



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

**Dpto. de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y
de la Matemática**

**EL MÉTODO SINGAPUR COMO
PROPUESTA METODOLÓGICA EN
LA TRANSICIÓN DE PRIMARIA A
ESO**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación
Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y
Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.**

Alumno: Blanca Gil Sáez

Tutor: José María Marbán Prieto

Valladolid, julio 2022

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 1. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.....	3
1. EL MOVIMIENTO DE LA MATEMÁTICA MODERNA.....	4
2. INFORMES DE CALIDAD Y EFICIENCIA.....	6
2.1. Programa Internacional de Evaluación de los Estudiantes (PISA).....	6
3. EL PASO DE PRIMARIA A ESO.....	8
3.1. Principales cambios durante esta etapa.....	8
3.2. Los cambios desde la percepción del alumnado.....	8
3.3. Los Programas de Transición.....	9
3.4. Cómo facilitar el cambio del alumnado.....	10
CAPÍTULO 2. SINGAPUR EN CONTEXTO.....	12
1. HISTORIA DE SINGAPUR.....	12
2. EL SISTEMA EDUCATIVO EN SINGAPUR.....	14
2.1. Reformas educativas.....	14
2.2. Estructura del sistema educativo singapurense.....	16
3. EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN SINGAPUR.....	18
3.1. Las Fases Para Una Enseñanza Efectiva De Las Matemáticas.....	19
CAPÍTULO 3. MÉTODO SINGAPUR.....	21
1. EL MARCO CONCEPTUAL DEL MÉTODO SINGAPUR.....	21
1.1. Los Conceptos.....	22
1.2. Las Habilidades.....	22
1.3. Los Procedimientos.....	22
1.4. La Metacognición.....	22
1.5. Las Actitudes.....	23
2. MODELO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE.....	23
3. EL ENFOQUE DEL MÉTODO.....	26
4. EL MODELADO DE BARRAS.....	27
4.1. Modelado Parte-Todo.....	27
4.2. Modelado de Comparación.....	28
4.3. Modelado Antes – Después.....	29

5. EL MÉTODO SINGAPUR EN ESPAÑA.....	31
CAPÍTULO 4. EL MÉTODO SINGAPUR PARA SOLVENTAR ERRORES EN PRIMERO DE ESO.....	33
1. EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN ESPAÑA. UN MODELO COMPETENCIAL.....	33
1.1. <i>El Perfil De Salida Del Alumnado</i>	36
1.2. <i>Competencias Específicas De Matemáticas y sus criterios de evaluación</i>	38
1.3. <i>Saberes básicos</i>	44
2. DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.....	49
3. PROPUESTA DE ACTIVIDADES BASADAS EN EL MÉTODO SINGAPUR	56
3.1. <i>La propiedad distributiva</i>	57
3.2. <i>Ecuaciones de primer grado</i>	59
3.3. <i>Triángulos</i>	64
3.4. <i>División de fracciones</i>	67
CONCLUSIONES.....	70
BIBLIOGRAFÍA.....	72
ANEXOS.....	75
ANEXO I. ACTIVIDADES SOBRE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.....	75
ANEXO II. ACTIVIDADES SOBRE ÁLGEBRA.....	78
ANEXO III. ACTIVIDADES SOBRE FRACCIONES.....	79

RESUMEN

Existe un amplio consenso a la hora de aceptar que aquellas personas que entiendan y puedan utilizar matemáticas de forma competente tendrán oportunidades y opciones significativamente mejores para modelar su futuro. Así, los esfuerzos por fomentar e impulsar una educación matemática dotada de pleno sentido para los estudiantes se han multiplicado en la última década. En particular, han surgido tanto revoluciones metodológicas como diferentes reformas educativas, sin que unas y otras hayan estado necesariamente coordinadas. Una de estas propuestas es la que se conoce como “Método Singapur” cuyos fundamentos se apoyan en la resolución de problemas, el pensamiento visual, la metacognición y los afectos, entre otros. A través de este TFM analizaremos sus oportunidades y limitaciones de encaje en el actual marco curricular desde un enfoque teórico-práctico que incluye el diseño de actividades o propuestas didácticas concretas, prestando especial atención a su contribución a una transición adecuada y eficiente de Primaria a ESO.

ABSTRACT

There is a broad agreement in relation to the fact that those people who understand and use Mathematics in a competent way will have better opportunities to shape their future. Thus, the efforts to promote an integral mathematical education for the students have increased significantly in the last decade. Particularly, there have arisen both methodological revolutions and educative reforms, without having been necessarily coordinated. One of these proposals is known as “Singapore Method”, whose fundamentals are supported in the problem solving, the visual thinking, metacognition and affectivity. In this Project (TFM), the opportunities and limitations to fit this method in the current curricular framework will be analysed from a theoretical-practical approach, which includes activities or concrete didactic proposals, focusing special attention to their contribution to an adequate and efficient transition from the Primary Education to the Secondary Education stage.

INTRODUCCIÓN

La educación matemática es un asunto fundamental que se ha debatido a lo largo de muchos años. La historia de la educación matemática puede contribuir a entender los debates alrededor de este tema y brindar información importante respecto a cómo se ha llegado al punto en el que se encuentra hoy en día.

A lo largo de los últimos años se han realizado multitud de investigaciones relacionadas con la educación matemática. El presente trabajo pretende centrarse en algunos puntos clave que se han tratado en dichas investigaciones, identificados a través de los conocimientos adquiridos en la asignatura Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas.

Por un lado, las dificultades que poseen los alumnos a la hora de enfrentarse a esta materia, en especial durante su transición entre la educación primaria y la educación secundaria.

Durante ese periodo, los alumnos se encuentran entre los once y los trece años, en plena preadolescencia. Es muy importante para los docentes conocer las características psicológicas de los alumnos en este punto, así como su nivel de desarrollo o su capacidad de abstracción.

A lo largo del trabajo se muestran también los nuevos contenidos curriculares que establece la ley de educación vigente a partir del curso 2022/2023 para los primeros cursos de secundaria, mencionados especialmente en la asignatura Diseño Curricular en Matemáticas, donde se establece una educación competencial, unos saberes básicos y unos estándares mucho más abiertos y centrados en el desarrollo del estudiante.

Teniendo en cuenta ciertos puntos clave, se pueden adaptar los currículos de la materia siendo conscientes de hasta dónde son capaces de llegar los alumnos y el desarrollo que pueden llegar a conseguir durante este periodo de su vida.

Por otro lado, el trabajo se centra también en el estudio del Método Singapur, cada vez más conocido y extendido por nuestro país. Este método, que en realidad es un compendio de metodologías, tiene como eje central la resolución de problemas, siendo su máxima principal el enfoque concreto – pictórico – abstracto.

Nace en Singapur como revolución educativa tras múltiples cambios en el país. A raíz del nuevo éxito en informes de calidad como PISA o TIMSS, otros países se interesaron por este sistema educativo y comenzaron a exportarlo como Método Singapur.

En España hay actualmente varios proyectos en diferentes comunidades donde se está implantando el método, comenzando desde la educación infantil, pasando por la primaria y

llegando hasta la secundaria. Concretamente en Castilla y León se comenzará a probar en el primer curso de secundaria.

Para finalizar, uniendo la educación matemática, el paso de primaria a secundaria y el Método Singapur, se hace una revisión de las principales dificultades que presentan los alumnos de secundaria en su aprendizaje de las matemáticas.

Hay multitud de estudios sobre errores en matemáticas, de hecho, no existe una clasificación clara de ellos ni unas causas específicas, sino que los estudios son bastante generales. Esto se debe a que cada alumno es completamente diferente y los procesos que lleva a cabo en su razonamiento también lo son, por tanto, puede que los mismos errores tengan diferentes causas dependiendo del alumno, así como un mismo error por parte del docente puede generar diferentes errores.

Para intentar reducir algunos de los errores observados de manera más frecuente en el aula durante el periodo de prácticas, así como de los relatados en la literatura, gracias a los conocimientos adquiridos en materias como Metodología y Evaluación en Matemáticas e Innovación Docente en Matemáticas, se proponen una serie de actividades basadas en el Método Singapur para tratar de que los alumnos dejen de cometerlos en ciertos puntos clave.

Además, gracias a la utilización de estas metodologías, trabajadas en las asignaturas mencionadas en el párrafo anterior, que se acercan más a la primaria en algunos aspectos, el salto de una etapa educativa a otra será mucho más liviano para el alumno.

La utilización de material manipulativo, introducir los problemas comenzando por una situación muy concreta hasta llegar a conceptos más abstractos, y permitir al alumnado relacionarse con sus iguales para aprender de ellos son puntos clave que favorecen un aprendizaje significativo.

De este modo, integrando los conocimientos adquiridos en las materias mencionadas durante este curso con la investigación realizada, ha sido posible la realización del presente trabajo.

CAPÍTULO 1. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La transmisión del conocimiento es una práctica que el ser humano ha llevado a cabo desde el principio de los tiempos, comenzando con los primeros seres humanos que habitaron el planeta hasta hoy, era en la que el homo sapiens vive expuesto a la sobreinformación de manera continua. El punto en común entre todas las etapas educativas por las que ha pasado el ser humano es la dificultad con la que siempre se ha encontrado al enfrentarse a la ciencia, concretamente a las matemáticas.

La educación matemática es un tema importante que se ha debatido durante muchos años. Se ha visto como una puerta de entrada al éxito en la vida, pero también hay quienes argumentan que no debería enseñarse en absoluto porque creen que es demasiado difícil y poco práctica. La historia de la educación matemática puede ayudar a comprender los debates en torno a este tema y brindar información valiosa sobre cómo llegamos a donde estamos hoy.

En el pasado, la educación matemática era bastante mecánica. Muchos de los conceptos que se enseñaban simplemente se seguían tal como estaban sin cuestionamientos. Sin embargo, con el tiempo, ha habido un alejamiento de este enfoque de la enseñanza de las matemáticas. Hoy en día, hay un mayor enfoque en la resolución de problemas y la creatividad.

Esta disciplina, que aparentemente ha sido reservada para algunos pocos privilegiados, lleva enseñándose desde la Antigua Grecia. La visión platónica de las matemáticas está presente en muchos lugares hasta el día de hoy, considerando que el conocimiento matemático está “allí fuera” para ser revelado, no descubierto (Andrade-Molina, 2022).

La enseñanza de las matemáticas ha sido un tema de interés mucho antes de que se creasen las primeras escuelas o universidades. Se han conservado una variedad de documentos antiguos relacionados con esto como tablillas de arcilla mesopotámicas, que han sido reconocidas como una de las fuentes más antiguas.

La educación matemática como un campo de estudio en sí mismo no se encuentra hasta el siglo XIX en Prusia, siendo Josef Fisch uno de los primeros en trabajar este campo. En 1843 Fisch realiza una revisión sobre cómo ha evolucionado el currículo de las matemáticas, enfocado en el álgebra y la geometría (Ruiz, 2003).

La historia de la educación matemática no debe limitarse a un proceso lineal, sino que es preferible entenderla como un multiverso conectado por agujeros de gusano. Este campo es realmente extenso, con multitud de rincones relevantes. La educación matemática no solo se refiere al conjunto de prácticas que se llevan a cabo para la transmisión de este conocimiento, sino a un campo de conocimiento en su totalidad (Andrade-Molina, 2022).

No debe perderse de vista que normalmente el ser humano hace las cosas con un fin y la instrucción matemática no es una excepción. En París durante el siglo XII los burgueses más adinerados querían que sus hijos fuesen educados y las instituciones donde podían recibir la educación que sus padres deseaban pagar eran las de la Iglesia. Las matemáticas no eran obligatorias pero los estudiantes eran instruidos en lógica aristotélica, gramática, aritmética, geometría, música y astronomía. En esta época la educación en álgebra y geometría que recibían era muy rudimentaria, pero con el paso del tiempo fue cambiando.

Durante el siglo XIV, en la ciudad de Viena las matemáticas estaban consideradas más como un pasatiempo que como una disciplina seria. Sin embargo, esta mentalidad cambia en el siglo XVII por la necesidad de profesiones que requerían una formación más formal, como ingenieros. En el siglo siguiente las matemáticas ya se habían abierto camino y se consideraban una parte esencial del currículo. Se estableció una red de escuelas militares a través de las cuales se formaba a ingenieros y militares con las matemáticas como piedra angular del aprendizaje. Este modelo se reprodujo también en el Imperio Otomano, Túnez y Egipto (Ruiz, 2003).

No es hasta la segunda mitad del siglo XX cuando la investigación en educación matemática comienza a ser relevante. Tenía raíces filosóficas, aunque no reconocidas de manera explícita. Fue limitada por matemáticos y psicólogos, y aunque muchos investigadores en educación se centraron en las matemáticas, no había una organización profesional con revistas académicas propias de la materia. Al profesionalizarse el campo de la educación a comienzos del siglo pasado, la educación matemática se pudo por fin asentar durante los años sesenta y setenta de dicho siglo (Ruiz, 2003).

Actualmente, las matemáticas son una parte indispensable del currículo de cualquier lugar, y hay tantos discursos de alabanza hacia ellas que no se limitan solo a lo esencial para la vida cotidiana.

1. EL MOVIMIENTO DE LA MATEMÁTICA MODERNA

El Movimiento de la Matemática Moderna fue un cambio breve pero drástico que se produjo durante la década de los 60 del siglo XX. Algunos matemáticos que participaron de este movimiento señalaban que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se debían a la mala presentación de la matemática tradicional, que inducían al alumno a error por una mala concepción de éstas y una mala estructura deductiva. Por estas causas se pensó en abandonar la enseñanza tradicional y dar el paso hacia una enseñanza más moderna (Kline, 1976).

La principal inspiración para realizar la reforma fue el grupo Nicolas Bourbaki y sus libros *Elementos de Matemáticas*, cuyo objetivo era presentar de manera organizada y fundamentada esta ciencia. Este movimiento también fue inspirado por el psicólogo suizo J. Piaget, que ofrecía la base psicológica a la estructura propuesta por Bourbaki.

La Matemática Moderna considera que se debe enseñar esta ciencia de acuerdo con la época en la que se enseñaba, ya que se creía que la matemática sirve para estructurar el pensamiento, ya que se le considera el lenguaje de la ciencia.

Según Font (2003), las principales características de esta reforma fueron:

- La presentación de las matemáticas como conocimientos terminados y ordenados deductivamente.

- Formalización excesiva de las definiciones.
- Exceso de generalización y falta de procesos de abstracción.
- Matemáticas presentadas de manera aislada a otras ciencias, sin contexto ni aplicación.

Gracias a estas características, a la falta de demostraciones, a limitar la imaginación y las conjeturas, en definitiva, a dejar de lado el “hacer matemáticas”, los alumnos aprendieron a manipular los símbolos matemáticos de manera mecánica y se dejó de lado la geometría, centrándose en lo algebraico.

Tras este fracaso se modificó la manera de enseñar matemáticas, generándose dos corrientes. Por un lado, hubo quienes decidieron enseñar las matemáticas como teorías acabadas y omitiendo las demostraciones, centrandó el trabajo del aula en dominar las técnicas algorítmicas derivadas de la teoría. Por otro lado, se inició una línea de enseñanza que consideraba fundamental aprender las estructuras matemáticas y presentar contextos variados que diesen sentido a los conceptos, oponiéndose por completo a la Matemática Moderna (Font, 2003).

Para comprobar la calidad y eficiencia de los sistemas educativos, las nuevas corrientes que surgen y la aplicación de nuevas metodologías, existen numerosas pruebas, informes y evaluaciones, tanto internas como externas, que trabajan para comprobar si los cambios realizados resultan provechosos o no. En educación, los más conocidos son el Programa Internacional de Evaluación de los Estudiantes (informe PISA) y el Estudio Internacional de Tendencias Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés).

2. INFORMES DE CALIDAD Y EFICIENCIA

Actualmente, se acostumbra a escuchar o hablar sobre la calidad de un producto, la buena o mala gestión de ciertas empresas o la calidad de la educación. En determinar este último punto participa el informe PISA y el TIMSS.

Definir el término de calidad es una tarea compleja. La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) en su informe reflejaba que el término calidad significaba cosas diferentes para distintos observadores y grupos, ya que no todos comparten las mismas percepciones de las prioridades para un cambio, por ello es habitual que resulten a menudo críticas las afirmaciones acerca de la calidad en la educación (OCDE, 1991).

Diferentes autores dan diferentes definiciones de calidad, por ello, atendiendo a varias de estas definiciones y para conseguir objetivos de eficiencia en educación, se realizan estudios a gran escala y de carácter internacional como PISA o TIMSS, en los que España ha participado asiduamente.

2.1. Programa Internacional de Evaluación de los Estudiantes (PISA)

PISA fue diseñado por la OCDE a finales de los años noventa del siglo pasado como un estudio comparativo sobre determinadas competencias y características del alumnado. Su objetivo es evaluar la formación de los alumnos en el último curso de la educación obligatoria, a la edad de quince años (OCDE, s.f.).

La finalidad del programa PISA pasa también por ofrecer un perfil de las capacidades de los estudiantes de todos los lugares donde se realiza esta prueba. Además, provee de una gran cantidad de información sobre el contexto del alumnado, su situación familiar, personal y escolar.

Para su realización se utilizan muestras de entre 4.500 y 10.000 estudiantes por país. Esta prueba se aplica cada tres años, permitiendo extraer información sobre las tendencias en cada lugar y el conjunto general de países participantes (Cadenas Sánchez y Huertas-Delgado, 2013).

PISA trata de evaluar el rendimiento de los alumnos en las áreas de lectura, matemáticas y ciencias, ya que se consideran campos fundamentales en la formación permanente de los estudiantes. También recogen información sobre la motivación de los alumnos y competencias como la resolución de problemas o el pensamiento creativo. Para elaborar la prueba, se parte del contenido común que se encuentra en los currículos de todo el mundo y tratan de examinar la capacidad de los alumnos de aplicarlo eficazmente a la hora de resolver un problema.

Concretamente en 2018, último año del que se poseen datos a fecha de hoy, el informe PISA se centraba en la competencia lectora y las habilidades digitales (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2019).

Lo que hace que PISA sea único es su gran alcance y regularidad. Hasta la fecha, más de 90 países y regiones han participado en el informe, y siendo estos estudios realizados cada tres años es posible realizar un seguimiento de la evolución de los objetivos de aprendizaje tratados. Además, es el único estudio que se realiza a estudiantes de quince años. Otro punto que hace que PISA sea único es la manera en la que se enfocan temas de política pública, la evaluación por competencias o el aprendizaje permanente.

El estudio PISA está organizado y dirigido por los países miembros de la OCDE y países asociados. En el año 2000 participaron 32 países, mientras que en 2018 fueron 79. Se desarrolla e implanta mediante los Ministerios de Educación a través de la PGB (Junta de Gobierno de PISA, o *PISA Governing Board* en inglés), presente en todos los países miembros y asociados. Esta junta está compuesta por directivos del gobierno y personal de instituciones académicas y de investigación (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2019).

Para asegurar la solidez de PISA la OCDE nombra un Grupo de Asesoramiento Técnico (TAG, *Technical Advisory Group*), compuesto por expertos en campos como el muestreo, el análisis de datos o el diseño de estudios. De este modo se consigue que lo publicado en PISA sea sólido e internacionalmente comparable (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2019).

Para elaborar los cuestionarios, los países participantes en PISA presentan unidades de evaluación, que son añadidas a los puntos ya elaborados por expertos de la OCDE. Estas preguntas son revisadas por los contratistas externos y verificadas para evitar los sesgos culturales o de traducción. Además, se elabora una prueba piloto para evitar que cualquier pregunta sea demasiado complicada o simple en ciertos países por razones ajenas al nivel de competencia del alumnado (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2019).

Dado que las pruebas PISA están destinadas a evaluar el rendimiento a nivel de país, no todos los alumnos reciben exactamente el mismo grupo de preguntas, ya que no es necesario. De este modo es posible que PISA abarque todos los aspectos del marco a través de un número grande de pruebas diferentes, lo que permite a la OCDE obtener una mayor cobertura del contenido. Los centros se seleccionan mediante técnicas estrictas como el muestreo de centros y estudiantes.

3. EL PASO DE PRIMARIA A ESO

El paso de primaria a secundaria es un cambio radical para la gran mayoría de alumnos. No solo es un cambio físico, sino que representa la transición de la infancia a la pubertad, fase fundamental para el desarrollo de la vida de los alumnos. Por estos motivos la comunidad docente debe estar a la altura para fomentar que los jóvenes se enfrenten con éxito a este cambio y puedan recibir una buena educación.

3.1. Principales cambios durante esta etapa

Para situar el contexto, el docente debe saber que, según la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget (1969), el alumno en este momento de transición se encuentra en la fase de las operaciones formales (desde los 11 años).

Según Campus Educación Revista Digital Docente (2019), entre los principales cambios que sufren en este periodo, destacan:

- Los cambios sociales: son especialmente significativos, ya que (en centros públicos) el alumnado pasa de ser el más veterano del centro a ser el nuevo, teniendo que lidiar con nuevos compañeros y profesores.
- Los cambios físicos y administrativos: al cambiar de centro, son muchas las variables de este tipo, como por ejemplo el cambio de horario, las rutinas de aula, la convivencia con un mayor número de alumnos y de profesores, etc.
- Los cambios dentro del aula: en educación secundaria, al contrario que en la primaria, se suele tener un docente distinto en cada materia, los alumnos deben volverse cada vez más autónomos y responsables de su propio aprendizaje, los exámenes requieren más horas de estudio e incluyen más contenido, etc.
- Cambios personales: dentro de este periodo baja el interés del alumno por las clases, comenzando a darle más importancia a las relaciones sociales.

3.2. Los cambios desde la percepción del alumnado

En los últimos cursos de primaria, el concepto de estatus cobra importancia para los estudiantes, ya que pasan a verse a ellos mismos como los mayores del centro, con más control y libertades. Sin embargo, al comenzar la secundaria pierden ese rango y vuelven a ser los más pequeños, además, en muchas ocasiones pueden sumarse las burlas y mofas de compañeros de cursos superiores.

Varios expertos del tema han analizado la pérdida del autoconcepto, y cómo disminuyen los indicadores de bienestar emocional al empezar la secundaria. Los temores de los alumnos en

este paso se incrementan, tanto los académicos como los sociales, ya que a la corta edad en la que comienza este periodo muchos alumnos ya están preocupados tanto del fracaso escolar como de las relaciones que puedan tener.

Los principales temores que nombran diversos investigadores del tema son, por ejemplo, la incapacidad de enfrentar adecuadamente el paso de ser “los mayores” a ser “los pequeños”, no tener el mismo tiempo libre, no ser capaz de socializar con nuevas personas, tener que realizar muchas más tareas o el miedo a convivir con personas violentas (Campus Educación Revista Digital Docente, 2019).

Los investigadores Arowasafe e Irvin (1992) realizaron un cuestionario a un grupo de alumnos que comenzarían la secundaria en poco tiempo y pudieron corroborar que la información que estos recibían por parte de otros alumnos era desesperanzadora para los futuros alumnos (Campus Educación Revista Digital Docente, 2019).

Ruiz, Castro y León (2010), analizando las respuestas de los alumnos de esta etapa, identificaron los siguientes motivos de la brusquedad del cambio:

- Diferente organización curricular.
- Diferente centro escolar.
- Problemas de relaciones humanas.
- Estilos pedagógicos distintos.

3.3. Los Programas de Transición

Con el objetivo de solventar o disminuir el malestar del alumnado en el paso de la primaria a la secundaria, múltiples autores han planteado el desarrollo de programas de transición para ayudar a los estudiantes a padecer menos estrés y lograr una transición exitosa (Campus Educación Revista Digital Docente, 2019).

Los centros educativos deben elaborar tanto un Proyecto Educativo de Centro (PEC) como una Programación General Anual (PGA) donde se incluyan los aspectos relacionados con la organización del centro. Es en estos espacios donde debe incluirse un plan de coordinación entre la etapa primaria y la secundaria.

Según Campus Educación Revista Digital Docente (2019), este proyecto para la mejora de la transición tendría tres objetivos principales:

- Favorecer la continuidad del proceso educativo del alumno.

Aunque supone un gran cambio, hay que tener en cuenta que el alumno permanece dentro del periodo de educación formal, cuyo último fin es formar ciudadanos de manera integral. Por tanto, ya tienen las nociones necesarias del funcionamiento del

proceso de enseñanza-aprendizaje, saben que en el aula van a recibir conocimientos, que los profesores son figuras educativas a las que hay que respetar y que el esfuerzo y la motivación que generen hacia las diferentes materias tendrán una compensación futura.

- Propiciar la colaboración con las familias.

El papel de las familias se ha ido transformando debido a diversos motivos, como la carga laboral de los padres, aunque se sigue creyendo que, a pesar de pasar menos tiempo en familia, los padres siguen siendo un agente educativo esencial.

Las familias se enfrentan a un difícil problema: la posición social que ocupan, puesto que ya no serán referentes únicos, sino que comenzarán a ser considerados por los alumnos como personas diferentes, mayores, etc.

- Coordinar la actuación de los centros educativos y los agentes que intervienen.

Desde hace algunos años se ha intentado realizar una propuesta de acompañamiento al alumno en el tránsito entre el sexto curso de primaria y el primero de secundaria, buscando siempre elementos comunes que el alumno pueda utilizar. Las ventajas de dirigir en este proceso son, por ejemplo, que se podrá obtener una buena relación entre los distintos centros, que ayudará a los alumnos a comenzar la secundaria con unas buenas medidas individualizadas, ya que se conocerá cada caso, facilitando así la integración a los nuevos centros. Además, se podrán descubrir las dificultades y necesidades educativas para prevenir las posibles dificultades de crecimiento personal, afectivo y curricular, de los alumnos.

3.4. Cómo facilitar el cambio del alumnado

Como ya se ha expuesto, el paso de primaria a secundaria es un giro de 180 grados en la vida del alumno. Tanto las familias como los estudiantes deben prepararse para afrontarlo adecuadamente. La psicóloga Mercedes Bermejo propone las siguientes claves para suavizar la adaptación del niño (EDUCACIÓN 3.0, s.f.).

1. Valorar el cambio desde un punto de vista positivo.

Debe plantearse este paso como una nueva experiencia, una oportunidad o una forma de evolucionar. Para esto es importante transmitir mensajes positivos de ánimo y esperanza, además de elogiar las capacidades del alumno.

2. Conocer las nuevas instalaciones.

Para ello, los menores deberán acompañar a los padres a la visita, para que tengan la oportunidad de ver el entorno, conocer a algunos profesores, etc. Es conveniente que

padres y alumnos accedan a la web del centro con curiosidad y actitud positiva, para que puedan conocer las instalaciones, materiales, profesores o actividades y sentirse motivados ante nuevos cambios.

3. Realizar el traslado de manera anticipada.

Es importante que los padres realicen con los hijos el desplazamiento de su casa al centro de estudios del mismo modo que el estudiante lo hará durante el curso, antes de que comiencen las clases, de este modo el niño se sentirá confiado el primer día, ya que estará familiarizado con el trayecto.

4. Contactar con personas afines al centro.

Debe contactar con personas que hayan asistido a este centro y obtener información de primera mano sobre cómo funciona, o conocer a personas que saben que estarán el próximo curso, aunque no estén relacionados con ellos. Están acostumbrados a tener muchas relaciones. Esta es una oportunidad para realizar nuevas amistades.

5. Cuidar la salud durante este periodo.

Comer, dormir lo suficiente (más del 80% de los adolescentes duermen menos de lo recomendado), hacer ejercicio, hacerse un chequeo general de salud en el centro de salud, así como velar por la higiene general de los menores.

Es especialmente importante la actitud de los padres sobre este cambio, el hecho de que se lo transmitan con calma y motivación a sus hijos puede influir en su actitud. Además, el buen ambiente familiar, la calma y las palabras positivas son muy.

CAPÍTULO 2. SINGAPUR EN CONTEXTO

El objetivo del presente capítulo es contextualizar y justificar el nacimiento del Método Singapur, conociendo la historia de su lugar de origen, su sistema educativo y concretando en el currículo de la asignatura de matemáticas.

1. HISTORIA DE SINGAPUR

La República de Singapur es un país de apenas seis millones de habitantes situado en el Sudeste Asiático, siendo con apenas setecientos kilómetros cuadrados el país más pequeño de la zona. Su historia está marcada por numerosos cambios en cortos periodos de tiempo.

Los primeros registros del país datan del siglo II, cuando el matemático y geógrafo Ptolomeo lo incluye en uno de sus mapas. También hay registros chinos del siglo III que denominan Singapur como “La Isla en el Final”, ya que se localiza en el extremo de la Península Malaya.

Comienza a denominarse Singapur en el siglo XIV, cuando un príncipe de la isla de Sumatra tiene un encuentro con un león en una de sus visitas, y así denomina este territorio como Singapur, que quiere decir Ciudad del León en sánscrito. El país fue sufriendo numerosas transformaciones políticas y formó parte de varios imperios locales durante los años posteriores, finalizando con el Sultanato de Johor.

Holanda pasó a controlar gran parte de los puertos locales, por lo que Gran Bretaña decidió intervenir y nombrar a Sir Stamford Raffles para garantizar las rutas comerciales de la Compañía de las Indias Orientales. El designado se percató de que Singapur reunía todas las condiciones para crear allí un enclave comercial y aprovecharon las disputas internas del Sultanato para conseguir que concediesen a los británicos el establecimiento de un enclave comercial en 1819, fecha en la que se considera que nace el Singapur moderno.

Gracias al comercio la isla comenzó a crecer y en 1823 pasó a ser gobernada por el país británico, respetando las tradiciones malayas. En años posteriores la región creció aún más y las comunidades china e hindú comenzaron a destacarse por encima de los primeros habitantes malayos. A pesar de este éxito, los ingleses no conseguían satisfacer la demanda de bienestar de la población, las condiciones sanitarias y de seguridad eran más que mejorables.

Gracias al Canal de Suez este territorio tuvo otro gran auge comercial a partir de 1869, pero la época de prosperidad se vio interrumpida por la Segunda Guerra Mundial. Singapur cayó bajo el velo del Impero japonés hasta 1945, caracterizado por la brutalidad hacia la población descendiente de China.

Tras el fracaso de Japón, los británicos retomaron el control de la región, pero la situación de desempleo, falta de comida, enfermedades y desilusión por la incapacidad británica para defenderlos llevó al surgimiento del anticolonialismo. En 1955 el primer ministro de Singapur negoció el autogobierno para esta región, siendo aprobado por el parlamento británico en 1958 creando el estado de Singapur (Gálvez, 2012).

A pesar de haber conseguido cierta desvinculación del estado británico, muchas fuerzas políticas defendían una unión con Malaya, Sabah y Sarawak para prosperar juntos dada su cultura común. Esta unión se produjo en 1963, sin embargo, las tensiones que provocó hicieron que Singapur saliera del conjunto de Malasia en 1965, formando la República de Singapur (Gálvez, 2012).

Una vez formado el país de manera independiente, rápidamente pusieron en marcha reformas y planes para atraer inversores a la isla. Comenzó una etapa de crecimiento industrial, con el consecuente aumento de movimiento en los puertos y la reducción de la tasa de desempleo, que pasó de un 12% a un 3% entre los años ochenta y noventa. Durante estas décadas Singapur se convirtió en un núcleo para la industria de la alta tecnología y la petroquímica, además de realizar importantes apuestas en el sector turístico. También realizaron importantes inversiones en educación, tecnología y vivienda.

Hoy en día, la República de Singapur es una república parlamentaria constitucional administrada por el partido PAP (*People's Action Party*) desde su fundación. A pesar de poseer uno de los mejores sistemas judiciales de todo Asia, aún se mantienen los castigos físicos para determinados crímenes, y la pena de muerte por tráfico de drogas o armas. Se considera este el principal motivo de la baja tasa de corrupción.

La República ha ido evolucionando con el paso del tiempo y la globalización, aunque continúa teniendo unas leyes bastante restrictivas con el objetivo de crear valores entre la población. Tras grandes inversiones en el ámbito educativo, el fortalecimiento de la democracia y la cultura del respeto el modelo de gobierno se ha flexibilizado y los habitantes del país las valoran considerablemente.

Singapur cuenta con cerca de cinco millones de habitantes, siendo tres de ellos autóctonos y el resto residentes permanentes o trabajadores extranjeros. Cuenta con una superficie de 704 km cuadrados, varios de ellos ganados al mar a lo largo de los años. El 23% del territorio está formado por selva o reservas naturales, parajes de los que el país se siente enormemente orgulloso. Su lengua principal es el inglés, utilizada en documentos y lugares públicos, aunque también son lenguas oficiales el mandarín, el malayo y el tamil. La religión predominante es

el budismo, pero también hay mucha presencia del cristianismo, el islam o el hinduismo (Gálvez, 2012).

2. EL SISTEMA EDUCATIVO EN SINGAPUR

Singapur es reconocido a nivel internacional por formar parte de los países con mejores resultados en educación, debido a la puntuación obtenida en estudios como PISA o TIMSS durante los últimos años.

PISA (Programme for International Student Assessment) es una encuesta trienal que se realiza a los estudiantes de quince años y evalúa hasta qué punto han adquirido los conocimientos y habilidades consideradas esenciales para una plena participación en sociedad. Esta evaluación, basada en competencias, se centra en la lectura, las matemáticas y ciencias. En los últimos resultados de PISA, Singapur ha obtenido el segundo puesto en todas las competencias (OECD, 2018) y en los resultados de 2015 obtuvieron el primer puesto (Satué, 2019).

El proyecto TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) es un proyecto internacional creado por la IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*) que evalúa las competencias en las materias de matemáticas y ciencias de los alumnos de cuarto de primaria y segundo de educación secundaria obligatoria desde 1995 y cada cuatro años (Ministerio de Educación y Formación Profesional, s.f.). Los singapurenses han obtenido la puntuación más alta de los países participantes en 2019, tanto en matemáticas como en ciencias en las dos edades estudiadas (TIMSS & PIRLS International Study Center, 2021).

2.1. Reformas educativas

A pesar de que en los últimos años este país ha demostrado que su sistema educativo funciona, no siempre fue así.

Cuando Singapur logró la independencia se realizaron grandes reformas para lograr ser una potencia económica importante. En ese momento desde el gobierno tomaron como un punto de partida esencial redireccionar la educación. El Ministerio de Comercio e Industria de Singapur en 1986 recomendó desarrollar la educación de cada individuo incentivando la creatividad y las habilidades propias para poder mantener la competitividad del país a nivel internacional (Satué, 2019).

Para impulsar la creatividad y la innovación se mercantilizó la educación, de manera que las escuelas adquirieron mucha más autonomía y creándose las primeras escuelas privadas o “escuelas autónomas”, lo que conllevó a un incremento de la competitividad entre escuelas.

Las iniciativas más fuertes para reformar la educación se iniciaron en 1997 con la creación de *Thinking schools, learning nation (TSLN)* por parte del Ministerio de Educación de Singapur. Esta iniciativa fue un punto y aparte en la política educativa del siglo XXI, ya que toma como objetivo preparar a los estudiantes de Singapur para el futuro (Satué, 2019).

Las reformas que se realizaron con la implantación del TSLN se centraron en desarrollar las habilidades de pensamiento crítico y creativo del alumno, reducir los contenidos de las asignaturas, revisar los métodos y las herramientas de evaluación y fomentar la evaluación continua de los estudiantes, teniendo en cuenta todo el proceso de aprendizaje realizado y no únicamente los resultados académicos.

Otra importante iniciativa del gobierno singapurense de 1997 fue crear el *Masterplan 1 (MP1) for Information Communication Technology (ICT) in Education*. Su objetivo fue fomentar que los estudiantes adquirieran las competencias básicas a través de las TIC. A través de esta iniciativa el gobierno equipó las escuelas con la tecnología necesaria para impartir una educación basada en las TIC para más del 30% del currículo (Satué, 2019).

Una tercera iniciativa que instauró el Ministerio en ese mismo año fue la *National Education*, que tenía el objetivo de fomentar la unión nacional e inculcársela a los estudiantes, para ayudar a reconocer las vulnerabilidades y los retos a los que Singapur se enfrenta. Los valores de esta iniciativa fueron la meritocracia y la armonía entre las diferentes razas y religiones que forman el país (Satué, 2019).

Otra iniciativa que fue creada por parte del gobierno fue *Desired Outcomes of Education (DOE)*, cuyo objetivo se centraba en desarrollar en los estudiantes aspectos cognitivos, físicos, morales, estéticos y sociales (Satué, 2019).

En el año 2004 se crea el movimiento *Teach less, learn more (TLLM)*, que permitió que se hiciera realidad el cambio de pedagogía propuesto en el TSLN. Se introdujo en el año 2005 por el Ministerio de Educación para mejorar su calidad y reducir los planes de estudio, de manera que el estudiante tenga más espacio para aprender y explorar.

Las iniciativas mencionadas se han mantenido a lo largo de los años, siendo revisadas por el Ministerio de Educación y reimplantándose en los centros educativos (Satué, 2019).

Uno de los puntos más fuertes de la educación en Singapur y el principal motivo de su éxito es la estrecha relación existente entre la investigación, la política y la puesta en práctica. Los

docentes, los líderes políticos y los educadores e investigadores del Instituto Nacional de Educación trabajan unidos para remar en la misma dirección educativa.

2.2. Estructura del sistema educativo singapurense

El sistema educativo de Singapur se organiza en tres niveles básicos obligatorios: preescolar, primaria y secundaria. Tras ellos, existen otros dos niveles no obligatorios: postsecundaria (similar al bachillerato español) y universitario.

Las principales áreas clave del sistema educativo de Singapur son las matemáticas y el inglés, siendo estas las dos materias que más tiempo ocupan dentro del currículo. A medida que los estudiantes avanzan el plan de estudios se va diversificando y los alumnos comienzan a escoger materias especializadas (Daniel, 2021).

Este sistema poco tiene que ver con el de occidente, ya que existen numerosas opciones a las que el alumno puede acceder dependiendo de sus habilidades y sus fines académicos.

Según López (2014), las características de cada periodo son las siguientes:

- Educación preescolar:

Es la primera toma de contacto de los niños singapurense con la educación reglada, a los cuatro años. Permanecen en esta etapa hasta los seis años, cuando comienza la primaria. Durante este ciclo el alumno aprende a explorar, a escuchar, a ser saludable y a superarse. Además, en los centros de preescolar actualmente deben fomentar el sentido de pertenencia y el orgullo nacional.

- Educación primaria:

El periodo de primaria (*Primary School*) dura de los seis a los doce años. Durante esta etapa los alumnos estudian su lengua, inglés, ciencias (a partir del tercer curso), matemáticas, artes, civismo, estudios sociales, etc. En estos años el objetivo es asegurar que los estudiantes adquieran valores y habilidades para poder ser ciudadanos activos.

Durante los dos últimos cursos los alumnos se someten a evaluaciones para ser ubicados, ya que cuando este periodo finaliza se enfrentan al denominado *Primary School Leaving Examination (PSLE)*, un examen que determina sus perspectivas en la secundaria e incluso profesionales. Dependiendo de la calificación, el alumno es enviado a un tipo de centro de secundaria u otro. Más del 96% de los alumnos superan el examen, sin embargo, solo aquellos con las mejores calificaciones pueden elegir el tipo de centro al que irán.

En primaria, el ratio de alumno por profesor es de aproximadamente 19 alumnos.

- Educación secundaria:

Esta etapa comprende alumnos de entre 12 y 16 años y es la última etapa de la escolarización obligatoria. Dependiendo de la nota obtenida en el PSLE los alumnos recorrerán un itinerario u otro. Estos caminos están enfocados a adaptarse a las cualidades del estudiante e incluso algunas de las escuelas, dependiendo del tipo de formación que imparten, son de libre acceso. El sistema también permite el cambio entre los tipos de curso. Los posibles itinerarios son:

- Express: enfocado a alumnos que irán posteriormente a la universidad local.
- Normal Academic (NA): enfocado a realizar una formación profesional. Es el itinerario seguido por el grueso de los estudiantes.
- Normal Technical (NT): enfocado a realizar una formación técnica más manual.

Además de los tres itinerarios anteriores, existen ciertas vías que se salen de lo estándar:

- Integrates Programmes (IPs): fusiona la secundaria con la postsecundaria. En este itinerario ubican a los mejores estudiantes de primaria. El plan de estudios es específico para entrar en la universidad, ya que se centra en el desarrollo de habilidades concretas. No necesitan realizar un examen posterior (*GCE "O" levels*) para entrar en la universidad.
- Special Programme: es similar al itinerario Express pero ofrece una enseñanza de la lengua materna superior.
- Specialised Programmes: están dirigidos a estudiantes especialmente dotados para una disciplina en concreto, sobre todo artes o deportes. Es posible acceder a la universidad a través de este itinerario.

Además de los diferentes niveles e itinerarios, también existen diferentes tipos de escuelas. Según López (2014) algunos tipos de escuelas en Singapur son:

- Independent Schools. Son escuelas de educación secundaria financiadas por el Ministerio de Educación y poseen mucha autonomía. Pueden obtener financiación por otros medios, por lo que suelen contar con más presupuesto que otras escuelas de secundaria. Sus resultados son buenos.
- Autonomous Schools. Son también financiadas por el Ministerio de Educación pero poseen menos autonomía que las anteriores. Son relativamente nuevas y están mostrando buenos resultados.

- Government – aided Schools. Son escuelas de secundaria públicas, pertenecen al gobierno.
- Special Education Schools. Son escuelas en las que se cursan ramas especializadas para alumnos con necesidades educativas especiales. Los alumnos que acuden a ellas reciben atención especializada, adecuada a los problemas físicos o psíquicos que posea.
- Privately Founded Schools. Son escuelas totalmente privadas e independientes.
- International Schools. Son escuelas extranjeras establecidas en Singapur con permiso del Ministerio de Educación. Son financiadas por los padres de los alumnos mensualmente.

Una vez finalizada la etapa secundaria, los alumnos son sometidos a las pruebas GCE, que varían según el itinerario realizado en secundaria. Los GCE O level dan acceso a los estudiantes de cursos Express a los Junior Colleges preuniversitarios. También existen GCE NA, que dan paso a los alumnos de NA a un curso para preparar el GCE O level o a fundaciones politécnicas para aprender una profesión. En caso de los alumnos que cursan NT, deben pasar el examen GCE NT para acceder a estudios de NA o a institutos técnicos.

Los estudiantes de Junior Colleges, tras dos o tres años, deben examinarse del GCE A para poder acceder a la universidad o a una escuela politécnica. Tan solo un 25% de los estudiantes lo superan. La mayoría de los universitarios realizan estudios de ciencias o artes y les requieren un nivel de inglés IELTS 6.0 (equivalente al FCE o B2) para ingresar.

3. EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN SINGAPUR

Según los resultados de diversos informes de evaluación internacionales, el sistema educativo de Singapur destaca por el buen nivel que poseen sus alumnos, especialmente en matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas es una de las claves del sistema educativo singapurense, cuyo objetivo principal es formar ciudadanos cuyo futuro profesional sea exitoso, para ellos y para el país. Para lograr este objetivo, la enseñanza de las matemáticas se centra en actividades cotidianas, desde comprender la información recibida a través de los medios de comunicación hasta gestionar la economía personal. Las matemáticas están presentes en el día a día de cualquier persona, por lo que una buena comprensión de ellas es esencial. Además, este aprendizaje es un excelente medio para entrenar la mente y desarrollar la capacidad de pensamiento lógico, abstracto, crítico y creativo.

El currículo de matemáticas está formado por los planes de estudio que se ejecutan a lo largo de los doce años que dura la educación obligatoria y preuniversitaria. Cada plan de estudios que conforma el currículo tiene diferentes metas, que sirven para guiar el diseño de este, es decir, los planes de estudio tienen como objetivo cubrir necesidades y desarrollar habilidades de los estudiantes en cada etapa.

Este planteamiento tiene una estrecha relación con los estudios realizados por Piaget en 1987, donde se describen las etapas del desarrollo cognitivo, que se podrían definir como:

El conjunto de transformaciones que se producen en las características y capacidades del pensamiento en el transcurso de la vida, especialmente durante el periodo del desarrollo, y por el cual aumentan los conocimientos y habilidades para percibir, pensar, comprender y manejarse en la realidad. (citado en Satué, 2019, p.17)

Esto significa que con este sistema los niños realizan su desarrollo cognitivo de manera gradual, de ahí la importancia de que los planes de estudio se diseñen conforme a sus necesidades e intereses. Piaget (1987) establece que en la educación primaria los alumnos se encuentran en el estadio de operaciones concretas, en el que comienzan a utilizar la lógica para reflexionar sobre los hechos que suceden a su alrededor.

Por otro lado, el currículo de Singapur también está diseñado teniendo en cuenta que “las matemáticas son en gran parte de naturaleza jerárquica”, de forma que “los conceptos y habilidades superiores se basan en los más fundamentales y deben aprenderse secuencialmente. Se adopta el enfoque del currículo en espiral en la creación de contenido a través de los niveles” (Satué, 2019).

Según Bruner (1987), la educación consiste en construir “currículos en espiral”, entendiéndolos como maneras de profundizar mejor en cierto tema de conocimiento en función del desarrollo del alumno. A la hora de diseñar un contenido hay que profundizar en él progresivamente, comenzando con lo más sencillo y finalizando con lo más abstracto, de manera que se construya una base sólida y se tenga en cuenta el desarrollo cognitivo de los estudiantes en cada etapa.

3.1. Las Fases Para Una Enseñanza Efectiva De Las Matemáticas

El currículo de Singapur establece diferentes fases de aprendizaje y define perfectamente la estructura que debe tener una sesión de matemáticas. Normalmente, se dice que existen tres fases: preparación, transferencia y dominio.

La preparación para el aprendizaje es considerada la fase más importante. En ella los docentes deben incentivar el interés de los alumnos por aprender, teniendo en consideración sus conocimientos previos y creando contextos motivadores para ellos.

La transferencia es la fase central del aprendizaje. En ella los docentes utilizan diferentes pedagogías para que el estudiante se involucre en el aprendizaje de las nuevas habilidades o conceptos. Principalmente se utilizan tres enfoques pedagógicos: aprendizaje basado en actividades, investigación dirigida por el docente y la instrucción directa.

El dominio es la fase final, en la que los profesores asisten a los alumnos para que puedan consolidar el aprendizaje. En este periodo los enfoques suelen incluir una práctica motivadora para que los alumnos practiquen lo aprendido en situaciones que les puedan atraer, introducen la revisión reflexiva y tareas de ampliación para los estudiantes con buenas capacidades en matemáticas.

Para el momento de evaluar los conocimientos de los estudiantes se propone realizar una evaluación diagnóstica, sumativa y formativa, que considere todo el proceso de aprendizaje del alumno y no únicamente el resultado de un examen. El objetivo de la evaluación debe ser ayudar al estudiante y mejorar su aprendizaje.

CAPÍTULO 3. MÉTODO SINGAPUR

El denominado Método Singapur no es realmente un método en sí mismo, sino que es un compendio de metodologías estructuradas sobre la base de la resolución de problemas como eje principal.

El diseño curricular en espiral es básico para aplicar estas metodologías. Implica reforzar conocimientos previos al tiempo que se enseñan los nuevos, contextualizándolo como un todo. Esto genera un aprendizaje significativo y comprensivo, frente a un aprendizaje simplemente operacional que puede darse con un currículo lineal (Matemáticas Método Singapur para España, 2011).

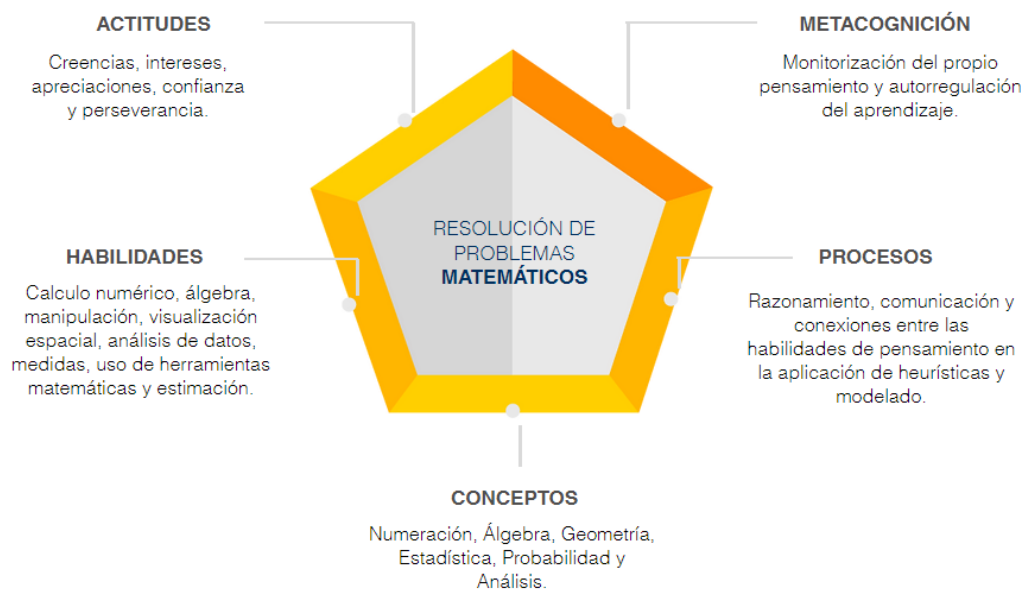
Una de las características más distintivas del currículo del Método Singapur es el pensamiento algebraico. Gracias al currículo en espiral, en cada actividad se pueden basar en los conceptos ya aprendidos y en otros de mayor nivel, para que el pensamiento algebraico se obtenga con naturalidad con el tiempo.

1. EL MARCO CONCEPTUAL DEL MÉTODO SINGAPUR

Su marco conceptual es una de las características más llamativas del Método Singapur. Se centra en la resolución de problemas, para lo cual hace hincapié en la comprensión conceptual, el dominio de habilidades, los procesos matemáticos, las actitudes y la metacognición. Estos cinco elementos están estrechamente relacionados y se ha popularizado el siguiente esquema para representarlos:

Figura 1.

Marco Conceptual Método Singapur (Matemáticas Método Singapur para España, 2011).



1.1. Los Conceptos

Los conceptos que se trabajan en este currículum son la numeración, el álgebra, la geometría, la estadística, la probabilidad y el análisis. Dependiendo de la etapa en la que se encuentre el alumno y el plan de estudios concreto que se esté llevando a cabo, estos contenidos serán aprendidos por el alumno en mayor o menor profundidad.

La adquisición de estos conceptos se estructura a través del enfoque C-P-A. Para que los alumnos comprendan de manera correcta los conceptos se les debe exponer a gran variedad de situaciones en las que se incluya material manipulativo y nuevas tecnologías, de tal manera que puedan relacionar de forma abstracta conceptos matemáticos con experiencias más concretas.

1.2. Las Habilidades

Las habilidades matemáticas que aprenden los alumnos son el cálculo numérico, la manipulación algebraica, la visión espacial, el análisis de datos, medias, el uso de herramientas matemáticas y la estimación.

Para lograr el desarrollo de estas habilidades, el estudiante debe tener oportunidad de practicarlas y deben ser enseñadas con entendimiento de los principios matemáticos, no como simples procedimientos (Godino, 2004).

1.3. Los Procedimientos

Los procedimientos se refieren a las habilidades involucradas en el proceso de adquisición y aplicación del conocimiento matemático. Incluyen el razonamiento, entendido como la capacidad de analizar situaciones matemáticas y construir un argumento lógico; la comunicación como capacidad de utilizar el lenguaje matemático para expresar ideas o argumentos de forma precisa; las conexiones, como la habilidad de relacionar ideas matemáticas, así como de relacionar las matemáticas con otras materias o el mundo real; las aplicaciones y el modelado, para poder conectar las matemáticas con el mundo real; y las habilidades de pensamiento, esencial para la resolución de problemas (Godino, 2004).

1.4. La Metacognición

La metacognición se refiere al autocontrol y regulación de los procesos de pensamiento a la hora de resolver problemas. Para desarrollar este punto se deben plantear a los estudiantes problemas abiertos y no rutinarios, de manera que tengan la oportunidad de discutir sus soluciones, reflexionar y tomar conciencia de cómo las cosas producirán cambios cuando sea necesario (Satué, 2019).

1.5. Las Actitudes

Consiste en desarrollar tanto el interés por aprender como las actitudes positivas hacia el aprendizaje de las matemáticas, la apreciación de la belleza y el poder de las matemáticas, la paciencia en la resolución de problemas, etc. Para desarrollar este tipo de actitud se debe proponer aprender de manera divertida, significativa y consciente.

2. MODELO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

La propuesta de modelo del Método Singapur tiene como objetivo que los alumnos aprendan, comprendan lo enseñado y reconozcan los usos más importantes que tienen esos conocimientos, de manera que no los olviden rápidamente. Este modelo está basado en los estudios Ashlock (1983), que enfatizan el hecho de que un buen plan de enseñanza debe conectar los objetivos de aprendizaje con el tipo de tareas que desarrollan los alumnos. El Método Singapur estructura las actividades según el siguiente esquema (Matemáticas Método Singapur para España, 2011):

Figura 2.

Estructura de actividades Método Singapur (Matemáticas Método Singapur para España, 2011).



Cuando Ashlock diseñó este esquema pretendía que los educadores entendiesen la necesidad de conectar los objetivos de los contenidos con el tipo de actividades que han de realizarse para lograr un aprendizaje efectivo. En el Método Singapur la planificación de la enseñanza está basada en el conocimiento de esto por parte de los profesores, para así crear un modelo que incorpore todas las técnicas y estrategias necesarias para que los alumnos desarrollen una comprensión profunda de las matemáticas, pudiendo aplicar estos conceptos en diferentes

contextos y situaciones tanto reales como abstractas (Matemáticas Método Singapur para España, 2011).

Al aplicar este modelo en la planificación de la enseñanza, cada parte tiene su propósito y sus actividades propias, y se considera cada parte dentro de su conjunto, comenzando con la comprensión.

Algunas de las ideas claves del modelo que sigue el Método Singapur son las siguientes (Matemáticas Método Singapur para España, 2011):

1. Comprensión

Se consideran dos tipos de comprensión, por un lado, en la comprensión instrumental los alumnos deben aprender a operar sin conocer la razón de la operación que realizan, y por otro lado la relacional, en la que conocen el razonamiento lógico que explica lo que se debe hacer sin conocer las operaciones que se han de realizar. Ricchard Skemp explica que debe mantenerse el foco de la enseñanza matemática en la comprensión relacional, yendo la instrumental en paralelo a ésta, para poder crear un aprendizaje significativo.

2. Proceso Concreto – Pictórico – Abstracto

Según el psicólogo Jerome Bruner, el aprendizaje es un proceso activo, y para que el alumno genere una comprensión completa de los conceptos se deben pasar por tres fases de aprendizaje: Enactivo, Icónico y Abstracto. Esto se plasma en el Método Singapur a través del enfoque C – P – A (concreto, pictórico, abstracto).

3. Modelos de representación con material concreto

El matemático húngaro Zoltan Dienes habla de la importancia de las representaciones multimodales a la hora de desarrollar por completo una comprensión relacional. Uno de sus principios es la concretización múltiple para que puedan manifestarse las diferencias en la formación de los conceptos, así como para que los alumnos adquieran el sentido de la abstracción matemática representando las mismas estructuras conceptuales de tantas formas como sea posible.

4. Maduración y desarrollo

Las estructuras cognitivas son patrones de comportamiento físico o mental que corresponden a diferentes etapas de desarrollo del estudiante. Jean Piaget demostró que los niños pasan por cuatro etapas distintas correspondientes a diferentes etapas de desarrollo. La primera de ellas es la sensomotora (de 0 a 2 años), en la que la inteligencia se basa en acciones motoras; la segunda es la pre-operacional (de 3 a 7 años), en la que las decisiones se toman basándose en la percepción; posteriormente la

etapa operacional concreta (de 8 a 11 años), en la que las decisiones basadas en la lógica son posibles, pero se basan en referencias concretas; y por último la operacional formal (de los 12 a los 16 años), en la que gracias a la lógica se introducen razonamientos abstractos.

Esta idea clave dice que en la educación primaria se debe exponer a los niños a movimientos motores y materiales concretos para que sus relaciones matemáticas sean fácilmente asimiladas. En la etapa más abstracta, el razonamiento abstracto se puede crear o introducir más fácilmente para comprender las relaciones de una manera concreta.

5. Alumnos como aprendices activos

Lev Vygotsky es otro de los psicólogos cuyas ideas han influido en el desarrollo del Método Singapur, a pesar de que sus ideas no son específicas de la enseñanza de las matemáticas. Vygotsky concluyó que cuando los niños aprenden son especialmente importantes las interacciones sociales, lo que justifica el trabajo cooperativo como un elemento de aprendizaje de manera que los alumnos puedan verbalizar entre iguales lo que están haciendo. De este modo, dicha metodología permite reforzar lo aprendido mediante discursos internos que interiorizan su comprensión. Otra de las ideas de este psicólogo es enseñar adecuando los contenidos a la denominada “Zona de Desarrollo próximo”, área donde se establecen los conocimientos que puede y debe aprender el alumno conforme la etapa de desarrollo en la que se encuentre. Dentro del Método Singapur la estructura del plan de estudios está pensada para poder cumplir esta premisa. El esquema de la zona de desarrollo próximo sería el siguiente:

Figura 3.

Esquema Zona de Desarrollo Próximo (Matemáticas Método Singapur para España, 2011).



6. Ejercicio y práctica

En el Método Singapur el refuerzo positivo es una de las claves y está completamente integrado en la práctica, que está estructurada de tal manera que refuerza el ánimo de los alumnos hacia sus metas de aprendizaje. Los profesores disponen de diversas actividades para realizar en el aula, el uso de cadenas lógicas, cubos conectables, rectas numéricas, etc. está a la orden del día y consolidan la comprensión de los alumnos al tiempo que les ayuda a avanzar de nivel en la aplicación de lo aprendido.

7. Mejora de la memoria

El psicólogo Miller descubrió los conceptos de fragmentación y memoria a corto plazo, además de los tres niveles de la memoria. El primero de ellos, la memoria icónica, se registra de forma sensorial y dura pocos segundos; el segundo, la memoria a corto plazo, es una memoria operativa y dura alrededor de 20 segundos; por último, la memoria a largo plazo es una memoria de almacenamiento y dura indefinidamente.

Los alumnos que siguen el Método Singapur consiguen traspasar las experiencias sensoriales a la memoria a corto plazo a través de distintas actividades. Con la repetición con diferentes elementos, trasladan esto a la memoria a largo plazo mediante asociaciones, de este modo los conceptos adquieren relevancia. Así el Método Singapur consigue que los alumnos recuerden “el qué”, “el cómo” y “el para qué” de los conceptos matemáticos que se les enseñan.

3. EL ENFOQUE DEL MÉTODO

El enfoque de la enseñanza de las matemáticas que le da el Método Singapur es el denominado Enfoque C-P-A (conceptual, pictórico, abstracto). A la hora de enseñar matemáticas se deben usar un conjunto de formas y métodos, enfatizando la conceptualización y seleccionando meticulosamente las actividades que promuevan la comprensión de la materia (Matemáticas Método Singapur para España, 2011).

Debe utilizarse una progresión que comience en lo concreto y finalice en lo más abstracto, siempre que sea posible. Enseñar basándose en la comprensión de los conceptos es una de las máximas del Método Singapur. Se deben crear conexiones entre las tres partes C-P-A del aprendizaje, al mismo tiempo que se fomenta el trabajo tanto colaborativo como individual, donde los alumnos trabajen con gran variedad de actividades, rutinarias y no rutinarias, donde se investigan la estructura de los fundamentos matemáticos y cómo las matemáticas se encuentran en el entorno. Dentro de un grupo cooperativo los estudiantes aprenden a intentar

cosas diferentes, crear teorías y explorar, al tiempo que conocen a sus compañeros y justifican ante ellos sus conjeturas.

Este enfoque tan particular nace de la teoría de Jerome Burner, quién estableció que para conseguir una enseñanza de las matemáticas en la que se adquiriera un completo conocimiento conceptual los alumnos deben pasar por tres procesos: enactivo, icónico y simbólico (Matemáticas Método Singapur para España, 2011).

4. EL MODELADO DE BARRAS

Otra base importante del método es el modelado de barras. El modelado permite representar los datos y sus relaciones, utilizando esta representación para buscar las operaciones necesarias para hallar la respuesta a un reto planteado. Dentro del Método Singapur hay multitud de estrategias de resolución, pero esta se considera la más importante, tanto es así que es una técnica de enseñanza de las matemáticas por sí misma. Al ser una metodología de resolución tan versátil, se han desarrollado diferentes tipos de modelado dependiendo de la rapidez de resolución necesaria, la facilidad de representación, etc. Cuando usan el modelado de barras, los alumnos aplican un proceso de síntesis de los datos del problema y con él construyen el modelo de representación, tras crear el modelo lo analizan y descubren la secuencia de pasos que llevan hasta su resolución

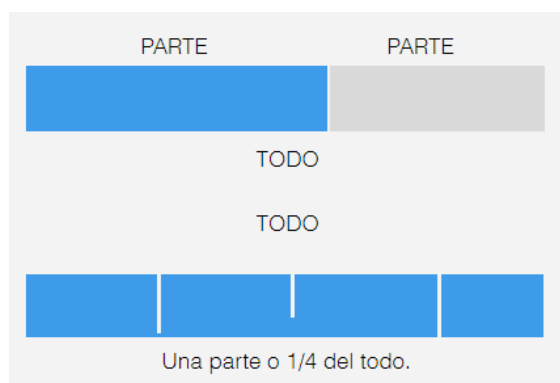
Dentro del método, hay tres formas distintas que los estudiantes pueden aprender de estructuras de modelado: partes-todo, comparación y antes-después (Matemáticas Método Singapur para España [2], 2011).

4.1. Modelado Parte-Todo

En este tipo de modelado el todo es dividido en dos o más partes. Cuando se conocen las partes, es trivial conocer el todo mediante la suma de éstas. Al conocer el todo y una o alguna de las partes, se puede obtener la parte restante usando la diferencia (Matemáticas Método Singapur para España [2], 2011).

Figura 4.

Esquema del modelado parte-todo (Matemáticas Método Singapur para España, 2011).

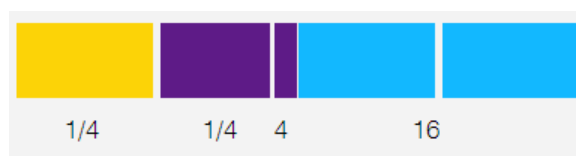


Al dividir el todo en partes iguales, este modelo se adecua a la resolución de problemas de división y multiplicación.

Un ejemplo de problema sencillo donde se puede aplicar este método es el siguiente:

Una cuarta parte de los peces de un gran acuario son carpas doradas. Hay 4 Gupys más que carpas doradas en el acuario. Los 16 peces que sobran son carpas comunes. ¿Cuántos peces hay en el acuario?

Todos los peces del acuario



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

La mitad del total: $4 + 16 = 20$

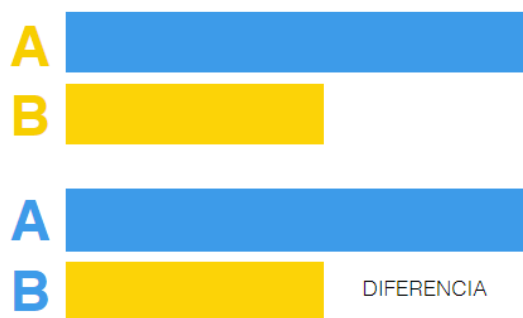
Todo el acuario: $20 \times 2 = 40$

4.2. Modelado de Comparación

En este tipo de modelado se muestran las relaciones entre dos o más cantidades al compararlas. Cuando se muestran las cantidades A y B, es fácil encontrar la diferencia o la ratio entre ambas, o encontrar A o B cuando lo que se muestra es la diferencia o la ratio entre ellas.

Figura 5.

Esquema del modelado de comparación (Matemáticas Método Singapur para España, 2011).



Un ejemplo de aplicación de este tipo de modelado sería el siguiente:

Juan vendió tres veces más ordenadores que Pedro. Entre los dos vendieron 48 ordenadores. ¿Cuántos ordenadores vendió Pedro?



4 unidades son 48 ordenadores

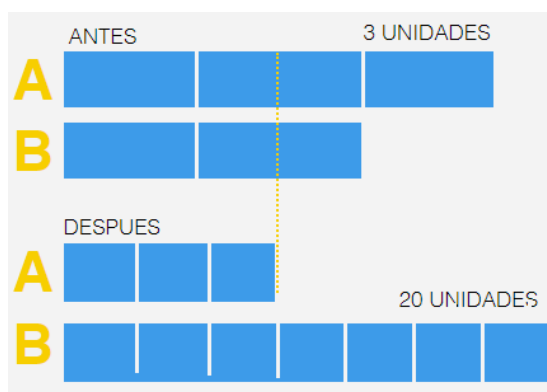
1 unidad: $48 \div 4 = 12$ ordenadores

4.3. Modelado Antes – Después

Este tipo de modelado muestra la relación entre dos valores: el valor original tras un incremento o decremento y un nuevo valor. Normalmente, este modelo es aplicado en estructuras complejas, como las que aparecen en los desafíos de cálculo (Matemáticas Método Singapur para España [2], 2011).

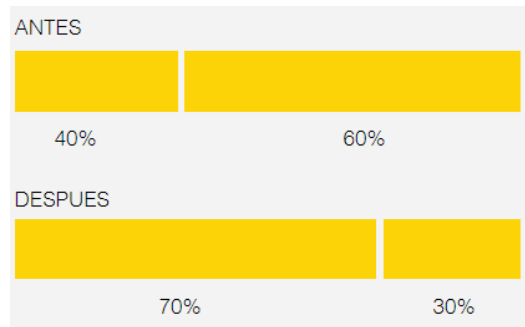
Figura 6.

Esquema del modelado antes-después (Matemáticas Método Singapur para España, 2011).



Para ilustrar este modelado, un buen ejemplo es el siguiente:

Una fábrica cuenta con 1200 trabajadores. El 40% de ellos son hombres. Se contrataron nuevos trabajadores masculinos hasta que los hombres pasaron a ser el 70% del total de trabajadores. ¿Cuántos nuevos trabajadores masculinos emplearon?



Antes:

$$40\% \text{ de los trabajadores} = \frac{40}{100} \times 1200 = 480 \text{ hombres.}$$

$$60\% \text{ de los trabajadores} = \frac{60}{100} \times 1200 = 720 \text{ mujeres.}$$

Después:

$$30\% \text{ de los trabajadores} = 720 \text{ mujeres.}$$

$$10\% \text{ de los trabajadores} = 720 \div 3 = 240.$$

$$70\% \text{ de los trabajadores} = 240 \times 7 = 1680 \text{ hombres.}$$

$$\text{Número de nuevos trabajadores} = 1680 - 480 = 1200.$$

Los nuevos trabajadores masculinos son 1200.

5. EL MÉTODO SINGAPUR EN ESPAÑA

Entre los años 2016 y 2017 varios colegios españoles, tanto públicos como concertados o privados, decidieron implantar el Método Singapur en sus aulas.

Además de los excelentes resultados de Singapur en los informes PISA de los últimos años, en España ha llamado especialmente la atención la filosofía del Método, que pone en valor la comprensión de los conceptos, el razonamiento y la resolución de problemas.

Tras probar varios años esta metodología, varios docentes explican que han tenido excelentes resultados en las aulas: primero manipulando, después dibujando y solo después pasando al lenguaje matemático. Según varios expertos, la clave es escuchar atentamente al alumno e interactuar con él mediante preguntas que guíen su pensamiento y le ayuden a resolver el problema. De este modo los alumnos se acostumbran a este tipo de preguntas guía y desarrollan competencias para expresar su pensamiento de manera profunda (SM impulsa en España el método Singapur de aprendizaje de matemáticas, 2018).

La enseñanza de las matemáticas en España siempre se ha basado en la repetición y la memorización, en la mayoría de las ocasiones sin llegar a comprender el concepto. El problema de este enfoque reside en la incapacidad del alumno para aplicar los conocimientos adquiridos de este modo a la resolución de problemas, que es el campo más interesante para los alumnos en edad escolar.

Varios expertos, como el profesor titular del área de Matemática Aplicada en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Alcalá, Pedro Ramos, que con este método los resultados serán visibles a corto plazo, y varios países ya han seguido este camino (Llega a los colegios de España el método revolucionario de Singapur para aprender matemáticas, 2019).

El principal problema para el desarrollo del Método Singapur en España, según varios autores, es la amplitud curricular. Esto dificulta, tanto para los alumnos como para los docentes, detenerse más tiempo del establecido en un tema concreto, aunque sea necesario.

La OCDE siempre ha recomendado reducir el currículo para poder abordar temas importantes en más profundidad, pudiendo realizar actividades que motiven a los alumnos. En España, sin embargo, se pasó de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) a ampliar los currículos gracias a la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). Afortunadamente, según varios expertos, entrará en vigor el próximo curso la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE), que reduce de nuevo los currículos,

proporciona más libertad a los centros y evalúa por competencias, facilitando la implantación del Método Singapur en España.

Para que el Método sea óptimo, se debe comenzar en la etapa de educación infantil, continuar en primaria e incluirse en secundaria. De este modo los resultados en los informes PISA serían sustancialmente mejores, así como el desarrollo general de los alumnos. En algunos países se ha implantado a partir de la edad de diez años, encontrándose muchas más dificultades. Además, es necesario que los docentes reciban una buena formación, de manera que sean capaces de adaptarse a las necesidades y actitudes de los alumnos a través del nuevo sistema.

El Método Singapur ha llegado a España, aparentemente para quedarse, de la mano de las editoriales SM y Marshall Cavendish, siendo esta última distribuida oficialmente por Polygon Education en España. Además, la conocida Rubio también ofrece sus clásicos cuadernos enfocados hacia este método.

Figura 7.

Libro de texto de la editorial Marshall Cavendish para secundaria (Polygon Education, s.f.).



Actualmente en España no se encuentran disponibles libros de texto para secundaria que utilicen esta metodología, sin embargo, en Castilla y León se está llevando a cabo un proyecto para crearlos. Parece también que desde Polygon Education van a estar disponibles próximamente, ya que dentro de la aplicación móvil que incluyen sus libros (SUPERMAT) hay contenido para alumnos hasta segundo curso de educación secundaria.

CAPÍTULO 4. EL MÉTODO SINGAPUR PARA SOLVENTAR ERRORES EN PRIMERO DE ESO.

El objetivo de este capítulo es analizar los errores más comunes que cometen los estudiantes de primer curso de educación secundaria, evaluar las posibles causas de ellos y elaborar una propuesta de actividades basadas en el Método Singapur para reducir o solventar dichos errores.

1. EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN ESPAÑA. UN MODELO COMPETENCIAL.

En el artículo 12 del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo de 2022, se especifica que en el anexo II se fijan para cada materia las competencias específicas para cada etapa, así como los criterios de evaluación y los contenidos, que se enuncian como saberes básicos.

Además, en el artículo 13, el BOE (2022) concreta que en ese documento “se fijan los aspectos básicos del currículo que constituyen las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria a los que se refiere el artículo 6.3 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación”.

En concreto, en el anexo V se fijan las competencias, los criterios de evaluación y los contenidos del ámbito de las Ciencias Aplicadas, en el que se incluyen las matemáticas.

El BOE (2022) define saberes básicos como “los conocimientos, destrezas y actitudes que constituyen los contenidos propios de una materia o ámbito cuyo aprendizaje es necesario para la adquisición de las competencias específicas”.

Según el BOE (2022), el saber, la argumentación, la modelización, el razonamiento del espacio y del tiempo, la toma de elecciones, la previsión y control de la incertidumbre o la utilización conveniente de la tecnología digital son propiedades de las matemáticas, pero además la comunicación, la perseverancia, la organización y mejora de recursos, formas y proporciones o la creatividad.

El desarrollo curricular de las matemáticas se apoya en los objetivos de la etapa, prestando particular atención a la adquisición de las competencias clave establecidas en el perfil de salida del alumnado al término de la educación elemental. Las líneas primordiales en la definición de las competencias clave de matemáticas son la resolución de problemas y las destrezas socioafectivas.

La investigación en didáctica demostró que el rendimiento en matemáticas puede mejorar si se cuestionan los prejuicios y se desarrollan emociones positivas hacia las matemáticas. Sin

embargo, solucionar problemas no es solo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino que además es una de las principales maneras de aprender matemáticas. En la resolución de problemas resaltan procesos como su interpretación, la traducción al lenguaje matemático, la aplicación de tácticas matemáticas, la evaluación del proceso y la comprobación de la validez de las resoluciones.

El pensamiento computacional se encuentra estrechamente relacionado con la resolución de problemas. Este incluye el análisis de datos, la organización lógica de los mismos, la averiguación de soluciones en secuencias de pasos ordenados y la obtención de soluciones con indicaciones que logren ser ejecutadas por un instrumento tecnológico programable, una persona o una mezcla de las dos, lo que amplía la capacidad de resolución de problemas y promueve la utilización eficiente de recursos digitales.

Las competencias específicas suponen una profundización en relación con las adquiridas por el alumnado desde el área de Matemáticas durante la Educación Primaria, proporcionando una continuidad en el aprendizaje de las matemáticas que respeta el desarrollo psicológico y el desarrollo cognitivo del alumnado. Éstas están relacionadas entre sí y se agrupan alrededor de los cinco bloques competenciales, según su naturaleza: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación, y destrezas socioafectivas.

La adquisición de las competencias específicas durante esta fase se evalúa por medio de los criterios de evaluación y se desarrolla a través de la movilización de un grupo de saberes básicos que unen conocimientos, destrezas y actitudes. Dichos saberes se estructuran alrededor del sentido matemático, y se organizan en dos magnitudes: cognitiva y afectiva. Los sentidos, entendidos como el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio de ciertos contenidos, permiten utilizar los saberes básicos de manera funcional, pudiendo establecer conexiones entre los diferentes sentidos, de forma que es indiferente el orden de aparición de estos.

El sentido numérico se caracteriza por la capacidad de aplicación de los conocimientos sobre números y cálculo en diferentes contextos, así como por el desarrollo de habilidades de pensamiento basadas en la representación, la comprensión y la utilización flexible de los números y sus operaciones.

El sentido de la medida se centra en la comprensión y comparación de atributos de los objetos del mundo natural. Comprender y escoger las unidades idóneas para estimar, medir y comparar dimensiones, usar las herramientas adecuados para hacer mediciones, equiparar objetos físicos y entender las relaciones entre formas y medidas son los ejes centrales de este sentido. Asimismo, se introduce el concepto de probabilidad como la medida de incertidumbre.

El sentido espacial se centra en la comprensión de los aspectos geométricos de la naturaleza. Registrar y representar formas y figuras, definir sus propiedades, determinar las relaciones entre ellos, determinar sus posiciones, describir su movimiento, crear o descubrir imágenes de ellos, clasificarlos y hacer inferencias sobre ellos son elementos esenciales en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

El sentido algebraico otorga el lenguaje en el cual se comunican las matemáticas. Ver lo general en lo particular, reconociendo patrones e interrelaciones de dependencia entre variables y expresándolas por medio de diferentes representaciones, así como la modelización de situaciones matemáticas o del mundo natural con expresiones simbólicas son propiedades primordiales del sentido algebraico. Por causas organizativas, en el sentido algebraico se han incorporado dos apartados llamados Pensamiento computacional y Modelo matemático, que no son exclusivos del sentido algebraico y, por consiguiente, tienen que trabajarse de manera transversal durante todo el proceso de educación de la materia.

El sentido estocástico engloba el análisis y la interpretación de datos, la creación de conjeturas y la toma de decisiones desde la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios en una vasta pluralidad de situaciones diarias.

El sentido socioafectivo integra conocimientos, destrezas y actitudes para comprender y manejar los sentimientos, implantar y conseguir metas, e incrementar la capacidad de tomar decisiones conscientes e informadas, lo cual favorece la optimización del rendimiento del alumnado en matemáticas, al decrecimiento de reacciones negativas hacia ellas, a la promoción de un aprendizaje activo y a la erradicación de ideas preconcebidas en relación con el género o el mito del ingenio congénito imprescindible. Los saberes básicos que corresponden a este sentido deberían realizarse durante todo el currículo de manera explícita.

Las competencias específicas, los criterios de evaluación y los saberes básicos se crearon para facilitar el desarrollo de unas matemáticas inclusivas que permitan el planteamiento de tareas particulares o colectivas, en diferentes entornos, que sean significativas e importantes para los aspectos primordiales de las matemáticas. A lo largo de toda esta etapa debe fomentarse la utilización de herramientas tecnológicas en todos los aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que pueden facilitar el desarrollo de los procesos matemáticos y escapar de los procesos repetitivos y rutinarios.

1.1. El Perfil De Salida Del Alumnado

El perfil de salida del alumnado recoge la concreción en términos de competencias que debe tener un alumno al inicio y al final de la enseñanza básica. En él se identifican las competencias clave y el grado de desarrollo de éstas previsto al finalizar la etapa.

Referido a la enseñanza básica, el perfil de salida del alumnado es la herramienta en la que se concretan los principios y los fines del sistema educativo español en dicho periodo. Identifica y define las competencias clave que se espera que los alumnos hayan desarrollado al completar esta fase de su formación.

Además, en el BOE (2022) se establece que

En el Perfil, las competencias clave de la Recomendación europea se han vinculado con los principales retos y desafíos globales del siglo XXI a los que el alumnado va a verse confrontado y ante los que necesitará desplegar esas mismas competencias clave. Del mismo modo, se han incorporado también los retos recogidos en el documento *Key Drivers of Curricula Change in the 21st Century* de la Oficina Internacional de Educación de la UNESCO, así como los Objetivos de Desarrollo Sostenible de la Agenda 2030 adoptada por la Asamblea General de las Naciones Unidas en septiembre de 2015. (BOE, 2022, p.24)

La vinculación entre competencias clave y desafíos del siglo XXI es la que dará sentido a los aprendizajes, al acercar el colegio a situaciones, preguntas y retos de la vida diaria, lo cual, paralelamente, establecerá el punto de apoyo para promover situaciones de aprendizaje significativas, tanto como para el alumnado como para los docentes. Se desea asegurar que todo estudiante que supere exitosamente la educación elemental y, por consiguiente, alcance el Perfil de salida sepa utilizar los aprendizajes adquiridos para contestar a los primordiales retos a los que tendrá que encarar durante su vida.

Dichos retos exigen un alto nivel ético, ya que pueden suponer buscar el bienestar personal al mismo tiempo que se respeta el bien común. Requieren también ampliar la mirada para poder analizar problemas más globales. Todo esto requiere una mente compleja, capaz de tener pensamientos críticos y abiertos al mismo tiempo, además de tener la capacidad de empatizar con temas que no afecten directamente a la persona, asumiendo los valores de justicia social, equidad y democracia.

Según el BOE (2022):

Con carácter general, debe entenderse que la consecución de las competencias y los objetivos previstos en la LOMLOE para las distintas etapas educativas está vinculada a

la adquisición y al desarrollo de las competencias clave recogidas en este Perfil de salida, y que son las siguientes: competencia en comunicación lingüística (CCL), competencia plurilingüe (CP), competencia matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería (STEM), competencia digital (CD), competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA), competencia ciudadana (CC), competencia emprendedora (CE), y competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC). (BOE, 2022, p.26)

La adquisición de cada una de estas competencias favorece la adquisición de todas las demás. No hay una jerarquía entre ellas y no se puede establecer una correspondencia de ninguna con un área o materia en específico, sino que todas se encuentran en los distintos ámbitos y se desarrollan a partir de los aprendizajes que se dan en el conjunto de las mismas.

En lo referente al nivel de adquisición de estas competencias clave, se han definido para cada una de ellas un conjunto de descriptores operativos, que parten de los distintos marcos europeos de referencia que existen.

Al completar la Educación Primaria, el alumno o la alumna...	Al completar la enseñanza básica, el alumno o la alumna...
STEM1. Utiliza, de manera guiada, algunos métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea algunas estrategias para resolver problemas reflexionando sobre las soluciones obtenidas.	STEM1. Utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático en situaciones conocidas, y selecciona y emplea diferentes estrategias para resolver problemas analizando críticamente las soluciones y reformulando el procedimiento, si fuera necesario.
STEM2. Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar algunos de los fenómenos que ocurren a su alrededor, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, planteándose preguntas y realizando experimentos sencillos de forma guiada.	STEM2. Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar los fenómenos que ocurren a su alrededor, confiando en el conocimiento como motor de desarrollo, planteándose preguntas y comprobando hipótesis mediante la experimentación y la indagación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y las limitaciones de la ciencia.
STEM3. Realiza, de forma guiada, proyectos, diseñando, fabricando y evaluando diferentes prototipos o modelos, adaptándose ante la incertidumbre, para generar en equipo un producto creativo con un objetivo concreto, procurando la participación de todo el grupo y resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir.	STEM3. Plantea y desarrolla proyectos diseñando, fabricando y evaluando diferentes prototipos o modelos para generar o utilizar productos que den solución a una necesidad o problema de forma creativa y en equipo, procurando la participación de todo el grupo, resolviendo pacíficamente los conflictos que puedan surgir, adaptándose ante la incertidumbre y valorando la importancia de la sostenibilidad.
STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de algunos métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y veraz, utilizando la terminología científica apropiada, en diferentes formatos (dibujos, diagramas, gráficos, símbolos...) y aprovechando de forma crítica, ética y responsable la cultura digital para compartir y construir nuevos conocimientos.	STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de procesos, razonamientos, demostraciones, métodos y resultados científicos, matemáticos y tecnológicos de forma clara y precisa y en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos...), aprovechando de forma crítica la cultura digital e incluyendo el lenguaje matemático-formal con ética y responsabilidad, para compartir y construir nuevos conocimientos.
STEM5. Participa en acciones fundamentadas científicamente para promover la salud y preservar el medio ambiente y los seres vivos, aplicando principios de ética y seguridad y practicando el consumo responsable.	STEM5. Emprende acciones fundamentadas científicamente para promover la salud física, mental y social, y preservar el medio ambiente y los seres vivos; y aplica principios de ética y seguridad en la realización de proyectos para transformar su entorno próximo de forma sostenible, valorando su impacto global y practicando el consumo responsable.

Estos descriptores conforman, junto con los objetivos de la etapa, el marco referencial tomado como modelo para concretar las competencias específicas de cada materia, área o ámbito. Esta relación entre descriptores y competencias específicas fomenta que de la evaluación por competencias pueda inferirse el grado de adquisición de las competencias definidas en el perfil de salida, por lo que también la consecución de los objetivos de la etapa.

Puesto que las competencias se adquieren de forma secuencial y progresivamente, están incluidas en el perfil de los descriptores operativos del nivel esperado tras la Educación Primaria, facilitando la continuidad y coherencia entre ambas etapas educativas.

1.2. Competencias Específicas De Matemáticas y sus criterios de evaluación

Dentro de cada materia existen además una serie de competencias específicas que el alumno debe adquirir a lo largo del tiempo. Se exponen a continuación las destinadas a las asignaturas de matemáticas.

Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.

La resolución de problemas es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, ya que gracias a este proceso se construye el conocimiento matemático. Los problemas en diferentes contextos, reales o no, son catalizadores de conocimiento, puesto que las reflexiones necesarias para resolverlos ayudan a la construcción de los conceptos y a establecer conexiones entre ellos.

Desarrollar esta competencia implica utilizar el conocimiento matemático que poseen los alumnos en el contexto en el que se encuentre el problema. Para realizar esto, es necesario contar con herramientas de interpretación y modelización como diagramas o expresiones simbólicas, y con las técnicas y estrategias de resolución que permitan tomar decisiones y asumir el error como parte del proceso.

Esta competencia específica se corresponde con los descriptores del perfil de salida STEM1, STEM2, STEM3, STEM4, CD2, CPSAA5, CE3, CCEC4. Los criterios de evaluación específicos para ella que se establecen en el BOE (2022) son:

- 1.1 Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- 1.2 Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.

1.3 Obtener soluciones matemáticas de un problema, activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.

Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.

Analizar las soluciones que se obtienen al resolver un problema fomenta la reflexión crítica, tanto desde el punto de vista matemático como global, de forma que se ponen en valor muchos aspectos como la sostenibilidad, la igualdad, la no discriminación, etc. El razonamiento científico y matemático son las principales herramientas con las que cuenta el alumno para realizar esta valoración, pero también poseen herramientas como la lectura, la realización de buenas preguntas, la conciencia de progreso o la autoevaluación.

El desarrollo de esta competencia fomenta los procesos metacognitivos como la autoevaluación y la coevaluación, el uso de estrategias de aprendizaje autorregulado, las herramientas digitales o la verbalización, así como la selección de métodos para validar las soluciones.

Esta competencia específica se corresponde con los descriptores del Perfil de salida STEM1, STEM2, CD2, CPSAA4, CC3, CE3. El BOE (2022) establece los siguientes criterios de evaluación para esta competencia:

2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.

2.2 Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.).

Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.

El pensamiento crítico y el razonamiento aumentan la capacidad de percibir patrones o regularidades, facilitando el pensamiento de conjeturas.

Además, plantear problemas es un importante componente en el aprendizaje de las matemáticas, siendo considerada una parte esencial dentro de la materia. Esta habilidad implica poder generar nuevos problemas enfocados a una situación concreta o reformular un problema durante su proceso de resolución.

La creación de conjeturas, el planteamiento de problemas y su resolución se puede realizar utilizando materiales manipulativos, software, o diferentes representaciones,

trabajando de forma individual o grupal, y aplicando razonamientos tanto deductivos como inductivos.

Desarrollar esta competencia implica poder formular y comprobar conjeturas, examinar su validez y poder reformularlas para obtener nuevas soluciones que analizar, fomentando el uso de demostraciones. Al practicar el planteamiento de problemas, el alumno mejora su capacidad de razonamiento y reflexión al mismo tiempo que va construyendo su propio conocimiento, lo que implica la adquisición de un alto nivel de compromiso y entusiasmo hacia su propio proceso de aprendizaje matemático.

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, CD1, CD2, CD5, CE3. Los criterios de evaluación establecidos por el BOE (2022) para esta competencia son:

- 3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
- 3.2 Plantear variantes de un problema dado modificando alguno de sus datos o alguna condición del problema.
- 3.3 Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.

Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.

Tanto la resolución de problemas como el planteamiento de procedimientos están íntimamente relacionados con el pensamiento computacional, ya que utilizan la abstracción para identificar los puntos importantes y es necesario descomponer las tareas en procesos más simples para poder obtener una solución que pueda ser ejecutada con un sistema informático. Trasladar el pensamiento computacional al día a día implica crear una relación entre los fundamentos de la informática y las necesidades que tienen los alumnos.

Desarrollar esta competencia implica crear modelos abstractos a partir de situaciones cotidianas, automatizarlas y modelizarlas, además de transportar todos estos elementos a un lenguaje interpretable por un sistema informático.

Esta competencia específica está relacionada con los descriptores del Perfil de salida STEM1, STEM2, STEM3, CD2, CD3, CD5, CE3. Para evaluar esta competencia, el BOE (2022) establece los siguientes criterios:

- 4.1 Reconocer patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación computacional.

4.2 Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando y modificando algoritmos.

Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.

Conectar diferentes conceptos, procedimientos e ideas implica obtener una comprensión profunda y a largo plazo de los conocimientos, generando una amplia visión sobre ellos. Reconocer las matemáticas como un conjunto implica comprender las conexiones internas que tienen, tanto entre los bloques de conocimiento que se imparten en un mismo curso como entre los diferentes cursos.

El hecho de desarrollar esta competencia conlleva conectar nuevas ideas recientemente adquiridas con ideas previas, reconociendo y utilizando estas conexiones para resolver problemas, así como para entender que se construyen unas sobre otras para formar un todo.

Esta competencia específica está relacionada con los descriptores del Perfil de salida STEM1, STEM3, CD2, CD3, CCEC1. Los criterios de evaluación que se deben seguir para evaluar esta competencia, establecidos por el BOE (2022) son:

5.1 Reconocer las relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.

5.2 Realizar conexiones entre diferentes procesos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias previas.

Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.

Reconocer y aprovechar la relación que tienen las matemáticas tanto con otras materias como con la vida real aumenta el nivel del alumnado. Es crucial que los alumnos vivan la experimentación de las matemáticas en diferentes contextos, dando pie a valorar la contribución de la materia a la resolución de grandes problemas históricos.

Esta relación no debería limitarse a ciertos conceptos, sino ampliarse a las actitudes y los procedimientos para que la cultura matemática pueda ser transportada a otras materias y contextos. De este modo, desarrollar esta competencia puede suponer la ampliación de la capacidad para conectar ideas, conceptos y procedimientos matemáticos con otras muchas áreas y contextos, y utilizar las herramientas que las matemáticas proporcionan para resolver otro tipo de problemas.

Esta competencia específica está relacionada con los descriptores del Perfil de salida STEM1, STEM2, CD3, CD5, CC4, CE2, CE3, CCEC1. A la hora de evaluar esta competencia, el BOE (2022) establece los criterios:

6.1 Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.

6.2 Identificar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias resolviendo problemas contextualizados.

6.3 Reconocer la aportación de las matemáticas al progreso de la humanidad y su contribución a la superación de los retos que demanda la sociedad actual.

Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.

El modo en el que se representan las ideas, los conceptos y los procedimientos matemáticos es de vital importancia. Dentro de la representación existen dos facetas: la representación de un resultado o concepto, en el más puro sentido de la palabra, y la representación de los procesos que se realizan durante la práctica de las matemáticas.

Desarrollar esta habilidad implica adquirir un compendio de representaciones matemáticas que amplían la capacidad para interpretar y resolver problemas de la vida cotidiana.

Esta competencia específica está relacionada con los descriptores del Perfil de salida STEM3, CD1, CD2, CD5, CE3, CCEC4. Como guía para evaluar esta competencia, el BOE (2022) establece los siguientes criterios:

7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información.

7.2 Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.

Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.

Tanto saber comunicar como intercambiar ideas es una parte muy importante de la educación matemática y científica, en general. Las ideas pueden convertirse en objetos de reflexión a través de una buena comunicación. Comunicar estas ideas, conceptos o procesos contribuye a afianzar y generar conocimientos.

Desarrollar esta competencia implica saber expresar hechos, conceptos, ideas y procedimientos a través de cualquier medio, con convicción y precisión, utilizando un lenguaje adecuado.

Esta competencia específica está relacionada con los descriptores del Perfil de salida CCL1, CCL3, CP1, STEM2, STEM4, CD2, CD3, CE3, CCEC3. Los criterios de evaluación establecidos por el BOE (2022) para evaluar esta competencia son:

8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.

8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.

Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.

Resolver retos matemáticos debe ser una tarea gratificante. La destreza emocional dentro del aprendizaje matemático fomenta el bienestar del alumno y su interés.

Desarrollar esta competencia implica aprender a identificar y gestionar las emociones, reconocer las fuentes de estrés, obtener un pensamiento crítico y creativo, ser perseverante, saber adaptarse al entorno y las circunstancias, y mantener una actitud proactiva sea cual sea el reto que se presente.

Esta competencia específica está relacionada con los descriptores del Perfil de salida STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CPSAA5, CE2, CE3. Los criterios que establece el BOE (2022) para evaluar esta competencia son:

9.1 Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.

9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.

Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones y experiencias de los demás, participando activa y reflexivamente en proyectos en equipos heterogéneos con

roles asignados, para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y grupal y crear relaciones saludables.

Tan importante es trabajar los procedimientos matemáticos como los valores de respeto, igualdad o la resolución pacífica de conflictos al mismo tiempo que se resuelven problemas matemáticos. De este modo se puede desarrollar la destreza en la comunicación afectiva, la planificación, la motivación y la autoconfianza, así como aprender a normalizar situaciones de convivencia en igualdad de manera saludable.

Desarrollar esta competencia implica establecer y mantener relaciones positivas con los compañeros, mostrar empatía, trabajar en equipo y aprender a tomar decisiones responsables. Además, se fomenta abrir la mente y eliminar posibles ideas preconcebidas sobre las matemáticas, como la existencia de habilidades innatas para ellas.

Esta competencia específica está relacionada con los descriptores del Perfil de salida CCL5, CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3. Para que el docente pueda evaluar esta competencia, el BOE (2022) propone los siguientes criterios de evaluación:

10.1 Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa y tomando decisiones y realizando juicios informados.

10.2 Participar en el reparto de tareas que deban desarrollarse en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, asumiendo el rol asignado y responsabilizándose de la propia contribución al equipo.

1.3. Saberes básicos

Además, se incluyen los contenidos curriculares en forma de saberes básicos. La ley española establece los seis saberes básicos siguientes durante los tres primeros cursos de la educación secundaria (BOE, 2022):

El sentido numérico

1. Conteo

- Estrategias variadas de recuento en situaciones de la vida cotidiana.
- Adaptación del conteo al tamaño de los números dependiendo de la situación.

2. Cantidad

- Números grandes y pequeños: notación exponencial y científica y uso de la calculadora.
- Realización de estimaciones con la precisión requerida.
- Números enteros, fraccionarios, decimales y raíces en la expresión de cantidades en contextos de la vida cotidiana.

- Diferentes formas de representación de números enteros, fraccionarios y decimales, incluida la recta numérica.
 - Porcentajes mayores que 100 y menores que 1: interpretación.
3. Sentido de las operaciones
- Estrategias de cálculo mental con números naturales, fracciones y decimales.
 - Operaciones con números enteros, fraccionarios o decimales en situaciones contextualizadas.
 - Relaciones inversas entre las operaciones (adición y sustracción; multiplicación y división; elevar al cuadrado y extraer la raíz cuadrada): comprensión y utilización en la simplificación y resolución de problemas.
 - Efecto de las operaciones aritméticas con números enteros, fracciones y expresiones decimales.
 - Propiedades de las operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potenciación): cálculos de manera eficiente con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales tanto mentalmente como de forma manual, con calculadora u hoja de cálculo.
4. Relaciones
- Factores, múltiplos y divisores. Factorización en números primos para resolver problemas: estrategias y herramientas.
 - Comparación y ordenación de fracciones, decimales y porcentajes: situación exacta o aproximada en la recta numérica.
 - Selección de la representación adecuada para una misma cantidad en cada situación o problema.
 - Patrones y regularidades numéricas.
5. Razonamiento proporcional
- Razones y proporciones: comprensión y representación de relaciones cuantitativas.
 - Porcentajes: comprensión y resolución de problemas.
 - Situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos: análisis y desarrollo de métodos para la resolución de problemas (aumentos y disminuciones porcentuales, rebajas y subidas de precios, impuestos, escalas, cambio de divisas, velocidad y tiempo, etc.).
6. Educación financiera
- Información numérica en contextos financieros sencillos: interpretación.
 - Métodos para la toma de decisiones de consumo responsable: relaciones calidad-precio y valor-precio en contextos cotidianos.

El sentido de la medida

1. Magnitud
- Atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos: investigación y relación entre los mismos.
 - Estrategias de elección de las unidades y operaciones adecuadas en problemas que impliquen medida.
2. Medición
- Longitudes, áreas y volúmenes en figuras planas y tridimensionales: deducción, interpretación y aplicación.

- Representaciones planas de objetos tridimensionales en la visualización y resolución de problemas de áreas.
 - Representaciones de objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos.
 - La probabilidad como medida asociada a la incertidumbre de experimentos aleatorios.
3. Estimación y relaciones
 - Formulación de conjeturas sobre medidas o relaciones entre las mismas basadas en estimaciones.
 - Estrategias para la toma de decisión justificada del grado de precisión requerida en situaciones de medida.

El sentido espacial

1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones
 - Figuras geométricas planas y tridimensionales: descripción y clasificación en función de sus propiedades o características.
 - Relaciones geométricas como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica en figuras planas y tridimensionales: identificación y aplicación.
 - Construcción de figuras geométricas con herramientas manipulativas y digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada...).
2. Localización y sistemas de representación
 - Relaciones espaciales: localización y descripción mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
3. Movimientos y transformaciones
 - Transformaciones elementales como giros, traslaciones y simetrías en situaciones diversas utilizando herramientas tecnológicas o manipulativas.
4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica
 - Modelización geométrica: relaciones numéricas y algebraicas en la resolución de problemas.
 - Relaciones geométricas en contextos matemáticos y no matemáticos (arte, ciencia, vida diaria...).

El sentido algebraico

1. Patrones
 - Patrones, pautas y regularidades: observación y determinación de la regla de formación en casos sencillos.
2. Modelo matemático
 - Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico.
 - Estrategias de deducción de conclusiones razonables a partir de un modelo matemático.
3. Variable
 - Variable: comprensión del concepto en sus diferentes naturalezas.
4. Igualdad y desigualdad.
 - Relaciones lineales y cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana o matemáticamente relevantes: expresión mediante álgebra simbólica.

- Equivalencia de expresiones algebraicas en la resolución de problemas basados en relaciones lineales y cuadráticas.
 - Estrategias de búsqueda de soluciones en ecuaciones y sistemas lineales y ecuaciones cuadráticas en situaciones de la vida cotidiana.
 - Ecuaciones: resolución mediante el uso de la tecnología.
5. Relaciones y funciones.
- Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan.
 - Relaciones lineales y cuadráticas: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas.
 - Estrategias de deducción de la información relevante de una función mediante el uso de diferentes representaciones simbólicas.
6. Pensamiento computacional
- Generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas a otras situaciones.
 - Estrategias útiles en la interpretación y modificación de algoritmos.
 - Estrategias de formulación de cuestiones susceptibles de ser analizadas mediante programas y otras herramientas.

El sentido estocástico

1. Organización y análisis de datos
- Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucran una sola variable. Diferencia entre variable y valores individuales.
 - Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de variables cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas en contextos reales.
 - Gráficos estadísticos: representación mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones, etc.) y elección del más adecuado.
 - Medidas de localización: interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales.
 - Variabilidad: interpretación y cálculo, con apoyo tecnológico, de medidas de dispersión en situaciones reales.
 - Comparación de dos conjuntos de datos atendiendo a las medidas de localización y dispersión.
2. Incertidumbre
- Fenómenos deterministas y aleatorios: identificación.
 - Experimentos simples: planificación, realización y análisis de la incertidumbre asociada.
 - Asignación de probabilidades mediante experimentación, el concepto de frecuencia relativa y la regla de Laplace.
3. Inferencia
- Formulación de preguntas adecuadas que permitan conocer las características de interés de una población.
 - Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas: presentación de la información procedente de una muestra mediante herramientas digitales.

- Estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas.

El sentido socioafectivo

1. Creencias, actitudes y emociones
 - Gestión emocional: emociones que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas. Autoconciencia y autorregulación.
 - Estrategias de fomento de la curiosidad como la iniciativa como la perseverancia y la resiliencia en el aprendizaje de las matemáticas.
 - Estrategias de fomento de la flexibilidad cognitiva: apertura a cambios de estrategia y transformación del error en oportunidad de aprendizaje.
2. Trabajo en equipo y toma de decisiones
 - Técnicas cooperativas para optimizar el trabajo en equipo y compartir y construir conocimiento matemático.
 - Conductas empáticas y estrategias de gestión de conflictos.
3. Inclusión, respeto y diversidad
 - Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad.
 - La contribución de las matemáticas al desarrollo de los distintos ámbitos del conocimiento humano desde una perspectiva de género.

2. DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

El estudio de los errores que se cometen en el aprendizaje de las matemáticas ha tenido siempre un gran interés para los investigadores del campo. A lo largo de los años, tanto el análisis como la categorización de estos errores ha estado condicionado por los objetivos del currículo vigente, así como por las corrientes psicopedagógicas predominantes en el momento (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006).

Las teorías conocidas sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas convergen en la importancia de identificar los errores de los alumnos durante su proceso de aprendizaje, saber determinar las causas y adaptar los procesos de enseñanza conociendo esta información. El docente debe ser consciente de las ideas previas de las que parten los alumnos y utilizar las técnicas más adecuadas para lograr su aprendizaje.

Según Godino (2004), “hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica que no es válida desde el punto de vista de la institución escolar”. También aclara que “el término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que, si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja”.

Un punto muy influyente en el proceso de enseñanza-aprendizaje es la concepción de los errores por parte del profesorado. Quienes no han podido conocer la manera de desarrollarse que tienen las matemáticas pueden llegar a pensar que el error debe eliminarse a toda costa. Modificar este pensamiento implica un cambio en la relación que mantiene este tipo de docente con la materia.

También es determinante el modelo de aprendizaje, mientras que en un aprendizaje conductista el error debe ser corregido, dentro del constructivismo es una parte importante gracias a la cual se crea el conocimiento.

En el año 1980, Radatz realizó una revisión, tanto en Estados Unidos como en Europa, de muchas de las investigaciones sobre este tema llegando a las siguientes conclusiones:

La mayor parte del estudio de los errores se centran en los cometidos en el campo de la aritmética.

En Estados Unidos, el análisis teórico de errores posee continuidad, mientras que en los países europeos se han producido de manera esporádica y apenas tenían continuidad hasta esa década.

Hay una impresionante pluralidad de teorías e intentos de explicar las causas de los errores.

La investigadora italiana Raffaella Borasi realiza una investigación mucho más amplia sobre la posibilidad de utilizar como herramienta el análisis de los errores en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Recopila en su trabajo ideas de grandes teóricos como Kuhn, o Piaget. Una idea especialmente innovadora fue partir de los errores cometidos en la programación de ordenadores, la comprensión del lenguaje de programación utilizado y los contenidos trabajados (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006).

Todos los autores de trabajos de investigación relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas coinciden en la imperiosa necesidad de identificar los errores de los alumnos, hallar sus causas y establecer un sistema de enseñanza en base a esto. En consecuencia, los docentes deben ser flexibles tanto en sus ideas como en sus métodos para lograr que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea efectivo.

Dado que cada alumno es una persona individual y completamente diferente a cualquier otra, los problemas en el aprendizaje pueden llegar a ser extremadamente amplios, por lo que la categorización de éstos no es demasiado exhaustiva, sin embargo, varios autores agrupan los errores en los siguientes tópicos:

1. Dificultades relacionadas con la complejidad de los objetos matemáticos.

En matemáticas, la comunicación escrita se realiza, principalmente, a través de signos matemáticos mezclados con el lenguaje ordinario. Esto puede suponer varios conflictos de comprensión para los alumnos. Uno de ellos reside en la precisión y exactitud del lenguaje matemático, ya que en el lenguaje común (español, en este caso) se producen abusos morfosintácticos, ruptura de reglas gramaticales e incluso faltas de ortografía sin que esto afecte al buen entendimiento del receptor del mensaje. Además, el lenguaje matemático no comunica su significado, es decir, los signos no expresan su significado exacto a través de su nombramiento.

Un ejemplo de este caso es hallar “el contrario” del cuantificador universal, \forall , que no es $\neg\forall$, sino la negación del cuantificador existencial $\neg\exists$. Es decir, el opuesto de “para todos los casos” es “no existe un caso en el que”. Este tipo de lógica les resulta especialmente complicada aún a los alumnos de cursos superiores.

2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.

Continuando con el ejemplo anterior, no solo el significado tan específico de la simbología matemática dificulta a los alumnos el proceso de aprendizaje, sino que también influyen en gran medida los procesos de pensamiento matemático que se

requieren por su naturaleza lógica y, en ocasiones, poco intuitiva desde el punto de vista del alumnado.

El aspecto deductivo formal es una de las grandes trabas del aprendizaje de la materia. Abandonar las demostraciones formales en la enseñanza media es considerado adecuado por muchos, pero no significa eliminar el pensamiento lógico, que es intrínseco a esta ciencia. A pesar de que se plantea la materia de forma instrumental, es necesaria una destreza de cierto nivel para alcanzar los objetivos competenciales.

Se puede y se debe fomentar esta capacidad al mismo tiempo que se utilizan los métodos más intuitivos, la creación de conjeturas o la búsqueda de contraejemplos, sin caer en aplicar métodos rutinarios o lanzar ideas aleatorias sin sentido.

3. Dificultades relacionadas con los procesos de enseñanza.

Este tipo de obstáculos están relacionados con el centro escolar, el currículo implantado y las metodologías utilizadas.

El centro escolar debe organizarse de modo que se reduzcan las dificultades en el aprendizaje de la materia lo máximo posible. Engloba tanto elementos como el aula, los materiales disponibles, el horario del centro etc. como el agrupamiento en el aula.

Por otro lado, el currículo de matemáticas integra varias dificultades en sí mismo. Según algunos autores, los elementos básicos que generan problemas a considerar en el currículo serían:

- Las habilidades necesarias para desarrollar las capacidades matemáticas.
- El nivel de abstracción requerido según el curso escolar.
- La naturaleza de la lógica matemática en el centro de enseñanza.

Para finalizar, la metodología de enseñanza debe estar relacionada con los elementos del centro, así como con el currículo. Habría que considerar aspectos tales como el lenguaje utilizado en el aula, la secuenciación de las unidades, el ritmo de trabajo que pueden o deben mantener los alumnos en clase o los recursos que pueda utilizar el docente.

4. Dificultades asociadas a la motivación del alumnado

En ocasiones, a pesar de que las actividades propuestas por los docentes sean significativas y la metodología aplicada correcta, el alumnado no está receptivo a ellas porque no encuentra la motivación. En estas situaciones influye en gran medida la autoestima y el historial escolar del alumno.

A muchos estudiantes, incluidos los más brillantes, no les gustan especialmente las matemáticas. Otros alumnos incluso pueden llegar a padecer la denominada ansiedad matemática, sienten tensión y miedo hacia ella.

Muchas actitudes negativas están asociadas a estas causas. La ansiedad por finalizar una determinada tarea, el miedo o la vergüenza por el fracaso, etc. Según algunos estudios, estos impedimentos pueden tener un origen afectivo y repercuten en gran medida en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

5. Dificultades en el desarrollo cognitivo del alumno.

La cantidad de información sobre las condiciones del alumno que posea el personal docente propicia la adaptación de los métodos al alumnado. Conocer la naturaleza de los procesos de aprendizaje y del desarrollo intelectual en cada etapa permite establecer el nivel de dificultad y las cuestiones esperadas por los alumnos. Cada estadio del desarrollo intelectual posee un modo de razonamiento y debe tener unas tareas específicas para continuar el proceso, de modo que estén a un nivel que los alumnos puedan aceptar.

El problema que le conlleva este paso a los docentes es que existen diferentes teorías sobre el desarrollo cognitivo, que no están unificadas y que no se han centrado en exceso específicamente en las matemáticas.

Pueden ser considerados múltiples enfoques: el enfoque jerárquico del aprendizaje, el enfoque evolutivo, el enfoque estructuralista, el enfoque constructivista y el enfoque del procesamiento de la información, entre muchos otros.

Respecto a esto, un origen de las dificultades de aprendizaje de un alumno puede ser que no haya llegado a obtener el desarrollo psicológico que le corresponde por edad. La planificación a largo plazo del currículo debe tener en cuenta dos aspectos:

- Qué objetivos corresponden a cada etapa.
- En qué edad un alumno realiza un salto de etapa.

Además de estas cinco categorías, Godino (2004) puntualiza otros tres posibles tópicos:

6. Dificultades relacionadas con la falta de dominio de conocimientos anteriores.

También sucede que el alumno, aunque tenga un nivel evolutivo adecuado, no posea los conocimientos previos necesarios para aprender los contenidos nuevos del curso, de modo que la distancia entre el contenido anterior, ya interiorizado, y el nuevo es mucho mayor a la que debería ser, lo que supone una mayor dificultad a la hora de relacionar conceptos. La evaluación inicial puede ser una herramienta útil para el docente a la hora de detectar este tipo de problemas.

7. Dificultades asociadas a los contenidos matemáticos.

En matemáticas, la abstracción y la generalización son posibles causas de las dificultades de aprendizaje que tienen los alumnos. Analizando el contenido

matemático se puede prever su potencial grado de dificultad y así identificar las variables que se han de tener en cuenta para facilitar la enseñanza.

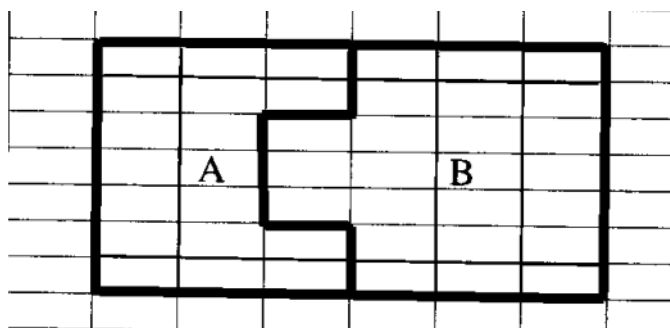
En ocasiones, la falta de conocimientos no es culpable del error, sino que el alumno utiliza un conocimiento no válido en esa situación. Cuando esto sucede se dice que existe un obstáculo. Este tipo de error es complicado de identificar, a pesar de que pueda ser recurrente.

Gracias a identificar los obstáculos pueden salir a la luz ciertas complejidades de los objetos matemáticos que fácilmente pasarían inadvertidas. Que el alumno supere el obstáculo supone que construya un significado personal del objeto que lo está provocando, de manera que aprenda a identificar cuándo una práctica es válida y en qué circunstancias esa misma práctica resulta incorrecta.

Godino (2004) utiliza el siguiente ejercicio para ejemplificar este tipo de situaciones:

Figura 8.

Representación para ejemplo de ejercicio (Godino, 2004)



“Un terreno se ha dividido como se indica en la figura. Señalar en cada caso la respuesta que consideres correcta:

- a) El área de la parcela A es la más grande.
Las dos parcelas tienen igual área.
El área de la parcela B es la más grande.
- b) El perímetro de la parcela A es el mayor.
Las dos parcelas tienen el mismo perímetro.
El perímetro de la parcela B es el mayor.”

Al analizar los resultados del ejercicio se obtuvieron un 90% de respuestas acertadas para el apartado a) y tan solo un 40% para el apartado b). Alrededor de un 40% de alumnos respondieron que el perímetro de la figura B era mayor que el de la figura A. Dichos alumnos consideran el área y el perímetro magnitudes relacionadas, de forma que, si una aumenta o disminuye, la otra también. Puede observarse fácilmente que la

parcela B es mayor a la parcela A, por lo que deducen que el perímetro de B también es superior al de A.

8. Dificultades relacionadas con la secuencia de actividades propuestas.

Es posible que el orden en el que el docente presenta las actividades a los alumnos no sea provechoso por diferentes causas:

- a) Si los contenidos que el profesor desea impartir no están bien estructurados.
- b) Si los materiales elegidos son confusos, mal graduados o repetitivos.
- c) Si la presentación del tema por parte del profesor es confusa o mal organizada.

El docente debe conocer las situaciones didácticas sobre las que puede actuar y elegir las mejores estrategias para impartir los conocimientos a los estudiantes. Las características de estas situaciones se nombran como variables didácticas, pudiendo ser enunciados, tareas, organización de las tareas, etc.

Otro factor que considerar es la edad del alumnado o sus conocimientos previos, sin embargo, esto no está en la mano del docente, por lo que no es considerado una variable didáctica.

Dado que las investigaciones en este campo son realmente numerosas, otros autores e incluso estos mismos, proponen otros tipos de clasificación de los errores. Por ejemplo, los autores Brousseau, David y Werner mencionan cuatro formas en las que pueden presentarse los errores (citado en Rico, 1995):

1. Los errores suelen ser frecuentemente el resultado de concebir incorrectamente aspectos fundamentales de las matemáticas.
2. Puede que el alumno presente un resultado correcto pero el procedimiento sea incorrecto, por sistematización. En estos casos es simple la identificación por parte del docente.
3. Los errores pueden darse cuando el alumno, además de utilizar procedimientos incorrectos, no comprende ciertos conceptos que el profesor no es capaz de identificar.
4. Aparecen también errores cuando el alumno, al no conocer la manera correcta de proceder, inventa un nuevo método para resolver la tarea propuesta.

En adición a esto, la mayoría de los investigadores o especialistas en el campo coinciden en que los errores tienen características comunes y son las siguientes (Rico, 1995):

- Surgen en el aula de manera espontánea.
- Son persistentes y particulares de cada alumno, además son difíciles de superar, ya que necesitan de reorganizar los conocimientos en la cabeza del alumno.
- Predominan los errores sistemáticos con respecto a los ocasionales. Estos errores sacan a relucir qué procesos mentales han llevado a cabo los alumnos para construir una comprensión errónea del concepto.
- El alumno no es consciente de su error, ya que para ellos no es obvio.

- Algunos errores residen en el procesamiento de la información que realiza el alumno. En ocasiones los alumnos reinventan sus métodos basándose en lo expuesto por el profesor.

3. PROPUESTA DE ACTIVIDADES BASADAS EN EL MÉTODO SINGAPUR

A partir del conocimiento adquirido durante el curso, de la experiencia vivida durante las prácticas y de la investigación sobre el Método Singapur y los errores más comunes de los alumnos realizada, se proponen en este apartado una serie de actividades basadas en el método y en las competencias que deben adquirir los alumnos durante el primer curso de ESO en la asignatura de matemáticas.

A lo largo del tercer capítulo del presente trabajo se exponen las ideas principales y el marco conceptual del Método Singapur, que puede resumirse en el siguiente esquema:

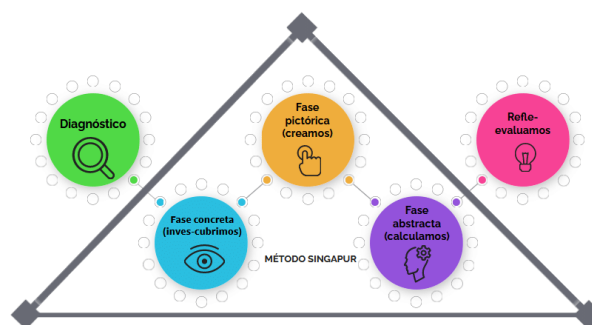
Figura 9.

Marco Conceptual Método Singapur (Web del maestro CMF, s.f.)



Figura 10.

Fases Método Singapur (García-Cárdenas, et. al, 2020).



Teniendo esto en cuenta y que las competencias específicas para la asignatura de matemáticas, a grandes rasgos, según el BOE (2022) son:

- Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento.
- Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas.
- Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma.
- Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos, para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.
- Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos.
- Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales.

- Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos.
- Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada.
- Desarrollar destrezas personales.
- Desarrollar destrezas sociales.

Además de los criterios de evaluación específicos para cada una de ellas.

3.1. La propiedad distributiva

Teniendo en cuenta todo lo mencionado anteriormente, la primera de las propuestas trata de una serie de actividades para solventar el problema de trabajar con la propiedad distributiva.

Este problema ha sido observado en numerosas ocasiones durante el periodo de prácticas de este curso. Los alumnos del primer curso de secundaria únicamente la aplican durante el periodo en el que se está trabajando la unidad didáctica correspondiente (Números naturales y divisibilidad), pero no continúan con esta práctica el resto del curso, por ejemplo, en la unidad dedicada a fracciones.

El objetivo de esta actividad es introducir a los alumnos el repaso de un concepto que conocen, pero probablemente no tengan afianzado, de manera que comiencen por un ejercicio palpable y concreto, continúen con un problema menos tangible y finalicen con el concepto en su forma más abstracta.

La propiedad distributiva puede ser enunciada del siguiente modo:

“La multiplicación de un número por una suma o una resta es igual a la suma o resta de los productos de este número por cada uno de los miembros que forman la suma o la resta”.

- Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la resta:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Actividad 1. Conteo De Bolígrafos.

Para la primera parte de la actividad, los alumnos deben dividirse en grupos de cuatro (formados por el profesor o por ellos mismos) y paso a paso deben rellenar la ficha que aparece en el anexo I, que será proporcionada por el docente a cada alumno.

En primer lugar, el profesor debe decirles que saquen del estuche todos los bolígrafos azules y negros que hayan traído a clase. Posteriormente, deben ordenarlos tal y como se indica en la imagen de la ficha del anexo I.

La pregunta que deben contestar a continuación es: ¿cómo averiguarías cuántos bolígrafos tenéis en la mesa sin necesidad de contarlos uno a uno?

El alumno debe rellenar la ficha detallando el paso a paso de las operaciones que va realizando.

La segunda parte de la actividad consiste en poner en común con los compañeros del grupo el método que ha utilizado cada uno, de manera que se pongan en común todas las ideas que hayan surgido para que escuchen diferentes maneras de pensamiento, al mismo tiempo que el alumno aprende a explicar cómo ha realizado su propia tarea.

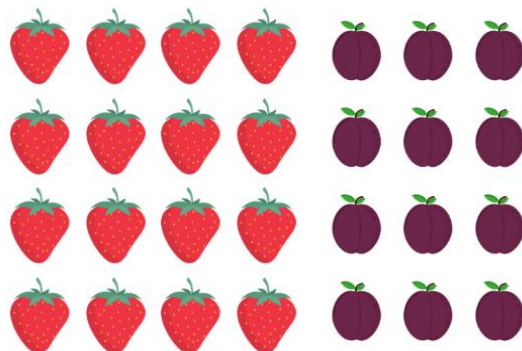
La última parte de esta actividad es ofrecer a un alumno de cada grupo la posibilidad de expresar su manera de resolver el ejercicio delante de todos los compañeros del aula, no solo de su grupo.

Actividad 2. El Problema De La Fruta.

Esta actividad no se realiza en grupos, sino en parejas. Deben completar la segunda ficha situada en el anexo I, que el docente les proporcionará a cada uno de los estudiantes.

El problema que solucionar es el siguiente:

Jorge y Alba han contado las fresas y las ciruelas que había encima de la encimera de la casa de Alba. La fruta estaba dispuesta del siguiente modo:



Cada uno ha calculado la solución de una forma diferente, pero ninguno ha contado una a una las piezas de fruta. ¿Se te ocurre qué solución ha podido dar cada uno? Compara las soluciones que has obtenido con las de tu compañero.

Actividad 3. Múltiples formas de representación.

En el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), uno de los principios más importantes es proporcionar a los alumnos múltiples medios de representación. Con esta última actividad, ese es el objetivo, que los alumnos conciban diferentes maneras de representar lo mismo.

El material necesario para realizar esta actividad son los denominados cubos de enlace o multilink. Este material manipulativo consiste en una serie de cubos de plástico de diferentes colores que pueden unirse unos a otros por varias de sus caras.

Figura 11.

Cubos de enlace.



La actividad consiste en que los alumnos deben rellenar la última ficha que aparece en el anexo I, comprobando con los cubos de enlace si sus operaciones son correctas o no.

3.2. Ecuaciones de primer grado

Otro de los grandes problemas que aparecen en este curso son las ecuaciones. El problema del álgebra no solo existe en el primer curso de secundaria, sino que los alumnos arrastran este contenido hasta el final de sus estudios de educación secundaria.

El principal problema suele ser, por un lado, la falta de conocimiento de los términos que se utilizan en este campo (concepto de incógnita, miembro, grado, etc.), y por otro lado la sistematización de las operaciones. En numerosas ocasiones se enseña a los alumnos a resolver ecuaciones “pasando los términos de un lado a otro del igual”, de modo que no son conscientes de la realidad de lo que están haciendo.

Actividad 1. Parte Por Parte.

El objetivo de esta actividad es interiorizar los conceptos que se comienzan a estudiar en esta unidad, como lo que es una ecuación o no, los miembros, el grado de un polinomio, etc.

Los alumnos pueden realizar esta actividad de manera individual o por parejas. El único material necesario será una ficha, entregada por el docente, que contenga una tabla como puede ser la siguiente:

¿Ecuación?	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas	Grado
$7x - 3 = 4x - 5$				
$6x + 2 = 5$				
$4a + 9 = 23$				
$x - y = 5x + y$				

El alumno debe identificar si la expresión propuesta es una ecuación o no, y rellenar los campos que sea posible dependiendo del tipo de expresión que piense que es.

La segunda parte del ejercicio consistirá en una exposición de los resultados de alumnos que se ofrezcan voluntarios, de manera que se repasen las características de los polinomios y las ecuaciones para todos los alumnos del aula.

Actividad 2. Balanceados.

Para la siguiente actividad se necesitarán varios pequeños cubos y varias pequeñas esferas de dos colores diferentes ambas formas. Se puede realizar con cualesquiera cuerpos diferentes, siempre que sean suficientes y de dos colores distintos. Además, el docente puede proporcionarles a los alumnos la ficha que aparece en el anexo II, o bien pueden ser ellos mismos los que dibujen la balanza en un folio.

Las esferas representan la incógnita que se ha de hallar, mientras que los cubos representan la unidad. El color indica el signo, tanto de la incógnita como de las unidades.

Para la primera parte de la actividad, el profesor debe proponer diferentes ecuaciones (de primer grado, en este caso) y los alumnos deben representarlas con los materiales del ejercicio. Un ejemplo de esto sería el siguiente:

Figura 12.

Balanza de ejemplo para álgebra.



En este caso, las figuras moradas tienen signo negativo y las verdes positivo.

La segunda parte de la actividad, con el mismo material, consiste en realizar el mismo proceso, pero además de plantear la ecuación los alumnos deben hallar la solución a ella. El alumno debe tener en cuenta que la balanza debe estar equilibrada en todo momento, por lo que, si desea añadir o quitar alguna pieza, debe hacerlo en ambos platillos.

Actividad 3. Equality Explorer.

El Explorador de Igualdades (Equality Explorer, en inglés) es una plataforma online para trabajar igualdades en general. En esta etapa puede ser especialmente útil para trabajar álgebra.

El enlace es el siguiente: https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer_es.html

Además, esta herramienta cuenta con varios niveles de abstracción y dificultad, desde jugar con frutas, fichas o animales hasta resolver problemas complejos.

Figura 13.

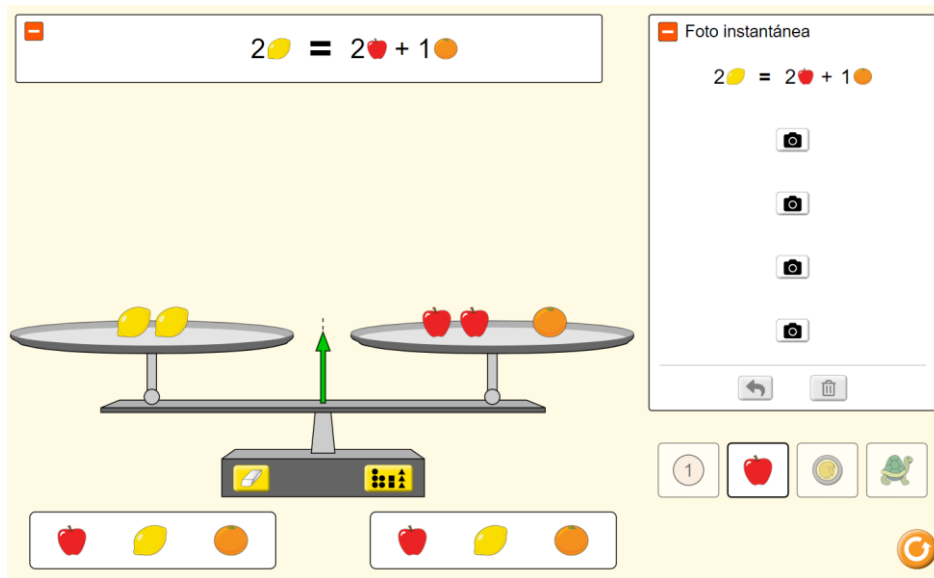
Explorador de igualdades (phet.colorado.edu).



En la pantalla “Básico” los alumnos pueden manipular diferentes objetos hasta descubrir la relación de igualdad que existe entre ellos. Por ejemplo, en la imagen inferior puede observarse cómo se ha hallado que dos limones pesan lo mismo que dos manzanas y una naranja.

Figura 14.

Explorador de igualdades. Modo Básico (phet.colorado.edu).

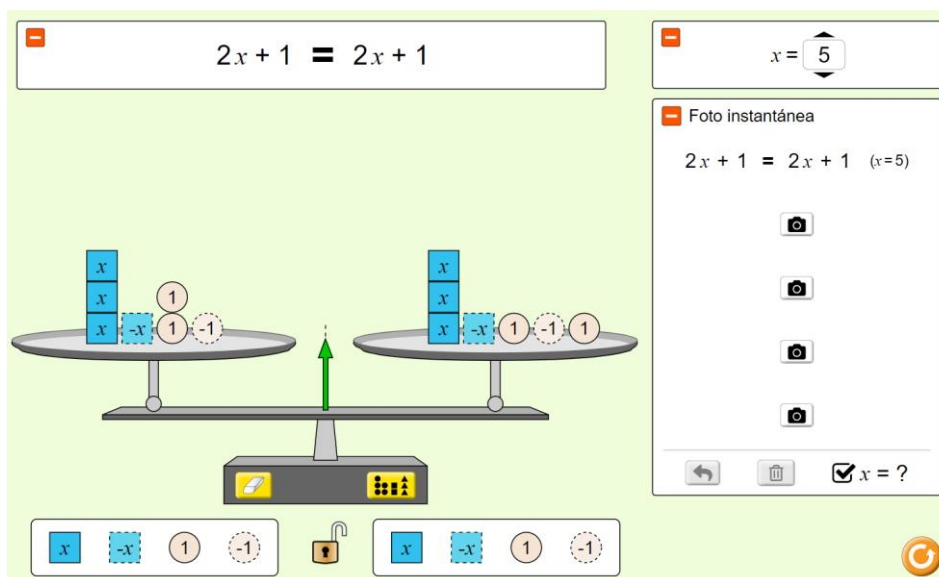


El apartado “Números” funciona igual, con la salvedad de que únicamente el alumno puede manipular las cifras 1 y -1.

El apartado “Variables” es muy útil como primera toma de contacto. En él, se puede establecer el valor deseado para la incógnita, y manipular la balanza del mismo modo que en la actividad anterior.

Figura 15.

Explorador de igualdades. Modo Variables (phet.colorado.edu).

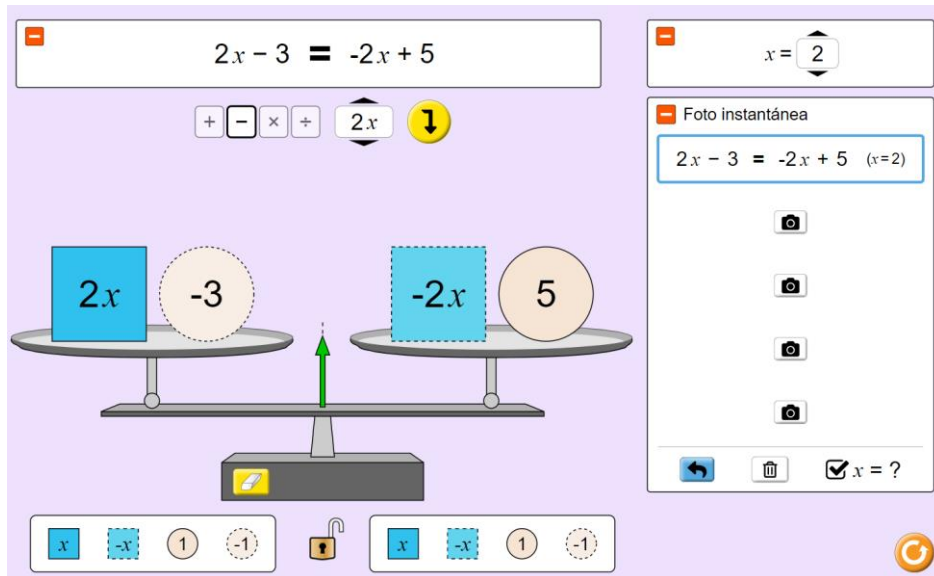


El siguiente apartado, “Operaciones”, es un gran recurso para trabajar con ecuaciones. Al igual que en el apartado anterior, se puede establecer al gusto el valor de la incógnita, después, puede plantearse una ecuación en la balanza con las herramientas dadas, y, para finalizar,

puedes realizar operaciones sobre los dos lados de la balanza para evitar su desequilibrio, del mismo modo que se resuelve una ecuación.

Figura 16.

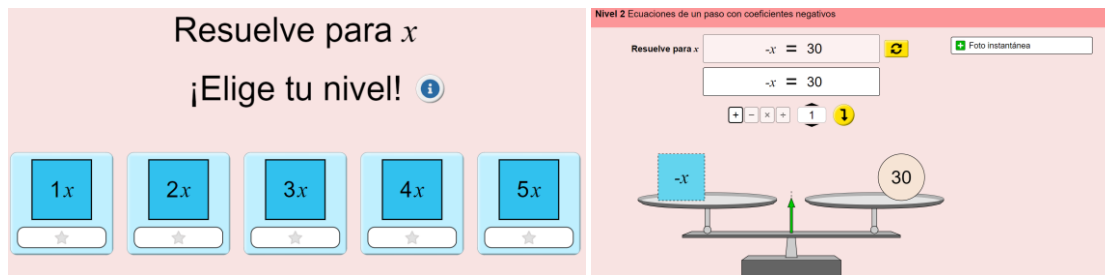
Explorador de igualdades. Modo Operaciones (phet.colorado.edu).



Para finalizar, la plataforma cuenta con el apartado “¡Resuélvelo!”, en el que se plantean ecuaciones acordes a un nivel seleccionado para que el jugador las resuelva.

Figura 17.

Explorador de igualdades. Modo Resuelve (phet.colorado.edu).



Para esta actividad, no es necesario más que un ordenador con conexión a internet para cada alumno, o para cada dos si no fuese posible.

Durante la primera parte de la actividad, el profesor puede presentarles la plataforma a los alumnos y dejarles un tiempo de exploración dentro de cada apartado.

Para realizar una segunda parte, el profesor propone realizar las actividades del último apartado, tomando capturas cada vez que un alumno resuelva correctamente una ecuación, para luego poder hacer una competición o ranking.

3.3. Triángulos

El buen conocimiento de los triángulos desde el inicio de la enseñanza secundaria es fundamental, ya que es un conocimiento básico necesario tanto para otros conceptos que se estudian en primer curso como para todos los cursos posteriores.

Otra área en el que los estudiantes tienen dificultades, en general, es la trigonometría, y muchos de estos errores que cometen es por la falta de conocimiento que poseen sobre triángulos.

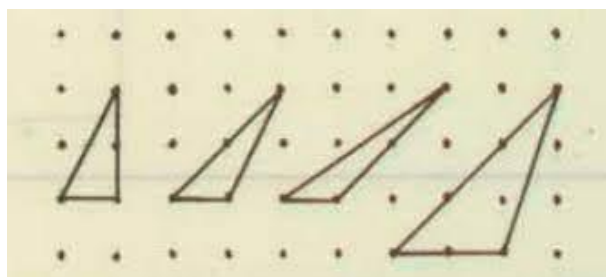
- Las características del triángulo que se estudian durante este curso incluyen:
- Clasificación de triángulos: según sus ángulos y según sus lados.
- Propiedades fundamentales del triángulo.
- Rectas y puntos notables.

Actividad 1. Descubriendo los geoplanos.

El objetivo de esta actividad es trabajar la clasificación de triángulos a través de los geoplanos. Para realizarla se necesita un geoplano cuadrado o isométrico por alumno y varias gomas elásticas.

Figura 18.

Triángulos en geoplano cuadrado (Matematicizando la realidad, 2014, <http://mates.aomatos.com/2014/12/>).



Los alumnos realizarán esta actividad de manera individual, colocando en su geoplano los seis tipos básicos de triángulos (equilátero, isósceles, escaleno y acutángulo, rectángulo, obtusángulo) e identificando lo que caracteriza a cada uno. Además, pueden identificar elementos tales como la base y la altura de los diferentes triángulos.

En una segunda parte de la actividad, los alumnos pueden jugar a alargar o disminuir la longitud de los lados o los ángulos y darse cuenta de qué forma varía el triángulo. Puede proponerse hallar el área de triángulos aparentemente diferentes pero que en realidad miden la misma superficie, ya que su base y su altura son las mismas.

Actividad 2. Retos con papel.

La papiroflexia es muy útil cuando de geometría se trata, además de que llama la atención de los alumnos y se puede hacer con materiales que tienen en casa.

Para trabajar tanto la propiedad fundamental de la suma de los ángulos del triángulo como sus rectas y puntos notables se puede utilizar la papiroflexia.

En la primera parte de la actividad, tanto el alumno como el docente romperán una hoja de papel en forma de triángulo, es importante que los alumnos comprueben que podría ser cualquier triángulo.

Una vez obtenido el triángulo, los alumnos marcarán sus ángulos para no perderlos de vista. Posteriormente, el docente les pedirá que rompan una a una los vértices del triángulo y los coloquen de la siguiente forma:

Figura 19.

Demostración suma de los ángulos interiores de un triángulo (Meavilla, 2016)

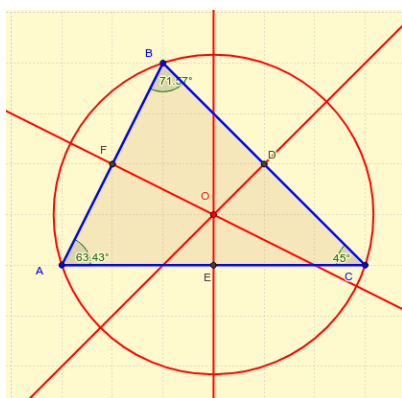


De este modo, se puede comprobar con un simple vistazo que al “juntar” todos los vértices de un triángulo se forma un ángulo de 180° .

Para la segunda parte de la actividad, los alumnos deberán recortar de nuevo un triángulo cualquiera, cuanto más grande mejor para facilitar los dobleces y el reconocimiento de puntos.

Figura 20.

Circuncentro (geogebra).



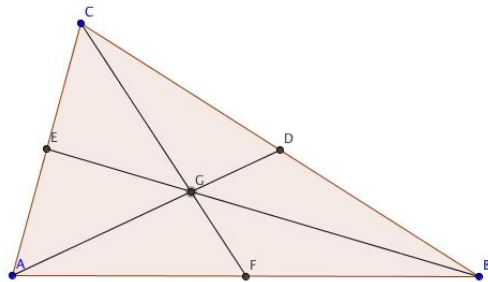
En primer lugar, se hallará el circuncentro del triángulo. Es el punto que equidista de sus vértices. Para hallarlo, basta con trazar la mediatriz de cada uno de los lados. En papiroflexia, para hallar la mediatriz de un segmento deben juntarse ambos extremos, de tal manera que quede uno sobre el otro, y realizar el doblez. Una vez realizado, se abre el papel y se puede marcar con un bolígrafo para verlo mejor. El circuncentro es el punto en el que se cruzan las tres mediatrices.

Para continuar, puede hallarse el incentro del triángulo. El incentro es el punto en el que se cortan las tres bisectrices de sus ángulos. Para hallar la bisectriz de un ángulo, puesto que es la línea que lo divide en dos, basta con unir ambos lados de cada ángulo y se trazará una línea

justo en la mitad. Una vez halladas las tres bisectrices, al marcar el punto donde se cortan se halla el incentro.

Figura 21.

Baricentro (geogebra).



El siguiente punto notable que puede hallarse es el baricentro. El baricentro o centroide es el punto en el que se cortan las tres medianas del triángulo. Una mediana es una recta que une el punto medio de uno de los lados con el ángulo opuesto del triángulo (no es necesariamente perpendicular al lado. Para realizarlo con papel se procedería del mismo modo que al hallar la mediatriz, teniendo cuidado de que el doblez

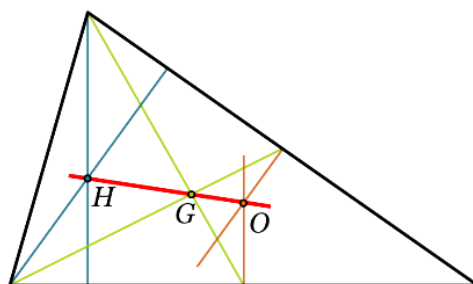
pase por el vértice contrario, pero esta vez el lado no tiene por qué doblarse sobre sí mismo, ya que la recta puede no ser perpendicular. Una vez obtenidas las tres medianas se tiene el baricentro.

Por último, se puede introducir el concepto de ortocentro, que es el punto en el que se cruzan las tres alturas de un triángulo. Una altura es una línea paralela a uno de los lados y que pasa por el vértice contrario. Del mismo modo que en los casos anteriores, se pueden doblar los lados del triángulo para conseguir las tres y marcar el punto en el que se cruzan. Este será el ortocentro.

Gracias al conocimiento de estos puntos notables, el docente puede darles una explicación a los alumnos de por qué hay tres puntos alineados de entre los que hemos marcado. El ortocentro, el circuncentro y el baricentro forman la recta de Euler.

Figura 22.

Recta de Euler (Wikipedia).



alturas	H : ortocentro
medianas	G : centroide
mediatrices	O : circuncentro

3.4. División de fracciones

Otro de los procedimientos donde se producen errores de manera más recurrente, que se plasman tanto en las prácticas como en la literatura, es la división de fracciones.

El procedimiento habitual que se sigue en la mayoría de los colegios españoles a la hora de enseñar a dividir fracciones, tanto en primaria como en secundaria, es el siguiente:

- División de una fracción entre otra fracción:

Se realiza el producto del numerador de la primera fracción y el denominador de la segunda. Este producto forma el numerador de la fracción resultante. Se realiza el producto del denominador de la primera fracción y el numerador de la segunda, de modo que el resultado es el denominador de la fracción final.

Habitualmente, estos pasos se resumen como “multiplicar en cruz”.

- División de un número entre una fracción:

Se considera el número como una fracción cuyo denominador es la unidad y se procede como en el caso anterior.

El error cometido por los alumnos, mayoritariamente, viene dado por el carácter memorístico de este procedimiento. El alumno no visualiza lo que realmente realiza mediante estas operaciones, por lo que, si su memoria falla, erra.

Para tratar de solventar esto, se propone la siguiente actividad.

Actividad 1. Dividiendo con barras.

Esta actividad se realiza de forma individual, y es necesario que cada alumno posea al menos cinco copias de las fichas que se muestran en el anexo III. Las fichas contienen una serie de rectángulos que representan fracciones. El primero representa la unidad, y a partir de él se representan medios, tercios, cuartos, etc. hasta la última barra, que está dividida en doce partes iguales. Los alumnos deben recortar los rectángulos de las fichas.

En primer lugar, se realizarán divisiones de números entre fracciones. Ejemplo:

Realizar la división $3 : \frac{1}{2}$

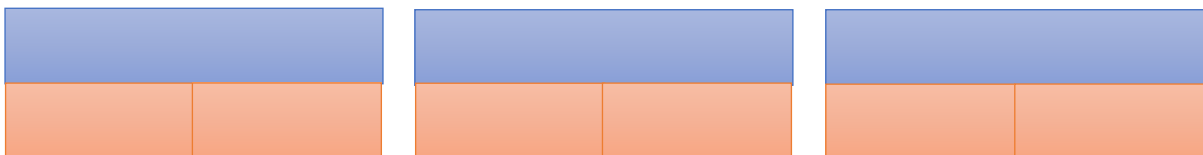
En primer lugar, el alumno debe colocar tres barras unidad en su pupitre, del siguiente modo:



La pregunta que se realizan los alumnos al operar una división cualquiera, como 20 entre 5, suele ser ¿cuántas veces cabe 5 dentro de 20? Esto es un concepto arrastrado de primaria.

Análogamente los alumnos deben preguntarse ¿cuántas veces cabe $\frac{1}{2}$ dentro de 3?

Para responder a esta cuestión, simplemente deben coger las barras que representan $\frac{1}{2}$ y colocarlas de la siguiente manera:



Es fácil identificar que dentro de 3 unidades caben 6 barras de $\frac{1}{2}$, por tanto, la respuesta a la operación $3 : \frac{1}{2}$ es 6.

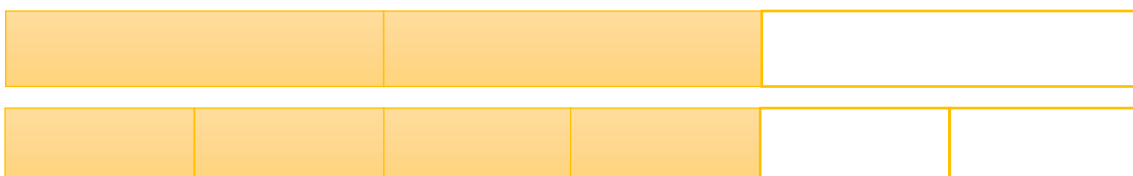
Análogamente se puede realizar el proceso de división de una fracción entre otra. Por ejemplo:

Realizar la división $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$

En primer lugar, se sitúan las barras representantes de $\frac{1}{3}$, en este caso solo son necesarias 2 de ellas:



A continuación, se colocan las barras que representan un sexto, y se comprueban cuántas de ellas necesitamos para cubrir los dos tercios.



Se necesitan cuatro barras de $\frac{1}{6}$ para cubrir $\frac{2}{3}$. Por tanto, el resultado es 4.

Para completar este ejercicio, el docente puede proponer el siguiente problema:

Alicia y Miguel se han hecho un bocadillo de barra del mismo tamaño. A Alicia, como es más mayor, le corresponden $\frac{2}{3}$ del bocata, y el resto es para Miguel. Como Bea ha olvidado su bocadillo en casa, Alicia le ha compartido la mitad de su parte.
¿Cuánta fracción de bocadillo ha comido Bea?

De este modo se les introduce un problema en el que, a partir de sus conocimientos deben averiguar cómo dividir una fracción entre un número.

CONCLUSIONES

La educación matemática es un campo especialmente importante y que ha generado debate a lo largo de muchos años. Ha sido vista como un camino hacia el éxito, a pesar de que cuenta con detractores.

En los comienzos de este campo, la educación matemática era mecánica y memorística, sin ningún tipo de pensamiento crítico hacia los conceptos. Hoy en día ha habido un claro cambio de enfoque para llevar la educación matemática hacia la creatividad y la resolución de problemas.

Un claro ejemplo de esto es la extensión del sistema de enseñanza de las matemáticas singapurense, el Método Singapur. La aplicación del Método requiere de gran formación, ya que no es a lo que en España se está acostumbrado, pero ha resultado ser efectiva en muchas ocasiones, especialmente cuando se aplica desde edades tempranas.

Una de sus características, la utilización de diversos materiales (no necesariamente el libro de texto), facilita la comprensión de muchos de los conceptos por parte de los alumnos. Además, los conceptos abstractos son asimilados y comprendidos con menor dificultad, gracias a la aplicación del enfoque C-P-A. El trabajo en grupo y la verbalización de las ideas potencian todas estas bondades del Método aún más.

A pesar de los detractores con los que cuenta este método, hay multitud de estudios que demuestran su eficacia. Han logrado las metas planteadas, además de conseguir un ambiente mucho más agradable en las aulas de matemáticas y una mejora de la actitud hacia ellas por parte de los alumnos.

El problema de la actitud es uno de los muchos obstáculos con los que cuentan los alumnos del primer curso de secundaria, quienes además de encontrarse en una etapa de crecimiento personal bastante complicada, deben lidiar con la nueva situación académica.

El Método Singapur puede ser especialmente útil para hacerles la transición más sencilla, ya que se crea un ambiente distendido en el aula, mejora la actitud de los alumnos hacia la materia y favorece la comunicación entre los alumnos. Este último punto es especialmente importante en este curso, ya que es muy probable que muchos de los alumnos no se conozcan, al proceder de distintos centros.

En resumidas cuentas, el Método Singapur posee las cualidades necesarias para solucionar la mitad de los problemas de tránsito entre la primaria y la secundaria que poseen los alumnos.

Además, a partir del curso 2022/2023 se aplican los nuevos contenidos curriculares que aparecen en Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE), lo que facilitará la implantación del Método en colegios e institutos españoles.

BIBLIOGRAFÍA

- Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo. *Villa María: Universidad Nacional de Villa María*, 21-31.
- Andrade-Molina, M. (2022). Una breve historia de la educación matemática. *Historia De La Educación*, 40(1), 139–156. <https://doi.org/10.14201/hedu202140139156>
- Cadenas Sánchez, C., y Huertas-Delgado, F. J. (2013). Informe PISA en España: un análisis al detalle. *Campus Educación Revista Digital Docente* (2019, septiembre 10). Transición de Primaria a Secundaria. Aspectos a considerar para enfrentarse al cambio [Web log post]. <https://www.campuseducacion.com/blog/revista-digital-docente/transicion-de-primaria-a-secundaria/?cn-reloaded=1>
- Daniel (2021, octubre 3). Educación en Singapur: Las claves del éxito de uno de los sistemas educativos más avanzados del mundo [Web log post]. <https://asiadonde.com/educacion-en-singapur/>
- EDUCACIÓN 3.0 (s.f.). *5 claves para facilitar el paso de Primaria a Secundaria a los estudiantes*. <https://www.educaciontrespuntocero.com/familias/paso-de-primaria-a-secundaria/>
- Font, V. (2003). Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 249-279.
- Gálvez, T. (2012). *Guía de Singapur*. Un poco de historia de Singapur. <https://www.guiadesingapur.com/singapur/un-poco-de-historia/>
- Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf
- Kline, M. (1976). «3- El origen de la Matemática Moderna». *El Fracaso de la Matemática Moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* ISBN 968-23-1662-6.
- Llega a los colegios de España el método revolucionario de Singapur para aprender matemáticas. (9 de enero de 2019). *La gaceta de Salamanca*. <https://www.lagacetadesalamanca.es/hemeroteca/llega-colegios-espana-metodo-revolucionario-singapur-aprender-matematicas-FEGS187417>
- López, S. (2014, noviembre 9). Estructura del sistema educativo de Singapur [Web log post]. <http://sistemaseducativosdelmundo.blogspot.com/2014/11/estructura-del-sistema-educativo-de.html>
- Matemáticas Método Singapur para España. (2011). *Características del “Método Singapur”*. <https://www.metodosingapur.com/caracteristicas-metodo-singapur>

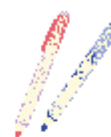
- Matemáticas Método Singapur para España. [2] (2011). *La Estrategia de Resolución con Modelado de Barras*. <https://www.metodosingapur.com/modelado-de-barras-singapur>
- Meavilla, V., Oller, A.M. (2016). *Suma de los ángulos interiores de un triángulo. Historia y didáctica*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.18, n.1, pp. 95-110. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/23560/pdf/72966>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2019). *Preguntas frecuentes sobre PISA 2018*. <https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:63375528-1716-4821-890e-69ae6fac36ef/faqspisa-esp.pdf>
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (s.f.). *TIMSS*. <https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss.html>
- OCDE. (1991). *Escuelas y calidad de la enseñanza. Informe Internacional*. Editorial Paidós.
- Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) (2018). *PISA Publications*. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_SGP.pdf
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (s.f.). *Nuestra historia*. <https://www.oecd.org/60-years/>
- Polygon Education. (s.f.). *MATEMÁTICAS MÉTODO SINGAPUR PARA SECUNDARIA*. <https://www.polygoneducation.com/matematicas-singapur/>
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 76, de 30 de marzo de 2022. <https://www.boe.es/boe/dias/2022/03/30/pdfs/BOE-A-2022-4975.pdf>
- Rico, L, Kilpatrick, J. & Gómez, P., (1998). Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.
- Ruiz, A. (2003). *Historia y Filosofía de las Matemáticas*. EUNED.
- Satué, A. (2019). *Método Singapur, una aproximación a su enseñanza de las matemáticas*. Universidad de Zaragoza (Campus de Huesca). Recuperado de <https://zagan.unizar.es/record/85726/files/TAZ-TFG-2019-1454.pdf>
- SM impulsa en España el método Singapur de aprendizaje de matemáticas. (5 de junio de 2018). *Magisterio*. <https://www.magisnet.com/2018/06/sm-impulsa-en-espaa%C2%B1a-el-matodo-singapur-de-aprendizaje-de-matematicas/>
- TIMSS & PIRLS International Study Center (2021). *TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science*. https://timss2019.org/reports/?_gl=1%2A1mqzw4r%2A_ga%2AOTEwMzYyODM2LjE2

[NTM1NjcwNDY.%2A_ga_L2FMXN42HR%2AMTY1MzU2NzA0NS4xLjAuMTY1MzU2NzA0NS4w](#)

ANEXOS

Anexo I. Actividades sobre la propiedad distributiva.

ACTIVIDAD 1



¿Cuántos bolígrafos hay en total?

1. Ordenad los bolígrafos de la mesa en filas y columnas, separados por colores.



2. ¿Cómo averiguarías el número de bolis que tenéis sin tener que contarlos uno por uno? Describe el proceso.

3. Comprueba, contando uno a uno, que tus operaciones son correctas.

ACTIVIDAD 2

¿Cuánta fruta tenemos?

Jorge y Alba han contado las fresas y las ciruelas que había encima de la encimera de la casa de Alba. La fruta estaba dispuesta del siguiente modo:



Cada uno ha calculado la solución de una forma diferente, pero ninguno ha contado una a una las piezas de fruta. ¿Se te ocurre qué solución ha podido dar cada uno? Compara las soluciones que has obtenido con las de tu compañero.

ACTIVIDAD 3

¡Vamos a operar!

Intenta aplicar, cuando sea posible, las técnicas utilizadas en las dos actividades anteriores, comprobando con los cubos de enlace si tus operaciones son correctas.

$$8 \cdot 4 - 8 \cdot 3 =$$

$$5 \cdot (4 + 2) =$$

$$2 \cdot (26 - 16) =$$

$$12 \cdot 5 + 7 \cdot 5 =$$

$$17 \cdot 2 + 10 =$$

$$20 : (20 - 10) =$$

$$(10 - 8) \cdot 4 =$$

$$(12 - 6) : 2 =$$



Anexo II. Actividades sobre álgebra.



Anexo III. Actividades sobre fracciones.

