**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

**Dpto. Didáctica de las Ciencias Experimentales,**

**Sociales y de la Matemática**

# De Grecia a Japón:

## una propuesta didáctica de geometría para enseñanza secundaria

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.**

**Alumno: Andrés Hombría Cornejo**

**Tutor: Edgar Martínez Moro**

**Valladolid, junio de 2022**

## Resumen

Esta propuesta didáctica de geometría se ha diseñado desde un enfoque científico, interdisciplinar y teniendo en cuenta la diversidad humana. La mayor virtud de esta propuesta es su flexibilidad: el contenido se presenta en módulos, cada uno con varias actividades y metodologías propuestas, que pueden combinarse para adaptarlos a distintos currículos, niveles y grupos. Los proyectos interdisciplinares proveen marcos narrativos e ideas para conectar la geometría con otros ámbitos. El trabajo se organiza en tres partes: 1-marco teórico basado en la psicología cognitiva, 2-diseño docente con las metodologías y principios usados, y 3- propuesta didáctica, con módulos de contenidos y proyectos interdisciplinares.



**Palabras Clave:** Propuesta Didáctica, Geometría, Interdisciplinariedad, ABP, Proyectos Educativos, Educación Secundaria, Educación Matemática, Didáctica Matemáticas



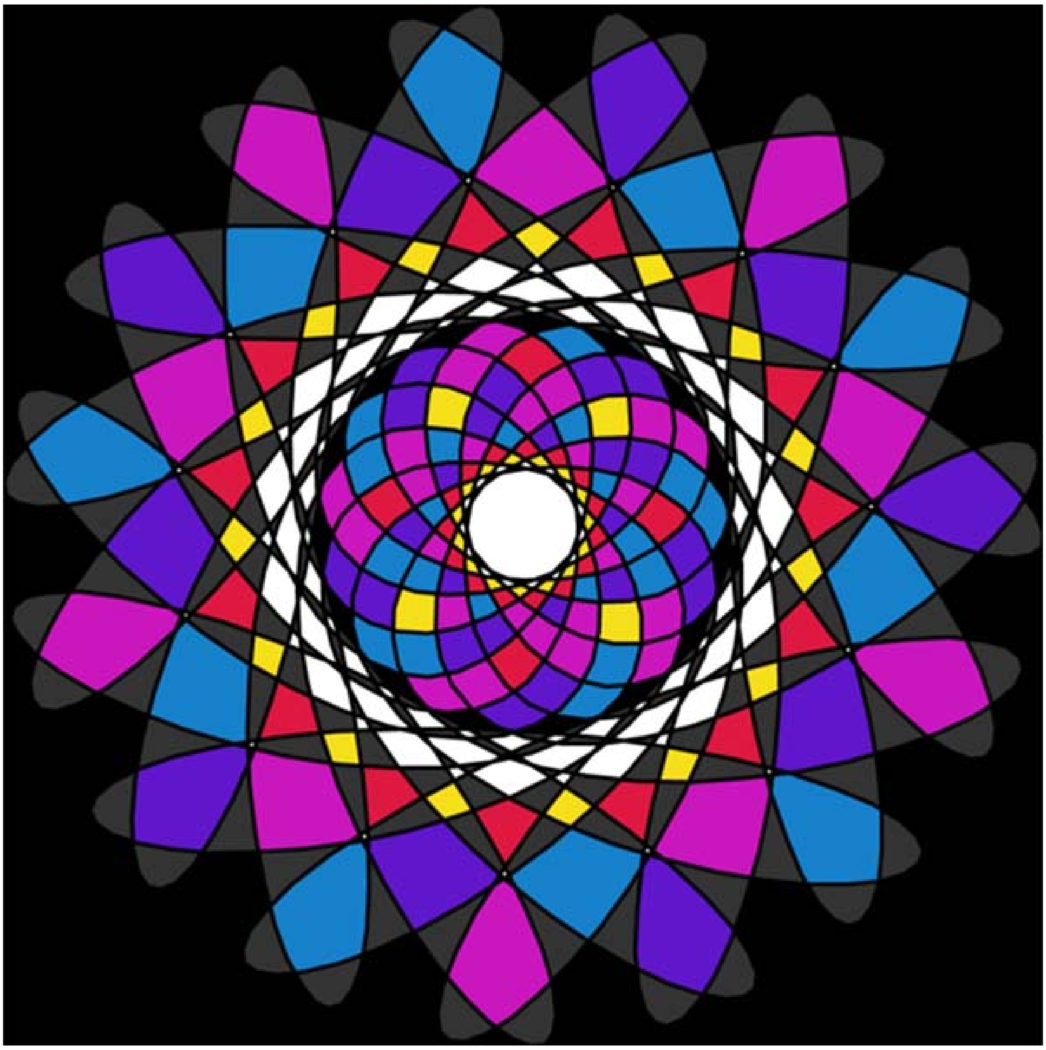
## Abstract

This didactic proposal on geometry has been designed from a scientific, interdisciplinary approach that takes into account human diversity. The biggest virtue of this proposal is its flexibility: the content is structured into modules, each with several proposed activities and methodologies, which can be combined to adapt to different curricula, levels and class groups. The interdisciplinary projects provide narrative frameworks and ideas to connect geometry to other areas. The work is divided into three parts: 1-theoretical framework based on cognitive psychology 2-teaching design with the methodologies and principles and 3-didactic proposal, with the content modules and interdisciplinary projects



**Keywords:** Didactic proposal, Geometry, Interdisciplinary, PBL, Teaching projects, Secondary Education, Mathematics Teaching

**наука для мира и для народов !**



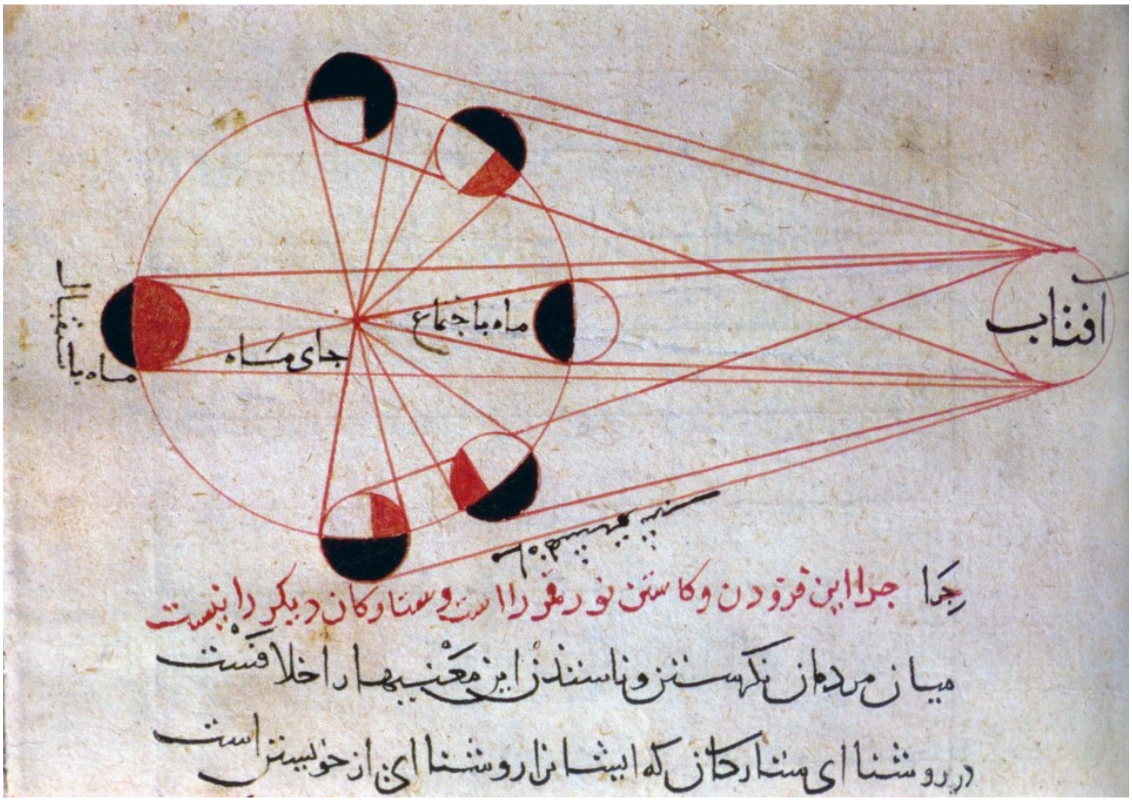
**Dedicado a Alexandra Elbakyan, una heroína,**

**a Julián , una inspiración**

**y, sobre todo, a Olga, una vida**

# Indice





# 0-Introducción

## ¿De dónde venimos?

Medir es una necesidad del ser humano desde, al menos, la invención de la agricultura: cuánto ha producido la cosecha, cuánta extensión tiene cada cultivo… La agrimensura es la medida de la tierra, dicho en griego, *geo-metría.* Hoy en día es una rama de las matemáticas lo que, en origen, fue una disciplina práctica. Medir la tierra resulta necesario para los agricultores, pero también para los comerciantes y los soldados. De la riqueza producida por la agricultura nacieron el comercio y la guerra, dos facetas de la civilización que demandan mapas. Mapas, y con ellos técnicas para orientarse y posicionarse, que van desde las brújulas hasta los sistemas de posicionamiento por satélite. Pero antes de colocar satélites en órbita, el ser humano usaba las estrellas y el sol para averiguar su posición. De todos estos problemas prácticos se abstrae y desarrolla un estudio teórico de las formas, las proporciones, las relaciones métricas, las semejanzas… y a partir de la época moderna, se desarrollan la geometría analítica, la diferencial como herramientas para el estudio del movimiento, y posteriormente una miríada de geometrías (proyectiva, algebraica, no euclídea, computacional...) que se nutren del desarrollo de la matemática, la ciencia y la técnica modernas.

Esta historia sucinta de la geometría muestra cómo el ser humano ha generado esta rama abstracta de las matemáticas a partir de problemas prácticos y científicos. Un problema común a la hora de enseñar matemáticas es que resultan demasiado artificiales y poco intuitivas a los alumnos; esta génesis histórica muestra caminos por los que los alumnos pueden transitar de problemas reales hacia la abstracción. De hecho, son los caminos que siguió la humanidad en su desarrollo cultural: no hubo un Pitágoras antes de que hubiera agrimensores; un Al-Biruni antes que comerciantes ni un Descartes antes que navegantes. No se trata de repetir los pasos que dieron forma a una teoría, porque probablemente sería un camino muy poco didáctico. Pero sí se pueden tomar los problemas que llevaron a acuñar los conceptos y los contextos en los que se dieron como narrativas para hilar la enseñanza. Situar los conceptos matemáticos en los contextos históricos en los que se han usado permite relacionarlas con la tecnología y la cultura, y mostrar las matemáticas como el producto cultural que son, como una obra de la razón y de los distintos pueblos y civilizaciones que conforman la raza humana.

## ¿Adónde vamos?

Este trabajo pretende ofrecer una propuesta didáctica de geometría diseñada en base a los siguientes principios:

- Promover el desarrollo cognitivo y cultural del alumnado a través de una enseñanza significativa y de calidad. Esto implica seleccionar contenidos enriquecedores en un sentido práctico, intelectual o cultural.
- Diseño lo más universal posible, en forma no de propuesta única, sino de una diversidad de actividades y niveles de profundización que permitan cubrir la diversidad de capacidades de los alumnos a nivel individual[1].
- Diseño por módulos, esto es, no dar unidades didácticas cerradas, sino un repertorio de actividades  estructuradas que puedan combinarse de forma flexible para adaptarse a las necesidades de cada aula.
- Enseñanza basada en la evidencia: apoyarse en la ciencia para hacer una elegir escoger las técnicas, diseños o estrategias[2] docentes más efectivos.

En la primera parte del trabajo se hará una revisión bibliográfica sobre las técnicas y principios docentes a la luz de la evidencia empírica, primero para la didáctica general y después para la enseñanza de las matemáticas. En la segunda parte se

1 En ese sentido, no se organizarán actividades por cursos, sino por niveles, entendiendo  que los niveles de conocimiento pueden ser alcanzados a distintas edades dependiendo del contexto social y familiar,las aptidudes y ritmo madurativo del alumno o alumna concreta.

2 A lo largo de este trabajo, se usarán las expresiones “técnica docente”, “estrategia docente” y “diseño docente” de forma intercambiable. A efectos prácticos, la única distinción entre ellas es el nivel de aplicación, y buena parte de las técnicas pueden aplicarse a distintos niveles, incluso de forma simultánea. La técnica de repetición espaciada, por ejemplo, pueden usarse tanto dentro de una misma sesión lectiva, como a lo largo de una unidad didáctica o de todo el curso, por lo que no tiene sentido distinguir

explica cómo se ha diseñado la propuesta didáctica, y en la tercera se presenta la propuesta en sí. Atendiendo

Como se ha indicado arriba, se busca hacer una propuesta didáctica enriquecedora, efectiva y que sirva para el mayor número de casuísticas, tanto a nivel individual como de grupo. Por ello, no se presentan unas unidades ni secuencias didácticas cerradas, ni se pretende hacer una propuesta exhaustiva o adaptada a un curso o currículo en particular. Esta propuesta didáctica se plantea como un repositorio de recursos del que cada docente pueda extraer actividades e implementarlas en la medida que se ajusten a las necesidades de su grupo.

# 1-Marco teórico: la psicología cognitiva

En esta sección se revisa la literatura científica disponible que sobre la didáctica de las matemáticas. Primero se hará una introducción general sobre psicología del aprendizaje, para después pasar a cuestiones muy concretas sobre didáctica de las matemáticas. En esta sección se ha considerado a un alumno individual neurotípico[3] sin considerar sus condicionantes socioeconómicos. Dada la inmensa cantidad de casuísticas posibles, no resulta factible abarcarlas en la extensión de este trabajo. La atención a la diversidad neurológica y social, y la adecuación de la enseñanza al contexto cultural, económico y social. El marco teórico se centrará en estudiar el aprendizaje como proceso realizado por un cerebro individual[4], y como por tanto el marco será el de la psicología cognitiva.

Filósofos como Platón, Descartes, Locke o Kant habían reflexionado sobre los procesos del conocimiento, pero el estudio propiamente científico de los mismos despega con la neurología de Broca y Wernicke en el siglo XIX. A comienzos del siglo XX se desarrolla bajo el conductismo de Pavlov y Skinner, y de forma complementaria, con Vygotsky y Piaget. El desarrollo científico-técnico desde la

3 Este neologismo designa a personas sin trastornos del desarrollo neurológico u otras “anomalías”.

4 Para una explicación teórica de los de sobra conocidos efectos y mecanismos de la reproducción social sobre el sistema educativo, consúltese la ya clásica obra “La reproducción” (Bourdieu & Passeron, 2022), o (Enguita, 2001).

posguerra mundial multiplica las investigaciones y los enfoques, hasta llegar a la neurociencia moderna del siglo XXI.

## a) Aprendizaje general

### *Arquitectura del conocimiento*

La psicología cognitiva estudia los procesos mediante los que el ser humano percibe y procesa la información. Analiza y esclarece los mecanismos fisiológicos y mentales mediante los que se produce el conocimiento, tales como la percepción, la atención, la memoria o el razonamiento. Las teorías y evidencias que acumula la psicología cognitiva son la fuente más solida para poder elaborar técnicas docentes efectivas.

La capacidad cognitiva del ser humano está limitada por su arquitectura cerebral. Por ejemplo, la *memoria de trabajo* (también llamada memoria *a corto plazo*, *primaria* o *activa*) es el conjunto de elementos accesibles a la consciencia. Es un hecho empíricamente asentado que que la memoria de trabajo sólo es capaz de retener unos siete elementos de información a la vez. Si trata de procesarlos o compararlos, la misma relación ocupa por sí misma un espacio de trabajo, por lo que puede el cerebro puede procesar aún menos elementos (Sweller et al., 1998).

La memoria de trabajo explica por qué un ser humano no puede hacer demasiadas cosas a la vez, o por qué un ruido o un pensamiento intrusivo interfieren con el aprendizaje. O por qué la aritmética escrita es más sencilla que la aritmética mental, en la que debemos destinar recursos a almacenar mentalmente los resultados. De cara al aprendizaje, se sigue que sólo podemos procesar una cantidad limitada de información de una vez. O, lo que es lo mismo, sólo podemos procesar una complejidad limitada, porque las relaciones entre elementos requieren por sí mismas recursos mentales. Algunas teorías apuntan a que la memoria de trabajo consta de varios procesadores parcialmente independientes (visual, auditivo…), por lo que se se podría aumentar su capacidad empleando varios canales de información a la vez.

El aprendizaje consisten en la transferencia de información de la memoria de trabajo a la memoria a largo plazo (memoria *secundaria* o *pasiva*). Esta memoria se considera prácticamente ilimitada; un estudio con grandes maestros ajedrecistas mostró que podían aprender hasta 100.000 configuraciones del tablero distintas. En la memoria a largo plazo es donde se almacenan los conocimientos. No es accesible a la consciencia de forma directa, sino que sus contenidos deben ser primero transferidos a la memoria de trabajo (Sweller et al., 1998).

Las dos memorias dialogan a través de los procesos de codificación y recuperación; cuanto mejor codificada haya sido una información en la memoria a largo plazo, más fácil será que se mantenga y que sea recuperada por la memoria a corto plazo. La nemotecnia (o mnemotecnia) es el arte de la memoria; un conjunto de técnicas que se remontan a la antigüedad para facilitar la retención y recuperación de información. En esencia, consiste en asociar ideas o palabras a imágenes, sonidos, lugares, o encadenarlas en historias[5]. Son técnicas sencillas y muy accesibles[6], para una muestra véase el “Breve Manual de Mnemotecnia” que se incluye en las referencias (Pascual, 2014)). La nemotecnia se basa en dos mecanismos: volver la información más llamativa, y relacionarla.

La información pasa a la memoria a largo plazo mediante la codificación. Esta codificación está modulada por la atención, la emoción, la estructuración de esta información y por cómo se relaciona con nuestras informaciones previas. Se recuerda mejor algo a lo que se ha prestado atención que algo que estaba fuera del foco; se recuerda mejor un hecho emocionalmente intenso (como un beso o un accidente) que uno emocionalmente neutro (como una lista de la compra). En cuanto a la estructuración, es más sencillo recordar unidades de información pequeñas que grandes, por ejemplo,  es más sencillo memorizar un número de teléfono como

5 Algunos ejemplos de nemotecnia: para aprender la palabra “árbol” en inglés, ”tree” se visualizan tres árboles que evoquen el número 3; para aprender números de teléfono se pueden asocia cada cifra a una consonante se hace una frase; para aprender listas de palabras, se puede construye una historia o  canción con ellas; para memorizar objetos, se los puede visualizar en las habitaciones del hogar.

6 Podría resultar muy beneficioso trabajarla la nemotecnia con los alumnos, para facilitarles la memorización, y que puedan destinar más tiempo al razonamiento. Además, las técnicas obligan a elaborar la información y a usar la creatividad, por lo que hasta memorizar una lista de palabras aleatorias resulta positivo para el desarrollo del alumno y su ejercitación mental.

duplas o ternas de cifras (987-654-321 , o 987-65-43-21) que como una única secuencia de nueve números (987654321).

También es más sencillo recordar unidades de información relacionadas entre sí que si no están relacionadas, por ejemplo el primer periodo de metales de transición de la tabla periódica con la frase “E**sc**andio **ti**ene **va**rios **cromo**s **m**undiales **fe**os **co**mo **ni**ngún **cu**lo de **zinc**” que como la secuencia “Escandio, Titanio, Vanadio, Cromo, Manganeso, Hierro, Cobalto, Níquel, Cobre, Zinc”. En este ejemplo, las conexión se ha construido de forma arbitraria, pero si las relaciones entre unidades son conceptuales y razonadas, la retención es mejor. Por último, si las informaciones que se aprenden son totalmente nuevas es más difícil que se retengan y evoquen que si están conectadas con informaciones previas.

De hecho, si no se conecta la nueva información con los conocimientos previos, los alumnos pueden llegar a tener dos concepciones contradictorias de forma simultánea sin darse cuenta, y que se active una u otra según la situación. También pueden tener distintas unidades de información correctas sin ser capaz de relacionarlas (Schneider & Stern, 2010). Para fomentar esta integración es positivo el uso de diagramas, la discusión de conceptos desde distintos puntos de vista (de varias asignaturas...)y que los profesores indiquen la miríada de pequeños vínculos que hay entre su asignatura y el resto a lo largo de las lecciones.

De lo expuesto hasta ahora ya se extraen ya algunas indicaciones para facilitar el aprendizaje: dosificar la información, desmenuzarla, conectarla entre sí, conectarla con los conocimientos previos. Más adelante se detallarán formas de implementar estas técnicas en el aula de matemáticas, y concretamente en la geometría.

Volviendo al procesamiento mental de la información, el conocimiento humano se halla en la memoria a largo plazo. De ella se recuperan las informaciones necesarias para los razonamientos y la toma de decisiones. La información se almacena organizada en esquemas; un esquema categoriza sus elementos según la forma en la que van a ser empleados. Por ejemplo, el esquema mental de un zapato reúne las características esenciales que permiten identificar un zapato entre toda la diversidad de formas que puede adquirir, y normalmente se categoriza como calzado y objeto estético. Habitualmente, este esquema no incluye categorizaciones del zapato como posible abrebotellas o material para una obra de arte, aunque también pueda adquirir estas funcionalidades. Este matiz es importante, pues no es lo mismo aprender la descripción de un concepto que aprender cómo aplicarlo, ni saber aplicarlo en un contexto garantiza que se sepa aplicar en otro. No es lo mismo conocer las características de una bicicleta que conocer cómo usarla, ni saber andar en bicicleta garantiza que automáticamente se sepa andar en monociclo, aunque los principios subyacentes sean los mismo. Esta idea es muy importante de cara a la resolución de problemas matemáticos, como veremos más adelante.

Los esquemas mentales puede combinarse en esquemas mentales de nivel superior. Un ejemplo es el sistema de escritura del español: sus esquemas más básicos son los grafemas, los niños deben aprender a distinguir cada letra en toda su variabilidad manuscrita, a distinguir las letras entre sí (“p”, “b” “d” “q” son el mismo patrón con simetrías); esos grafemas se combinan en sílabas[7], la lectura silábica da paso a la lectura de palabras completas, y su atribución de sentido. Se puede leer la palabra “murciélago” sin pensar en cada una de las letras o las sílabas, y se puede manejar mentalmente el concepto de murciélago sin que todos los detalles asociados al concepto (rasgos, dieta, horarios, recuerdos asociados a ellos…) saturen nuestra mente. Esto es porque cada esquema, sin importar su complejidad ni su número de componentes, es tratado como una unidad por el cerebro.

Normalmente, los currículos se especifican como una lista de contenidos por niveles, lo que promueve una visión lineal de la docencia. Y esta visión debe ser complementada con una visión jerárquica que tenga en cuenta las estructuras de los conocimientos previos de cada alumno y del contenido que se va a impartir, para así poder establecer conexiones y poder conectar el uno con el otro.

7 En el caso del español, son bastante sencillos de leer; en inglés no hay una correspondencia grafema - fonema directa. Por no hablar de sistemas de escritura más complejos: los silabarios del cheroqui o el katakana; las escrituras abyad del árabe o el hebreo, en las que el hablante tiene que completar vocales no escritas; las escrituras logosilabarias, como el chino, que apenas indican la pronunciación. La jerarquía de esquemas que permite leer varía según el sistema de escritura utilizado. Se conservan textos de castellano aljamiado; escrito en el alifato árabe; los castellanohablantes de Al-Ándalus tendrían una esquematización para la lectura distinta a la que tenemos en la actualidad..

Resumiendo, los esquemas mentales tienen dos funciones: organizar la información para almacenarla, y aligerar la carga cognitiva. Esta condensación es lo que permite el razonamiento, pues si no la memoria de trabajo se vería desbordada:

> *Nuestro conocimiento sobre las limitaciones de la memoria de trabajo implica que los humanos somos mediocres en el razonamiento complejo a menos que la mayor parte de los elementos con los que razonamos hayan sido almacenados previamente en la memoria a largo plazo. La memoria de trabajo es simplemente incapaz de interacciones altamente complejas usando elementos novedosos […] Se sigue que los diseñosde enseñanza que requieran la combinación de elementos poco familiares probablemente serán deficientes* (Sweller et al., 1998)

La automatización de esquemas es el proceso por el cual un esquema pasa a ejecutarse de forma cada vez más ágil e inconsciente, con un uso mínimo o nulo de la memoria de trabajo. La automatización explica por qué podemos hacer una tarea familiar y atender a radio simultáneamente, por qué los niños dejan de leer letra a letra o sílaba a sílaba y llegan a leer de corrido, por qué un estudiante de bachillerato resuelve una ecuación lineal en menos pasos que uno de 2º de ESO. Y además exlipca por qué smoos caacpes de leer un teoxt auqune se haayn desodearnddo alungas letras; procasemos dirtcanemte las palrabas de forma autmoáitca.

La automatización de esquemas permite construir aprendizajes de nivel superior: la modelización de un problema de proporcionalidad será muy difícil mientras las reglas de resolución de proporciones no estén automatizadas . Mientras la resolución de ecuaciones algebraicas conlleve un gran esfuerzo consciente, no se podrán destinar suficientes recursos cognitivos a acabar de interpretar un problema algebraico.

No se puede exagerar la importancia de la construcción y automatización de esquemas cognitivos en el aprendizaje, pues son el paso previo a la aplicación y generalización de cualquier regla o resultado, matemático o del tipo que sea. En palabras de Sweller *et al* "la destreza intelectual proviene de la construcción de una gran cantidad de esquemas de complejidad creciente con altos grados de automatización". Por ello, argumenta, los los dos objetivos principales de todo sistema educativo[8] deberían ser "el almacenaje y organización de la información en la memoria a largo y la reducción de la carga de la memoria de trabajo" (Sweller et al., 1998 , p. 6).

### *Carga Cognitiva y Diseño de la Enseñanza*

La carga cognitiva de una información es la cantidad de recursos cognitivos que se requieren para procesar una información. Se distinguen tres tipos de carga cognitiva: intrínseca, esencial[9] y extrínseca (Sweller et al., 1998). La carga intrínseca va asociada a la complejidad de la propia información, y por tanto no puede aligerarse. La carga extrínseca se asocia a la forma en la que se presenta la información, y por tanto puede ser modificada por el diseño docente. La carga cognitiva esencial es aquella necesariaa para organizar la nueva información e integrarla en los esquemas preexistentes.

La carga cognitiva intrínseca depende del número de elementos que deben manejarse simultáneamente para comprender una información. Es decir, no depende de la cantidad de elementos, sino de la interacción entre ellos; por ejemplo, la lista preposiciones que del alemán que siempre usan con dativo pueden memorizarse secuencialmente sin necesidad de relacionarlas unas con otras, pero cómo se usa el dativo es una regla gramatical abstracta que requiere considerar varios elementos a la vez (preposición + sustantivo + adjetivo + dos terminaciones de dativo). Entonces la lista de preposiciones tiene menor carga intrínseca que el uso de las mismas.  De hecho, el verbo "comprender" sólo se aplica a conocimientos que impliquen relaciones, esto es, a elementos con alta carga intrínseca; no se

8 Por supuesto, estos objetivos se limitan a la función puramente cognitiva del sistema educativo; sus funciones de formación moral y reproducción social deben ser consideradas aparte según criterios éticos y políticos.

9 *germane cognitive load* en inglés

comprende una lista de preposiciones, pero sí se comprende el uso del dativo; no se comprende la fecha de unificación de Castilla y Aragón, pero sí los motivos de ella.

Por abundar en ejemplos: un número de teléfono y la fórmula para la resolución de ecuaciones cuadráticas tienen aproximadamente el mismo número de elementos , pero el número de teléfono es una secuencia sin interpretación, mientras que la fórmula tiene un sentido y simbología asociadas, y por tanto mayor carga intrínseca.

Siguiendo con la fórmula de resolución de ecuaciones cuadráticas, un alumno no puede procesarla hasta que no haya comprendido primero sus elementos individuales: debe conocer el significado y uso de una fracción, de un cuadrado, una raíz cuadrada, y saber identificar e interpretar los coeficientes *a* , *b*, y *c* . Sólo cuando haya comprendido y esquematizado esos elementos podrá integrarlos en un esquema de orden superior, que sea la fórmula completa.

A la hora de aprender manipulación algebraica, la regla “si un número está dividiendo a un lado, pasa multiplicando al otro” sólo requiere manipular un elemento al tiempo, mientras que “multiplicar ambos lados por el mismo número” implicar procesar ambos lados de la ecuación a la vez. Por ello, el segundo procedimiento resulta más costoso, aún si se memoriza sin razonarlo.

La carga cognitiva extrínseca depende de la forma en la que se presente una información. Por ejemplo, para comprender una fórmula que explique sus símbolos nuevos en un texto aparte, el alumno tiene que primero leer el texto, segundo entender la información, tercero retenerla , cuarto mover su atención a la fórmula y quinto darle sentido. Mientras que si los símbolos vienen explicados justo debajo de la fórmula en forma de lista, el esfuerzo de procesamiento es mucho menor. O bien, aprender la estructura de una biomolécula de una descripción textual tiene mucha más carga extrínseca que aprenderla de un dibujo o diagrama, porque el dibujo ahorra la carga de leer, interpretar, visualizar en el espacio y después dibujar.

Puede ilustrarse la importancia del tipo de representación con una serie de experimentos sobre resolución de problemas que hicieron Hayes, Simon y otros colaboradores en los años 80 (Kotovsky et al., 1985). Presentaron problemas isomorfos al de la Torre de Hanoi que sólo diferían en la forma en la representación, y observaron diferencias en los tiempos de resolución de hasta 16 veces. El éxito en la resolución de un problema depende del dominio a la hora de manipular las reglas del problema, y de la capacidad de planificar la resolución. Cuanto más costoso sea aprender estar reglas y automatizarlas, más tiempo de entrenamiento de entrenamiento se requiere, y menos recursos cognitivos quedan disponibles para planificar la resolución. Las diferentes representaciones del mismo problema diferían en su complejidad lingüística, en la dificultad de comprobar si los movimientos eran lícitos, en lo familiares o intuitivas que resultaban las representaciones, e incluso en la cantidad de memorización pura que requerían. Verbigracia, la representación material de la Torre de Hanoi, o una representación gráfica, permiten comparar tamaños y comprobar si un movimiento es válido a simple vista, mientras que en las representación simbólica hay que aplicar reglas de ordenación abstractas. También, una representación en la que se mueven objetos resulta más sencilla que una en la que se transforman, por ser más intuitiva y fácil de visualizar. Las representaciones con objetos familiares[10] resultan más sencillas de procesar que aquellas en las que se usan alienígenas que trasforman objetos (Kotovsky et al., 1985).

El tercer tipo de carga cognitiva es la esencial. Ésta refleja el esfuerzo empleado en construir esquemas con la nueva información, retenerla, estructurarla y dotarla de significado, y también en integrarla en el conocimiento previo (¿Cómo se relaciona con lo que ya sabía?). Cuanto mayores esfuerzos se dediquen a organizar y asimilar esta la nueva información, a dotarla de sentido y a establecer conexiones con otros conocimientos, mejor quedará fijada y más rico será el aprendizaje. Por este motivo, es positivo aumentar la carga esencial del aprendizaje, siempre y cuándo no se sobrepase la capacidad de la memoria de trabajo. Las técnicas docentes que fomentan la elaboración del contenido y reflexión sobre el mismo, y las técnicas metacognitivas, todas ellas consiguen aumentar la carga cognitiva esencial. La metacognición es el conocimiento de las personas de sus propios procesos cognitivos y las habilidades y estrategias para autorregularlos[11].

10 Se abundará en la importancia de las representaciones familiares cuando abordemos la estrategia docente de la personalización.

11 Varias técnicas docentes que se repasarán en las sección 1 b) se apoyan en la metacognición

En síntesis, un buen diseño docente trata de reducir la carga cognitiva extrínseca y de aumentar la carga esencial dentro de la capacidad de la memoria de trabajo. Dicho de manera más sencilla: un buen diseño docente presenta los contenidos de la forma más sencilla posible, evitando florituras y distracciones de lo esencial, y a la vez fomenta que el alumno conecte y elabore el contenido del aprendizaje.

***Síntesis***

La psicología cognitiva y la teoría de la carga cognitiva dan un marco teórico riguroso de cómo se procesa y almacena la información en el cerebro. En esencia, la capacidad de procesamiento consciente del ser humano es muy limitada, por lo que el cerebro organiza la información en esquemas orientados a una funcionalidad.

Esta compactación permite manejar mayor cantidad de información, construir esquemas de orden superior y razonar con ellos. La automatización de esquemas permite procesarlos de forma inconsciente, y así libera memoria de trabajo. Los esquemas permiten elevar la capacidad de pensamiento humano a nuevos niveles, por lo que la enseñanza debe centrarse en fomentar la construcción y automatización de esquemas cognitivos. Schneider y Stern sintetizan en diez puntos (Schneider & Stern, 2010) las principales aportaciones de la psicología cognitiva a la teoría del aprendizaje. Se recogen en la Tabla 1:

| RESULTADO TEÓRICO | PRINCIPIO DOCENTE |
|---|---|
| El **aprendizaje**... | |
| 1 … lo **realiza el estudiante**, no el docente | Conocer la forma que cada estudiante construye su conocimiento y lograr que esté mentalmente activo. |
| 2… requiere la **integración de estructuras** de conocimiento | Conectar la nueva información con los conocimientos previos, mostrarla desde otros puntos de vista y relacionarla con otras asignaturas. |
| 3 ...está **limitado por la arquitectura** y capacidad **de las estructuras cerebrales** de procesamiento de la información | Presentar información significativa, dosificada y de manera que ni el orden ni la forma supongan una dificultad añadida. |
| 4 … se produce como interacción entre **emoción, motivación y cognición** | El estado emocional, la motivación y el rendimiento académico están conectados como engranajes; no se cambia uno sin cambiar los otros. |
| 5 … requiere **tiempo y esfuerzo** | “Aprender puede y debe ser divertido, pero es el tipo de diversión que tiene escalar una montaña, no el tipo de diversión que es sentarse en la cima a disfrutar las vistas” (Schneider & Stern, 2010) |

| RESULTADO TEÓRICO | PRINCIPIO DOCENTE |
|---|---|
| **El aprendizaje óptimo...** | |
| 6 ...construye en base a los conocimientos previos | La evaluación deben darse durante todo el proceso de enseñanza, no sólo al acabar, para conocer el punto de partida y los errores de aprendizaje |
| 7 …equilibra conceptos, habilidades y herramientas metacognitivas | Las habilidades metacognitivas permiten conectar conceptos y procedimientos. Los primeros se aplican en los segundos, y los explican |
| 8 ...organiza pequeñas unidades de conocimiento de forma jerárquica para forma estructuras de conocimiento mayores | La información se debe presentar dosificada, relacionada y en orden de complejidad creciente. |
| 9 ...usa estructuras del mundo externo para organizar el conocimiento en la mente | La secuenciación temporal, el diseño visual, los diagramas, los materiales… deben ser acordes a la organización de la información. |
| 10 … construye estructuras de conocimiento transferibles | Centrar la atención en las estructuras y no en lo superficial, fomentar la reflexión, la analogía y relacionar los problema con situaciones cotidianas |

*Tabla 1: Principales conclusiones de la psicología cognitiva para el aprendizaje, según Schneider y Stern (Schneider y Stern, 2010)*

## b) Aprendizaje de las matemáticas

En este apartado se revisará la literatura científica sobre técnicas de enseñanza específicamente enfocadas a las matemáticas. Existen clasificaciones y revisiones diversas, pero el presente trabajo se fundamenta en dos, principalmente. Una es el capítulo “Evidence for Cognitive Science Principles that Impact Learning in Mathematics” del libro “Acquisition of Complex Arithmetic Skills and Higher-Order Mathematics Concepts” (Booth et al., 2017) , y otra es el número 42 (2) de la revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM) de Agosto de 2017, dedicado en exclusiva a repasar la eficacia de distintas técnicas y principios docentes a la luz de la evidencia empírica, desde el punto de vista de la psicología cognitiva; un buen resumen de este número de ZDM es su introducción (Verschaffel et al., 2017).

| **Categoría** | **Técnica Docente** |
|---|---|
| **I Memoria y Soltura** | **1. Repetición Espaciada e Intercalación** |
| | **2. Personalización del contexto** |
| | **3. Retroalimentación** |
| | **4. Andamiaje** |
| **II Inducción y Perfeccionamiento** | **5. Representaciones múltiples** |
| | **6. Ejemplos resueltos.** |
| **III Comprensión y dotación de sentido** | **7. Analogías** |
| | **8. Comparación de estrategias** |
| | **9. Textos refutatorios** |

*Tabla 2: Resumen y clasificación de las técnicas docentes revisadas*

Booth *et al.* clasifican las técnicas docentes en tres apartados, usando el tipo de capacidad que se fomenta: I- memoria y soltura, II- inducción y perfeccionamiento y III- comprensión y dotación de sentido (Booth et al., 2017). La primera categoría es la más general, son técnicas que pueden aplicarse a la asimilación de los elementos más sencillos, sean contenidos (memoria) o procedimientos (soltura). La segunda categoría abarca técnicas destinadas a establecer puentes entre elementos concretos y aprendizaje más abstractos, a la sofisticación conceptual (inducción) y procedimental (perfeccionamiento). Por último, la tercera categoría se ocupa de la comprensión y dotación de sentido, es decir del máximo nivel de elaboración, y buena parte de sus técnicas podrían calificarse de metacognitivas. En la Tabla 2 siguiente recogemos las técnicas que se repasarán, y que serán desarrolladas más adelante, en la sección de diseño docente.

## I Memoria y soltura

### *1-Repetición Espaciada e Intercalación*

La repetición espaciada[12] busca optimizar la frecuencia con la que se evoca o practica un aprendizaje. Es una de las técnicas más estudiadas y mejor conocidas, y en ella se basa una gran cantidad de programas informáticos de aprendizaje autodidacta, como Anki, Duolingo, EdApp, Mochi, Memrise… Se puede implementar de forma física con unas tarjetas con los elementos de aprendizaje, un separador y un calendario que planifique los repasos.

La investigación concluye que separar las repeticiones es más beneficioso que concentrarla (*efecto espaciado*), por ejemplo el mero hecho de repartir una lección entre dos días en vez de impartirla en uno solo mejora sustancialmente la retención de conceptos (Cepeda et al., 2006). También, que es más beneficioso aumentar los intervalos de repetición progresivamente (*efecto demora*): 2 min, 15 min, 24h, 3 días… se han calculado las curvas de olvido (porcentaje de retención vs. tiempo) y establecido el momento óptimo para los recuerdos en diversos contextos.

De cara a la docencia en el aula, quizás resulte excesivo establecer repeticiones perfectamente calendarizadas de todo el contenido, aunque sí se puede realizar un mazo de tarjetas con los conceptos más importantes para que los alumnos las repasen con un *software* de repetición espaciada. Una forma muy sencilla de aplicar esta técnica es realizar repasos de todo el temario cada cierto tiempo, por ejemplo mediante cuestionarios en vivo (Plickers, Kahoot!, Toohak!)..., y un posterior refuerzo de los conceptos en los que hayan fallado.

12 *Spaced repetition* o *distributed practice* en inglés, según los autores; el primero suele utilizarse más para aprendizajes conceptuales, y el segundo para aprendizajes procedimentales.

Por otra parte, cuando se realizan problemas o se repasan conceptos, pueden ordenarse de dos formas: *por bloques*, o *intercalada*, es decir mezclando conceptos de distintos bloques o problemas de distintos tipos, para que no se sepa cuál. La docencia habitual suele practicar un tipo de problema inmediatamente después de haber explicado el método, o dentro de la misma unidad didáctica, por lo que el alumno sabe qué método debe utilizar dentro de un repertorio muy pequeño. Aunque este diseño parece ser el adecuado para afianzar el aprendizaje inmediato, los estudios empíricos muestran que la intercalación mejora el aprendizaje tanto en la resolución de problemas como en la retención de conceptos (Rohrer et al., 2015) .

En conclusión, el estudio por bloques (para establecer un aprendizaje) debe complementarse con el estudio intercalado para asentar el aprendizaje. Esta estrategia es muy sencilla de implementar.

### *2- Personalización del Contexto*

La personalización del contexto consiste en presentar un contenido dentro de un contexto que le resulte familiar o de interés. Existen distintos grados de personalización, desde cambiar los nombres o contextos de un problema-tipo a preparar problemas totalmente distintos para cada alumno, o incluso establecer proyectos distintos acordes a los intereses. La personalización varía en la profundidad, la finura (si se personaliza por grupos o de forma totalmente individual), y el grado de control que sienten los alumnos sobre la tarea que se les encomienda.

La revisión bibliográfica heca por Walkington y Hayata (Walkington & Hayata, 2017) no muestra evidencias concluyentes sobre el efecto de la personalización sobre el aprendizaje ; en unos estudios se muestran efectos positivos, en otros neutros, y en algunos incluso aparecen ligeros efectos negativos. Esto se puede deber a la diversidad de diseños didácticos y experimentales que fomentan uno u otro de los dos efectos asociados a la personalización de contexto.

Por una parte, personalizar aumenta la motivación del alumnado y mejora su predisposición ante la materia; los alumnos tienden a disociar las matemáticas de la escuela de la vida cotidiana, y los ejemplos de sus áreas de interés establecen un puente entre ambos “mundos”. También, si ya conocen datos del contexto en el que se les presenta el contenido, se les reduce la carga cognitiva necesaria para asimilarlo. Por otra parte, la personalización añade elementos distractivos que pueden aumentar la carga cognitiva del aprendizaje, y desviar la atención del alumnado de los conceptos matemáticos a otros aspectos de su área de interés. Cuanto más fina y profunda sea la personalización, más trabajo requiere para el docente, mientras que la personalización superficial (problemas tipo en los que se cambian detalles de forma automatizada) no ha mostrado efectos significativos sobre el aprendizaje (Walkington & Hayata, 2017).

Resumiendo, el profesor debe ponderar la distracción que pueda suponer la personalización frente a la implicación que genere en los alumnos, y priorizar la claridad conceptual y adecuación del contenido a un mayor atractivo superficial,.

### *3- Retroalimentación*

Retroalimentación es cualquier comunicación del docente con el alumno que pretende evaluar, orientar o dirigir su aprendizaje. Al ser un proceso comunicativo básico, es enormemente variada en sus formas y enfoques, por lo que la literatura científica que se ha podido revisar no cubre todos los formatos y situaciones posibles. Siendo rigurosos, las conclusiones que se presentan a continuación sólo se han comprobado en unos contextos muy particulares[13] (Booth et al., 2017), por lo que no está garantizado que se puedan generalizar. No obstante, se basan en principios que es razonable pensar que se pueden aplicar de forma más amplia.

Primera conclusión: es más efectiva la retroalimentación enfocada a procesos (la motivación del alumno, sus fortalezas y debilidades, los procedimientos de resolución…) que la enfocada a calificaciones (numéricas o del tipo que sea). La calificación es una forma de refuerzo conductual que tiene mayor o menor impacto según la disposición del alumno y su entorno. En cualquier caso, la calificación puede motivar, pero no proporciona guía sobre cómo debe enfocarse el aprendizaje

13 Para más detalles, consultar los artículos citados en las páginas 303 y 304 de la referencia.

(la nota me dice que no sé resolver sistemas lineales, pero me dice por qué ni cómo puedo remediarlo). Por contra, la retroalimentación enfocada a procesos permite averiguar dónde están los problemas de forma más precisa (motivación, conocimientos previos, comprensión del enunciado, operaciones con enteros, manipulación algebraica, dislexia, déficit de atención…), y ponerles un remedio ajustado a las dificultades, de aprendizaje o del tipo que sean.

Segunda conclusión: los alumnos rezagados se benefician de la retroalimentación más que los alumnos aventajados. Un alumno con más conocimientos previos, más destreza o unos conceptos y procedimientos asentados puede ser más autónomo, mientras que aquel que tiene mayores dificultades puede recibir más apoyo. Es una obviedad y, además, una obviedad con respaldo científico.

Tercera conclusión: la retroalimentación inmediata es mejor que la demorada, porque la inmediatez facilita la asociación entre el error y su solución. En la revisión de Booth se extrae una cuarta conclusión: la retroalimentación usando vídeo es más efectiva que por escrito. Se explica porque el video atrae más la atención del alumno, porque es comunicación multicanal (visual + auditivo) y porque ralentiza el ritmo del alumno y le da más tiempo para asimilar (y además puede rebobinar el video tantas veces como quiera).

La forma de retroalimentación más simple y antigua es la conversación cara a cara, una comunicación bidireccional que permite obtener mucha información si sabe encauzar. El diálogo socrático, por ejemplo, es una planteamiento utilizado en educación, psicología terapéutica, filosofía y otros ámbitos para canalizar las conversaciones(Knezic et al., 2010). Sus propuestas son: escuchar activamente, formular y reformular explícitamente las cuestiones, pedir aclaraciones, confirmar la comprensión, deducir a partir de cada conclusión, rastrear las asunciones, explicarlas, abstraer, concretizar… son habilidades sencillas de aplicar si se parte de una actitud de comunicación sincera y abierta[14].

14 Parece una obviedad que los docentes deban tener esta actitud, pero en el citado artículo de Knezic *et al* se menciona el sorprendente número de veces en las que los profesores dan explicaciones sin saber exactamente qué les está preguntando un alumno, véase la página 1.

También hay que tener en cuenta que una excesiva retroalimentación puede dificultar el desarrollo de los alumnos. Por ejemplo, en el análisis de ejemplos resueltos, un exceso de asistencia impide que los alumnos elaboren sus propias explicaciones (Renkl, 2017), con lo cual se pierde la efectividad de la técnica. Por qué es necesario ir retirando el apoyo a los alumnos se explica con la siguiente técnica docente.

### *4-Andamiaje*

Andamiaje[15] comprende cualquier diseño docente que cree unos modelos o comportamientos temporales para al alumno a alcanzar un nivel de conocimientos, y que posteriormente serán eliminados[16]. El andamiaje se basa en la teoría del desarrollo proximal de Vygotsky, según la cual, grosso modo, se desarrolla la capacidad de realizar una actividad de forma autónoma realizando esa actividad con apoyos externos primero. Existe una gran variedad de conceptualizaciones del andamiaje en la literatura, lo cual dificulta establecer comparaciones unificadas, pero hay cierto consenso sobre dos requisitos que debe cumplir el andamiaje.

El primero es que debe adecuarse al nivel de partida del estudiante: realizar un mismo andamiaje para todos los alumnos se demostró perjudicial en comparación con no proveer ningún andamiaje, porque demoraba el aprendizaje de algunos alumnos(Booth et al., 2017). Y también hay que tener en cuenta que el andamiaje, en tanto que pretende ser temporal, puede interferir con los aprendizajes ulteriores. Véase el sesgo de los números naturales: es fruto de la concepción de los números como recuentos, necesaria para introducir los números a los niños, pero que luego entorpece la generalización del concepto de número. Por ello introducir un andamiaje a un alumno que no lo necesita puede llegar a ser contraproducente.

El segundo requisito del andamiaje es que el apoyo debe retirarse de forma progresiva, o de lo contrario el aprendizaje se estancará. Dicho con otras palabras, debe transferirse gradualmente la responsabilidad del profesor al alumno.

15 *Scaffolding* en inglés.
16 Una metáfora del andamiaje son los “ruedines” que se usan para aprender a a anda en bicicleta: están pensados para ser quitados en algún momento, pero son un estadío necesario.

Una técnica general de andamiaje en matemáticas es proveer a los alumnos de ejercicios resueltos en los que primero falta un paso, en el siguiente ejemplo faltan dos… hasta que los alumnos consigan resolver el problema de forma totalmente autónoma. Esta transición se puede acompañar de preguntas o indicaciones sobre cuál es el objetivo del paso, qué falta por hacer, cómo se ha llegado hasta ese paso… entonces se está introduciendo una actividad metacognitiva que refuerza la comprensión del proceso de resolución. El grado de concreción de las preguntas también puede irse reduciendo para dar más autonomía. Esta forma de andamiaje se ha demostrado efectiva no sólo en la resolución de problemas-tipo muy estructurados , también en el aprendizaje de la demostración y el razonamiento matemático, usando problemas que enseñan heurísticos en vez de procedimientos cerrados (Reiss et al., 2008).

Un ejemplo más concreto de andamiaje sería enseñar a modelar problemas con ecuaciones lineales a los alumnos, y al principio permitirles resolver las ecuaciones de forma automática con software, para que se centren en la modelización sin tener que destinar esfuerzos cognitivos a la manipulación algebraica. Así, incluso se podría enseñar a modelizar con ecuaciones antes de enseñar a resolverlas, con lo cual se mostraría su utilidad e interés, y se podría motivar mejor su estudio.

## II Inducción y perfeccionamiento

### *5-Representaciones múltiples*

Las matemáticas estudian objetos abstractos que sólo nos son accesibles a través de distintas representaciones algebraicas, geométricas, gráficas, simbólicas, materiales…. La riqueza de las matemáticas estriba en su capacidad para obtener unas propiedades en una representación y traducirlas a otra representación cualquiera[17]. Por ejemplo, saber manejar la notación algebraica $3x + 5 = 20$ permite resolver un problema (*Cuántos kilos de manzanas a 3€/kg he comprado si he*

17 por ejemplo, la multiplicación de números complejos como escalados y rotaciones en el plano, o los teoremas de isomorfía de aplicaciones lineales como rangos de matrices.

*pagado 20€ y me han devuelto 5€*). Pero es distinto aprender a interpretar y resolver ecuaciones lineales que aprender a resolver problemas con ellos; saber resolver 3x + 5 = 20 no garantiza que uno sepa utilizar esa representación con un problema real.

Cada representación suponen una carga cognitiva añadida a la del propio concepto que se quiere enseñar. Por eso es importante elegirlas cuidadosamente; es difícil aprender conceptos novedosos de una representación que resulta poco familiar. Si un estudiante no ha aprendido a interpretar una representación, o no es capaz de establecer conexiones entre unas y otras representaciones , entonces su aprendizaje se verá dificultado (Rau & Matthews, 2017).

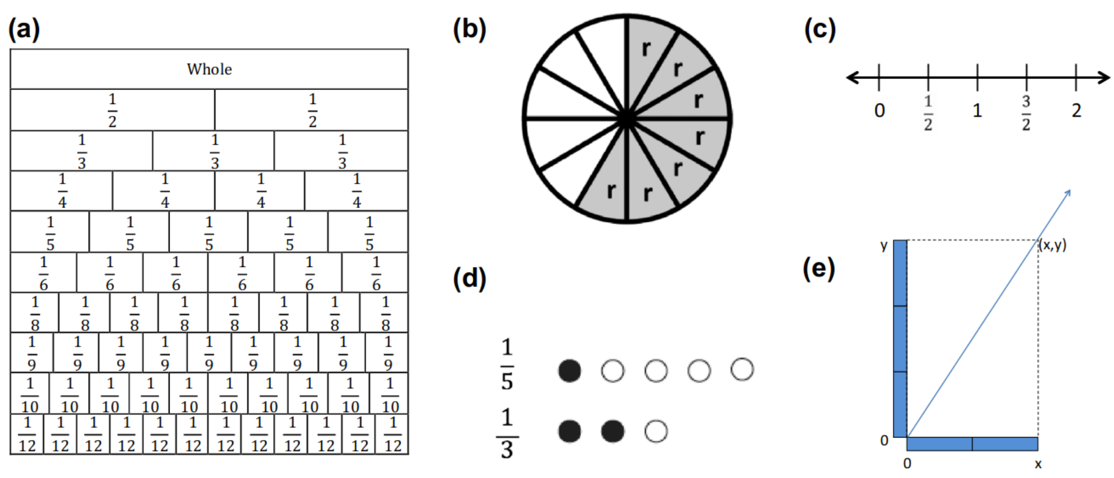



*Figura 1: Algunas representaciones utilizadas para enseñar fracciones:*

*a) baldosas* — *d)modelo de fichas*

*b) diagrama de sectores* — *e) representación vectorial*

*c) recta numérica*

*Tomado de (Rau & Matthews, 2017) , p 533*

Por ejemplo, las fracciones / números racionales pueden verse como un mega-concepto con (al menos) seis interpretaciones: partes de un todo, números decimales, razones, cocientes, operadores o medidas. La representación de fracciones mediante baldosas ayudan a entender la fracción como partes de un todo, pero no como magnitudes; la representación en recta numérica permite ver las fracciones como decimales; la representación simbólica permite entender las fracciones como operadores, pero promueve el sesgo del número natural... Distintos autores se decantan por unas u otras representaciones como la “mejor”, pero dada la diversidad de ventajas e inconvenientes de cada una, lo aconsejable parece ser utilizar varias sin excederse en número.

Rau y Matthews (Rau & Matthews, 2017) recopilan directrices de varios autores para hacer que una representación sea efectiva, y las resumen en cuatro competencias que deben trabajarse respecto a las representaciones:

- **Comprensión visual**[18]: es la capacidad de distinguir los detalles visuales relevantes y de conectarlos con los conceptos. Para trabajar esta habilidad, se sugiere explicitar y recalcar las conexiones y fomentar las autoexplicaciones de los alumnos para que establezcan las correspondencias. Es mejor que los alumnos se impliquen en un proceso de atribución de sentido a que se les den todas hechas. Por ejemplo, se les puede encomendar hacer autoexplicaciones que asocien una explicación escrita con la representación visual, o ejercicios de traducción de las propiedades gráficas a alas conceptuales.

- **Soltura visual**: se refiere a la capacidad para disgregar porciones visuales[19] y la eficacia para percibir su sentido entre representaciones y actividades, y entremezclar las representaciones con las actividades. Para desarrollar esta capacidad, se recomienda usar varias representaciones y cambiar frecuentemente entre ellas. se mejora la capacidad para interpretar una representación si se les presentan varios ejemplos de la misma representación visual donde cambien los detalles pero se mantenga constante un concepto. Cuando se expone a los estudiantes a la representación visual en problemas variados, se les facilita que identifiquen qué características visuales recogen información conceptual importante con más frecuencia. Este proceso de activación de sus conocimientos sobre la representación aumenta la probabilidad de que se recupere esta información

18 En inglés *visual understanding, visual fluency, connectional understanding* y *connectional fluency.*
19 *Visual chunks* en original; se trata de un concepto asociado a la psicología de la percepción.

en el futuro, y reduce el esfuerzo necesario para ello. Dos estudios empíricos citados en el artículo (Rau & Matthews, 2017) apuntan a que es más efectivo para este propósito cambiar de tipo de actividad un mayor número de veces que cambiar de tipo de representación con mayor frecuencia.

- **Comprensión relacional**: es la capacidad para relacionar y comparar distintas representaciones visuales. Para fomentarla, se sugiere realizar comparativas entre representaciones, guiar a los alumnos en las transiciones entre unas y otras promover que desarrollen autoexplicaciones. Los estudiantes deben establecer relaciones no sólo entre una representación y el concepto abstracto, también entre distintas representaciones. Deben establecer las conexiones tanto de forma verbal como visual. Un ejemplo de ejercicio sería presentarles el mismo ejercicio por duplicado con indicaciones para resolverlo con una y con otra representación a la par. Otro ejercicio muy útil sería pedir a los alumnos que señalen cuáles son las características importantes en distintas representaciones, y explicar las diferencias entre las representaciones, particularmente qué muestran unas que otras no.

- **Fluidez relacional**: hace referencia a la eficacia a la hora de conectar distintas representaciones visuales y traducir significado de unas a otras. Para desarrollar esta capacidad, se recomienda pedir a los alumnos frecuentemente que distingan y categoricen representaciones visuales y darles retroalimentación inmediata sobre sus intentos. Cada cambio de representación activa los conocimientos sobre la misma, y por tanto los refuerza y ayuda a asentarlos.

En cuanto a los tipos de representaciones más adecuadas, la bibliografía científica apunta a que las representaciones más concretas (objetos materiales, dibujos realistas…) favorecen la comprensión inicial y la conexión con los conocimientos previos, mientras que las representaciones más abstractas (geométricas, algebraicas…) favorecen la generalización y la transferencia de modelos a nuevas situaciones. Se sugiere transitar progresivamente de representaciones más concretas (Booth et al., 2017), para aprovechar los beneficios de cada tipo de representación en el momento adecuado del aprendizaje. Con todo, la eficacia didáctica de cada representación varía según el grupo de edad, el docente y las capacidades de razonamiento de cada alumno. No hay evidencia firme para establecer estos efectos, pero las investigaciones apuntan que alumnos con menor capacidad de razonamiento, o de edades más tempranas (a las que no se ha desarrollado plenamente la capacidad de abstracción) se benefician más de las representaciones concretas. Por contra, los detalles accesorios de las representaciones más concretas no resultan provechosos a quienes ya tienen una capacidad de abstracción mayor, sea por edad o por diferencias individuales del desarrollo neurológico y vital.

### *6-Ejemplos resueltos.*

Es habitual que los docentes de matemáticas resuelvan ejercicios en la pizarra para explicar procedimientos. También pueden entregarse ejercicios resueltos por escrito, y en ambos casos los estudiantes pueden tomar esos ejemplos para analizarlos y usarlos como guía. El llamado Aprendizaje Basado en Ejemplos hace un uso más extenso e intenso de ellos: Resulta positivo que los estudiantes analicen procedimientos de resolución, es una actividad metacognitiva en la que se identifican objetivos y se dota de sentido a los pasos realizados. Los alumnos no siempre saben realizar estas autoexplicaciones, por lo que resulta muy efectivo (Renkl, 2017) dar indicaciones sobre cómo hacerlas ("¿qué consigue este paso?", "¿por qué se multiplica la x?", "¿Por qué funciona este método? …).

Una variante de esta técnica que ha mostrado muy buenos resultados es dar ejemplos incompletos en los cuales sólo falten algunos pasos. Resolver un problema requiere manejar muchos elementos de forma simultánea (los objetivos, el significado de los objetos, la traducción del enunciado, los algoritmos de resolución…), lo cual puede desbordar la memoria de trabajo del novel. Un ejemplo resuelto permite aligerar esa carga, y un ejemplo parcialmente resuelto permite focalizarse en uno de los pasos de la resolución y asimilarlo de forma separada, antes de poder integrar los pasos en un esquema cognitivo superior. Por tanto, es una buena técnica para la adquisición inicial de habilidades de resolución de problemas (Renkl, 2017) . Estos ejemplos parcialmente resueltos pueden presentarse como un cómic

La soltura en la resolución de problemas se adquiere cuando se domina el abanico de posibles movimientos o transformaciones asociadas a un estado determinado del problema. Por poner un ejemplo corriente: un ajedrecista no puede aprender principios tácticos hasta que tenga automatizado el movimiento de las piezas. En un apartado anterior se ha citado el conocido estudio con problemas isomorfos al de la Torre de Hanoi (Kotovsky et al., 1985) en el que se observó que la agilidad en la resolución del problema dependía de la soltura a la hora de realizar movimientos.

Habitualmente, las estrategias de resolución de problemas están orientadas a objetivos (despejar la “X”, hallar una relación de proporcionalidad…), más que a transformaciones, por lo estas estrategias podrían no facilitar la adquisición de esquemas procedimentales. Estudios empíricos corroboran que el uso de ejemplos resueltos resulta mucho más eficaz que el aprendizaje convencional de problemas (Sweller & Cooper, 1985), sobre todo en las primeras etapas de adquisición.

Se ha observado que cuando los estudiantes están aprendiendo a resolver problemas en un ámbito que aún no dominan, no son capaces de utilizar estrategias propias de ese dominio, por lo que acuden a estrategias heurísticas a veces poco eficaces (identificar palabras clave, emular el último tipo de problema utilizado…). Se ha comprobado que los ejemplos parcialmente resueltos que provoca autoexplicaciones fomenta la transferencia de aprendizaje entre distintos tipos de problemas (Atkinson et al., 2003). Uno de los mecanismos por los que podría ser efectiva esta técnica es porque se puede utilizar para entrenar heurísticos útiles para la resolución de problemas generales (Reiss et al., 2008).

## III Comprensión y dotación de sentido

### *7-Analogías*

El razonamiento por analogías permite establecer similitudes entre dominios conocidos y nuevos dominios. Son efectivas si se basan en similitudes estructurales y no en detalles superficiales. Las analogías permiten establecer hipótesis de trabajo, por lo que son una buena estrategia de resolución de problemas y de descubrimiento (Vamvakoussi, 2017).

En el lado negativo, las analogías con conocimientos previos pueden entorpecer el aprendizaje. Un ejemplo muy conocido es el llamado "sesgo de los números naturales", que transpone las propiedades de este conjunto al de los números racionales y decimales. Por ejemplo: un decimal más largo es más grande, multiplicar siempre hace más grande, o razonar que 1/8 > 1/6 por ser 8 > 6.

Una recomendación es acompañar las analogías entre ámbitos matemáticos (entre la recta y los números), de analogías-puente con la realidad (la recta como una goma elástica) para ilustrar conceptos nuevos (la densidad de los números racionales). En este sentido, los puentes entre geometría y aritmética resultan de mucha utilidad, ya que la geometría es fácil de conectar con fenómenos tangibles. La primera concepción que adquieren los niños de número es como ente para contar, y después trabajan los números como entes para operar (estructuras algebraicas, en el fondo). Una concepción intermedia es la de números como medidas; ésta permite agrupar todos los números (incluso los complejos) y es la forma en la que se conectan aritmética y geometría.

### *8-Comparación de estrategias*

En ocasiones se enseña a los estudiantes varios procedimientos para resolver un mismo tipo de problema. Además de enseñar varias estrategias, se ha comprobado que fomentar la comparación refuerza los conocimientos conceptuales y procedimentales de los alumnos (Durkin et al., 2017) . Refuerza los conceptos, pues ayuda a elucidar la idea que subyace en un problema, y por tanto a entender las similitudes estructurales entre los distintos procedimientos. Se recomienda utilizar esta estrategia en combinación con representaciones múltiples del problema y una vez los estudiantes hayan adquirido soltura en los procedimientos por separado. Se puede implementar con la discusión en el grupo completo, planteando la resolución por grupos que discutan de forma guiada sus estrategias (Mevarech, 1999), o de forma individual. Una forma individual de trabajar la comparación de estrategias es plantear un problema en un folio dividido por la mitad, para que en cada parte se resuelva por un método distinto, e incluyendo preguntas que fomenten y guíen comparación, ya que los alumnos no siempre son capaces de plantear adecuadamente este tipo de actividades metacognitivas (Renkl, 2017).

### *9-Textos refutatorios*

Durante el proceso de aprendizaje pueden asimilarse mal los conceptos, dando lugar a ideas erróneas que interfieren en el aprendizaje. También puede haber preconcepciones procedentes dela vida cotidiana, o intuiciones erróneas. Un ejemplo es la interpretación del área de los diagramas de caja y bigote como una proporción de datos.

Los textos refutatorios son una herramienta didáctica que enuncia explícitamente una idea errónea, la refuta y construye en su lugar una idea correcta. Son una forma de inducir un conflicto cognitivo, es decir forzar al cerebro a identificar una contradicción y readaptar los esquemas mentales para resolverla. Son adecuadas para abordar errores comunes del aprendizaje, o pueden utilizarse *ad hoc* para alumnos concretos que manifiesten una dificultad persistente.

Una revisión de la bibliografía disponible (Lem et al., 2017) sobre textos refutatorios arroja tres conclusiones: primera, que son una herramienta más eficaz para promover el cambio conceptual que un texto estándar en el que no se expliciten ni refuten las ideas erróneas. Segunda, los textos refutatorios no son una panacea: algunos estudios muestran efecto positivo, otros neutro, y no se muestran efectos para todos los alumnos. Esto puede deberse a que unas concepciones estén más arraigadas que otras, por su naturaleza o por la trayectoria del alumno, bien a la calidad del texto refutatorio o a que éste se adapte mejor o peor al estilo de aprendizaje de cada alumno; aún no se conocen las condiciones óptimas para aplicarlos. Tercera conclusión: las intuiciones incorrectas siguen apareciendo tras el uso de textos refutatorios, pero su uso sí ayuda a superar las intuiciones erróneas mediante razonamientos conscientes.

En síntesis: es una técnica positiva para lograr el cambio conceptual si se diseña de forma adecuada y si se complementa con seguimiento y otras técnicas para lograr que ese cambio conceptual se complete y se dé en todos los alumnos.

# 2-Diseño Docente

En esta sección indicaremos los criterios utilizados para la selección de contenidos, las metodologías y materiales escogidos, y la forma en la que se combinarán en la propuesta didáctica

## a) Selección de contenidos

La primera cuestión a la hora de realizar una propuesta didáctica es ¿Qué se quiere impartir? Para lo cual es necesario primero encontrar justificar el contenido que se elige a las necesidades del alumnado y a sus capacidades. Esto es, no hay que caer en la inercia de enseñar, por ejemplo, la clasificación de los cuadriláteros, simplemente porque estén en todos los temarios, sino pensar para qué niveles, grupos o incluso tipos de alumnos es de provecho ese aprendizaje. También, el contenido debe estar adaptado a las capacidades del alumnado según su nivel de desarrollo cognitivo, sus capacidades innatas, sus conocimientos previos y su orientación vital.

Respecto a qué contenido enseñar al alumnado: la enseñanza de las matemáticas no debería[20] tener un fin puramente utilitario (para aplicarla), también cultural e instrumental. En tanto las matemáticas son un fruto de la creatividad y la razón humana, y juegan un papel fundamental en la ciencia y economía modernas, una persona culta tiene que conocerlas al menos a un nivel divulgativo. Y e fin instrumental del aprendizaje de las matemáticas es el desarrollo de la capacidad de abstracción  y razonamiento lógico que, si bien no son exclusivas de esta materia, sí que se trabajan con especial intensidad. Por tanto, no hay que limitar el temario a lo que un alumno vaya a aplicar en su futura vida profesional, pero tampoco obcecarse en enseñar sobre todas las áreas de las matemáticas ni al mismo nivel de profundidad a todos los alumnos. Por ejemplo, el análisis, que entraña especial dificultad, podría enseñarse en detalle tan sólo a los alumnos que vayan a cursar carreras científico-técnicas, y a nivel divulgativo al resto. En cambio, se podría argumentar que la estadística y probabilidad son más útiles al público general, y por tanto se les debe dedicar más tiempo en la programación. Se puede abogar por introducir la teoría de grafos en el temario, por ser un contenido muy intuitivo y a la vez permitir razonamientos y demostraciones sencillas, o por incluir rudimentos de teoría de grupos, por ser una introducción asequible al álgebra abstracta.

En cuanto a qué contenido es capaz de aprender el alumnado, es preciso considerar la distancia entre el nivel de conocimientos y capacidades actuales y los que se pretenden conseguir. Formulado en otros términos, debe evaluarse la carga cognitiva que supone un aprendizaje dado, tanto en sus componentes intrínseca (para el nivel de desarrollo madurativo) y esencial (el coste de su encaje en los esquemas actuales del alumno). Un aprendizaje puede resultar muy valioso, pero suponer un esfuerzo excesivo y suponga que se deban sacrificar otros aprendizajes importantes. Además, un currículo que priorice la cantidad a la calidad del aprendizaje se arriesga a conseguir aprendizajes superficiales y frágiles, que sean olvidados pronto y tengan que ser reconstruidos de un curso para otro.

20 A juicio del autor.

La carga cognitiva es un concepto difícil de cuantificar de forma exacta[21], así que en este trabajo se utilizará la clasificación de actividades que realizaron Stein y Lane (ver página siguiente) a modo orientativo, junto con el buen entender del autor[22], en tanto que persona formada en matemáticas, para graduar la dificultad de los aprendizajes y actividades asociadas a los mismos. La dificultad de un aprendizaje puede valorarse en función de su extensión, de la interactividad de sus elementos (versección 1-a , apartado “Carga Cognitiva y Diseño Docente”), de los conocimientos previos que requiere y de lo familiar o intuitivo que resulte al alumnado. El contexto histórico en el que fue acuñado un concepto o inventado un procedimiento puede servir de indicativo de su dificultad; algunas de las ideas que se enseñan en el aula tardaron milenios desarrollarse, y son obras de genios; no puede esperarse que los alumnos los adquieran en su vida cotidiana ni de forma intuitiva, sino a través de oportunidades de aprendizaje diseñadas de forma profesional que guíen su proceso de construcción del conocimiento.

Por supuesto, a la hora de diseñar la enseñanza para un aula concreta, debe ser el docente particular el que evalúe los conocimientos previos y las necesidades específicas de su grupo de alumnados concreto y, en función del mismo, module lo aquí expuesto, y diseñe la docencia según su buen entender profesional.

Procedemos a exponer la clasificación de actividades según su complejidad. Stein y Lane (Stein & Lane, 1996) establecen seis tipos de actividades cognitivas que pueden darse en el aula de matemáticas. Las dos primeras son

- Actividades no matemáticas
- Exploración asistemática o improductiva

Que, lógicamente, deben evitarse en el aula de matemáticas, a menos que formen parte de un proyecto interdisciplinar (por ejemplo, el estudio de fénomenos físicos para un proyecto sobre mecánica) o sirvan a la educación en otros aspectos, como

21 Para más detalles, véanse las páginas 266 a 268 de *Sweller et al, 1998)
22 No debe entenderse este criterio como una defensa de la subjetividad o una vanidad por parte del autor, sino como una respuesta práctica a la ausencia de (o al menos extrema dificultad para encontrar) tablas de cargas cognitivas detalladas y adaptadas al contenido de este trabajo.

puedan ser el sanitario, el afectivo-sexual o la educación en valores cívicos (por ejemplo, el estudio de datos históricos, epidemiológicos u otro tipo de estadísticas o fenómenos para la concienciación social).

Por tanto, quedan cuatro actividades cognitivas propiamente matemáticas que se pueden realizar en el aula, que se enumeran en orden creciente de demanda cognitiva e interés didáctico:

| |
|---|
| I. Memorización |
| II. Procedimientos algorítmicos |
| III. Procedimientos conceptuales |
| IV. Pensamiento no algorítmico (“hacer matemáticas”) |

*Tabla 3: Tipos de cognitivos matemáticos en el aula de matemáticas, según el marco conceptual de Stein y Lane (Stein y Lane, 1996)*

Las dos primeras son de alta demanda cognitiva y las dos últimas, de baja demanda cognitiva. Las actividades de baja demanda cognitiva son I- la memorización de contenidos y II- los procedimientos algorítmicos, esto es, sin conexiones conceptuales. Las actividades de alta demanda cognitiva son III- la ejecución de procedimientos con conexiones conceptuales y IV- el pensamiento no algorítmico.

El nivel I es la memorización de conceptos, por ejemplo la definición de triángulo isósceles o la fórmula para la resolución de ecuaciones cuadráticas, el nivel más básico, y puede fomentarse mediante una presentación llamativa y significativa del contenido, la repetición espaciada, la nemotecnia y la conexión con otros conocimientos, sean previos o sean parte de la nueva unidad. Esto es, los conceptos se afianzarán mejor cuando se apliquen, se muestre su utilidad y se relacionen dentro de la unidad didáctica, esto es se incluyan en esquemas cognitivos de orden superior. Pero las actividades de nivel I consisten en la adquisición de los esquemas básicos, antes de su integración en esquemas mayores.

El nivel II comprende procedimientos que se ejecutan sin realizar conexiones conceptuales ni reflexionar sobre los mismos. Es decir, son esquemas de nivel básico, pero esquemas de tipo ejecutivo, o sea secuencias de instrucciones en vez de conjuntos de contenidos. Algunos ejemplos seríam la resolución automática de una regla de 3, la resolución de una ecuación lineal o la aplicación del teorema de Pitágoras para calcular una hipotenusa directamente a partir de los catetos. Automatizar estos procedimientos permite liberar recursos cognitivos para que puedan destinarse a la modelización de problemas e interpretación de soluciones. Una actividad puede ser de nivel II porque se haya aprendido sin una explicación de su funcionamiento, o porque ya se conoce esta explicación, pero se posee la suficiente destreza para poder ejecutarla de forma automática.

El nivel III abarca los procedimientos que requieren una interpretación para poder ser ejecutados, o que son razonados de forma consciente para dotarlos de un sentido. Es decir, estas actividades no se realizan de forma automática, sino que suponen un esfuerzo consciente de conexión entre conceptos y procedimientos. Ejemplos serían la resolución de un problema verbal de aritmética o álgebra, en los que hay que conectar los enunciados con las operaciones matemáticas asociadas. Cualquier procedimiento de nivel II se convierte en una de nivel III en el momento que el alumno se detenga a justificar los pasos de resolución, y una actividad de nivel III lo suficientemente practicada pasará a convertirse en una de nivel II. Por ejemplo, al resolución de un triángulo por trigonometría supone un esfuerzo para el novel, que debe decidir qué razón trigonométrica utilizar, mientras que para el experimentado esta elección se da de forma automática.

Por último, el nivel IV comprende las tareas abiertas para las cuales el alumno apenas dispone de guía, bien porque no conoce aún un método estándar para resolverlo, bien porque no existe tal método. Este tipo de actividades requieren una planificación, elección y evaluación de procedimientos y estrategias. Son el nivel más abstracto y elaborado de actividad matemática, y no puede lograrse hasta que no se disponga un mínimo repertorio de conocimientos y herramientas matemáticas para abordar la tarea. No es posible abordar problemas de estática si no se conoce el cálculo diferencial y no se han trabajado ejemplos, pero con todo los ejemplos que se pueden abarcar de este tipo de problemas nunca abarcarán la variabilidad y complejidad que pueden alcanzar. Un ejemplo de actividad de tipo IV serían problemas de tipo Olimpiada Matemática. Otro ejemplo interesante sería presentar a los alumnos un problema sin darles todas las herramientas necesarias, y que sean ellos los que tengan que elaborar los conceptos necesarios. Por ejemplo, pueden enseñarse los puntos y rectas notables de un triángulo sin dar las definiciones, sino planteando a los alumnos problemas que los conduzcan a acuñar los conceptos de bisectriz o circuncentro por sí mismos; éste sería un enfoque constructivista del aprendizaje.

Los contenidos se han estructurado y agrupado por módulos. Estos módulos son menores que lo que podría considerarse una unidad didáctica. De hecho, están concebidos para combinarse en unidades didácticas variables que se ajusten a las necesidades del curso y grupo al que se quiera impartir. También pueden fragmentarse, aunque se han intentado agrupar de la forma más cohesionada y lógica posible, y con el mínimo número de redundancias. En principio, no están limitadas a las asignaturas de matemáticas, sin oque algún módulo podría impartirse como refuerzo en asignaturas de física, de otros ámbitos científicos o en formas menos compartimentadas de impartir la enseñanza, allá donde se apliquen.

Se recalca que no pretende ser un programa exhaustivo ni abarcar toda la geometría que se podría impartir; se ha limitado a la geometría clásica, esto es sin incluir las geometrías analítica, diferencial o proyectiva, es decir sin incluir las aportaciones del cálculo diferencial e integral o la topología. Sí que se han considerado introducciones a otras áreas de las matemáticas que se puedan abordar sin introducir demasiados conceptos nuevos.

## b) Metodología y Evaluación

Cada metodología didáctica sirve a unos fines y tiene unas fortalezas y desventajas, como se ha visto en el marco teórico. Por tanto, la mejor forma de impartir docencia es combinando metodologías que se adecúen a la naturaleza del contenido concreto, y que, en conjunción, permitan llegar a todos los alumnos.

En cuanto a la evaluación, resulta positivo realizarla en todas las etapas del aprendizaje a nivel informativo para el docente: al principio, para medir los conocimientos previos, durante el aprendizaje para diagnosticar los posibles errores y realizar un seguimiento, y al final, para comprobar el grado de éxito. En ese sentido, la evaluación formativa abarca cualquier proceso o producto del trabajo en el aula (o para el aula, en caso de deberes) del que el profesor reciba una retroalimentación, sea en forma de entrega, sea por observación.

Cómo debe traducirse esa evaluación en calificaciones (por resultados, por procedimientos, por competencias, autoevaluación, coevaluación, con rúbrica, con examen, ponderaciones…), cómo debe registrarse (portafolio, diario de clase, cuaderno…) o cómo comunicarse a los alumnos y sus familias son asuntos que dependen mucho de la política del centro, del departamento didáctico y del profesor concreto por lo que este apartado se limitará a exponer los aspectos evaluativos de cada tipo de actividad y metodología incluida en esta propuesta didáctica.

- **Explicaciones magistrales:** la exposición de unos contenidos conceptuales o procedimentales en vivo, normalmente con el apoyo de una pizarra y medios audiovisuales. Se aconseja que no dure más de 20-30 minutos, pues al ser una metodología pasiva es fácil que los alumnos dejen de prestar atención si no se cambia de actividad pasado ese tiempo. Pueden intercalarse preguntas al alumnado para favorecer la atención e implicar al alumnado, pero es una metodología prácticamente unidireccional, por lo que no tiene aspectos evaluativos.

- **Explicaciones asíncronas:** exposición de unos contenidos por escrito o en vídeo. Otorga mucha autonomía al alumno, por lo que no es aconsejable usarla si el alumno no está en condiciones de ejercerla de forma constructiva. Puede resultar útil para reforzar a alumnos rezagados o permitir profundizar a alumnos aventajados sin tener que alterar el ritmo del grueso de la clase

- **Ejemplos resueltos o incompletos:** puede tratarse de la exposición por escrito de un ejercicio resuelto para que el alumno lo tome como referencia para seguirlo, o puede ser un ejemplo con indicaciones para ser completado y analizado; esta segunda variante es una actividad metacognitiva que estimula o encauza la reflexión del alumno. Un ejemplo es realizar un "Matecómic" con pasos de un procedimiento dibujados y escritos, y que el alumno deba completar o las explicaciones o las viñetas, o una mezcla de ambas[23]. Este cómic metacognitivo puede usarse para evaluar el grado en el que se ha interiorizado o comprendido un procedimiento.

- **Práctica semiautónoma:** la realización de problemas o ejercicios en el aula, sea por escrito, en digital o con material, en la que esté permitido en distintos grados consultar al profesor o a compañeros. Por ejemplo, una batería de ejercicios con soluciones para realizar individualmente para coger soltura con un procedimiento, mientras la profesora mientras se pasea atendiendo dudas. Otro ejemplos: dar ejercicios conceptuales sin soluciones a resolver en parejas, para fomentar las explicaciones entre iguales y el aprendizaje cooperativo. Estos dos procedimientos pueden ser autoevaluativos o heteroevaluativos. Un examen tradicional sería un caso de práctica totalmente autónoma con fin expresamente evaluativo[24].

- **Experimentación guiada:** con dibujos, papiroflexia, materiales, programas informáticos o cualquier otro soporte con el que los alumnos puedan seguir unas instrucciones abiertas para comprobar propiedades, demostrar teoremas o formular hipótesis. Los experimentos pueden ser realizados por el profesor

23 Algunas fuentes, llaman a variantes a esta técnica "base de orientación"
24 La única diferencia entre un examen tradicional y cualquier otra entrega individual es la forma en la que se presenta a los alumnos y el peso que se le da en la nota.

y discutidos por el grupo, pero resulta más motivador si cada alumno lo realiza de forma individual. Puede evaluarse el grado de implicación, capacidad de seguir instrucciones, creatividad o ingenio, pero en principio no la adquisición de contenidos. Es una metodología muy constructivista.

- **Cuestionarios en vivo:** existen distintas aplicaciones informáticas (Kahoot!, Plickers, Socrative, Toohak…) que permiten crear cuestionarios para que sean respondidos en el momento con los alumnos. Es una herramienta que bien usada implica mucho a los alumnos, aún si se etiqueta como un examen. Pueden utilizarse para evaluar los conocimientos previos (y/o activarlos). El software está diseñado para facilitar la recogida de resultados, por lo que es una herramienta evaluativa muy práctica para el docente.

- **Problemas o investigaciones abiertas:** dan libertad al alumnado para explorar sus intereses y capacidades. Pueden usarse para que los alumnos avanzados profundicen, o para conectar la asignatura con otros ámbitos. Sus resultados en forma de entrega o presentación pueden usarse para evaluar la creatividad, motivación y esfuerzo de los alumnos. También puede plantearse la resolución de un tipo de problemas sin haber explicado el método, con un enfoque constructivista. El peligro que entraña es que los métodos tentativos erróneos interfieran después con el aprendizaje del método correcto.

- **Exposiciones guiadas de los alumnos:** puede tratarse de la exposición de un problema, un trabajo guiado o una investigación . Fomenta la elaboración del conocimiento adquirido (organización, autoexplicaciones… ) como paso previo a exponer, y también fomenta las habilidades comunicativas.

- **Proyectos didácticos:** un proyecto didáctico es un problema o narrativa que sirve de hilo conductor para plantear actividades en una o varias asignaturas a la vez, y en el que se da un grado de autonomía al alumno. Por ejemplo, la Antigua Roma puede conectar hacer arte romano en la artes, un herbolario a la romana en biología, además de estudiar su historia y mitología en la asignatura de Cultura Clásica.

## c) Materiales

- **Papelería:** papel, de cualquier tipo para realizar papiroflexia, experimentar con áreas y dibujar desarrollos planos, ocasionalmente cartón o cartulinas y pines para construir el goniómetro o papiroflexia en 3D , pajitas y plastilina para construir sólidos, un cuaderno preferiblemente cuadriculado para tomar notas y dibujar áreas, e instrumentos de escritura de varios colores

- **Baterías de ejercicios y problemas:** de elaboración propia[25]

- **Regla y compás:** representan la recta y la circunferencia, sirven para materializar los conceptos y convertirlos en procedimientos. Opcionalmente, se pueden incluir escuadra y cartabón, pues agilizan algunas construcciones.

- **Mapas** (impresos o digitales): permiten ilustrar los conceptos de distancias y áreas, realizar mediciones usando la escala, dibujar trayectos y recintos…

- **Calculadora científica** estándar con funciones trigonométricas y exponentes

- **Balanza o báscula digital y legumbres:** sólo si se va a experimentar con áreas y volúmenes, son una forma de medición haciendo la equivalencia superficie ocupada (una capa de legumbres) / peso o volumen/ peso

- **Geogebra[26]:** esta aplicación de geometría es gratuita y de código abierto; en su página hay abundantes recursos creados y subidos por los usuarios. Permite realizar con agilidad mediciones y construcciones estáticas y dinámicas. Puede ser proyectada por el profesor o utilizada por los alumnos en ordenadores, o incluso en sus teléfonos móviles en aplicación o en línea.

- **Sólidos geométricos**: algunos departamentos disponen de estos objetos en madera o plástico, aunque pueden sustituirse por objetos cotidianos, como conos de helado y pelotas.

25 Ver algunos ejemplos en anexos
26 https://www.geogebra.org/

# 3-Propuesta didáctica

Esta propuesta está organizada en módulos, que cada profesora puede agrupar en unidades didácticas según sus necesidades Cada módulo de esta propuesta didáctica incluye una tabla con los conceptos y procedimientos que enseñar y algunas propuestas de actividades y comentarios. Después se da una justificación para incluir el módulo, una clasificación por niveles de Stein y Lane, una temporalización orientativa[27] y, en algunos casos, indicaciones generales sobre metodología y evaluación,  referencias y enlaces de interés. En cuanto a los proyectos, se proponen varios con posibles desarrollos, que lógicamente deberán ser consensuados con el resto de departamentos y profesores del centro implicados.

<table>
<tr><th colspan="2">Proyectos Interdisciplinares</th></tr>
<tr><td>• Astronomía<br>• Arquitectura<br>• Cartografía<br>• Japón</td><td>• Navegación y Comercio<br>• La Odisea<br>• Simetría y Armonía</td></tr>
<tr><th colspan="2">Módulos de contenidos</th></tr>
<tr><td>Medida<br>• Longitud y rectas<br>• Circunferencias y mediatrices<br>• Distancias generalizadas<br>• Medida de ángulos<br>• Relaciones entre ángulos<br>• Áreas elementales<br>• Pitágoras en poliedros y áreas<br>• Volúmenes elementales</td><td>Proporcionalidad<br>• Pitágoras<br>• Escala, semejanza y Tales<br>• Razones trigonométricas<br>• Razones trigonométricas inversas<br>• Triángulos: introducción<br>• Resolución de triángulos</td></tr>
</table>

27 Se asume que cada sesión de clase dura 50 minutos

## a) Módulos de medida

| **Longitud y rectas** | | | |
|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Procedimientos** | **Actividades** | **Notas** |
| Definición de punto como lo que no tiene partes | Etiquetar adecuadamente puntos, líneas curvas, rectas, semirrectas y segmentos | Comparar longitudes entres dos puntos con distintos trazados:<br><br>Andando<br><br>Dibujando<br><br>Con un cordel | Analogía de línea con el trazado de un lapicero o bolígrafo |
| Línea como conjunto conexo de puntos | | | |
| Recta como minimización de la distancia | | | |
| Rectas, semirrectas y segmentos | | | |
| Longitud de una línea<br><br>El problema de medir líneas curvas | Longitud de lineas poligonales.<br><br>Aproximación de curvas | Cálculo de distancias en un mapa impreso o  en un callejero | Se puede conectar con cartografía<br><br>Se puede ilustrar con mapas virtuales |
| Rectas paralelas, oblicuas y perpendiculares en el plano | Etiquetar adecuadamente parejas de rectas<br><br>Paralelas y perpendiculares con regla y compás, y  con papiroflexia | | Enlaza con la definición de ángulo<br><br>Perpendicularidad como el corte que separa “más rápido” las rectas |
| Perímetro | Cálculo de perímetro de figuras compuestas<br>(sin Pitágoras) | | |

- **Justificación**: la longitud, la línea y la recta son conceptos cotidianos e intuitivos, así que pueden abstraerse rápidamente
- **Niveles:** I-conceptos e interpretación II- experimentos
- **Metodología:** la experimentación con el cuerpo, el cordel o los dibujos puede hacerse sólo en el curso más bajo o en casos de adaptaciones

curriculares. La teoría puede preguntarse con una encuesta en vivo sin explicación previa, como forma de activar los conocimientos previos.

➢ **Evaluación**: no es necesario requerir de los alumnos definiciones con lenguaje técnico. En niveles superiores no es necesario evaluarlo

➢ **Temporalización:** < ½ sesión teoría (+ ½ sesión con experimentación)

<table>
<tr><th colspan="4">Circunferencias y mediatrices</th></tr>
<tr><th>Conceptos</th><th>Procedimientos</th><th>Actividades</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Circunferencias como puntos equidistantes<br><br>Círculo como interior de la circunferencia<br><br>Radio y diámetro</td><td>Triangular puntos<br><br>Uso del compás físico o virtual</td><td>Dibujar entornos en un mapa.<br><br>Dibujo: triangular puntos con compás opcionalmente sobre un mapa</td><td>Enlaza con la construcción de triángulos y con Pitágoras<br><br>También: círculo como puntos a una distancia menor a la dada</td></tr>
<tr><td>Mediatriz de dos puntos. Es perpendicular a la recta que los une</td><td rowspan="2">Trazado con regla y compás y con papiroflexia.<br>Dibujar el círculo circunscrito a un triángulo</td><td rowspan="2">Constructivismo: punto de quedada de dos y tres amigos. Explorar con cuadrícula y compás</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Circuncentro de un triángulo</td></tr>
<tr><td>Diagramas de Voronoi: definición<br><br>Historia y Aplicaciones reales</td><td>Trazado con con regla y compás<br><br>“ con papiroflexia<br>“ con geogebra</td><td>Voronoi sobre un mapa para problemas reales<br><br>Exploración en geogebra<br><br>Arte Voronoi</td><td>Arte, Ciencia y Tecnología:<br>ver enlaces debajo<br><br>Se puede conectar con algoritmia</td></tr>
<tr><td>Longitud de la circunferencia<br><br>Número Pi como razón</td><td rowspan="2">Cálculo del perímetro a partir de radio a partir de perímetro y viceversa<br><br>Cálculo del ángulo a partir del arco</td><td rowspan="2">Material: aproximación experimental con cuerdas/ cintas métricas<br><br>Medida experimental con Geogebra</td><td rowspan="2">Enlazan con la definición de ángulo y de radián</td></tr>
<tr><td>Longitud de arco de circunferencia</td></tr>
</table>

- **Justificación:** la circunferencia es el lugar geométrico más básico, y ella y la esfera aproximan muchas formas reales. Habitualmente sólo se enseñan sus fórmulas métricas, pero es de mayor riqueza conceptual explorar su definición para desarrollar la construcción de mediatrices y triángulos con unas medidas dadas. De las mediatrices a su vez nacen los circuncentros y los diagramas de Voronoi, que son tan prácticos como estéticos. La parte de métrica puede separarse para enseñar junto al área de la circunferencia, la esfera y su volumen y área, esto es, juntando todas las "figuras circulares" para mostrar sus similitudes e ilustrar mejor el significado del número Pi.
- **Niveles:** I- conceptos II- cálculos algebraicos y triangulación de puntos III si se plantea de forma constructivista a partir de Voronoi IV si se hace un abordaje constructivista tras sólo definir circunferencia
- **Metodología:** puede plantearse toda la definición de lugar geométrico y sus derivaciones de forma constructivista como un pequeño proyecto exploratorio en forma de fichas que guíen el desarrollo de conceptos, seguidas de explicaciones orales o escritas del profesor. Si no se dan las condiciones para ello, puede plantearse como lecciones magistrales seguidas de ejercicios de aplicación inmediata.
- **Evaluación**: cuestionarios en vivo con los conceptos previos al inicio de cada sesión, y fichas de evaluación que combinen preguntas conceptuales con ejercicios prácticos de dibujo y construcción de figuras
- **Temporalización:**
    - **Estándar:** 6 sesiones = 4 teórico-prácticas + 2 de integración/ evaluación
    - **Constructivista:** 10 sesiones = 4 exploratorias intercaladas con 2 sesiones de afianzamiento y 3 sesiones de integración y evaluación

**Recursos:**

- **Geogebra:**
    - Voronoi Estándar: https://www.geogebra.org/m/hphnh37j
    - Voronoi en el fútbol: https://www.geogebra.org/m/yw4hjmz9

- **Arte:**
  - Cuadros con Voronoi http://www.adamponting.com/voronoi-art/
  - Diseño gráfico con Voronoi: https://youtu.be/mEyWZmIBSqU
  - *Generative Garden* de Youtube tiene más videos explicando , arte creado con algoritmos. Una bonita conexión entre la programación, las matemáticas y el arte. Más en https://aiartists.org/generative-art-design
  - Imágenes en pinturas: https://github.com/JoshuadeJong/Voronoi-Art
  - *Voronoi Diagrams: Didactical and Artistic Applications* (Bento et al., 2018)
- **Ciencia y Tecnología**
  - Ver el blog de Naukas (Grima, 2011) https://naukas.com/2011/12/23/cada-uno-en-su-region-y-voronoi-en-la-de-todos/

| **Distancias generalizadas** | | | |
|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Procedimientos** | **Actividades** | **Notas** |
| Distancia del taxista | Cálculo de distancias del taxista<br>Diagramas de Voronoi para la distancia del taxista | Experimentar medidas sobre la cuadrícula.<br><br>Ajedrez: movimientos de rey | Se puede enlazar con grafos y con combinatoria |
| Distancia del caballo de ajedrez | | Cuadrícula: Dibujar los círculos del caballo | Se puede enlazar con grafos |
| Distancias en grafos | Calcular distancias en grafos sencillos | Construcción de sociogramas de *influencers* | Se puede enlazar con teoría de grafos más desarrollada |
| Distancia Euclídea en 1D, 2D, 3D y generalización. Definición de la n-esfera | Cálculo de distancias por Pitágoras en 2, 3 y más dimensiones | | Bachillerato<br>Requiere geometría analítica y teorema de Pitágoras. |
| Introducción a los espacios métricos: desigualdad triangular, bolas y | Utilizar la desigualdad triangular<br>Construir bolas para otras métricas | | Bachillerato, divulgación |

- **Justificación:** Los espacios métricos son fundamentales en el análisis matemático avanzado, y pueden introducirse a nivel muy divulgativo mediante distancias discretas en grafos, como las cuadrículas de un cuaderno o los tableros del ajedrez. Este contenido podría impartirse a modo de divertimento en niveles bajos, y la parte de distancias euclídeas y abstractas, en un bachillerato orientado a enseñanzas de ingeniería, física o matemáticas
- **Niveles:** I conceptos y II pequeños cálculos, ya que es a nivel divulgativo
- **Metodología:** Explicaciones cortas con fuerte apoyo audiovisual intercaladas con breves experimentos sobre el cuaderno.
- **Evaluación**: No se aplica, por ser divulgación
- **Temporalización:** 2 sesiones para la parte discreta + 1 para la abstracta

<table>
<tr><th colspan="4">Áreas elementales (I)</th></tr>
<tr><th>Conceptos</th><th>Procedimientos</th><th>Actividades</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Definición del rectángulo y el paralelogramo</td><td rowspan="2">Cálculo de áreas de rectángulos<br><br>Aproximación de áreas por cuadrados</td><td rowspan="2">Dibujo: medidas con cuadrícula<br>Material: medidas con cuadrados recortados</td><td rowspan="2">Rectángulo como segmento en 2D<br>Puede introducirse el paralelogramo como un rectángulo “inclinado”</td></tr>
<tr><td>Área para rectángulos. Medida bidimensional</td></tr>
<tr><td>Área de un paralelogramo</td><td>Demostración por recorte</td><td rowspan="3">Geogebra: deformar a paralelogramo<br><br>Papiroflexia: demostración</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>Área del triángulo</td><td rowspan="2">Deducción por papiroflexia y dibujo</td></tr>
<tr><td>Área del rombo</td></tr>
<tr><td>Área del Círculo<br><br>Pi como ciente, valor aproximado<br><br>Método Monte Carlo para áreas</td><td>Cálculo directo de área de círculos<br><br>Pseudo-demostración de la fórmula del área del círculo como triángulo</td><td>Material: cálculo de pi por peso cartón o legumbres<br><br>Geogebra: cálculo experimental de pi<br><br>Geogebra: cálculo de Pi y otras áreas por Monte Carlo</td><td>Se pueden hacer regresiones para estimar Pi.<br><br>Método Monte Carlo como dardos aleatorios en diana. Se puede enlazar con probabilidad</td></tr>
</table>

| **Áreas elementales (II)** | | | |
|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Procedimientos** | **Actividades** | **Notas** |
| Áreas y perímetros por descomposición (sin Pitágoras) | Cálculo de áreas de figuras planas compuestas | Material: cálculo por dibujo y recorte<br>Dibujo: figuras con igual área a un paralelogramo | |
| Demostraciones del Tma Pitágoras por reordenación | Reproducir y explicar la demostración | Material:<br>Dibujo / papiroflexia<br>Comics metacognitivos | Demostraciones n.º 2, 9, 15 y 24 en Cut the knot |
| Ídem por deformación | | | Demostraciones n.º 1, 12 y 16 en Cut the knot |
| Demostración de Tales por áreas | | | |

- **Justificación:** El área es la medida en dos dimensiones. Estableciendo conexiones entre longitud, área y superficie, entre segmento, rectángulo y cubo, entre círculo y esfera, se contribuye a reforzar la idea de que unas son generalizaciones de otras, o que más bien son la concreción de la idea de medida aplicada en distintos ámbitos. La deducción de las áreas del paralelogramo y el triángulo permiten introducir la demostración de forma muy intuitiva. A su vez, el método Monte Carlo refuerza la idea de Pi como razón "circular", y da una explicación no dogmática sobre cómo se conoce su valor con tanta precisión[28]. Otra forma de organizar los contenidos sería presentar segmento, cuadrado , paralelogramo, cubo y paralelepípedo en un modulo ("figuras rectas"), y círculo y esfera en otro ("figuras curvas"), que incluyera más métodos de aproximación de Pi (ej: por octógonos en el Antiguo Egipto).

- **Niveles:** I- conceptos II aplicación de fórmulas III razonar las fórmulas, establecer conexiones entre los experimentos y las fórmulas, entender la aproximación a pi por Monte Carlo IV- demostraciones

28 Aunque haya métodos mucho más eficientes para el cálculo de Pi

- **Metodología:** En grupos pequeños, niveles bajos o ACNEEs se pueden realizar los experimentos físicos o virtuales de forma individual. En niveles bajos pero grupos numerosos, los experimentos los puede realizar el profesor para toda la clase con una única balanza / pestaña de geogebra. Las demostraciones de papiroflexia o regla y compás pueden ser guiadas oralmente por el profesor, o pueden presentarse como un "Matecómic" junto a una serie de preguntas que inciten a la interpretación y la autoexplicación.

- **Evaluación**: Cuestionarios en vivo. Control oral o escrito de cálculos de áreas. Se les puede pedir que aproximen áreas usando una cuadrícula, y con ejemplos dados del método de Monte Carlo (con pocos puntos, o dándoles el conteo de puntos). Se puede usar un cómic con la demostración de las áreas del paralelogramo y el triángulo a las que tengan que poner título y etiquetas, como forma de fomentar la autoexplicación. También se les puede pedir identificar los elementos de las fórmulas antes de aplicarlas a casos concretos.
- **Temporalización:**
  - niveles bajos: 8 sesiones (5 teórico-prácticas +1 experimentos+ 2 síntesis)
  - niveles altos: 6 sesiones (3 sesiones teoría-práctica sin experimentación y 3 para demostraciones

**Recursos:**

- **Cut the Knot:** demostraciones Tales y Pitágoras https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/ThalesTheorem.shtml
  - http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml
- **Geogebra:**Monte Carlo https://www.geogebra.org/m/cF7RwK3H
- **Youtube:** Formas de calcular Pi: https://youtu.be/DQ5qqHukkAc

| **Pitágoras en poliedros y áreas** | | | |
|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Procedimientos** | **Actividades** | **Notas** |
| Prismas, pirámides y sólidos platónicos | Identificarlos | Construcción de desarrollos planos<br><br>Construcción con pajitas y plastilina<br><br>Visualización física o digital | |
| Áreas y perímetros por descomposición (con Pitágoras) | Deducción del área de un trapecio, una corona circular y un segmento circular | Dibujo y recorte | En formato numérico para niveles bajos y algebraico para niveles altos |
| Aproximación del círculo por polígonos regulares | Cálculo de perímetro y área aproximados | | |
| Desarrollo plano y áreas lateral | Cálculo del área lateral de prismas, cilindros, conos, troncos de cono, icosaedros y otros poliedros regulares | Construcción de desarrollos planos | |
| Superficie lateral de la esfera | Cálculo directo | (Comprobación experimental con papel maché) | |
| Pentágono y razón áurea | Cálculo de la apotema, | | Permite calcular las razones trigonométricas de 72º |
| Demostración del Tma Pitágoras por áreas con álgebra | Reproducir y explicar la demostración | Dibujo técnico matecómics | Demostraciones n.º 3, 4, 5 8 , y 10 en Cut the knot |

- **Justificación:** este módulo pretende sustituir al de áreas elementales en los niveles superiores, cuando ya se conoce el teorema de Pitágoras y el alumno tiene cierta familiaridad y soltura con las fórmulas básicas. Prácticamente no introduce conceptos nuevos, sino que se trata de ejercitación

- **Niveles:** II aplicación de fórmulas y III descomposición y razonamiento de áreas y perímetros IV cálculo de la razón áurea y demostración

- **Metodología:** Clase magistral para explicar la clasificación, problemas abiertos o ejercicios guiados para el cálculo de superficies laterales. Las superficies laterales pueden comprobarse dibujando los desarrollos planos.

- **Evaluación**: exposición oral o escrita de las deducciones de áreas y perímetros laterales.

- **Temporalización:** 3-4 sesiones(1 teórica, 2 de ejercicios +1 de construcción)

**Recursos:**

- **Geogebra:**
  - Sólidos platónicos https://www.geogebra.org/m/RaRhydyP
  - Aproximación del círculo https://www.geogebra.org/m/vgcv6vxx
- **Cut the Knot:** http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

| **Volúmenes elementales (I)** | | | |
|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Procedimientos** | **Actividades** | **Notas** |
| Cubo como cuadrado en 3D<br><br>Paralelepípedo como "cubo" hecho de paralelogramos | Identificar correctamente las distintas figuras; distinguir las superficies laterales de los sólidos | Inclinar cajas de cartón para conseguir cuboides | Cubo = "amontonar" cuadrados, y paralelepípedo = estirar e inclinar un cubo |
| Superficie esférica como puntos a una distancia<br><br>Esfera como su interior, o rotación de un círculo<br><br>Cono y cilindro como rotaciones de cuadrado y triángulo | | Experimentar con distintos ejes de rotación para el cuadrado y el triángulo:<br><br>con cartulinas y palillos<br>o<br>con Geogebra 3D | |

<table>
<tr><th colspan="4">Volúmenes elementales (II)</th></tr>
<tr><th>Conceptos</th><th>Procedimientos</th><th>Actividades</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Volumen de un cubo y un cuboide</td><td>Deducción por Cavalieri y cálculo<br><br>Aproximación de volumen por cubos</td><td>Geogebra: experimentar con deformaciones</td><td>Cuboide= paralelepípedo ortogonal/formado por rectángulos</td></tr>
<tr><td>Volumen de una pirámide</td><td>Cálculo directo</td><td>Material: comprobar experimentalmente con legumbres</td><td></td></tr>
<tr><td>Volumen de un cilindro</td><td>Deducción por Cavalieri y cálculo</td><td rowspan="3">Material: comprobación con legumbres de los volúmenes del cono, la esfera y ell cilindro</td><td></td></tr>
<tr><td>Volumen del cono</td><td>Cálculo directo</td><td></td></tr>
<tr><td>Volumen de esfera</td><td>Cálculo directo</td><td></td></tr>
<tr><td>Volúmenes por descomposición</td><td>Cálculo y aproximación de volúmenes compuestos</td><td></td><td></td></tr>
</table>

- **Justificación:**El volumen es la medida en tres dimensiones, una generalización del área como es el área a la propia longitud. El experimento de generar manualmente sólidos de rotación ayuda a comprender las simetrías de las figuras. Dado que las fórmulas de volúmenes para conos y esferas sólo son deducibles con el uso de cálculo, comprobarlos experimentalmente puede evitar que se perciban como un dogma.

- **Niveles:** I-conceptos II- cálculos con fórmulas dadas III-deducciónes

- **Metodología:** Lección magistral para las explicaciones conceptuales o las fórmulas cerradas, acompañadas de experimentación con legumbres o geogebra. Fichas de problemas guiados para las deducciones, previa explicación de ejemplos

- **Evaluación**: Exposición oral o escrita de las deducciones

- **Temporalización:** 4 sesiones

| **Medida de Ángulos** | | | |
|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Procedimientos** | **Actividades** | **Notas** |
| Definiciones | | Ejemplos y motivación | Se puede ilustrar con la apertura de un abanico |
| Ángulos completo, plano y recto | Clasificación de ángulos a simple vista | Experimentación con palillos o bolígrafos | Ángulo recto como caso en el que las rectas que se cruzan forman cuatro ángulos idénticos |
| Ángulos agudos, rectos y obtusos | | | |
| Ángulos cóncavos, planos y convexos | | | |
| Medida | Medida con goniómetro[29] | Construcción del goniómetro<br><br>Tabla conversiones vueltas / sexagesimal / (radianes) | |
| Sistema Sexagesimal | Conversiones sexagesimales | | |
| Radianes: medida del arco | Cálculo del arco a partir del ángulo y viceversa<br><br>Conversión radianes – grados<br>Cálculo de longitud de arco a partir de medida angular | Material: medida experimental con cuerdas/ metros | Puede omitirse en niveles bajos |
| Velocidad angular | Medición<br><br>Conversión entre velocidades lineal y angular | | Enlaza con las funciones trigonométricas<br><br>Se puede ilustrar con un molinillo de viento, o con sistemas de engranajes y motores, y una célula fotoeléctrica |

29 Ver en anexos

- **Justificación:** El ángulo es la medida del giro o rotación. No debe permitirse que esta definición intuitiva quede sepultada por las conversiones entre sus unidades de medida. Las clasificaciones de ángulos resulta sencillas, pero el concepto de radián es el más complicado de este bloque, con diferencia.

- **Niveles:** I-conceptos II- conversiones

- **Metodología:** En niveles superiores puede preguntarse omitirse todo este bloque,o presentarlo como cuestionario en vivo para activar conocimientos previos. La parte de velocidad angular se puede hilar con la asignatura de física o la de tecnología, aparte de con funciones trigonométricas

- **Evaluación**: cuestionario en vivo , fichas de ejercicios conceptuales.

- **Temporalización: 1**-2 sesiones

| **Relaciones entre ángulos (I)** | | | |
|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Procedimientos** | **Actividades** | **Notas** |
| Ángulos congruentes opuestos y formados por paralelas y secante | Congruencias básicas de ángulos | Demostraciones por papiroflexia | |
| Ángulos complementarios, suplementarios y conjugados | Cálculo del complementario, suplementario y conjugado.<br>Cálculo de ángulos restantes<br>Demostraciones algebraicas de ángulos congruentes | Dibujo técnico<br>matecómics | |
| Suma de ángulos en un triángulo | Cálculo del ángulo restante en un triángulo | Demostraciones por papiroflexia<br>Cómics<br>Metacognitivos | |

<table>
<tr><th colspan="4">Relaciones entre ángulos (II)</th></tr>
<tr><th>Conceptos</th><th>Procedimientos</th><th>Actividades</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Suma de ángulos en un polígono</td><td>Cálculo<br>Derivar la fórmula general</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Arco capaz y ángulo inscrito<br><br>Segundo teorema de tales</td><td rowspan="2">Resolver congruencias de ángulos combinando propiedades<br><br>Reproducir y entender las demostraciones</td><td rowspan="2">Demostración por papiroflexia<br>Cómics<br>Metacognitivos</td><td>Demostración por congruencias</td></tr>
<tr><td>Igualdad de ángulos en triángulos isósceles</td><td></td></tr>
</table>

- **Justificación:** las congruencias entre ángulos son una de las primeras formas de razonamiento matemático por simetrías.

- **Niveles:** I-conceptos II-cálculos y demostraciones sencillas III-congruencias en triángulos IV-demostración de los teoremas de arco capaz e inscrito

- **Metodología:** explicaciones magistrales, ejercicios

- **Evaluación**: cuestionario en vivo , fichas de ejercicios conceptuales.

- **Temporalización:** 3 sesiones

## b) Módulos de proporcionalidad geométrica

<table>
<tr><th colspan="4">Pitágoras</th></tr>
<tr><th>Conceptos</th><th>Procedimientos</th><th>Actividades</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Enunciado e interpretación</td><td>Cálculo de lados de un triángulo rectángulo<br><br>Clasificacion de triángulos según $c^2$ vs $a^2+b^2$</td><td rowspan="2">Material: comprobación con cartón/ legumbres<br><br>Geogebra: comprobación</td><td rowspan="2">Indicar que fue descubierto de forma independiente por muchas culturas y es anterior a Pitágoras</td></tr>
<tr><td>Generalización a figuras semejantes</td><td>Dibujo de figuras en posición pitagórica</td></tr>
<tr><td>Demostraciones elementales del Teorema</td><td>Reproducir las demostraciones</td><td>Dibujo y papiroflexia<br><br>Geogebra: construir la demostración<br><br>Matecómics</td><td>Ver demostraciones en los enlaces mas abajo</td></tr>
<tr><td>Perímetros de figuras compuestas</td><td rowspan="2">Cálculo de perímetros, áreas y superficies laterales de</td><td>Hojas de actividades</td><td></td></tr>
<tr><td>Superficies laterales de pirámides, paralelogramos, troncos de cono</td><td>Construcción de desarrollos planos<br>Material: comprobación con papel maché</td><td></td></tr>
</table>

- **Justificación:** la relación más famosa de las matemáticas se emplea para hallar distancias, pero en realidad es una como relación entre áreas. Dado que toda área de geometría clásica (no fractal) depende de un factor cuadrático, puede reforzarse esta idea

- **Niveles:** I conceptos II cálculos y demostraciones sencillas III congruencias en triángulos IV demostración de los teoremas de arco capaz e inscrito

- **Metodología:** explicaciones magistrales, ejercicios

- **Evaluación**: cuestionario en vivo , fichas de ejercicios conceptuales.

- **Temporalización:** 3 sesiones

**Recursos:**

- **Cut the Knot:** demostración por reordenación http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml#9
- **Geogebra:** demostración animada https://www.geogebra.org/m/GQwrmyhq
- **122 demostraciones:** http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

| **Escala, semejanza y Tales (I)** | | | |
|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Procedimientos** | **Actividades** | **Notas** |
| Escala y longitud | Cálculo de distancias a escala por regla de 3 y por conversión de unidades | Mapa: cálculo de distancias reales con escala | Conectarlo con la proporcionalidad numérica: denotar como fracciones equivalentes |
| Teorema de Tales<br><br>Escalado por Tales | Multiplicación de segmento por Tales<br><br>Escalado de figuras por Tales | Geogebra: deformación de figuras<br><br>Regla y compás: experimentación | Sirve para introducir razones trigonométricas |
| Escala y área | Cálculo del área de figuras escaladas a partir de la figura original | Geogebra: deformar figuras y conocer su área relativa<br><br>Mapa: cálculo de áreas por medición y escalado | Es importante destacar que un escalado en dos dimensiones, no escalan linealmente las distancias, en general |
| Semejanza : concepto y aplicación | Identificar semejanza con transformaciones<br>Resolver problemas usando Tales | Medida del radio de la Tierra por Eratóstenes<br><br>Fractales y autosemejanza | Se puede conectar con simetría y fractales |
| Área del cuadrado | Cálculo directo de áreas de cuadrados. | Geogebra: deformación cuadrada de figuras | Se puede usar para introducir funciones cuadráticas |
| Factor cuadrático del área | Conversión de unidades de área | | |

| Escala, semejanza y Tales(II) | | | |
|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Procedimientos** | **Actividades** | **Notas** |
| Área de la elipse por deformación del círculo | Cálculo del área de la elipse | Geogebra: deformado de figuras | |
| Escala y volumen Tales en 3D | Cálculo del volumen de figuras escaladas a partir de la original | | |
| Factor cúbico del volumen | Conversión de unidades de volumen | Geogebra 3D | |
| Demostraciones del Tma. Pitágoras por semejanza | Reproducir y explicar la demostración | Material: Dibujo / papiroflexia<br><br>Comics metacognitivos | Demostraciones n.º 6 y 19 en Cut the knot |

- **Justificación:** bajo el teorema de Tales se basa en el axioma que hace a la geometría euclídea distinta de la hiperbólica o la esférica. Tales es la base de la proporcionalidad geométrica, que suele enseñarse desligada de la proporcionalidad aritmética[30], cuando la visión geométrica permite una representación muy intuitiva.

- **Niveles:** I-fórmulas y factores II-cálculos directos III- razonamiento de las deformaciones y escalados de área y volumen IV- demostración teorema

- **Metodología:** Se aconseja usar extensamente la experimentación en los niveles bajos, para afianzar la intuición. Las demostraciones por papiroflexia se recomiendan a todos los niveles, para dotar de significado a las fórmulas. La parte de semejanza en 3 dimensiones y demostración del teorema de Pitágoras puede reservarse para niveles superiores.

30 La proporcionalidad directa se asocia a Tales, la inversa puede representarse con los lados de rectángulos de área constante (o con palancas y momentos de torsión), y el reparto proporcional con divisiones en áreas iguales (que se pueden construir con Tales).

- **Evaluación**: Una forma muy completa de evaluar la asimilación de conceptos es pedir que se escale un rectángulo usando regla y compás, en una o en las dos dimensiones, que razone por qué funciona el procedimiento de escalado, y se indique por qué factor se han escalado las áreas y las longitudes

- **Temporalización:**
  - Niveles bajos: 7 sesiones (3 explicación-experimentación, 4 problemas y evaluación, sin demostraciones ni 3 D)
  - Niveles altos: 5 sesiones (3 teórico prácticas, 1 demostración y evaluación

**Recursos:**

- **Geogebra:**
  - Igualdad de razones https://www.geogebra.org/m/YnHcB6w9
  - Incluye video de Les Luthiers https://www.geogebra.org/m/X8PdBZnR
- **Cut the knot:** http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

<table>
<tr><th colspan="4">Razones trigonométricas (I)</th></tr>
<tr><th>Conceptos</th><th>Procedimientos</th><th>Actividades</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Explicación por Tales</td><td rowspan="4">Cálculo de razones con goniómetro<br><br>ídem con un triángulo rectángulo<br><br>ídem con calculadora</td><td rowspan="4">Construcción y uso del goniómetro,</td><td rowspan="4">Ejemplos de cartografía<br>Se pueden hilar con la representación de números complejos en el plano</td></tr>
<tr><td>Motivación con ejemplos cálculo distancias inaccesibles</td></tr>
<tr><td>Seno, coseno y tangente: definiciones a partir de un círculo</td></tr>
<tr><td>Seno, coseno y tangente: definiciones a partir de triángulo rectángulo</td></tr>
<tr><td>Identidad pitagórica</td><td>Cálculo de una razón en función de otra</td><td></td><td></td></tr>
</table>

| Razones trigonométricas (II) | | | |
|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Procedimientos** | **Actividades** | **Notas** |
| Identidad pitagórica avanzada | Reescritura de cualquier razón trigonométrica en función de otra[31] | | |
| Razones de 30º, 45º y 60º | Deducción de las razones de ángulos notables | | |
| Razones del ángulo complementario, | Reducción de razones al primer cuadrante | Dibujo del círculo goniométrico<br><br>Papiroflexia: recorte y rotación para demostrar igualdades<br><br>Matecómic | |
| Razones del ángulo suplementario | | | |
| Razones del ángulo opuesto. | | | |
| Periodicidad de funciones trigonométricas | | | Se puede enlazar con funciones trigonométricas |
| Razones del ángulo suma<br><br>Razones del ángulo resta<br><br>Razones del ángulo doble | Demostración gráfica<br><br>Cálculo de razones de ángulos suma y resta<br><br>Cálculo de razones de 15º, 75º | Dibujo: demostración gráfica | |
| Razones del ángulo mitad<br>Razones de ángulos múltiples | | | |
| Fórmulas de Simpson | Linealización de productos trigonométricos | | Para integrales en bachillerato |

31 Ver tabla: https://fr.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A9_trigonom%C3%A9trique#Relations_entre_fonctions_trigonom%C3%A9triques

- **Justificación:** las razones trigonométricas recogen numéricamente el teorema de tales. Un seno o un coseno no son más que razones de proporcionalidad para una posición de Tales concreta. Las relaciones entre las razones de ángulos complementarios, suplementarios y opuestos permiten una incursión en el terreno de la demostración muy asequible. La reducción de razones al primer cuadrante es permitiría pasar al campo del análisis, a periodicidad y simetrías de funciones.

- **Niveles:** I- fórmula de Pitágoras II-cálculos directos III- cálculo de razones de ángulos notables IV- demostración teorema y demostraciones de las razones de ángulos.

- **Metodología:** este módulo entero puede plantearse en forma de problemas abiertos, sin explicar teoría, para que los alumnos deduzcan las identidades. Incluso puede enfocarse de forma constructivista según cómo se indiquen las pistas en las fichas de deducción. En los niveles inferiores se pueden omitir las fórmulas de ángulos suma

- **Evaluación**: se puede dar a los alumnos el valor numérico de un seno, y pedirle que calcule el resto de razones de ese ángulo, y su suplementario, complementario y opuesto sin calculadora , y que después razone cómo ha hallar esos valores. Mismo procedimiento para ángulos múltiples o sumas de ángulos, pero dando dos razones.

- **Temporalización:**

    - Niveles bajos: 6 (2 conceptos, resto con fichas (sin ángulos múltiples)

    - Niveles altos: 7 sesiones (4 primera parte, 3 ángulos suma y múltiples)

<table>
<tr><th colspan="4">Triángulos: introducción</th></tr>
<tr><th>Conceptos</th><th>Procedimientos</th><th>Actividades</th><th>Notas</th></tr>
<tr><td>Definición de triángulo y notación</td><td>Denotar correctamente ángulos, lados y vértices de un triángulo</td><td rowspan="4">Dibujo técnico</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>Clasificación por ángulos: acutángulo, rectángulo, obtusángulo</td><td>Clasificar triángulos a simple vista</td></tr>
<tr><td>Clasificación por lados: equilátero, isósceles, obtusángulo</td><td>Clasificar triángulos a simple vista</td></tr>
<tr><td>Perímetro definición</td><td>Cálculo inmediato de perímetro</td></tr>
<tr><td>Área triángulo rectángulo definición</td><td>Demostración papiroflexia<br>Demostración gráfica<br>Cálculo inmediato</td><td rowspan="2">Papiroflexia</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Altura y área de un triángulo general</td><td>Cálculo con Pitágoras<br>Cálculo con razones</td></tr>
<tr><td>Fórmula de Herón para el área</td><td>Cálculo</td><td></td><td>Sin demostración</td></tr>
<tr><td>Triangulación de polígonos</td><td></td><td>Geogebra: área de una imagen por aproximación poligonal y triangulación</td><td></td></tr>
<tr><td>Perímetros de triángulos</td><td>Altura y perímetro de triángulos isósceles, equiláteros y generales</td><td></td><td></td></tr>
</table>

- **Justificación: e**l triángulo es la forma más sencilla de la geometría plana. Usando líneas rectas, es la figura con área más elemental que se puede construir. El resto de polígonos pueden triangularse, esto es, descomponerse en triángulos, y los polígonos pueden aproximar cualquier forma plana: campos de cultivo, edificios, sistemas de fuerzas…. El verbo “triangular” tiene una acepción más general, que es la de localizar un punto a partir de otros dos: los sistemas GPS triangulan nuestra posición, como los barcos se triangulaban mediante los faros, o incluso mediante las estrellas. Dado que nuestro planeta es esférico, los triángulos planos dejan de ser buenas aproximaciones cuando aumentan las distancias.

- **Niveles:** I- clasificaciones y fórmulas II- cálculos directos III- cálculo de perímetros de triángulos

- **Metodología:** explicación magistral y aprendizaje basado en ejemplos, se recomienda abundar mucho en la importancia del triángulo como base de la geometría plana, y en la triangulación como aplicación práctica. La fórmula de Herón y el cálculo de perímetros pueden omitirse en los niveles inferiores.

- **Evaluación**: cuestionarios en vivo y fichas de ejercicios cortos

- **Temporalización:** 5 sesiones (3 teórico-prácticas +2 triangulación)

| Resolución de triángulos | | | |
|---|---|---|---|
| **Conceptos** | **Procedimientos** | **Actividades** | **Notas** |
| Qué es resolver un triángulo<br><br>Aplicaciones a la topografía, la navegación y la geografía<br><br>Resolución de triángulos rectángulos | Catetos a partir de la hipotenusa y un ángulo. | Ejemplos incompletos<br><br>Fichas de ejercicios<br><br>Problemas verbales | |
| | Hipotenusa a partir de un cateto y su ángulo adyacente | | |
| | Hipotenusa a partir de un cateto y su ángulo opuesto | | |
| | Ángulos de un triángulo rectángulo a partir de los lados | | |
| Resolución de triángulos oblicuángulos | Oblicuángulo a partir de dos lados y sus ángulos opuestos | Ejemplos incompletos<br><br>Fichas de ejercicios<br><br>Problemas verbales | |
| | Oblicuángulo a partir de dos ángulos y el lado común a ellos. | | 2º ciclo Requiere ecuaciones lineales |
| Autosemejanza en el triángulo rectángulo | Aplicación Demostraciones | Dibujo técnico<br><br>matecómics | Problema Tell Harman |
| Tma. de Al-Kashi (Ley del Coseno) | | | Presentar como generalización del Tma. de Pitágoras |
| Ley del Seno | | | Demotración por áreas y alturas o por ángulo inscrito |
| Mediatrices y circuncentro | Cálculo del circunradio y del inradio<br><br>Construcción con regla y compás<br><br>Construcción con papiroflexia | Dibujo técnico y papiroflexia | |
| Bisectrices e incentro | | | |
| Alturas y Ortocentro | | | |
| Medianas y baricentro Centro de gravedad | | Centro de gravedad en cartón | |

- **Justificación:** la resolución de triángulos es la aplicación que da sentido práctico a la construcción original de la trigonometría. La semejanza en el triángulo rectángulo es conocido desde Babilonia. El resto del módulo no es tan importante que se memoricen (las partes notables del triángulo o las leyes) como que se sepan construir y demostrar sus propiedades.
- **Niveles:** I- definiciones II-resolución de triángulos rectángulos III- resolución de triángulos oblicuángulos IV- demostración teoremas
- **Metodología:** Para la resolución de triángulos, se recomienda un aprendizaje basado en ejemplos, empezando por ejemplos totalmente resueltos e ir retirando pasos, como forma de andamiaje. Las partes notables de un triángulo y las leyes se recomienda enfocarlas desde un el constructivismo, mediante fichas con indicaciones para deducirlas o conocer sus propiedades
- **Evaluación**: la resolución de un triángulo oblicuángulo es un ejercicio muy completo para la resolución de triángulos. A un nivel superior, se pueden plantear la resolución de triángulos construidos a partir de los puntos notables de un triángulo mayo
- **Temporalización:**
  - Niveles bajos: 8 sesiones ejemplos y práctica de resolución de triángulos
  - Niveles altos: 10 sesiones (4 resolución triángulos + 3 teoremas +
    3 sesiones partes notables )

**Recursos:**

- **Arte:** el Tamiz de Apolonio https://fineartamerica.com/art/apollonian+gasket

- **Matemáticas Visuales:** http://www.matematicasvisuales.com/

## d) Proyectos interdisciplinares

Los proyectos que se presentan a continuación tienen una duración y alcance variables: algunos abarcan unas pocas asignaturas y duran un mes o un trimestre, otros pueden ser implementados a nivel de centro en todas las materias. Dependiendo de la disposición de los departamentos docentes y el equipo directivo, puede modularse el grado de implicación y coordinación de los proyectos.

### **Arquitectura** (Física, Historia, Arte, y Tecnología)

La arquitectura es una disciplina a caballo entre la técnica y la estética, por lo que puede ser abordada desde la física y sus matemáticas subyacentes, desde la Historia y desde el Arte . Los distintos estilos arquitectónicos responden a cambios tecnológicos además de a modas estéticas, por lo que son una confluencia de disciplinas de mucho provecho. No se tiene por qué seguir un orden cronológico, y se pueden incluir distintas civilizaciones de todo el globo: zigurats babilónicos, pirámides amerindias o egipcias, mezquitas otomanas, iglesias católicas, ortodoxas, arquitectura tradicional sudanesa, japonesa, griega, túrquica, escandinava, la arquitectura totalitaria soviética o la fascista, vanguardias europeas, el Bauhaus, el Art Déco, el posmodernismo arquitectónico… Esta variedad puede aprovecharse para inculcar el valor de la diversidad cultural, y el respeto a otra culturas.

- **Matemáticas:** La arquitectura da pie al estudio de las simetrías en la ornamentación y los teselados. También al estudio de las proporciones en la construcción, el cálculo de volúmenes y áreas de edificios asociados la cuantificación de costes de materiales. A niveles superiores, se pueden parametrizar las curvas de edificios y detallar las propiedades geométricas de las cónicas con edificios modernos que las utilizan.

- **Física:** en niveles altos se pueden realizar diagramas de fuerzas. En niveles bajos pueden realizarse explicaciones gráficas o experimentos sencillos sobre equilibrios de fuerzas. Si dispusieran de un laboratorio con instrumentos de medición sencillos, podrían usarse para realizar las mediciones experimentales de áreas y volúmenes, en caso de que el departamento de matemáticas no dispusiera de ese instrumental.

- **Historia:** entender cómo nace y se propaga un estilo arquitectónico, es entender las rutas comerciales, hegemonías políticas y modas artísticas de una época. Se pueden realizar rutas por una ciudad y leer en sus edificios la historia. Los estilos más abundantes suelen corresponder a las épocas doradas de cada ciudad; por ejemplo Sevilla está cubierta de barroco y el Barcelona de Modernismo. También pueden realizarse rutas virtuales con aplicaciones como Street View o similares.

- **Arte:** más allá de profundizar en la historia de las corrientes arquitectónicas, puede ser enriquecedor que los alumnos imiten los estilos de ornamentación de cada época en dibujos, o que construyan miniaturas de zigurats a pequeñas catedrales, sea en papel maché, con cartón plegado.

- **Tecnología:** pueden construirse puentes que usen distintos tipos de arcos y cuerdas para repartir las cargas; también se pueden construir polígonos y poliedros en madera u otro material sobre los que luego estudiar propiedades en matemáticas. También se pueden reconstruir grúas romanas, medievales y modernas, andamios, polipastos, chorobates, bombas hidráulicas y todos los mecanismos que se han utilizado en la construcción. También se podría tratar la química de los materiales de construcción.

**Recursos:**

- **Gaudí:** https://apuntesdearquitecturadigital.blogspot.com/2019/10/el-arquitecto-gaudi-y-la-catenaria-las.html
- **Más Gaudí:** https://www.xataka.com/otros/secretos-geometricos-gaudi-catenarias-hiperboloides-profunda-simbologia-numero-12

## Astronomía

(Física, Arte, Tecnología, Cultura Clásica, Literatura, Historia y Filosofía )

Este proyecto puede ser juntado con el de Navegación y Comercio, o con el de la Odisea. La observación del cosmos ha generado abundante técnicas e instrumentos de medición, además de muchos problemas científicos y matemáticos, sobre todo desde la carrera espacial. Los astros aparecen en todas las religiones y sistemas de creencias, y en la literatura y el arte, siempre han seducido a la curiosidad y la imaginación humanas. De este proyecto se puede sacar primero un fomento de la visión científica y racional a través de una historia del pensamiento, y a la vez mostrar el hermanamiento entre la ciencia y las humanidades en toda la producción artística que hay en torno al cosmos.

- **Matemáticas:** También ha motivado estudios científicos abstractos: la trigonometría india y la islámica se desarrollaron en gran medida para estudiar la posición de las estrellas; la teoría de la gravitación, las cónicas y el cálculo diferencial se desarrollan para comprender las órbitas. Y a nivel más abstracto, el problema de los tres cuerpos se encuentra en los inicios de la teoría del caos, que conecta muchas ramas de la matemática moderna.

- **Física:** la evolución del universo y de los cuerpos celestes es un marco narrativo excelente para despertar la curiosidad científica de lo alumnos.

- **Arte:** el espacio muestra imágenes asombrosas de una belleza increíble: nebulosas, galaxias, agujeros negros y otros cuerpos celestes pueden ser de una belleza increíble. Pueden imitarse sus formas y colores con técnicas de acuarela, puntillismo, o construirse esculturas o móviles que imiten los sistemas astronómicos. Resulta interesante la cartelería asociada a la carrera espacial, (principalmente estadounidense y soviética, y las obras cinematográficas de ciencia ficción (que deben filtrarse para incluir sólo aquellas que tengan un valor filosófico, estético o científico).

- **Tecnología: l**a óptica se ha desarrollado en gran medida parala observación del espacio, desde el primer telescopio de Galileo hasta el moderno telescopio espacial Hubble. La carrera espacial moderna ha fabricado tecnologías punteras que después se han trasladado a la vida cotidiana. Como actividades, pueden construirse astrolabios, dioptras esferas armilares, telescopios e incluso cohetes y los dispositivos electrónicos asociados a ellos.

- **Cultura Clásica:** las constelaciones y los cuerpos astronómicos tienen muchas referencias de la mitología grecorromana, y da pie a explicar el pensamiento mitológico y científico en la Antigua Grecia.

- **Literatura:** buena parte de la ciencia ficción se ha ambientado en el espacio, y la ciencia ficción de calidad es un género que permite planteamientos filosóficos y estéticos muy elaborados. Además, muestra la continuidad de la cultura, en el sentido de que las humanidades y las ciencias dialogan y no tienen que estar enfrentadas. Resultan muy interesantes en este sentido las obras de Isaac Asimov o Philipp K. Dick.

- **Historia:** más allá de la historia de la ciencia y de la navegación (que se aborda en otro proyecto), la carrera espacial es un marco muy cautivador para explicar la guerra fría, y mostrar cómo el desarrollo científico, técnico y las condiciones políticas e ideológicas están conectadas.

- **Filosofía**: El cosmos es un ejemplo ideal para mostrar la transición de las explicaciones mitológicas a las explicaciones científicas, y para explicar el refinamiento del pensamiento científico a través de los cambios de modelos de Aristóteles a Eratóstenes, Aristarco de Samos… También sirve para mostrar la lucha histórica entre el pensamiento científico y el pensamiento mítico o religioso es un buen marco para fomentar el pensamiento crítico, desmontar la astrología y otras supersticiones relacionadas con el cosmos.

**Recursos:**

- **¿Qué vio el telescopio espacial Hubble el día de tu cumpleaños ?** https://www.nasa.gov/content/goddard/what-did-hubble-see-on-your-birthday
- **Instagram:** cuentas que recopilan fotografías astronómicas @thecosmologicalvoyager @interstellar views @astronomybasics @europeanspaceagency @nasa_es

- **Artículo:** (Sriraman, 2009) *Un repaso histórico de la interacción de la teología y la filosofía en las artes, las matemáticas y las ciencias* (en inglés)

## **Cartografía** (Historia, Geografía, Tecnología, Literatura)

Este proyecto puede fusionarse con el de Navegación y Comercio. La representación de la tierra ha sido un problema práctico para comerciantes, exploradores y soldados.

- **Historia:** la guerra, el comercio y la exploración son tres grandes formas por las que se han relacionado las distintas civilizaciones históricamente. Los mapas permiten sintetizar visualmente los ámbitos políticos, económicos, culturales y religiosos, las rutas de intercambio, la distribución de la población y las migraciones. Los catastros son un ejemplo de registro geográfico que supuso una revolución en el sistema fiscal y político[32]. Puede plantearse una enseñanza de la Historia que se apoye fuertemente en los mapas. Existen aplicaciones educativas como MathCityMap que trabajan directamente con la fusión de mapas y matemáticas (https://youtu.be/onTbSc8JfEw)

- **Geografía**: la geografía física (de la humana ya se ha hablado) también usa los mapas en abundancia para explicar los procesos de formación y transformación del paisaje, los fenómenos climáticos, los distintos biomas… y se puede destacar la importancia de las expediciones topográficas

32 En la obra *Capital e Ideología*, de Thomas Piketty, se analiza cómo la creación de registros de la propiedad primero agraria y después inmobiliaria contribuyen a conformar el estado moderno y el régimen de propiedad de las primeras sociedades capitalistas.

- **Tecnología:** se pueden construir y explicar los distintos instrumentos usados en la agrimensura (como las cuerdas egipcias o la groma romana), la topografía civil (telémetros, teodolitos) y explicar o mostrar las técnicas modernas con imágenes de satélite y drones.

- **Literatura:** los libros sirven para viajar mentalmente a otros países y épocas, reales o imaginarios. Muchas novelas se leen mejor con ayuda de un mapa, como las de viajes de *Miguel Strogoff*, y toda la literatura de Jules Verne y de la época en la que el mundo aún estaba siendo descubierta. La literatura fantástica también crea sus propios mundo y mapas, como los de la Tierra Meida de J.R.R. Tolkien o el amplio mundo de la saga *Canción de Hielo y Fuego*. Novelas históricas como *León, el Africano* de Amin Maalouf, o que simplemente estén ambientadas en otros países , como *Las Uvas de la Ira* de John Steinbeck. Pero también se han hecho recorridos literarios urbanos por el Dublín del *Ulyses* de James Joyce o por el Madrid de *Luces de Bohemia*, de Valle Inclán. La idea fundamental es que cualquier género literario tiene alguna obra a partir de la que se pueden dibujar o recorrer mapas, con los que organizar excursiones, o plantear actividades con ellos.

## **Japón** (Arte e Historia**)**

La cultura japonesa ha resultado atractiva a los occidentales desde al menos el siglo XIX. Hoy en día vive un auge con la popularización del manga y el anime, por lo que puede resultar muy atrayente a una buena parte de los alumnos. En el plano matemático, Japón vivió un auge durante el periodo EdoEn el siglo XVII destaca la figura de Seki, “el leibniz japonés”, apodado así porque desarrolló técnicas de exhaución muy similares a las del análisis que se fundó en Europa. Además, desarrolló una teoría de determinantes y un método similar al de *Cramer* dos siglos antes que éste. Son particularmente conocidos los Sangakus, unos problemas geométricos que se observan como ofrendas en templos religiosos y se cree que eran un pasatiempo popular entre las clases nobles.

- **Matemáticas:** Los Sangakus y su contexto pueden usarse como hilo narrativo para plantear problemas con el Teorema de Pitágoras. O, en niveles superiores, la demostración de teoremas clásicos de geometría plana.

- **Arte**: el origami o papiroflexia cuenta con una larga tradición en japón, y se ha desarrollado no solo un origami artístico, sino uno matemático que plantea problemas análogos a los de constructibilidad con regla y compás. Aparte del origami, la cultura japonesa tiene una estética muy rica y seductora, por lo que puede trabajars

- **Historia**: Japón aparece mucho en la divulgación histórica sobre la guerra mundial. Como forma de enseñar una historia menos eurocéntrica, puede resultar enriquecedor explicar la historia del Japón feudal (y comparar sus diferencias con el feudalismo europeo), de su proceso de industrialización y su creación de un imperio, que es en gran medida análoga al desarrollo del imperialismo europeo y el totalitarismo alemán.

**Recursos:**

- **Estrategias de enseñanza con sangakus**: https://youtu.be/05882h1AclQ
- **Sangakus:** https://www.enriquegracian.com/sangaku/
- **Más sangakus:** http://gery.huvent.pagesperso-orange.fr/html/sangaku.htm

## **Navegación y Comercio** (Historia, Geografía, Tecnología Economía)

Este proyecto se puede juntar con el de Astronomía, el de Cartografía o el de La Odisea. El comercio ha sido una de las principales fuentes de desarrollo técnico e intercambio cultural. Pueden tomarse como contextos particulares la Antigua Ruta de la Seda, el comercio Mediterráneo en el auge de Fenicia, Grecia, Venecia o del Imperio Otomano, los canales de Suez o Panamá, el comercio triangular de los Imperios Europeos, la actual Nueva Ruta de la Seda… o ejemplos a más pequeña escala, como la ruta que seguía la lana castellana hasta el puerto de Santander. Lo importante es que hay una gran variedad de contextos narrativos para mostrar dinámicas históricas y económicas.

- **Matemáticas:** pueden plantearse problemas geométricos relacionados con la orientación y el posicionamiento, con los mapas de las rutas, además de problemas aritméticos con los intercambios

- **Historia:** dependiendo del contexto que se elija se podrán mostrar trasfondos históricos distintos , o puede plantearse de forma más abstracta para hacer historia comparada. El comercio de esclavos o el colonialismo resultan de especial interés de cara a fomentar debates éticos.

- **Geografía**: las rutas comerciales, sobre todo las que abarcan varios continentes o distancias muy extensas, motivan y facilitan el aprendizaje de relieves, climas y geografías humanas de muchas partes del mundo y momentos históricos.

- **Tecnología:** se pueden construir y aprender a utilizar todos los instrumentos usados en navegación: astrolabios, sextantes, ballestillas, cuadrantes, brújulas,círculos de reflexión (para orientación…), grúas, polipastos (para la carga), y explicar el funcionamiento giroscopios, sónares, rádares, además de toda la gama de medios de transporte que se utilizan hoy en día, o explicar revoluciones tecnológicas como la del ferrocarril.

- **Economía:** las dinámicas del comercio y sus efectos sobre los puertos, las ciudades, los grupos sociales y los estados pueden ilustrarse, además de conceptos más abstractos como la ventaja comparativa, el poder de mercado… Además pueden estudiarse lo mismo el comercio antiguo que el comercio actual, con los procesos de integración europea, la OMC o el proyecto de la Nueva Ruta de la Seda.

## **La Odisea** (Cultura Clásica, Historia, Literatura, Filosofía**)**

La Odisea es un marco narrativo idóneo para conectar la cultura desde la mitología hasta la matemática y la filosofía griegas

- **Matemáticas:** el viaje de Ulises, u Odiseo, sirve como excusa para exponer las técnicas de navegación en base a las estrellas, y toda la trigonometría asociada a ellas, particularmente la triangulación. Aparte, sirve para enmarcar la geometría tal y como la desarrollaron los griegos.

- **Cultura Clásica:** da pie a explicar una de las obras cumbre de la mitología griega, y con ella sus costumbres y hábitos como cultura

- **Historia:** además de la historia mítica presentada en la obra de Homero, puede exponerse la historia real de la Hélade, e incluso acudir a otras epopeyas basadas en hechos históricos luego deformados, como *El Cantar del Mío Cid* o *La Chanson de Roland*

- **Literatura:** la Odisea puede tomarse como referencia para compararla con otros mitos y epopeyas, y profundizar en la mitología de distintas culturas, y en la estructura de las grandes obras literarias.

- **Filosofía:** el mundo griego es en el que nace la filosofía, la ciencia y la matemática europeas, por lo que pueden contrastarse y exponerse las tres formas de pensamiento.

## **Simetría y armonía** (Biología y Geología, Arte y Música**)**

La simetría es un concepto a la vez muy abstracto e intuitivo, por eso mismo resulta muy buen puente entre funciones o transformaciones abstractas y ejemplos de la vida cotidiana. Además, la simetría en sus diversas interpretaciones es un fundamento de la estética.

- **Matemáticas:** aunque el estudio de las simetrías abstractas es tremendamente complejo (requiere teoría de grupos), es muy sencillo explicar las isometrías del plano (rotaciones y traslaciones) y la simetría en figuras geométricas elementales. También se pueden introducir fractales

- **Biología y Geología:** las simetrías axiales y radiales son comunes a muchas formas de vida. Se puede enlazar con la variedad de formas geométricas en las hojas de las plantas, o las explicaciones de por qué unos organismos adoptan unas u otras formas. También se puede incluir ejemplos de cristalografía.

- **Arte:** la simetría y los patrones geométricos abudan en el arte, desde los teselados en mosaicos islámicos a los nudos celtas, además de que pueden introducirse otros elementos matemáticos como la perspectiva en arte renacentista, las formas geométricas con los cuadros geométricos de kandinsky, las figuras fractales de Escher, el arte anamórfico de István Orosz o Felice Varini

- **Música**: los ritmos, las escalas y las estructuras musicales pueden verse como patrones que utilizan la simetría. Aparte, la teoría del armonía tiene un fuerte componente matemático.

**Recursos:**

- **Fundación Bridges**: arte y matemática https://www.bridgesmathart.org/
- **Blog Mathpaint:** http://mathpaint.blogspot.com/
- **Arte con series de Fourier:**http://fourierart.com/
- **Arte Botánico:** https://kellymhoule.com/visual-art/botanical.html
- **Arte anamórfico:** https://culturainquieta.com/es/arte/instalaciones/item/532-felice-varini.html
- **Graffiti y perspectiva:** https://www.julianbeever.net/pavement-art-3d-illusions/
- **Instagram:** cuentas con abundante arte geométrico @islamic.art.gallery @iran_memari @iran_in_photos_ @amir.hossein.mirmoeini @m.ahmadi_photography

# 4- Conclusiones

El aprendizaje resulta de la interacción entre cognición, motivación y emoción .

La cognición se ha querido abordar desde el rigor de la evidencia científica, por lo que se ha realizado una revisión bibliográfica sobre psicología cognitiva con dos fines: primero, conocer los mecanismos cerebrales de procesamiento de la información; segundo, revisar qué técnicas y estrategias docentes resultan efectivas en el aprendizaje, particularmente el de contenidos matemáticos. Se ha intentado organizar la propuesta didáctica de acorde a la literatura científica revisada. En particular, se ha estructurado el contenido en pequeños módulos muy relacionados, menores que una unidad didáctica, que replican los esquemas cognitivos que se pretenden construir. Dentro de esos módulos, se han combinado metodologías de manipulación, representación, uso de tecnologías, razonamiento y metacognición, para facilitar la adquisición y asimilación de contenidos a la mayor variedad de perfiles de alumnos posibles. Se ha buscado un diseño universal del aprendizaje, no mediante la simplificación de contenido sino, al contrario, intentando agotar todos los canales y representaciones posibles y permitiendo distintos ritmos en el aula.

En cuanto a la motivación, se han propuesto varios marcos narrativos en los que insertar la enseñanza de la geometría, y a la vez relacionarla con otras materias y aspectos de la realidad. Estos proyectos interdisciplinares permiten mostrar las matemáticas como una creación humana a la vez práctica, estética y científica. Así se pretende combatir la imagen de las matemáticas como una abstracción tortuosa y desligada de la realidad, a la vez que se dinamiza el centro docente a través de la cooperación con otras asignaturas.

La tercera pata del aprendizaje es (tras cognición y motivación) la emoción. No se ha abordado en este trabajo pues es, con diferencia, la más variable y complicada de abordar. Investigar estrategias de gestión emocional en el aula podría ser una continuación interesante de este trabajo. Otras continuación más centrada en las matemáticas sería una propuesta didáctica que integrase la enseñanza del álgebra, el análisis y la geometría. Esto es, una propuesta interdisciplinar *dentro de las matemáticas* que explotase las equivalencias entre los lenguajes de sus distintas ramas. Esta variedad de lenguajes y representaciones favorecería la integración del conocimiento, y favorecería el aprendizaje de las rama más abstractas. Por ejemplo, los sistemas de ecuaciones (álgebra) se podrían enseñar como rectas (geometría) que representen cruces de vehículos (funciones), o los polinomios cuadráticos podrían enseñarse como funciones del área con las que construir ecuaciones para resolver problemas geométricos.

Las divisiones entre áreas del conocimiento, entre ciencia y humanidades, entre pensamiento , cultura y economía, son todas divisiones abstractas, ya que en la práctica la obra humana está toda conectada. Por eso resulta muy enriquecedor ser flexible en el conocimiento. Un profesor necesita ser flexible en general, pues cada año se encontrará con alumnos con distintos trasfondos, intereses y capacidades. Por eso esta propuesta ha intentado ser flexible, pero a la vez concreta y rigurosa.

Concreta, porque las grandes palabras sobre principios didácticos y metodologías pueden ser inspiradoras, pero no sirven para enseñar. Ya hay demasiadas publicaciones de didáctica dedicadas a palabras etéreas, por eso este trabajo ha querido dar recursos que se puedan aprovechar en el aula. El primero en aprovecharlos será el propio autor.

Rigurosa ha querido ser la propuesta porque la docencia puede ser un arte. Pero “artista” y “artesano” eran en origen lo mismo, ambas tienen su técnica, y la técnica responde a principios racionales, aún si se usa para transmitir subjetividad. Los profesores tenemos en nuestras manos las personas que construirán el futuro; no debemos tomarnos nuestro trabajo a la ligera. Si no somos rigurosos y racionales en nuestra profesión, estamos siendo irresponsables. Porque el sueño de la razón produce monstruos.

Las matemáticas, como obra colectiva de todas las civilizaciones, como lenguaje de la ciencia y gran motor del pensamiento, deben emplearse para fomentar el progreso humano, la razón y la hermandad entre los pueblos.

# 5-Referencias

## Imágenes:

1- “32” , Juan López Gómez, Fourier Art, http://fourierart.com/gallery.html

2- Fases de la Luna, Al-Biruni, Kitab al-Tafhim, Museo del Parlamento de Irán

## Artículos:

Bento, S., Ferreira, H., & Hall, A. (2018). Voronoi Diagrams: Didactical and Artistic Applications. *Bridges 2018 Conference Proceedings*, 355-358.

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C., Begolli, K. N., Chang, B., Miller-Cotto, D., Young, L. K., & Davenport, J. L. (2017). Evidence for Cognitive Science Principles that Impact Learning in Mathematics. En *Acquisition of Complex Arithmetic Skills and Higher-Order Mathematics Concepts* (pp. 297-325). Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-805086-6.00013-8

Bourdieu, P., & Passeron, J.-C. (2022). *La reproducción: Elementos para una teoría del sistema educativo*.

Cepeda, N. J., Pashler, H., Vul, E., Wixted, J. T., & Rohrer, D. (2006). Distributed practice in verbal recall tasks: A review and quantitative synthesis. *Psychological Bulletin*, *132*(3), 354-380. https://doi.org/10.1037/0033-2909.132.3.354

Durkin, K., Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2017). Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: Lessons learned and next steps. *ZDM*, *49*(4), 585-597. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0853-9

Enguita, M. F. (2001). *Sociología de la educación: Lecturas básicas y textos de apoyo*. Ariel.

Grima, C. (2011, diciembre 23). Cada uno en su región, y Voronoi en la de todos [Naukas]. *Mati y sus mateaventuras*. https://naukas.com/2011/12/23/cada-uno-en-su-region-y-voronoi-en-la-de-todos/

Knezic, D., Wubbels, T., Elbers, E., & Hajer, M. (2010). The Socratic Dialogue and teacher education. *Teaching and Teacher Education*, *26*(4), 1104-1111. https://doi.org/10.1016/j.tate.2009.11.006

Kotovsky, K., Hayes, J. R., & Simon, H. A. (1985). Why are some problems hard? Evidence from Tower of Hanoi. *Cognitive Psychology*, *17*(2), 248-294. https://doi.org/10.1016/0010-0285(85)90009-X

Lem, S., Onghena, P., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2017). Using refutational text in mathematics education. *ZDM*, *49*(4), 509-518. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0843-y

Mevarech, Z. R. (1999). Effects of Metacognitive Training Embedded in Cooperative Settings on Mathematical Problem Solving. *The Journal of Educational Research*, *92*(4), 195-205. https://doi.org/10.1080/00220679909597597

Pascual, L. S. (2014). *Breve manual de mnemotecnia*. https://www.mnemotecnia.es/documentos/Mnemotecnia_CC.pdf

Rau, M. A., & Matthews, P. G. (2017). How to make 'more' better? Principles for effective use of multiple representations to enhance students' learning about fractions. *ZDM*, *49*(4), 531-544. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0846-8

Reiss, K. M., Heinze, A., Renkl, A., & Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM*, *40*(3), 455-467. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0105-0

Renkl, A. (2017). Learning from worked-examples in mathematics: Students relate procedures to principles. *ZDM*, *49*(4), 571-584. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0859-3

Rohrer, D., Dedrick, R. F., & Stershic, S. (2015). Interleaved practice improves mathematics learning. *Journal of Educational Psychology*, *107*(3), 900-908. https://doi.org/10.1037/edu0000001

Schneider, M., & Stern, E. (2010). The cognitive perspective on learning: Ten cornerstone findings. *Organisation for Economic Co- Operation and Development (OECD*, 17.

Sriraman, B. (2009). A historic overview of the interplay of theology and philosophy in the arts, mathematics and sciences. *ZDM*, *41*(1-2), 75-86. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0100-5

Sweller, J., & Cooper, G. A. (1985). The Use of Worked Examples as a Substitute for Problem Solving in Learning Algebra. *Cognition and Instruction*, *2*(1), 59-89. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0201_3

Sweller, J., van Merrienboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive Architecture and Instructional Design. *Educational Psychology Review*, *10 (3)*, 251-296. https://doi.org/10.1023/A:1022193728205

Vamvakoussi, X. (2017). Using analogies to facilitate conceptual change in mathematics learning. *ZDM*, *49*(4), 497-507. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0857-5

Verschaffel, L., Van Dooren, W., & Star, J. (2017). Applying cognitive psychology based instructional design principles in mathematics teaching and learning: Introduction. *ZDM*, *49*(4), 491-496. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0861-9

Walkington, C., & Hayata, C. A. (2017). Designing learning personalized to students' interests: Balancing rich experiences with mathematical goals. *ZDM*, *49*(4), 519-530. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0842-z