UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento Matemática Aplicada

Diseño de una programación dinámica en orden a impartir Matemáticas en Bachillerato

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Ángel Gumiel Correa

Tutor/: Cesáreo Jesús González Fernández

Valladolid, Julio 2022

Contenido:

SECCIÓN 1:

INTRODUCCIÓN

1. Introducción

En el artículo 6 de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, se define el currículo como la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje de cada una de las enseñanzas y etapas educativas. Dichos elementos son los siguientes:

a) Los **objetivos** que pretenden alcanzarse en cada etapa educativa.
b) Las **competencias,** capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.
c) Los **contenidos,** conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias y ámbitos, en función de las etapas educativas o los programas en que participe el alumnado.
d) Los e**stándares de aprendizaje evaluables**, que concretan lo que el estudiante debe saber, comprender y saber hacer en cada asignatura.
e) **Los criterios de evaluación,** responden a lo que se pretende conseguir en cada asignatura.
f) **La metodología didáctica**, conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por el profesorado con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado.

En esta misma ley se establecen las competencias que corresponden al Gobierno, al Ministerio de Educación y las Administraciones Educativas respectivamente.

Los distintos niveles de concreción curricular que se nos presentan son:

Primer Nivel: El correspondiente al diseño curricular dado por el ministerio de educación. Plantea los elementos curriculares, los objetivos generales de las distintas etapas, las definiciones de las diferentes áreas y los objetivos y bloques de estas mismas. Una vez establecido el currículo básico, es competencia de la Comunidad Autónoma de Castilla y León el completar el currículo para ser aplicado a los centros.

Segundo Nivel: El desarrollo curricular en este nivel es competencia de los centros educativos. Corresponde al equipo docente de cada centro el adecuar la normativa establecida en el primer nivel atendiendo a las características particulares del centro. Con este fin los centros elaboran un Proyecto Curricular de Centro, en el que se recogen los proyectos de cada Etapa, y dentro de éstos las programaciones didácticas de cada una de las enseñanzas impartidas.

Tercer Nivel: Es el último nivel de concreción curricular, en el cual se deben adecuar los proyectos anteriores al aula. Para lograr esto cada docente elabora una programación de aula, concretando así la programación de departamento del nivel anterior. Esta programación va ya dirigida a un grupo concreto de alumnos con sus características particulares.

Como podemos ver con esta breve introducción, la programación didáctica es parte de un conjunto de documentos sin cuyo contexto no tendría sentido. El objetivo que busco en este TFM es elaborar una programación didáctica para un curso de segundo de Bachillerato, así como dos de las unidades didácticas de dicha programación a modo de ejemplo. Como contexto en el cual elaborar esta programación he elegido el I.E.S. Hoces del Duratón, centro en el que he realizado las prácticas, de modo que pueda enmarcar la programación didáctica a elaborar dentro del Proyecto Educativo de Centro al que mi tutor me ha facilitado el acceso. Así mismo, he decidido desarrollar la programación enmarcada dentro de la LOMCE, ya que pese a estar ya derogada, durante el curso 2021-2022 en el que realicé las prácticas el currículo aún se encuentra marcado por la LOMCE.

SECCIÓN 2:

PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA

2. Programación didáctica

2.1. Marco legal

En este trabajo desarrollaré una programación didáctica para la materia de Matemáticas II, perteneciente al curso de 2º de bachillerato de la modalidad de ciencias, contextualizado en la Comunidad de Castilla y León.

Como ya he mencionado, la ley educativa que seguiré será la LOMCE, más concretamente el marco legal será el siguiente:

- ORDEN EDU/888/2009, de 20 de abril, por la que se regula el procedimiento para garantizar el derecho del alumnado que cursa enseñanzas de educación secundaria obligatoria y de bachillerato, en centros docentes de la Comunidad de Castilla y León, a que su dedicación, esfuerzo y rendimiento sean valorados y reconocidos con objetividad.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, del BOE que establece el currículo básico de la ESO y del Bachillerato por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero del BOE.
- ORDEN EDU/363/2015 del 4 de mayo del BOCYL por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.
- Documentos públicos del I.E.S. Hoces del Duratón (PEC, PGA y RRI).

2.2. Introducción contextual

El I.E.S. Hoces del Duratón está ubicado en el pueblo de Cantalejo, en la zona nordeste de la provincia de Segovia, en el que viven alrededor de 3500 habitantes. Acoge a alumnos de los pueblos de los alrededores (a través del transporte escolar) y de la propia población.

http://ieshocesdelduraton.centros.educa.jcyl.es/sitio/upload/img/Panoramica_Instituto_Cantalejo2.jpg

La comarca es atravesada por la por la C-112 y la C-601, ambas en muy buen estado; hay otras carreteras menores que la recorren, la mayoría de las cuáles no presentan ese buen estado. Además, se encuentra limitada con Burgos; su altitud media es de uno 1000 metros y tiene una red fluvial importante, destacando el río Duratón.

El clima es mediterráneo continental, con veranos cortos y calurosos. Los inviernos son largos y fríos. Las precipitaciones a lo largo del año no son ni muy abundantes ni numerosas.

En el plano geográfico, la comarca donde se sitúa el IES Hoces del Duratón es característica por la fuerte emigración que sufrió en los años del desarrollo industrial de las grandes ciudades.

El número de habitantes de Cantalejo ha fluctuado en los últimos años, aumentando desde 3227 en 1991 a 4007 en 2012, y disminuyendo de nuevo hasta 3562 en 2020. Se muestra una clara tendencia al envejecimiento de la población. Esto es debido a la menor tasa de natalidad y a la mayor esperanza de vida. Es propio de una sociedad desarrollada y, en particular, de la española. Se pueden observar datos similares respecto a las localidades de Turégano, Fuenterrebollo, Sepúlveda, etc.…

Respecto al análisis sociocultural, según el PEC:

La comarca vive fundamentalmente de la agricultura (exportaciones agrícolas pequeñas) y de la ganadería (ganado porcino), con un amplio sector de servicios centrados, sobre todo, en las localidades de Sepúlveda, Turégano y Cantalejo.

Los productos que más se cultivan son la remolacha, el girasol, los cereales, la cebada (sobre todo) y la patata. La mayor parte de los agricultores son propietarios de las tierras que trabajan, siendo estos muy pocos los que las tienen arrendadas.

En cuanto al resto de los sectores, se distribuyen de la siguiente manera (atendiendo a la información proporcionada por los ayuntamientos):

- Sector Industrial: 41,14 … 09,68%
- Sector Construcción: 53,89 … 12,68%
- Sector Comercio: 91,29 … 21,48%
- Sector Servicios: 238,68 … 56,16%

En la comarca, el nivel cultural es medio-bajo, predominando en los estudios primarios en la población. El índice de analfabetismo es también muy bajo.

En los últimos años se ha registrado una elevada llegada de inmigrantes a la población, procedente de diferentes orígenes y que ha contribuido en el aumento del censo de los pueblos, además de generar una serie de necesidades educativas a las que los centros deben dar respuesta. Dichos inmigrantes suelen abandonar sus países por razones socioeconómicas. Las actividades laborales más frecuentes entre los hombres son: obreros en la construcción, granjas de cerdos, pastoreo, mataderos. No se muestran exigentes con las condiciones de trabajo, puesto que su objetivo prioritario es conseguir el primer permiso de residencia y trabajo. Con el tiempo cambian de profesión y de lugar de residencia a menudo sí que buscan una mejoría en sus empleos. La situación laboral en las mujeres es aún más precaria, ya que sus empleos suelen estar relacionados con tareas domésticas (cuidado de niños, limpieza, trabajos en hostelería...) y, en la mayoría de los casos, sin completar la jornada laboral, lo cual añade dificultades para legalizar su situación en nuestro país. Aunque los padres vienen primero en busca de trabajo, luego acuden esposas e hijos, en régimen de reagrupamiento familiar. Incorporándose éstos últimos al instituto en cualquier momento del curso; dificultando tanto su integración social como la escolar.

La población búlgara tarda poco tiempo en reunir a su familia y muchos de ellos vienen, porque ya tienen algún familiar en nuestro país. Su idea es establecerse y quedarse aquí, por norma general.

Los inmigrantes hispanoamericanos, suelen tener asumido que, cuando salen de su país, lo hacen para no volver.

En cuanto a la escolarización, suelen valorarla como algo positivo en las primeras etapas, pero, según van avanzando los cursos y aumentando las dificultades académicas, se produce un abandono progresivo.

En cuanto a los servicios educativos de la zona, en la mayoría de los pueblos existe una escuela, en la que se imparte Educación Primaria.

En Turégano y Sacramenia se imparte además el primer ciclo de la ESO y en algunos municipios se imparte Educación de Adultos pero en horario de tarde.

Respecto a la clase en particular, consta de 25 alumnos de segundo de Bachillerato, entre los que podemos destacar 6 alumnos repetidores y una alumna con TDAH.

2.3. Competencias básicas

En este apartado desarrollamos desde una perspectiva general las competencias clave que se trabajarán a lo largo del curso. Para ello nos basamos en la ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero del BOE:

- **Comunicación lingüística (CL):**
  Es el resultado de la acción comunicativa, en las cuales el individuo interactúa con otros interlocutores o a través de textos. Es un instrumento fundamental para la socialización y el aprovechamiento de la experiencia educativa. Más concretamente dentro del contexto de nuestra asignatura, el alumnado deberá ser capaz de utilizar el lenguaje matemático de forma precisa así como ser capaz de verbalizar los razonamientos y procesos necesarios de forma comprensible.
- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CM):**
  Nos centraremos sobre todo en la competencia matemática, comprendida como la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para

describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto. Esta competencia permite al alumnado valorar la validez de argumentaciones o informaciones, así como a seguir razonamientos válidos a la hora de aplicar teoremas y analizar la validez de los resultados obtenidos.

- **Competencia digital (CD):**

  Se corresponde con la capacidad de buscar, obtener y manejar información mediante el uso de plataformas digitales. Se trabajará mediante diferentes actividades y recursos relacionados con la unidad. Así mismo, trabajaremos la competencia digital mediante el uso de aplicaciones informáticas, calculadoras y programas de cálculo simbólico o cálculo estadístico.

  Esta competencia requiere además actitudes y valores que permitan al usuario adaptarse a las nuevas necesidades establecidas por las tecnologías, su apropiación y adaptación a los propios fines y la capacidad de interaccionar socialmente en torno a ellas.

- **Aprender a aprender (AA):**

  Esta competencia se caracteriza por la habilidad para iniciar, organizar y persistir en el aprendizaje. Con este fin se le facilitará al alumnado material tanto de refuerzo como de profundización que podrá realizarse de manera optativa. De este modo logramos que el alumnado tome las riendas de su propio aprendizaje, lo que a su vez motiva al alumnado al hacerlo sentir protagonista del proceso.

- **Competencias sociales y cívicas (CSC):**

  Como contexto social que es el aula, es importante que ésta sea un espacio de convivencia y respeto mutuo. De este modo es necesario que el alumnado valore tanto al profesor como al resto de alumnos, respetándose mutuamente y practicando la empatía al considerar los posibles sentimientos, opiniones o circunstancias que otros alumnos puedan presentar. Esta competencia es vital para convivir en sociedad, así como comprender la realidad social que nos rodea y ejercer la ciudadanía. También incluye habilidades para participar plenamente la vida cívica. Por tanto, se debe fomentar el interés por profundizar y garantizar la participación democrática en la sociedad, preparando a los alumnos para ejercer su ciudadanía democrática de forma responsable y para participar plenamente en la vida cívica y social, gracias al conocimiento de conceptos y estructuras sociales y cívicas.

- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE):**
  Para el desarrollo de esta competencia fomentaremos durante las clases la participación de los alumnos, siempre de forma respetuosa, así como el trabajo en equipo. Estudiando la matemática, una ciencia aplicada al estudio y análisis de resultados, podremos trabajar de forma directa esta competencia, puesto que dado un problema matemático podemos resolverlo mediante distintos métodos e interpretar el resultado obtenido desde distintos puntos de vista. Por esta razón, es importante que los alumnos desarrollen la capacidad de elegir que método de resolución e interpretación son los más adecuados en función del problema inicial. También deben ser capaces de analizar si el resultado obtenido es válido o no, trabajando de este modo el espíritu crítico.
- **Conciencia y expresiones culturales (CEC):**
  La competencia en conciencia y expresión cultural implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute personal y considerarlas como parte de la riqueza y patrimonio de los pueblos.
  Trabajaremos esta competencia llevando a cabo actividades dentro de un contexto cultural, relacionando de este modo nuestra unidad con problemas y situaciones del mundo real. Los resultados y teoremas teóricos se contextualizaran en su periodo histórico, de modo que el alumnado pueda comprender lo que supusieron para el desarrollo de la ciencia y la cultura en su momento.

2.4. Objetivos

Los objetivos que deberemos alcanzar vienen fijados en el artículo 25 del Real Decreto 1105/2014 por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Artículo 25. Objetivos.

El Bachillerato contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

a) Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.
b) Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.
c) Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.
d) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
e) Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.
f) Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.
g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.
h) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.
i) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
j) Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución

de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.

k) Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.
l) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.
m) Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.
n) Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.

Además de estos objetivos generales, en cada unidad presentaremos objetivos específicos que se pretenden lograr mediante esa unidad.

2.5. Contenidos

Los contenidos básicos a impartir son los establecidos por la ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo. Estructuraremos dichos contenidos en distintas unidades didácticas de forma coherente y progresiva. Para realizar dicha distribución tenemos en cuenta que la metodología utilizada a la hora de explicar la base teórica de la materia será mayoritariamente deductiva.

De este modo, organizamos los contenidos “de lo general a lo particular”. Por ejemplo, en el bloque de álgebra empezaremos con el estudio de las matrices y finalizaremos con el estudio de sistemas, de modo que tendremos que utilizar los conocimientos adquiridos en los temas anteriores y aplicarlos a los posteriores.

BLOQUE I

Unidad 1: Matrices

- Definición de matriz.
- Operaciones con matrices.
- Potencias de una matriz cuadrada.
- Matriz inversa.
- Dependencia e independencia lineal.
- Rango de una matriz.
- Ecuaciones matriciales.

- Aplicaciones de las matrices.

Unidad 2: Determinantes

- Determinante de una matriz.
- Menor complementario y adjunto de una matriz
- Desarrollo de un determinante por una fila o columna.
- Propiedades de los determinantes.
- Rango de una matriz por menores.
- Matriz inversa por menores.

Unidad 3: Sistemas de ecuaciones

- Sistemas de ecuaciones lineales.
- Sistemas de ecuaciones equivalentes.
- Expresión matricial de un sistema de ecuaciones.
- Resolución de sistemas por matriz inversa.
- Resolución de sistemas por el método de Gauss.
- Expresión por columnas de un sistema de ecuaciones lineales.
- Teorema de Rouché.
- Regla de Cramer.
- Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.
- Sistemas dependientes con parámetros.

BLOQUE II

Unidad 4: Vectores en el espacio

- Vectores fijos y vectores libres.
- Espacios vectoriales reales.
- Combinación lineal de vectores. Base.
- Producto escalar.
- Producto vectorial.
- Producto mixto.

Unidad 5: Puntos, rectas y planos en el espacio

- Sistemas de referencia en el espacio afín.

- Rectas en el espacio.
- Planos en el espacio.
- Posición relativa de dos planos.
- Posición relativa de tres planos.
- Posición relativa de dos rectas.
- Posición relativa de una recta y un plano.
- Haces y radiaciones de rectas y planos.

Unidad 6: Problemas métricos en el espacio

- Ángulo entre dos rectas.
- Ángulo entre dos planos.
- Ángulo entre recta y plano.
- Proyecciones ortogonales.
- Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.
- Distancia entre dos puntos.
- Distancia entre un punto y una recta.
- Distancia entre un punto y un plano.
- Distancia entre dos rectas.
- Distancia entre dos planos.
- Lugares geométricos en el espacio.

BLOQUE III

Unidad 7: Límites y continuidad

- Funciones reales de una variable real.
- Límite de una función en un punto.
- Límite de una función en el infinito.
- Cálculo de límites.
- Resolución de indeterminaciones.
- Límites de funciones trigonométricas.
- Continuidad de una función.
- Clasificación de discontinuidades.
- Operaciones con funciones continuas.

- Teoremas de continuidad.
- Asíntotas de una función.

Unidad 8: Derivadas

- Derivada de una función.
- Derivada de una función en un punto.
- Tabla de derivadas.
- Interpretación geométrica de la derivada.
- Rectas tangente y perpendicular a una función en un punto.
- Teorema de Rolle.
- Teorema de Lagrange.

Unidad 9: Aplicaciones de la derivada

- Puntos críticos y monotonía.
- Extremos relativos.
- Puntos de inflexión y curvatura.
- Regla de L'Hôpital.
- Problemas de optimización.

Unidad 10: Análisis y representación de funciones

- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.
- Funciones radicales.
- Funciones a trozos.
- Funciones exponenciales.
- Funciones logarítmicas.
- Funciones trigonométricas.

Unidad 11: Integral indefinida

- Función primitiva.
- Integrales inmediatas.
- Propiedades de la integral indefinida.
- Integrales de funciones derivadas de una función compuesta.

- Método de integración por sustitución.
- Método de integración por partes.
- Integración de funciones racionales.
- Integrales trigonométricas.

Unidad 12: Integral definida

- Área bajo una curva.
- Concepto de integral definida.
- Propiedades de la integral definida.
- Teorema del valor medio del cálculo integral.
- La función integral y su derivada.
- Regla de Barrow.
- Área de una figura plana y longitud de un arco de curva.
- Volumen de un cuerpo de revolución.

BLOQUE IV

Unidad 13: Probabilidad

- Experimentos aleatorios. Espacio muestral.
- Operaciones con sucesos.
- Espacio de sucesos.
- Probabilidad. Regla de Laplace.
- Propiedades.
- Probabilidad condicionada.
- Sucesos dependientes e independientes.
- Teorema de la probabilidad total.
- Teorema de Bayes.

Unidad 14: Distribuciones de probabilidad

- Variables aleatorias.
- Distribuciones de probabilidad discretas.
- Distribución binomial.
- Distribuciones de probabilidad continuas.

- Distribución normal.
- Distribución normal tipificada.
- Aproximación de una distribución binomial por una normal.

2.6. Temporalización

A la hora de realizar la temporalización de la asignatura debemos tener en cuenta que nuestro sistema educativo divide el curso en tres evaluaciones. Pese a que pueda parecer lógico hacer coincidir los distintos bloques con las evaluaciones, considero que no es conveniente, dado que de este modo se da a entender a los alumnos que los distintos bloques son independientes entre sí. Creo que como docentes no debemos fomentar el estudio de la materia como una serie de compartimentos estancos y sin relación, si no que debemos propiciar que los propios alumnos relacionen los distintos bloques entre sí, desarrollando de este modo su espíritu crítico.

Por esta razón decidimos realizar la temporalización atendiendo a que los contenidos impartidos en cada evaluación sean similares en dificultad y extensión a lo largo de las tres evaluaciones, y no a que la delimitación de los bloques coincida con las evaluaciones. Pese a ello, en la temporalización procuraremos que los contenidos de la tercera evaluación sean menos extensos y con menor dificultad a la hora de interiorizarlos y comprenderlos. De este modo dejamos tiempo para realizar un repaso sistemático de todo el curso de cara a la EBAU, para que los alumnos puedan recordar los contenidos anteriores y preguntar posibles dudas al docente.

Tomando como referencia el calendario escolar del curso escolar 2021/2022 realizamos la siguiente distribución:

EVALUACIÓN	**UNIDADES**	**TEMPORALIZACIÓN**
Primera evaluación	Unidades 1 a 4	15/09/2021 – 09/12/2021
Segunda evaluación	Unidades 5 a 10	10/12/2021 – 10/03/2022
Tercera evaluación	Unidades 11 a 14	11/03/2022 – 25/05/2022
Extraordinaria		27/06/2022

La temporalización de las unidades será la siguiente:

<table>
<tr><th>BLOQUE</th><th>UNIDAD DIDÁCTICA</th><th>SESIONES</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="3">I</td><td>1. Matrices</td><td>7</td><td rowspan="4">1ª Evaluación</td></tr>
<tr><td>2. Determinantes</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3. Sistemas de ecuaciones</td><td>8</td></tr>
<tr><td rowspan="3">II</td><td>4. Vectores en el espacio</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5. Puntos, rectas y planos en el espacio</td><td>7</td><td rowspan="6">2ª Evaluación</td></tr>
<tr><td>6. Problemas métricos en el espacio</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="6">III</td><td>7. Límites y continuidad</td><td>7</td></tr>
<tr><td>8. Derivadas</td><td>7</td></tr>
<tr><td>9. Aplicaciones de la derivada</td><td>8</td></tr>
<tr><td>10. Análisis y representación de funciones</td><td>6</td></tr>
<tr><td>11. Integral indefinida</td><td>11</td><td rowspan="4">3ª Evaluación</td></tr>
<tr><td>12. Integral definida</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IV</td><td>13. Probabilidad</td><td>5</td></tr>
<tr><td>14. Distribuciones de probabilidad</td><td>6</td></tr>
</table>

2.7. Recursos

Los recursos que utilizaremos serán de distintos tipos. Los alumnos dispondrán de textos de consulta tanto para reforzar como para ampliar a los que podrán acceder mediante un sistema de préstamo del propio departamento de matemáticas. Además de estos libros, los alumnos deberán comprar el libro de texto decidido por el departamento, que nombraremos más adelante.

Los recursos informáticos serán fundamentales durante el curso. Dichos materiales tienen dos objetivos principales. El primero, utilizaremos recursos informáticos para comunicarnos de manera fluida con los alumnos, tanto para facilitarles el material necesario como para realizar un seguimiento más individualizado. Nuestro segundo objetivo será proporcionar a los alumnos aplicaciones y recursos informáticos que puedan utilizar para realizar un estudio autónomo de la materia.

- **Libro de texto**: (MT 2 (MATEMATICAS TECNOLOGICAS) BACH AULA 3D; L.
  PANCORBO PALENZUELA, G. RUIZ BUENO; ED. VICENS VIVES; ISBN13
  9788468235844)
- **Pizarra** en la que tanto profesor como alumnos pueden resolver ejercicios.
- **Tablet y cañón proyector.** En ocasiones utilizaremos este soporte para el desarrollo de los contenidos aprovechando así el potencial gráfico que este recurso nos ofrece.
- **Aplicación Microsoft Teams.** Utilizaremos este recurso para comunicarnos con el alumnado y facilitar materiales, así como para realizar seguimiento y apoyo a alumnos indispuestos.
- **Calculadora científica**. Será fundamental el uso de esta herramienta puesto que en la prueba de EBAU su uso está permitido y es conveniente que los alumnos se familiaricen con su uso. En este sentido, enseñaremos al alumno a manejarla de manera adecuada.
- **Otras aplicaciones informáticas (Wolfram Alpha, geogebra, Derive…).** Utilizaremos distintas aplicaciones informáticas en las que nos apoyaremos para ilustrar nuestras explicaciones, y a su vez introduciremos a los alumnos en su funcionamiento para que puedan utilizarlas de manera autónoma.

2.8. Metodología

Podemos definir la metodología como el conjunto de estrategias, procedimientos y acciones organizadas y planificadas por los docentes, de manera consciente y reflexiva, con la finalidad de posibilitar el aprendizaje del alumnado y el logro de los objetivos planteados. Debemos definir para ello los papeles que toman profesores y alumnos en cada metodología concreta.

En términos absolutos, no podemos afirmar que haya metodologías mejores o peores, si no que debemos escoger la metodología adecuada atendiendo a las características y necesidades concretas de cada curso. De este modo, considero que es adecuado contemplar en esta programación una serie de metodologías diferentes, de modo que tengamos donde escoger a la hora de aplicarlo a un curso concreto.

La metodología principal que utilizaremos será de carácter expositivo, alternando con otras metodologías que conlleven un papel más activo por parte del alumno:

- **Metodología expositiva:** En esta metodología el profesor será el trasmisor de la información, siendo el papel del alumno recibir, interpretar y asimilar dicha información. Se llevará a cabo mediante clases magistrales, en las que el alumno deberá tomar apuntes sobre los contenidos que hemos presentado anteriormente.
- **Metodología deductiva:** Utilizaremos mayoritariamente una metodología deductiva, es decir, en el desarrollo de los contenidos iremos de lo general a lo particular, presentando en primer lugar los contenidos de manera teórica de modo que los alumnos puedan aplicarlos a casos concretos más adelante. Pese a ello deberemos en ocasiones aplicar una metodología inductiva, como al resolver dudas concretas del alumnado.
- **Metodología colaborativa:** A lo largo del curso desarrollaremos sesiones prácticas en las que aplicaremos una metodología colaborativa. En dichas sesiones tanto el profesor como los alumnos propondrán ejercicios que se resolverán mediante la participación de todos los alumnos. De este modo el profesor deberá tener un papel de guía en el proceso de resolución, procurando que los alumnos reflexionen sobre que métodos o razonamientos son los más adecuados para la resolución. De este modo se fomenta en el alumno el aprendizaje autónomo y se trabaja la iniciativa y el espíritu crítico.

Uno de los aspectos fundamentales de la asignatura será la realización por parte de los alumnos de un cuaderno de actividades y apuntes. En dicho cuaderno deberán estar recogidas de forma ordenada las actividades realizadas así como los contenidos presentados por el profesor. Mediante la realización de este cuaderno se fomenta el desarrollo autónomo por parte de los alumnos de su propio material de estudio.

Respecto a las actividades que realizaremos a lo largo del curso podemos clasificarlas del siguiente modo:

- **Actividades de iniciación:** Al principio de cada unidad realizaremos una serie de actividades con dos objetivos principales. El primer objetivo será el conocer los conocimientos previos que los alumnos posean respecto al tema a tratar, mientras que nuestro segundo objetivo será introducir el tema a tratar mostrando su importancia en contextos cotidianos o científicos.
- **Actividades de desarrollo:** Utilizaremos estas actividades para explicar y ejemplificar los contenidos teóricos impartidos. Incrementaremos la dificultad de las actividades conforme avancemos en la unidad.
- **Actividades de seguimiento:** Periódicamente presentaremos a los alumnos una serie de actividades de carácter opcional que podrán realizar para comprobar si siguen de manera satisfactoria la materia. Fomentaremos en la medida de lo posible la realización de dichas actividades, pero en última instancia los propios alumnos deben realizarlas de forma autónoma.
- **Actividades de refuerzo:** Estas actividades irán destinadas a alumnos que presenten dificultades en la materia, y servirán como herramienta para que estos alumnos puedan practicar y superar dichas dificultades. Además, ofreceremos la posibilidad de resolver dudas de estas actividades mediante mensajes o videoconferencias en Teams.
- **Actividades de ampliación:** Ofreceremos estas actividades con una mayor dificultad destinadas a aquellos alumnos que presenten especial interés en la materia.

2.9. Evaluación

El principal instrumento que utilizaremos para la evaluación será la realización de pruebas escritas, teniendo también en cuenta la participación y comportamiento en el aula. Concretamente, el criterio será el siguiente:

- **Prueba escrita:** Realizaremos dos pruebas escritas en cada trimestre, en las cuales se evaluarán los contenidos vistos desde el comienzo de cada evaluación hasta la fecha de realización de la prueba. De este modo, la segunda prueba englobará los contenidos de la primera, y por tanto le otorgaremos un peso del 40% a la primera prueba y un 60% a la segunda.

- **Observación de la actitud y comportamiento del alumno.** Tendremos en cuenta la participación y comportamiento en el aula de los alumnos, así como su iniciativa a la hora de enfrentar la asignatura.

Realizaremos el primer examen aproximadamente a mitad de evaluación, y el segundo a finales, evitando dejar unidades a medias a la hora de realizar el examen.

Calcularemos la nota media del trimestre ponderando con un 90% la nota obtenida en la parte de la prueba escrita y un 10% la observación de la actitud y comportamiento del alumno. A su vez, calcularemos la nota final del curso mediante la media aritmética de las notas de cada uno de las tres evaluaciones.

2.9.1. Sistema de recuperación

Los alumnos que suspendan alguna de las evaluaciones podrán presentarse a un examen de recuperación.

En este caso la nota de la evaluación se obtendrá teniendo en cuenta:

- La nota de la evaluación suspensa.
- La nota del examen de recuperación.

En el caso en el que el alumno obtenga una nota igual o superior a 5 en el examen de recuperación, su nueva nota será el máximo entre 5 y la media ponderada de ambas notas, utilizando los siguientes pesos:

- Mayor nota entre evaluación y examen de recuperación: 75%.
- Menor nota entre evaluación examen de recuperación: 25%.

En el caso en que el alumno obtenga una nota inferior a 5 en el examen de recuperación, su nueva nota será la media ponderada de la evaluación y el examen de recuperación utilizando los pesos anteriores.

2.9.2. Sistema de subida de nota

Los alumnos que tengan aprobada la evaluación y quieran mejorar su calificación podrán presentarse al examen de recuperación. En este caso podrán decidir si entregar el examen o no una vez realizado.

En caso de entregar el examen, se calculará su nueva nota como en el caso anterior:

- Mayor nota entre evaluación y examen de recuperación: 75%.
- Menor nota entre evaluación examen de recuperación: 25%.

Es importante destacar que pueden tanto subir como bajar su nota por este medio, e incluso suspender.

En caso de decidir no entregar el examen se mantendrá la nota que tenían en la evaluación.

2.9.3. Nota final

En caso de haber aprobado las tres evaluaciones, se calculara la nota final del curso mediante la media aritmética de las tres notas.

En caso de tener suspensa una única evaluación tendremos dos posibilidades:

- Si la nota de la evaluación suspensa es igual o superior a 4 y la media aritmética de las tres evaluaciones es mayor o igual a 5, la nota final será dicha media.
- Si la nota de la evaluación suspensa es inferior a 4 o la media aritmética de las tres evaluaciones es inferior a 5 deberá presentarse a un examen correspondiente a la evaluación suspensa. Con esa nota se volverá a calcular la media y esa será la nota final.

En caso de tener 2 o más evaluaciones deberá presentarse a un examen global en junio. Su nota final será la nota de dicho examen.

2.9.4. Nota de la convocatoria extraordinaria

Para los alumnos que suspendan los exámenes anteriores, se realizará un examen de toda la asignatura. En caso de aprobar este examen, la nota final será un 5.

2.10. Atención a la diversidad

Distinguiremos los siguientes casos:

2.10.1. Alumnos con trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH):

El centro en el que contextualizamos nuestra programación tiene un protocolo de actuación englobado en el Plan de Atención a la Diversidad del propio centro, elaborado por el Departamento de Orientación. Dicho protocolo es aplicable independientemente de la materia, y su objetivo es lograr que el alumno tenga un hábito de actuación coordinado. Las medidas recogidas en el protocolo son las siguientes:

- Se ubicará al alumno de forma preferente en la parte delantera del aula, para evitar distracciones en la medida de lo posible.
- Se acordarán con el alumno señales no verbales que nos permitan capturar y redirigir su atención sin interrumpir el desarrollo de la clase.
- El alumno dispondrá de un cuarto de hora extra para la realización del examen escrito.

2.10.2. Alumnos repetidores:

En este caso aplicaremos las siguientes medidas:

- Llevaremos a cabo un control exhaustivo del absentismo.
- Prestaremos especial atención a la comunicación con la familia, para conocer y poder solventar cualquier dificultad que pueda presentarse.
- Procuraremos ubicarlos en la parte frontal de la clase para facilitar la atención y evitar distracciones.
- Tendremos en cuenta los conocimientos previos adquiridos en el curso anterior, así como los contenidos que más dificultades les pudieron suponer.

2.10.3. Alumnos con altas capacidades:

En este caso tomaremos las siguientes medidas:

- Facilitaremos al alumno actividades suplementarias para trabajar sus capacidades.
- Informaremos al alumno de posibles planes complementarios en los que desarrollar sus capacidades y le recomendaremos participar en ellos.
- Concretamente, recomendaremos su participación en la olimpiada matemática.

2.11. Plan de fomento a la lectura

Como parte del plan de fomento a la lectura del centro, el Departamento de Matemáticas prepara una serie de breves biografías de matemáticos y matemáticas relacionados con la unidad que se trabaje en cada momento. Dicha bibliografía permite al alumno contextualizar los contenidos que estudiará dentro del curso dentro de un momento histórico y comprender la importancia de las aportaciones de dichos matemáticas para la ciencia, logrando en el proceso fomentar el interés en las matemáticas y la lectura.

El listado propuesto por el departamento es el siguiente, correspondiendo cada número a una unidad didáctica:

1. Emmy Noether (1882 – 1935).
2. Arthur Cayley (1821 - 1895).
3. Gauss (1777 – 1855).
4. Euclides (325 a.C. – 265 a.C.).
5. Hipatía de Alejandría (siglo III).
6. Diego de Álava y Viamont (siglo XVI).
7. Simon Lhuilier (1750 - 1840).
8. Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813).
9. Pierre de Fermat (1602 - 1665).
10. Leonhard Euler (1707 - 1783).
11. Isaac Newton (1643 - 1727).
12. Wilhelm Leibniz (1646 - 1716).
13. Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827).
14. Blaise Pascal (1623 – 1662).

2.12. Actividades extraescolares y complementarias

Como actividad complementaria se llevarán a cabo clases para preparar la Olimpiada Matemática, destinadas a alumnos que participen o simplemente estén interesados en asistir. Para preparar la Olimpiada el departamento elaborará materiales específicos que entregaremos a los alumnos cada dos semanas. Para resolver dudas sobre este material se fijará un recreo a la semana, pudiendo ser flexibles al respecto.

Como actividad complementaria interdisciplinar, y en coordinación con el Departamento de Física y Química, llevaremos a cabo una visita al Museo de la Ciencia de Valladolid. El objetivo de dicha visita es que el alumno comprenda la importancia de las matemáticas en el ámbito científico, pudiendo ver en este museo aplicaciones prácticas de las matemáticas.

2.13. Evaluación de la programación didáctica

Es de vital importancia evaluar la propia programación para poder mejorar cada uno de los distintos aspectos didácticos que intervienen en el proceso de enseñanza aprendizaje.

De acuerdo al artículo 21 de la ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, para evaluar nuestra programación debemos tener en cuenta indicadores de logro que nos permitirán comprobar el correcto funcionamiento de nuestra programación y valorar nuestro propio desempeño como docentes. Estos indicadores tendrán la forma de una serie de cuestiones que nos servirán para reflexionar sobre los distintos aspectos reflejados en esta programación.

Como principal herramienta de recogida de datos para esta evaluación utilizaremos una rúbrica de autoevaluación, que presentaremos a nuestros alumnos y nos permitirá conocer sus opiniones y cuantificar el grado de consecución de los distintos aspectos de la programación.

La rúbrica que utilizaremos es la siguiente:

MATEMÁTICAS II		
Valora los siguientes aspectos con una puntuación del 0 al 10, siendo 10 muy positivo y 0 muy negativo.		
Material	1. ¿Consideras que el material ha sido el adecuado?	
	2. ¿Crees que se ha hecho buen uso del material?	
	3. ¿Qué te ha parecido el material de apoyo proporcionado?	
Contenidos	4. ¿Te han parecido los contenidos difíciles de asimilar?	
	5. ¿Te ha parecido adecuado el orden en el que se han impartido las unidades?	
Fomento a la lectura	6. ¿Consideras que se ha despertado el interés por la lectura en la asignatura?	
	7. ¿Las lecturas propuestas han sido de tu agrado?	
Evaluación	8. ¿Consideras justo el sistema de evaluación?	
	9. ¿El nivel de los exámenes te ha parecido el adecuado?	
Evaluación personal	10. ¿Consideras que has trabajado lo suficiente?	
	11. ¿Has prestado atención en clase?	
	12. ¿Consideras correcta tu actitud en el aula?	
	13. ¿El ritmo de la clase es el adecuado?	
	14. ¿Has comprendido bien las explicaciones del profesor?	
	15. ¿Los ejercicios realizados en clase te han servido para preparar el examen?	
	16. ¿Ha resuelto el profesor las dudas planteadas?	
Ambiente	17. ¿Ha sido el ambiente de la clase el adecuado para dar clase?	
	18. ¿Te sientes cómodo para preguntar dudas en clase?	

Observaciones	En este apartado puedes dar tu opinión sobre aspectos concretos. En caso de hacer referencia a alguna de las preguntas anteriores, procura especificar el número (por ejemplo, "*5. Creo que sería mejor que la unidad X se impartiera antes.*")	
Nota Global	Asigna a la materia una nota global entre 0 y 10	

2.14. Conclusiones

La programación didáctica representa los objetivos alcanzados en multitud de aspectos didácticos tales como la práctica docente o la coordinación interna de Departamento de Matemáticas. La programación es el instrumento específico para la planificación, desarrollo y evaluación de la materia, y en ella se recogen los distintos elementos del currículo necesarios para el desarrollo de la actividad docente.

Es importante que el docente, tanto de manera propia como en coordinación con el departamento lleve a cabo su labor docente dentro del contexto de este documento, con el objetivo de que el alumno lleve consiga el mejor proceso de aprendizaje posible, y que mediante la evaluación de la propia programación este proceso vaya mejorando.

SECCIÓN 3:

UNIDADES DIDÁCTICAS

3. Unidades didácticas

En esta sección desarrollaremos dos unidades didácticas parte del programa del aula. Las dos unidades a desarrollar serán las unidades 10 y 11, *"Análisis y representación de funciones"* y *"La integral indefinida"* respectivamente. La razón por la que escojo estas dos unidades para reflejarlas en este trabajo es que son las dos unidades que más trabaje durante mis prácticas en instituto.

Como ya hemos expuesto anteriormente, utilizaremos mayoritariamente una metodología expositiva, tanto deductiva como inductiva, atendiendo al contexto en el que nos encontremos.

3.1. Unidad 10. Análisis y representación de funciones

3.1.1. Justificación teórica

En este apartado realizaremos la unidad didáctica correspondiente al tema del Análisis y representación de funciones, incluido dentro del bloque III de Análisis del 2º curso de bachillerato.

La legislación en la que nos basamos es la ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, en la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

Para tener en cuenta los conocimientos que el alumno ha adquirido previamente en este bloque y contextualizar mejor nuestra unidad didáctica, expondremos los contenidos que se imparten en el bloque III de 2º bachillerato:

- III.1. Límites, continuidad y asíntotas.
- III.2. Cálculo de derivadas.
- III.3. Aplicaciones de las derivadas.
- **III.4. Análisis de funciones y representación de curvas.**
- III.5. Integral indefinida.
- III.6. Integral definida.

Antes de empezar con esta unidad, hemos estudiado el concepto de función con sus características, la derivada de una función en un punto y la correspondiente interpretación geométrica.

Nos encontramos pues con alumnos que deberían tener las herramientas necesarias para analizar y representar funciones, aplicando conocimientos previos ya adquiridos. A estas alturas los alumnos son capaces de calcular puntos críticos, puntos de inflexión y los máximos y mínimos relativos de una función.

Tenemos en cuenta que esta opción va dirigida a alumnos que han elegido la rama científico-tecnológica de bachillerato, lo cual dota a esta unidad de un fuerte carácter preparatorio, ya que en la mayoría de grados de dicha rama se trabaja el concepto de función, siendo por tanto importante comprender lo que es y ser capaz de estudiar sus propiedades.

3.1.2. Contribución a las competencias básicas

En este apartado relacionaremos las competencias básicas con los contenidos que impartiremos. Las competencias básicas son:

- Competencia en comunicación lingüística: **CCL**
- Competencia matemática: **CM**
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico: **CCI**
- Tratamiento de la información y competencia digital: **TIG**
- Competencia social y ciudadana: **CSC**
- Competencia cultural y artística: **CCA**
- Competencia para aprender a aprender: **CAA**
- Autonomía e iniciativa personal: **AIP**

En la siguiente tabla relacionamos los contenidos con las competencias.

Como es lógico se trabajará la competencia matemática, estando todos los contenidos de esta materia relacionados con ella. Respecto a la competencia en autonomía e iniciativa personal, siendo un curso de segundo de bachillerato, el alumno debe trabajar de forma autónoma para practicar lo visto en clase y afianzar dichos conocimientos. La competencia en comunicación lingüística será fomentada por el profesor, que pedirá a los alumnos que sean capaces de explicar los razonamientos seguidos, tanto en lenguaje coloquial como mediante el uso del lenguaje matemático. Por último, se trabajará la competencia digital, tanto al hacer un uso adecuado de la calculadora para realizar los cálculos, como al poder utilizar programas digitales de representación gráfica tales como Geogebra o Wolfram Alpha para comprobar los resultados obtenidos.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares	Competencias
1- Funciones polinómicas y a trozos.	1. Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. 2. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites, de representación de funciones y de optimización.	1.1. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. 1.2. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. 2.1. Aplica la regla de L’Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. 2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.	CM, AIP, CCM, TIG
2- Funciones racionales.	1. Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. 2. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su	1.1. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. 1.2. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.	CM, AIP, CCM, TIG

	interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites, de representación de funciones y de optimización.	2.1. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. 2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.	
3- Funciones radicales.	1. Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. 2. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites, de representación de funciones y de optimización.	1.1. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. 1.2. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. 2.1. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. 2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.	CM, AIP, CCM, TIG
4- Funciones exponenciales.	1. Estudiar la continuidad de una	1.1. Conoce las propiedades de las funciones continuas,	CM, AIP,

	función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. 2. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites, de representación de funciones y de optimización.	y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. 1.2. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. 2.1. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. 2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.	CCM, TIG
5- Funciones logarítmicas.	1. Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. 2. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a	1.1. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. 1.2. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. 2.1. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. 2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con	CM, AIP, CCM, TIG

	la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites, de representación de funciones y de optimización.	la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.	
6- Funciones trigonométricas.	1. Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. 2. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites, de representación de funciones y de optimización.	1.1. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. 1.2. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. 2.1. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. 2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.	CM, AIP, CCM, TIG

3.1.3. Objetivos

Basándonos en el artículo 33 de la Ley Orgánica a de Educación 2/2006, de 3 de Mayo, marcamos los siguientes objetivos como los objetivos específicos que pretendemos lograr con esta unidad didáctica. De este modo, no incluimos los objetivos transversales a todo el curso.

1. Conocer y comprender el comportamiento de distintos tipos de funciones.
2. Reconocer el lenguaje matemático y la notación correspondiente a la representación gráfica de funciones.
3. Detallar el procedimiento para la representación de funciones.
4. Comprender los concepto de punto crítico, punto de inflexión, monotonía, concavidad y curvatura tanto analítica como geométricamente.
5. Fomentar la autonomía personal del alumno.
6. Desarrollar la capacidad de trabajo en grupo.

3.1.4. Contenidos y temporalización

Presentamos aquí las sesiones en las que dividiremos la unidad y los contenidos y actividades que se llevarán a cabo en cada una de ellas. La metodología principal será la lección magistral, en la que el profesor propondrá una función a representar y seguirá el procedimiento paso a paso, de manera lo bastante lenta como para que los alumnos lo resuelvan al tiempo. Al principio de cada sesión se dejará un tiempo para resolver posibles dudas de sesiones anteriores.

- **SESIÓN 1:** Funciones polinómicas, racionales y a trozos.

    - Contenidos:
        - Procedimiento a seguir para representar funciones:

          Para representar funciones seguiremos el siguiente orden:

          1. Dominio.
          2. Simetría.
          3. Puntos de corte con los ejes.
          4. Asíntotas.
          5. Puntos críticos.

6. Monotonía y extremos.
7. Puntos de inflexión.
8. Curvatura.

Explicaremos el procedimiento directamente con un ejemplo, sin introducir contenido teórico dado que los alumnos ya están familiarizados con todos los contenidos necesarios.

- Funciones polinómicas y racionales.
- Funciones a trozos

- Actividades:

<u>En el aula:</u>

-Introduciremos el procedimiento mediante el ejemplo de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

1. Dominio: Como función racional, debemos estudiar donde se anula el denominador. En este caso el dominio será $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. Simetría: Estudiamos si la función es simétrica o antisimétrica. Para ello tenemos que ver si $f(x) = f(-x)$ o $f(x) = -f(-x)$ respectivamente. En este caso no tenemos ninguna de las dos.
3. Puntos de corte: El punto de corte con el eje de ordenadas se obtiene calculando $f(0)$ y el punto de corte con el eje de abscisas se obtiene calculando el x tal que $f(x) = 0$. Los puntos de corte son $\left(0, \frac{1}{2}\right), (1,0), (-1,0)$.
4. Asíntotas:

   Asíntotas verticales: Estudiamos los límites laterales en los puntos que no pertenecen al dominio. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 2^\wedge +} f(x) = \infty$.

   Asíntotas horizontales: Estudiamos el comportamiento de la función en el infinito. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Luego la función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: Como la función no tiene asíntotas horizontales, estudiamos los límites $p^+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ y $\mathrm{p}^- = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Dado que $p^+ y\, p^-$ son finitos y distintos de 0, calculamos $q^+ = \lim_{x\to\infty} f(x) - p^+x = 2 = q^- = \lim_{x\to-\infty} f(x) - p^-x = q^-$. La función presenta asíntotas oblicuas siguiendo la recta de ecuación $y = px + q$.

5. Puntos críticos: Para calcular los puntos críticos calculamos la derivada y la igualamos a 0. Obtenemos que los puntos críticos son $\left(2-\sqrt{3}, 4-2\sqrt{3}\right) y \left(2+\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}\right)$.
6. Monotonía. Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos determinados por los puntos críticos y los puntos que no están en el dominio.

	$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$	
+		-		-		+
↗		↘		↘		↗

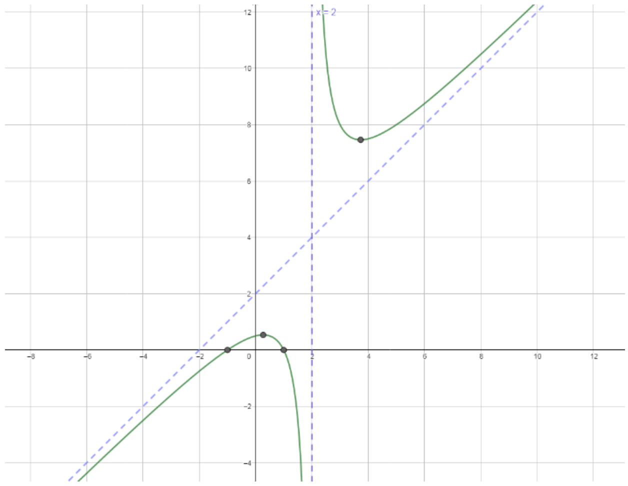
Tenemos por tanto que la función crece en $\left(-\infty, 2-\sqrt{3}\right) \cup \left(2+\sqrt{3}, \infty\right)$ y decrece en $\left(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right)$. Además podemos ver que alcanza extremos relativos en $2-\sqrt{3}$ y $2+\sqrt{3}$, siendo un máximo y un mínimo respectivamente.

7. Puntos de inflexión. Para calcular los puntos de inflexión calculamos la segunda derivada y la igualamos a 0. No obtenemos ningún punto de inflexión.
8. Curvatura. Estudiamos el signo de la segunda derivada en los intervalos determinados por los puntos de inflexión y los puntos que no están en el dominio.

	2	
-		+
∩		∪

Tenemos por tanto que la función es convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, \infty)$.

Una vez tenemos toda esta información, podemos colocar los puntos que conocemos en unos ejes y completar el dibujo con la información que tenemos respecto a asíntotas, monotonía y curvatura. Otendremos algo similar a esto:



-Realizamos el mismo procedimiento con la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2-8}, x \geq 2 \\ \frac{x}{1-x^2}, \ x \leq 2 \end{cases}$. Antes de resolverlo en la pizarra dejaremos tiempo a los alumnos para que intenten resolverlo por sí mismos. Es importante que noten que cada trozo de la función sólo tienen que estudiarlo en su dominio, por ejemplo, no importa que $\frac{x^3}{x^2-8}$ se anule en $x = -\sqrt{8}$, dado que en ese punto $f(\sqrt{8}) = \frac{\sqrt{8}}{1-\sqrt{8}^2}$.

<u>Para casa:</u>

Mandaremos representar las siguientes funciones:

1. $f(x) = (x-3)(x+5)$
2. $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$
3. $f(x) = \frac{x^2}{x-2x+2}$

- **SESIÓN 2:** Funciones radicales.

    - Contenidos:
        - Funciones radicales.

    - Actividades:

En el aula:

Procederemos como en la sesión anterior, resolviendo ejemplos de modo que los alumnos noten las diferencias entre las funciones anteriores y las radicales. El punto más importante es que asimilen que el dominio de las funciones radicales son los puntos en los que el radicando es positivo. Realizaremos los siguientes ejemplos:

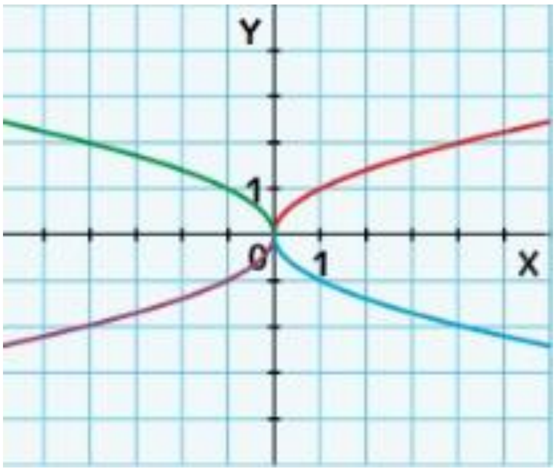
- $f(x) = -\sqrt{-x-2}$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Para casa:

Mandaremos representar las siguientes funciones:

- $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = -\sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{-x}$, $f(x) = -\sqrt{-x}$,

Este ejercicio me parece especialmente interesante para fomentar que los alumnos desarrollen la intuición a la hora de representar funciones, siendo capaces de predecir lo que esperan encontrar antes de realizar los cálculos.



- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$

- **SESIÓN 3:** Funciones exponenciales.
  - Contenidos:
    - Funciones exponenciales.

  - Actividades

    En el aula:

    Del mismo modo que en las sesiones anteriores, realizaremos ejemplos de representación de funciones exponenciales. Comenzaremos representando el ejemplo $f(x) = e^{-x} - e^{x}$.

    En el caso de las funciones exponenciales no se presentan problemas específicos, pero es importante que los alumnos noten que aunque las funciones exponenciales tienen todos los reales como dominio, esto no siempre es así si las componemos con otras funciones.

    Con este fin realizaremos el ejemplo $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, dejando que los alumnos lo intenten por su cuenta antes de resolverlo en la pizarra.

    Para casa:

    Mandaremos representar las siguientes funciones:

    - $f(x) = \frac{1}{2^{x}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$
    - $f(x) = \frac{1}{e^{x}-2}$
    - $f(x) = xe^{x}$
    - $f(x) = x\text{^}2e^{x}$

- **SESIÓN 4:** Funciones logarítmicas.
  - Contenidos:
    - Funciones logarítmicas.

  - Actividades:

En el aula:

Al igual que en las sesiones anteriores, resolveremos en la pizarra varios ejemplos de representación de funciones logarítmicas.

Para ello representaremos la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Una vez resuelto este ejemplo, pondremos la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$ y dejaremos que los alumnos intenten resolverla. El objetivo principal de este ejemplo es que reflexionen sobre el dominio del logaritmo, es decir, los puntos para los cuales la expresión en el interior del logaritmo es estrictamente positiva. Además, aunque no es necesario que se den cuenta de ello, pueden plantearse el crecimiento o decrecimiento del logaritmo en función de la base, llegando a la conclusión de que el logaritmo crece para $a > 1$ y decrece para $0 < a < 1$.

Para casa:

Mandaremos representar las siguientes funciones:

- $f(x) = \log(5x)$
- $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
- $f(x) = \ln(4 - x^2)$
- $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$
- $f(x) = \frac{1}{1+\ln(x)}$

- **SESIÓN 5:** Funciones trigonométricas.
  - Contenidos:
    - Funciones trigonométricas.
    - Periodicidad:

      Decimos que una función $f(x)$ es periódica de periodo h cuando existe $h \in \mathbb{R}$ de modo que$f(x) = f(x + h)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

      Como ya sabemos, las funciones trigonométricas son periódicas de periodo $2\backslash pi$ en el caso del seno y el coseno y de periodo π en el caso del al tangente.

De este modo, en el caso de la representación de funciones trigonométricas periódicas, basta con estudiar el comportamiento de la función en un periodo, puesto que dicho comportamiento se repetirá en el resto de puntos.

- Actividades:

  En el aula:

  Realizaremos la representación del seno, coseno y tangente de manera rápida y clara.

  Después propondremos a los alumnos representar las funciones $f(x) = sen(2x)\ y\ f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Con esto pretendemos tanto que cojan soltura a la hora de calcular periodos de funciones, como que puedan adquirir una idea intuitiva del efecto sobre el periodo de multiplicar el interior de una función trigonométrica por un escalar.

  Para casa:

  Mandaremos las siguientes funciones:

  - $f(x) = |sen(x)|$
  - $f(x) = 2 - \cos(\text{x})$
  - $f(x) = 2tan(3x)$
  - $f(x) = sen(x + \pi)$
  - $f(x) = \cos(x + 2\pi)$

- **SESIÓN 6:** Repaso.

  En el aula:

  En esta sesión repasaremos todos los métodos expuesto a lo largo de la unidad, prestando especial atención a los casos básicos de cada tipo. Utilizaremos en esta sesión una metodología colaborativa. Para ello preguntaremos a los alumnos si tienen algún ejercicio que no sepan resolver, dejaremos un corto periodo de tiempo para que lo intenten resolver en pequeños grupos de 2-3 personas, y acto seguido pediremos voluntarios para salir a la pizarra a resolver el ejercicio, o plantear cómo lo han intentado resolver. En caso de que no haya ningún ejercicio que plantee dificultades, plantearemos nosotros mismos un ejercicio para llevar a cabo el mismo proceso.

Para casa:

Confeccionaremos una lista de ejercicios tipo examen que permitan al alumnado estudiar y practicar de forma autónoma.

3.2. Unidad 11. La integral indefinida

3.2.1. Justificación teórica

En este apartado realizaremos la unidad didáctica correspondiente al tema de las integrales indefinidas incluido dentro del bloque III de Análisis del 2º curso de bachillerato.

La legislación en la que nos basamos es la ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, en la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

Para tener en cuenta los conocimientos que el alumno ha adquirido previamente en este bloque y contextualizar mejor nuestra unidad didáctica, expondremos los contenidos que se imparten en el bloque III de 2º bachillerato:

- III.1. Límites, continuidad y asíntotas.
- III.2. Cálculo de derivadas.
- III.3. Aplicaciones de las derivadas.
- III.4. Análisis de funciones y representación de curvas.
- **III.5. Integral indefinida.**
- III.6. Integral definida.

Antes de empezar con esta unidad, hemos estudiado el concepto de función con sus características, la derivada de una función en un punto y la correspondiente interpretación geométrica. Hemos aplicado también estos conceptos para realizar estudios gráficos de funciones y aplicaciones al campo de la optimización de recursos.

Nos encontramos pues con que nuestros alumnos han comprendido estos conceptos previos que les permiten entender el concepto de primitiva de una función. Esta unidad tiene una importancia central dentro del cálculo, dadas sus múltiples aplicaciones en el cálculo de áreas y volúmenes.

Tenemos en cuenta que esta opción va dirigida a alumnos que han elegido la rama científico-tecnológica de bachillerato, lo cual dota a esta unidad de un fuerte carácter preparatorio, ya que la mayoría de grados de dicha rama utilizan el concepto de primitiva como herramienta básica dentro de las matemáticas.

3.2.2. Contribución a las competencias básicas

En este apartado relacionaremos las competencias básicas con los contenidos que impartiremos. Las competencias básicas son:

- Competencia en comunicación lingüística: **CCL**
- Competencia matemática: **CM**
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico: **CCI**
- Tratamiento de la información y competencia digital: **TIG**
- Competencia social y ciudadana: **CSC**
- Competencia cultural y artística: **CCA**
- Competencia para aprender a aprender: **CAA**
- Autonomía e iniciativa personal: **AIP**

En la siguiente tabla relacionamos los contenidos con las competencias. Nótese que los contenidos numerados 6 y 7 se salen de los contenidos mínimos establecidos por el BOCYL, siendo estos un añadido del profesor (en consenso con el departamento) y por tanto no determinan significativamente los resultados de la evaluación.

Como es lógico se trabajará la competencia matemática, estando todos los contenidos de esta materia relacionados con ella. Respecto a la competencia en autonomía e iniciativa personal, siendo un curso de segundo de bachillerato, el alumno debe trabajar de forma autónoma para practicar lo visto en clase y afianzar dichos conocimientos. Por último, la competencia en comunicación lingüística será fomentada por el profesor, que pedirá a los alumnos que sean capaces de explicar los razonamientos seguidos, tanto en lenguaje coloquial como mediante el uso del lenguaje matemático.

Contenidos	Criterios de Evaluación.	Estándares	Competencias
1-Primitiva de una función	3. Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas para el cálculo de primitivas.	3.1. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.	CM, CCL
2-La integral indefinida	3. Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas para el cálculo de primitivas.	3.1. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.	CM, CCL
3-Integración por partes	3. Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas para el cálculo de primitivas.	3.1. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.	CM, AIP, CCL
4-Cambio de variables	3. Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas para el cálculo de primitivas.	3.1. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.	CM, AIP, CCL
5-Descomposición en fracciones simples de fracciones racionales cuyo denominador tenga sus raíces reales.	3. Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas para el cálculo de primitivas.	3.1. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.	CM, AIP, CCL

6-Descomposición en fracciones de fracciones racionales cuyo denominador tenga raíces reales múltiples.	Ampliación del método de descomposición en fracciones simples para poder integrar aquellas con raíces múltiples del denominador.	Aplica métodos básicos para el cálculo de primitivas con una dificultad más elevada.	CM, AIP, CCL
7-Integrales trigonométricas	Ser capaz de aplicar el método del cambio de variables correctamente en el caso en el cual el integrando lo forman funciones trigonométricas.	Aplica métodos básicos para el cálculo de primitivas con una dificultad más elevada.	CM, AIP, CCL

3.2.3. Objetivos

Basándonos en el artículo 33 de la Ley Orgánica a de Educación 2/2006, de 3 de Mayo, marcamos los siguientes objetivos como los objetivos específicos que pretendemos lograr con esta unidad didáctica. De este modo, no incluimos los objetivos transversales a todo el curso.

7. Comprender el concepto de primitiva de una función.
8. Conocer técnicas básicas para calcular las primitivas de distintas funciones.
9. Reconocer el lenguaje matemático y la notación correspondiente al cálculo de primitivas.
10. Revisar las relaciones trigonométricas básicas adquiridas con anterioridad.
11. Detallar el procedimiento para descomponer fracciones simples cuando el denominador tiene raíces reales.
12. Fomentar la autonomía personal del alumno.
13. Desarrollar la capacidad de trabajo en grupo.

3.2.4. Contenidos y temporalización

Presentamos aquí las sesiones en las que dividiremos la unidad y los contenidos y actividades que se llevarán a cabo en cada una de ellas. Pese a que aquí presentamos los contenidos y actividades por separado, a la hora de impartirlos intercalaremos los contenidos y las actividades de modo que las actividades ejemplifiquen los contenidos explicados.

- **SESIÓN 1:** Primitiva de una función. Integral indefinida.
    - Contenidos:
        - Definición de primitiva de una función:
          Una primitiva de una función $f(x)$, es otra función, $F(x)$, tal que: $F'(x) = f(x)$.
        - Distintas primitivas difieren en una constante.

Sea $F(x)$ la primitiva de una función $f(x)$. Dado que la derivada de una función constante es nula, podemos sumar a $F(x)$ cualquier constante $k\epsilon\mathbb{R}$, y la función resultante seguirá siendo una primitiva de la función $f(x)$ original.

$(F(x)+k)' = \left(F(x)\right)' + (k)' = f(x) + 0 = f(x).$

La constante k queda determinada de manera única si a la función $F(x)$ se le pide que pase por un punto específico del plano.

- Integral indefinida.

  La integral indefinida de una función $f(x)$, es el conjunto de todas sus primitivas. Se denota del siguiente modo:

$$\int f(x)dx = F(x) + k, \quad k\epsilon\mathbb{R}.$$

  En la notación anterior, a $f(x)$ lo llamamos integrando, dx se denomina diferencial de x y k constante de integración.

- Tabla de integrales inmediatas:

  Constantes: Sea $a\epsilon\mathbb{R}$, entonces

$$\int a\, dx = ax + k, \quad k\epsilon\mathbb{R}.$$

  Potencias: Sea $n\epsilon\mathbb{Q}$, entonces

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, \quad k\epsilon\mathbb{R}.$$

  Logaritmo neperiano:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + k, \quad k\epsilon\mathbb{R},$$

- Actividades:

En el aula:

-Cálculo de primitivas conociendo la tabla de derivadas.

Conociendo la tabla de derivadas, podemos preguntar a la clase cuales son las primitivas de las siguientes funciones:

a. $4x^3$

b. $x-3$

c. $\frac{3x^2}{x^\wedge 3+1}$

d. $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

Cuyas soluciones son en este orden:

$$x^4, \frac{(x-3)^2}{2}, \ln|x^3+1|, \frac{2\sqrt[3]{x^4}}{3}.$$

-*Calcular una constante de integración dado el valor de la función en un punto.*

En los casos a. y d. del ejemplo anterior podemos estudiar que constantes debemos añadir a las funciones para que ambas primitivas pasen por el punto (1,2).

a. Evaluamos la función $F(x) = x^4 + k$ en $x = 1$,

   $F(1) = 1 + k$. Si imponemos que $F(1) = 2$ podemos determinar la constante; $1 + k = 2$.

   De la ecuación anterior tenemos $k = 1$. La primitiva que se pide es $F(x) = x^4 + 1$..

b. Repitiendo el proceso anterior para las primitivas de la forma $F(x) = \frac{2\sqrt[3]{x^4}}{3}$ obtenemos que la condición necesaria es $\frac{2}{3} + k = 2$, luego $k = \frac{4}{3}$

.

-*Realizar actividades de integración inmediata.*

Después de explicar los contenidos de la sesión y realizar las actividades, podemos plantear y resolver varios ejemplos para ilustrar el manejo de la tabla de primitivas inmediatas.

Para casa:

-Podemos mandar aquellas integrales de la actividad anterior que no hayamos tenido tiempo de realizar. En caso contrario podemos crear una lista de ejercicios.

-Calcular la constante k, de integración tal que la primitiva de $f(x) = (x-5)^2$ pase por el punto (2,1).

- **SESION 2**: Primitiva de una función. Integral indefinida.

    - Contenidos:

        - Tabla de integrales inmediatas:

Exponencial.

$$\int e^x \, dx = e^x + k, \quad k \epsilon \mathbb{R},$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + k, \quad k \epsilon \mathbb{R}.$$

Trigonométrico.

$$\int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x) + k, \quad k \epsilon \mathbb{R},$$

$$\int \cos(x) \, dx = sen(x) + k, \quad k \epsilon \mathbb{R},$$

$$\int \operatorname{tg}(x) \, dx = -\ln|\cos(x)| + k, \quad k \epsilon \mathbb{R},$$

Trigonométricas inversas.

$$\int \operatorname{cotg}(x) \, dx = \ln|\operatorname{sen}(x)| + k, \quad k \epsilon \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \operatorname{tg}(x) + k, \quad k \epsilon \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \, dx = -\operatorname{cotg}(x) + k, \quad k \epsilon \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}\,dx = \mathrm{arcotg(x)} + k, \quad k\epsilon\mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{arcsen(x)} + k, \quad k\epsilon\mathbb{R},$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{arcsen(x)} + k, \quad k\epsilon\mathbb{R},$$

- Linealidad de la integral.

  La integral es lineal, es decir, cumple las siguientes propiedades:

  a. $\int f(x) + g(x)\,dx = f(x) + g(x)$.

  b. $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda f(x)$.

- Actividades:

  En el aula:

  Ejemplos de integrales inmediatas, con y sin utilizar propiedades lineales.

  -Calcular las siguientes integrales:

  a. $\int(5x^4 + e^x)\,dx = x^5 + e^x + k$.

  b. $\int 5^x(\ln 5)\,dx = 5^x + k$.

  c. $\int \cos(x) + 7sen(x)\,dx = -sen(x) + 7\cos(x) + k$.

  d. $\int \frac{17}{\cos^2(x)}\,dx = 17tg(x) + k$.

  e. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg(x) + k$

  Para casa:

  Ejercicio diseñado para aclarar que no solo hay que usar la tabla.

  -Ejercicios similares a los hechos en clase.

- **SESION 3:** Técnicas elementales para el cálculo de primitivas: Cambio de variable.

  - Contenidos:

- Explicación del método de cambio de variable general.

  Supongamos que la integral tiene la forma:

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx$$

El método de cambio de variable consiste en tomar:

1. $u = g(x)$
2. $du = g'(x)dx$

Entonces tenemos que

$$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)dx = \int f(u)\, du =$$

$$F(u) + k = F\big(g(x)\big) + k.$$

- Actividades:

  En el aula:

  Ejemplos con la tabla de primitivas delante.

  -Por ejemplo:

  a. $\int (2x^2+4)^3 x\, dx = \frac{1}{16}(2x^2+3)^4 + k.$

  b. $\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\big(arctg(x^2)\big) + k.$

  Para casa:

  Ejemplos similares a los realizados en el aula.

- **SESIoNES 4 y 5:** Técnicas elementales para el cálculo de primitivas: Integración por partes.

  - Contenidos:

    - Integración por partes:

      Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones derivables, sabemos que:

      $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$

      Y por tanto,

$\int (u(x)v(x))' \, dx = \int v(x)u'(x) \, dx + \int u(x)v'(x) \, dx$

Como consecuencia:

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

Llamamos a esta fórmula "fórmula de integración por partes".

Un truco para recordar la fórmula es la siguiente frase

'**U**n **D**ía **V**i **U**na **V**aca **V**estida **D**e **U**niforme'

- Integración por partes: Casos particulares.

  Explicaremos casos particulares de integrales en los cuales la integración por partes es especialmente eficaz:

  - Polinomio por exponencial.
  - Polinomio por trigonométrica.
  - Circulares: exponencial por trigonométrica o producto de trigonométricas.
  - Polinomio por logaritmo.
  - Otros tipos, logaritmo, arctang…

- Actividades:

  En el aula:

  Se realizarán los siguientes ejemplos:

  a. $\int \ln|x| \, dx$, tomando $dv = dx$ y $u = \ln|x|$, se obtiene que la integral vale $x \ln|x| - x + k$.

  b. $\int \text{sen}^2(x) \, dx$, en la cual tomamos $dv = sen(x)dx$ y $u = sen(x)$, y obtenemos que $\int \text{sen}^2(x) \, dx = sen(x)\cos(x) + \int \cos^2(x) \, dx$.

     Tomando ahora $dv = \cos(\text{x})dx$ y $u = cos(x)$ en la integral que hemos obtenido, tenemos que:

     $\int \text{sen}^2(x) \, dx = 2sen(x)\cos(x) + \int \text{sen}^2(x) \, dx$.

     Despejando en esta última fórmula obtenemos:

$$\int \text{sen}^2(x) \, dx = sen(x)\cos(x) + k.$$

c. $\int arctg(x)\, dx$. Tomamos $dv = dx$ y $u = arctg(x)$ y obtenemos:

$$\int arctg(x)\, dx = xarctg(x) - \frac{1}{2}(\ln|x+1|) + k.$$

<u>Para casa:</u>

Mandaremos las siguientes integrales:

a. $\int (x+2)\, \text{cossen}(x)\, dx$

b. $\int x^2 \ln|x|\, dx$

c. $\int \ln|x+5|\, dx$

Y otros ejemplos para practicar lo explicado en la sesión.

- **SESIÓN 6:** Descomposición en fracciones simples de fracciones racionales cuyo denominador con raíces reales simples.

  - Contenidos:

    - Comenzaremos repasando la división de polinomios.
    - Integrales racionales donde el numerado exceda en grado al denominador.

    Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ con $\deg(P(x)) > \deg(Q(x))$ podemos realizar la división de polinomios y obtenemos dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ tales que $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ y $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$.

    Por tanto:

    $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int (C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)})\, dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$, siendo la primera integral una integral sencilla. Para calcular la segunda utilizaremos el método de descomposición en fracciones simples.

- El método de descomposición en fracciones simples.

  Dada una integral de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con $\deg\big(P(x)\big) < \deg\big(Q(x)\big)$, podemos aplicar el siguiente método de integración, conocido como descomposición en fracciones simples.

  El método se basa en que una fracción de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede descomponerse en suma de fracciones donde el denominador de cada una sea un factor $(x-a)$, siendo a una raíz de $Q(x)$.El numerador de cada una de estas fracciones será una constante.

  En consecuencia, si $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{x-a_i}$, para ciertos n y $a_i, i = 1, \dots, n$, la integral correspondiente se calculará como

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int (\sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{x-a_i}) dx = \sum_{i=1}^{n} \int (\frac{N_i}{x-a_i}) dx$$

  Siendo las integrales resultantes sencillas, luego:

  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{N_i} \ln |x-a_i| + k$

- Actividades:

  En el aula:

  -Realizaremos integrales que se resuelvan mediante el método de descomposición, ya sea de manera directa o tras dividir los polinomios.

  Para casa:

  -Mandaremos ejercicios similares a los resueltos en clase, haciendo especial hincapié en los casos en los que el grado del numerador sea mayor que el del denominador

- **SESIÓN 7:** Descomposición en fracciones simples de fracciones racionales cuyo denominador tenga raíces reales múltiples.

- Contenidos:

  - Diferencia de los denominadores que tenemos que considerar respecto al caso de las raíces reales simples.

    Cuando queremos descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples y denominador tiene raíces reales múltiples ya no podemos poner la descomposición del mismo modo en el que lo hacíamos para raíces simples, pues al hacer el m.c.m. de los denominadores, el polinomio resultante tendrá un grado menor que $Q(x)$. En este caso la descomposición se hace de la siguiente manera:

    Si a_i son las raíces de multiplicidad α_i del polinomio $Q(x)$, entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\alpha_j}\frac{N_i}{\left(x-a_j\right)^i}$$

    y en consecuencia

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\alpha_j}\frac{N_i}{\left(x-a_j\right)^i}\right)dx = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\alpha_j}\int\frac{N_i}{\left(x-a_j\right)^i}dx$$

    Las integrales que aparecen en el término de la derecha son logarítmicas y exponenciales que sabemos calcular.

- Actividades:

  En el aula:

  - Realizaremos integrales que se resuelvan mediante el método de descomposición, ya sea de manera directa o tras dividir los polinomios.

  Para casa:

- Mandaremos ejercicios similares a los resueltos en clase, haciendo especial hincapié en los casos en los que el grado del numerador sea mayor que el del denominador

- **SESIÓN 8:** Integrales irracionales.

  - Contenidos:

    - Cambios de variable de la forma t=m.c.d. (exponente de las variables).

      Lo veremos con un ejemplo: $\int \sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{x}\, dx$

      Para resolver la integral realizamos el cambio el cambio $t^{m.c.m.(3,2)} = t^6 = x$ y obtenemos la integral $\int t^2 + t^3\, dt$, que podemos resolver. Tras resolver la integral, debemos deshacer el cambio de variable.

      De manera más general, si el integrando es de la forma $R(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_1}{m_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_t}{m_t}})$, el cambio a realizar es de la forma $t^s = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$, lo que la reduce a una integral racional.

    - Reducción a racionales, aquellas cuyo integrando es de la forma $R(x, e^x)$. Para reducirlas a una integral racional podemos hacer el cambio $t = e^x$, ya que en ese caso $dt = e^x dx$ y obtendremos una integral racional. Veamos un ejemplo:

$$\int \frac{2}{e^x + 1} dx = \int \frac{2}{t+1} dt = 2 \ln|e^x + 1| + k$$

  - Actividades:

    <u>En el aula:</u>

    - Resolución de integrales irracionales.

    <u>Para casa:</u>

- Mandaremos una lista de integrales, haciendo especial hincapié en las integrales irracionales, pero incluyendo casos anteriores.

- **SESIONES 9 y 10:** Trigonométricas.

  - Contenidos:

    - Repaso de las formulas trigonométricas elementales y como deducirlas.
    - Cambios de variables en integrandos trigonométricos: Se tienen los siguientes casos dependiendo de la forma del integrando:
      a. $R(\cos(x), sen(x))$ impar respecto a $cos(x)$, cambio $t = sen(x)$.
      b. $R(\cos(x), sen(x))$ impar respecto a $sen(x)$, cambio $t = cos(x)$.
      c. $R(\cos(x), sen(x))$ par, cambio $t = tg(x)$
    - Cambio general $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ para cualquier integrando. Dicho cambio de variable reduce el problema a una integral, resolviendo el problema.
    - Reducción a trigonométricas, para integrales donde el integrando es de la forma $R(x, \sqrt{b - ax^2})$. Para resolver este tipo de integrales realizamos el cambio de variable $t = \frac{\sqrt{b}sen(x)}{\sqrt{a}}$. Con dicho cambio obtenemos $\sqrt{b - ax^2} = \sqrt{b}\cos(x)$ y hemos conseguido reducir la integral a una integral trigonométrica que sabemos resolver.

  - Actividades

    <u>En el aula:</u>

- Resolución de integrales trigonométricas.

Para casa:

- Mandaremos una lista de integrales, con especial hincapié en las trigonométricas, pero incluyendo casos anteriores.

- **SESION 11:** Repaso.
  - Actividades

En el aula:

- En esta sesión repasaremos todos los métodos expuesto a lo largo de la unidad, prestando especial atención a los casos básicos de cada tipo. Utilizaremos en esta sesión una metodología colaborativa. Para ello preguntaremos a los alumnos si tienen algún ejercicio que no sepan resolver, dejaremos un corto periodo de tiempo para que lo intenten resolver en pequeños grupos de 2-3 personas, y acto seguido pediremos voluntarios para salir a la pizarra a resolver el ejercicio, o plantear cómo lo han intentado resolver. En caso de que no haya ningún ejercicio que plantee dificultades, plantearemos nosotros mismos un ejercicio para llevar a cabo el mismo proceso.

Para casa:

- Para esta última sesión confeccionaremos una lista de ejercicios tipo examen para que los alumnos puedan practicar.

SECCIÓN 4:

CONCLUSIONES

4. Conclusiones

Durante el Practicum he tenido la suerte de haber podido poner en práctica al menos en parte ambas unidades didácticas. Ambas las puse en práctica en la misma clase de segundo de bachillerato. Las conclusiones que he podido sacar respecto a cada unidad son las siguientes:

Con respecto a la **Unidad 10:**

- En el caso de esta unidad no tuve la oportunidad de impartir las clases desde el principio, impartiendo las dos primeras sesiones mi tutor, aunque sí que pude diseñar y corregir el examen. Pese a ello la metodología utilizada fue similar así que considero que las conclusiones obtenidas son válidas.
- Los alumnos en general adquirieron un mejor hábito de trabajo y un mejor enfoque en las matemáticas, lo que llevo a que sus resultados mejoraran.
- La metodología colaborativa fue un éxito, logrando una mejoría en el ambiente del aula. Esto llevó a que los alumnos se sintieran más inclinados a preguntar sus dudas, y a un aumento general de la motivación.
- El simple hecho de que los alumnos preguntarán más dudas me proporcionó mucho más feedback como docente, permitiéndome ver con mayor claridad en que puntos debería hacer más hincapié.
- El uso de recursos informáticos, mayormente Wolfram Alpha ayudó a los alumnos a trabajar de forma autónoma, pudiendo comprobar si sus resultados eran correctos por su cuenta, y trabajando en el proceso la competencia digital, aprendiendo a escribir lenguaje matemático básico en ordenador.

Con respecto a la **Unidad 11:**

- En el caso de esta unidad pude impartirla por completo, no pudiendo realizar el examen ya que las fechas y contenidos de los exámenes venían fijados por el departamento. Por lo que me ha contado mi tutor, los resultados del examen fueron generalmente buenos.
- La metodología deductiva hizo que en general los alumnos comprendieran mejor los conocimientos, llegando en muchos casos a interiorizar los conceptos antes de la realización de ejercicios tipo.

- Todos los alumnos demostraron haber comprendido la diferencia entre una primitiva y la integral indefinida de una función.
- Los alumnos comprendieron y demostraron saber aplicar todos los métodos de integración. El método con el que más dudas surgieron fue el método del cambio de variable, lo que me sugiere que podría profundizarse más en cursos futuros.
- En ambas unidades los alumnos mostraron una gran capacidad de trabajo autónomo, buscando en muchos casos problemas propios y organizando grupos de estudio fuera de horario escolar, en ocasiones solicitándonos que participáramos en alguno de ellos.
- Como feedback específico de esta unida, varios alumnos me hicieron llegar que consideraban que mie ejemplos iniciales eran quizás demasiado complicado, y que es posible que se comprendieran mejor los conceptos con ejemplos más sencillos. Pese a ello, considero que esto es un cambio que atañe más a mi labor como docente que a la propia unidad.

Basándonos en estos puntos considero que podemos calificar ambas unidades de exitosas. La mayoría de los alumnos no sólo comprendieron los conceptos, si no que adquirieron o desarrollaron hábitos de trabajo que llevaron a una mejoría significativa de su rendimiento. De los alumnos que por alguna razón no pudieron superar con éxito las unidades, todo aquel que continuó estudiando y no abandonó por completo la asignatura acabó superándola.

Durante el Practicum también se llevaron a cabo unidades didácticas con una metodología similar en 2º de la ESO y 2º de PMAR. Las conclusiones obtenidas en estos cursos son similares, obteniendo buenos resultados en 2º ESO y mejorando los resultados y el interés por las matemáticas en 2º de PMAR.

Por todo esto creo que las unidades son un éxito, y si bien siempre hay cambios que realizar, considero que la metodología utilizada es beneficiosa y logra su propósito.

Bibliografía

[1] ORDEN EDU/363/2015, del 4 de mayo.

[2] Ley Orgánica 2/2006, del 3 de mayo.

[3] Pancorbo Palenzuela, L. y Ruiz Bueno, R. (Ed.) (2020). MT 2. MATEMÁTICAS TECNOLÓGICAS (AULA 3D). Barcelona, España: Editorial Vicens Vives.

[4] Proyecto educativo de centro (PEC); I.E.S. Hoces del Duratón, Cantalejo, Segovia.

[5] Plan de Atención a la diversidad.

[6] Reglamento de Régimen Interno del I.E.S. Hoces del Duratón.

[7] Programación general anual del I.E.S. Hoces del Duratón.

[8] Rico Romero, L. (1997), Bases teóricas del currículo de Matemáticas en Educación Secundaria, Madrid, España: Síntesis

[9] Rico Romero, L. y Moreno Verdejo, A. (2016), Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria, Madrid, España: Pirámide.

[10] Jesús María Goñi (coord.), Vol.I: Matemáticas. Complementos de formación disciplinar. Gobierno de España.

[11] Jesús María Goñi (coord.), Vol.II: Didáctica de las matemáticas. Gobierno de España.

[12] Jesús María Goñi (coord.), Vol.III: Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas.