Universidad de Valladolid

Departamento de Matemática Aplicada

GRUPOS DE SIMETRÍA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA.

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Francisco Marcos Lomo.

Tutor: Alfonso J. Población Sáez.

Valladolid, junio 2022

ÍNDICE.

Presentación

El presente Trabajo de Fin de Máster, en adelante TFM, tiene el objetivo de completar la formación necesaria para ser docente. Es el final del *Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas*, que tiene carácter habilitante , es decir, permite a los alumnos que lo superan ejercer la docencia profesionalmente.

Según la guía docente, el TFM es un trabajo de reflexión final en el cual el estudiante deberá mostrar, mediante dicho trabajo escrito y una presentación oral pública ante un tribunal, que ha adquirido el conjunto de competencias del máster y que le capacitan para iniciar su actuación como docente de su especialidad en un centro de educación secundaria.

Descripción.

La descripción de lo que se va a desarrollar en este TFM es la siguiente. Tras un análisis de los contenidos que aparecen en los actuales currículos de Enseñanza Secundaria respecto al concepto de simetría, se pretende desarrollar una serie de actividades prácticas orientadas a la comprensión y reconocimiento de los distintos grupos de simetría de las figuras planas, así como la descripción de la metodología de su implementación en el aula y los mecanismos pertinentes para la posterior evaluación de la actividad.

El objetivo principal de este TFM es realizar una reflexión acerca del concepto de simetría, presente en el currículo de matemáticas en secundaria. Para ello, se trazará un resumen de los diferentes grupos de simetría existentes, analizando las matemáticas subyacentes de dichos grupos y valorando la posibilidad de llevarlo al aula.

Estructura del trabajo.

El TFM consta de cinco apartados: contexto, contenidos matemáticos, ubicación en la enseñanza secundaria, actividades para desarrollar en secundaria y conclusiones.

El contexto pretende establecer un marco teórico de trabajo, centrado en las competencias clave que establece la ley vigente al comienzo del curso académico. Además se enmarcará el TFM dentro de los conocimientos adquiridos en el Máster y se introducirán diferentes teorías de aprendizaje y metodologías que pueden ser aplicadas en el desarrollo de los contenidos matemáticos que van a ser expuestos.

El apartado de contenidos matemáticos presenta un desarrollo de los movimientos en el plano y los grupos de simetría que se generan a partir de ellos. Es un apartado donde se sintetizan los contenidos matemáticos que contiene el TFM.

El tercer apartado, pretende situar los contenidos de simetría expuestos en el segundo apartado dentro del currículo establecido por la ley vigente y los libros de texto, así como dar y fundamentar razones para su desarrollo en la educación secundaria.

El cuarto apartado propone diferentes actividades para enseñar los grupos de simetría dentro de la enseñanza secundaria, lo que incluye su fundamentación y desarrollo.

Por último se tiene un apartado de conclusiones que cierra el TFM.

Vocación docente.

Aunque no se trata de un requisito necesario dentro de los objetivos de un TFM, he considerado relevante y adecuado esbozar un resumen de mi historia personal y su relación con la vocación a ser profesor, en particular, profesor de matemáticas.

Mi relación con la docencia parte, como en todos los casos, del otro lado, el lado del alumno. Cuando uno es alumno inevitablemente realiza una continua evaluación de sus profesores y los clasifica en buenos y no tan buenos, aunque sea en base a criterios subjetivos. Yo destacaba en matemáticas y tuve la suerte de participar en proyectos, como ESTALMAT, y concursos matemáticos, como la Olimpiada Matemática o el Canguro Matemático. En estos lugares tuve contacto con muy buenos docentes que se mueven por el aprendizaje y la transmisión de las matemáticas. También tuve la suerte de tener una gran profesora, exigente, pero muy dedicada a su labor docente, durante cinco años en el instituto, desde 2º de ESO hasta 2º de Bachillerato.

Estos buenos docentes ayudaron a hacer crecer en mí el gusto por las matemáticas y, posteriormente, realicé el grado en Matemáticas en la Universidad de Valladolid. Entre los buenos docentes me gustaría incluir al que ha sido mi tutor durante el periodo de prácticas, que me ha mostrado mucha dedicación por los alumnos, más allá de los contenidos matemáticos.

Hasta aquí hemos respondido a la pregunta ¿Por qué matemáticas? Falta responder a la pregunta ¿Por qué profesor? Porque considero que compartir los conocimientos que tengo sobre matemáticas es un buen objetivo para dedicar la vida. Esto también se nutre de los docentes que he mencionado anteriormente.

Si obviamos el explicar a mis compañeros de clase las dudas de matemáticas que les surgían, mi primer contacto con el lado del docente se remonta a mis 17 años, cuando empecé a dar clases particulares de matemáticas y no he parado de darlas hasta este año. He dado clases particulares de todos los cursos del instituto a una gran variedad de alumnos, pero esas clases particulares siempre tenían un único receptor. El hecho de dar clases particulares hizo que aumentara en mí el gusto por enseñar matemáticas, aunque hay que apuntar que no es lo mismo enseñar a un solo alumno que a un grupo, lo cual siempre me ha sugerido mayor respeto.

Con las prácticas docentes, realizadas en este Máster, he tenido la oportunidad de ejercer la docencia de matemáticas en un aula por primera vez y la experiencia ha sido muy gratificante. No ha estado exenta de complicaciones ni de errores que como novato y como humano he podido cometer, pero cuando el docente pone entrega en lo que hace, los alumnos lo notan. Además los alumnos enseñan más de lo que parece.

El deseo con el que parto tras realizar este Máster es el de poder dedicar mi vida para enseñar matemáticas a los que no las conocen y ayudar al crecimiento formativo de los alumnos de secundaria.

1. Contexto.

Uno de los objetivos del trabajo es situar los conocimientos adquiridos en el Máster y aplicarlos dentro del trabajo. En cada asignatura se han obtenido los siguientes conocimientos:

Procesos y contextos educativos: Conocer las cuestiones fundamentales del sistema educativo y comprender los procesos educativos en la sociedad actual.

Aprendizaje y desarrollo de la personalidad: Conocer las características psicológicas de la adolescencia e identificar los diferentes enfoques de aprendizaje.

Sociedad, familia y educación: Conocer y hacer propios los conceptos y problemática de la educación, familia y sociedad.

Complementos de matemáticas: Dominar los contenidos teórico-prácticos de Matemáticas que se cursan en ESO y Bachillerato desde una perspectiva superior para que puedan desarrollar una docencia que no esté sesgada. Profundizar y desarrollar temas de matemáticas en el ámbito de la Educación Secundaria.

Diseño curricular en matemáticas: Analizar contextos educativos y realizar planificaciones didácticas.

Didáctica de las matemáticas: Conocer los desarrollos teórico-prácticos propios de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Metodología y evaluación en matemáticas: Conocer y saber aplicar metodologías, técnicas básicas de investigación educativa y procesos de evaluación en Matemáticas.

Innovación docente en matemáticas: Aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de Didáctica de la Matemática.

Iniciación a la investigación educativa en matemáticas: Identificar los principales problemas y líneas de investigación en Didáctica de la Matemática relacionadas con la educación matemática en Secundaria y Bachillerato.

Modelos matemáticos en educación secundaria: Conocer y desarrollar diferentes modelos matemáticos y poder llevarlos al aula.

Resolución de problemas en educación secundaria: Adquirir estrategias para la resolución de problemas matemáticos.

Prácticas docentes: Conocer la realidad en el aula y poner en práctica la docencia personal aplicando los conocimientos adquiridos en el Máster, en el resto de las asignaturas.

Competencias clave.

A lo largo de todas las asignaturas del Máster se ha hecho hincapié en la importancia de la evaluación por competencias, teniendo en cuenta las siete competencias clave. Esto resulta relevante a la hora de realizar este trabajo ya que es necesario relacionar las competencias con los contenidos de simetrías que vamos a desarrollar en el trabajo.

Las siete competencias son: comunicación lingüística; competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología; competencia digital; aprender a aprender; competencias sociales y cívicas; sentido de iniciativa y espíritu emprendedor; conciencia y expresiones culturales.

Según lo que establece el BOE en [11], con respecto a las competencias mencionadas anteriormente, en relación con los objetivos de las etapas, se debe cumplir lo siguiente:

- Las competencias clave deberán estar estrechamente vinculadas a los objetivos definidos para la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.
- La relación de las competencias clave con los objetivos de las etapas educativas hace necesario diseñar estrategias para promover y evaluar las competencias desde las etapas educativas iniciales e intermedias hasta su posterior consolidación en etapas superiores, que llevarán a los alumnos a desarrollar actitudes y valores, así como un conocimiento de base conceptual y un uso de técnicas y estrategias que favorecerán su incorporación a la vida adulta y que servirán de cimiento para su aprendizaje a lo largo de su vida.
- La adquisición eficaz de las competencias clave por parte del alumnado y su contribución al logro de los objetivos de las etapas educativas, desde un carácter interdisciplinar y transversal, requiere del diseño de actividades de aprendizaje integradas que permitan avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

En cuanto a la relación con el currículo, la mencionada ley establece lo siguiente:

- Las competencias clave deben estar integradas en las áreas o materias de las propuestas curriculares, y en ellas definirse, explicitarse y desarrollarse suficientemente los resultados de aprendizaje que los alumnos y alumnas deben conseguir.
- Las competencias deben desarrollarse en los ámbitos de la educación formal, no formal e informal a lo largo de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, y en la educación permanente a lo largo de toda la vida.
- Todas las áreas o materias del currículo deben participar, desde su ámbito correspondiente, en el desarrollo de las distintas competencias del alumnado.
- La selección de los contenidos y las metodologías debe asegurar el desarrollo de las competencias clave a lo largo de la vida académica.
- Los criterios de evaluación deben servir de referencia para valorar lo que el alumnado sabe y sabe hacer en cada área o materia. Estos criterios de evaluación se desglosan en estándares de aprendizaje evaluables. Para valorar el desarrollo competencial del alumnado, serán estos estándares de aprendizaje evaluables, como elementos de mayor concreción, observables y medibles, los que, al ponerse en relación con las competencias clave, permitirán graduar el rendimiento o desempeño alcanzado en cada una de ellas.
- El conjunto de estándares de aprendizaje evaluables de un área o materia determinada dará lugar a su perfil de área o materia. Dado que los estándares de aprendizaje evaluables se ponen en relación con las competencias, este perfil permitirá identificar aquellas competencias que se desarrollan a través de esa área o materia.
- Todas las áreas y materias deben contribuir al desarrollo competencial. El conjunto de estándares de aprendizaje evaluables de las diferentes áreas o materias que se relacionan con una misma competencia da lugar al perfil de esa competencia (perfil de competencia). La elaboración de este perfil facilitará la evaluación competencial del alumnado.

Para esclarecer lo que implica cada competencia, en [11] se describe cada competencia de la siguiente manera, resumidamente:

1. Comunicación lingüística

La competencia en comunicación lingüística es el resultado de la acción comunicativa dentro de prácticas sociales determinadas, en las cuales el individuo actúa con otros interlocutores y a través de textos en múltiples modalidades, formatos y soportes. Estas situaciones y prácticas pueden implicar el uso de una o varias lenguas, en diversos ámbitos y de manera individual o colectiva.

La comunicación se refiere a la capacidad de expresar y explicar distintas realidades como conceptos, pensamientos, sentimientos, hechos y opiniones, mediante el habla y la escritura de un modo apropiado e interactivo. La adquisición de capacidades comunicativas resulta imprescindible para todas las facetas de la vida.

Además, la competencia en comunicación lingüística proporciona una vía de conocimiento y contacto con la diversidad cultural que implica un factor de enriquecimiento para la propia competencia y que adquiere una particular relevancia en el caso de las lenguas extranjeras.

Esta competencia constituye un objetivo de aprendizaje permanente a lo largo de toda la vida, ya que va a ser empleada en todos los ámbitos de la misma. Por ello es importante que se promuevan unos contextos de uso de lenguas ricos y variados.

Esta competencia no incluye solamente la comunicación en las diferentes lenguas de uso cotidiano, sino que precisa de la interacción de distintas destrezas, ya que se produce en múltiples modalidades de comunicación y en diferentes soportes. Pueden incluirse dentro de esta competencia la capacidad de comunicación matemática y el uso del propio lenguaje matemático.

La competencia en comunicación lingüística es también un instrumento fundamental para la socialización y el aprovechamiento de la experiencia educativa, por ser la vía principal de acceso al conocimiento dentro y fuera de la escuela. De su desarrollo depende, en buena medida, que se produzcan distintos tipos de aprendizaje en distintos contextos. Resulta esencial en el campo de las matemáticas para poder entender los enunciados de los problemas y los propios razonamientos matemáticos.

En resumen, para el adecuado desarrollo de esta competencia resulta necesario atender a los siguientes indicadores:

- Comprender los textos, en particular los enunciados de los ejercicios y problemas.
- Extraer correctamente los datos de un texto.
- Saber descubrir el significado y propósito del texto.
- Saber distinguir las ideas principales de las secundarias.
- Capacidad de sintetizar las ideas principales extraídas de cualquier vía de comunicación.
- Leer con fluidez.
- Expresarse con claridad y fluidez en el habla.
- Emplear correctamente el lenguaje corporal y los elementos secundarios del lenguaje como el volumen o la entonación.

- Participar con una escucha activa que muestre atención.
- Participar activamente en las actividades realizadas en clase, siendo capaz de plantear dudas.
- Saber redactar y exponer las ideas adquiridas.
- Presentar argumentos de manera adecuada, en particular los argumentos lógicos empleados en matemáticas.
- Utilizar un vocabulario preciso y apropiado al contexto.
- Cuidar la presentación de los trabajos realizados y las pruebas escritas.
- Emplear una correcta ortografía

2- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.

La competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología inducen y fortalecen algunos aspectos esenciales de la formación de las personas que resultan fundamentales para la vida.

Esta competencia es la que se desarrolla principalmente en la enseñanza de matemáticas y su desarrollo es el principal objetivo de dicha enseñanza.

La competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología contribuye a la capacidad crítica y visión razonada y razonable de las personas. Esta competencia incluye la competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología:

La competencia matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto.

La competencia matemática requiere de conocimientos sobre los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones y las representaciones matemáticas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos.

Forma parte de esta destreza la capacidad para realizar descripciones y explicaciones matemáticas que llevan implícitas la interpretación de resultados matemáticos y la reflexión sobre su adecuación al contexto, al igual que la determinación de si las soluciones son adecuadas y tienen sentido en la situación en que se presentan. Esta competencia incluye la capacidad para relacionar las matemáticas y las distintas situaciones que se dan en el mundo o la vida cotidiana.

Así pues, para el adecuado desarrollo de la competencia matemática resulta necesario abordar cuatro áreas relativas a los números, el álgebra, la geometría y la estadística.

Las competencias básicas en ciencia y tecnología son aquellas que proporcionan un acercamiento al mundo físico y a la interacción responsable con él. Esta competencia contribuye al desarrollo del pensamiento científico.

Las competencias en ciencia y tecnología capacitan a ciudadanos para desarrollar juicios críticos sobre los hechos científicos y tecnológicos que se suceden a lo largo de los tiempos, pasados y actuales.

Para el desarrollo de la competencia en ciencia y tecnología resulta necesario abordar los conocimientos científicos relativos a la física, la química, la biología, la geología, las matemáticas y la tecnología, los cuales se derivan de conceptos, procesos y situaciones interconectadas.

Para analizar la adquisición de la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, tendremos en cuenta los siguientes indicadores:

- Conocer y manejar los números.
- Conocer y manejar los elementos matemáticos básicos tales como operaciones, relaciones o aplicaciones.
- Seleccionar las técnicas más eficientes para resolver problemas matemáticos.
    - Interpretar los datos de manera adecuada.
    - Utilizar los conceptos matemáticos pertinentes para resolver problemas.
    - Usar diversas representaciones matemáticas para dar solución a los problemas.
    - Reconocer la solución de los problemas y su significado.
- Utilizar adecuadamente la información proporcionada a través de métodos matemáticos.
- Comprender, expresar y comunicar en lenguaje matemático.
- Emplear diferentes representaciones de un concepto matemático.
- Tener capacidad de razonamiento abstracto.
- Reconocer y valorar la importancia de la ciencia a lo largo de la historia.
- Descubrir la belleza a través de las matemáticas y las ciencias.
- Aplicar el conocimiento científico-tecnológico para comprender lo que ocurre en nuestro entorno.
- Tener la capacidad de formular hipótesis, comprobarlas y crear predicciones.
- Realizar aplicaciones del método científico a situaciones de la vida cotidiana.

3. Competencia digital.

La competencia digital es aquella que implica el uso creativo, crítico y seguro de las tecnologías de la información y la comunicación para alcanzar los objetivos relacionados con el trabajo, la empleabilidad, el aprendizaje, el uso del tiempo libre, la inclusión y participación en la sociedad. Para ello, se deben conocer las principales herramientas informáticas, su correcta gestión, además de los diferentes riesgos que puede conllevar el uso de Internet.

Esta competencia supone, además de la adecuación a los cambios que introducen las nuevas tecnologías en la alfabetización, la lectura y la escritura, un conjunto nuevo de conocimientos, habilidades y actitudes necesarias hoy en día para ser competente en un entorno digital.

Esta competencia precisa del desarrollo de diversas destrezas relacionadas con el acceso a la información, el procesamiento y uso para la comunicación, la creación de contenidos, la seguridad y la resolución de problemas, tanto en contextos formales como no formales e informales. La persona ha de ser capaz de hacer un uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles con el fin de resolver los problemas reales de un modo eficiente.

Para el adecuado desarrollo de la competencia digital resulta necesario abordar los siguientes parámetros:

- Acceder a la información a través de diversos medios como pueden ser internet o los libros impresos.
- Seleccionar las fuentes apropiadas para obtener información, utilizando diferentes fuentes para conocer o ampliar el conocimiento.
- Manipular la información de forma autónoma.
- Organizar adecuadamente la información obtenida
- Utilizar los medios digitales de comunicación como las redes sociales o correo electrónico para comunicarse con otras personas adecuadamente.
- Gestionar estrategias para identificar y resolver problemas técnicos de manejo de aparatos electrónicos.
- Emplear programas matemáticos específicos.
- Conocer y manejar técnicas básicas de programación.
- Utilizar los recursos tecnológicos disponibles a diario.

4. Aprender a aprender.

La competencia de aprender a aprender es la capacidad de iniciar y persistir en el aprendizaje individualmente o en grupos, organizar el propio aprendizaje y administrar eficazmente el tiempo y la información. Es fundamental para el aprendizaje permanente que se produce a lo largo de la vida.

Esta competencia requiere, principalmente, la capacidad para motivarse por aprender. Esta motivación depende de que se genere la curiosidad y la necesidad de aprender, de que el estudiante se sienta protagonista del proceso y del resultado de su aprendizaje y, finalmente, de que llegue a alcanzar las metas de aprendizaje propuestas y, con ello, que se produzca en él una percepción de autonomía. Todo lo anterior contribuye a motivarle para abordar futuras tareas de aprendizaje.

La competencia de aprender a aprender también requiere conocer y controlar los propios procesos de aprendizaje para ajustarlos a los tiempos y las demandas de las tareas y actividades que conducen al aprendizaje. La competencia de aprender a aprender desemboca en un aprendizaje cada vez más eficaz y autónomo.

Esta competencia incluye una serie de conocimientos y destrezas que requieren la reflexión y la toma de conciencia de los propios procesos de aprendizaje. Así, los procesos de conocimiento se convierten en objeto del conocimiento y, además, hay que aprender a ejecutarlos adecuadamente.

Para el desarrollo de la competencia de aprender a aprender vamos a tener en cuenta los siguientes indicadores:

- Desarrollar un hábito de estudio.
- Conocer las propias capacidades para trabajar de forma eficiente.
- Tener curiosidad y motivación por el aprendizaje.
- Participar activamente en las actividades del aula siendo protagonistas del aprendizaje propio.
- Utilizar diferentes y adecuadas estrategias de aprendizaje, teniendo en cuenta los objetivos.
- Tener la capacidad de aprender de los propios errores, sin considerarlos un fracaso irreparable.
- Saber aplicar los conocimientos adquiridos en diferentes contextos.
- Evaluar el aprendizaje adquirido, capacidad de autoevaluación.

5. Competencias sociales y cívicas.

Las competencias sociales y cívicas implican la habilidad y capacidad para utilizar los conocimientos y actitudes sobre la sociedad, entendida desde las diferentes perspectivas, en su concepción dinámica, cambiante y compleja, para interpretar fenómenos y problemas sociales en contextos cada vez más diversificados; para elaborar respuestas, tomar decisiones y resolver conflictos, así como para interactuar con otras personas y grupos conforme a normas basadas en el respeto mutuo y en convicciones democráticas. Además de incluir acciones a un nivel más cercano y mediato al individuo como parte de una implicación cívica y social.

Esta competencia se divide en social y cívica

La competencia social se relaciona con el bienestar personal y colectivo. Exige entender el modo en que las personas pueden procurarse un estado de salud física y mental óptimo, tanto para ellas mismas como para sus familias y para su entorno social próximo, y saber cómo un estilo de vida saludable puede contribuir a ello.

Los elementos fundamentales de esta competencia incluyen el desarrollo de ciertas destrezas como la capacidad de comunicarse de una manera constructiva en distintos entornos sociales y culturales, mostrar tolerancia, expresar y comprender puntos de vista diferentes, negociar sabiendo inspirar confianza y sentir empatía. Las personas deben ser capaces de gestionar un comportamiento de respeto a las diferencias expresado de manera constructiva.

La competencia cívica se basa en el conocimiento crítico de los conceptos de democracia, justicia, igualdad, ciudadanía y derechos humanos y civiles. Las destrezas de esta competencia están relacionadas con la habilidad para interactuar eficazmente en el ámbito público y para manifestar solidaridad e interés por resolver los problemas que afecten al entorno escolar y a la comunidad, ya sea local o más amplia.

Para desarrollar las competencias sociales y cívicas se tendrán en cuenta los siguientes indicadores:

- Tener un correcto comportamiento en el aula y su entorno, siempre con un clima de respeto.
- Ayudar a resolver conflictos que surjan.
- Mostrar interés en la participación y en el derecho a aprender de los compañeros.
- Comprender la historia y la realidad social del mundo.
- Poder analizar hechos y problemas sociales e históricos y pensar críticamente.
- Responsabilizarse de las consecuencias de las propias decisiones, tomadas en libertad.

- Comprender las contribuciones a la sociedad de diferentes culturas
- Respetar los principios y valores establecidos.
- Entender la postura de los demás, sobre todo cuando sea diferente.
- Ser asertivo en las relaciones sociales.
- Tener capacidad para trabajar en grupo.

6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

La competencia sentido de iniciativa y espíritu emprendedor implica la capacidad de transformar las ideas en actos. Ello significa adquirir conciencia de la situación a intervenir o resolver, y saber elegir, planificar y gestionar los conocimientos, destrezas o habilidades y actitudes necesarios con criterio propio, con el fin de alcanzar el objetivo previsto.

La adquisición de esta competencia es determinante en la formación de futuros ciudadanos emprendedores, contribuyendo así a la cultura del emprendimiento.

Esta competencia requiere de las siguientes destrezas o habilidades esenciales: capacidad de análisis; capacidades de planificación, organización, gestión y toma de decisiones; capacidad de adaptación al cambio y resolución de problemas; comunicación, presentación, representación y negociación efectivas; habilidad para trabajar, tanto individualmente como dentro de un equipo; participación, capacidad de liderazgo y delegación; pensamiento crítico y sentido de la responsabilidad; autoconfianza, evaluación y autoevaluación, ya que es esencial determinar los puntos fuertes y débiles de uno mismo y de un proyecto, así como evaluar y asumir riesgos cuando esté justificado.

Para el adecuado desarrollo de la competencia sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor resulta necesario abordar lo siguiente:

- Manejar la incertidumbre, asumir y gestionar el riesgo.
- Desarrollar la creatividad.
- Tener capacidad para resolver problemas.
- Tener capacidad crítica para evaluar las posibles soluciones de problemas.
- Establecer metas reales.
- Ser activo en la toma de decisiones.

7. Conciencia y expresiones culturales.

La competencia en conciencia y expresión cultural implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute personal y considerarlas como parte de la riqueza y patrimonio de los pueblos.

La competencia para la conciencia y expresión cultural requiere de conocimientos que permitan acceder a las distintas manifestaciones sobre la herencia cultural a escala local, nacional y europea y su lugar en el mundo.

La expresión cultural y artística exige también desarrollar la iniciativa, la imaginación y la creatividad expresadas a través de códigos artísticos, así como la capacidad de emplear distintos materiales y técnicas en el diseño de proyectos. Además, en la medida en que las actividades culturales y artísticas suponen con frecuencia un trabajo colectivo, es preciso disponer de habilidades de cooperación y tener conciencia de la importancia de apoyar y apreciar las contribuciones ajenas.

El desarrollo de esta competencia supone actitudes y valores personales de interés, reconocimiento y respeto por las diferentes manifestaciones artísticas y culturales, y por la conservación del patrimonio.

Para el adecuado desarrollo de la competencia para la conciencia y expresión cultural resulta necesario abordar los siguientes indicadores:

- Conocer, respetar y valorar las diferentes expresiones culturales.
- Conocer el origen de la propia cultura.
- Descubrir la belleza en la diversidad de las culturas.
- Aprender diferentes lenguajes de expresión culturales.
- Tener capacidad de comunicar emociones e ideas.
- Participar en la vida y actividad cultural del lugar en que se vive.
- Valorar la libertad de expresión.
- Desarrollar la capacidad de esfuerzo, constancia y disciplina.
- Tener capacidad de trabajar en equipo.

Teorías de aprendizaje.

En el presente TFM se va a trabajar teniendo en mente dos teorías de aprendizaje estudiadas en la asignatura de *Aprendizaje y desarrollo de la personalidad*. Estas teorías son la del aprendizaje por descubrimiento de Bruner y la del aprendizaje significativo de Ausubel, ambas se enmarcan dentro del constructivismo.

La teoría del aprendizaje por descubrimiento fue desarrollada por el psicólogo y pedagogo estadounidense Jerome Bruner en la década de los 60. La principal característica de esta teoría es la pretensión de que el alumno obtenga (descubra) los conocimientos por sí mismo. Entre el resto de características destacan:

- Parte de la necesidad de la participación activa por parte del alumno en el aprendizaje. Requiere de despertar la curiosidad del alumno por el aprendizaje de contenidos nuevos.
- El aprendizaje se presenta en situaciones que desafían la inteligencia, impulsando la resolución de problemas.
- Para que se produzca aprendizaje se deben presentar alternativas para que se perciban relaciones y similitudes entre los contenidos a aprender.
- El descubrimiento consiste en transformar o reorganizar la experiencia que se tiene de la realidad, de manera que se puedan observar nuevos elementos de ella.
- El descubrimiento favorece el desarrollo mental, lo que se descubre por sí mismo se adhiere mejor al conocimiento personal.
- Importancia de los conflictos cognitivos que permitan contrastar al alumno los conocimientos.

En matemáticas esta teoría se puede poner en práctica mediante resolución de problemas o planteando los propios contenidos matemáticos como herramientas que son descubiertas para afrontar un determinado problema.

La teoría del aprendizaje significativo fue desarrollada por el psicólogo y pedagogo estadounidense David Paul Ausubel en la década de los 70. Esta teoría se presenta como oposición al aprendizaje memorístico, criticando de este la ausencia de relaciones que se establecen entre los diferentes contenidos. Como principales características se encuentran las siguientes.

- Un contenido es significativo cuando tiene una estructuración lógica propia o puede establecerse por el que lo aprende.
- Construye los contenidos sobre los conocimientos previos, que son el conjunto organizado de ideas que preexisten al nuevo aprendizaje que se quiere instaurar.
- Para construir el conocimiento se hace uso de los organizadores avanzados, que son conceptos previos, que presentan un nivel superior de abstracción y establecen una conexión entre lo que ya conoce y lo que necesita conocer.
- El aprendizaje significativo se da cuando una nueva información se relaciona con un concepto ya existente; por lo que la nueva idea podrá ser aprendida si la idea precedente se ha entendido de manera clara.
- El docente debe identificar los conceptos básicos de la disciplina, organizarlos y jerarquizarlos
- Los contenidos, para ser significativos, deben: tener sentido lógico, por su organización y estructuración; integrarse en los conocimientos previos del alumno; despertar el interés del alumno por aprender.

En la disciplina de matemáticas, todos los contenidos se van construyendo sobre los contenidos anteriores. Por ejemplo, la división se construye sobre el concepto de multiplicación, que a su vez ha sido desarrollado a partir del concepto de suma. Por esta razón se considera que el aprendizaje significativo debe tener mayor importancia que el aprendizaje memorístico en el aprendizaje de las matemáticas.

A lo largo de TFM también se va a hacer uso de los cuatro principios básicos de Z. P. Dienes, matemático húngaro, para la comprensión de los conceptos matemáticos por parte del alumno. Estos principios se han visto en la asignatura de *Innovación docente en matemáticas* y son:

- <u>Principio dinámico:</u> la construcción de conceptos exige que el alumno realice experiencias concretas con material adecuado y en forma de juego. De esta forma se establecen ideas preliminares que facilitan la capacidad de abstracción.
- <u>Principio de constructividad:</u> los alumnos deben tener un primer contacto con las realidades matemáticas de forma manipulativa. Esto permite a los alumnos construir personalmente los conceptos. Un ejemplo de material manipulativo es Geogebra, donde se pueden modificar variables y observar los resultados de manera inmediata.
- <u>Principio de variabilidad perceptiva:</u> implica presentar un concepto matemático a través de distintas situaciones. Esto se hace para evitar la reducción de un concepto a una situación

concreta. Por ejemplo, presentar un cuadrado con los horizontales y verticales y también con los lados oblicuos.

- Principio de variabilidad matemática: un concepto matemático comprende un cierto número de variables esenciales, así como de elementos constantes. Este principio consiste en proponer experiencias que supongan hacer variar lo más ampliamente posible dichas variables para remarcar lo que hay de constante. Cuanto más diversas sean las experiencias que se propongan para las distintas manifestaciones de un concepto, mejor será la comprensión de éste por parte del alumno.

Metodologías.

A lo largo del TFM se van a proponer varias metodologías que puedan emplearse para el aprendizaje de los contenidos expuestos. Estas metodologías han sido estudiadas en la asignatura de "Metodología y evaluación en matemáticas"

Lección magistral participativa.

En la lección magistral o método expositivo el profesor explica de forma oral, ayudándose de una pizarra o una presentación, unos contenidos que los alumnos deben aprender. Mientras el docente expone ordenadamente los conceptos, los alumnos prestan atención a la explicación y toman apuntes para poder repasar posteriormente las explicaciones y así poder asimilar el conocimiento.

Se trata de una metodología usada desde muy antiguo, ya los filósofos griegos sofistas la usaban y ha continuado usándose como metodología principal a lo largo de toda la historia de la educación hasta la actualidad. En las últimas décadas, esta metodología ha sido criticada porque no fomenta la participación directa del alumnado en el aprendizaje, siendo considerado un espectador, no obstante sigue siendo la metodología más usada. Para contrarrestar esta crítica se emplea una modalidad que se denomina lección magistral participativa.

El apellido de participativa implica que el docente introduce preguntas hacia el alumnado para captar su atención, fomentar su participación en la propia explicación y provocar que afloren las dudas existentes para poder afrontarlas. Las preguntas deben invitar a que los alumnos expongan lo que han entendido sobre las lecciones explicadas.

Entre las actitudes que debe tener el profesor para una adecuada lección magistral participativa destacan las siguientes:

- Hacer que la lección sea atractiva para los alumnos, buscando conectar con realidades cotidianas de los mismos.
- Llevar preparada la exposición para tenerla bien organizada, de modo que sea fluida y fácil de seguir por los alumnos.
- Ejemplificar rápidamente la nueva información para que los alumnos puedan relacionar los distintos conceptos.
- Repetir la información expuesta, especialmente la de mayor importancia para que los alumnos que no lo han captado a la primera puedan asimilar el aprendizaje.
- Realizar preguntas para que los alumnos puedan evaluar su propio aprendizaje con frecuencia.
- Captar la atención de los estudiantes empleando varios registros de volumen en la voz.
- Conectar los conceptos explicados para que los alumnos tengan referencias.

Se trata de una metodología de sencilla ejecución y práctica a la que los alumnos están habituados. Es, junto con la resolución de ejercicios y problemas, la metodología que mayormente fue empleada durante el desarrollo de las prácticas docentes, obteniendo buenos resultados.

Resolución de ejercicios y problemas.

Esta metodología, de uso frecuente en la enseñanza de matemáticas, consiste en resolver diferentes ejercicios y problemas, para adquirir técnicas que se puedan emplear para resolver situaciones similares a las que se han resuelto. Con esta metodología se pretende un aprendizaje por repetición.

Es necesario diferenciar entre ejercicios y problemas. Un ejercicio consiste en reproducir un algoritmo sistemáticamente para obtener un resultado, por ejemplo, la resolución de una ecuación de primer grado. Por otro lado, un problema requiere de realizar un razonamiento previo para establecer la vía de resolución, tiene mayor grado de abstracción. Cuando se repite un problema resuelto se convierte en un ejercicio.

Para poner en práctica esta metodología es necesario utilizar previamente otra metodología que introduzca los conceptos necesarios para afrontar los ejercicios y los problemas. En particular casa muy bien con la lección magistral en la que además se puede exponer la resolución de ejercicios.

Las principales actitudes que debe tener el docente en el uso de esta metodología son:

- Realizar muchos ejercicios para sistematizar la resolución de los mismos.
- Permitir que los alumnos se enfrenten con los problemas antes de proceder a su resolución.

- Promover el razonamiento sobre los algoritmos para prevenir de un aprendizaje puramente algorítmico que se bloquee ante ejercicios y problemas nuevos.
- Seleccionar los problemas adecuadamente para el nivel de los alumnos

Aprendizaje cooperativo.

El aprendizaje cooperativo es un enfoque de la enseñanza que pretende organizar las actividades dentro del aula en grupos de trabajo para realizar las tareas de manera colectiva. De este modo se fomentan entre los alumnos las relaciones sociales y el trabajo en equipo. Con este enfoque, el aprendizaje va a depender de la información que comparten los alumnos en el desarrollo de las actividades educativas.

Entre las actitudes para el buen uso de esta metodología se encuentran:

- Formar grupos de trabajo de aproximadamente cuatro alumnos atendiendo a las capacidades de los miembros y la posibilidad de que se complementen.
- Promover comunicación adecuada dentro de los grupos.
- Deben participar todos los miembros del grupo en el desarrollo de los trabajos teniendo en cuenta las condiciones de cada alumno.

Aprendizaje basado en problemas.

Esta metodología es similar a la expuesta anteriormente de resolución de problemas, pero tiene matices que la hacen distinta. Mientras que en la resolución de problemas se plantean primero los conceptos que permiten resolver los problemas, en el aprendizaje basado en problemas se plantea el problema sobre el que se introducen los conceptos durante su resolución. Además en esta metodología se suelen realizar los problemas en grupo, incluyendo la metodología de aprendizaje cooperativo.

El objetivo es que los alumnos aprendan por descubrimiento, al ir encontrando las herramientas que les permitan resolver los problemas. El aprendizaje basado en problemas refuerza el razonamiento abstracto y la intuición y ayuda a los alumnos a enfrentarse a problemas de diferentes características.

Los problemas empleados en esta metodología consisten en una descripción, en lenguaje sencillo, de conjuntos de fenómenos observables que requieren explicación. La tarea de los estudiantes es discutir acerca de estos problemas y aportar explicaciones necesarias que permitan afrontar los objetivos del problema. Se concede la misma importancia al proceso de aprendizaje que a los conocimientos que se pretenden adquirir.

Entre las principales actitudes para la correcta aplicación de esta metodología cabe destacar:

- Preparar adecuadamente los problemas para presentar los conceptos que se pretenden enseñar.
- Permitir a los alumnos trabajar en grupo.
- Dejar que los alumnos se enfrenten con los problemas sin dárselos resueltos.
- Proponer pistas adecuadas si los alumnos se bloquean, que permitan deshacer el bloqueo sin resolver el problema.
- Centrar el aprendizaje en los propios alumnos, siendo el docente un facilitador del aprendizaje.

Aprendizaje basado en experiencias.

Esta metodología sostiene que el alumno aprenda mediante la realización de experiencias, tratando los conceptos de forma directa y personal y pudiendo experimentar con ellos. Se trata de una metodología que intenta conducir, de forma natural, a la visión e interpretación de las cosas de una nueva manera. Su objetivo es poner al alumno en contacto con un fenómeno, bien sea conocido o parcialmente conocido, que lo motive y lo induzca a reproducirlo, con el fin de conocerlo mejor, dominarlo y utilizarlo. Pretende desarrollar la capacidad de las personas para aprender de su propia experiencia, siempre dentro de un marco conceptual concreto y bien desarrollado.

Entre las características más importantes cabe destacar:

- El alumno debe ser un participante protagonista en el proceso de aprendizaje y no un mero espectador.
- El aprendizaje experiencial sucede cuando las experiencias se apoyan en la reflexión, el análisis crítico y la síntesis.
- El alumno debe tomar la iniciativa y se le debe tomar en cuenta para los resultados.
- El alumno, a través del proceso experiencial, se encuentra comprometido a realizarse preguntas, investigar, experimentar, resolver problemas, ser creativo.
- Las relaciones se desarrollan y alimentan: tanto las interpersonales como las intrapersonales.
- El resultado de las experiencias no es predecible, lo que permite que el profesor y el alumno puedan experimentar el éxito y el fracaso, y se abre la posibilidad de hacer pedagogía del fracaso, viéndolo como oportunidad de aprendizaje.

Aprendizaje basado en juegos.

El aprendizaje basado en juegos es una metodología que consiste en el empleo de juegos o actividades lúdicas para impartir unos conocimientos. Uno de los principales objetivos es provocar que el aprendizaje sea atractivo para los alumnos, aumentando de este modo su interés por aprender. Se trata de un concepto dinámico que se puede enfocar de múltiples formas, buscando siempre la motivación del alumnado.

Entre las actitudes más destacables para el buen funcionamiento se encuentran:

- Diseñar los juegos cuidadosamente para la correcta adquisición de los conocimientos.
- Promover un ambiente de respeto para el desarrollo de los juegos.
- Fomentar la participación de todos los alumnos.
- Alternar con otras metodologías para evitar la monotonía en el juego.

2. Contenidos matemáticos.

Isometrías del plano.

En los contenidos del trabajo se van a utilizar continuamente isometrías o movimientos. Estos son conceptos geométricos que se sitúan dentro de lo que se denomina espacio métrico.

En matemáticas se define *espacio métrico* como un par $(X,\ d)$ donde X es un conjunto y d es una aplicación que va de X en la semirrecta real positiva que cumple las siguientes propiedades:

- Positiva: $d(x,y)\ \geq\ 0$ y $d(x,y)\ =\ 0$ si, y sólo si, $x\ =\ y$.
- Simetría: $d(x,y)\ =\ d(y,x)$.
- Desigualdad triangular: $d(x,z)\ \leq\ d(x,y)\ +\ d(y,z)$.

A la aplicación d se la denomina *distancia*.

Dentro de un espacio métrico, se define una *isometría* como una aplicación que conserva las distancias entre los puntos. Es decir, la distancia entre dos puntos es la misma que la distancia entre las imágenes de los puntos por la isometría. Si llamamos f a la isometría, se tiene que

$$d(x,y)\ =\ d(f(x),f(y)).$$

Las isometrías también reciben el nombre de *movimientos* porque al aplicarlos sobre un objeto, entendido como un conjunto de puntos, el objeto no se deforma ni cambia de tamaño, aunque sí puede cambiar la orientación.

Si tenemos una isometría, f, dentro de un espacio métrico (X,d), se define la *variedad invariante*, I, como el subconjunto de X tal que, si $x\ \in\ I$, entonces $f(x)\ =\ x$. De forma similar, se dice que un subconjunto $Y\ \subset\ X$ es *globalmente invariante* si $f(Y)\ =\ Y$.

Nosotros trabajaremos con el plano euclídeo, que es el espacio métrico que se emplea en la enseñanza secundaria. Este espacio, sobradamente conocido por ser el más utilizado, está definido por el par (R^2,d), donde $R^2\ =\ \{(x,y)$ con $x,y\ \in\ R\}$, y d es la distancia habitual definida por

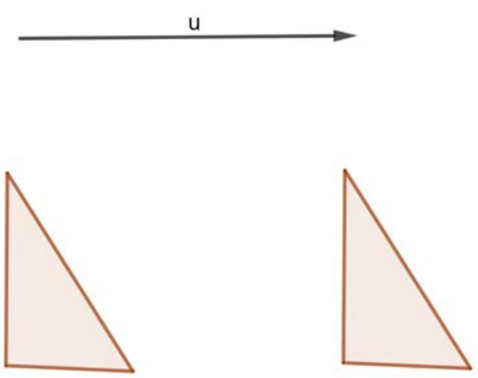
$$d((x_1,\ y_1),(x_2,y_2))\ =\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

En el plano euclídeo, existen cinco tipos de isometría:

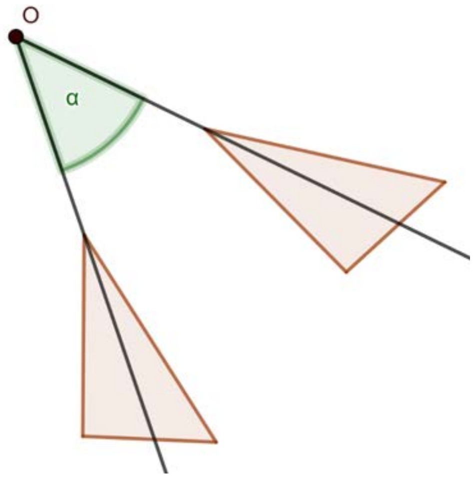
- La identidad.
- La traslación.
- El giro.
- La simetría.
- La simetría con deslizamiento (o desplazamiento).

La identidad es la aplicación trivial que lleva a cada punto del plano en sí mismo. Para esta aplicación la variedad invariante es todo el plano y todo subconjunto del plano es globalmente invariante

La traslación es una aplicación que desplaza los puntos del plano a través de un vector no nulo. Si t es una traslación a través del vector u, $t(x) = x + u$. La variedad invariante de las traslaciones es el conjunto vacío, ya que ningún punto es la imagen de sí mismo por la aplicación de traslación. Los conjuntos que son globalmente invariantes por una traslación tienen que ser bandas infinitas con la misma dirección que u.



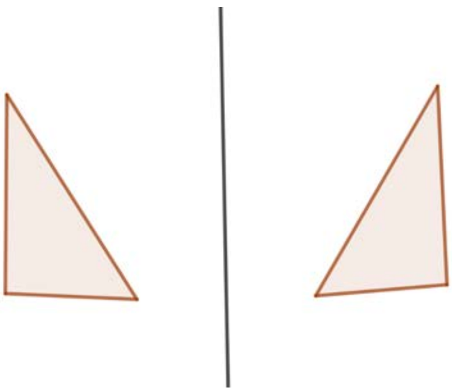
El giro es una aplicación que gira los puntos del plano, un determinado ángulo en el intervalo $(0, 360)$ en grados, en torno a un punto que llamamos centro. La variedad invariante tiene un solo elemento, que es el centro. La distancia de los puntos y sus imágenes al centro son iguales, ya que se trata de una isometría. Los conjuntos que se mantienen invariantes pueden ser de tres tipos. Tienen una forma circular, es decir el conjunto es una unión de circunferencias que comparten centro con el giro, pudiendo estar dicho centro. Si el giro es de un ángulo de 180º, los conjuntos globalmente invariantes son simétricos respecto del centro del giro, por eso a estos giros también se los denomina *simetrías centrales*. Si el giro tiene como ángulo $\frac{360}{n}$ con $n \geq 3$, natural, entonces los conjuntos globalmente invariantes se forman como uniones de conjuntos de n puntos que son los vértices de polígonos regulares de n lados, con centro geométrico el centro del giro.



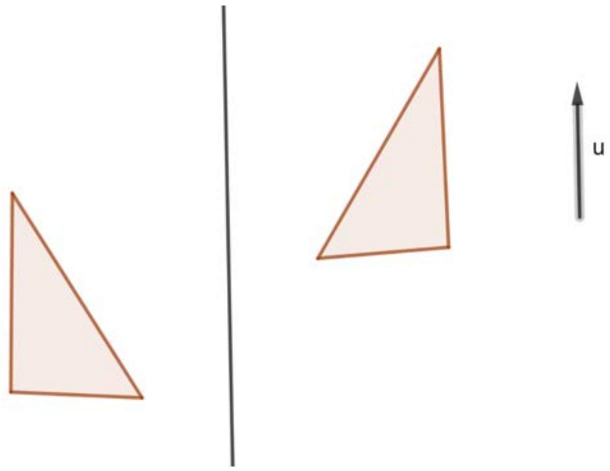
La simetría es una isometría que tiene como variedad invariante una recta, que se llama eje de simetría. La imagen del resto de puntos del plano se define como el único punto del plano que hace que el eje sea la mediatriz. Si tenemos que s es una simetría con eje r, entonces

- $s(x) = x$ si $x \in r$
- $r = m(x, s(x))$ si $x \notin r$,

donde $m(x, y)$ denota la mediatriz de x e y. La variedad invariante es el eje de simetría y los conjuntos globalmente invariantes son simétricos respecto del eje de simetría.



La simetría con deslizamiento es la composición de una simetría con una traslación. No tiene variedad invariante y los conjuntos globalmente invariantes son bandas infinitas como ocurría con las traslaciones.



Las simetrías tienen la propiedad de que cambian la orientación de los objetos. Esto quiere decir que si tenemos un triángulo numeramos los lados en sentido antihorario de giro (1, 2, 3 respectivamente), al realizar una simetría las imágenes de los lados quedan ordenadas en sentido antihorario de giro (como 3, 2, 1 respectivamente).

Esta propiedad hace que el resto de movimientos del plano se puedan obtener como composición de simetrías. La identidad es una composición de una simetría con ella misma, la traslación se obtiene como composición de dos simetrías de ejes paralelos y el giro es la composición de dos simetrías cuyos ejes forman un ángulo de la mitad del ángulo del giro.

Grupos de simetría.

Sea $P \subset R^2$ una figura plana, se define su *grupo de simetría*, que se denota por $S(P)$, como el conjunto de todas las isometrías para las que P se mantiene globalmente invariante.

Para cualquier figura plana se tiene que su grupo de simetría no es el conjunto vacío, ya que la identidad está dentro del grupo porque deja invariante cualquier figura.

Los grupos de simetría se clasifican en grupos de frisos, grupos cristalográficos y grupos puntuales.

Grupos de frisos.

Un friso consiste en una banda infinita en la que un objeto o motivo patrón se desplaza a través de un vector de forma indefinida. Llamaremos *vector generador* del friso al vector positivo de menor módulo, tal que el friso queda invariante de forma global para la traslación generada por dicho vector. Existen dos vectores generadores ya que el opuesto también cumple esta condición.

Todos los frisos resultan globalmente invariantes a la traslación por su vector generador y por cualquier múltiplo entero de este. Teniendo en cuenta esto, es posible relacionar los frisos con los números enteros.

Un friso queda totalmente determinado por el motivo y por el vector generador. Con estos dos elementos se construye el friso de forma única.

Si consideramos el conjunto de todas las traslaciones para las que el friso es globalmente invariante, tenemos un grupo isomorfo al conjunto de los números enteros, donde la operación es la composición de traslaciones. De este modo tenemos que la estructura algebraica de un friso es idéntica a la estructura algebraica de grupo de los números enteros. Esto nos permitirá, trabajando con frisos, realizar un repaso de algunas propiedades de los números enteros.

En particular, si tenemos un friso F, generado por el vector v, para cada punto, x, del plano, se tiene que $x \in F$, si y sólo si, $x + kv \in F$, con k número entero.

Esta expresión algebraica recuerda a la solución de un tipo de ecuaciones, que son las ecuaciones trigonométricas

$$sen(x) = a, \;\; cos(x) = a \;\; \text{y} \;\; tg(x) = a,$$

que tienen respectivamente las soluciones

$$x = arcsen(a) + 2k\pi, x = arccos(a) + 2k\pi \;\; \text{y} \;\; x = arctg(a) + k\pi,$$

con k número entero.

Esto no es casualidad, ya que las representación gráfica de las funciones trigonométricas se corresponden con frisos. En particular, toda función periódica tiene una representación gráfica que se corresponde con un friso, ya que se repite indefinidamente.

Clasificación de frisos

Para clasificar los grupos de frisos vamos a emplear dos notaciones que se pueden encontrar en [1].

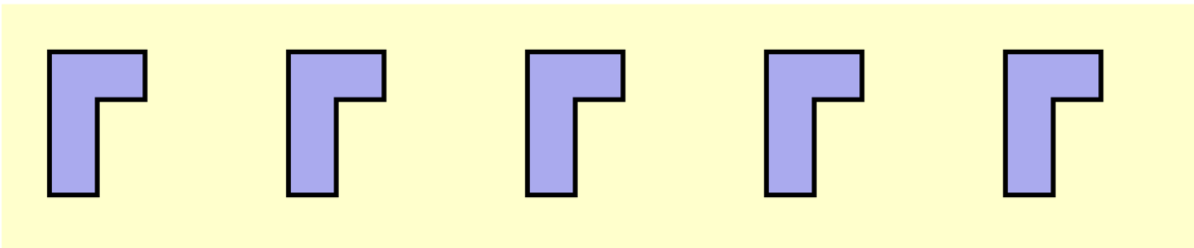
La notación cristalográfica,estandarizada por la Unión Internacional de Cristalografía, consiste en cuatro símbolos $pxyz$. El primer símbolo, p, es común a todos los grupos de frisos, proviene de la palabra primitiva y se refiere a que el eje pasa por uno de los lados del motivo que se repite. El segundo símbolo toma los valores m si existen simetrías de ejes perpendiculares a la dirección del vector generador y 1 si no existen. El tercer símbolo toma los valores m si existe una simetría de eje paralelo al vector generador, a si existe una simetría deslizante y 1 en otro caso. El cuarto símbolo toma los valores 2 si existe un giro de 180º y 1 si no existe.

La notación de Fejes Toth utiliza el formato $\mathbf{F_n^m}$, donde n indica el orden mayor de rotación y m vale 1 si el friso tiene simetría de eje paralelo a la dirección de traslación, 2 si tiene simetrías de ejes perpendiculares a la dirección de traslación y 3 si tiene simetrías con deslizamiento, tomando el mínimo cuando tiene varias de las opciones.

Existen siete grupos de frisos:

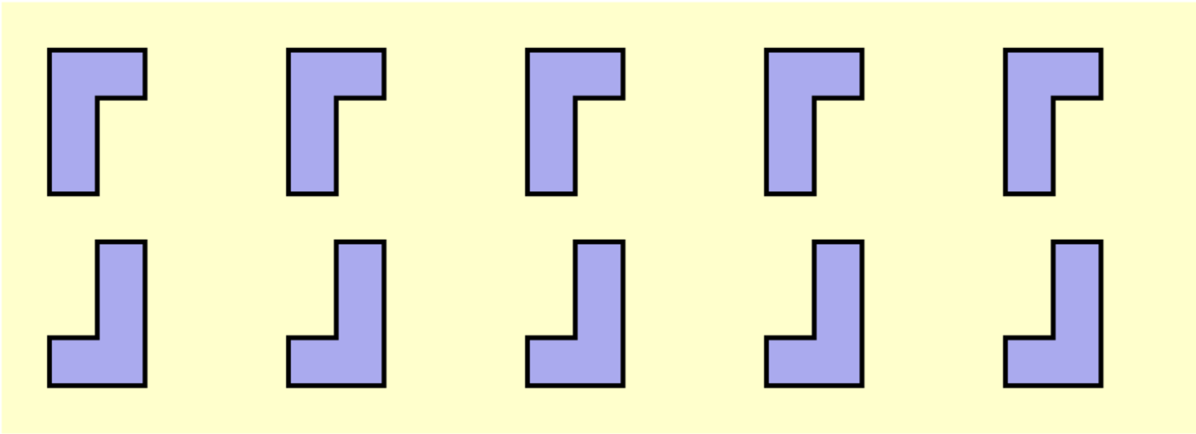
Grupo 1: **p111** o $\mathbf{F_1}$.

Solo es invariante por las traslaciones generadas por el vector generador o múltiplos enteros de este.



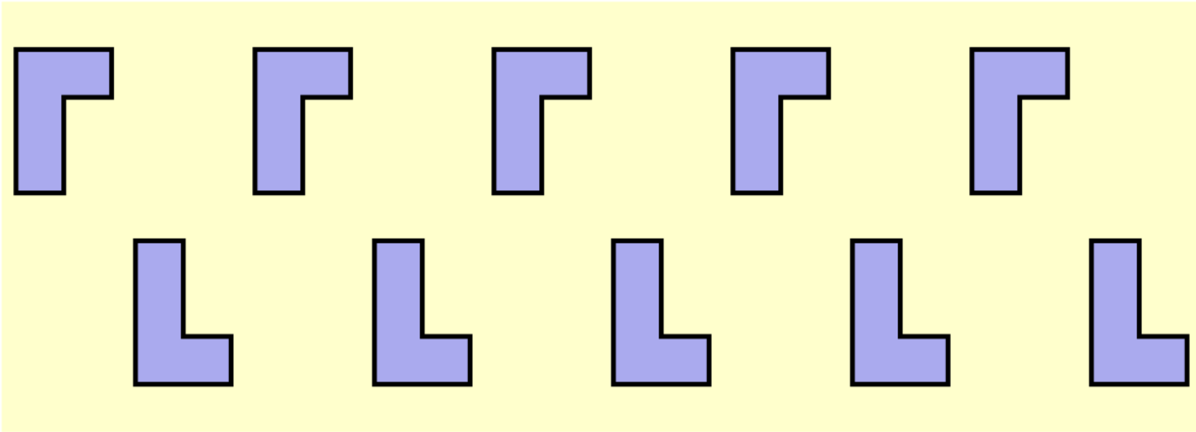
Grupo 2: **p112** o $\mathbf{F_2}$.

El friso es invariante por las traslaciones generadas por el vector generador y múltiplos enteros de este y además, es invariante por giros de 180º.



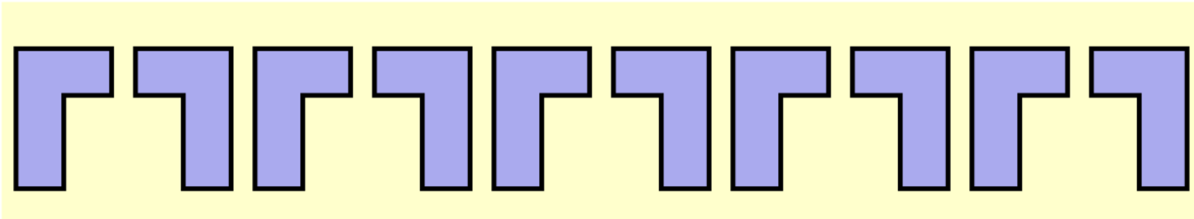
Grupo 3: **p1a1** o $\mathbf{F_1^3}$.

El friso es invariante por las traslaciones generadas por el vector generador y múltiplos enteros de este y, además, es invariante por determinadas simetrías (transversales) con deslizamiento, cuyos ejes de simetría son paralelos al vector generador.



Grupo 4: **pm11** o $\mathbf{F_1^2}$.

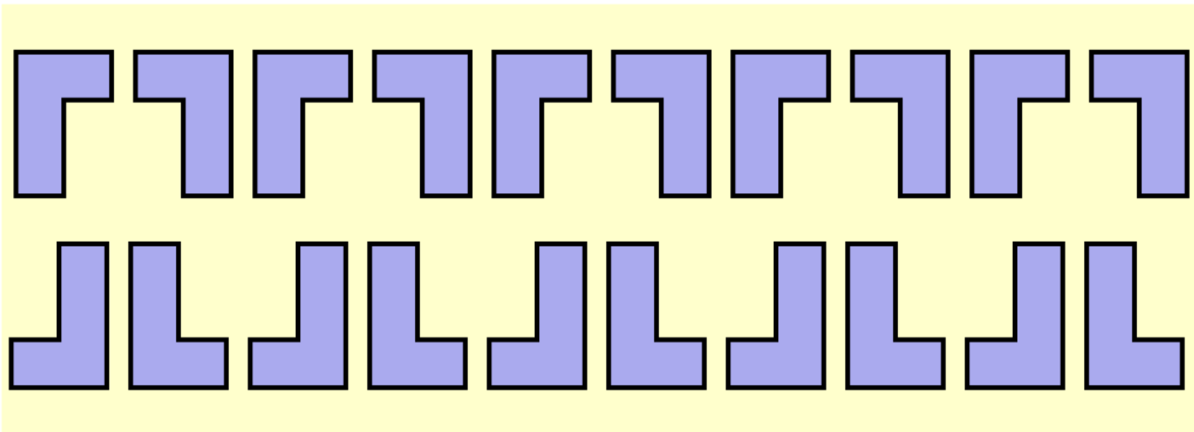
El friso es invariante por las traslaciones generadas por el vector generador y múltiplos enteros de este y, además, el friso es invariante frente a determinadas simetrías cuyos ejes son perpendiculares al vector generador.



Grupo 5: **pma2** o $\mathbf{F_2^2}$.

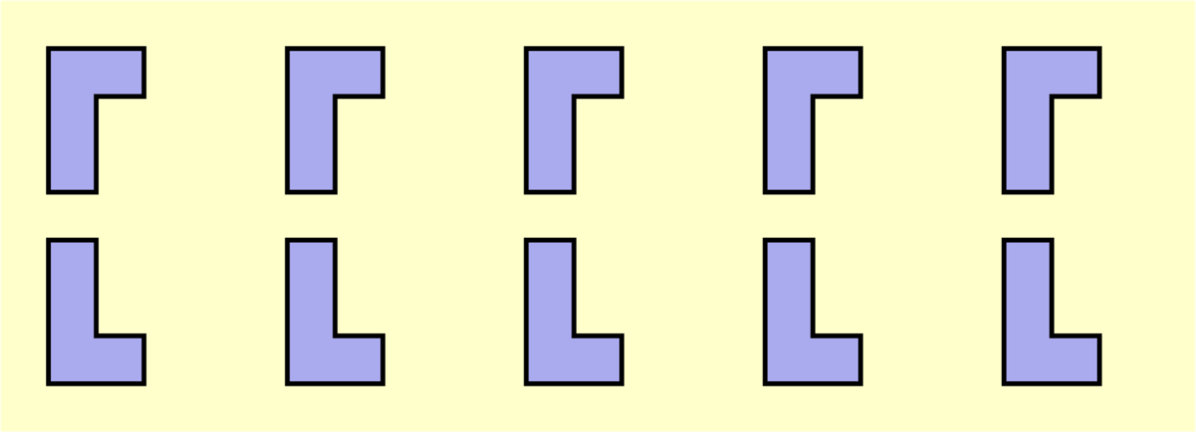
El friso es invariante por las traslaciones generadas por el vector generador y múltiplos enteros de este y, además, es invariante frente a determinadas simetrías con deslizamiento, cuyos ejes son paralelos al vector generador, y también es invariante por determinadas simetrías con ejes perpendiculares al vector generador.

El friso tiene una simetría longitudinal y una transversal con desplazamiento.



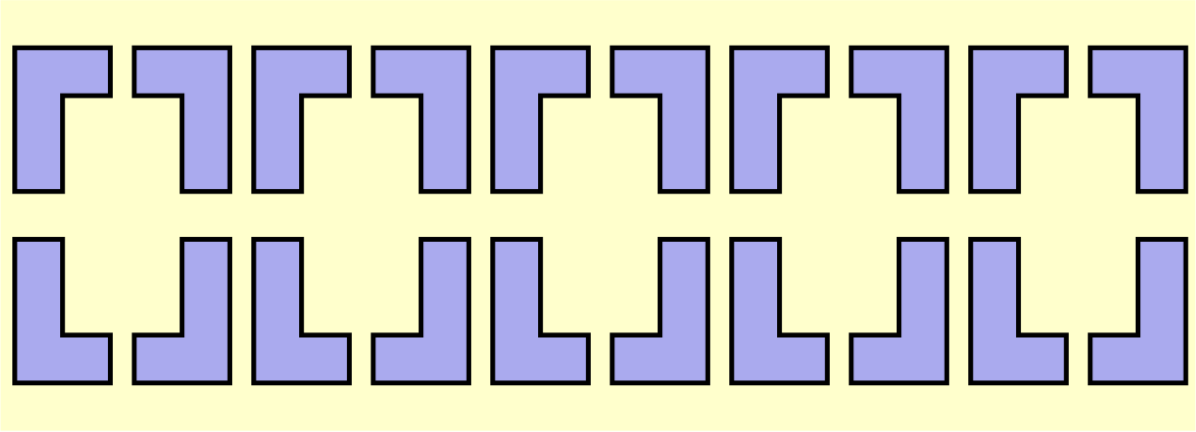
Grupo 6: **p1m1** o $\mathbf{F_1^1}$.

El friso es invariante por las traslaciones generadas por el vector generador y múltiplos enteros de este y además, resulta invariante por una simetría cuyo eje es paralelo al vector generador.



Grupo 7: **pmm2** o $\mathbf{F_2^1}$.

El friso es invariante por las traslaciones generadas por el vector generador y múltiplos enteros de este y, además, es invariante por una simetría cuyo eje es paralelo al vector generador y determinadas simetrías con ejes perpendiculares al vector generador.

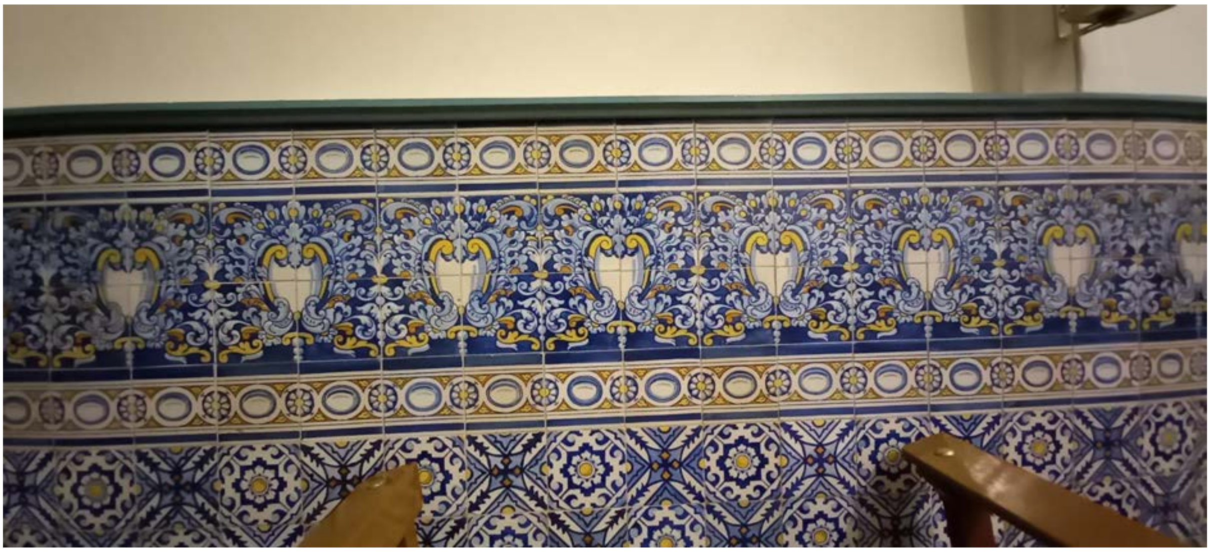


Uso de los frisos

Los frisos, matemáticamente, son objetos de longitud infinita, por lo que no se pueden construir; pero si se pueden construir partes finitas de un friso, es decir, secciones de frisos.

Se han utilizado a lo largo de la historia en la arquitectura, con fines decorativos, en lugares como la Alhambra de Granada. Sin embargo, los frisos se pueden encontrar en multitud de lugares, tales como los tramos rectos de carreteras o la pavimentación de las calles. Lo habitual es que se encuentren en elementos que se alargan en una única dirección, como caminos, columnas o bandas de una pared.

La imagen (sacada de [6]) muestra frisos situados en la Alhambra de Granada.



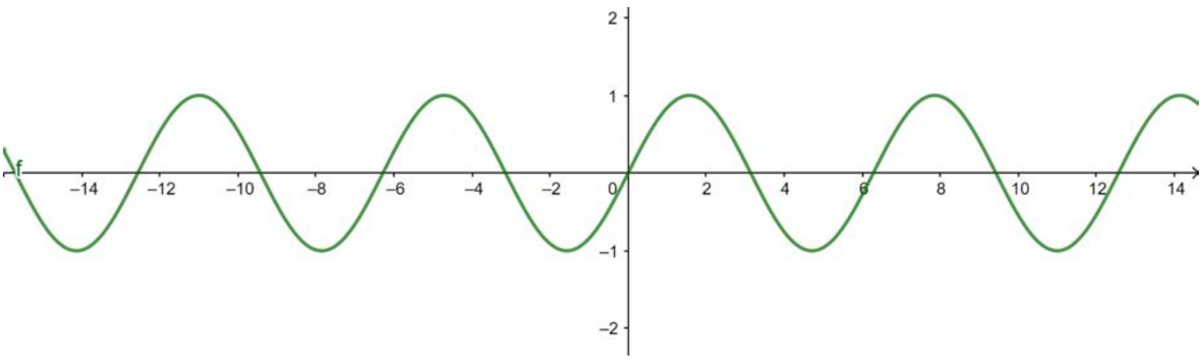
Friso del tipo **pm11** localizado en la capilla mayor del convento de las Carmelitas Descalzas de Valladolid. (Fotografía realizada por Francisco Marcos Lomo).

Calle Claudio Moyano, Valladolid. (Hecha con google maps por Francisco Marcos Lomo) Friso del tipo **pm11**.

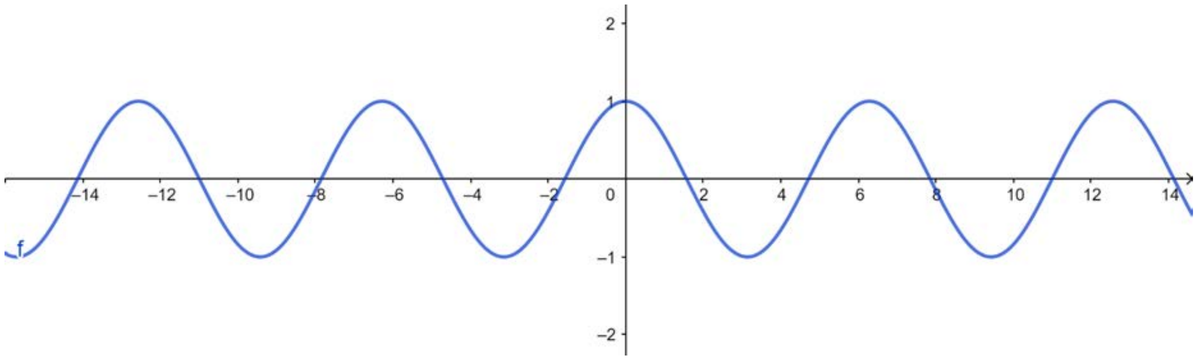
Autovía A-62. (Hecha con google maps por Francisco Marcos Lomo) friso del tipo **pm11**.

Por otro lado, pueden considerarse frisos las funciones periódicas, en particular, las funciones trigonométricas del seno, el coseno y la tangente.

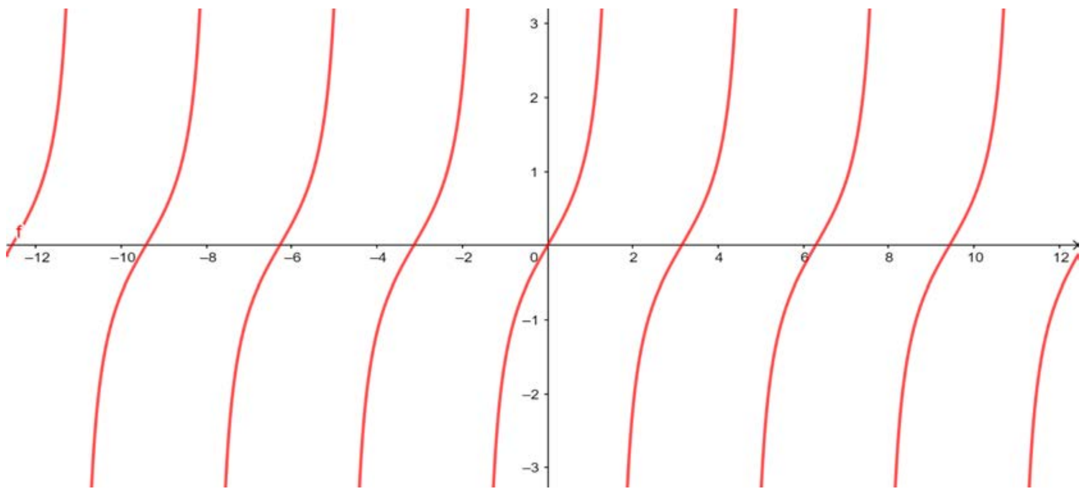
Seno, friso del tipo **pma2**.



Coseno, friso del tipo **pma2**.



Tangente, friso del tipo **p112**.



Imágenes realizadas con Geogebra.

Grupos cristalográficos.

Al igual que los frisos, los grupos cristalográficos, o grupos de mosaicos, son infinitos en cuanto a tamaño. Los grupos cristalográficos son recubrimientos del plano que consisten en la repetición de una loseta a lo largo y ancho de todo el plano. Mientras que en los frisos solamente se trasladaba en una dirección, en los mosaicos el motivo que se repite se traslada en dos direcciones.

Todos los grupos cristalográficos son globalmente invariantes para las traslaciones generadas por dos vectores, u y v, que son linealmente independientes entre sí, además de para las traslaciones generadas por cualquier combinación lineal con coeficientes enteros de dichos vectores, $au + bv$, con $a, b \in Z$. Cuando dos vectores cumplen esta condición, siendo los de menor módulo en sus direcciones, diremos que son *vectores generadores* del mosaico.

Formalmente, sea M un mosaico y u, v vectores linealmente independientes. Entonces u y v son vectores generadores del mosaico si se cumple lo siguiente:

$$x \in M \text{ si, y sólo si, } x + au + bv \in M, \text{ con } a, b \in Z.$$

Todos los mosaicos tienen, por definición al menos un par de vectores generadores, pero este par no es único.

Del mismo modo del que se ha considerado para los frisos, si consideramos el conjunto de todas las traslaciones generadas por combinaciones enteras de dos vectores generadores, obtenemos un grupo isomorfo a Z^2, considerando como operación la composición.

Al paralelogramo que se forma con dos vectores generadores de un mosaico se lo denomina *paralelogramo fundamental* o *región fundamental*. A la mínima figura de la cual se puede obtener el rectángulo fundamental mediante movimientos se la denomina *motivo inicial*. Con este paralelogramo se puede teselar todo el plano realizando traslaciones generadas por una combinación lineal de los vectores con coeficientes enteros.

Los mosaicos guardan relación con los frisos, pero con la diferencia de que los frisos sólo tienen una dirección de traslación. Por esta razón, si restringimos un mosaico a una banda encontrada entre dos rectas paralelas, cuya dirección se puede generar como combinaciones enteras de vectores generadores del mosaico, la figura resultante resulta ser un friso.

Clasificación de mosaicos

Hay 17 grupos cristalográficos. El hecho de que sean solamente 17 grupos fue establecido por Yevgraf Fedorov en 1891. Puede encontrarse una demostración de este resultado en [3], pero no se desarrollará en este trabajo ya que no entra dentro de los objetivos del mismo.

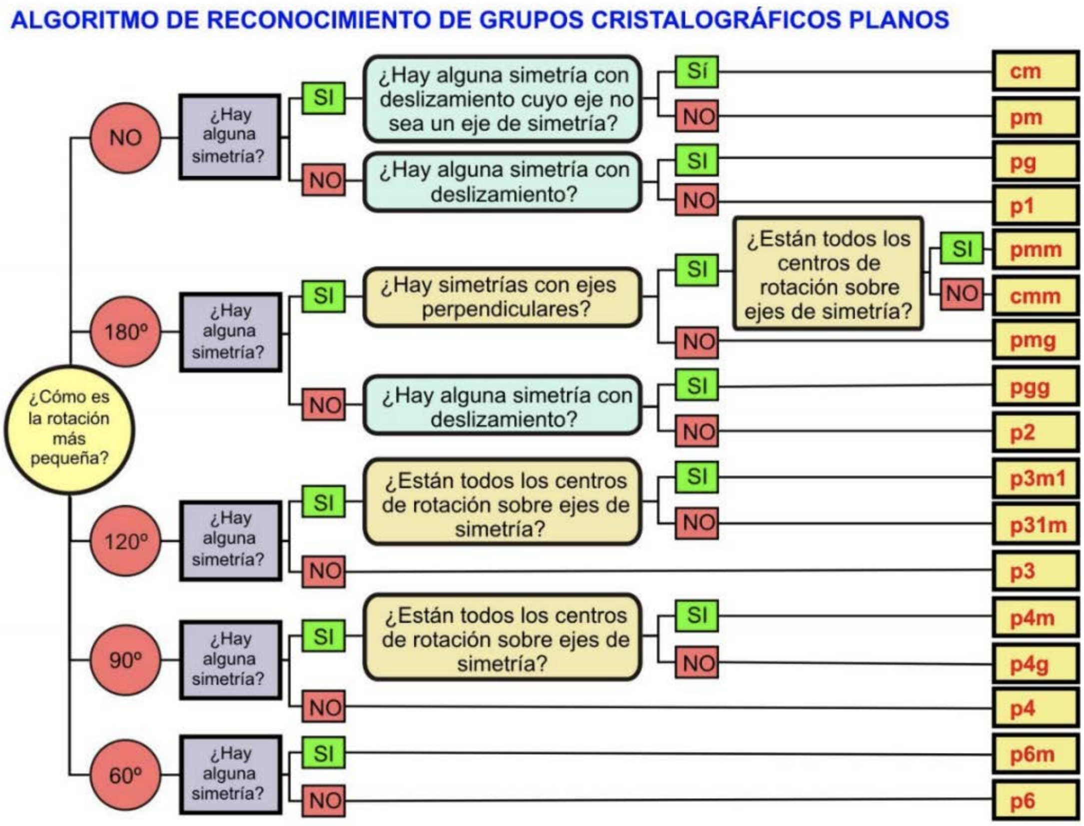
En cuanto a la notación se van a utilizar las mismas que se usaron con los frisos, la notación de Fejes Toth y la notación cristalográfica.

La notación cristalográfica,estandarizada por la Unión Internacional de Cristalografía, consiste en cuatro símbolos $lxyz$. El primer símbolo, l, toma los valores p si el eje pasa por uno de los lados del motivo que se repite o $c$si pasa por el centro. El segundo símbolo, x, toma los valores $1,\ 2,\ 3, 4\ , 6$ en función del menor ángulo de giro que se puede encontrar en el mosaico, que coincide con $\frac{360}{x}$. El tercer símbolo toma los valores m si existe una simetría de eje perpendicular a uno de los lados del motivo inicial, g si existe una simetría deslizante y 1 en otro caso. El cuarto símbolo toma los valores m si el mosaico tiene una simetría eje forma un ángulo de 90º con la dirección y $x = 2$ o si el eje de reflexión forma un ángulo de 45º con la dirección $x = 4$ ó el eje de reflexión forma un ángulo de 30º con la dirección y $x = 3$ o $x = 6$; g si en los casos anteriores hay simetría con deslizamiento en lugar de simetría y 1 en el resto de los casos.

Esta notación puede aparecer simplificada, eliminando los símbolos repetidos.

La notación de Fejes Toth emplea en este caso el formato $\mathbf{W_n}^{\mathbf{m}}$, donde n toma los valores $1,\ 2,\ 3, 4\ , 6$ en función del menor ángulo de giro que se puede encontrar en el mosaico, que coincide con $\frac{360}{n}$. Por otro lado m toma los valores 1 si el mosaico tiene simetrías de ejes paralelos a la dirección de traslación, 2 si tiene simetrías de ejes perpendiculares a la dirección de traslación, 3 si tiene simetrías con deslizamiento, y 4 si tiene simetrías con deslizamiento en dos direcciones.

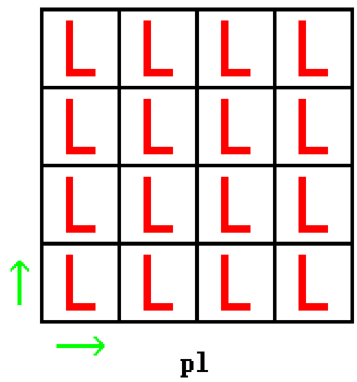
Para la clasificación de los mosaicos se puede seguir el siguiente algoritmo que se puede encontrar en [6]. También se puede utilizar un algoritmo que se puede encontrar en [2].



(Las imágenes usadas en los diferentes grupos, pueden encontrarse en [7])

Grupo 1: **p1** o **W**$_1$.

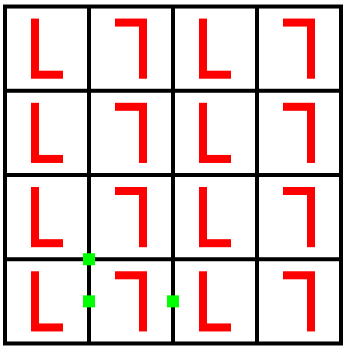
Este grupo de mosaico es globalmente invariante para las traslaciones generadas por dos vectores, u y v, que son linealmente independientes entre sí, además de para las traslaciones generadas por cualquier combinación lineal con coeficientes enteros de dichos vectores, $au + bv$, con $a,\ b \in Z$.



p1

Grupo 2: **p2** o $\mathbf{W_2}$.

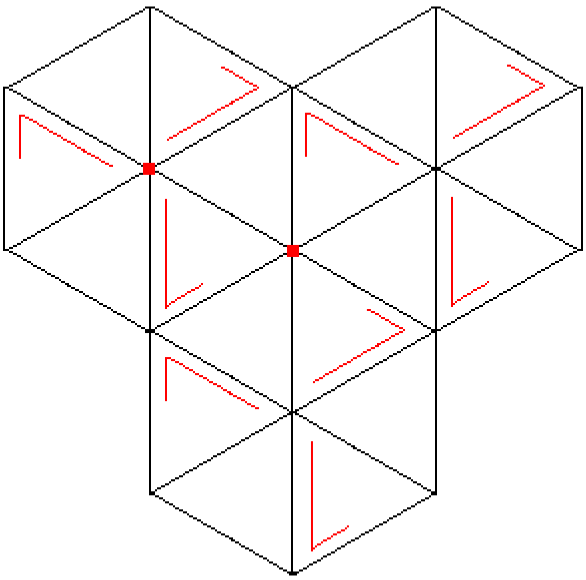
El mosaico se obtiene realizando tres giros de 180º del motivo inicial.



p2

Grupo 3: **p3** o $\mathbf{W_3}$.

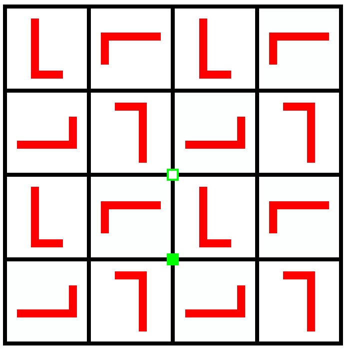
El mosaico se obtiene realizando dos giros de 120º.



p3

Grupo 4: **p4** o **W**$_4$.

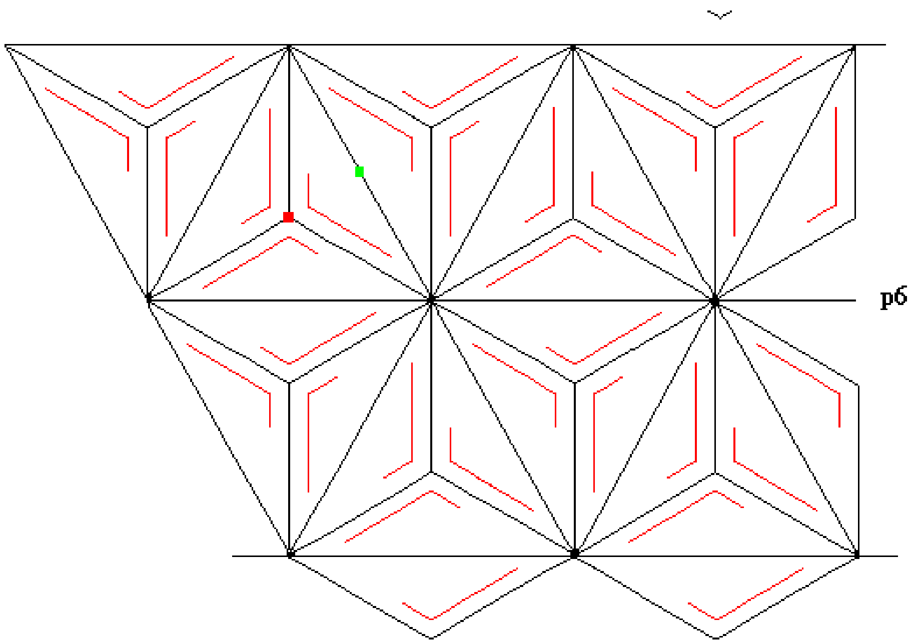
El mosaico se obtiene realizando un giro de 180º y uno de 90º.



p4

Grupo 5: **p6** o **W**$_6$.

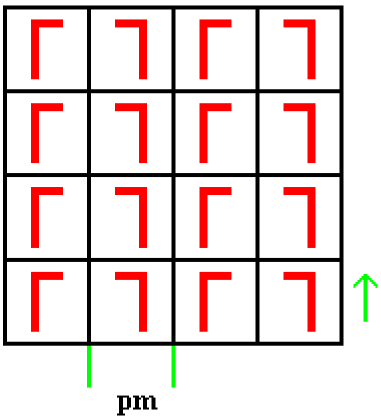
El mosaico se obtiene realizando un giro de 180º y uno de 120º.



p6

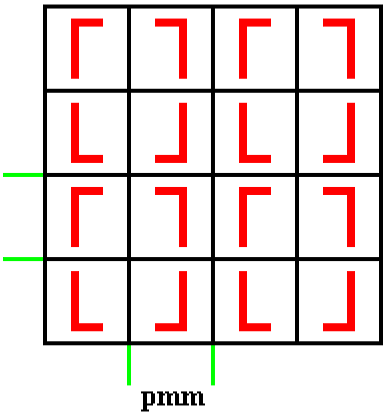
Grupo 6: **pm** o $\mathbf{W_1^2}$.

El mosaico se obtiene realizando dos simetrías de eje paralelos.



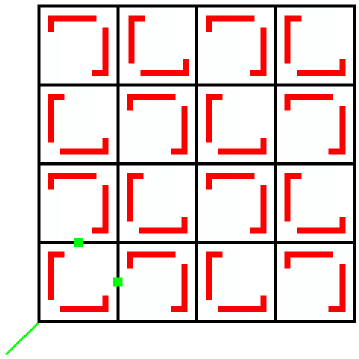
Grupo 7: **pmm** o $\mathbf{W_2^2}$.

El mosaico se obtiene realizando dos simetrías de ejes paralelos y otras dos de ejes perpendiculares a estas.



Grupo 8: **pmg** o $\mathbf{W_2^3}$.

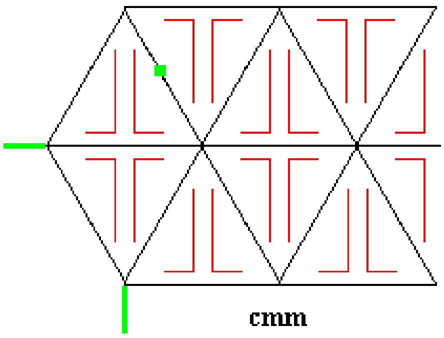
El mosaico se obtiene realizando una simetría y dos giros de 180º.



pmg

Grupo 9: **cmm** o $\mathbf{W_2^1}$.

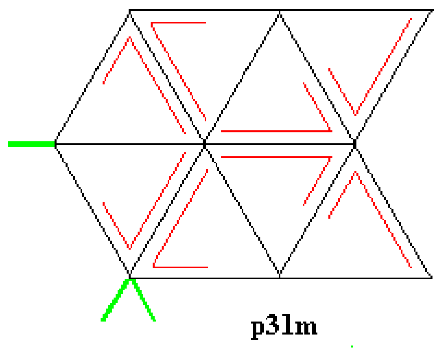
El mosaico se obtiene realizando dos simetrías de ejes perpendiculares y un giro de 180º.



cmm

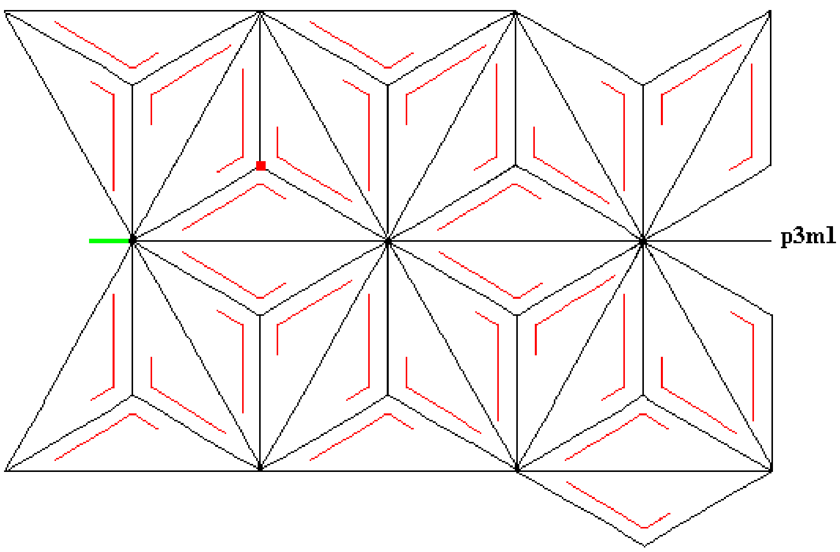
Grupo 10: **p31m** o $\mathbf{W_3^2}$.

El mosaico se obtiene realizando tres simetrías que forman un ángulo de 60º entre sí.



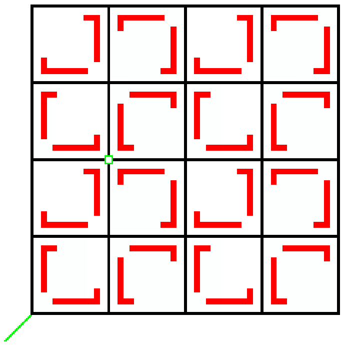
Grupo 11: **p3m1** o $\mathbf{W_3^1}$.

El mosaico se obtiene realizando una simetría y un giro de 120º.



Grupo 12: **p4g** o $\mathbf{W_4^2}$.

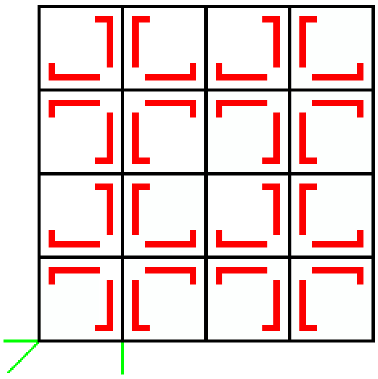
El mosaico se obtiene realizando una simetría y un giro de 90º.



p4g

Grupo 13: **p4m** o $\mathbf{W_4^1}$.

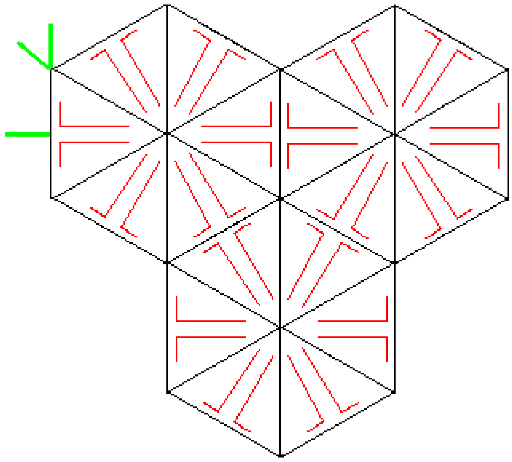
El mosaico se obtiene realizando tres simetrías con ejes que forman ángulos de 45º, 45º y 90º.



p4m

Grupo 14: **p6m** o $\mathbf{W}_6^1$.

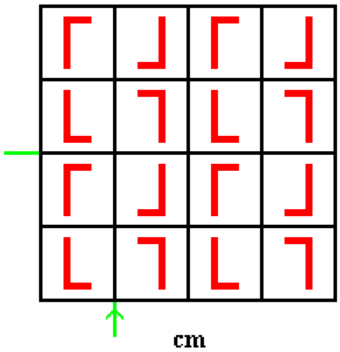
El mosaico se obtiene realizando tres simetrías cuyos ejes forman ángulos de 30º, 60º y 90º.



p6m

Grupo 15: **cm** o $\mathbf{W}_1^1$.

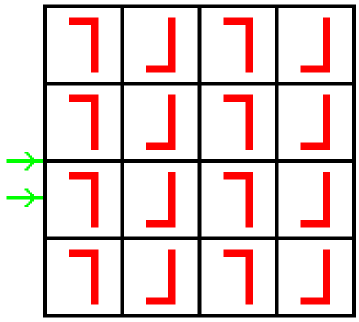
El mosaico se obtiene realizando una simetría y una simetría con deslizamiento de eje perpendicular.



cm

Grupo 16: **pg** o $\mathbf{W}_1^3$.

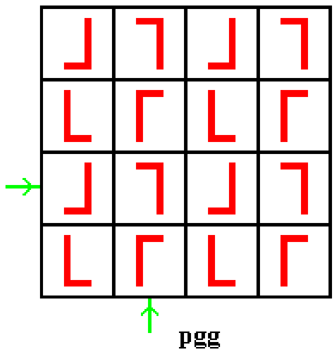
El mosaico se obtiene realizando dos simetrías con deslizamiento de ejes paralelos.



pg

Grupo 17: **pgg** o $\mathbf{W}_2^4$.

El mosaico se obtiene realizando dos simetrías con deslizamiento de ejes perpendiculares.



pgg

Uso de los mosaicos.

Los mosaicos, como los frisos, están asociados a figuras planas de longitud infinita, por lo que solo se pueden construir fragmentos de mosaicos. A diferencia de los frisos, los mosaicos aparecen en elementos que se alargan con repetición en dos direcciones distintas. Se pueden encontrar mosaicos en las plantas de habitaciones, en paredes o en plazas.

Las siguientes imágenes (sacadas de [6]) muestran grupos de mosaicos situados en diferentes lugares de la Alhambra.

Grupos puntuales.

Se denominan grupos puntuales ya que existe un punto, llamado centro, que es invariante para todos los movimientos del grupo. A diferencia de los grupos de frisos y de los grupos cristalográficos, los grupos puntuales son finitos, a excepción del grupo de una figura formada por la unión de circunferencias concéntricas; sin embargo, existen infinitos tipos

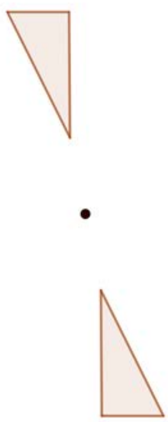
Estos grupos también se denominan grupos de Leonardo en honor a Leonardo da Vinci ya que utilizó estos grupos con el fin de que al añadir capillas a un núcleo central se conservara la simetría original.. Otra denominación que tienen es la de rosetones o rosáceas, por ser lugares donde se presentan estos grupos de simetría.

Como los movimientos de un grupo puntual tienen un punto invariante, no pueden estar dentro de estos grupos ni traslaciones, ni simetrías con deslizamiento, ya que la variedad invariante de estos movimientos es el conjunto vacío.

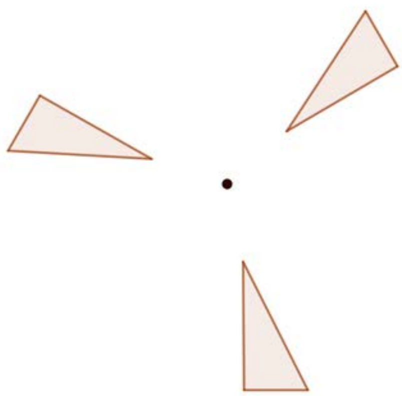
Dentro de los grupos puntuales existen dos tipos: los grupos cíclicos y los grupos diédricos o diedrales.

Los grupos cíclicos están compuestos por la identidad y un número finito de giros. Todos los giros de un grupo cíclico tienen el mismo centro. Se denota por C_n al grupo formado por $n - 1$ giros de $k\frac{360}{n}$ grados con $k = 1, 2, \ldots n - 1$.

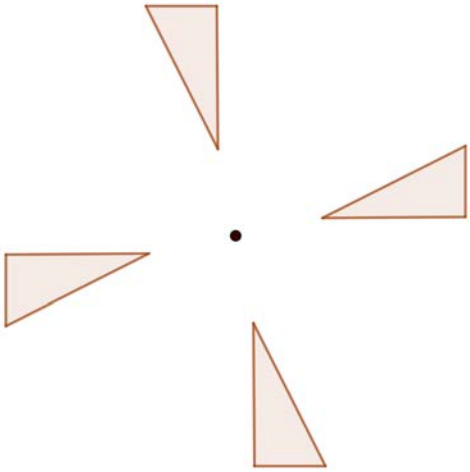
El grupo C_1 es el grupo trivial cuyo único elemento es la identidad, es decir, no existe en la figura ningún movimiento que la mantenga invariante. A continuación se muestran los grupos de simetría cíclicos desde C_2 hasta C_6.



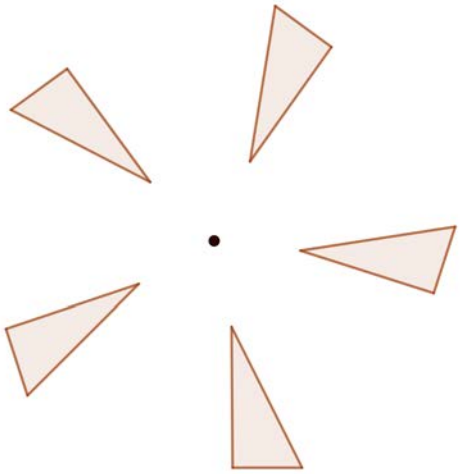
C_2



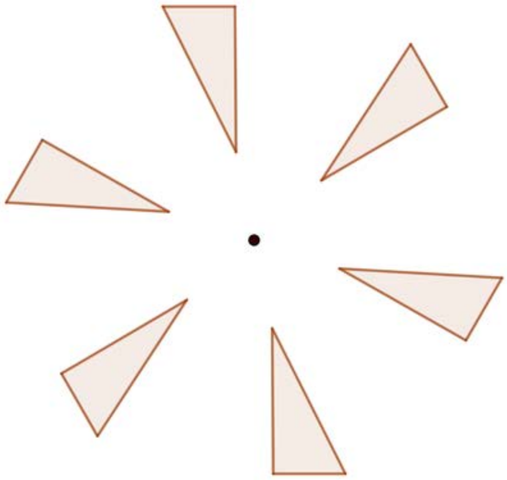
C_3



C_4



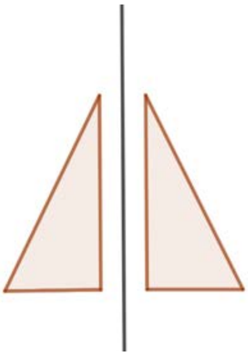
C_5



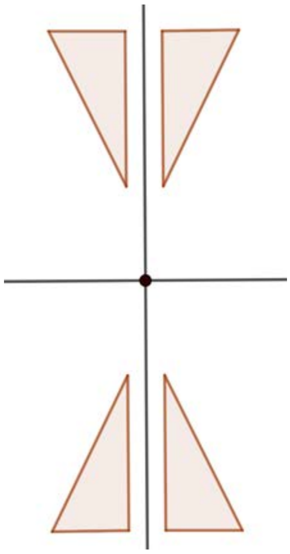
C_6

Los grupos diedrales están compuestos por la identidad, simetrías y giros. Se denota por D_n al grupo diédrico que está formado por n simetrías cuyos ejes van formando ángulos de $\frac{360}{2n}$ grados y $n-1$ giros de $k\frac{360}{n}$ grados con $k = 1,\ 2,\ldots\ n-1$.

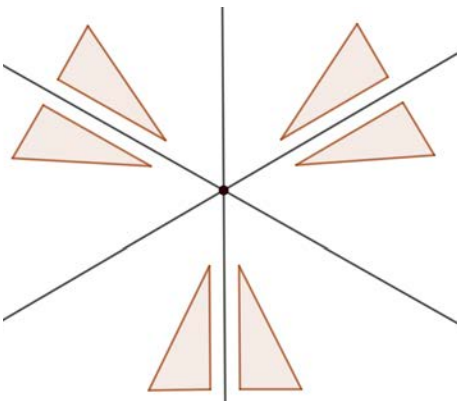
A continuación se muestran los grupos de simetría diedrales desde D_1 hasta D_6.



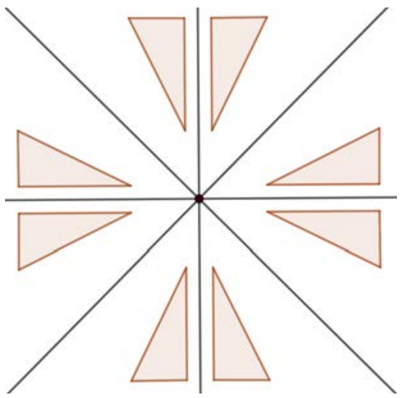
D_1



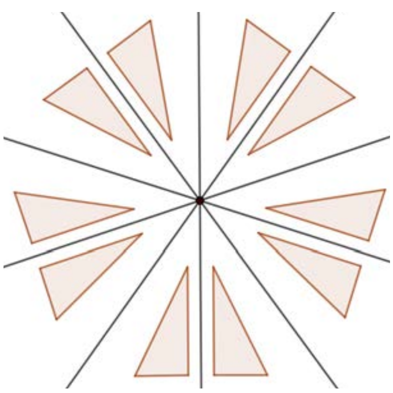
D_2



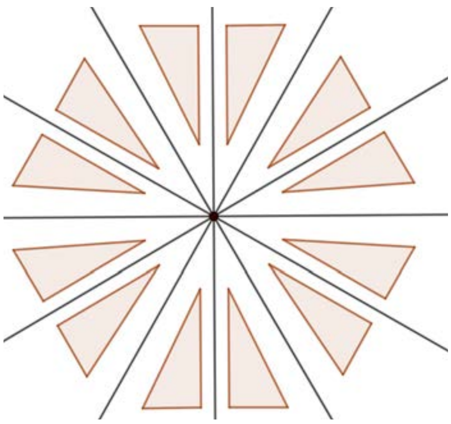
D_3



D_4

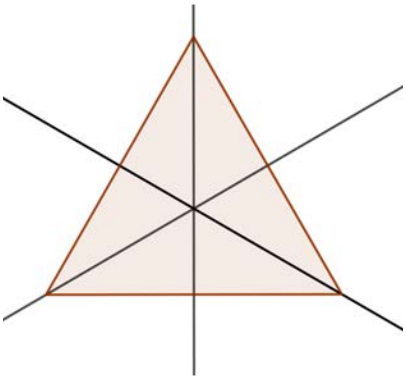


D_5

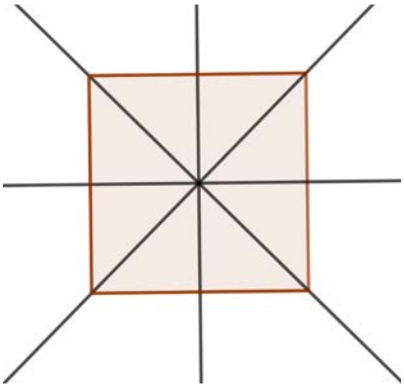


D_6

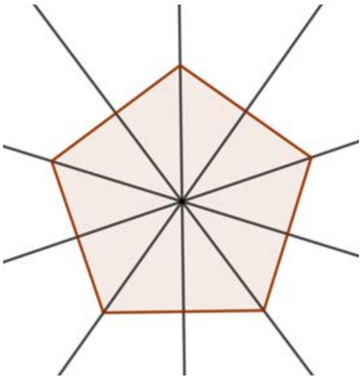
El grupo de simetría de un polígono regular de n lados es el grupo diedral D_n, como se puede observar en las siguientes figuras.



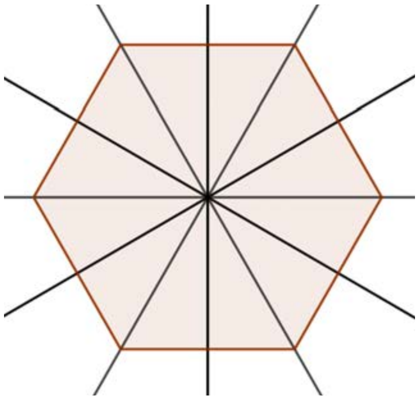
D_3



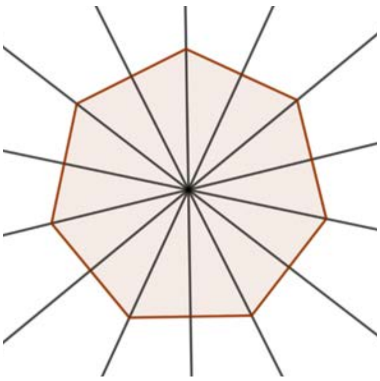
D_4



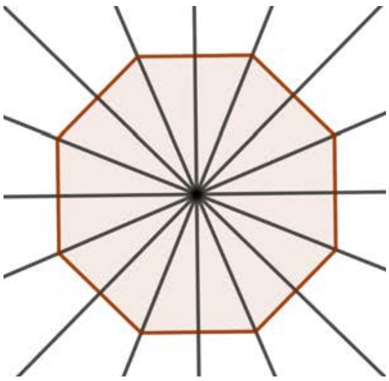
D_5



D_6



D_7



D_8

Las imágenes se han elaborado con Geogebra.

Se observa, tanto en los grupos cíclicos como en los diedrales cómo, a medida que aumentamos el número de giros, la figura adquiere una forma más circular, lo que nos permite también introducir la idea de límite utilizando estos grupos de simetría. Esto es algo que se puede emplear en la docencia, para abordar el concepto matemático de límite desde distintos puntos de vista, atendiendo al principio de variabilidad perceptiva de Dienes.

Uso de los grupos puntuales.

Los grupos puntuales se emplean habitualmente en elementos arquitectónicos que tienen una forma circular, como por ejemplo los rosetones de las iglesias. La Catedral de Burgos tiene un rosetón con grupo de simetría $\mathbf{D_6}$ en la fachada occidental y otro con grupo de simetría $\mathbf{D_{10}}$ en la fachada del Sarmental; el rosetón de la Catedral de León se corresponde con un $\mathbf{D_{12}}$.

Por otro lado, en un ámbito mucho más cotidiano, los grupos de simetría diédricos aparecen con frecuencia en los juegos competitivos. Esto se debe a que la simetría permite comenzar los juegos en equilibrio o igualdad de condiciones, que se puede entender como un juego justo. Así pues se pueden observar grupos diedrales $\mathbf{D_2}$ en el campo de juego de varios deportes como el fútbol, el baloncesto o el tenis. También se pueden encontrar grupos diedrales en los tableros de juegos de mesa tradicionales como el parchís para cuatro jugadores, $\mathbf{D_4}$, o el de seis jugadores, $\mathbf{D_6}$ o en la distribución de las piezas de ajedrez, $\mathbf{D_1}$, en un tablero que tiene un grupo de simetría $\mathbf{C_2}$.

Como ocurría con los frisos, que aparecen en las funciones periódicas, el grupo $\mathbf{D_1}$ se observa en las funciones simétricas respecto del eje de ordenadas y el grupo $\mathbf{C_2}$ en las funciones simétricas respecto del origen.

También la propia forma humana y la de muchos animales tienen una configuración simétrica que se corresponde con grupos $\mathbf{D_1}$.


Tableros de ajedrez y parchís. (Imagenes realizadas por Francisco Marcos Lomo)

3. Desarrollo de simetrías en secundaria.

Simetrías en el currículo.

Dentro del currículo establecido por la ley en [12] para los cursos de secundaria, se tiene, en relación con la simetría y los grupos de simetría presentados en este trabajo, lo siguiente en cada curso.

Primer y segundo curso

En el bloque de geometría aparece lo siguiente:

<u>Contenidos.</u>

-Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.

<u>Criterios de evaluación.</u>

-Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características que permiten clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico y abordar problemas de la vida cotidiana.

<u>Estándares de aprendizaje.</u>

-Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc.

-Los dos cursos incluyen los mismos contenidos en lo referente a simetrías. Esto es una muestra del carácter cíclico que presenta el currículo de matemáticas para el aprendizaje, repitiendo los contenidos curso tras curso, ampliando levemente la materia.

Tercer curso académicas y aplicadas.

<u>Contenidos.</u>

-Movimientos del Plano: Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Elementos dobles o invariantes. Reconocimiento de los movimientos y valoración de su belleza en el arte y la naturaleza.

Criterios de evaluación.

-Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimientos en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

-Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.

Estándares de aprendizaje.

-Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

-Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.

-Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales.

-Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas. (académicas)

Cuarto curso académicas.

Contenidos.

-Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Definiciones geométricas y analíticas de las operaciones: suma de vectores y producto de número por vector. Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua y general o implícita. Paralelismo, perpendicularidad: condiciones de las coordenadas de los vectores.

Criterios de evaluación.

-Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.

Estándares de aprendizaje.

-Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores.

-Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.

-Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

Cuarto curso aplicadas.

No aparecen contenidos relacionados con la simetría explícitamente.

Simetrías en los libros de texto.

En los libros de Marea Verde, de 2º de Educación Secundaria Obligatoria, en la unidad de Longitudes y áreas, en la página 125 aparecen ejercicios que implican mosaicos o grupos puntuales, aunque no se trabajan las simetrías sino áreas. En el tercer curso aparece una unidad entera dedicada a las isometrías, Unidad 8: Movimientos en el plano y el espacio. Es idéntico para matemáticas aplicadas y para académicas.

La editorial ANAYA dedica una unidad completa a los movimientos y grupos de simetría en el tercer curso. Se trata de la unidad 12: Transformaciones geométricas.

Competencias y grupos de simetría.

Los grupos de simetría permiten desarrollar todas las competencias clave, especialmente la competencia matemática, que es la que más se trabaja en la docencia de las matemáticas.

La competencia lingüística se trabaja de diversas maneras en la enseñanza de los grupos de simetría. Se introducen vocabulario nuevo que pueden aprender los alumnos, como isometría, friso, diedral… Esto enriquece su lenguaje aumentando su capacidad para la comunicación. Además se puede trabajar implícitamente esta competencia mediante el desarrollo de las sesiones que involucran a los grupos de simetría, mediante una metodología de lección magistral participativa, donde los alumnos planteen ordenadamente sus dudas.

La competencia matemática se trabaja desde una multitud de factores mediante el uso de los grupos de simetría. El propio manejo de dichos grupos implica un control de nociones básicas de álgebra y geometría , como son los vectores y el plano euclídeo. Además, como se ha expuesto en el trabajo, los grupos de frisos guardan relación con los números enteros y con las funciones periódicas, lo que permite desarrollar indirectamente el conocimiento de áreas como la aritmética o el análisis matemático.

Asimismo, usando los grupos de simetría, los alumnos pueden descubrir la belleza a través de las matemáticas, conocer diferentes representaciones de conceptos matemáticos, manejar terminología matemática, relacionar las matemáticas con elementos de la vida real o descubrir diferentes aplicaciones de conceptos matemáticos.

La competencia digital se trabaja mediante el uso de programas matemáticos específicos, como Geogebra o Morenaments. Estos programas son muy intuitivos y además permiten a los alumnos manipular los conceptos matemáticos de una forma muy visual.

La competencia de aprender a aprender se desarrolla al trabajar las matemáticas con un método gráfico, en oposición a un método algorítmico. De este modo los alumnos generan nuevos modos de aprendizaje que les ayudarán a asentar los conceptos. También es posible que la aparición de los grupos de simetría en distintos objetos de la realidad, despierte en los alumnos la curiosidad y la motivación por aprenderlos.

La competencia cívica y social se puede trabajar mediante un aprendizaje colaborativo o mediante la convivencia en el aula. También se desarrolla a valorar la herencia que han dejado diferentes culturas en la plasmación de grupos de simetría en diferentes lugares. Por otro lado, las simetrías generan una sensación de equilibrio e igualdad que puede ser aprovechada para que los alumnos adquieran valores.

La competencia emprendedora se puede trabajar poniendo el foco en la creatividad. Los alumnos que asimilen las ideas que subyacen a los grupos de simetría pueden adquirir una creatividad que les permita crear figuras mediante el uso de movimientos y simetrías. Además pueden tomar la iniciativa y experimentar con la creación de frisos y mosaicos, observando los diferentes resultados que obtienen.

Los grupos de simetría han sido empleados por multitud de culturas diferentes, lo que implica que su conocimiento contribuye a la adquisición de la competencia cultural. Además el manejo adecuado de los grupos de simetría permite realizar creaciones artísticas de gran belleza y valor, que contribuyen al enriquecimiento cultural.

4. Actividades académicas para la enseñanza de grupos de simetría.

Se presentan a continuación varias actividades que se pueden proponer a nivel de educación secundaria y que tienen relación con los contenidos de simetría que se han desarrollado a lo largo del trabajo.

Los grupos de simetría están recogidos en los contenidos que establece la ley para el currículo de matemáticas. Se pueden incluir en la asignatura de tercero de educación secundaria, de matemáticas académicas que contiene lo siguiente en el apartado de geometría: "Movimientos del Plano: Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Elementos dobles o invariantes. Reconocimiento de los movimientos y valoración de su belleza en el arte y la naturaleza." *(BOCYL Viernes, 8 de mayo de 2015, Núm. 86, Pág. 32209)*.

Todas las actividades que se van a plantear se sitúan en un contexto de tercero de educación secundaria en un instituto localizado en la ciudad de Valladolid.

Actividad 1

Excursión a la Alhambra de Granada.

Resumen

La actividad consistirá en realizar una excursión para hacer una visita cultural de la Alhambra. En esta visita se prestará atención a los grupos de simetría que allí se encuentran, relacionando las matemáticas con expresiones culturales y trabajando de forma común disciplinas como el arte, la historia y las matemáticas.

Objetivos y competencias.

Como ya se ha mostrado en páginas precedentes, la Alhambra alberga una gran riqueza en cuanto a elementos matemáticos empleados en la arquitectura se refiere, en particular, dentro de ella se pueden encontrar muchos grupos de simetría cristalográficos, además de grupos de frisos y grupos de simetría puntuales. Por otro lado, también tiene mucha riqueza matemática en cuanto a arcos, bóvedas y proporciones, como la cordobesa; pero esto no será objetivo de la actividad.

Con esta actividad se pretende que el alumnado pueda descubrir las matemáticas subyacentes en este lugar, específicamente los grupos de simetría, aunque hay mucho más, aparte de matemáticas, que enriquecen y justifican una visita cultural de uno de los monumentos más emblemáticos de España.

Uno de los objetivos que se pretenden abordar es el desarrollo de varias competencias clave: la competencia matemática observando los modelos matemáticos que modelizan los distintos elementos que en la Alhambra se pueden encontrar; la lingüística a partir de las exposiciones del guía y los diálogos que se establezcan con él; la digital en el manejo de dispositivos móviles para realizar fotografías; la de aprender a aprender al abordar un enfoque de la información diferente del habitual del aula, lo que promueve que los alumnos generen nuevos modos de aprendizaje; la competencia cívica y social se ve reforzada por la convivencia entre los alumnos durante todo el viaje; la iniciativa emprendedora en la toma de decisiones para buscar los grupos de simetría; la competencia cultural se ve enriquecida por el conocimiento de un monumento que tiene su origen y expresiones en una cultura muy rica de los siglos XIII-XV.

Metodología.

La metodología empleada para el desarrollo de esta actividad es la del aprendizaje basado en experiencias, además de lección magistral por parte de los guías del lugar en las explicaciones sobre el monumento.

Desarrollo.

Para el desarrollo de la actividad sería necesario hacer noche en la propia ciudad de Granada, ya que la distancia que separa esta ciudad de Castilla y León se traduce en un viaje de al menos 6 horas de autobús. Esto genera el problema de que se requiere una fuerte inversión de tiempo y dinero por parte de los alumnos para realizar el viaje, pudiendo ser motivo de rechazo de la actividad por parte de las familias que menos recursos posean. No obstante la riqueza académica de esta actividad es suficiente para plantearla y recomendarla a pesar de las dificultades.

Utilizando el recurso de *Paseos Matemáticos* ofrecido por la *Fundación Descubre* [8], se ha realizado un itinerario indicando algunos los elementos matemáticos de simetría que se localizan en los diferentes espacios de la Alhambra. El itinerario parte de la Puerta del Vino y recorre los palacios nazaríes hasta el Mirador de Daraxa. Estos son los elementos destacados:

- Puerta del Vino: se puede encontrar un mosaico del tipo **p31m** sobre uno de los arcos de la puerta.

- Mexuar: se observa un mosaico del tipo **pmm** en una pared y otro del tipo **p4g** en la planta del suelo, además de diferentes frisos. En el oratorio del Mexuar se puede encontrar un grupo diédrico $\mathbf{D_1}$ en una de las fachadas.
- Fachada de Comares: destaca por ser simétrica, es decir, el conjunto de la fachada tiene un grupo diédrico $\mathbf{D_1}$. Además se pueden observar un friso del tipo **pma2** y un mosaico del tipo **p4m** si obviamos el color.
- Corredor de Comares: en este lugar se puede encontrar un friso del tipo **p11m** que destaca por tener las traslaciones verticales, en contraposición a las traslaciones horizontales habituales de los frisos. También se pueden observar mosaicos del tipo **pm** y **p6m**, en el que se incluye un grupo cíclico $\mathbf{C_6}$.
- Patio de Arrayanes: en este patio se destacan tres simetrías espaciales, dos que forman una cruz y otra que se forma con el reflejo del estanque. Aunque no se trata de isometrías en el plano euclídeo se pueden considerar las proyecciones.
- Sala de la Barca: se pueden observar en las paredes mosaicos del tipo **cmm** y **p4m**. Además se pueden ver frisos y algún grupo puntual.
- Salón del trono: en las alcobas de este salón se pueden ver mosaicos que son del tipo **p4g** y **p4m**, obviando el color.
- Patio de los leones: en este patio se puede descubrir, en la emblemática fuente de los leones vista desde arriba, un grupo diedral de simetría, el $\mathbf{D_{12}}$.
- Sala de los reyes: se pueden ver mosaicos del tipo **pmm**, **p6** y **p4m**, y si no tenemos en cuenta el color, otro del tipo **p6m**, en los pilares y paredes.
- Sala de Abencerrajes: en la bóveda se puede observar un grupo diedral $\mathbf{D_8}$. En las paredes se encuentran mosaicos del tipo **cm**, **p3m1** y **p4m**, además de frisos de tipo **pmm2**.
- Patio del Harén: en este lugar se pueden ver frisos del tipo **p11m** y **p112**, además de mosaicos del tipo **cm** y **p4m** y grupos puntuales $\mathbf{C_2}$, en el techo, y $\mathbf{D_8}$.
- Sala de Dos Hermanas: en la bóveda de esta sala también se puede observar un grupo diedral $\mathbf{D_8}$. Por otro lado se pueden ver frisos del tipo **pma2**, si no se tiene en cuenta el color, o del tipo **pm11**, si se tiene en cuenta el color. En la parte baja de la pared se observa una figura que parece un mosaico, sin embargo, solo se repite por traslaciones horizontales y se trata de un friso del tipo **pmm2**.
- Mirador de Daraxa: se puede ver como el mirador tiene una simetría correspondiente al grupo diédrico $\mathbf{D_1}$. Por otra parte se pueden ver mosaicos de tipo **p6m**, obviando el color, y **p4m**.

Este sería el recorrido propuesto para la actividad, aunque probablemente haya muchos más grupos de simetría que los mencionados. Se trata de una colección muy rica de grupos de simetría de diferentes tipos, con los que los alumnos pueden aprender adecuadamente.

Los alumnos dispondrán de un cuaderno de trabajo, con algunas de las fotografías de los motivos con simetrías señalados. Es aconsejable que, previo a la visita, los alumnos constaten a partir de las definiciones correspondientes, que esas imágenes representan esos grupos, y su justificación. En el aula se pueden trabajar traslaciones, giros, simetrías, etc., a partir de motivos recortados en cartulina, y observar cómo van disponiéndose bien en frisos, bien en mosaicos, bien en grupos puntuales. Asimismo se incluirá, dadas las facilidades que los móviles proporcionan, la elaboración de un libro digital de imágenes, realizadas por ellos mismos, y explicadas y comentadas matemáticamente.

Evaluación.

Para evaluar esta actividad se atenderá a los siguientes factores sobre los alumnos:

- Participación activa en la búsqueda de grupos de simetría.
- Atención prestada a las explicaciones de los guías.
- Motivación ante los objetivos de la actividad y curiosidad por aprender.
- Adquisición de nuevos conocimientos.
- Valoración positiva de la actividad.

Actividad 2.

Grupos de simetría por las calles de Valladolid.

Resumen.

Esta actividad consistirá en realizar un paseo con los alumnos recorriendo las calles de Valladolid identificando grupos de simetría en diferentes lugares de la ciudad. Es una actividad cultural que podría realizarse dentro de la semana cultural que está asentada en varios institutos de la ciudad y que ocuparía media mañana.

Objetivos y competencias.

El objetivo de esta actividad es similar al planteado en la actividad anterior, pero en este caso quedarían solventadas las dificultades de desplazamiento si se plantea en un instituto que esté situado en la propia ciudad de Valladolid, especialmente si el instituto está localizado cerca de la zona central de la ciudad. Aunque en el TFM será planteada para la ciudad de Valladolid, se podría adaptar a cualquier otro lugar, ya que los grupos de simetría son empleados en multitud de lugares.

Las competencias clave se desarrollan de forma similar a la anterior actividad: la matemática observando los modelos matemáticos que modelizan los grupos de simetría que se encuentran en la ciudad de Valladolid; la lingüística en las comunicaciones que se realizan entre los alumnos buscando distintos grupos de simetría; la digital en el uso de dispositivos móviles para realizar fotografías; la de aprender a aprender al abordar un enfoque de la información diferente del habitual del aula, lo que promueve que los alumnos generen nuevos modos de aprendizaje; la competencia cívica y social se ve reforzada por la convivencia entre los alumnos durante todo el paseo, buscando juntos elementos matemáticos; la de iniciativa emprendedora en la toma de decisiones sobre dónde buscar los grupos de simetría; la competencia cultural se ve enriquecida por el conocimiento de expresiones culturales que se encuentran en el entorno habitual de residencia de los alumnos.

Metodología.

La metodología empleada para el desarrollo de esta actividad es la del aprendizaje basado en experiencias, ya que los alumnos son los protagonistas para buscar por sí mismos grupos de simetría en la ciudad.

Desarrollo.

Por las calles de Valladolid se pueden encontrar multitud de elementos que contienen grupos de simetría, desde las aceras de las calles, el piso de los carriles bici, las rejas de los balcones o elementos decorativos de algunos edificios.

Ayudado de la referencia [1], se ha realizado una guía con lugares de Valladolid que contienen grupos de simetría destacados. Un posible recorrido para realizar la actividad es el siguiente:

- Monasterio de Santa Isabel: se observan multitud de grupos puntuales dentro del claustro como $\mathbf{D_4}$, $\mathbf{D_6}$, $\mathbf{C_4}$, $\mathbf{C_5}$ y $\mathbf{C_6}$. También se pueden ver frisos del tipo **p111** en la capilla del monasterio.
- Iglesia de San Pablo: se pueden ver grupos diedrales $\mathbf{D_3}$ y $\mathbf{D_6}$, en una capilla interior, y $\mathbf{D_{12}}$, en la fachada lateral, visible desde el patio que da acceso a la Capilla del Colegio de San Gregorio.
- Museo Nacional de Escultura: en la fachada se puede ver un mosaico del grupo **p4g**.
- Teatro Calderón: en parte de las fachadas laterales se encuentra un mosaico **cmm**.

- <u>Calle Macías Picavea:</u> en el balcón de la casa número 7, se puede ver un **D_{16}**.
- <u>Iglesia de Santa María la Antigua:</u> frisos del tipo **pmm2** y **pm11**. Grupos diedrales **D_4**, en los propios frisos, y **D_8** en los rosetones y en el jardín de la plaza.
- <u>Ruinas de la Colegiata románica:</u> se pueden ver grupos diédricos **D_4 y** frisos **pma2**.
- <u>Plaza de la Universidad:</u> friso **p111**, en la verja hacia López Gómez y en la planta del patio de los cipreses, donde estaban las antiguas colegiatas, se puede encontrar un mosaico del tipo **pmm**.
- <u>Catedral:</u> hay un grupo diedral **D_3** dentro del museo y frisos del tipo **pm11** en la fachada este.
- <u>Calle López Gómez:</u> en el número 24 se puede ver una fachada con un mosaico del tipo **p6m**.
- <u>Calle Castelar:</u> en el óculo de la entrada al Pasaje Gutiérrez se puede encontrar un grupo diédrico **D_{16}**.
- <u>Calle Teresa Gil:</u> en el cruce con la calle San Felipe Neri hay un pavimento que corresponde a un mosaico **p3m1**.
- <u>Colegio García Quintana:</u> situado en Plaza España tiene un friso **pma2**.
- <u>Calle Jose María Lacort:</u> número 2 friso del tipo **pm11**.
- <u>Calle Mantería:</u> número 27 hay un friso del tipo **pm11** y en el número 32 uno del tipo **pmm2** en la reja del balcón.
- <u>Calle Muro:</u> en el número 20 se encuentra friso del tipo **pm11**.
- <u>Plaza Madrid:</u> en los balcones del edificio número 2 hay un friso del tipo **p1m1**.
- <u>Calle Perú:</u> en el número 17 se localiza un mosaico **p6m**.
- <u>Calle Santiago:</u> a la altura del número 19, adornando las rejas de varios balcones, se puede encontrar un **D_5** y un friso **p111**.
- <u>Patio de las Tabas:</u> Grupos puntuales **D_4** y **C_4** además se pueden ver varios frisos.
- <u>Plaza Martí y Monso:</u> el pavimento de la plaza presenta un grupo cristalográfico del tipo **pgg**.

En la referencia [1] se muestran grupos puntuales, frisos y mosaicos en diferentes lugares de la ciudad. Las siguientes imágenes están extraídas de [1].

Figura 3.86: Residencia Alfonso VIII *Figura 3.87: Teatro Calderón* *Figura 3.88: Palacio de Pimentel* *Figura 3.89: Plaza Marti Monso*

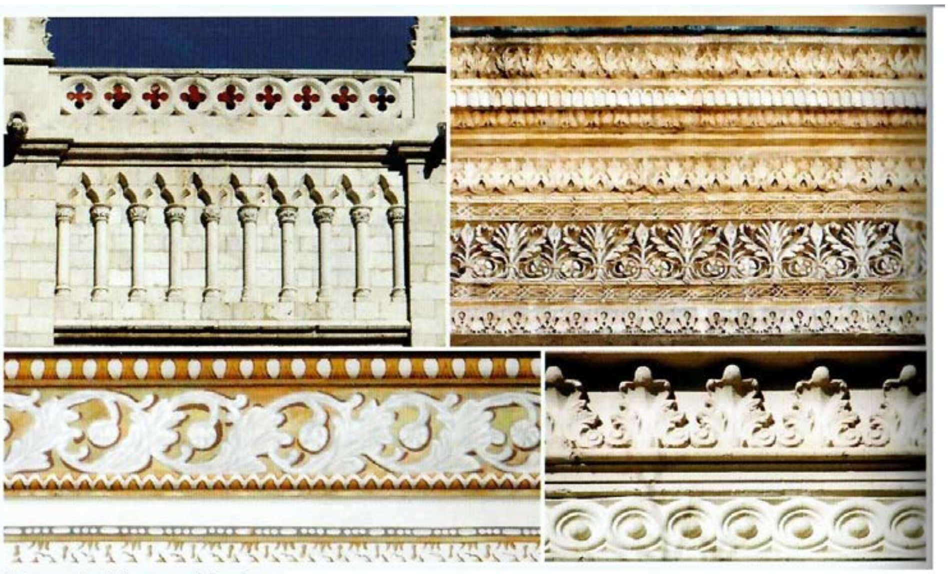


Figura 3.85: Frisos combinados
(a) Iglesia de la Antigua
(b) Colegio de San Gregorio
(c) Convento de Porta Coeli
(d) Iglesia del Pilar

Figura 3.77: Frisos de tipo F_1

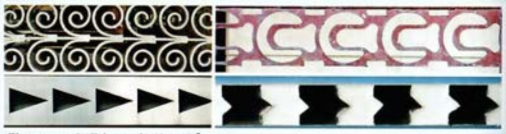


Figura 3.78: Frisos de tipo F_1^1

Figura 3.79: Frisos de tipo F_1^2

Figura 3.80: Frisos de tipo F_1^2

Figura 3.81: Frisos de tipo F_1^3

Figura 3.82: Frisos de tipo F_2

Figura 3.83: Frisos de tipo F_2^1

Figura 3.84: Frisos de tipo F_2^2

Figura 3.61: Grupos de simetria C_5 y D_5
(a) Monasterio de Santa Isabel
(b) Calle Santiago, 19

Figura 3.62: Monasterio de Santa Isabel, grupos de simetria C_6 y D_6

Figura 3.63: Hexalóbulos, grupo de simetria D_6
(a) Iglesia de San Pablo
(b) Modelo
(c) Palacio de Santa Cruz

Figura 3.64: Octalóbulos, grupo de simetria D_8
(a) Iglesia de La Antigua
(b) Modelo
(c) Museo Catedralicio

Figura 3.65: Octalóbulos, grupo de simetria D_8
(a) Modelo
(b) Iglesia de La Antigua
(c) Calle Arzobispo Gandásegui

Figura 3.66: Iglesia de Santa Maria la Antigua

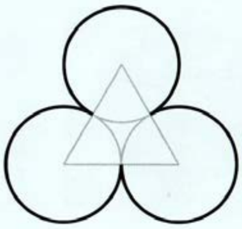


Figura 3.55: Trtilóbulo

Figura 3.56: Trilóbulos, grupos diedrales D_3
(a) Museo de Valladolid
(b) Museo Catedralicio
(c) Iglesia de San Pablo

Figura 3.57: Monasterio de Santa Isabel.
Grupos cíclicos C_4

Figura 3.58: "Claustro de las Tabas".
Grupos cíclicos C_4

Figura 3.59: Grupos de simetria D_4
(a) Monasterio Santa Isabel
(b) "Las Francesas"
(c) "Las Francesas"

Figura 3.60: Cuadrilóbulos o tetralóbulos, grupos de simetria D_4
(a) Colegiata románica
(b) Modelo
(c) Iglesia de San Martín

Los alumnos dispondrán de un cuaderno de trabajo, con algunas de las fotografías de los motivos con simetrías señalados. Es aconsejable que, previo al paseo, los alumnos constaten a partir de las definiciones correspondientes, que esas imágenes representan esos grupos, y su justificación. En el aula se pueden trabajar traslaciones, giros, simetrías, etc., a partir de motivos recortados en cartulina, y observar cómo van disponiéndose bien en frisos, bien en mosaicos, bien en grupos puntuales. Asimismo se incluirá, dadas las facilidades que los móviles proporcionan, la elaboración de un libro digital de imágenes, realizadas por ellos mismos, y explicadas y comentadas matemáticamente.

Evaluación.

Para evaluar esta actividad se atenderá a los siguientes factores sobre los alumnos:

- Participación activa en la búsqueda de grupos de simetría.
- Descubrimiento personal de grupos de simetría.
- Motivación ante los objetivos de la actividad y curiosidad por aprender.
- Adquisición de nuevos conocimientos.
- Valoración positiva de la actividad.

Actividad 3.

Movimientos y elaboración de grupos de simetría usando el ordenador.

Resumen.

Esta actividad consistirá en utilizar Geogebra para manejar los movimientos que están integrados en el programa, experimentando con su funcionamiento. Posteriormente se emplearán los movimientos para generar figuras con diferentes grupos de simetría. Para los grupos cristalográficos se empleará el programa Morenaments. El tiempo estimado para realizar esta actividad será de dos sesiones de 50 minutos.

Objetivos y competencias.

El objetivo de esta actividad es que los alumnos adquieran destreza en el manejo y entendimiento tanto de las isometrías, como de los grupos de simetría, al mismo tiempo que utilizan las nuevas tecnologías. Los programas sugeridos permiten al usuario realizar representaciones donde se visualizan muy bien los conceptos que los alumnos deben adquirir.

Por otro lado, se pretende fomentar la creatividad. La facilidad con la que se realizan los mosaicos con el programa Morenaments permite fabricar una gran cantidad de diseños con los que los alumnos pueden experimentar. El programa Geogebra también permite la experimentación sencilla para diseñar toda clase de diseños creativos.

Las competencias clave se desarrollan de diversas maneras, destacando la matemática y la digital: la matemática trabajando con los conceptos geométricos de movimientos y manipulándolos con el ordenador; la lingüística en las comunicaciones necesarias para comprender el modo de emplear los programas y los objetivos de la actividad; la digital en el uso de programas informáticos durante todo el transcurso de la actividad; la de aprender a aprender eligiendo las representaciones de los movimientos que mejor ayuden al propio alumno a asimilarlo; la competencia cívica y social se ve reforzada en el comportamiento adecuado de los alumnos durante la actividad y en el cuidado del material informático del centro; la de iniciativa emprendedora en la toma de decisiones sobre cómo generar los propios grupos de simetría; la competencia cultural se ve fortalecida al realizar diseños artísticos mediante matemáticas que además pueden estar inspirados en las culturas que los alumnos conocen.

Metodología.

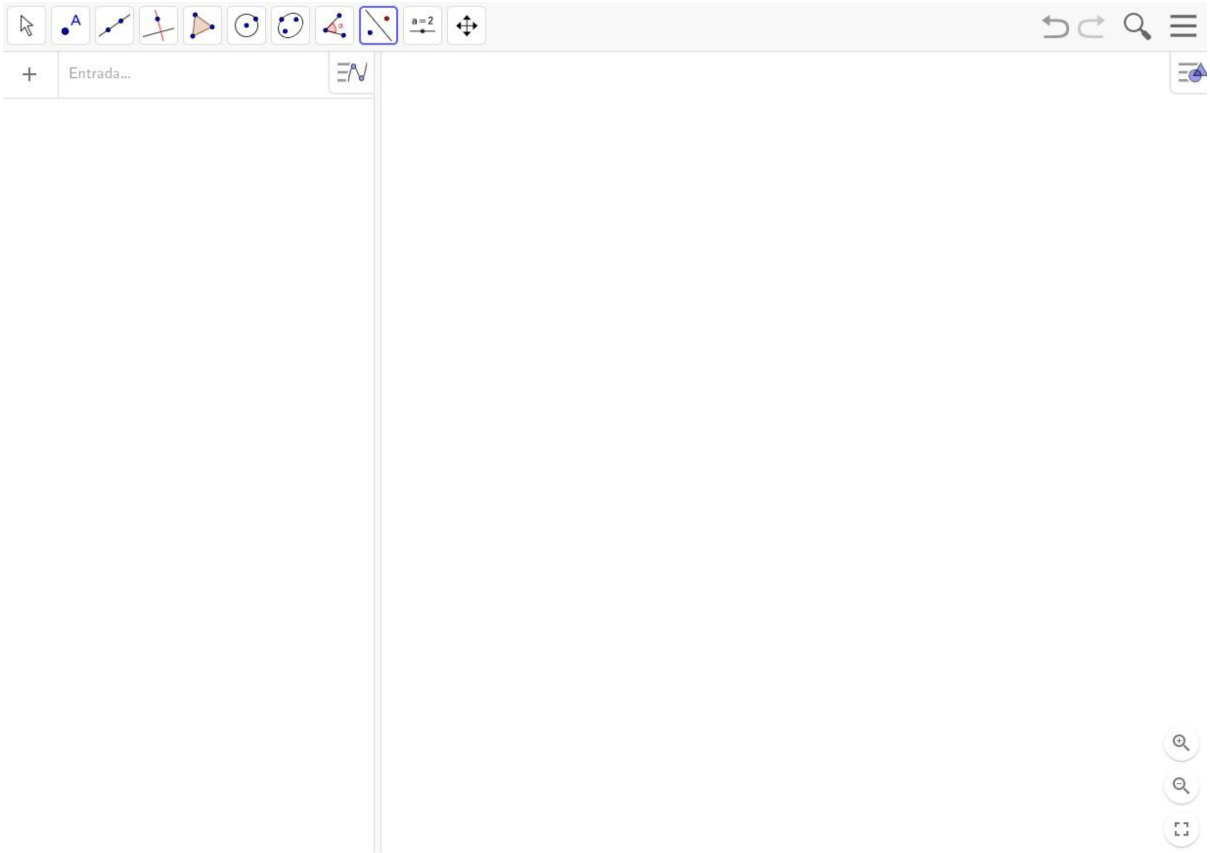
Las metodologías empleadas en esta actividad son: resolución de ejercicios y problemas, al realizar los diferentes apartados de la actividad, y aprendizaje basado en experiencias, al promover la experimentación de los alumnos con los conceptos matemáticos pudiendo manipular las variables que estos poseen.

Desarrollo.

La actividad se desarrollará en un aula con ordenadores, siendo óptimo que haya un alumno por cada ordenador, pero se podrían distribuir por parejas si los recursos materiales no son suficientes.

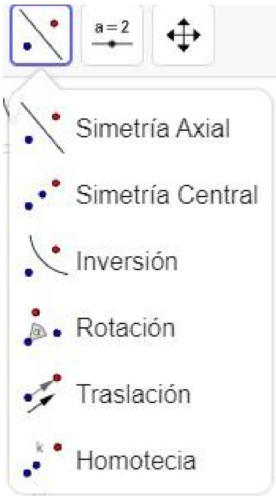
La actividad consta de dos sesiones en las que se trabajará principalmente con el programa Geogebra, siendo la primera para la familiarización con el programa y los movimientos y la segunda para la creación de los grupos de simetría. Si los alumnos no han usado Geogebra anteriormente podría ser recomendable realizar una sesión previa.

La interfaz de Geogebra se muestra en la siguiente imagen:



En la parte superior hay una barra con diferentes herramientas para representar puntos, segmentos, polígonos, lugares geométricos, etc. A la izquierda se muestran todas las variables que se han empleado en el dibujo que se muestra en el espacio que queda a la derecha.

Si se pulsa en el cuadro marcado en azul, se despliega una lista que se muestra en la siguiente imagen donde están todos los movimientos del plano para ser usados.



Los ejercicios que se plantean para la primera sesión serán expuestos por el profesor y repetidos por los alumnos. Tienen los siguientes enunciados:

- Dibuja un punto y un vector. Realiza la traslación del punto por el vector. Dibuja un segmento y realiza la traslación del segmento por el vector. Dibuja una figura y realiza la traslación por el vector. Prueba con otros vectores y figuras.
- Dibuja un punto y una recta. Realiza la simetría del punto sobre la recta. Dibuja un segmento y realiza la simetría del segmento sobre la recta. Dibuja una figura y realiza la simetría sobre la recta. Prueba con otros ejes de simetría y figuras.
- Dibuja dos puntos. Realiza los giros de ángulos 30º y 90º con uno de los puntos como centro. Dibuja una figura y realiza los mismos giros en torno al punto. Prueba con otros ángulos de giro y figuras.
- Dibuja una recta y un vector paralelo. Realiza simetrías con deslizamiento de figuras con la recta de eje y el vector de deslizamiento.

En la segunda sesión los ejercicios están destinados a que los alumnos creen grupos de simetría.

- Realiza figuras que tengan grupos de simetría cíclicos.
- Realiza figuras que tengan grupos de simetría diedrales.
- Realiza figuras que tengan grupos de simetría de frisos.
- Realiza figuras que tengan grupos de simetría cristalográficos.

Para el último ejercicio se puede usar el programa Morenaments.

Evaluación.

Para evaluar esta actividad se atenderá a los siguientes factores sobre los alumnos:

- Buen manejo de las herramientas de los programas.
- Motivación ante los objetivos de la actividad y curiosidad por aprender.
- Adquisición de nuevos conocimientos.
- Creatividad en los diseños.
- Valoración positiva de la actividad.

Actividad 4.

Desarrollo de grupos de simetría con aprendizaje basado en problemas.

Resumen.

Esta actividad plantea un problema matemático, que sirve para poner en práctica la metodología de aprendizaje basado en problemas y trabajar los contenidos de los grupos de simetría. La duración estimada es de una sesión.

Objetivos y competencias.

El objetivo de la actividad es promover que los alumnos aprendan sobre los grupos de simetría por descubrimiento, enfrentándose a un problema que requiere de su uso en el ámbito de una situación de la vida real. El problema se plantea en términos que se pueden comprender sin conocer los grupos de simetría, que irán descubriendo conforme avanzan en el problema.

El desarrollo de las competencias clave se aborda de la siguiente manera: la matemática en el uso de ideas matemáticas, del área de la geometría, para elaborar la resolución del problema; la lingüística en las comunicaciones realizadas entre los alumnos de cada grupo, en la comprensión del enunciado y en la redacción de la solución propuesta; la digital en el diseño digital de la solución propuesta; la de aprender a aprender en la búsqueda de información útil para solucionar el problema; la competencia cívica y social se ve reforzada en el intercambio de propuestas para afrontar el problema; la de iniciativa emprendedora se trabaja en la toma de decisiones sobre cómo avanzar en la solución y en la evaluación de la misma; la competencia cultural se ve fortalecida en la creación de diseños artísticos mediante el uso de matemáticas.

Metodología.

La metodología empleada para esta actividad es principalmente aprendizaje basado en problemas, ya que la propia actividad plantea un problema que los alumnos deben desarrollar. También se utilizará el aprendizaje cooperativo para realizar el problema en grupo.

Desarrollo.

Para el desarrollo de la actividad se dividirá a los alumnos en grupos de tres o cuatro alumnos, atendiendo a las capacidades y necesidades de cada uno. Estos grupos recibirán el enunciado del problema que deberán resolver cooperando entre ellos. El enunciado es el siguiente:

El ayuntamiento ha decidido construir una plaza de planta cuadrada de cuarenta metros de lado, pero necesita ayuda para elaborar el diseño del proyecto. En el diseño de la plaza se ha decidido que tiene que cumplir las siguientes condiciones.

- *La plaza se tiene que ver igual si la miras desde el centro el centro de cualquiera de los lados.*
- *En el centro de la plaza se va a colocar una fuente que se debe ver con la misma forma si se mira en la dirección de las diagonales del cuadrado o de las mediatrices de los lados.*
- *Las esquinas serán una baldosa cuadrada de un metro de lado, de tal modo que si se girase el dibujo interior para algún determinado ángulo, distinto de 0, no cambiaría.*
- *La plaza ha de tener un borde de un metro de grosor, de tal modo que, si se camina por él, se debe observar el mismo diseño cada metro y debe verse igual si se decide caminar en sentido contrario.*
- *La planta de la plaza deberá formar repetirse cada metro si se camina desde cualquier punto en la dirección de uno de los lados, siempre que no se alcance el borde o la fuente central, pero no debe estar formada únicamente por cuadrados.*

Se pide que se elabore un diseño que cumpla las condiciones expuestas para que el ayuntamiento pueda llevar a cabo la elaboración del proyecto.

Los grupos deberán trabajar para buscar una solución del problema, reflexionando sobre las características de esta. El profesor facilitará ayuda cuando esta sea necesaria y resolverá dudas que los alumnos tengan sobre el enunciado o sobre los objetivos de la actividad. Los alumnos podrán disponer de dispositivos digitales para realizar el diseño.

La solución del problema debe cumplir las siguientes condiciones de grupos de simetría:

- La plaza globalmente tiene que tener el grupo de simetría $\mathbf{C_4}$ o $\mathbf{D_4}$.
- El grupo de simetría de la fuente debe contener al grupo $\mathbf{C_8}$.
- El dibujo de las esquinas deben tener un grupo de simetría cíclico o diedral, pero debe estar girado 90º entre esquinas consecutivas.
- Los bordes deben contener frisos que tengan giros de 180º.
- La planta de la plaza debe ser un mosaico del tipo **p4**, **p4g** o **p4m**.

Evaluación.

Para evaluar la actividad se atenderán los siguientes factores:

- Aportación de ideas para avanzar en el problema.
- Uso de razonamientos correctos.
- Implicación en el trabajo del grupo.
- Comunicación adecuada con los compañeros de grupo.
- Adquisición de nuevos conocimientos sobre grupos de simetría.
- Creatividad en la solución del problema.
- Valoración positiva de la actividad.

Actividad 5.

Identificar grupos de simetría en determinadas figuras.

Resumen.

La actividad consiste en presentar figuras planas que contengan diferentes grupos de simetría que los alumnos deberán identificar, posteriormente se realizará un *Kahoot* en el que las preguntas están enfocadas a clasificar grupos de simetría en imágenes. La duración estimada de la actividad es de una sesión de clase.

Objetivos y competencias.

El objetivo de la actividad es que los alumnos adquieran la capacidad de identificar los grupos de simetría en diferentes figuras y realizar una experiencia de aprendizaje basado en juegos que despierte su interés en el aprendizaje.

El desarrollo de las competencias clave se afronta de la siguiente forma: la matemática el la identificación de elementos matemáticos; la lingüística en las comunicaciones realizadas entre los alumnos y el profesor; la digital se aborda en el uso de recursos digitales como el *Kahoot*; la de aprender a aprender mejora al generar algoritmos de identificación de conceptos; la competencia cívica y social se ve reforzada en el adecuado comportamiento al realizar el juego; la de iniciativa emprendedora se trabaja en la toma de decisiones para seleccionar las respuestas; la competencia cultural se ve fortalecida al incluir imágenes de elementos culturales.

Metodología.

En esta actividad se emplea la metodología de resolución de ejercicios y problemas, ya que consiste en la realización de ejercicios de identificación de grupos de simetría. También se hará uso del aprendizaje basado en juegos al realizar el *Kahoot*.

Desarrollo.

Se realizará una selección de imágenes que contengan diferentes grupos de simetría, de modo que aparezcan ejemplos de frisos, mosaicos, grupos cíclicos y grupos diedrales. Es importante que se muestren figuras de todos los tipos para ampliar al máximo el rango de grupos que los alumnos pueden identificar.

En el aula se proyectarán sobre una pantalla unas cuantas imágenes, una a una, y se dejará tiempo breve para que los alumnos debatan sobre el grupo que se trata, tras el que deberán, ordenadamente, indicarlo. Durante ese tiempo los alumnos podrán discutir e intercambiar sus razones. Cuando se hayan realizado suficientes imágenes, se procederá a realizar el *Kahoot*, que habrá sido elaborado con otras cuantas imágenes del mismo estilo.

En las páginas precedentes del TFM se han mostrado multitud de imágenes que pueden ser empleadas en esta actividad. Por otro lado, es recomendable realizarla como sesión previa a las dos primeras actividades presentadas

Evaluación.

Para evaluar la actividad se tendrán en cuenta los siguientes factores:

- Identificación correcta de los grupos de simetría.
- Adquisición de nuevos conocimientos sobre grupos de simetría.
- Participación respetuosa en el desarrollo de la actividad.
- Motivación ante los objetivos de la actividad y curiosidad por aprender.
- Gestión de las emociones ante los resultados del juego
- Valoración positiva de la actividad.

Conclusiones.

El uso de los grupos de simetría en la enseñanza secundaria debería potenciarse, ya que, como se ha mostrado a lo largo del TFM, permiten desarrollar las competencias clave y abordar diferentes disciplinas, tanto dentro de las matemáticas como fuera de ellas.

El aprendizaje de los grupos de simetría está dentro del currículo establecido por la ley, sin embargo su estudio se reduce prácticamente al tercer curso de la enseñanza secundaria, lo que impide realizar un desarrollo profundo. Si se introdujeran también en el cuarto curso, se podría generar un aprendizaje más elaborado.

Entre las ventajas de su enseñanza se pueden destacar la amplitud de conceptos matemáticos que se pueden abordar y la variedad de metodologías que se pueden emplear. Los conceptos que se tratan van desde la aritmética de los números enteros a la geometría observable en la vida cotidiana o la simetría y periodicidad de las funciones, perteneciente al área del análisis. Como metodologías se han presentado ejemplos que utilizan seis diferentes que se pueden trabajar de forma complementaria.

En resumen, los grupos de simetría abren muchas posibilidades para el adecuado desarrollo de los estudiantes de secundaria.

Bibliografía

[1] I. Fernández Benito y M. E. Reyes Iglesias, *Periplo por la geometría de Valladolid*. Valladolid: Servicio Municipal de educación del ayuntamiento de Valladolid, 2018.

[2] C. Alsina y E. Trillas, *Lecciones de álgebra y geometría . Curso para estudiantes de arquitectura.* Barcelona: Gustavo Gili S. A. 1984

[3] M. F. Blanco Martín, *Movimientos y Simetrías.* Valladolid: Secretariado de publicaciones de la Universidad de Valladolid, 1994.

[4] A. Jaime. Pastor, *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Valencia: Universidad de Valencia, 1993.

Páginas web:

[5] *Notación grupos de simetría.* (16 junio 2022) http://www.acorral.es/notacion.htm

[6] A. Makarov. *Un paseo matemático por la Alhambra: cuando el arte se basa en los números.* (16 junio 2022)
https://www.xataka.com/especiales/paseo-matematico-alhambra-cuando-arte-se-basa-numeros-2

[7] R. Núñez Castaín. *Movimientos en el plano.* (16 junio 2022)
https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0084-02/capitulo4.html

Recursos:

[8] Paseos matemáticos Al-Ándalus. Fundación Descubre. (16 junio 2022)
https://paseosmatematicos.fundaciondescubre.es/paseos-virtuales/al-andalus/

[9] Geogebra https://www.geogebra.org/classic?lang=es

[10] Morenaments https://www.imaginary.org/es/program/morenaments

Leyes:

[11] *BOE, Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, págs 6986-7003.*

[12] *BOCYL, Viernes, 8 de mayo de 2015, Núm. 86, Págs. 32191-32231.*

Repositorio Uva (Consultados para ver la estructura y el planteamiento):

[13] N. Díaz Cuadrado, *Desarrollo de la metodología y didáctica empleada para el diseño de una programación dinámica para impartir matemáticas.* Trabajo Fin de Máster, Universidad de Valladolid, 2019.

[14] I. Martín Alfonso, *Diseño de una programación didáctica para impartir Matemáticas con especial atención a la metodología.* Trabajo Fin de Máster, Universidad de Valladolid, 2019.