30″	0″	37″
1	59 . 48	2	45	59 . 49	2	45	59 . 50	2	47	59 . 51	2	47	59 . 52	3	48
2	60° 0 . 15	2	48	60° 0 . 16	3	50	60° 0 . 18	2	52	60° 0 . 19	3	53	60° 0 . 21	3	53
3	0 . 44	3	52	0 . 46	5	53	0 . 49	3	53	0 . 51	3	55	0 . 53	3	55
4	1 . 15	5	52	1 . 18	5	53	1 . 21	5	53	1 . 24	3	55	1 . 26	5	57
5	1 . 46	7	53	1 . 50	5	53	1 . 53	7	55	1 . 57	5	55	2 . 0	7	57
6	2 . 18	7	53	2 . 22	7	55	2 . 26	7	55	2 . 30	7	57	2 . 34	8	58
7	2 . 50	8	53	2 . 55	7	53	2 . 59	8	55	2 . 4	8	55	3 . 9	8	57
8	3 . 22	8	53	3 . 27	8	53	3 . 32	8	55	3 . 37	10	57	3 . 43	8	57
9	3 . 53	10	53	3 . 59	10	53	4 . 5	10	55	4 . 11	10	55	4 . 17	10	57
10	4 . 25	10	52	4 . 31	12	53	4 . 38	10	55	4 . 44	12	57	4 . 51	10	57
11	4 . 56	12	53	5 . 3	13	53	5 . 11	12	53	5 . 18	12	55	5 . 25	12	55
12	5 . 28	12	52	5 . 35	13	53	5 . 43	13	53	5 . 51	12	55	5 . 58	13	57
13	5 . 59	13	52	6 . 7	13	53	6 . 15	15	53	6 . 24	13	55	6 . 32	13	57
14	6 . 30	15	52	6 . 39	15	53	6 . 48	15	53	6 . 57	15	53	7 . 6	13	55
15	7 . 1	17	52	7 . 11	15	52	7 . 20	15	53	7 . 29	17	55	7 . 39	15	55
16	7 . 32	17	50	7 . 42	17	52	7 . 52	17	53	8 . 2	17	53	8 . 12	17	55
17	8 . 2	18	52	8 . 13	18	52	8 . 24	17	52	8 . 34	18	53	8 . 45	18	55
18	8 . 33	18	50	8 . 44	18	52	8 . 55	18	53	9 . 6	20	53	9 . 18	18	53
19	9 . 3	20	50	9 . 15	20	52	9 . 27	18	52	9 . 38	20	53	9 . 50	20	53
20	9 . 33	22	50	9 . 46	20	50	9 . 58	20	52	10 . 10	20	53	10 . 22	22	53
21	10 . 3	22	50	10 . 16	22	50	10 . 29	22	50	10 . 42	20	52	10 . 54	23	53
22	10 . 33	22	48	10 . 46	22	50	10 . 59	23	52	11 . 13	22	52	11 . 26	23	53
23	11 . 2	23	48	11 . 16	23	50	11 . 30	23	50	11 . 44	23	52	11 . 58	23	53
24	11 . 31	25	48	11 . 46	23	48	12 . 0	25	50	12 . 15	25	52	12 . 30	23	52
25	12 . 0	25	48	12 . 15	25	50	12 . 30	27	50	12 . 46	25	50	13 . 1	25	52
26	12 . 29	27	48	12 . 45	25	48	13 . 0	27	50	13 . 16	27	50	13 . 32	25	50
27	12 . 58	27	47	13 . 14	27	48	13 . 30	27	48	13 . 46	27	50	14 . 2	27	50
28	13 . 26	28	47	13 . 43	27	47	13 . 59	28	48	14 . 16	27	48	14 . 32	28	50
29	13 . 54	28	45	14 . 11	28	47	14 . 28	28	48	14 . 45	28	48	15 . 2	28	50
30	14 . 21	30	45	14 . 39	30	47	14 . 57	28	47	15 . 14	30	48	15 . 32	30	48
31	14 . 48	32	45	15 . 7	30	45	15 . 25	30	47	15 . 43	30	48	16 . 1	32	48
32	15 . 15	32	45	15 . 34	32	47	15 . 53	32	47	16 . 12	30	47	16 . 30	32	48
33	15 . 42	33	45	16 . 2	32	45	16 . 21	32	45	16 . 40	32	47	16 . 59	32	48
34	16 . 9	33	43	16 . 29	32	43	16 . 48	33	45	17 . 8	33	45	17 . 28	32	47
35	16 . 35	33	43	16 . 55	33	43	17 . 15	33	45	17 . 35	35	47	17 . 56	33	45
36	17 . 1	33	42	17 . 21	35	43	17 . 42	35	45	18 . 3	33	45	18 . 23	35	47
37	17 . 26	35	42	17 . 47	37	43	18 . 9	35	43	18 . 30	35	43	18 . 51	35	45
38	17 . 51	37	42	18 . 13	37	42	18 . 35	35	43	18 . 56	37	43	19 . 18	37	47
39	18 . 16	37	42	18 . 38	38	42	19 . 1	35	43	19 . 22	37	43	19 . 44	38	45
40	18 . 41	37	40	19 . 3	38	42	19 . 26	37	42	19 . 48	38	43	20 . 11	37	43
41	19 . 5	38	38	19 . 28	38	40	19 . 51	38	40	20 . 14	38	42	20 . 37	38	42
42	19 . 28	40	40	19 . 52	38	40	20 . 15	40	40	20 . 39	38	40	21 . 2	40	42
43	19 . 52	40	38	20 . 16	38	38	20 . 39	40	40	21 . 3	40	40	21 . 27	40	42
44	20 . 15	40	37	20 . 39	40	38	21 . 3	40	40	21 . 27	42	40	21 . 52	40	40
45	20 . 37	42	37	21 . 2	42	37	21 . 27	40	38	21 . 51	42	40	22 . 16	42	40
46	20 . 59	42		21 . 24	43		21 . 50	42		22 . 15	42		22 . 40	42	

Correcciones.

Alt. ap.	☉	*
0°. 0′	38″	38″
10	34	34
20	31	31
30	28	28
40	26	26
50	23	23
1. 0	21	21
10	19	19
20	17	17
30	16	16
40	14	14
50	13	13
2. 0	12	12
10	11	11
20	10	10
30	9	9
40	9	9
50	8	8
3. 0	8	7
10	7	7
20	7	7
30	6	6
40	6	6
50	5	5
4. 0	5	5
10	5	5
20	5	4
30	4	4
40	4	4
50	4	4
5. 0	4	4
15	4	3
30	3	3
45	3	3
6. 0	3	2
30	3	2
7. 0	2	2
8. 0	2	2
9. 0	2	1
14. 0	2	1
15. 0	2	0
28. 0	2	0
29. 0	3	0
40. 0	3	0
41. 0	4	0
62. 0	4	0
63. 0	5	0
70. 0	5	0
80. 0	5	0
90. 0	5	0

Alt. ap. ☾	Paralaxe horizontal de la luna. 58′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	59′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	60′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	61′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	62′
	59°			59°			59°			59°			59°
0°	59′.30″	0″		59′.30″	2″		59′.31″	0″		59′.31″	0″		59′.31″
1	59.53	2	38″	59.54	2	40″	59.55	2	40″	59.56	2	42	59.57
			48			50			52			52	
	60°			60°			60°			60°			60°
2	0.22	3		0.24	3		0.26	2		0.27	3		0.29
3	0.55	3	55	0.57	5	55	1.0	3	57	1.2	3	58	1.4
4	1.29	5	57	1.32	5	58	1.35	5	58	1.38	5	60	1.41
5	2.4	5	58	2.7	7	58	2.11	5	60	2.14	7	60	2.18
			58			58			60			62	
6	2.39	5		2.42	8		2.47	7		2.51	7		2.55
7	3.14	7	58	3.18	8	60	3.23	8	60	3.28	8	62	3.33
8	3.48	10	57	3.54	8	60	3.59	8	60	4.4	10	60	4.10
9	4.23	10	58	4.29	10	58	4.35	10	60	4.41	10	62	4.47
10	4.57	12	57	5.4	10	58	5.10	12	58	5.17	12	60	5.24
			58			58			60			60	
11	5.32	12		5.39	12		5.46	12		5.53	12		6.0
12	6.6	13	57	6.14	13	58	6.22	12	60	6.29	13	60	6.37
13	6.40	15	57	6.49	13	58	6.57	13	58	7.5	15	60	7.14
14	7.14	15	57	7.23	15	57	7.32	15	58	7.41	15	60	7.50
15	7.48	17	57	7.58	15	58	8.7	17	58	8.17	15	60	8.26
			57			57			58			58	
16	8.22	17		8.32	17		8.42	17		8.52	17		9.2
17	8.56	17	57	9.6	18	57	9.17	17	58	9.27	18	58	9.38
18	9.29	18	55	9.40	18	57	9.51	18	57	10.2	20	58	10.14
19	10.2	20	55	10.14	18	57	10.25	20	57	10.37	20	58	10.49
20	10.35	20	55	10.47	20	55	10.59	22	57	11.12	20	58	11.24
			55			55			57			57	
21	11.8	20		11.20	22		11.33	22		11.46	22		11.59
22	11.40	22	53	11.53	23	55	12.7	22	57	12.20	23	57	12.34
23	12.12	23	53	12.26	23	55	12.40	23	55	12.54	23	57	13.8
24	12.44	25	53	12.59	23	55	13.13	25	55	13.28	23	57	13.42
25	13.16	25	53	13.31	25	53	13.46	25	55	14.1	25	55	14.16
			52			53			53			55	
26	13.47	27		14.3	25		14.18	27		14.34	27		14.50
27	14.18	27	52	14.34	27	52	14.50	28	53	15.7	27	55	15.23
28	14.49	28	52	15.6	27	53	15.22	28	53	15.39	28	53	15.56
29	15.19	30	50	15.37	28	52	15.54	28	53	16.11	28	53	16.28
30	15.50	30	52	16.8	28	52	16.25	30	52	16.43	28	53	17.0
			50			50			52			52	
31	16.20	30		16.38	30		16.56	30		17.14	30		17.32
32	16.49	32	48	17.8	32	50	17.27	30	52	17.45	32	52	18.4
33	17.18	33	48	17.38	32	50	17.57	32	50	18.16	32	52	18.35
34	17.47	33	48	18.7	33	48	18.27	32	50	18.46	33	50	19.6
35	18.16	33	48	18.36	33	48	18.56	33	48	19.16	35	50	19.37
			47			48			48			50	
36	18.44	35		19.5	33		19.25	35		19.46	35		20.7
37	19.12	35	47	19.33	35	47	19.54	35	48	20.15	37	48	20.37
38	19.40	35	47	20.1	37	47	20.23	35	48	20.44	37	48	21.6
39	20.7	37	45	20.29	37	47	20.51	37	47	21.13	37	48	21.35
40	20.33	38	43	20.56	38	45	21.19	37	47	21.41	37	47	22.3
			45			45			45			47	
41	21.0	38		21.23	38		21.46	38		22.9	37		22.31
42	21.26	38	43	21.49	40	43	22.13	38	45	22.36	38	45	22.59
43	21.51	40	42	22.15	40	43	22.39	40	43	23.3	38	45	23.26
44	22.16	40	42	22.40	40	42	23.5	40	42	23.29	40	43	23.53
45	22.41	40	42	23.5	42	42	23.30	42	42	23.55	40	43	24.19
46	23.5	42	40	23.30	42	42	23.55	42	42	24.20	42	42	24.45

Correcciones.

Alt. ap.	☉	*
0°. 0′	38″	38″
10	34	34
20	31	31
30	28	28
40	26	26
50	23	23
1. 0	21	21
10	19	19
20	17	17
30	16	16
40	14	14
50	13	13
2. 0	12	12
10	11	11
20	10	10
30	9	9
40	9	9
50	8	8
3. 0	8	7
10	7	7
20	7	7
30	6	6
40	6	6
50	5	5
4. 0	5	5
10	5	5
20	5	4
30	4	4
40	4	4
50	4	4
5. 0	4	4
15	4	3
30	3	3
45	3	3
6. 0	3	2
30	3	2
7. 0	2	2
8. 0	2	2
9. 0	2	1
14. 0	2	1
15. 0	2	0
28. 0	2	0
29. 0	3	0
40. 0	3	0
41. 0	4	0
62. 0	4	0
63. 0	5	0
70. 0	5	0
80. 0	5	0
90. 0	5	0

Paralaxe horizontal de la luna.

Alt. ap. ☾	53'	Prop. á 100''	Prop. á 100'	54'	Prop. á 100''	Prop. á 100'	55'	Prop. á 100''	Prop. á 100'	56'	Prop. á 100''	Prop. á 100'	57'	Prop. á 100''	Prop. á 100'
	60°			60°			60°			60°			60°		
46	20'. 59''	42''	37''	21'. 24''	43''	38''	21'. 50''	42''	37''	22'. 15''	42''	38''	22'. 40''	42''	38''
47	21. 21	43	37	21. 47	42	35	22. 12	43	37	22. 38	42	37	23. 3	43	38
48	21. 43	42	35	22. 8	43	37	22. 34	43	37	23. 0	43	37	23. 26	43	38
49	22. 4	43	33	22. 30	43	35	22. 56	43	35	23. 22	45	37	23. 49	43	37
50	22. 24	45		22. 51	43		23. 17	45		23. 44	45		24. 11	43	
			33			33			35			35			35
51	22. 44	45	33	23. 11	45	33	23. 38	45	35	24. 5	45	35	24. 32	45	35
52	23. 4	45	32	23. 31	47	33	23. 59	45	33	24. 26	45	33	24. 53	47	35
53	23. 23	47	32	23. 51	47	32	24. 19	45	32	24. 46	47	33	25. 14	47	33
54	23. 42	47	30	24. 10	47	32	24. 38	47	32	25. 6	47	32	25. 34	47	33
55	24. 0	48		24. 29	47		24. 57	47		25. 25	48		25. 54	47	
			30			30			32			32			32
56	24. 18	48	28	24. 47	48	30	25. 16	47	30	25. 44	48	32	26. 13	48	32
57	24. 35	50	28	25. 5	48	28	25. 34	48	28	26. 3	48	30	26. 32	48	30
58	24. 52	50	28	25. 22	48	27	25. 51	50	28	26. 21	48	28	26. 50	48	30
59	25. 9	48	27	25. 38	50	28	26. 8	50	28	26. 38	50	28	27. 8	48	28
60	25. 25	50		25. 55	50		26. 25	50		26. 55	50		27. 25	50	
			25			27			27			27			27
61	25. 40	52	25	26. 11	50	25	26. 41	50	25	27. 11	50	27	27. 41	52	27
62	25. 55	52	25	26. 26	50	25	26. 56	52	25	27. 27	50	25	27. 57	52	27
63	26. 10	52	23	26. 41	50	23	27. 11	52	25	27. 42	52	25	28. 13	52	25
64	26. 24	52	23	26. 55	52	23	27. 26	52	23	27. 57	52	23	28. 28	52	25
65	26. 38	52		27. 9	52		27. 40	52		28. 11	53		28. 43	52	
			22			22			23			23			23
66	26. 51	52	20	27. 22	53	22	27. 54	52	22	28. 25	53	22	28. 57	52	22
67	27. 3	53	20	27. 35	53	20	28. 7	52	20	28. 38	53	22	29. 10	53	22
68	27. 15	53	20	27. 47	53	20	28. 19	53	20	28. 51	53	20	29. 23	53	22
69	27. 27	53	18	27. 59	53	18	28. 31	53	20	29. 3	55	20	29. 36	53	20
70	27. 38	53		28. 10	55		28. 43	53		29. 15	55		29. 48	53	
			17			18			18			18			18
71	27. 48	55	17	28. 21	55	17	28. 54	53	17	29. 26	55	18	29. 59	53	18
72	27. 58	55	15	28. 31	55	17	29. 4	55	17	29. 37	55	17	30. 10	53	17
73	28. 7	57	15	28. 41	55	15	29. 14	55	15	29. 47	55	15	30. 20	55	17
74	28. 16	57	15	28. 50	55	15	29. 23	55	15	29. 56	57	15	30. 30	55	15
75	28. 25	57		28. 59	55		29. 32	55		30. 5	57		30. 39	55	
			13			13			13			13			13
76	28. 33	57	12	29. 7	55	12	29. 40	55	13	30. 13	57	13	30. 47	57	13
77	28. 40	57	12	29. 14	57	12	29. 48	55	12	30. 21	57	12	30. 55	57	12
78	28. 47	57	10	29. 21	57	10	29. 55	55	10	30. 28	57	12	31. 2	57	12
79	28. 53	57	10	29. 27	57	10	30. 1	57	10	30. 35	57	10	31. 9	57	10
80	28. 59	57		29. 33	57		30. 7	57		30. 41	57		31. 15	57	
			8			8			8			8			8
81	29. 4	57	7	29. 38	57	8	30. 12	57	8	30. 46	57	8	31. 20	57	8
82	29. 8	58	7	29. 43	57	7	30. 17	57	7	30. 51	57	7	31. 25	57	8
83	29. 12	58	7	29. 47	57	5	30. 21	57	7	30. 55	58	7	31. 30	57	7
84	29. 16	57	5	29. 50	58	5	30. 25	57	5	30. 59	58	5	31. 34	57	5
85	29. 19	57		29. 53	58		30. 28	57		31. 2	58		31. 37	57	
			3			5			5			5			3
86	29. 21	58	3	29. 56	58	3	30. 31	57	3	31. 5	57	3	31. 39	58	3
87	29. 23	58	3	29. 58	58	2	30. 33	57	2	31. 7	57	2	31. 41	58	3
88	29. 25	57	2	29. 59	58	2	30. 34	57	2	31. 8	58	2	31. 43	57	2
89	29. 26	57	0	30. 0	58	2	30. 35	57	0	31. 9	58	2	31. 44	57	0
90	29. 26	58		30. 1	57		30. 35	58		31. 10	57		31. 44	58	

Correcciones.

Alt. ap.	☉	*
0°. 0'	38''	38''
10	34	34
20	31	31
30	28	28
40	25	25
50	23	23
1. 0	21	21
10	19	19
20	17	17
30	16	16
40	14	14
50	13	13
2. 0	12	12
10	11	11
20	10	10
30	9	9
40	9	9
50	8	8
3. 0	8	7
10	7	7
20	6	6
30	6	6
40	6	6
50	5	5
4. 0	5	5
10	5	5
20	5	4
30	4	4
40	4	4
50	4	4
5. 0	4	4
15	4	3
30	3	3
45	3	3
6. 0	3	2
30	3	2
7. 0	2	2
8. 0	2	2
9. 0	2	1
14. 0	2	1
15. 0	2	0
28. 0	2	0
29. 0	3	0
40. 0	3	0
41. 0	4	0
62. 0	4	0
63. 0	5	0
70. 0	5	0
80. 0	5	0
90. 0	5	0

Alt. ap. ☾	Paralaxe horizontal de la luna. 58′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	59′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	60′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	61′	Prop. á 100″	Prop. á 100′	62′
	60°			60°			60°			60°			60°
46	23′. 5″	42″	40″	23′. 30″	42″	40″	23′. 55″	42″	42″	24′. 20″	42″	42″	24′. 45″
47	23 . 29	42	38	23 . 54	43	40	24 . 20	42	40	24 . 45	43	42	25 . 11
48	23 . 52	43	38	24 . 18	43	38	24 . 44	43	40	25 . 10	43	40	25 . 36
49	24 . 15	43	37	24 . 41	45	38	25 . 8	43	38	25 . 34	43	38	26 . 0
50	24 . 37	45	37	25 . 4	45	37	25 . 31	43	37	25 . 57	45	38	26 . 24
51	24 . 59	45	37	25 . 26	45	37	25 . 53	45	37	26 . 20	47	38	26 . 48
52	25 . 21	45	35	25 . 48	45	37	26 . 15	47	37	26 . 43	47	37	27 . 11
53	25 . 42	47	33	26 . 10	45	35	26 . 37	47	37	27 . 5	47	37	27 . 33
54	26 . 2	48	33	26 . 31	47	33	26 . 59	47	35	27 . 27	47	35	27 . 55
55	26 . 22	48	33	26 . 51	48	33	27 . 20	47	33	27 . 48	47	33	28 . 16
56	26 . 42	48	32	27 . 11	48	32	27 . 40	47	32	28 . 8	48	33	28 . 37
57	27 . 1	48	30	27 . 30	48	32	27 . 59	48	32	28 . 28	48	33	58 . 57
58	27 . 19	50	30	27 . 49	48	30	28 . 18	50	32	28 . 48	48	32	29 . 17
59	27 . 37	50	30	28 . 7	50	30	28 . 37	50	30	29 . 7	48	30	29 . 36
60	27 . 55	50	28	28 . 25	50	28	28 . 55	50	28	29 . 25	50	30	29 . 55
61	28 . 12	50	27	28 . 42	50	28	29 . 12	52	28	29 . 43	50	28	30 . 13
62	28 . 28	52	27	28 . 59	50	27	29 . 29	52	28	30 . 0	50	27	30 . 30
63	28 . 44	52	25	29 . 15	52	27	29 . 46	50	27	30 . 16	52	27	30 . 47
64	28 . 59	53	25	29 . 31	52	25	30 . 2	50	25	30 . 32	53	27	31 . 4
65	29 . 14	53	23	29 . 46	52	23	30 . 17	52	25	30 . 48	53	25	31 . 20
66	29 . 28	53	23	30 . 0	53	23	30 . 32	52	23	31 . 3	53	25	31 . 35
67	29 . 42	53	22	30 . 14	53	22	30 . 46	53	23	31 . 18	53	23	31 . 50
68	29 . 55	53	22	30 . 27	55	22	31 . 0	53	22	31 . 32	53	22	32 . 4
69	30 . 8	53	20	30 . 40	55	20	31 . 13	53	20	31 . 45	53	22	32 . 17
70	30 . 20	53	18	30 . 52	55	20	31 . 25	55	20	31 . 58	53	20	32 . 30
71	30 . 31	55	18	31 . 4	55	18	31 . 37	55	18	32 . 10	53	18	32 . 42
72	30 . 42	55	18	31 . 15	55	18	31 . 48	55	18	32 . 21	55	18	32 . 54
73	30 . 53	55	17	31 . 26	55	17	31 . 59	55	17	32 . 32	55	17	33 . 5
74	31 . 3	55	15	31 . 36	55	15	32 . 9	55	17	32 . 42	55	17	33 . 15
75	31 . 12	55	15	31 . 45	57	15	32 . 19	55	15	32 . 52	55	15	33 . 25
76	31 . 21	55	13	31 . 54	57	13	32 . 28	55	13	33 . 1	55	13	33 . 34
77	31 . 29	55	12	32 . 2	57	13	32 . 36	55	12	33 . 9	57	13	33 . 43
78	31 . 36	57	12	32 . 10	55	12	32 . 43	57	12	33 . 17	57	12	33 . 51
79	31 . 43	57	10	32 . 17	55	10	32 . 50	57	12	33 . 24	57	12	33 . 58
80	31 . 49	57	8	32 . 23	57	8	32 . 57	57	10	33 . 31	57	10	34 . 5
81	31 . 54	57	8	32 . 28	58	8	33 . 3	57	8	33 . 37	57	8	34 . 11
82	31 . 59	57	8	32 . 33	58	8	33 . 8	57	7	33 . 42	57	7	34 . 16
83	32 . 4	57	7	32 . 38	57	7	33 . 12	57	7	33 . 46	58	7	34 . 21
84	32 . 8	57	5	32 . 42	57	5	33 . 16	57	5	33 . 50	58	7	34 . 25
85	32 . 11	57	5	32 . 45	57	5	33 . 19	58	5	33 . 54	57	5	34 . 28
86	32 . 14	57	3	32 . 48	57	3	33 . 22	58	3	33 . 57	57	3	34 . 31
87	32 . 16	57	2	32 . 50	57	3	33 . 24	58	3	33 . 59	57	3	34 . 33
88	32 . 17	58	2	32 . 52	57	2	33 . 26	58	2	34 . 1	57	0	34 . 35
89	32 . 18	58	2	32 . 53	57	0	33 . 27	57	0	34 . 1	58	2	34 . 36
90	32 . 19	57		32 . 53	57		33 . 27	58		34 . 2	58		34 . 37

Correcciones.

Alt. ap.	☉	*
0°. 0′	38″	38″
10	34	34
20	31	31
30	28	28
40	25	25
50	23	23
1. 0	21	21
10	19	19
20	17	17
30	16	16
40	14	14
50	13	13
2. 0	12	12
10	11	11
20	10	10
30	9	9
40	9	9
50	8	8
3. 0	8	7
10	7	7
20	6	6
30	6	6
40	6	6
50	5	5
4. 0	5	5
10	5	5
20	5	4
30	4	4
40	4	4
50	4	4
5. 0	4	3
15	3	3
30	3	3
45	3	3
6. 0	3	2
30	3	2
7. 0	2	2
8. 0	2	2
9. 0	2	1
14. 0	2	1
15. 0	2	0
28. 0	2	0
29. 0	3	0
45. 0	3	0
46. 0	4	0
62. 0	4	0
63. 0	5	0
70. 0	5	0
80. 0	5	0
90. 0	5	0

Fig. 2.

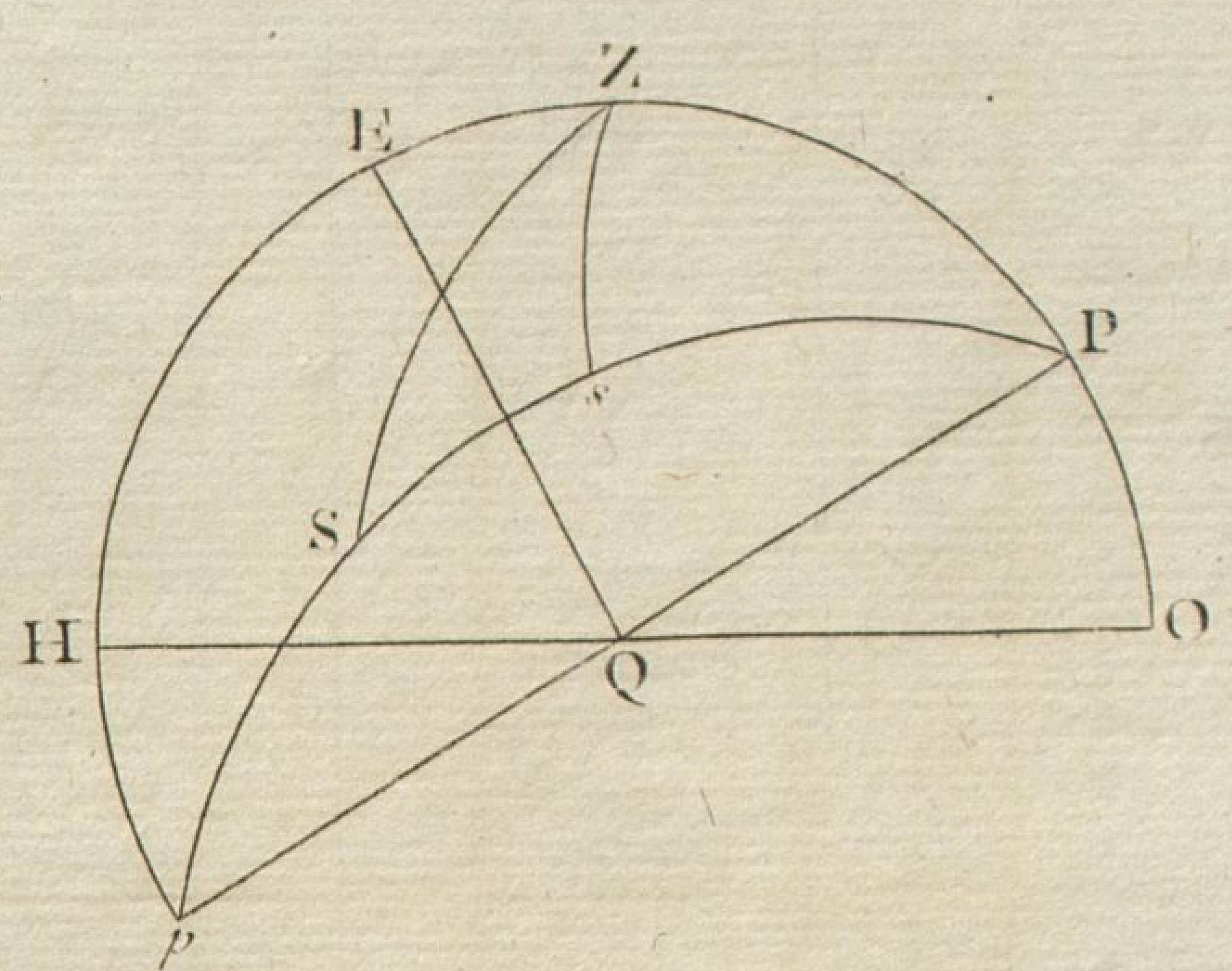

Fig. 1.

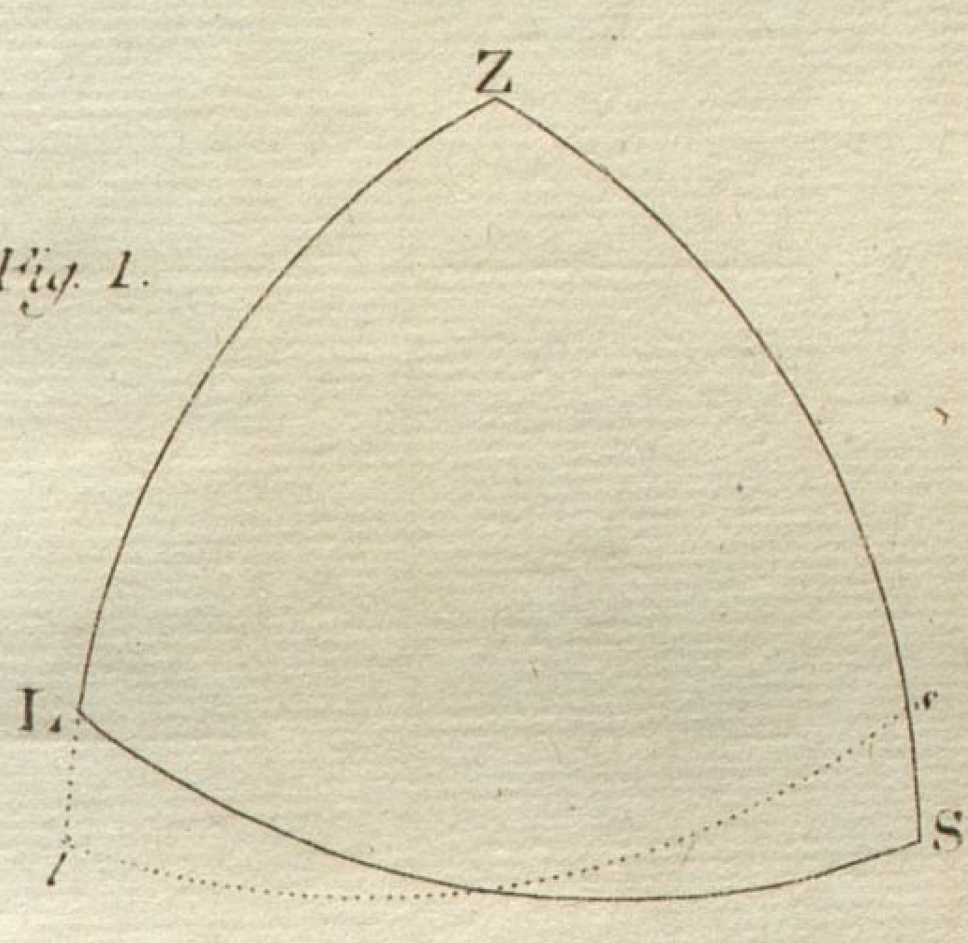

Fig. 3.