UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

Jugar con las matemáticas

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Sergio Matilla Mayo

Tutor: Philippe Thierry Gimenez

Valladolid, junio 2022

Índice general

Introducción

¿Qué son para ti las matemáticas? Si hiciésemos esa pregunta a cien personas diferentes, probablemente obtendríamos una gran variedad de respuestas. Muchas de las respuestas seguirían el camino de que son un instrumento imprescindible para el día a día, una asignatura del instituto, etc. Si esta misma pregunta se le hace a personas que están, o han estado, estudiando matemáticas la respuesta varía un poco y es usual que la palabra juego aparezca en ellas. Por ejemplo, para mi, un problema matemático no dista mucho de un Sudoku o un acertijo de los que tanto nos gustan cuando somos pequeños. En cambio, si hacemos esta misma pregunta en institutos, a nadie nos sorprende escuchar respuestas como las matemáticas son una obligación, la asignatura más aburrida, etc

Aunque a muchos les pueda resultar sorprendente, la realidad es que las matemáticas y el juego no son polos opuestos. De hecho, Guzmán [1984] nos recuerda que las matemáticas han tenido un fuerte componente lúdico desde sus inicios:
"La historia antigua no ha sido inclinada a preservar sino los elementos solemnes de la actividad científica, pero uno no puede menos de sospechar que muchas de las profundas cavilaciones de los pitagóricos, por ejemplo alrededor de los números, tuvieron lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con las piedras. El llamado problema bovino de Arquímedes, álgebra hecha con procedimientos rudimentarios, tiene un cierto sabor lúdico, así como otras muchas de sus creaciones matemáticas originales. Euclides fue, al parecer, no sólo el primer gran pedagogo que supo utilizar, en una obra perdida llamada Pseudaria (Libro

de Engaños), el gran valor didáctico en matemática de la sorpresa producida por la falacia y la aporía".

Es más, Guzmán [1984] relaciona fuertemente el juego con las matemáticas:
"El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña físicas, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático".
"Por una parte son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente y por otra parte una gran porción de la matemática de todos los tiempos tiene un sabor lúdico que la asimila extraordinariamente al juego".

Además, Guzmán [1984] defiende el juego como recurso educativo:
"Lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en el que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas. Muchos de esos elementos pueden adquirirse igualmente en el enfrentamiento con los problemas que constituyen los juegos matemáticos".

En el capítulo 1 se mostrarán investigaciones que avalarán el uso del juego matemático como recurso didáctico en el aula. Además, se propondrá una metodología con la que llevar el juego al aula. A mayores, se harán unos comentarios sobre la temporalización y la evaluación de estas sesiones. Por último, se analizará el primer bloque del currículo de la Comunidad de Castilla y León (BOCYL n.º 86 8-mayo-2015 (jcyl.es)), desarrollando cada uno de los ítems y por qué se pueden trabajar con los juegos que se proponen en capítulos posteriores.

El capítulo central de este trabajo es el 2. En él se desarrollarán diferentes juegos matemáticos, cuál es su relación con las matemáticas y los contenidos específicos del currículo que se trabajan.

El capítulo 3 seguirá la misma filosofía que el anterior. En él se mostrarán varios juegos pero esta vez utilizando recursos digitales. Además, se mostrará una página web que cuenta, no solo con una adaptación digital de muchos juegos, si no también con una gran cantidad de herramientas muy útiles para el aula de matemáticas.

Por último, en el capítulo 4, se explicará mi experiencia personal dando conferencias sobre juegos de estrategias, gracias a formar parte estos años del grupo de innovación docente *Dinamat.*

Capítulo 1

Marco teórico

Para este capítulo se va a seguir el artículo González Peralta et al [2014]. En él se hace una revisión de bibliografía en investigaciones de matemática educativa cuyo principal objetivo es el juego como recurso didáctico. En el artículo tratan tres temas fundamentales:

1. Definiciones y clasificaciones de juegos usadas en la literatura.
2. Tipo de investigaciones que se han realizado sobre juegos, tipo de juegos estudiados y características de las muestras consideradas.
3. Efectos del uso de juegos.

1.1. Definición y clasificación de juegos

La palabra juego es polisémica y tiene muchos significados diferentes. Por ejemplo, juego puede ser cualquier actividad que nos resulte atractiva, juego puede referirse a los materiales que se usan, por ejemplo, cuando hablamos de juegos de mesa. Sin embargo, todas estas definiciones no son la que se buscan. La definición que buscamos debe tener como pilar fundamental el fin que perseguimos con los juegos: el educativo.

Bright, Harvey & Wheeler [1985] (citado en González Peralta et al [2014]) señala que un **juego instruccional** es aquel para el cual un conjunto de objetivos educativos, cognitivos o afectivos han sido determinados por quien plantea la actividad.

Oldfield [1991] (citado en González Peralta et al [2014]) da una definición de **juego matemático**:

1. La actividad involucra un desafío contra una tarea o uno o más oponentes. O un desafío contra una tarea común que debe abordarse ya sea solo o, más comúnmente, en conjunción de otros.

2. La actividad se rige por un conjunto de reglas y tiene una estructura clara subyacente a las mismas.

3. La actividad normalmente tiene un final distinto.

4. La actividad tiene objetivos matemáticos y cognitivos específicos.

Tanto la definición de juego instruccional como la de juego matemático ya tienen un claro fin educativo. Estas van a ser las definiciones de juego que se usarán en este trabajo, luego cuando se hablen de juegos se entenderá que estamos en esta situación.

Una vez fijada la definición de juego es pertinente pensar en una clasificación. Según Gairín [1990] (citado en González Peralta et al [2014]), los juegos se pueden agrupar en dos grandes categorías:

1. **Juegos de conocimiento.** Son aquellos en los que es necesario que el jugador utilice conceptos o algoritmos matemáticos. Se distinguen tres niveles:

   a) *Pre-instruccional.* Familiarizan al alumno con un concepto.

   b) *Co-instruccional.* Se suman a las actividades de enseñanza.

   c) *Post-instruccional.* Consolidan el aprendizaje.

2. **Juegos de estrategia.** Son aquellos en los que es necesario poner en práctica habilidades, razonamientos o destrezas.

1.2. Efectos del uso de juegos en el aula vistos en las investigaciones realizadas

La tarea de motivar a los alumnos es una de las principales razones para incluir juegos y actividades lúdicas en la enseñanza de las matemáticas. Para Ernest [1986] (citado en González Peralta et al [2014]), la motivación es la principal ventaja del uso de juegos porque los estudiantes se sumergen en actividades y, después de un tiempo, mejoran sus actividades en torno a la materia. También es una forma de dejar de lado la monotonía.

Oldfield [1991] (citado en González Peralta et al [2014]), indica que los juegos son valiosos para fomentar las habilidades sociales, estimular la discusión matemática, aprender conceptos, reforzar habilidades, comprender la simbología, desarrollar la compresión y adquirir algunas estrategias de resolución de problemas.

Corbalán [1996] (citado en González Peralta et al [2014]), señala que la utilidad de los juegos de estrategia dentro de la formación matemática es potencialmente muy grande, puesto que se trata de iniciar o desarrollar, a partir de la realziación de ejemplos prácticos (no de la repetición de procedimientos hechos por otros) y atractivos, las destrezas específicas para la resolución de problemas y los modos típicos de pensar matemáticamente.

Salvador [2012] (citado en Sadornil Renedo [2021]) señala las similitudes entre la resolución de problemas matemáticos y la resolución de los juegos de estrategia. Se pueden recoger en la siguiente tabla:

Problemas matemáticos	Juegos de estrategia
Comprender qué se pide.	Comprender los requisitos.
Comprender qué quiero encontrar.	Comprender los movimientos.
Comprender qué datos tengo.	Comprender cómo se gana.
¿Existe un problema parecido?	¿He jugado algún juego similar?
Formular conjeturas	¿Qué puedo hacer?
Seleccionar posibles estrategias.	Seleccionar posibles estrategias.
Ejecutar un plan y examinar la validez de la conjetura.	¿Qué movimientos de ataque/defensa hacen que el jugador progrese?
Se ha resuelto un problema.	He ganado (o perdido).
¿Cuál es la estrategia general?	¿Por qué?
¿Se puede usar otra forma?	¿Hay otra forma de ganar?¿Es la mejor estrategia?
¿Funciona siempre? Modificar el problema	¿Y si cambian las reglas?

Tabla 1.1: Similitudes entre problemas y juegos de estrategia Salvador [2012].

Butler [1998] (citado en González Peralta et al [2014]) también señala que el uso de juegos aumenta las habilidades de resolución de problemas y motiva a los estudiantes, aunque la motivación se puede perder al finalizar la actividad. En González Peralta et al [2014] destacan los siguientes resultados de Butler [1998]:

1. Los estudiantes generalmente adquieren, por lo menos, iguales conocimientos y habilidades intelectuales como lo harían en otras situaciones de aprendizaje.

2. La información es aprendida más rápidamente que con otras metodologías. Aunque la cantidad aprendida no es significativamente mayor que con otros métodos.

3. Los estudiantes de bajo rendimiento académico, comúnmente mejoran su desempeño a causa de un mayor interés.

4. Incrementa la tendencia de los alumnos a asistir regularmente a clase.

5. Los juegos tienen un gran impacto en el aprendizaje afectivo, promueven la socialización y pueden ser utilizados para evaluar valores, actitudes y comportamiento de los estudiantes.

1.3. Relación de los juegos con el currículo de secundaria

Analizando el currículo de la Comunidad de Castilla y León (BOCYL n.º 86 8-mayo-2015 (jcyl.es)), vemos que en todos los cursos, tanto de secundaria como de Bachillerato, hay un primer bloque: *Contenidos comunes*. Los juegos que se van a plantear en este trabajo tienen, en un primer lugar, cabida en este bloque común a todos los cursos. En esta sección se desglosará este bloque de contenidos y se verá cómo los juegos benefician la adquisición de estos contenidos. Recalcar que este currículo se va a modificar en los próximos años, aunque el fin que persiguen las futuras modificaciones es potenciar el razonamiento en los alumnos. Por tanto, los comentarios de esta sección quedarán todavía más visibles con los currículos futuros.

- **Elección de las estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico básico, etc.) y de una buena notación; construcción de una figura, un esquema o un diagrama; experimentación mediante el método ensayo-error; búsqueda de analogías y de problemas semejantes o isomorfos; reformulación del problema, resolución de subproblemas dividendo el problema en partes; recuento exhaustivo, comienzo por casos particulares sencillos, búsqueda de regularidades y leyes; introducción de elementos auxiliares y complementarios; trabajo hacia atrás, suponiendo el problema resuelto; etc.**

Con los juegos se pueden enseñar todas estas estrategias de resolución de problemas de forma clara. Por ejemplo, con los juegos de estrategia en 2.1, en un primer momento se plantea un ensayo-error jugando e intentando vislumbrar la solución. Luego, por ejemplo en el quitafichas en 2.1.1, la estrategia que funciona para resolver el problema es la de empezar por el final. En el juego del Nim en 2.1.8, la estrategia para llegar a la solución es empezar por casos más sencillos. En otros juegos, como por ejemplo, la margarita en 2.1.2 o los juegos de teoría de grafos en 2.5, la mejor estrategia a seguir en un primer momento es la de hacer una representación gráfica. En cambio, en los juegos de probabilidad en 2.2, una buena estrategia es la creación de tablas o diagramas de árbol.

- **Planificación del proceso de resolución de problemas: análisis de la situación, selección y relación entre los datos, selección y aplicación de las estrategias de resolución adecuadas, análisis de las soluciones y, en su caso, ampliación del problema inicial.**

Esto tiene relación con el punto anterior. Cada juego necesita su propia forma de pensar y, por tanto, es necesario hacer una reflexión inicial determinando en qué contexto nos movemos (probabilístico, algebráico, geométrico, etc) cuál va a ser la forma de razonar, qué datos del enunciado son realmente importantes, etc.

- **Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.**

En los juegos de estrategia en 2.1, aparece una clara necesidad de revisar el razonamiento: probar que realmente la solución funcione. En los juegos de probabilidad en 2.2, es usual que cada alumno llegue a la solución por un camino diferente: algunos aplicando la regla de Laplace, otros mediante tablas, otros mediante diagramas de árbol, etc. En los juegos de grafos en 2.5, en particular en 2.5.2, surge la necesidad de probar a dibujar la figura si nuestro razonamiento matemático nos ha dicho que sí se puede o, si nos ha salido que no se puede, probar algunas veces para estar seguros.

- **Expresión verbal y escrita en Matemáticas.**

Como la metodología que se propone para la realización de estos juegos es activa, es necesario que los alumnos se comuniquen entre ellos en un lenguaje matemático con el objetivo de compartir la solución a un juego o de intentar llegar a ella.

- **Práctica de los procesos de matematización en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.**

Para poder resolver los juegos, planteados en un lenguaje cotidiano, es necesario traducir los enunciados de estos al lenguaje matemático. Por ejemplo, en los juegos de probabilidad en 2.2, es necesario traducir el tener más posibilidades de ganar a un juego en términos probabilísticos. En los juegos de estrategia 2.1, por ejemplo en el juego de partir la tableta de chocolate 2.1.4, es necesario entender el problema desde una persepectiva matemática para dar la solución.

- **Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.**

Al pedir encontrar las soluciones de los juegos que en este trabajo se plantean, realmente estamos pidiendo a los alumnos que planteen investigaciones en todos estos ámbitos, dependiendo del juego. De hecho, los juegos son una manera divertida de plantear investigaciones de manera que a los alumnos les motive encontrar la solución.

- **Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo de la materia.**

La forma de plantear estos juegos no es de manera individual, si no que es el grupo el que se ayuda para resolver los juegos. De esta manera, reducimos la ansiedad que muchos alumnos sienten por las matemáticas. Además, basándome en mi experiencia, como se verá en 4, muchas veces los alumnos con menos confianza en sí mismos son los que mejores resultados alcanzan con estas experiencias. De este modo, conseguimos aumentar la confianza de los alumnos en sí mismos. Es usual que haya alumnos que al inicio de la sesión no se crean capaces de resolver los juegos. Estos mismos alumnos van cambiando su percepción en el transcurso de la sesión y, al finalizar, estos mismos alumnos piden que les propongas más juegos para poder realizarlos en casa. Por tanto, los juegos pueden ser la llave con la que se empiece a mejorar el autoconcepto de los alumnos.

1.4. Implementación en el aula

En esta sección se va a hacer una propuesta para llevar al aula los juegos que se van a explicar en el capítulo 2. El motivo por el cual se propone esta metodología es la experiencia propia, gracias a formar parte del grupo *Dinamat*, como se explicará en el capítulo 4.

1.4.1. Metodología

La metodología que se propone es, en todo momento, una **metodología activa**. Uno de nuestros objetivos principales al introducir los juegos en el aula es conseguir motivar a los alumnos y enseñarles una visión diferente de las matemáticas. Los juegos que se proponen en este trabajo se prestan al uso de estas metodologías, es beneficioso, por no decir imprescindible, el diálogo constante alumno-profesor y alumno-alumno. Con esto conseguiremos romper la rutina y, desde el primer momento, llamaremos más la atención de los alumnos. Además de que favorecen la motivación, estaremos consiguiendo que los alumnos consigan expresar sus ideas, sentimientos, inquietudes, etc, haciendo uso de un lenguaje matématico. También, de esta manera incentivamos a los alumnos con más dificultades a la hora de participar en las actividades.

A mayores, se propone plantear las sesiones como un **aprendizaje basado en problemas**. El docente plantea el problema, en nuestro caso un juego y, a través del diálogo la clase, como grupo, consiga resolver el problema. El rol del docente en esta metodología es el de **guía del aprendizaje**, debe dejar libertad a los alumnos, que sean ellos los que vayan deduciendo los resultados. De esta manera estamos favoreciendo la independencia de los alumnos, motivándoles y haciéndoles ver que son capaces de resolver problemas sin la ayuda constante de un profesor.

Con todo esto, se propone la siguiente forma de organizar las sesiones dedicadas a los juegos. Debido a que muchos de los juegos son por parejas y, aunque haya juegos que no lo sean, favoreceremos de esta manera el diálogo y el trabajo en equipo, así que dividiremos a los alumnos por parejas. Explicaremos el juego que queremos plantear y cuál es el objetivo del juego, por ejemplo, en los juegos de estrategia, debemos dejar claro que el objetivo es encontrar la manera de ganar siempre. Después de esto pediremos que jueguen entre ellos, para que experimenten el juego y empiecen a construir sus propias conjeturas. El docente deberá ir escuchando las propuestas de los alumnos, refutándolas en el caso que sean incorrectas pero nunca dando la solución. Como se verá en capítulos posteriores, la forma de refutar los razonamientos erróneos es muy sencilla en los juegos. Además, no provoca una frustración por parte del alumno, si no todo lo contrario, provoca una motivación extra gracias a que un objetivo para el alumno es *vencer al profesor*.

1.4.2. Temporalización

Es conocido que, debido al vasto currículo que hay que abarcar, el tiempo no juega a nuestro favor a la hora de dar clase. Las actividades que se plantean en este trabajo se pueden usar en momentos puntuales, para introducir un tema, para reforzar algunos contenidos o para romper con la monotonía de la clase. Hay suficiente material como para poder dedicar una gran cantidad de sesiones a estas actividades, por tanto, el número de sesiones que se dediquen a estas actividades dependerá del contexto particular, siendo normalmente un número inferior al que nos gustaría.

Otro aspecto que debemos plantear es como organizar las sesiones, es decir, responder a la pregunta: ¿cuánto tiempo dejamos en cada juego?. Desde mi experiencia, la respuesta es que no nos debería preocupar. El objetivo de estas sesiones no es hacer un gran número de problemas, si no motivar a los alumnos y hacer que los alumnos razonen. Es decir, puede ocurrir que haya grupos en los que resuelvan un juego en muy poco tiempo y grupos en los que tarden una hora. Esto no significa que en una clase hayamos perdido el tiempo, por lo que yo he podido comprobar, aunque se tarde mucho en resolver un juego, los alumnos siguen razonando y dando sus propias soluciones. Por tanto, se propone que no haya un número de juegos a resolver fijado a priori, si no preparar suficientes juegos e ir planteándoselos a los alumnos a la velocidad que ellos vayan marcando.

No obstante, el docente también deberá dar pistas o ayudar en el momento en el que note que los alumnos están atascados o se empiezan a cansar del juego. Esto entra dentro del rol de guía del aprendizaje que debe adoptar. Desde mi experiencia, cuando hago una sesión de juegos de estrategia, en una sesión de una hora suele dar tiempo a hacer dos o tres juegos.

1.4.3. Evaluación

Para entender la propuesta que se va a hacer es necesario tener presente cómo se están proponiendo estas sesiones y cuál es su objetivo. Son sesiones complementarias en las que vamos a intentar motivar a los alumnos. Por tanto, la evaluación también debe ir en consonancia con esto.

Debido a que son sesiones muy puntuales, el peso que deberían tener en la evaluación sería ínfimo. Desde mi punto de vista, creo que no es necesario evaluar estas actividades. De esta manera quitaremos presión a los alumnos y podrán disfrutar en mayor medida de estas experiencias. De esta manera crearemos un ambiente más relajado en el aula, lo que beneficiará a nuestros objetivos. Además, he podido comprobar que, aunque estas sesiones no se evalúen, los alumnos siguen participando de manera activa.

En el caso de que se quieran evaluar estas sesiones, mi propuesta es que la evaluación sea siempre positiva. En ningún caso deberá perjudicar a los alumnos. El motivo de esto es que los alumnos estén relajados en la sesión y expongan sus razonamientos sin ninguna cohibición. En el momento en el que sea posible una evaluación negativa, los alumnos pueden dejar de expresarse por el miedo a que perjudique en su nota. Tampoco creo que sea oportuno valorar la lucidez o la velocidad en los razonamientos, ya que esto también podría provocar una pérdida de motivación en algunos alumnos o una competición insana en el aula. Se podrían valorar aspectos como participación, comportamiento, grado de implicación, etc.

Capítulo 2

Juegos

En este capítulo se presentarán diversos juegos, explicando su trasfondo matemático. Todos los juegos trabajan los contenidos del primer bloque del currículo de secundaria, analizado en 1.3. A mayores, algunos de estos juegos trabajan contenidos específicos de los demás bloques del currículo.

2.1. Juegos de estrategia

Son juegos en los que no interviene el azar y son de información completa, es decir, cada jugador sabe en todo momento las jugadas que se pueden hacer y cuáles son sus consecuencias.

Son juegos por parejas en los que hay un ganador. La peculiaridad de este tipo de juegos es que hay una pequeña trampa: hay una forma de ganar siempre. Es decir, existe un algoritmo para el jugador que empieza o para el que va en segundo lugar que, si juegas de la manera indicada, no importa lo que haga el rival, siempre vas a acabar siendo el ganador del juego. A este algortimo ganador se le llama *estrategia ganadora*.

La tarea que deben realizar los alumnos es descubrir la estrategia ganadora. En el proceso de descubrir tal estrategia van a tener que aplicar muchos, sino todos, los contenidos vistos en 1.3. A mayores, en algunos juegos, se van a necesitar otras nociones básicas sobre matemáticas, que también forman parte del currículo. Además, se pueden plantear juegos en los que la estrategia no consista en un algoritmo a realizar por uno de los jugadores, sino que el ganador del juego está determinado por las condiciones iniciales. De esta manera tenemos más variedad de juegos y se consigue que los alumnos no caigan en la repetición.

Por último, la mayoría de estos juegos que, aunque en un primer instante se planteen para un caso particular, veremos que se prestan a una generalización y, por tanto, a intruducir la abstracción y la demostración de una manera divertida en el aula.

2.1.1. Quitafichas

En un primer momento el juego se plantea de la siguiente manera: hay diez fichas en un tablero. Cada jugador, en su turno, puede quitar una o dos fichas a su elección. Hay dos modalidades de juego: gana el que consigue coger la última ficha del tablero o pierde el que se lleve la última ficha del tablero. La clave para resolver este problema es **empezar a razonar por el final**, una estrategia fácilmente extrapolable no solo a problemas matemáticos, sino a problemas de cualquier índole.

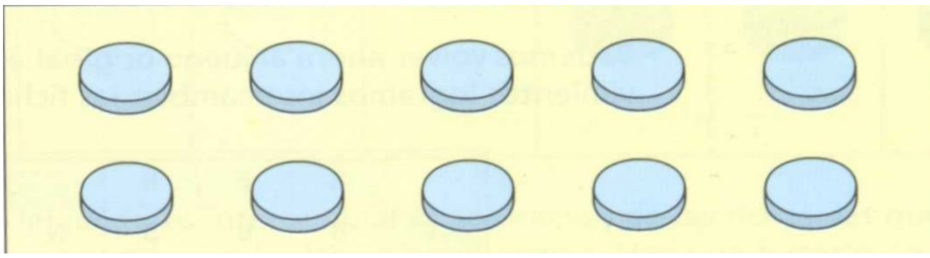

Figura 2.1: Ejemplo con diez fichas.

Si estamos en el caso de que gana el jugador que se lleva la última ficha, empezando a razonar por el final, para poder ganar es necesario que tengas una o dos fichas en tu último turno. ¿Cómo nos aseguramos de que esto ocurra siempre? El rival tiene que tener tres fichas en su turno anterior, de este modo, si quita una, nosotros tendremos dos y, si quita dos, nosotros tendremos una y habremos ganado. En este punto, hemos conseguido **simplificar el problema a otro más sencillo**: en el problema inicial teníamos que pensar con las diez fichas para poder llevarnos la última, ahora, solo tenemos que pensar con las siete primeras. Volviendo a razonar por el final, para que el rival tenga tres fichas, nosotros tenemos que haber tenido cuatro o cinco en el turno anterior. ¿Cómo nos aseguramos de que esto ocurra siempre? Con el mismo razonamiento de antes, el rival debe tener seis fichas en su turno anterior: se ha vuelto a simplificar el problema. Volviendo a iterar esto, se llega a la conclusión de que el rival tiene que tener nueve fichas en un turno. Por tanto, si empezamos nosotros y quitamos una ficha, dejamos al rival con nueve, luego somos capaces de dejarle con seis, más tarde con tres y habremos ganado, independientemente de los movimientos que haga el rival.

De manera similar, si pierde el jugador que se lleve la última ficha, razonando por el final, se llega a la conclusión de que gana el segundo jugador. Lo que debe hacer es dejar al rival con siete fichas (esto siempre lo puede hacer el segundo jugador), luego con cuatro y al final le dejará una ficha en el tablero, obligándole a llevársela.

Ya resuelto el caso particular, podemos plantear la generalización del problema: ¿qué pasa si tenemos m fichas y podemos quitar de 1 a n fichas en nuestro turno? Ahora, la estrategia de empezar a razonar por el final no funciona, pero en la resolución de los casos particulares se aprecia cuál es el camino a seguir.

Si gana el jugador que se lleva la última ficha, en el caso particular de que haya 10 fichas y se puedan quitar 1 o 2, vimos que había que dejar al rival en la sucesión de fichas $9, 6, 3$. En el caso general, se si pueden quitar de 1 a n fichas, tenemos que dejar al rival en la sucesión de los múltiplos de $n + 1$. Con los mismos razonamientos que en el caso particular, si el rival tiene $k(n + 1)$ fichas en un turno, siendo k un número natural, si el rival quita $p < n$ fichas, nosotros podemos quitar $n + 1 - p$ para dejarle en el siguiente múltiplo de la sucesión. ¿Esto siempre lo podremos hacer empezando primeros? La respuesta es sí, salvo en el caso de que m, el número de fichas, sea múltiplo de $n + 1$ ya que de esta manera, el primer jugador ya está en la sucesión perdedora. De esta manera, también se han introducido **las excepciones** y la necesidad de analizar todos los casos.

De manera similar, si pierde el jugador que se lleve la última ficha, tenemos que dejar al rival en la sucesión $k(n + 1) + 1$, siendo k un número natural. Esto siempre lo puede conseguir el primer jugador , salvo si m, el número de fichas, es de la forma $k(n + 1) + 1$, con k natural (esto es lo que ocurre en el caso particular).

A mayores de los contenidos del bloque común analizados en 1.3, con este juego se pueden trabajar los siguientes contenidos del currículo de secundaria.

- Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- Valoración del lenguaje algebraico para plantear y resolver problemas de la vida cotidiana.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.
- Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.
- Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.

2.1.2. La margarita

El juego es el siguiente: tenemos una margarita con once pétalos, cada jugador en su turno puede quitar de la margarita uno o dos pétalos, a su elección, pero si dedice quitar dos pétalos, estos deben de estar juntos. Es decir, en tu turno se pueden quitar pétalos de cualquier parte de la margarita, pero si son dos, deben de estar juntos. Gana el jugador que se lleva el último pétalo.

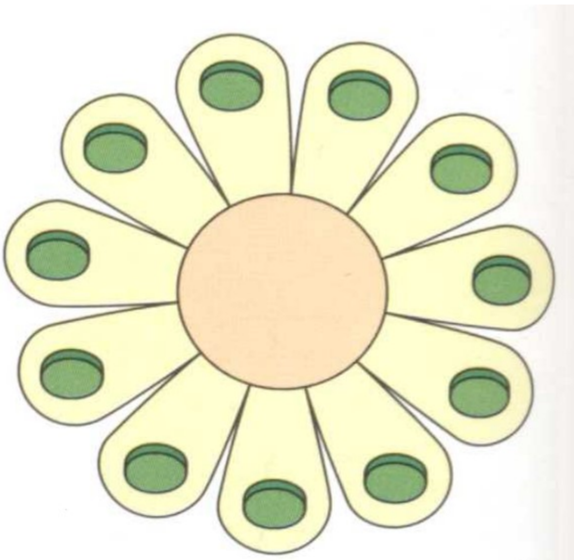

Figura 2.2: Ejemplo con once pétalos.

En un primer momento puede parecer un juego exactamente igual que el quitafichas, pero esto no es así. La razón fundamental de que estos juegos son diferentes es la siguiente: en el quitafichas, en el modo de que gana el jugador que se lleva la última ficha, si quedaban dos fichas las podía coger siempre y ganar, en cambio, en este juego, si quedan dos pétalos solamente los puedes coger si están juntos. Es decir, si en tu turno solo quedan dos pétalos separados, solamente puedes coger uno y el rival se llevará el último, ganando.

La idea para resolver este juego es darse cuenta que hay que intentar dejar al rival con pétalos separados. La clave para poder hacer esto de manera correcta es el uso de **la simetría**.

La estrategia ganadora en este juego es para el segundo jugador. Lo que debe hacer es, si el rival en su primer turno quita un solo pétalo, el segundo jugador debe ir al lado contrario de la margarita y quitar dos pétalos. De este modo, la margarita quedará simétrica con cuatro pétalos a cada lado. En cambio, si el rival quita dos pétalos en su primer turno, el segundo jugador deberá quitar uno solo del lado contrario para dejar la margarita simétrica. En este punto, el segundo jugador solamente deberá repetir lo que haga el rival pero en el lado contrario de la margarita. De esta manera, el segundo jugador siempre podrá llevarse el último pétalo.

La generalización de este juego es sencilla. Si la margarita cuenta con m pétalos, el segundo jugador en su segundo movimiento deberá dejar la margarita simétrica con los procedimientos vistos en el caso particular. El juego continúa de la misma manera.

Este juego es muy interesante ya que, aunque tenga muchas similitudes con el quitafichas, su solución es completamente diferente, siendo necesario un concepto matemático radicalmente distinto. De esta manera, podemos hacer ver a los alumnos que pequeñas variaciones en el problema pueden ocasionar grandes cambios a la hora de resolverlo. Esto también benefecia a que los alumnos no tengan una visión compartimentada de las matemáticas, sino que tengan presente que hay que tener una visión global y, dependiendo del problema, aplicar uno o varios conceptos diferentes.

2.1.3. Círculos y cuadrados

Este juego consiste en lo siguiente: en una hoja los jugadores dibujan el número de círculos y cuadrados que quieran. Cada jugador, por turnos, debe seleccionar dos figuras cualesquiera: si son dos diferentes las borra y dibuja un nuevo cuadrado, si son iguales las borra y dibuja un nuevo círculo. Si al final de la partida queda un círculo, gana el jugador que empezó. Si queda un cuadrado, gana el jugador que iba en segundo lugar.

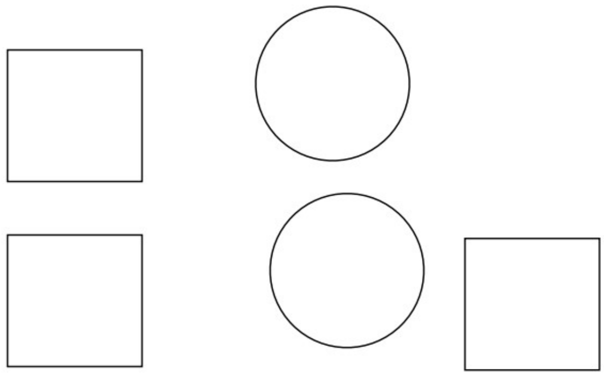

Figura 2.3: Ejemplo de partida círculos y cuadrados.

Este juego es un ejemplo del comentario que se hacía al inicio de la sección: es un juego dónde se sabe quién es el ganador dependiendo de las condiciones iniciales, no influye cómo transcurra el juego. La forma de entender esto es hacer la siguiente identificación:

- Cuadrado = signo negativo.
- Círculo = signo positivo.

Esta identificación tiene sentido: si borramos dos figuras iguales dibujamos un círculo, es decir, menos por menos = más por más = más. Si borramos dos firuas diferentes dibujamos un cuadrado, es decir, menos por más = más por menos = menos.

Con esta identificación la solución del juego es sencilla. El juego consiste realmente en hacer una operación de signos. Por ejemplo, en la figura de arriba, el juego consiste en hacer la operación: $- - + + -$. El signo de esta operación, es decir, la figura que va a quedar al final del juego, es un $-$, es decir, un cuadrado. Además, siempre va a quedar un cuadrado gracias a que la multiplicación satisface la propiedad **conmutativa**. Por tanto, si el número de cuadrados es par, gana el jugador que empezó. En cambio si el número de cuadrados es impar, gana el segundo jugador.

Este juego no necesita una generalización ya que lo es en si mismo: en el enunciado se permite dibujar el número de cuadrados y de círculos que se quiera. Además, la solución dada es totalmente general.

A mayores de los contenidos del currículo analizados en 1.3, con este juego se pueden trabajar los siguientes contenidos del currículo de secundaria.

- Números negativos. Significado y utilización en contextos reales. Números enteros.

- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.

- Valoración del lenguaje algebraico para plantear y resolver problemas de la vida cotidiana.

2.1.4. Partiendo tabletas de chocolate

Este juego consiste en que dos personas, por turnos, se dedican a partir una tableta de chocolate de tamaño 4×6. Solo está permitido partir la tableta por las líneas horizontales y verticales. Es decir, el corte es toda la línea, de un lado a otro. Los jugadores van dividiendo la tableta de chocolate y pierde el jugador que se queda sin la posibilidad de fragmentar más el chocolate, es decir, gana la persona que hace la última división.

Por ejemplo, una partida sencilla con una tableta de tamaño 2×3 sería la siguiente:

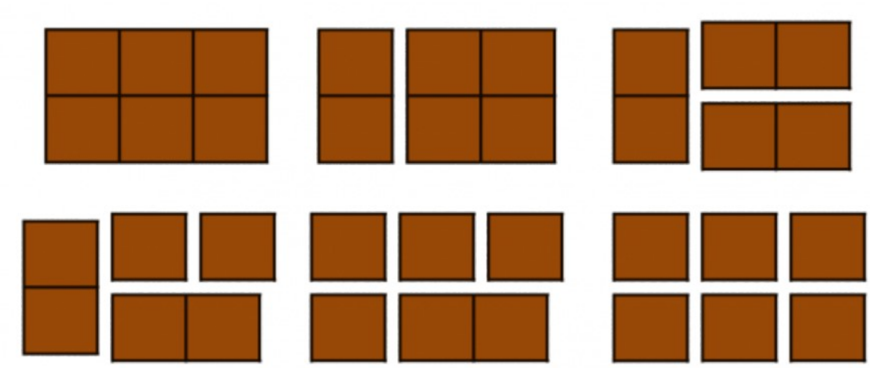

Figura 2.4: Ejemplo de desarrollo de una partida.

En este juego vuelve a ocurrir como en el de círculos y cuadrados, el ganador depende de las condiciones iniciales y no del transcurso de la partida. La forma de razonar en este juego es la siguiente: hay que contar el número mínimo de cortes para conseguir que todas las onzas queden sueltas. Si se tiene en cuenta que cada vez que un jugador hace una división, aumenta en una unidad los pedazos de chocolate que tenemos y, que el número de trozos finales será igual al número de onzas que tenga la tableta, que en este caso es $4 \times 6 = 24$. Se llega a la conclusión que, independientemente de cómo dividan la tableta los jugadores, el número de veces que se puede dividir la tableta es $24 - 1 = 23$. Por tanto, como 23 es impar, gana el jugador que empieza, independientemente de como transcurra el juego.

La generalización de este juego es sencilla y se deduce de la solución para un caso particular. Si la tableta tiene tamaño $m \times n$, entonces ganará el primer jugador si el producto $m \times n$ es par, en cambio, si dicho producto es impar, ganará el segundo jugador.

2.1.5. Llegar el primero

En un tablero de 10×10, el primer jugador coloca una ficha en una casilla cualquiera del tablero (excepto en la de FIN). Luego, mueve la ficha el segundo jugador y, a partir de ahí, se van alternando los jugadores. Los movimientos permitidos son mover la ficha hacia abajo, hacia la izquierda o en diagonal, el número de casillas que se quiera. Gana el jugador que consiga llevar la ficha a la casilla FIN.

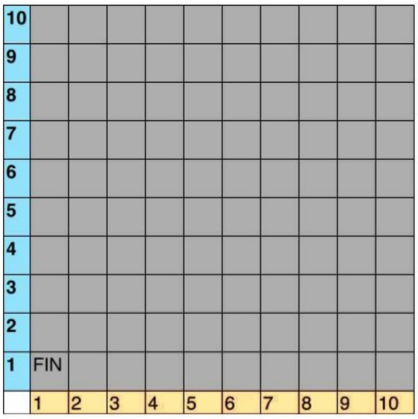

Figura 2.5: Ejemplo con tablero 10×10.

La clave para resolver este juego es darse cuenta que hay casillas en las que si colocamos la ficha hemos perdido, las colorearemos de rojo. Por ejemplo, las casillas por encima, a la derecha y en la diagonal de la casilla FIN.

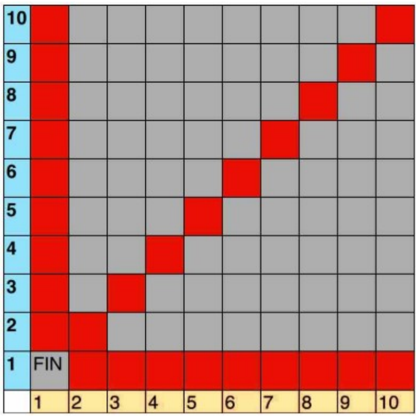

Figura 2.6: Primer paso en el razonamiento.

Ahora, si colocamos la ficha en la casilla $(2, 3)$ o $(3, 2)$, independientemente del movimiento que haga el rival, va a colocar la ficha en una casilla roja y, por tanto, hemos ganado. Estas dos casillas ganadoras las colorearemos de verde. El siguiente paso es colorear de rojo las casillas que están por encima, a la derecha y a la diagonal de las casillas verdes ya que, si ponemos la ficha ahí, nuestro rival puede mover la ficha hasta una casilla verde y ganarnos.

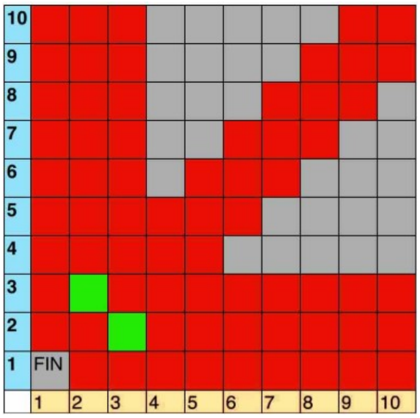

Figura 2.7: Segundo paso en el razonamiento.

Se sigue razonando de la misma manera hasta completar todo el tablero. Por tanto, la estrategia ganadora en este juego es empezar primero y colocar la ficha en una de las casillas verdes. Luego, independientemente del movimiento que haga el rival, nosotros podremos volver a colocar la ficha en otra casilla verde y, tras unos turnos, llegaremos a las casillas verdes iniciales y en el siguiente turno ganaremos.

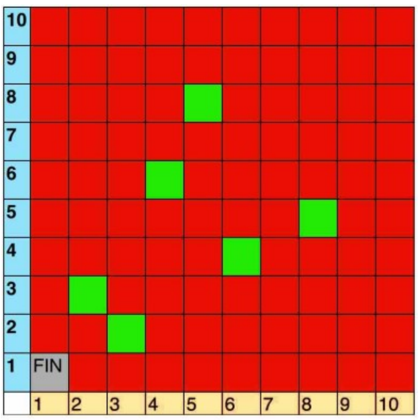

Figura 2.8: Solución del juego.

La generalización de este juego se puede hacer en dos sentidos: ampliar el tablero o restringir la cantidad de casillas que nos podemos mover. El primer caso tiene poco interés ya que simplemente hay que seguir el razonamiento del caso particular. En el caso que se solo se pueda mover un número determinado de casillas en una dirección es un poco más interesante, aunque el razonamiento para hallar la solución es el mismo.

Con este juego, al igual que con el de la margarita, estamos trabajando el concepto de simetría. En este caso, las casillas ganadoras son simétricas respecto de la diagonal del tablero. Además, este juego permite introducir la noción de coordenadas cartesianas, contenido del currículo de secundaria, de una manera entretenida y muy natural.

2.1.6. Fichas en cuadrado

En este juego hay nueve fichas colocadas en un tablero 3×3. Cada jugador, en su turno, puede quitar tantas fichas como quiera, con la condición de que sean de una misma fila o columna y que no haya hueco entre ellas. Como en el quitafichas, se puede jugar en dos modalidades: gana el que se lleva la última o pierde el que se lleva la última.

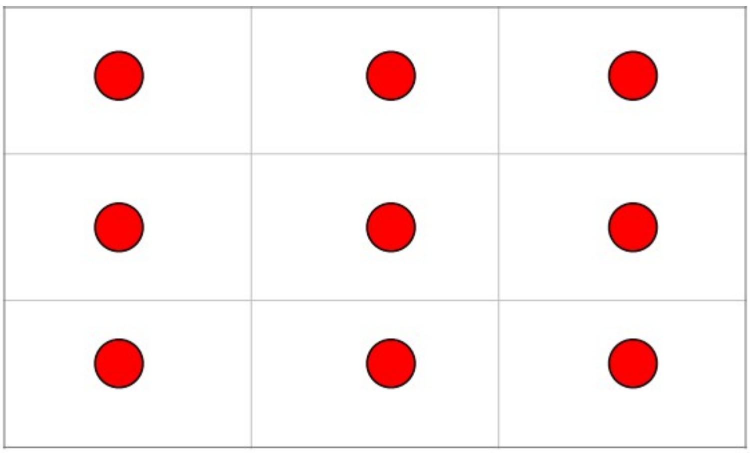

Figura 2.9: Ejemplo de partida.

Para hallar la solución de este juego se utilizan varias de las líneas de razonamiento que hemos usado en los juegos anteriores. En concreto, la simetría y razonamientos con números pares e impares.

En ambas modalidades de juego, la estrategia ganadora es para el jugador que comienza. El comienzo del juego en ambas modalidades es el mismo: el primer jugador debe quitar la ficha central o toda la fila central. Si gana el que se lleva la última, en los turnos siguientes el primer jugador deberá repetir lo que haga el rival para dejar una posición simétrica y, como ocurría con la margarita, conseguirá llevarse la última ficha. Si pierde el que se lleva la última, en los turnos siguientes el primer jugador no debe permitir dejar un número par de fichas separadas, lo que debe conseguir es dejar un número impar de fichas separadas, de este modo, el segundo jugador deberá llevarse la última. Para conseguir esto, se puede seguir la estrategia de ir dejando un tablero simétrico y romper la simetría en los turnos finales para dejar un número impar de fichas separadas.

Este juego, aunque su dificultad es bastante más elevada que la de los juegos anteriores, también resulta muy interesante por las mismas razones que se han comentado anteriormente en otros juegos. Nos permite hacer ver a los alumnos que para resolver un problema de matemáticas no solo se necesita usar un concepto, a veces, es necesario usar más de uno. Además, con este juego enseñamos a los alumnos una herramienta muy útil a la hora de resolver problemas: analizar problemas similares que se hayan resuelto anteriormente para poder aplicar algunos de los razonamientos de esos problemas más sencillos.

2.1.7. Uniendo puntos

El siguiente juego ha sido obtenido de Sadornil Renedo [2021]. Consiste en lo siguiente: en una circunferencia colocamos un número de puntos arbitrario. Por turnos, cada jugador une dos puntos cualesquiera por un segmento interior a la circunferencia. Pueden unirse puntos con la condición de que no estén unidos ya y el segmento que los une no corte a ninguno de los hechos anteriormente. Por ejemplo, con nueve puntos:

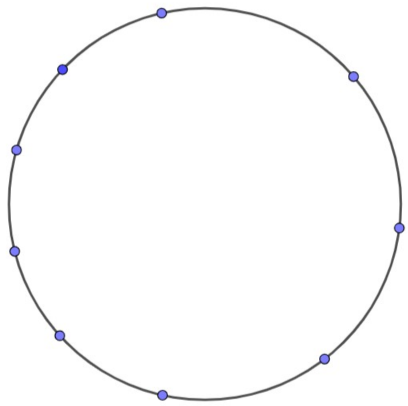

Figura 2.10: Ejemplo de partida con nueve puntos.

Y, por ejemplo, uno de los resultados de esta partida sería el siguiente:

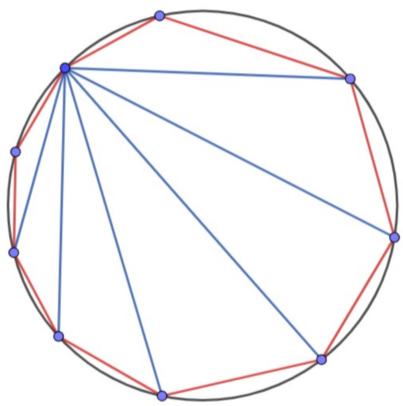

Figura 2.11: Posible resultado de una partida.

Este es otro ejemplo de juego en el que el ganador no depende de como sea el transcurso de la partida. De hecho, este juego ni siquiera depende de las condiciones iniciales, siempre gana el primer jugador. Lo primero, el número de segmentos que se pueden trazar no depende de la posición de los puntos, simplemente depende del número de ellos. Además, las condiciones del juego implican que lo que realmente se haga es triangular el polígono con vértices los puntos.

Es conocido que para triangular un polígono de n vértices, se necesitan $n - 3$ diagonales (segmentos azules en 2.11). Como en este juego también permitimos los segmentos que unen dos vértices consecutivos (segmentos rojos en 2.11), en total tenemos $n - 3 + n = 2n - 3$ segmentos. Volviendo a argumentos de juegos anteriores, como este número es impar, el primer jugador siempre podrá hacer el último segmento y, por tanto, ganar el juego.

Aunque pueda parecer un juego monótono ya que siempre gana el primer jugador, en la realidad esto no es así. La razón de que no ocurra es que la cantidad de configuraciones distintas que se obtienen tras una partida es un número muy alto, por tanto, queda encubierto que el resultado siempre sea el mismo. De hecho, el número de configuraciones posibles es el número de triangulaciones posibles de un polígono de n lados. Es conocido que este número coincide con el $(n - 2)$-ésimo número de Catalan, $C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$.

A mayores de los contenidos del primer bloque del currículo, analizados en 1.3, con este juego se pueden trabajar los siguientes contenidos del currículo de secundaria.

- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares.
- Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.

Por último, de una forma sencilla, en este juego hemos introducido el concepto de triangular un polígono de n lados. Esto nos abre las puertas a poder hacer alguna pequeña demostración o explicar algo más sobre la triangulación de polígonos. Por ejemplo, podemos demostrar de manera sencilla la fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

2.1.8. El juego del Nim

La versión clásica del juego es la siguiente, tenemos tres filas con palos: una con tres, otra con cinco y otra con siete palos. Por turnos, cada jugador quita todos los palos que quiera pero con la condición de que sean de la misma fila, y como mínimo debe de quitar un palo. Hay dos modalidades: gana el jugador que se lleva el último palo o pierde el jugador que se lleva el último palo. En Losada Liste [s.f], está implementado este juego en la plataforma **GeoGebra** para poder visualizar mejor las explicaciones que se van a dar, un recurso fantástico si queremos explicar este juego en el aula.

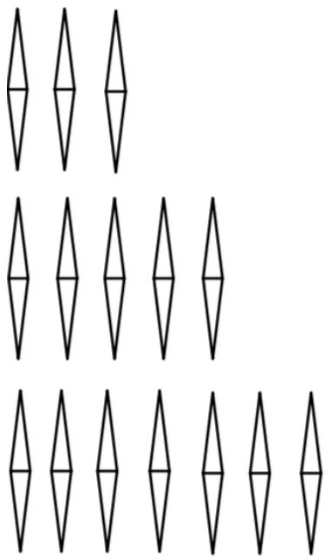

Figura 2.12: Ejemplo de partida con tres, cinco y siete palos.

La solución de este juego es algo más complicada que la de los anteriores, pero se van a necesitar muchos de los conceptos vistos en los juegos previos. En particular, **la simetría** y **empezar por casos más sencillos**.

Si en vez de tres montones de palos, solo hubiese un montón, siempre gana el primer jugador. En la modalidad de que gana el jugador que se lleva la última, debe retirar todos los palos. En la modalidad de que pierde el jugador que se lleva el último palo, tiene que retirar todos los palos salvo uno.

Si suponemos que tenemos dos montones de palos, uno con n palos y otro con $m \leq n$ palos. Si $m \neq n$, es decir, $m < n$, entonces gana el primer jugador. Lo que debe hacer es tirar del montón de $n - m$ palos del montón de n palos. De esta forma ha igualado los montones, provocando una simetría. En la modalidad de que gana el jugador que se lleva el último palo, el primer jugador gana si en el resto de movimientos repite lo que haga el rival en el montón contrario. Para la otra modalidad, debe hacer lo mismo pero romper la simetría cuando uno de los dos montones se reduzca a uno o ningún palo. En el caso $n = m$ es claro que gana el segundo jugador ya que ya están en posición simétrica.

La idea para resolver el ejercicio con tres montones es intentar replicar el razonamiento para dos montones. ¿Cómo provocar la simetría si hay más de dos montones? Para ello, vamos a usar el **Teorema fundamental de la numeración**, que nos permite descomponer, de manera única, cada número como suma de potencias de dos (esto es, escribir el número en binario). Se van a descomponer el número de palos que hay en cada fila, en nuestro ejemplo:

$$
\begin{aligned}
7 &= 2^0 + 2^1 + 2^2, \\
5 &= 2^0 + 2^2, \\
3 &= 2^0 + 2^1.
\end{aligned}
$$

Por tanto, cada montón de palos lo hemos dividido en varios montones. La ventaja de hacer esto es que ahora todos nuestros montones tienen el mismo número de palos: montón con 4 palos (correspondiente al término 2^2), montón con 2 palos (correspondiente al término 2^1) y montón con un palo (correspondiente al término 2^0).

Para poder visualizarlo mejor, escribimos los números en su notación binaria:

$$7 = 111,$$
$$5 = 101,$$
$$3 = 011.$$

Esto nos indica que, por ejemplo, 5 tiene un montón de un palo y otro de cuatro palos, pero no tiene el montón de dos palos.

Con esta representación ya podemos dar una solución a nuestro problema. Ya podemos afirmar que si los montones iniciales son de siete, cinco y tres palos, gana el primer jugador en ambas modalidades. Lo que debe hacer es conseguir que haya una cantidad par de montones de un palo, una cantidad par de montones de dos palos, etc (es decir, una cantidad par de unos en cada columna). Por tanto, se observa que con siete, cinco y tres hay una cantidad par de montones de cuatro y dos palos, pero una cantidad impar de montones de un palo. Luego si el primer jugador quita un palo de la segunda fila, ya habría una cantidad par en todos los montones. En los siguientes movimientos el primer jugador, en función de lo que haga su rival, debe ir quitando palos de filas para mantener la paridad de los montones. En la modalidad de gana el que se lleva el último palo, simplemente tiene que ir haciendo lo arriba mencionado. Para la otra modalidad, debe hacer esos movimientos hasta el final, donde romperá la simetría.

Por ejemplo, si cambiamos las condiciones iniciales y suponemos que hay tres filas: una de seis, otra de cinco y otra de tres. Al pasar estos números a binario nos damos cuenta que desde el principio los montones son pares y, por tanto, el jugador que empiece ya está en una posición perdedora para ambas modalidades.

Existen variantes del Nim en las que el sistema de numeración que debemos usar no es el binario. Por ejemplo, tenemos treinta monedas en una mesa. El primer jugador puede retirar todas las monedas que quiera con la condición de que al menos debe dejar una. El segundo jugador también puede retirar todas las monedas que quiera, con la condición de que no pueden superar el doble de las que retiró el rival. El juego continúa, cada jugador en su turno retira todas las que quiera, siempre y cuando no superen el doble de las que retiró su rival en el turno anterior. Gana el jugador que retire la última moneda.

Este juego se llama Nim de Fibonacci. Para su solución debemos usar el resultado que dice que todo natural se puede expresar, de forma única, como suma de números de Fibonacci. De este modo, $30 = 21 + 8 + 1$. El primer jugador gana siempre, lo único que tiene que hacer es, en cada paso, expresar el número de monedas que haya en la mesa como suma de números de Fibonacci y retirar la cantidad que indique el menor de lo sumandos. Por ejemplo, en el primer paso debe retirar una moneda.

Con este juego, a mayores de los contenidos analizados en 1.3, se pueden trabajar los siguientes contenidos del currículo de secundaria.

- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- Valoración del lenguaje algebraico para plantear y resolver problemas de la vida cotidiana.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.
- Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.

Además, aunque no aparezca en el currículo de secundaria de matemáticas, se trabajan los sistemas de numeración y, en particular, el sistema binario. Esto tiene mucha utilidad, por ejemplo, en las asignaturas de informática y tecnología.

2.2. Juegos probabilísticos

En los juegos de estrategia había una estrategia ganadora, es decir, un algoritmo para poder ganar siempre al juego, aunque a veces esta estrategia dependía de colocar las condiciones iniciales de manera correcta. En esta sección se van a explicar un tipo de juegos en los que hay elecciones que nos hacen tener más probabilidad de ganar, aunque no sea una forma de ganar siempre.

En los juegos de estrategia el objetivo principal era que los alumnos descubriesen la estrategia ganadora. En los juegos probabilísticos el objetivo principal es acercar la probabilidad a los alumnos de una manera divertida. Además, estos juegos servirán para enseñar a los alumnos cuáles son los razonamientos que se suelen seguir a la hora de afrontar problemas de probabilidad.

A mayores de los contenidos analizados en 1.3, con estos juegos se pueden trabajar los siguientes contenidos del currículo de secundaria.

- Población e individuo. Muestra.
- Variables estadísticas. Variables cualitativas y cuantitativas discretas.
- Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia.
- Fenómenos deterministas y aleatorios.
- Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
- Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación.
- Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables.
- Experiencias aleatorias simples y compuestas en casos sencillos.
- Sucesos y espacio muestral.

- Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento.
- Diagramas de árbol sencillos y tablas. Regla del producto para contar casos.
- Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.
- Sucesos dependientes e independientes.

2.2.1. Caer al agua

Es un juego sencillo, pero puede servir para introducir a los alumnos lo que es un juego probabilístico y cuál es el objetivo y la forma de trabajar con este tipo de actividades. Además, también se verá muy clara la diferencia de estos juegos probabilísticos con los juegos de estrategia, aquí hay una posición mejor que las demás pero no nos asegura la victoria.

Es un juego para dos jugadores, cada uno dispone de cinco fichas que debe colocar a su antojo en las casillas numeradas en las orillas. Los jugadores lanzan, alternativamente, un par de dados y su suma indica la casilla de la que hay que tomar una ficha (en el caso que la haya) y lanzarla al agua. Gana el primer jugador que consiga lanzar al agua todas sus fichas.

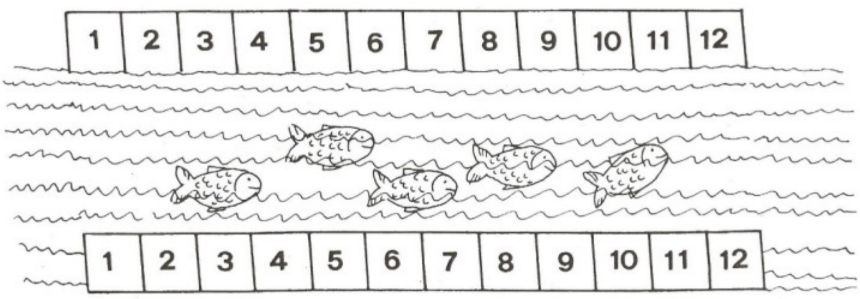

Figura 2.13: Posible tablero de juego.

Para encontrar la mejor disposición de las fichas simplemente tenemos que darnos cuenta de que números tienen más probabilidad de ser la suma de dos dados. Si lo recogemos en una tabla:

Suma	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabla 2.1: Posibles sumas de dos dados.

Teniendo en cuenta estos datos, el número que más veces se repite es el 7, luego el 6 y el 8, etc. Por tanto, si tenemos que colocar cinco fichas, lo mejor es colocar el $7, 6, 8, 4$ y 9.

2.2.2. El problema de Monty Hall

El problema de Monty Hall es un juego matemático probabilístico basado en el programa de televisión *Deal or no deal* (Allá tú en España). El juego está planteado como un concurso de televisión.

En un concurso de televisión hay tres puertas cerradas en las que no se ve lo que esconde cada una. Detrás de dos de ellas hay una cabra y detrás de otra un coche. Al concursante se le deja elegir una de las tres puertas. Tras su elección, el presentador, que sabe lo que hay detrás de cada puerta, abre una de las puertas que no ha elegido el concursante, mostrando una cabra (esto siempre lo puede hacer). Ahora le preguntan al concursante: ¿mantienes tu elección o quieres cambiar?

Al principio uno podría pensar que no importa: solo quedan dos puertas y en una está el coche, por tanto, cada puerta tiene probabilidad $\frac{1}{2}$. Este razonamiento es erróneo, veamos por qué. La primera idea, intuitiva, para ver que este razonamiento es erróneo es pensar que hay un número muy grande de puertas, digamos mil. La probabilidad de que la puerta que elijas esconda el coche es ínfima, simplemente hay que usar la **regla de Laplace** para saber que es $\frac{1}{1000}$. Ahora, si el presentador abre otras 998 puertas en las que no está el coche y nos pregunta si queremos cambiar, vemos bastante claro que hay que cambiar. La idea, al cambiar de puerta, es como si al inicio del juego hubiéramos elegido las otras 999 puertas, cuya probabilidad de tener el coche es $\frac{999}{1000}$.

Volviendo a nuestro problema de las tres puertas, si en nuestra primera elección elegimos la primera puerta (para el razonamiento no importa cuál se elija) podemos plantear el siguiente diagrama.

Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3	Quedarse	Cambiar
Cabra	Coche	Cabra	Perder	Ganar
Coche	Cabra	Cabra	Ganar	Perder
Cabra	Cabra	Coche	Perder	Ganar

Tabla 2.2: Diagrama con los casos posibles.

Vemos que la probabilidad de ganar el coche quedándose con la puerta elegida es de $\frac{1}{3}$. En cambio, si decidimos cambiar de puerta, la probabilidad de ganar es $\frac{2}{3}$, el doble.

2.2.3. El juego de Penney

Es un juego para dos jugadores en el que se va a ir lanzando una moneda sucesivamente. Al principio del juego cada jugador debe elegir una secuencia de tres tiradas: por ejemplo cara, cara y cruz (CCX en adelante). Una vez fijada la secuencia de cada jugador se empieza a lanzar una moneda sucesivamente. Gana el jugador cuya secuencia aparezca primero.

Para empezar a resolver, o incluso empezar a jugar, es necesario que conozcamos todas las ternas posibles: CCC, CCX, CXC, XCC, XXX, XXC, XCC y XCX. Además, usando la **regla de Laplace** podemos calcular cuál es la probabilidad de que salga una de estas ternas al lanzar tres veces una moneda, $\frac{1}{8}$. Esta probabilidad también se puede calcular como probabilidad compuesta: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. De esta manera podemos hacer ver a los alumnos que es multiplicativa, no sumativa.

Ahora podemos pensar que como la probabilidad de que salga una terna es la misma para cualquier terna, no importa cuál sea la que elijamos. Veamos con un ejemplo que esto no es así: supongamos que el primer jugador elije CCC y el segundo jugador elije XCC. La única posibilidad de que gane el primer jugador es que ocurra CCC en las tres primeras tiradas ya que, si sale una X ya nunca podrá ganar el primer jugador: para que gane tendrían que venir tres caras después de la cruz, pero entonces tendríamos XCCC y ha ganado el segundo jugador porque su secuencia aparece primero. Por tanto, la probabilidad de que gane el primer jugador es la de que salga su terna a la primera, es decir, $\frac{1}{8}$, luego la probabilidad de que gane el segundo jugador es $\frac{7}{8}$.

Podríamos preguntarnos si hay alguna terna mejor que todas las demás, pero esto tampoco es cierto. Lo que ocurre es que este juego no es transitivo, una vez el primer jugador haya elegido una terna, el segundo jugador puede elegir una terna con la que tenga más posibilidades de ganar. Esto es lo que ocurre en el ejemplo anterior, para la terna CCC, la mejor elección del segundo jugador es la terna XCC.

La mejor elección para el segundo jugador es la siguiente: si la terna del primer jugador es 1-2-3, el segundo jugador debe elegir la terna (no 2)-1-2, donde (no 2) indica lo contrario (si la segunda posición del primer jugador es cara, el segundo elije cruz, y viceversa). La siguiente tabla, obtenida de Morales [s.f], muestra la probabilidad de la elección del segundo jugador (B) en función de lo que haya elegido el primer jugador (A).

B \ A	CCC	CCX	CXC	CXX	XCC	XCX	XXC	XXX
CCC		$1/2$	$2/5$	$2/5$	$1/8$	$5/12$	$3/10$	$1/2$
CCX	$1/2$		$2/3$	$2/3$	$1/4$	$5/8$	$1/2$	$7/10$
CXC	$3/5$	$1/3$		$1/2$	$1/2$	$1/2$	$3/8$	$7/12$
CXX	$3/5$	$1/3$	$1/2$		$1/2$	$1/2$	$3/4$	$7/8$
XCC	$7/8$	$3/4$	$1/2$	$1/2$		$1/2$	$1/3$	$3/5$
XCX	$7/12$	$3/8$	$1/2$	$1/2$	$1/2$		$1/3$	$3/5$
XXC	$7/10$	$1/2$	$5/8$	$1/4$	$2/3$	$2/3$		$1/2$
XXX	$1/2$	$3/10$	$5/12$	$1/8$	$2/5$	$2/5$	$1/2$	

Figura 2.14: Probabilidades de las diferentes elecciones.

Todos los cálculos de probabilidad se hacen de manera similar, por ejemplo, si el primer jugador elige la terna CCX, veamos que la probabilidad de que gane el segundo jugador usando XCC es realmente $3/4$: si en el primer lanzamiento sale X, siguiendo el razonamiento del ejemplo anterior, gana el segundo jugador, por tanto, de este caso obtenemos $1/2$ para el segundo jugador. Si en el primer lanzamiento sale C y en el segundo sale C, por la misma razón que en el ejemplo anterior, gana el primer jugador, por tanto, de este caso obtenemos $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$ para el primer jugador. Del mismo modo, si en el primer lanzamiento sale C y en el segundo X, gana el segundo jugador siempre, por tanto, obtenemos $1/4$ para el segundo jugador. La última posibilidad es que salga CCX en los tres primeros lanzamientos, ganando el primer jugador. En este último caso ya vimos que la probabilidad era $1/8$. Sumando las probabilidades obtenenemos el resultado de la tabla.

La siguiente variante de este juego, obtenida de Humble & Nishiyama [2015], nos puede servir para explicar la diferencia entre suceso dependiente e independiente a los alumnos. La idea del juego es la misma pero usando una baraja de cartas en vez de lanzar una moneda. En lugar de cara y cruz usamos cartas rojas y negras (o dos palos diferentes en la baraja Española). Se van colocando cartas en la mesa hasta que sale la secuencia de alguno de los jugadores, se recogen las cartas y el jugador de la secuencia gana un punto. Gana el jugador que obtenga más puntos.

Las probabilidades en este caso son un poco diferentes. En la versión clásica de las monedas los lanzamientos son independientes. En cambio, al usar una baraja de cartas, los sucesos son dependientes: el color que vaya a salir tendrá más o menos probabilidad en función de las cartas que hayan salido anteriormente. En el artículo Humble & Nishiyama [2015], se hace una simulación con ordenador de esta variante y los resultados son aún más favorables para el segundo jugador en comparación con la versión clásica del juego. Por ejemplo, si el primer jugador elije negro, negro, rojo (NNR) y, por tanto, el segundo jugador elije RNN, los resultados de la simulación son: ganó 930 veces el segundo jugador, empataron 40 veces y ganó 30 veces el primer jugador.

2.3. Tangram

El tangram es un rompecabezas de origen chino, que consta de siete figuras geométricas planas:

1. Cinco triángulos isósceles.
2. Un romboide.
3. Un cuadrado.

Todas estas pizas se obtienen de dividir un cuadrado de una forma concreta y guardan una gran relación geométrica entre sí. El tangram de siete piezas tiene el siguiente aspecto:

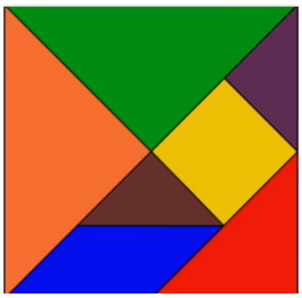

Figura 2.15: Tangram de siete piezas.

El modo de juego tradicional del Tangram consiste en construir formas siguiendo dos reglas:

- Para la construcción de la forma hay que utilizar las siete piezas.
- Las piezas no se pueden superponer.

Ahora bien, el Tangram también se puede utilizar para introducir y trabajar conceptos de geometría plana y potenciar el razonamiento de forma manipulativa. Alguna de estas actividades, propuestas por Torres Bello [s.f] son las siguientes.

Actividad 1: Utilizando las siete piezas, construye:

1. Un triángulo rectángulo e isósceles.
2. Un rectángulo.
3. Un paralelogramo no rectángulo.
4. Un trapecio isósceles.
5. Un trapecio rectángulo.
6. Un hexágono.

Actividad 2: En esta actividad se pide a los alumnos que relacionen cada figura del tangram con todas las demás. Es decir, que escriban la razón de proporción que guardan las áreas.

Actividad 3: Tomando como área unidad la del cuadrado pequeño, expresa el área de las demás piezas. Luego, hacer lo mismo pero tomando como área unidad la del triángulo pequeño.

Actividad 4: Tomando como longitud unidad el lado del cuadrado pequeño, expresa el perímetro de cada una de las piezas.

Con estas actividades, a mayores de los contenidos vistos en 1.3, se trabajan los siguientes contenidos del currículo de secundaria.

- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
- Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras.

2.4. Sudokus

El Sudoku es un juego clásico conocido por todo el mundo. Consiste en una cuadrícula, por ejemplo de 9×9, subdividida a su vez en cuadrículas más pequeñas, por ejemplo de 3×3. El juego consiste en que en cada cuadrícula de 3×3 debes poner los números del 1 al 9, pero con la condición de que si nos fijamos en la cuadrícula grande, no pueden aparecer números repetidos en la misma fila o columna. En la cuadrícula grande hay varios números puestos como parte del problema y hay que completar el resto de la cuadrícula.

Este Sudoku tiene interés matemático por sí mismo, permite trabajar el razonamiento en los alumnos. En esta sección se va a hacer hincapié en variantes del Sudoku con más trasfondo matemático. No obstante, a la hora de plantear esta actividad en el aula, es recomendable empezar con Sudokus clásicos antes de entrar a las variantes más complicadas.

2.4.1. Sudoku Killer

La base es la misma que el Sudoku clásico, empezamos con un un tablero 9×9 subdividido a su vez en cuadrículas de 3×3. El objetivo es completar todo el tablero con las condiciones del Sudoku clásico. A estas reglas se le añaden dos más, que hacen que el juego sea mucho más interesante matemáticamente hablando:

1. En las casillas rodeadas por líneas discontinuas tampoco se pueden repetir los números.

2. La suma de los números en el interior de las lineas discontinuas debe ser el número que aparece en la esquina.

En la página web Killer Sudoku online [s.f] se pueden encontrar sudokus de este estilo de diferentes niveles. Por ejemplo:

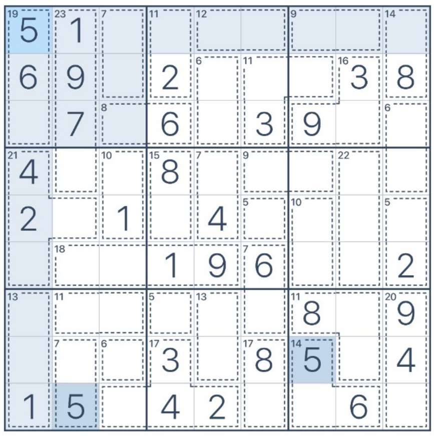

Figura 2.16: Ejemplo de partida.

Con este juego es posible introducir varios conceptos matemáticos de forma natural ya que servirán para poder resolver el Sudoku Killer. Uno de estos conceptos es el de **suma única**: siguiendo el ejemplo de arriba, como solo se pueden poner números del 1 al 9, existen números que solo se pueden descomponer como suma de otros de manera única. Por ejemplo, si dos números deben sumar 3, estos deben ser 1 y 2.

Otro concepto que se presta con este juego es el de la **suma de los n primeros números naturales**. Este concepto puede surgir, por ejemplo, preguntando a nuestros alumnos cuanto debe sumar una fila o una columna sabiendo que tienen que estar los números del 1 al 9. Esta fórmula se puede explicar la forma en la que Gauss se dió cuenta. Es una anécdota que, tras mi experiencia haciendo prácticas en

ESTALMAT, le resulta curiosa a los alumnos. De esta manera, estamos volviendo a introducir la demostración en el aula de una manera natural y entretenida.

2.4.2. Ken-Ken

El Ken-Ken es una versión más complicada del Sudoku Killer. La idea de este juego sigue siendo la misma que la del Sudoku original, pero a las reglas del Sudoku original se le añaden la siguiente: los números interiores a las zonas rodeadas deben cumplir la operación aritmética marcada. La diferencia fundamental con el Sudoku Killer es que en este solamente había sumas, en cambio, en el Ken-Ken están todas las operaciones.

En la página oficial de este juego, KenKen Puzzle Official Site [s. f.], se pueden encontrar una gran variedad de estos puzzles. Por ejemplo:

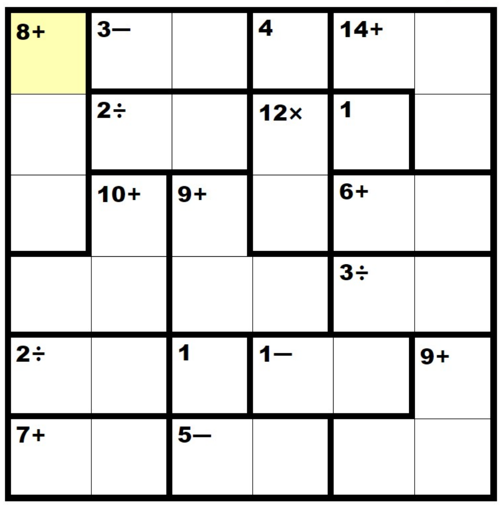

Figura 2.17: Ejemplo de partida.

Una posible actividad en el aula sería que cada alumno crease un Sudoku killer o un Ken-Ken para luego intercambiárselos y resolverlos. De esta manera, estaremos proponiendo actividades de los **diferentes niveles de demanda cognitiva** de acuerdo con la clasificación de Smith & Stein [1998].

Con estos juegos, a mayores de los contenidos del primer bloque analizados en 1.3, se pueden trabajar los siguientes contenidos del currículo de secundaria.

- Números naturales. Sistema de numeración decimal. Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad.

- Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos. Cálculo mental para descomponer factorialmente números pequeños.

- Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental.

2.5. Grafos

En esta sección se presentarán varios juegos cuya solución está relacionada con teoría de grafos. Aunque exista esta relación, a la hora de resolver estos juegos en el aula no es necesario hablar de teoría de grafos. Para resolver estos juegos tampoco es necesario tener ningún conocimiento previo sobre dicha teoría. De hecho, en esta sección se van a mostrar tres juegos con dificultad creciente, de modo que si se sigue el orden, los razonamientos necesarios para los juegos más difíciles se adquieren en los juegos previos.

2.5.1. El problema de los siete puentes

El problema es el siguiente: una ciudad está atravesa por un río, diviéndola en cuatro regiones: A, B, C y D. Para que las personas de la ciudad se puedan mover libremente, se han construido siete puentes conectando las cuatro regiones. La pregunta que se hace es la siguiente: comenzando en una de las cuatro regiones y pasando una única vez por cada uno de los puentes, ¿se pueden visitar todas las regiones de la ciudad y regresar a la de partida?

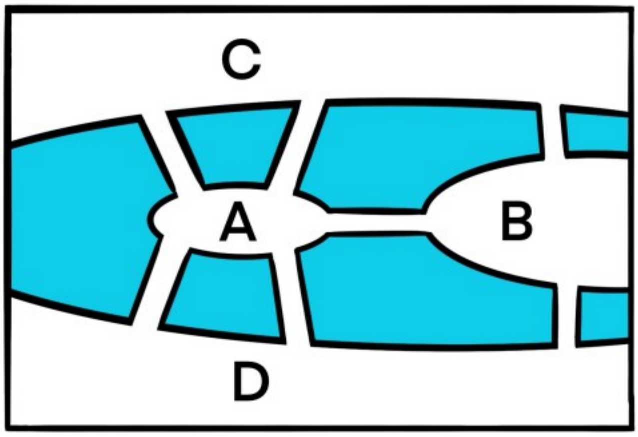

Figura 2.18: Representación gráfica del enunciado.

La clave para resolver este problema es darse cuenta que en las regiones intermedias del recorrido es necesario que haya un número par de puentes. La razón de esto es la siguiente: si llegamos a una región por un puente, tendremos que salir de ella por otro puente diferente. Por tanto, cada vez que pasemos por una región, tendremos que usar dos puentes diferentes.

Las únicas regiones que pueden tener un número impar de puentes son las de partida y las de llegada ya que son las únicas de las que no tenemos que entrar y salir obligatoriamente. Sin embargo, como queremos que el punto de partida y de llegada sea el mismo, también obliga a que tenga un número par de puentes.

En nuestro caso esto no ocurre: en la región A salen cinco puentes y en las demás tres. Por tanto, la solución del problema es que es imposible hacer un recorrido con esas características.

2.5.2. ¿Eres capaz de dibujarlo sin levantar el lápiz?

Un juego clásico es el de conseguir dibujar una casita con una cruz sin levantar el lápiz. Es un juego que todos los alumnos lo conocen. La siguiente actividad pretende relacionar este tipo de juegos con los conceptos aprendidos en la actividad anterior: nos permitirá saber si podemos dibujar una figura sin levantar el lápiz o no.

De las cuatro figuras siguientes, ¿cuáles se pueden dibujar sin levantar el lápiz y recorriendo cada una de las aristas una única vez?

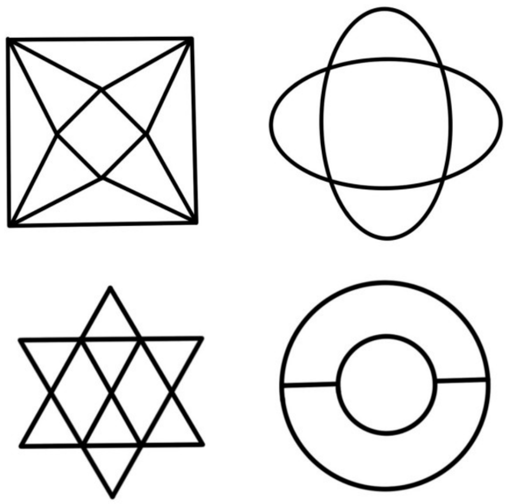

Figura 2.19: Figuras del enunciado.

Como en la actividad anterior, la figura se podrá dibujar sin levantar el lápiz siempre y cuando de cada vértice (entendido como los puntos de intersección de líneas) salgan un número par de aristas (entendidas como líneas que unen vértices), excepto del vértice de origen y de llegada, que se puede permitir que haya un número impar.

En las dos figuras superiores, de cada vértice salen un número par de aristas, luego sí que es posible dibujarlas con las condiciones del enunciado. En cambio, en las dos figuras inferiores hay más de dos vértices de los cuales salen un número impar de aristas, de hecho, en la circular de todos los vértices salen un número impar de aristas, luego en las dos inferiores no es posible dibujarlas con las condiciones del enunciado.

2.5.3. Personas que se conocen

Este problema, aunque no sea un juego, permite ver una aplicación bastante sorprendente de los dos juegos anteriores. Además, este problema también servirá para acercar la demostración a los alumnos. Se plantea lo siguiente: probar que en una reunión de seis personas siempre hay tres que se conocen entre sí o tres que no se conocen entre sí. Este problema es un conocido resultado de teoría de grafos.

Para resolver este problema vamos a hacer uso **del principio del palomar**: si un conjunto P de p elementos se divide en una familia N de n subconjuntos disjuntos, y $p > n$, entonces hay al menos un conjunto de N que contiene al menos dos elementos de P. Si $p > nq$, entonces hay al menos un subconjunto de N que contiene al menos $q + 1$ elementos de P.

Para formular este principio a nuestros alumnos podemos formulárselo de la forma clásica, de este modo también entenderán el por qué del nombre: si queremos distribuir n palomas entre m palomares, si $n > m$, es decir, hay más palomas que palomares, entonces al menos hay un palomar con dos palomas.

Volviendo al problema que nos ocupa, elegimos una persona P del conjunto de las seis personas. A las cinco personas restantes las dividimos en dos conjuntos:

$$C_1 = \{\text{personas que conocen a P}\} \; y \; C_2 = \{\text{personas que no conocen a P}\}.$$

Aplicando el principio del palomar, como queremos dividir cinco personas en dos grupos, al menos uno de ellos debe tener tres personas. Supongamos que esas tres personas están en C_1, si están en C_2 el razonamiento es análogo. Pueden ocurrir tres casos:

1. Las tres personas no se conocen entre sí. En este caso ya tenemos el problema resuelto.

2. Dos de las tres personas se conocen entre sí. Como estas dos personas a su

vez conocen a P, ya tenemos el problema resuelto.

3. Las tres personas se conocen entre sí. También tenemos el problema resuelto.

Este problema se puede formular en términos de teoría de grafos y se llama el *teorema de la amistad*, una versión particular del teorema de Ramsey. Un grafo completo de n vértices, denotado K_n, es un grafo con n vértices y cada vértice está unido a los demás mediante una arista. Si coloreamos la arista de rojo, implicará que los dos vértices (entendidos como personas) no se conocen, en cambio, si la arista es de color azul, significará que sí se conocen.

En términos de teoría de grafos, el resultado es el siguiente: independientemente de como se hayan coloreado las aristas de K_6, no se puede evitar que se forme un triángulo rojo o un triángulo azul.

La demostración en términos de grafos se puede hacer de la siguiente manera. Fijamos un vértice de K_6, P. Del vértice P salen 5 aristas que, en virtud del principio del palomar, al menos 3 tienen que ser del mismo color, digamos rojas. Y denotaremos por A, B y C los otros vértices extremos de estas tres aristas.

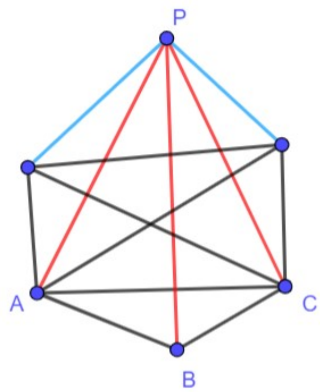

Figura 2.20: Caso particular de la demostración.

Si alguna de las aristas AB, BC o AC es del mismo color, es decir, rojas, entonces el triángulo que se forma con el vértice P ya es de un solo color, rojo en nuestro caso. En cambio, si todas las aristas AB, BC o AC son de color distinto, es decir, azul, también formamos el triángulo ABC, que es de un solo color, azul en nuestro caso.

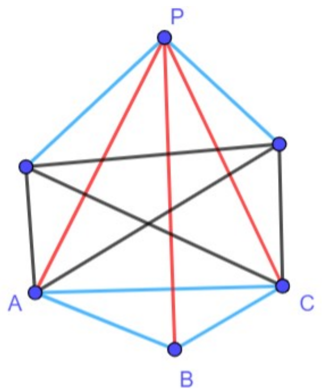

Figura 2.21: Caso particular de la demostración.

Para terminar este apartado se puede explicar que esto no ocurre en un grupo de 8 personas, no tiene que ocurrir que necesariamente haya cuatro que se conozcan entre sí o cuatro que no se conozcan entre sí. Para que esto ocurriese, en uno de los grafos siguientes debería aparecer un cuadrilátero con sus dos diagonales dibujadas, cosa que no ocurre.

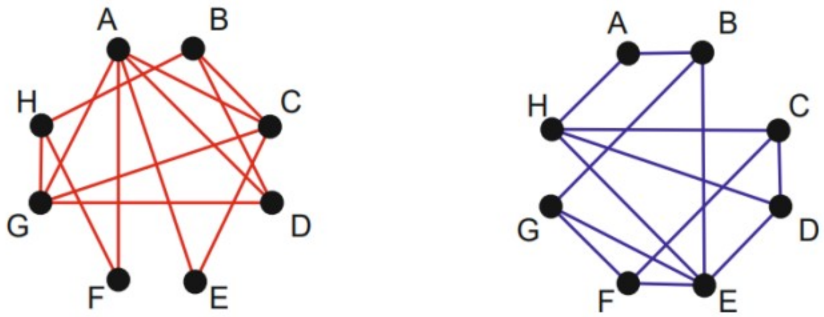

Figura 2.22: Contraejemplo con ocho personas.

Capítulo 3

Juegos con recursos TIC

En este capítulo se pretende mostrar algunos juegos matemáticos, siguiendo la línea de los anteriores, con recursos TIC. En el capítulo 2 ya se han visto algunos recursos online. Por ejemplo, para el juego del Nim 2.1.8, hemos visto que con la plataforma **GeoGebra**, en particular en Losada Liste [s.f] cómo se podía prácticar el Nim de manera online. Hay innumerables recursos digitales para poder trabajar los juegos vistos en el capítulo 2, sin embargo, en este capítulo nos vamos a centrar en otro tipo de juegos. Estos juegos no serán un recurso digital para apoyar la explicación de otro juego, sino que serán juegos totalmente asociados al mundo de las TIC.

3.1. Wordle y Nerdle

EL Wordle,Wardle [s.f], es un juego online que se ha hecho popular recientemente. El juego consiste en lo siguiente: cada día tenemos que adivinar una palabra diferente en seis intentos. Para adivnar la palabra debemos de ir probando palabras con la longitud adecuada. Si probamos una palabra nos van a marcar tres tipos diferentes de letras: si la letra de la palabra aparece en gris, significa que esa letra no forma parte de la palabra que buscamos; si la letra está en amarillo, significa que esa letra pertence a la palabra que buscamos pero no está en esa posición; por último, si la letra aparece en verde significa que esa letra pertenece a la palabra que buscamos y, además, está en esa posición. Un ejemplo de partida podría ser el siguiente:

Figura 3.1: Ejemplo de partida.

Aunque parezca que este juego no tienen ningún trasfondo matemático, esto no es así. El juego se puede analizar desde una perspectiva probabilística bastante interesante, de hecho esto se ha puesto en práctica durante el periodo de prácticas del máster, se explicará en detalle en el capítulo 4.

Uno podría pensar que para jugar a este juego, simplemente tienes que poner palabras y esperar tener suerte para que aparezcan muchas letras en verde. Como se quiere que este juego esté enfocado en la asignatura de matemáticas, debemos hacer comprender a los alumnos que hay palabras mejores que otras, en el sentido de que tenemos más probabilidad de conocer letras de la palabra solución.

Pensemos por un momento que un alumno elige, como en la imagen de arriba, la primera palabra *potro*. ¿Es una buena palabra?. La respuesta es que no. En la primera palabra debemos de intentar escribir una palabra con el mayor número de letras diferentes posibles. De hecho, en la primera palabra la mejor estrategia es intentar adivinar el mayor número de vocales posibles. Por esta razón, la palabra potro no es buena, solamente nos da información de una sola vocal. Es decir, como tenemos cinco vocales, solamente tenemos $1/5$ de posibildiades de adivinar alguna vocal de la palabra solución. Si no llega a estar la letra o, hubiésemos perdido una oportunidad sin haber descubierto apenas información. En cambio, si nuestra primera palabra es *fideo*, tenemos información de tres vocales diferentes, siendo esto el triple de posibilidades que con la palabra potro.

Se pueden hacer infinidad de razonamientos de este estilo, dependiendo de la palabra diaria y de las palabras que vayan escogiendo los alumnos. Otro ejemplo, supongamos que ya estamos en la situación de haber escrito *largo*. Podemos razonar de la siguiente manera: lo más probable es que las dos letras que falten sean consonantes ya que en castellano no es común ver palabras empezando con la combinación AA, OA o UA, y lo mismo para el segundo hueco. Otro ejemplo, también podemos descartar la letra Q, ya que en castellano siempre la acompaña una letra U.

Todos estos razonamientos son interesantes por sí mismos, además van a ser muy útiles para el siguiente juego: el Nerdle, algo más complicado y con mayor contenido matemático. No obstante, el Wordle es un juego con el que podemos introducir ciertos razonamientos probabilísticos en los cursos más bajos. Además, el Wordle cuenta con un modo tildes y con un modo científico, en el que la palabra solución está relacionada con el ámbito científico. De esta manera, el Wordle se convierte en una actividad **interdisciplinar**, con la que podemos trabajar contenidos desde gramática y vocabulario, hasta cultura científica.

En el Nerdle, Nerdle [s.f], la idea principal es la misma que con el Wordle. La diferencia es que en este caso no se busca una palabra, sino una operación. Puede ser una suma, resta, multiplicación o división, adivinar cuál es la operación también entra dentro del juego. Como en el Wordle, si un número u operación aparece en gris es que no está en la operación final, si está en verde es que está en la operación final y en esa posición y, si está en morado significa que está en la operación final pero no en esa posición. Un ejemplo de partida normal podría ser el siguiente:

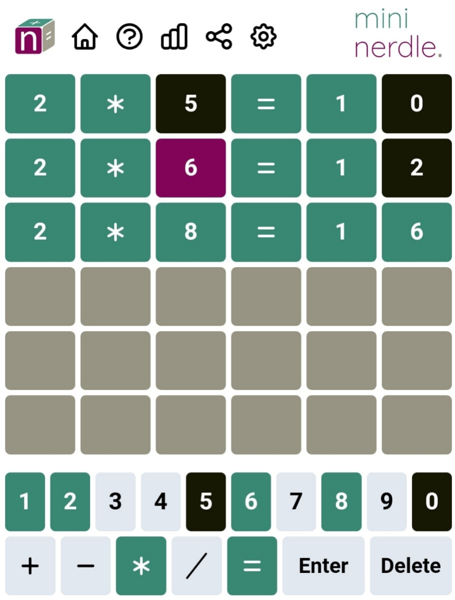

Figura 3.2: Ejemplo de partida.

Al igual que ocurría con el Wordle, en el Nerdle hay varias modalidades de juego. En algunas modalidades piden operaciones más largas, en otras te dan como dato la operación y los números que hay en la operación y tu debes colocarlos, etc.

Con este juego se pueden trabajar los mismos razonamientos probabilísticos que con el Wordle. A mayores, aquí se puede trabajar el cálculo mental y otros razonamientos matemáticos, dependiendo de la operación diaria y de la situación en particular de cada alumno. Por ejemplo, en la imagen de arriba vemos que en la segunda fila nos indica que el 6 está en la operación, aunque no en esa posición y, por tanto, estará en la última posición. Esto implica que al multiplicar 2 por un número, nos tiene que dar 16. Con este razonamiento tan simple estamos introduciendo y trabajando **las ecuaciones de primer grado.**

Aunque en el ejemplo de la imagen de arriba no se vea, imaginemos que el igual está en la penúltima posición. Esto nos obliga a pensar que la operación no puede ser ni una suma ni una multiplicación, ya que, al sumar o multiplicar un número de una cifra con otro de dos, nunca nos va a dar como resultado un número de una cifra. Este juego también permite razonamientos de divisibilidad. Supongamos que tenemos que las tres primeras posiciones son $24/$, para las siguientes posiciones no vale cualquier número, debemos colocar un número **divisor** de 24.

Con estos juegos, a mayores de los contenidos analizados en 1.3, podemos trabajar los siguientes contenidos del currículo de secundaria.

- Números naturales. Sistema de numeración decimal. Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad.
- Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y para el cálculo con calculadora u otros medios tecnológicos.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita

3.2. El Buscaminas

En esta sección se van a mostrar las actividades que se plantean en el artículo Alonso Santamaría [2021]. En este artículo el autor pretende crear una serie de actividades, basadas en el buscaminas, que fomenten el razonamiento matemático de una forma divertida.

Desde un primer momento el autor nos hace ver las matemáticas que hay detrás del buscaminas. Por ejemplo, nos hace ver que el tamaño del tablero y el número de minas en cada dificultad no es aleatorio, hay una razón matemática detrás de esto. Por ejemplo, la probabilidad de encontrar una mina en el nivel principiante es la siguiente:

$$\frac{10 \text{ minas}}{64 \text{ casillas}} = 0{,}15625.$$

En cambio, para el nivel experto:

$$\frac{99 \text{ minas}}{480 \text{ casillas}} = 0{,}20625.$$

El autor plantea una primera actividad de ampliación para los alumnos: ¿cuántas minas debería haber en el modo expero para que la dificultad sea la misma que en el modo principiante?.

El autor plantea dedicar tres sesiones a esta actividad:

Primera sesión: descubriendo el juego.

Los primeros diez minutos de la sesión se van a emplear en enseñar el Buscaminas para aquellos alumnos que no lo conozcan, el profesor explicará las reglas del juego y mostrará alguna partida con los razonamientos que se van siguiendo. Los siguientes diez minutos se va a dejar a los alumnos que descubran el juego por su cuenta. El resto de la sesión se plantea como una competición tanto por grupos como individualmente, de forma que el ganador es el que consiga resolver el juego en el menor tiempo posible.

Segunda sesión: diseñando nuestro buscaminas.

Para esta sesión el autor propone repartir a los alumnos una hoja con una cuadrícula de 8×8. En ella, los alumnos deberán colocar diez minas y luego rellenar la cuadrícula con los números que se muestran al marcar una de las casillas. Una vez los alumnos hayan creado su propio Buscaminas, se pondrán por parejas y, en otra cuadrícula nueva, deberán jugar al Buscaminas que ha creado su compañero: se marcan casillas y el compañero, con su hoja solución delante, le va indicando qué esconde dicha casilla.

Tercera sesión: reflexiones de un buen TEDAX.
En esta sesión el autor plantea algunos problemas matemáticos más complicados. Por ejemplo, plantea la siguiente cuestión: si se descubren todas las casillas del tablero y se suman todos los números que hay en él, ¿cómo deberían situarse las bombas para que la suma sea lo más pequeña posible?¿cuál sería dicha suma?¿cómo deberían situarse las bombas para que la suma sea lo más grande posible?¿cuál sería dicha suma?. Luego, el autor propone calcular cuáles son las probabilidades de que, en el primer movimiento, descubras una bomba. O con un tablero ficticio, calcular las probabilidades de que en cierta casilla haya una bomba.

Al final del artículo el autor señala que se podría hacer una actividad, en conjunto con la asignatura de informática, en la que diseñar un tablero de Buscaminas en una hoja de cálculo, de modo que solo haga falta colocar las bombas y el programa escriba automáticamente los números.

3.3. Mathigon

A los alumnos les motiva el uso del ordenador, móvil o videoconsolas. Hay una gran cantidad de recursos online con los que podemos introducir estos elementos motivantes en el aula, con fines educativos. Por ejemplo, es conocido el videojuego *Brain Training*. Es un videojuego con una gran cantidad de problemas y juegos matemáticos. La desventaja de este videojuego es que es necesario tener una videoconsola para poder jugar a él. Por tanto, en esta sección se va a mostrar una página web, de libre acceso, en la que hay una gran cantidad de actividades muy interesantes.

La página que se propone es **Mathigon**, Mathigon [s.f]. Esta página cuenta, en un primer momento, con una ventana llamada *Polypad*. En esta ventana tenemos una gran cantidad de **recuros manipualtivos**. Por ejemplo, tenemos regletas, polígonos, pentominós, el tangram, fichas con expresiones algebraicas, balanzas para trabajar ecuaciones, etc. Todos estos recursos se pueden utilizar para guiar a los alumnos con el material manipulativo o, en caso de no disponer de dicho material, se pueden plantear actividades en la sala de informática para que los alumnos trabajen con recursos manipulativos de manera online.

A mayores de esta herramienta, esta página cuenta con una gran cantidad de cursos muy interesantes sobre diversos temas relacionados con matemáticas. Por ejemplo, geometría euclídea, simetrías, trigonometría, sucesiones, etc. Todos estos cursos están explicados de manera entretenida para hacerlo llamativo ante los ojos de los estudiantes.

Por último, el motivo por el que se incluye esta página web en este trabajo es porque tiene una gran cantidad de juegos para poder poner en práctica muchos contenidos del currículo. Por ejemplo, en esta página está implementado el famoso juego de mesa *The Genius Star*. Este juego consiste en tener que rellenar una estrella con unas piezas de diferentes tamaños, habiendo bloqueado unas casillas en función de los resultados de unos dados. Con este juego se puede trabajar de una manera divertida la visión espacial. También hay implementados juegos para trabajar fracciones, coordenadas cartesianas, geometría, etc.

A mayores de todos estos juegos, en la página también hay actividades lúdicas que se pueden llevar al aula. Por ejemplo, en una de estas actividades, nos enseñan a crear los sólidos platónicos y arquimedianos con **origami**, explicando cuáles son los dobleces que hay que realizar y dando la opción de descargar plantilla, en el caso que se necesite. Otra actividad está preparada para poder crear una gymkana matemática en el instituto con la temática de búsqueda del tesoro. En esta gymkana hay juegos de criptografía, teoría de grafos, juegos combinatorios, etc.

En resumen, *Mathigon* es una página web con una gran cantidad de recursos digitales que se pueden usar en aula, nos permite usar materiales manipulativos de manera online en el caso de que no tengamos el material en físico y, por último, tiene una gran cantidad de juegos matemáticos con los que trabajar contenidos del currículo de manera divertida.

Capítulo 4

Experiencia en el Grupo de Innovación Docente de la UVa "Dinamización de la Comunidad Matemática en el Entorno de la UVa"

Este proyecto tiene varias iniciativas activas. La primera es la mejora de los estudios mediante la integración de los alumnos del grado en matemáticas a través de un programa de tutores personalizado. La otra iniciativa es la de conseguir una coordinación con profesores de secundaria y egresados de matemáticas. El objetivo que persiguen estas iniciativas es común: dar visibilidad a las matemáticas en el entorno de la UVa y conseguir una mejora docente, tanto en los centros de educación secundaria como en la universidad.

Dentro de este programa se ofrecen conferencias de diversos temas, todos ellos relacionados con las matemáticas, para que los centros de educación secundaria puedan solicitarlas. Mi contribucción en este grupo es ofertar una de estas conferencias. La conferencia que yo oferto trata sobre *Juegos de estrategia* y ya es el segundo año que se ofrece. En este capítulo se explicará cuál es la experiencia personal en el uso de estos juegos en el aula.

Las conferencias tienen una duración de una sesión, una hora aproximadamente. Los alumnos a los que va dirigida son alumnos de educación secundaria, de segundo a cuarto de la ESO.

Debido a la corta duración, la conferencia suele consistir en lo siguiente: una breve introducción sobre lo que son los juegos de estrategia y los siguientes juegos: *el quitafichas*, *la margarita* y *círculos y cuadrados* . No obstante, esto varía dependiendo de la edad y el grupo de alumnos, en ocasiones no se consigue llegar a todos estos juegos pero, en cambio, en otras ocasiones da tiempo a dejar planteado algún juego más. En esta última situación, el juego que se plantea es *fichas en cuadrado*.

Figura 4.1: Juego círculos y cuadrados en una conferencia.

Los criterios para haber seleccionado estos juegos son la dificultad y, sobretodo, la variedad. Con estos tres juegos se pueden enseñar tres estrategias diferentes a la hora de afrontar un juego, o como se ha visto en este trabajo, como poder afrontar un problema matemático, gracias a la gran relación que guardan. Con el quitafichas los alumnos aprenden la estrategia de **empezar el problema por el final**, con la margarita los alumnos aprenden el **uso de las simetrías** y con círculos y cuadrados los alumnos **relacionan elementos de la vida cotidiana con las matemáticas**, a la vez que se pone un ejemplo de juego en el que solo importan las condiciones iniciales.

La **metodología** que se usa en esta conferencia es la de **aprendizaje basado en problemas**. Los alumnos están sentados por parejas, debido a que los juegos son para dos jugadores y de esta manera se fomenta **el aprendizaje colaborativo**. En un primer momento se le explica al alumno el juego, las reglas y cómo se gana. Se deja tiempo para que los alumnos jueguen y vayan descubriendo, de forma autónoma las estrategias ganadoras. La estrategia ganadora no se descubre de repente, se necesitan varios pasos previos en los razonamientos, como hemos visto en el capítulo 2. Una vez la mayoría de los alumnos han conseguido descubrir uno de estos pasos, se le explica a toda la clase cuál es este paso y cuál ha sido el razonamiento que se ha seguido para llegar a él. De esta forma se pretende que ningún alumno se pierda en la sesión y todos puedan participar.

El **rol del docente** en esta conferencia es el de **guía del aprendizaje**. Una vez se han explicado los juegos, el docente se acerca a las parejas, resolviendo las dudas que les puedan surgir y refutando o avalando los razonamientos de los alumnos. La forma en la que se refutan los argumentos de los alumnos es mediante retos. La razón es que el alumno sabe que si ha llegado a la estrategia ganadora debería ganar. En el caso de que su estrategia no sea la correcta, el docente conseguirá ganar al alumno, haciendo que se de cuenta por sí mismo de que su razonamiento es incorrecto.

Otra ventaja de que el docente use los retos con los alumnos es que **aumenta la motivación** del alumno y **fomenta el trabajo en equipo**. En un primer momento, los alumnos que componen una pareja se ven como rivales. Tras los primeros retos del docente, la pareja se convierte en un equipo cuyo objetivo es vencer al docente. Notar que este objetivo siempre es muy motivador para los alumnos. Además, llegados a este punto, nosotros como docentes ya hemos conseguido nuestro objetivo: para que los alumnos consigan vencernos necesitan llegar a razonar la estrategia ganadora.

Todo esto hace que los alumnos estén motivados y muestren mucho interés por estos juegos. De hecho, es común ver alumnos reticentes al inicio de la sesión y al terminar, se acercan y piden algún juego para poder hacerlo en casa o hacen comentarios como: "prepárate, la próxima vez que vengas te pienso ganar en todo". También es usual encontrar alumnos desmotivados con las matemáticas, estos alumnos al comienzo de la conferencia se muestran desanimados y están totalmente seguros de que no van a conseguir hacer nada. En numerosas ocasiones, estos alumnos son los que mejor resuelven los juegos. Al final de la sesión estos alumnos tienen mucha más confianza en si mismos, consiguiendo romper, aunque sea por un momento, la **ansiedad matemática** que sufren.

Dependiendo del grupo y de la edad de los alumnos a veces es necesario dar pistas o guiar a los alumnos en el camino a seguir. Las pistas más comunes son las siguientes:

- Al retar a los alumnos, estos ven la forma en la que juega el docente, lo que les ayuda a pensar cuál es la estrategia que se esta siguiendo. Esta pista sirve para todos los juegos.

- En el *quitafichas* lo común es que los alumnos descubran rápidamente que si dejas al rival con tres fichas has ganado, en la modalidad de que gana el que se lleva la última. En este punto muchos alumnos se atascan y no saben continuar el problema. La pista que se da es hacer ver a los alumnos que lo han hecho es razonar por el final y que deben seguir haciéndolo, ¿cuál es el paso previo a dejar tres fichas? ¿cuántas fichas tienes que tener en tú turno para poder dejar tres?.

- En *la margarita* los alumnos descubren que la idea es dejar al rival con pétalos separados, aunque no saben cómo hacerlo. La pista consiste en hacer ver a los alumnos que si dejan al rival una margarita simétrica en casos sencillos has ganado, por ejemplo, dos pétalos separados, cuatro pétalos separados, etc. Tras esto, se les dice que si dejas al rival una margarita simétrica con cuatro pétalos juntos a cada lado has ganado y se le pide descubrir cómo se tiene que jugar para ganar en esta situación.

- En *círculos y cuadrados* la pista que se les da es la identificación que se dió: el círculo como signo positivo y el cuadrado como signo negativo.

Cada alumno, o pareja de alumnos, siguen unas líneas de razonamiento diferentes. Si analizamos los errores que cometen los alumnos, vemos que muchos de estos errores se repiten en muchos de los grupos, independientemente de la edad. Lo interesante es analizar el por qué de estos errores, intentando averiguar cuál es la causa que los provocan. Algunos de ellos son los siguientes:

- En el *quitafichas* en la modalidad de que gana el jugador que se lleva la última ficha, es común que las primeras soluciones que proponen los alumnos sean del estilo: “hay que dejar impares al rival”. Al preguntarles por qué opinan esto, el argumento principal es porque ya han descubierto que si dejas tres fichas al rival, ganas. El error que se comete es pasar directamente a la generalización: como tres es impar, hay que conseguir dejar impares. Una forma para hacer ver a los alumnos que este razonamiento es erróneo es la siguiente: si a mi me dejas cinco fichas, quito dos y te dejo a ti con tres y, como me acabas de decir, has perdido.

- También en el *quitafichas* es común ver que a los alumnos se le ocurren estrategias como hacer lo mismo o lo contrario que el rival. Realmente en el ejemplo de diez fichas y poder quitar una o dos, esto no está tan lejos de la solución. Quitando el primer movimiento, el resto del juego se puede entender así. Para hacer ver a los alumnos que estos razonamientos son erróneos, se les puede retar y comenzar nosotros, en este punto, ya vimos en 2.1.1 que siempre ganábamos, independientemente si hacen lo mismo o lo contrario que nosotros. Esto sirve si gana el que se lleva la última, en la otra modalidad simplemente tenemos que dejar empezar a los alumnos.

- El juego de la *margarita* se plantea después del quitafichas, lo que provoca el siguiente error. En ambos juegos hay que quitar pétalos o fichas con el objetivo de quitar la última. Es común comentarios como: “pues lo mismo pero con once pétalos en vez de diez”. La forma de que los alumnos entiendan la diferencia es con el siguiente ejemplo: en el quitafichas, si quedan dos fichas siempre las puedes coger y ganar. En cambio, en la margarita si quedan dos pétalos separados, solamente puedes coger uno y el rival se llevará el último, ganando. De esta manera, a mayores de estar corrigiendo ese error, estamos haciendo ver a los alumnos la importancia de tener pétalos juntos o separados.

- Otro error común en *la margarita*, una vez que los alumnos han descubierto que la clave es intentar dejar pétalos separados, es que la estrategia ganadora es la siguiente: cuando el rival quite algún pétalo, dejas un pétalo separado sin quitar y quitas pétalos ahí. Como se puede ver, la idea está bien encaminada: dejar pétalos separados. La forma de explicarles que esta estrategia no funciona es que aunque tu dejes un pétalo en medio sin quitar, ¿qué ocurre si el rival quita ese pétalo?.

- En *círculos y cuadrados* los errores vienen de que el ganador del juego solamente depende de las condiciones iniciales, entonces, cualquier estrategia que se les ocurra a los alumnos funciona si no cambian las condiciones iniciales. Por ejemplo, alguna de estas estrategias es: quitar todos los cuadrados al principio, quitar siempre figuras iguales, etc. La forma de hacer ver que estas estrategias no funcionan es simple, si el alumno quiere empezar, creas una configuración de juego que siempre gane el segundo y viceversa.

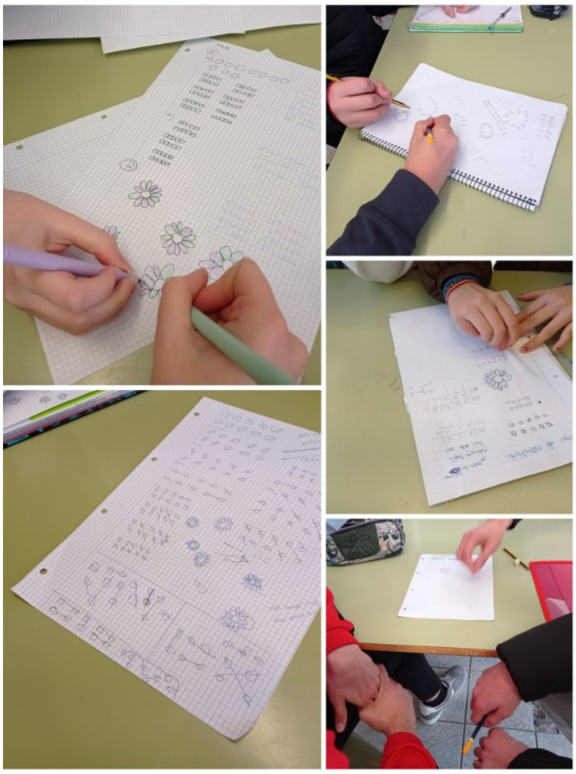

Figura 4.2: Hojas de alumnos tras una sesión.

Por último, aunque no esté relacionado con estas conferencias, en el periodo de prácticas del máster, se hicieron actividades con *Wordle y Nerdle*, vistos en 3.1. Estas actividades se plantearon en días señalados en los que faltaban muchos alumnos por diversas razones. Se planteaban como una competición en la que se jugaban en todas las modalidades de Wordle y en varias del Nerdle. En la pizarra digital del aula se proyectaba una hoja de cálculo con las puntuaciones de los alumnos en tiempo real. De esta manera, hacemos ver a los alumnos la utilidad que pueden llegar a tener estas hojas de cálculo.

En el transcurso de la competención se ayudaba a los alumnos, dando los razonamientos que hemos visto anteriormente en este trabajo. Esta actividad motivaba en gran medida a los alumnos, consiguiendo introducir razonamientos y herramientas matemáticas de una manera divertida.

Bibliografía

Alonso Santamaría, Diego. (2021). *El Buscaminas, aplicación lúdica de las matemáticas*, Suma **98**, 35-44.

Bright,G., J. Harvey & M.Wheeler (1985), *Learning and mathematics games.* Journal for research in mathematics education, Monograph number 1, Reston, National Council of Teachers os Mathematics.

Butler, T. (1988), *Games and simulations: Creative educational alternatives*, TechTrends, **33**, núm. 4, 20-23.

Corbalán, F. (1996), *Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de problemas*, Suma, **23**, 21-32.

Ernest, P. (1986), *Games. A rationale for their use in the teaching of mathematics in school*, Mathematics in School, **15**, núm. 1, 2-5.

Gairín, J. (1990), *Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas,* Educar, **17**, 105-118.

González Peralta, Molina Zavaleta, & Sánchez Aguilar. (2014, diciembre). *La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas*. Educación Matemática, **26**. Recuperado 6 de mayo de 2022, de http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v26n3/1665-5826-ed-26-03-00109.pdf

Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza.*

Humble, Steve & Nishiyama, Yutaka. (2015, septiembre). *Humble-Nishiyama Randomness Game - A New Variation on Penney's Coin Game*.

KenKen Puzzle Official Site (s. f.). Recuperado 4 de mayo de 2022, de https://www.kenkenpuzzle.com/

Killer Sudoku online. (s. f.). Recuperado 4 de mayo de 2022, de https://sudoku.com/killer

Losada Liste, Rafael (s. f.). *La simetría del Nim*. GeoGebra. Recuperado 3 de mayo de 2022, de https://www.geogebra.org/m/xfnvruyk

Mathigon. (s. f.). Recuperado 6 de mayo de 2022, de https://es.mathigon.org/

Morales, Miguel Ángel (s. f.). *El juego de Penney: tirando monedas con curioso resultado*. Cultura científica. Recuperado 3 de mayo de 2022, de https://culturacientifica.com/2013/06/21/el-juego-de-penney-tirando-monedas-con-curioso-resultado/

Nerdle. (s. f.). Recuperado 5 de mayo de 2022, de https://www.nerdlegame.com/

Oldfield, B. (1991), *Games in the learning of mathematics part 1: a classification*, Mathematics in School, **20**, núm. 1, 41-43.

Sadornil Renedo, Daniel. (2021). *¿A qué quieres que te gane?*, Suma **98**, 59–67.

Salvador, A. (2012). *El juego como recurso didáctico en el aula de Matemáticas*, Universidad Politécnica de Madrid.

Smith, Margaret Schwan, and Mary Kay Stein. (1998). *Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice.* Mathematics Teaching in the Middle School **3**, 344–50.

Torres Bello, Victoria. (s. f.). *El rincón del maestro*. Recuperado 29 de abril de 2022, de https://www.rinconmaestro.es

Wardle, John. (s. f.). *Wordle*. Recuperado 5 de mayo de 2022, de https://wordle.danielfrg.com/