UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

LA NOCIÓN DE DETERMINANTE DE UNA MATRIZ Y SUS PROPIEDADES Y OTROS RESULTADOS QUE CASI SIEMPRE APARECEN SIN DEMOSTRACIÓN EN LOS LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: FERNANDO PADILLA GARCÍA

Tutor: JOSE MARÍA CANO TORRES

Valladolid, junio de 2022

Índice

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de este trabajo vamos a centrarnos en estudiar la definición de determinante de una matriz cuadrada y sus propiedades, donde para ello vamos a desarrollar otros resultados que desde nuestro punto de vista aparecen en los libros de texto de secundaria sin demostraciones y con una mínima justificación que produce un aprendizaje en el aula donde los alumnos no comprenden de manera adecuada los contenidos estudiados. Además, en este trabajo desarrollaremos una propuesta didáctica que suplan estas deficiencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje demostrando que todas las nociones que vamos a desarrollar pueden tratarse de forma rigurosa a nivel de secundaria.

Para lograr todo esto, vamos a estructurar este trabajo principalmente en cuatro grandes bloques que nos van a permitir desarrollar un desarrollo óptimo del estudio del determinante en la etapa de bachillerato.

En primer lugar, se llevará a cabo un análisis de los contenidos estudiados dentro de las unidades correspondientes al estudio de las matrices en el segundo curso de bachillerato, comparando los contenidos correspondientes a las dos modalidades de bachillerato donde se introducen por primera vez el estudio de las matrices. Estableceremos las principales diferencias entre ambos cursos junto con los objetivos generales establecidos para la etapa académica de bachillerato y los objetivos didácticos marcados para la asignatura en la que vamos a llevar a cabo la propuesta didáctica, desarrollando aquellos objetivos en los cuáles nuestra propuesta va a estar más enfocada, justificando la importancia que tiene su cumplimiento.

Después, se realiza un estudio exhaustivo de todo el contenido que vamos a abordar en la propuesta didáctica. Comenzamos con un desarrollo de la historia del Álgebra y el determinante, centrándonos en los personajes que son considerados los más influyentes dentro de la historia del Álgebra y la noción del determinante de una matriz cuadrada, como por ejemplo Leibniz o Gauss. Después, desarrollaremos los principales conceptos y resultados que nos van a permitir poder definir el determinante y demostrar sus propiedades, donde finalmente vamos a describir de forma rigurosa la interpretación geométrica del determinante, estableciendo la relación existente entre el área y el volumen generado por vectores. Por último, vamos a centrarnos en el programa Maxima, describiendo las principales funciones y comandos que nos permiten manejar las matrices, apreciando así la importancia que tiene el desarrollo de las nuevas tecnologías en el aula.

En el tercer bloque, vamos a realizar un análisis comparativo de algunos de libros de texto de bachillerato de matemáticas en los que se estudian las matrices y el determinante, centrándonos en la estructura de cada libro, la forma de abordar todos los contenidos relativos a las unidades correspondientes a las matrices y las demostraciones y justificaciones de cada uno.

En el cuarto bloque elaboramos la propuesta didáctica para la enseñanza de las matrices y el determinante en el aula, donde vamos a desarrollar todas las diferentes partes que constituyen una unidad didáctica, centrándonos en cubrir las deficiencias que desde nuestro punto de vista se producen en el aula con la enseñanza la definición de determinante. Vamos a exponer todos los conocimientos necesarios que se requieren para su impartición y su relación con los cursos posteriores, que en este caso corresponde con la etapa universitaria donde la importancia de las matrices es fundamental, así como el uso de Maxima que permitirá observar a los alumnos la importancia que tienen las matemáticas en las nuevas tecnologías y en la comodidad que representa el uso de la informática para poder operar con matrices.

2. ANÁLISIS NORMATIVO

Para llevar a cabo la realización de una propuesta didáctica, vamos a realizar un análisis normativo del estudio de las matrices en secundaria y un desarrollo del contenido establecido desde la Institución Pública de la educación.

El contenido de matrices se ubica dentro del bloque de *Números y Álgebra* junto con la resolución de ecuaciones de sistemas lineales en las asignaturas de *Matemáticas II* y *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II* en el segundo curso de Bachillerato dentro de las modalidades del ámbito *Científico-Tecnológico* y de *Ciencias Sociales*.

Primero vamos a establecer los Objetivos Generales de la etapa de Bachillerato y después vamos a describir los contenidos marcados en las unidades correspondientes al estudio de matrices de las dos materias mencionadas anteriormente.

Objetivos Generales de Bachillerato

Para la etapa de Bachillerato se han concretado una serie de objetivos generales que se pueden extender a todos los cursos y todas las materias correspondientes a la etapa académica de los cursos de Bachillerato.

Los Objetivos Generales de la etapa de Bachillerato que establece el BOE (*Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre*), se expresan a continuación:

a) Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española, así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.

b) Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.

c) Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.

d) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.

e) Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma

f) Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.

g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.

h) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.

i) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.

j) Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.

k) Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.

l) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.

m) Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.

n) Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.

Análisis de contenidos de las matrices en Bachillerato

En este apartado vamos a exponer los contenidos y criterios de evaluación que se establece en el BOCyL (*ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo*) del bloque II de *Números y Álgebra* para las asignaturas de *Matemáticas II* y *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II* donde se desarrolla el contenido correspondiente a matrices.

Los contenidos y criterios de evaluación establecidos dentro del Bloque II de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II* son los siguientes:

Contenido
• Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas. Clasificación de matrices. Operaciones con matrices. Rango de una matriz. Matriz inversa. Método de Gauss. • **Determinantes hasta orden 3**. • Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas en contextos reales. • Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales (hasta tres ecuaciones con tres incógnitas y un parámetro). Método de Gauss. • Resolución de problemas de las ciencias sociales y de la economía. Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Resolución gráfica y algebraica. • Programación lineal bidimensional. Región factible. Determinación e interpretación de las soluciones óptimas. Aplicación de la programación lineal a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos

Criterios de evaluación
1. Organizar información procedente de situaciones del ámbito social utilizando el lenguaje matricial y aplicar las operaciones con matrices como instrumento para el tratamiento de dicha información. Aplicar el método de Gauss para resolver sistemas lineales y calcular la matriz inversa. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, sistemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.

Los contenidos y criterios de evaluación establecidos dentro del Bloque II de *Matemáticas II* son los siguientes:

Contenido
• Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. • Clasificación de matrices. Operaciones. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales. • **Determinantes. Propiedades elementales. Menor complementario y matriz adjunta**. Rango de una matriz. Matriz inversa. • Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. • Clasificación de matrices. Operaciones. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales • Ecuaciones matriciales. Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, posiblemente dependientes de un parámetro. • **Método de Gauss. Teorema de Rouché-Frobenius. Regla de Cramer.** • Aplicación a la resolución de problemas.

Criterios de evaluación
1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones. Resolver ecuaciones matriciales sencillas. Obtener el rango de una matriz y la matriz inversa (esta última hasta orden 3), tanto por el método de Gauss como usando determinantes.

En los contenidos y los criterios una de las principales diferencias entre las dos asignaturas se encuentra en el estudio de los determinantes. En la materia de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II* aparece definido el estudio del determinante y sus aplicaciones hasta las matrices cuadradas de orden tres sin definir el determinante de una matriz de orden n, mientras que en los contenidos de *Matemáticas II* se estudia el determinante de orden n, definiendo el menor complementario y la matriz adjunta de un elemento de una matriz, así como el cálculo del rango usando determinantes, el teorema de Rouché-Frobenius, el método de Cramer y el cálculo de la inversa utilizando determinantes hasta matrices de orden tres. El teorema de Rouché-Frobenius y el método de Cramer son dos resultados fundamentales para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, donde se permite discutir y resolver sistemas usando determinantes, lo que supone una ampliación del método de Gauss. El método de Cramer tiene la particularidad de presentar la solución de un sistema de ecuaciones lineales como una fórmula cerrada y no mediante un proceso o algoritmo que ha de llevarse a cabo

Otra de las diferencias que se pueden apreciar es el estudio de la programación lineal bidimensional y el estudio de regiones factibles que aparecen descritos en los contenidos de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*, ya que está enfocado al estudio de las matemáticas aplicadas en el ámbito de la economía, mientras que el contenido de *Matemáticas II* está más "relacionado" al estudio de las matrices dentro del ámbito *científico-tecnológico.*

Más adelante, desarrollaremos un análisis comparativo de una selección de libros de texto utilizados en ambas asignaturas donde vamos a poder apreciar estas diferencias de una manera mucho más exhaustiva.

Como nuestra propuesta didáctica va a estar enfocada al estudio exhaustivo de la definición rigurosa de determinante y sus propiedades analíticas y geométricas, vamos a desarrollar esta propuesta didáctica para un curso de segundo de bachillerato dentro del ámbito *científico-tecnológico*, y para ello vamos a enumerar los objetivos didácticos planteados dentro del bloque de contenidos comunes de la asignatura de *Matemáticas II*.

<u>Objetivos didácticos del área de *Matemáticas II* de 2^o de Bachillerato</u>

Los objetivos didácticos establecidos por el BOCyL (*ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015*) para el bloque de contenidos comunes son los siguientes:

1. Expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.
2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
3. <u>Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos</u>.

4. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema o en una demostración, con el rigor y la precisión adecuados.
5. Planificar adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado.
6. <u>Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de:</u>
    a) <u>la resolución de un problema y la profundización posterior;</u>
    b) <u>la generalización de propiedades y leyes matemáticas;</u>
    c) <u>la profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.</u>
7. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados.
8. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.
9. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.
10. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
11. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.
12. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones similares futuras.
13. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.
14. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción

De todos los objetivos didácticos enumerados, este trabajo va a estar más enfocado a desarrollar los objetivos número tres y número seis, realizando una propuesta didáctica centrada en demostrar todos los resultados y propiedades correspondientes a la definición del determinante y sus aplicaciones, justificando en todo momento todos los razonamientos y los pasos seguidos.

Para demostrar los resultados y justificar las definiciones que desarrollaremos a continuación, la profundización en la resolución de problemas y la generalización de las propiedades del determinante van a ser un aspecto clave en nuestra propuesta didáctica. Todos los resultados y resoluciones que se plantearán van a estar justificadas en todo momento, procurando dar respuesta a los contenidos establecidos dentro de las normativas vigentes y a las necesidades educativas correspondiente, donde estableceremos criterios y normas que permitirán una correcta puesta en práctica de una unidad didáctica dentro de un aula.

En la propuesta didáctica que realizaremos va a estar enfocada en cumplir el siguiente objetivo didáctico:

Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de:

a) la resolución de un problema y la profundización posterior;
b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas;
c) *la profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.*

Para una adecuada formación de matemáticas en los cursos de bachillerato, desde mi punto de vista considero que de entre todos los objetivos presentados anteriormente, este es uno de los más importantes ya que uno de los objetivos principales no es únicamente la resolución de problemas o el desarrollo de métodos “algorítmicos”, sino también una reflexión de los pasos seguidos y una profundización exhaustiva que nos permitan un mejor entendimiento de los conocimientos estudiados.

También nos centraremos en el uso de herramientas tecnológicas, que nos van a permitir realizar cálculos numéricos y manejar expresiones algebraicas que ayudarán a entender mejor el cálculo de determinantes en los casos en los que su resolución sea un poco “laboriosa” y podremos calcular la expresión de determinantes de orden cuatro u orden cinco, el cálculo del rango de matrices, la inversa de una matriz y otros muchos aspectos que podremos desarrollar de una manera más exhaustiva con el uso de programas y recursos tecnológicos.

3. ANÁLISIS DE CONTENIDO

A lo largo de todo este apartado, vamos a llevar a cabo un estudio exhaustivo de los contenidos que vamos a abordar en nuestra propuesta didáctica, comenzando por un breve desarrollo de la historia del Álgebra y la historia del determinante, centrándonos en los matemáticos que son considerados más influyentes dentro del Álgebra. A continuación, abordaremos el contenido relativo a la definición rigurosa de determinante, donde explicaremos los aspectos fundamentales de las permutaciones y transposiciones que nos van a permitir definir el determinante y demostrar sus propiedades. Por último, describiremos la interpretación geométrica del determinante y terminaremos este apartado describiendo de forma general el programa Maxima y las funciones y los principales comandos que nos permiten manejar las matrices para el desarrollo de los conocimientos que se estudiarán en la propuesta didáctica.

3.1 PERSPECTIVA HISTÓRICA

3.1.1 HISTORIA DEL ÁLGEBRA

El objetivo principal del álgebra clásica ha sido la resolución de sistemas de ecuaciones, por lo que, desde esta perspectiva, el álgebra tiene más de 4000 años de antigüedad. En la Grecia clásica existía un gran predominio de la geometría.

Un poco después, en el siglo III Diofanto de Alejandría escribe el primer tratado de álgebra que conocemos. En esta obra, en lugar de enunciar proposiciones o teoremas, escribió una serie de problemas en la que resuelve algunos sistemas de ecuaciones algebraicas usando notaciones similares a las utilizadas actualmente con los polinomios.

En la Edad Media en la India introducen el cero y los números negativos mientras que los árabes consiguieron importantes progresos dentro del álgebra.

A principios del siglo IX, Bagdad tenía una especie de Universidad llamada *La Casa de la Sabiduría.* Uno de sus miembros más destacados fue el matemático y astrónomo al-Jowarizmi (780-850). Uno de sus tratados más conocidos es *Hisab al-jabr wa'l muqabalah*, de influencia india y greco-alejandrina, donde a partir del título de esta obra se ha definido la actual denominación del álgebra. En esta obra se define la manera de resolver seis tipos de ecuaciones de segundo grado.

Los árabes también resolvieron algunas ecuaciones cúbicas a las que dieron una justificación geométrica. Entre los que investigaron las ecuaciones cúbicas, se encuentra **Omar Khayyam** (1050-1123), quien definió el álgebra como *la ciencia de resolver ecuaciones*. Esta definición se mantuvo casi hasta finales del siglo XIX. El álgebra árabe se difundió, a través de España, hacia Europa.

En el siglo XVI en Italia se desarrolla un avance significativo en el estudio y la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. En esa época, los descubrimientos científicos se solían mantener en secreto con el fin de ganar en los torneos que se realizaban, en los que se planteaban problemas científicos.
Niccolo Tartaglia (1499-1557) es considerado el primero en hallar un método general de resolución de ecuaciones de tercer grado, manteniéndolo en secreto, pero **Gerolamo Cardano** (1501-1576), médico, astrólogo y matemático, consiguió que Tartaglia le confiara su secreto. Así, fue Cardano quien publicó como propio el descubrimiento, lo que dio lugar a un gran conflicto entre ambos La solución de las ecuaciones de cuarto grado fue descubierta por el antiguo secretario de Cardano, **Ludovico Ferrari** (1522-1565).

Aunque el contenido del álgebra iba avanzando, la notación simbólica aún no estaba suficientemente desarrollada. El avance en el simbolismo algebraico se suele atribuir a **François Viète** (1540-1603), que fue el primero en utilizar letras para simbolizar tanto las incógnitas como las constantes en las ecuaciones algebraicas. No obstante, muchos personajes aseguraban que su lenguaje resultaba oscuro y difícil.
El matemático y filósofo francés **René Descartes** (1596-1650), en una de sus obras, trató las propiedades y transformaciones de las ecuaciones algebraicas, mejorando el simbolismo algebraico, haciéndolo mucho más parecido al actual.

En el siglo XIX, **Gauss** es considerado, junto con **Arquímedes** y **Newton**, uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos. De extraordinaria precocidad, en su tesis doctoral, presentada en 1799, cuando tenía 22 años, dio la primera demostración de lo que se ha llamado Teorema Fundamental del Álgebra:

Toda ecuación polinómica tiene, al menos, una solución en el campo complejo.

Galois (1811-1832), que murió a los 21 años en un duelo, desarrolló la Teoría de Grupos, aportación fundamental para la matemática actual.

Los británicos **Hamilton** (1805-1865), **Sylvester** (1814-1877) y **Cayley** (1821-1895) formalizaron la teoría de matrices, dándole estructura algebraica.

La teoría de determinantes, que venía del siglo XVIII (**Laplace** y **Vandermonde**), fue completada y formalizada por **Cauchy** en 1812.

Estas y otras muchas aportaciones fueron básicas para la aparición del álgebra abstracta, cuya culminación fue ya en el siglo XX. Esta álgebra contemporánea estudia las estructuras algebraicas que son sistemas de elementos entre los que se definen operaciones que cumplen ciertas propiedades. El estudio abstracto de tales estructuras supone un alto nivel de formalización y una enorme economía de pensamiento, pues los teoremas demostrados sobre la estructura abstracta son inmediatamente aplicables a cualesquiera de sus concreciones.
En los primeros pasos del álgebra, a la incógnita se le llamaba la "cosa". En aquel contexto *la cosa* era un número asociado a una magnitud concreta. En el álgebra moderna podríamos designar también la "cosa" a las variables que intervienen. Y se haría con mucha más propiedad que entonces, pues esas variables ahora representan matrices, funciones, proporciones, vectores u otros muchos objetos matemáticos.

3.1.2 HISTORIA DEL DETERMINANTE

Los determinantes hicieron su aparición en las matemáticas más de un siglo antes que las matrices. El término matriz fue creado por James Joseph Sylvester, tratando de entender que era "la madre de los determinantes".

Algunos de los que son considerados los matemáticos más importantes de los siglos XVIII y XIX contribuyeron al desarrollo de las propiedades de los determinantes. Muchos de los historiadores e investigadores afirman que la teoría de los determinantes fue originada por Leibniz (1646-1716) quién en 1693 utilizó un algoritmo equivalente al de los determinantes para poder resolver sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, hay quienes piensan que el matemático Seki Kowa utilizó los determinantes diez años antes para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

También Colin Maclaurin (1730) y Gabriel Cramer (1750) utilizaron el determinante para resolver sistemas de ecuaciones lineales y en 1772 Alexandre- Théophile Vandermonde realizó un estudio sistemático de los suyos.

En 1748, dos años después de la muerte Colin Maclaurin (1698-1746), se publicó su *Tratado de Álgebra*, donde exponía la resolución de sistemas de dos y tres ecuaciones con el mismo número de incógnitas, llegando a lo que actualmente conocemos como el determinante de una matriz de segundo y de tercer grado.

Por su parte, Cramer (1704-1752) publicó en 1750 el tratado de geometría *Introducción al análisis de las líneas curvas algebraicas*, donde proponía la solución de sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. El método es similar al publicado en el tratado de álgebra de Maclaurin, pero es más conocido por su claridad de notación y generalización.

En 1772 Vandermonde (1735- 1796) realizó la primera exposición lógica y formal de la teoría de los determinantes, reconociéndolos como funciones independientes. Describió una matriz que ahora lleva su nombre como la matriz cuadrada

$$\begin{pmatrix} a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 & a_4^0 & \dots & a_n^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \dots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & a_4^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

En 1772 Pierre-Simon Laplace (1749-1827) generalizó el método de Vandermonde para el desarrollo de los determinantes en productos de menores, y presentó el método general de la expansión de un determinante en términos de sus menores complementarios. Al año siguiente Joseph-Louis de Lagrange (1736- 1813) expuso la solución de determinantes de segundo y tercer orden y los utilizó para fines distintos al de la solución de ecuaciones simultáneas. En 1801 Carl Friedrich Gauss (1777-1855) utilizó la palabra determinante en su teoría de números.

En 1815 Cauchy publicó una memoria en la que mejoraba el desarrollo de Laplace; en ella proporcionaba la primera exposición sistemática de los determinantes mediante la disposición de los elementos en filas y columnas y la notación de los índices dobles a_{ij} , así como con el término ecuación característica para $p(\lambda)$, donde p representa un polinomio característico matricial.

Más tarde, Cayley y Sylvester contribuyeron notablemente al desarrollo de la teoría de os determinantes. Mejoraron la nomenclatura que se venía utilizando hasta el momento, adoptaron la doble barra vertical para designarlos y ampliaron su campo de aplicación. En un artículo publicado en 1855 Cayley dice:

“No obtuve la noción de matriz a partir de los cuaternios de Hamilton, fue directamente de la de determinante o como una forma conveniente de expresar las ecuaciones…”

Cayley y Sylvester ejercieron también su influencia en otros aspectos no menos relevantes como, por ejemplo, ayudando a cambiar la mentalidad medieval de la Universidad de Cambridge en lo que se refiere a admitir como alumnas a las mujeres; de hecho, una de las primeras y más eminentes discípulas de Sylvester fue Florence Nightingale, quien años después destacaría por su aportación a la mejora de las condiciones en los hospitales y en la atención médica en general.

3.2 PERMUTACIONES Y TRANSPOSICIONES

En este apartado del trabajo vamos a exponer de forma rigurosa todos los principales resultados y propiedades de las permutaciones y las transposiciones, demostrando en todo momento las proposiciones, teoremas y corolarios que vamos a desarrollar y justificando en cada momento los razonamientos y los pasos seguidos.

3.2.1 PERMUTACIONES

Dado un conjunto X no vacío, definimos S_X como el conjunto formado por todas las aplicaciones biyectivas de X en X y junto con la operación "composición de aplicaciones" S_X es un grupo, decir, verifica las siguientes propiedades:

1. La composición de dos aplicaciones biyectivas es una aplicación biyectiva.
2. La composición de aplicaciones es una operación asociativa.
3. La aplicación identidad en X, que representaremos por Id_X, es biyectiva.
4. Todas las aplicaciones biyectivas tienen inversa.

A partir de todas estas propiedades vamos a poder realizar un desarrollo justificado de todo el contenido y desarrollo de las permutaciones y el cálculo del índice de una permutación.

Definición
Llamaremos grupo simétrico de orden n al grupo de las biyecciones del conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ y lo denotaremos por S_n y a sus elementos permutaciones (de n elementos).

Por ejemplo, si consideramos el conjunto $X = \{1,2,3\}$ la siguiente biyección $\sigma: X \longrightarrow$ X

$$\begin{aligned} \sigma:\ X &\longrightarrow X \\ 1 &\longrightarrow 1 \\ 2 &\longrightarrow 3 \\ 3 &\longrightarrow 2 \end{aligned}$$

es una permutación del grupo simétrico S_3, donde $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$ y $\sigma(3) = 2$.
Como ejemplo de permutaciones, vamos a escribir todas las permutaciones del grupo simétrico S_3:

$$\sigma_1:\ \sigma_1(1) = 1,\ \sigma_1(2) = 2,\ \sigma_1(3) = 3$$
$$\sigma_2:\ \sigma_2(1) = 1,\ \sigma_2(2) = 3,\ \sigma_2(3) = 2$$
$$\sigma_3:\ \sigma_3(1) = 2,\ \sigma_3(2) = 1,\ \sigma_3(3) = 3$$
$$\sigma_4:\ \sigma_4(1) = 2,\ \sigma_4(2) = 3,\ \sigma_4(2) = 1$$
$$\sigma_5:\ \sigma_5(1) = 3,\ \sigma_5(2) = 1,\ \sigma_5(3) = 2$$
$$\sigma_6:\ \sigma_6(1) = 3,\ \sigma_6(2) = 2,\ \sigma_6(3) = 1$$

A partir de la construcción de todos los elementos del grupo S_3, podemos observar que tiene un total de 6 elementos. Entonces podemos preguntarnos si es posible conocer el número de elementos del grupo S_n, por lo que la respuesta es afirmativa y para ello vamos a demostrar el siguiente resultado:

Lema

El grupo S_n es finito de orden $n!$

Demostración

Una permutación $\sigma \in S_n$ puede aplicar el elemento 1 en cualquiera de los números $1,2, \ldots, n$.
Una vez elegida la imagen del elemento 1, el 2 se puede aplicar en cualquiera de los $n-1$ números restantes. Después, al igual que con el elemento 2, el 3 se puede aplicar en los $n-2$ números restantes. Podemos seguir sucesivamente hasta que las imágenes de los elementos $1, 2, \ldots, n-1$ hayan sido elegidas. El último elemento no seleccionado es la imagen de n, por lo que se obtiene que existen un total de $n(n-1) \ldots 1 = n!$ elementos de S_n.

Hasta ahora ya hemos definido el concepto de permutación y demostrado que el número de biyecciones del grupo S_n es $n!$, por lo que el siguiente paso que vamos a exponer es la representación de una permutación que nos pueda facilitar una manera más intuitiva para poder visualizar mejor las imágenes de una permutación.
Sea $\sigma \in S_n$ una permutación, una manera de poder representarla es mediante una representación matricial de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si tomamos la permutación $\sigma_3 \in S_3$ del ejemplo anterior, podemos expresarla como

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

donde se cumple que $\sigma_3(1) = 2$, $\sigma_2(2) = 1$ y $\sigma_3(3) = 3$.

Con estas notaciones, es fácil calcular la composición y la inversa de trasposiciones, ya que si tenemos las trasposiciones $\sigma_1, \sigma_2 \in S_5$ dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

las trasposiciones inversas y la composición $\sigma_2 o \sigma_1$ vienen dadas por

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 o \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2.2 TRANSPOSICIONES. ÍNDICE DE UNA PERMUTACIÓN

Definición

Se define una transposición como un ciclo de longitud 2. En forma matricial queda definida como

$$(i,j)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n\end{pmatrix}$$

intercambiándose los términos i y j, permaneciendo los demás elementos invariantes.

Proposición

Toda permutación $\sigma \in S_n$ se puede descomponer como un producto de transposiciones.

Demostración

Esta demostración la vamos a realizar por inducción. Para $n=2$, una permutación es S_2 es una transposición, por lo que se verifica lo anterior. Supongamos que para $n-1$ toda permutación se descompone en un producto de transposiciones y vamos a demostrarlo para n.

Sea $\sigma \in S_n$ una permutación, donde vamos a suponer los siguientes casos:

- Si $\sigma(n)=n$, entonces $\sigma|_{\{1,\dots,n-1\}} \in S_{n-1}$, por lo que como para $n-1$ se verifica lo anterior, entonces $\sigma=\sigma_1 \dots \sigma_r$ donde σ_i son transposiciones para $1 \leq i \leq r$
- Si $\sigma(n) \neq n$, denotamos $\alpha=\sigma(n)$ y vamos a definir la siguiente permutación $\beta=(\alpha,n)\sigma$. En esta nueva permutación tenemos que $\beta(n)=n$, así que podemos descomponer $\beta=(\alpha,n)\sigma=\tau_1 \dots \tau_r$ siendo τ_i transposiciones para $1 \leq i \leq r$.
  Entonces $\sigma=(\alpha,n)\tau_1 \dots \tau_r$, por lo que σ se puede descomponer como un producto de transposiciones.

Como ejemplo, si consideramos la permutación $\sigma \in S_7$ definida de la siguiente manera

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

vamos a realizar su descomposición en un producto de transposiciones.

$$(1,7)\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 7\end{pmatrix}$$

$$(2,6)(1,7)\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

$$(2,5)(2,6)(1,7)\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

$$(1,4)(2,5)(2,6)(1,7)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(1,3)(1,4)(2,5)(2,6)(1,7)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Finalmente hemos obtenido que $\sigma = (1,3)(1,4)(2,5)(2,6)(1,7)$.

Proposición

Si $Id = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r$ donde todos los σ_i son transposiciones para $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, entonces r es par.

Demostración

Si $r = 2$, entonces el resultado está probado. Por lo tanto, vamos a suponer que $r > 2$ y aplicaremos inducción. El producto de las dos primeras transposiciones $\sigma_1\sigma_2$ podemos expresarlas de una de las siguientes maneras:

$$(a, b)(b, a) = Id$$

$$(a, b)(a, c) = (b, c)(a, b)$$

$$(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$$

$$(a, b)(b, c) = (b, c)(a, c)$$

Si nos encontramos en el primer caso, obtenemos que $Id = \sigma_3 \dots \sigma_r$ y por la hipótesis de inducción $r - 2$ es par. En los otros tres casos restantes, se sustituye el producto de $\sigma_1\sigma_2$ de la izquierda por su igualdad en la parte de la derecha obteniendo un nuevo producto de r transposiciones que sigue dando como resultado la identidad, pero la primera aparición del número a está en la segunda transposición del producto. Seguidamente podemos repetir el mismo procedimiento para el producto $\sigma_2\sigma_3$, y como antes obtenemos un producto de $r - 2$ transposiciones que es igual a la identidad o un producto de r transposiciones donde la primera aparición de a se encuentra en la tercera transposición. Continuando sucesivamente con el mismo procedimiento o bien obtenemos un producto de $r - 2$ transposiciones que es igual a la identidad o bien obtenemos un producto igual a la identidad en la que la primera aparición del elemento a se encuentra en la última transposición, por lo que entonces no fija el elemento a, lo que contradice que dicho producto sea igual a la identidad. Finalmente, por inducción se tiene que $r - 2$ es par y por lo tanto r es par.

A partir de este resultado, vamos a demostrar un resultado clave que nos va a permitir dar una definición que nos va a resultar clave a lo largo de todo este trabajo.

Teorema

Sea $\sigma \in S_n$ y supongamos que $\sigma = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r = \beta_1\beta_2 \dots \beta_s$ siendo $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ transposiciones. Entonces se verifica que $(-1)^r = (-1)^s$.

Demostración

Como $Id = \sigma\sigma^{-1} = \alpha_1 \dots \alpha_r(\beta_1 \dots \beta_s)^{-1} = \alpha_1 \dots \alpha_r\beta_s^{-1} \dots \beta_1^{-1} = \alpha_1 \dots \alpha_r\beta_s \dots \beta_1$, entonces por el resultado anterior tenemos que $r + s$ es par o lo que es los mismo $(-1)^r = (-1)^s$.

Definición

Dada una permutación $\sigma \in S_n$ con $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$ siendo $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ transposiciones, se define el índice de σ como $Ind(\sigma) = (-1)^r$, pudiendo tomar únicamente los valores 1 o -1.

Decimos que σ es par si se puede expresar como un producto de un número par de transposiciones e impar en el caso contrario.

Como ejemplo, si consideramos la permutación $\sigma \in S_7$ del ejemplo anterior definida como

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como ya realizamos anteriormente, esta permutación se podía descomponer de la forma $\sigma = (1,3)(1,4)(2,5)(2,6)(1,7)$, por lo que el índice de σ es $(-1)^5 = -1$, siendo σ una transposición impar.

A partir de aquí, vamos a probar un resultado que nos va a permitir calcular el índice del producto de dos permutaciones, lo que nos va a ser de mucha utilidad después.

Teorema

Sean $\alpha, \beta \in S_n$ dos permutaciones, entonces tenemos que $ind(\alpha\beta) = ind(\alpha)ind(\beta)$.

Demostración

Supongamos que $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_r$ y $\beta = \beta_1 \dots \beta_s$ siendo α_i y β_j transposiciones, entonces tenemos que $\alpha\beta = \alpha_1 \dots \alpha_r\beta_1 \dots \beta_s$. Por tanto, $ind(\alpha\beta) = (-1)^{r+s} = (-1)^r(-1)^s = ind(\alpha)ind(\beta)$.

A continuación, vamos a definir el concepto de ciclo y realizar la descomposición de una permutación en ciclos, lo que nos va a ayudar a poder representar una permutación de una forma más "cómoda" y va a facilitar un método más práctico para el cálculo del índice de una permutación.

3.2.3 CICLOS. DESCOMPOSICIÓN DE UNA PERMUTACIÓN EN CICLOS

Definición

Una permutación $\sigma \in S_n$ se dice que es un ciclo de longitud r, donde $r \leq n$, si existe una sucesión $\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \in \{1,2, \dots, n\}$ de números distintos tales que

1) σ fija todo elemento distinto de $a_1, a_2, \dots, a_r$
2) $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{r-1}) = a_r , \sigma(a_r) = a_1$

A partir de esta definición, una manera más intuitiva de representar un ciclo es $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_r)$

Por ejemplo, la permutación $\alpha \in S_4$ definida como $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es un ciclo de longitud 3 y se puede escribir como $\alpha = (1\ 2\ 4)$.

Un ejemplo de permutación no cíclica es la siguiente:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Aunque $\alpha \in S_5$ no sea cíclica, podemos descomponerla como producto (composición) de dos ciclos disjuntos que podemos expresar de la siguiente manera:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 5\ 4)$$

Entonces nos podemos preguntar si podemos descomponer una permutación de la forma anterior, pero para ello vamos a dar unos conceptos y resultados previos que nos van a permitir dar una respuesta a esta cuestión.

Definición

Diremos que dos ciclos $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ y $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ de S_n son disjuntos si para todos $i, j,\ 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq m, a_i \neq b_j$. Es decir, cuando el conjunto de elementos que se mueven por α y el conjunto de elementos que se mueven por β son disjuntos.

Proposición

Ciclos disjuntos conmutan.

Demostración

Sean $\alpha, \beta \in S_n$ dos ciclos disjuntos que vienen definidos como

$$\alpha = (a_1\ a_2\ \dots\ a_r) \text{ y } \beta = (b_1\ b_2\ \dots\ b_s)$$

Entonces podemos hacer el producto de los dos ciclos anteriores de las dos formas:

1) $\alpha\big(\beta(i)\big) = i = \beta\big(\alpha(i)\big)$ si i no pertenece al conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, b_2, \dots, b_s\}$
2) $\alpha\big(\beta(a_k)\big) = a_{k+1} = \beta\big(\alpha(a_k)\big)$ para $1 \leq k \leq r$
3) $\alpha\big(\beta(b_k)\big) = b_{k+1} = \beta\big(\alpha(b_k)\big)$ para $1 \leq k \leq s$

donde hemos tenido en cuenta que $a_{r+1} = a_1$ y $b_{s+1} = b_1$, por lo que el producto de ciclos disjuntos es conmutativo.

Proposición

Toda permutación de S_n se puede escribir como producto de ciclos disjuntos. Además, esta descomposición es única.

Demostración

Consideramos un elemento $b_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\sigma(b_1) \neq b_1$ y vamos a considerar la sucesión $b_1, b_2 = \sigma(b_1), b_3 = \sigma^2(b_1), b_4 = \sigma^3(b_1), \dots$ hasta que volvamos a conseguir un número b_i de la sucesión anterior en, por ejemplo, m pasos, es decir, $\sigma^m(b_1) = b_i$ siendo b_i un término repetido de la sucesión anterior. Entonces se tiene $\sigma^m(b_1) = \sigma^r(b_1)$ con $r \leq m$ y como la permutación σ es biyectiva se tiene que $\sigma^{m-r}(b_1) = b_1$ y al ser $\sigma^m(b_1)$ el primer término repetido entonces tenemos que $r = 0$.

Entonces, el ciclo

$$\big(b_1, \sigma(b_1), \dots, \sigma^{m-1}(b_1)\big) = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$$

describe una parte de la permutación. Si en el resto de elementos del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ permanece invariante entonces σ es un ciclo y el resultado está demostrado. En caso contrario, si encontramos otro elemento que no permanece invariante, repetimos el proceso anterior y así sucesivamente. Después de un número finito de pasos se obtiene la descomposición.

Ejemplo

Sea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ una permutación de S_7, vemos que la permutación verifica

$$\sigma(1) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 7, \sigma(7) = 1$$

y que

$$\sigma(2) = 5, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 2$$

y por tanto se puede expresar como $\sigma = (1,3,4,7)(2,5,6)$ descomponiéndose como un producto de ciclos disjuntos.

Definición

Sea $\sigma \in S_n$, se define el orden de σ como el menor entero positivo m tal que $\sigma^m(a_i) = a_i$ para todo $a_i \in \{1, 2, \ \dots, n\}$.

Por ejemplo, en la permutación $\sigma = (1,3,4,7)(2,5,6)$ del ejemplo anterior, el orden de σ es 12 y verifica $\sigma^{12}(a_i) = a_i$ para todo $a_i \in \{1, 2, \ \dots, 12\}$.

La siguiente pregunta que nos podemos hacer es como calcular el orden de una permutación, donde para ello vamos a demostrar el siguiente resultado que nos va poder dar un criterio para poder calcularlo, demostrando primero el orden de un ciclo y después el orden de una permutación, y para ello vamos a usar la descomposición de una permutación en ciclos disjuntos que hemos demostrado anteriormente.

Proposición

a) El orden de un ciclo σ es la longitud del ciclo.
b) Sea $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r$ su descomposición en ciclos disjuntos. Entonces el orden de σ es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos σ_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$

Demostración

a) Sea $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_r) \in S_n$ un ciclo, entonces $\sigma(i) = i$ para todo i que no pertenezca al conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ y $\sigma(a_i) = \sigma(a_{i+1})$ para $i < r$ y $\sigma_r = a_1$.
Por tanto, $\sigma^r(i) = i$ para todo i no perteneciente al conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$. Además, se verifica que

$$\sigma(a_1) = a_2$$
$$\sigma^2(a_1) = \sigma(a_2) = a_3$$
$$\vdots$$
$$\sigma^r(a_1) = \sigma(a_r) = a_1$$

Lo mismo ocurre con todos los elementos del conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, por lo que el orden del ciclo es r.

b) Supongamos que el orden de una permutación $\sigma \in S_n$ es m, $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r$ es su descomposición en producto de ciclos disjuntos y $m_1, m_2, \dots, m_r$ es el orden de cada ciclo. Como $\sigma^m = Id$, entonces $\sigma_1^m\sigma_2^m \dots \sigma_r^m = Id$ ya que el producto de ciclos disjuntos conmuta. Como son permutaciones disjuntas, tenemos que $\sigma_i{}^m$ deja los elementos fijos para $i = 1, \dots, r$, por lo que $m_1, m_2, \dots, m_r$ dividen a m, luego el mínimo común múltiplo de $m_1, m_2, \dots, m_r$ divide a m.

Ya que $\sigma_1^{m_1}, \sigma_2^{m_2}, \dots, \sigma_r^{m_r}$ dejan todos sus elementos fijos, tenemos que $\sigma^{m.c.m(m_1,m_2,\dots,m_r)} = Id$ y $\sigma_i^{m.c.m(m_1,m_2,\dots,m_r)}$ deja todos sus elementos fijos de donde $(\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r)^{m.c.m(m_1,m_2,\dots,m_r)} = \sigma_1^{m.c.m(m_1,m_2,\dots,m_r)} \dots \sigma_r^{m.c.m(m_1,m_2,\dots,m_r)} = Id$

Por lo tanto, m divide al mínimo común múltiplo de $m_1, m_2, \dots, m_r$, lo que demuestra que $m = m.c.m(m_1, m_2, \dots, m_r)$.

Antes de seguir continuando, vamos a realizar una pequeña observación que nos va a ayudar a comprender mejor la descomposición de permutaciones en producto de ciclos y transposiciones.

Por ejemplo, si consideramos el ciclo $(1,2,3, \dots, k)$ podemos realizar la siguiente descomposición:

$$(1,2,3,\dots,k) = (1,k)(1,k-1)\dots(1,3)(1,2)$$

ya que si expresamos el producto de las transposiciones en forma matricial tenemos que

$$(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-2 & k-1 & k \\ 2 & 1 & 3 & \dots & k-2 & k-1 & k \end{pmatrix}$$

$$(1,3)(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-2 & k-1 & k \\ 2 & 3 & 1 & \dots & k-2 & k-1 & k \end{pmatrix}$$

De manera inductiva, si continuamos sucesivamente hasta k llegamos al siguiente resultado

$$(1,k-2)\dots(1,3)(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-2 & k-1 & k \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 & k-1 & k \end{pmatrix}$$

$$(1,k-1)(1,k-2)\dots(1,3)(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-2 & k-1 & k \\ 2 & 3 & 4 & \dots & k-1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$(1,k)(1,k-1)\dots(1,3)(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-2 & k-1 & k \\ 2 & 3 & 4 & \dots & k-1 & k & 1 \end{pmatrix} = (1,2,\dots,k)$$

Sin embargo, esta descomposición no tiene por qué ser única, ya que por ejemplo en S_4 tenemos que $(1,3) = (4,1)(4,3)(4,1) = (2,1)(2,3)(2,1)$.

A partir de este ejemplo vamos a demostrar uno de los resultados que nos va a permitir más adelante poder definir el concepto de determinante.

Proposición

Todo ciclo se puede descomponer como producto de transposiciones

Demostración

Sea $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ un ciclo del grupo simétrico S_n, entonces podemos realizar la siguiente descomposición:

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) = (a_1, a_r)(a_1, a_{r-1}) \dots (a_1, a_2)$$

Sin embargo, la descomposición de un ciclo en producto de transposiciones no tiene por qué ser única, ya que por ejemplo en S_4 tenemos que $(1, 3) = (4, 1)(4, 3)(4, 1) = (2, 1)(2, 3)(2, 1)$.

Hemos demostrado que toda permutación se puede descomponer en productos de ciclos disjuntos y a su vez que un ciclo se puede descomponer en un producto de transposiciones, así que si unimos los dos resultados tenemos que una permutación se puede descomponer en un producto de transposiciones, (resultado que demostramos anteriormente sin utilizar ciclos), lo que nos va a permitir poder expresar cualquier permutación como un producto de transposiciones (resultado que demostramos anteriormente sin utilizar ciclos). Sin embargo, como se ha indicado en el ejemplo anterior, esta descomposición no tiene por qué ser única.

Como ejemplo, si consideramos una permutación $\alpha \in S_7$ dada por $\alpha = (1,3,5,6,2)$ siendo α un ciclo, entonces por los ejemplos anteriores podemos expresar α como un producto de transposiciones de la siguiente forma:

$$\alpha = (1,2)(1,6)(1,5)(1,3)$$

por lo que el índice de α es $(-1)^4 = 1$ siendo además par, por lo que además es fácil comprobar que el índice de un ciclo es igual a su longitud menos uno.

Proposición

Sea A_n el conjunto de todas las permutaciones de S_n de índice par. Entonces el conjunto A_n es un grupo con la operación composición y tiene un total de $n!/2$ elementos.

Demostración

Sean α y β dos permutaciones con índice par. Entonces podemos expresar las dos permutaciones como producto de transposiciones de la siguiente forma:

$\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r$ y $\beta = \beta_1\beta_2 \dots \beta_s$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ y $\beta_1, \dots, \beta_s$ son transposiciones y r y s son números pares.

Entonces tenemos que el producto $\alpha\beta = \alpha_1 \dots \alpha_r\beta_1 \dots \beta_s$ es una descomposición del producto en un número par de transposiciones, por lo que obtenemos que la aplicación composición es asociativa en el conjunto A_n. Además, como la permutación identidad es par, entonces pertenece al conjunto A_n.

Para demostrar que es un grupo nos queda comprobar que el inverso de una permutación de índice par es también par. Para ello, si consideramos una permutación de A_n expresada como producto de permutaciones de la siguiente forma

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r$$

donde $\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_r$ son transposiciones y r es par, entonces tenemos que

$$\sigma^{-1} = \sigma_r^{-1}\sigma_{r-1}^{-1} \dots \sigma_1^{-1} = \sigma_r\sigma_{r-1} \dots \sigma_1$$

ya que la inversa de una transposición es ella misma. Por lo tanto, tenemos que σ^{-1} pertenece al conjunto A_n.

A continuación, vamos a pasar a calcular el número de elementos de A_n. Para ello, podemos observar que S_n se descompone como unión disjunta de A_n y S_n^{-1}, donde S_n^{-1} denota al conjunto de permutaciones con índice impar con n símbolos.

Definimos la aplicación $f: A_n \to S_n^{-1}$ definida como $f(\sigma) = (1\ 2)\sigma$. Esta aplicación está bien definida ya que si σ pertenece a A_n, entonces $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$ siendo $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ transposiciones con r par. Entonces se tiene que $(12)\sigma = (12)\sigma_1 \dots \sigma_r$, siendo un producto de transposiciones con índice impar, por lo que la aplicación f está bien definida. De forma análoga, se demuestra también que la aplicación es biyectiva.

Entonces, a partir de lo anterior, como la aplicación es biyectiva, el número de elementos de A_n y S_n^{-1} son iguales y como el conjunto S_n tiene un total de $n!$ elementos, el cardinal de A_n es $n!/2$

3.3 MOTIVACIÓN DEL DETERMINANTE

En la mayoría de los casos se presenta la noción de determinante con una definición poco clara en la que en muchos casos los alumnos hacen uso del determinante sin comprender bien su utilización en numerosos problemas, aplicándolo casi exclusivamente en la discusión de sistemas o el cálculo de la inversa sin haber entendido bien su definición y su razonamiento, realizando en la mayoría de los casos un uso del determinante algorítmico y sin razonamiento o comprensión.

Para ello, es muy importante primero crear situaciones en las que aparezca el cálculo del determinante sin haberlo definido previamente.

3.3.1 DETERMINANTE DE ORDEN DOS

Dado un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, vamos a buscar condiciones sobre los coeficientes para que el sistema tenga solución única.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Para ello, vamos a suponer que el coeficiente $a_{11} \neq 0$ y procederemos a aplicar el método de resolución de Gauss. Para ello, vamos a realizar en la segunda fila la operación $F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} F_1$ obteniendo el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} y = \dfrac{b_2 a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}} \end{cases}$$

Si $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$ el sistema no tiene solución única y en este caso el sistema tiene solución única si y solo si el coeficiente $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, obteniéndose como solución para el parámetro y el siguiente resultado:

$$y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Si $a_{11} = 0$, entonces nos encontramos con una matriz triangular superior dada de la forma

$$\begin{cases} a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

que tendrá solución única si a_{12} y a_{21} son distintos de cero, o equivalentemente, $a_{12}a_{21} \neq 0$ cuyas soluciones vienen dadas por

$$y = \frac{b_1}{a_{12}} \quad , \quad x = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{12}a_{21}}$$

En ambos casos, hemos llegado a que el sistema tiene solución única si y solo si el escalar $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, lo cuál nos va a poder permitir definir el determinante de una matriz cuadrada de segundo orden y su relación con la resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden dos expresada de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces definimos el determinante de A como el escalar $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ y se denota por $|A|$.

A partir de todos los resultados que hemos desarrollado hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición

Un sistema de ecuaciones de la forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ tiene solución única si y solo si el determinante de la matriz de sus coeficientes no es nulo. Además, las soluciones de este sistema se calculan de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

En este resultado ha quedado demostrado el método de Cramer en un sistema de 2x2, donde antes de dar una definición de determinante, se ha expuesto la resolución de un sistema de ecuaciones y se ha demostrado la existencia del determinante dentro del cálculo de la solución

Hasta aquí hemos definido el determinante en el caso de una matriz de orden dos a partir del estudio de la unicidad de la solución de un sistema, dando así una primera definición de determinante en la que se puede apreciar el razonamiento seguido de forma esquemática que se puede enseñar en el aula de una manera instructiva.
A continuación, vamos a pasar a definir el determinante en el caso de una matriz de orden tres a partir de la discusión de la unicidad de un sistema de ecuaciones de orden tres.

3.3.2 DETERMINANTE DE ORDEN TRES

Dado un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones y tres incógnitas de la siguiente forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

y de forma análoga a lo que hemos hecho anteriormente vamos a suponer que el sistema tiene solución única. En primer lugar, vamos a suponer que $\boldsymbol{a_{11} \neq 0}$. (esto se puede suponer ya que si $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$, entonces tenemos tres ecuaciones con dos incógnitas, que siguiendo el proceso de Gauss se obtiene o bien un sistema incompatible o bien un sistema compatible indeterminado) y vamos a aplicar el método de reducción para el sistema de ecuaciones anterior. Para ello vamos a efectuar las operaciones elementales $F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}F_1$ en la segunda fila y $F_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}F_1$ en la tercera fila, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones equivalente:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y + (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})z = b_2a_{11} - a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})y + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})z = b_3a_{11} - a_{31}b_1 \end{cases}$$

Para este sistema, si los coeficientes $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ y $a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$ fueran ambos nulos, el sistema no sería compatible determinado, por lo que al menos uno de los dos términos tiene que ser distinto de cero.

En primer lugar, vamos a suponer que $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, y en la tercera fila realizamos la operación elemental $F_3 - \frac{a_{11}a_{32}-a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}F_2$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales triangular:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y + (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})z = b_2a_{11} - a_{21}b_1 \\ Dz = K \end{cases}$$

donde $\boldsymbol{D} = a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$ y

$$K = (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})b_{13} - (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})b_2 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})b_{31}$$

El sistema tiene solución única si el coeficiente D es distinto de cero.

Si suponemos que $a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} \neq 0$, al sistema de ecuaciones lineales anterior

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y + (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})z = b_2a_{11} - a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})y + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})z = b_3a_{11} - a_{31}b_1 \end{cases}$$

vamos a realizar la operación fundamental $F_2 - \frac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12}}F_3$, obteniendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ Gz = H \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})y + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})z = b_3a_{11} - a_{31}b_1 \end{cases}$$

donde G y H son parámetros con $G = -a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}) = -a_{11}\boldsymbol{D}$ por lo que el sistema tiene solución única si y solo si $D \neq 0$.

En esta discusión que hemos realizado hemos supuesto que $a_{11} \neq 0$. Si suponemos que $a_{21} \neq 0$ o que $a_{31} \neq 0$, el razonamiento que se sigue es análogo y se llega que el sistema tiene solución única, entonces D es distinto de cero y al igual que realizamos en matrices de segundo orden, vamos a definir el determinante de una matriz cuadrada de orden tres.

Definición

Dada una matriz A cuadrada de orden tres expresada de la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Entonces definimos el determinante de A como el escalar

$$|A| = a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

3.3.3 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1) El determinante de una matriz A es igual al determinante de su traspuesta, es decir,

$$|A| = |A^t|$$

Demostración

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A|$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$- a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Si a partir de esta expresión reorganizamos los términos tenemos que

$$|A^t| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$
$$= |A|$$

2) Si los elementos de una fila o una columna se multiplican por una constante r, el determinante queda multiplicado por dicho escalar.

Demostración

Para el caso de una matriz de orden dos, vamos a suponer que r multiplica a la primera fila. Entonces tenemos que

$$|B| = \begin{vmatrix} ra_{11} & ra_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ra_{11}a_{22} - ra_{12}a_{21} = r(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = r|A|$$

Para el caso de una matriz de tercer orden se procede de la misma forma. Si al igual que en caso anterior suponemos que se multiplica la primera fila, se obtiene que

$$|B| = \begin{vmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ra_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}ra_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}ra_{13} -$$

$$-a_{32}a_{23}ra_{11} - a_{33}a_{21}ra_{12} = r(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}) = r|A|$$

3) Si una fila o una columna de una matriz A se pueden descomponer en la suma de dos filas o dos columnas, el determinante de A será igual a la suma de los determinantes de las matrices formadas a partir de A con la fila o la columna separada en sus dos sumandos.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Demostración

Para el caso de las matrices de orden dos, como en el ejemplo puesto, vamos a considerar que la suma de la primera fila se expresa como la suma de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+b_{11})a_{22} - a_{21}(a_{12}+b_{12})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + + b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

En el caso de las matrices de orden tres, si suponemos que la primera columna se expresa como la suma de dos columnas, entonces tenemos que

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}+b_{11})a_{22}a_{33} + (a_{21}+b_{21})a_{32}a_{13} + (a_{31}+$$

$$+ b_{31})a_{12}a_{23} - (a_{31}+b_{31})a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}(a_{11}+b_{11}) - a_{33}a_{12}(a_{21}+b_{21}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} +$$

$$+ b_{11}a_{22}a_{33} + b_{21}a_{32}a_{13} + b_{31}a_{12}a_{23} - b_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}b_{11} - a_{33}a_{12}b_{21} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4) Si en una matriz los elementos de una fila o una columna son cero entonces el determinante es nulo.

Demostración

Para el caso de las matrices de orden dos tenemos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} * 0 - a_{12} * 0 = 0$$

En el caso de una matriz de orden tres tenemos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} * 0 + a_{21}a_{13} * 0 + a_{12}a_{23} * 0 - a_{22}a_{13} * 0 -$$

$$-a_{23}a_{11} * 0 - a_{21}a_{12} * 0 = 0$$

5) Si se intercambian dos filas o dos columnas entonces el determinante cambia de signo

Demostración

Para el caso de matrices de orden dos, en este caso vamos a probar el resultado en el caso de intercambiar las dos filas.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -|A|$$

Para el caso de orden tres, vamos a suponer que intercambiamos la primera y la tercera columna y vamos a calcular su determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21} - a_{33}a_{22}a_{11} -$$

$$-a_{32}a_{21}a_{13} - a_{31}a_{12}a_{23} = -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{12}a_{23} + a_{31}a_{22}a_{13} +$$

$$+a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21} = -|A|$$

6) Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales, entonces su determinante es nulo.

Demostración

Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2 con las dos filas iguales, entonces tenemos que

$$|A| = a_1a_2 - a_1a_2 = 0$$

Para el caso de una matriz de orden tres vamos a suponer que las segunda y tercera columna son iguales y vamos a calcular su determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a & a \\ a_{21} & b & b \\ a_{31} & c & c \end{vmatrix} = a_{11}bc + a_{21}ca + a_{31}ab - -a_{31}ba - cba_{11} - aca_{21} = 0$$

7) Si los elementos de una fila o columna de una matriz son combinación lineal de las otras dos filas o columnas, entonces su determinante es nulo.

Demostración

Para el caso de una matriz de orden tres fácil vamos a suponer que la segunda columna es combinación lineal de las otras dos, es decir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ra_{11} + sa_{13} & a_{13} \\ a_{21} & ra_{21} + sa_{23} & a_{23} \\ a_{31} & ra_{13} + sa_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ra_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ra_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ra_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & sa_{11} & a_{13} \\ a_{21} & sa_{21} & a_{23} \\ a_{31} & sa_{13} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= r\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + s\begin{vmatrix} a_{11} & sa_{11} & a_{13} \\ a_{21} & sa_{21} & a_{23} \\ a_{31} & sa_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

8) Si a los elementos de una fila o columna le sumamos una combinación lineal de las otras dos filas o columnas, entonces el determinante no varía.

Demostración

Para el caso de orden dos tenemos que

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ra_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ra_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ra_{12} & a_{12} \\ ra_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + r\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

En el caso de las matrices de orden tres, el razonamiento es análogo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ra_{11}+sa_{31} & a_{22}+ra_{12}+sa_{32} & a_{23}+ra_{13}+sa_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ra_{11} & a_{22}+ra_{12} & a_{23}+ra_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ sa_{31} & sa_{32} & sa_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + r\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + s\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

9) El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes.

$$|A * B| = |A| * |B|$$

Demostración

En esta ocasión solo lo vamos a demostrar para el caso de matrices de orden dos, ya que en el caso de matrices de tercer orden el razonamiento es análogo y las operaciones son más extensas.

Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ dos matrices cuadradas de segundo orden, entonces tenemos que

$$A * B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A * B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

Por la propiedad de la suma tenemos que

$$|A * B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

Vamos a extraer todos los factores comunes que se puedan.

$$|A*B| = b_{11}b_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

$$+ b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

Por la propiedad número cinco, como en la matriz

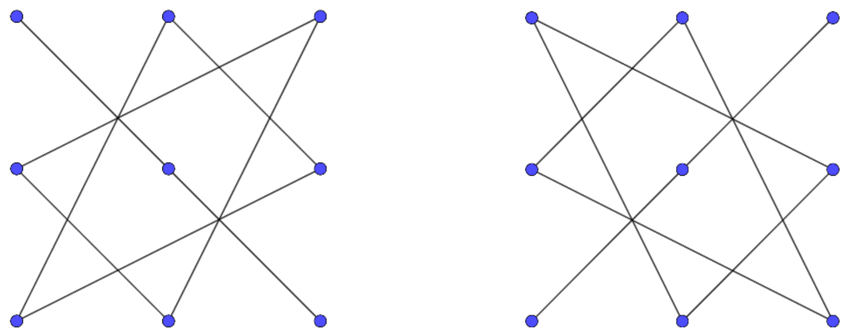
$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

tiene las dos columnas intercambiadas, entonces su determinante cambia de signo, luego finalmente nos queda que

$$|A*B| = b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

El desarrollo de la definición de determinante puede recordarse fácilmente con el siguiente diagrama conocido como regla de Sarrus, que describe de forma gráfica los términos positivos y negativos del determinante de orden tres.



+ -

3.3 DEFINICIÓN DE DETERMINANTE

Anteriormente, para una matriz cualquiera de orden tres dada de la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

hemos definido su determinante como

$$|A| = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3a_2b_1$$

Si nos fijamos en los diferentes términos del determinante, aparecen todas las diferentes formas de escoger un elemento de cada fila sin que haya dos de ellos en la misma columna. A partir de aquí nos damos cuenta de que aparecen todos los términos correspondientes a las biyecciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$, es decir, todas las permutaciones del grupo S_3 dadas por

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

También podemos observar que el signo que aparece afectando a cada término del determinante es precisamente el índice de la permutación correspondiente.

Por consiguiente, usando las propiedades de las permutaciones podemos dar una primera definición del determinante de una matriz de orden tres

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_3} ind(\sigma) a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)}$$

También si nos fijamos cuidadosamente, podemos escribir el determinante de la matriz A como

$$|A| = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

Estableciendo una relación entre el determinante de una matriz de orden dos y los elementos de una fila o una columna, por lo que más adelante daremos una definición inductiva del determinante de una matriz de cualquier orden.

A continuación, vamos a proceder a dar nuestra primera definición del determinante de una matriz general de orden n donde vamos a usar las permutaciones

Definición

Dada una matriz A de orden n de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

definimos el determinante de la matriz A como

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Esta fue la primera definición de determinante que fue utilizada por Leibniz, por lo que su importancia ha sido muy importante a lo largo de toda la teoría de los determinantes.

A continuación, vamos a pasar a demostrar las propiedades elementales que demostramos anteriormente para el determinante de orden dos y tres para una matriz cuadrada de orden n.

PROPIEDADES

1) Sea $A \in M_n(R)$ una matriz cuadrada de orden n, entonces se verifica que $|A| = |A^t|$

Demostración

Sea la matriz A expresada como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces su matriz traspuesta es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

por lo que tenemos que $|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$ y si aplicamos la igualdad $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n}$ reordenando los factores obtenemos que

$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} =$$

$$= \sum_{\tau^{-1} \in S_n} ind(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)} = \sum_{\tau \in S_n} ind(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)} = |A|$$

donde hemos usado que $ind(\sigma) = ind(\sigma^{-1})$ para toda permutación $\sigma \in S_n$, hemos realizado la sustitución $\tau = \sigma^{-1}$.

2) Si a una matriz A se multiplica una fila (o una columna) por una constante r, entonces su determinante queda multiplicado por r.

Demostración

Sea B la matriz que se obtiene al multiplicar la fila i-ésima de A, se tiene que

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{i1} & ra_{i2} & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|B| = \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots ra_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = r \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= r|B|$$

A partir de esta propiedad se obtiene también que si multiplicas una matriz cuadrada A de orden n por una constante r, entonces se verifica que $|rA| = r^n|A|$.

3) El determinante es multilineal en filas y columnas, es decir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & aa_{1i} + bb_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & aa_{ni} + bb_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y lo mismo sería para las filas.

Demostración

Sea $A \in M_n(R)$ una matriz cuadrada de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & aa_{1i} + bb_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ aa_{i1} + bb_{i1} & \dots & aa_{in} + bb_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots \left(aa_{i\sigma(i)} + bb_{i\sigma(i)}\right) \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= a \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + b \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots b_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

por lo que se verifica que el determinante es multilineal.

4) Si a una matriz A cuadrada de orden n se le permutan dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

Demostración

Sea B la matriz que se obtiene de A intercambiando las filas i-ésima y j-ésima con $i < j$ tenemos que

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|B| = \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{i\sigma(i)} \dots b_{j\sigma(j)} \dots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(i)} \dots a_{i\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} ind \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(i)} \dots a_{i\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Si definimos la transposición $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$, entonces $\pi = \sigma \, o \, \tau$ es una permutación. Además, también se tiene que $ind(\pi) = -ind(\sigma o \tau) = ind(\sigma)$. Entonces

$$|A| = \sum_{\pi \in S_n} ind(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{j\pi(j)} \dots a_{n\pi(n)} =$$

$$= - \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(i)} \dots a_{i\sigma(j)} \dots a_{nn} = -|B|$$

5) Si A es una matriz triangular superior o inferior, entonces su determinante es el producto de los elementos de su diagonal.

Demostración

Sea A una matriz cuadrada de orden n triangular superior de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

6) Si una matriz tiene una fila o una columna de ceros, entonces su determinante es nulo.

Demostración

Sea la matriz A una matriz cuadrada con la fila i-ésima nula, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la fila i-ésima por una constante cualquiera r entonces se tiene que

$|A| = r|A|$, por lo que se obtiene que $|A| = 0$

7) Si una matriz cuadrada tiene dos filas o columnas iguales, entonces su determinante es nulo.

Demostración

Supongamos que tenemos una matriz cuadrada A que tienen la fila i-ésima y la columna j-ésima iguales, siendo $1 \leq i \leq j \leq n$, entonces si intercambiamos las dos filas, tenemos que la matriz A no varía y su determinante cambia de signo, es decir $|A| = -|A|$. Entonces su determinante es nulo.

8) Si una matriz cuadrada tiene dos filas proporcionales, entonces su determinante es nulo.

Demostración

Sea A una matriz con las filas i y j proporcionales, es decir, que la matriz es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{i1} & ra_{i2} & \dots & ra_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz A se obtiene al a multiplicar la fila j-ésima por una constante r por una matriz que tiene la fila i-ésima y la fila j-ésima, luego su determinante es nulo.

9) Si a una matriz cuadrada le sumamos a una fila una combinación lineal de otras filas, entonces su determinante no varía.

Demostración

Si expresamos la matriz A de la forma $A = (A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n)$ siendo A_i vectores de dimensiones $nx1$ y definimos la matriz $B = (A_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i A_i \,|A_2| \dots |A_n)$, entonces se tiene que $|B| = |A| + \sum_{i=2}^{n} |(A_i|A_2| \dots |A_i| \dots |A_n)| = |A|$.

Hasta ahora hemos dado una definición de determinante usando permutaciones, pero el cálculo usando esa definición no es conveniente para calcular determinantes de mayor orden.

A continuación, vamos a proceder describir la definición de determinante establecida por Laplace que nos va a permitir calcular determinantes de forma inductiva. Para ello, vamos a establecer un par de definiciones previas.

Definición

Sea A una matriz cuadrada de orden n, definimos el menor complementario de un elemento a_{ij} con $1 \leq i, j \leq n$ al determinante que se obtiene quitando la fila i-ésima y la columna j-ésima. Al menor complementario de a_{ij} lo vamos a denotar por α_{ij}.

Definición

Se denomina adjunto del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada de orden n como el escalar $(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ y los vamos a denotar por A_{ij}

Como ejemplo, si consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El complementario del elemento $a_{22} = 2$ es el determinante de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $|C| = 19$.

Desarrollo del determinante por columnas

Dada una matriz A de orden n expresada de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se puede desarrollar el determinante de A como $|A| = a_{1i}|A_{1i}| + a_{2i}|A_{2i}| + \cdots + a_{ni}|A_{ni}|$ donde A_{ji} es una matriz adjunta de A para $j = 1,2, \dots, n$

Demostración

Vamos a denotar a la matriz A como $A = (A^1, A^2, \dots, A^n)$ donde A^i representa la columna i-ésima para $1 \leq i \leq n$. Consideramos la columna $A^j = \left(a_{1j}, \dots, a_{nj}\right)^t$ que podemos expresar como

$$A^j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i^t$$

Por la linealidad del determinante (demostrada anteriormente) se tiene que

$$|A| = a_{1j}\left|\left(A^1, \dots, A^{j-1}, e_1^t, A^{j+1}, \dots, A^n\right)\right| + a_{2j}\left|\left(A^1, \dots, A^{j-1}, e_2^t, A^{j+1}, \dots, A^n\right)\right| +$$

$$+ \dots + a_{nj}\left|\left(A^1, \dots, A^{j-1}, e_n^t, A^{j+1}, \dots, A^n\right)\right| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\left|\left(A^1, \dots, A^{j-1}, e_i^t, A^{j+1}, \dots, A^n\right)\right|$$

Tenemos que demostrar que $\left|\left(A^1, \dots, A^{j-1}, e_i^t, A^{j+1}, \dots, A^n\right)\right| = A_{ij}$ para $1 \leq i \leq n$, siendo A_{ij} el adjunto del elemento a_{ij}.

Para demostrarlo, trasladamos la columna j-ésima a la última columna de la matriz intercambiando la columna j - ésima con la columna $(j+1)$- ésima, después la columna $(j+1)$-ésima por la columna $(j+2)$ – ésima y así sucesivamente hasta cambiar la columna $(n-1)$-ésima por la columna n -ésima. Así podemos desarrollar el determinante de la siguiente forma:

$$\left|\left(A^1, \dots, A^j, e_i^t, A^{j+1}, \dots, A^n\right)\right| = (-1)^{n-j}\left|\left(A^1, \dots, A^{j-1}, A^{j+1}, \dots, A^n, e_i^t\right)\right|$$

Ahora llevamos la fila i -ésima a la última fila, intercambiando la fila i- ésima por la fila $(i+1)$-ésima y así sucesivamente hasta intercambiar la fila $(n-1)$ -ésima por la fila n -ésima.

Así se obtiene que el determinante de la matriz $\left(A^1, \dots, A^{j-1}, e_i^t, A^{j+1}, \dots, A^n\right)$ es igual a

$$(-1)^{n-j}(-1)^{n-i}\left|\begin{pmatrix} A'_{ij} & 0^t \\ a & 1 \end{pmatrix}\right| = (-1)^{i+j}\left|\begin{pmatrix} A'_{ij} & 0^t \\ a & 1 \end{pmatrix}\right|$$

donde A'_{ij} es la matriz obtenida de A al eliminar la fila i -ésima y la columna j -ésima, por lo que se tiene que demostrar

$$\begin{pmatrix} A'_{ij} & 0^t \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-)1} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} & 0 \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{i(j-1)} & a_{i(j+1)} & \dots & a_{in} & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que hay que demostrar que

$$\left|A'_{ij}\right| = \left|\begin{pmatrix} A'_{ij} & 0^t \\ a & 1 \end{pmatrix}\right|$$

Si tomamos una matriz M de la forma

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{(n-1)1} & \dots & m_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ m_{n1} & \dots & m_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix}$$

De la definición del determinante de una matriz

$$|M| = \sum_{\sigma \in S_n} ind(\sigma) m_{1\sigma(1)} \dots m_{n\sigma(n)}$$

En este caso $m_{1n} = \cdots = m_{(n-1)n} = 0$, así que si $\sigma(n) \neq n$, entonces $m_{n\sigma(n)} = 0$. Entonces en el sumatorio anterior los únicos términos no nulos son aquellos en los que $\sigma(n) = n$. Así

$$|M| = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n)=n} ind(\sigma) m_{1\sigma(1)} \dots m_{(n-1)\sigma(n-1)} m_{nn}$$

$$= m_{nn} \sum_{\sigma \in S_{n-1},} ind(\sigma) m_{1\sigma(1)} \dots m_{(n-1)\sigma(n-1)}$$

Entonces a partir de este resultado, como la matriz $\begin{pmatrix} A'_{ij} & 0^t \\ a & 1 \end{pmatrix}$ está definida de igual forma, se verifica que

$$|A'_{ij}| = \left| \begin{pmatrix} A'_{ij} & 0^t \\ a & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Quedando así demostrado que este desarrollo por columnas es equivalente a la definición de determinante que hemos desarrollado.

3.4 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL DETERMINANTE

3.4.1 ÁREA Y DETERMINANTE

Definición

Dados dos vectores $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ del plano, definimos el paralelogramo generado por a y b como el conjunto

$$H(a, b) = \{\alpha a + \beta b : 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}$$

Geométricamente, el paralelogramo generado por ambos vectores sería el paralelogramo formado de la siguiente forma:

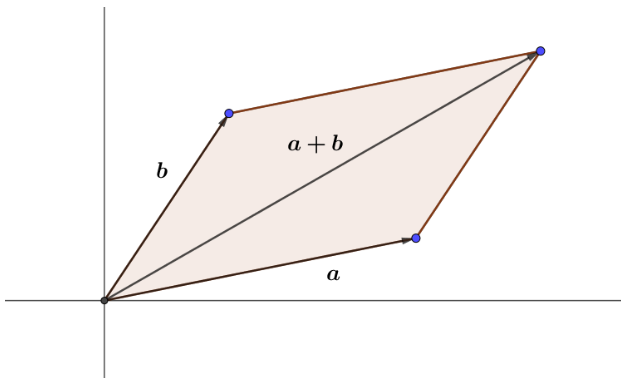


Ilustración 1

Definición

Dados dos vectores a y b del plano, se define el área del paralelogramo definido por ambos vectores como

$$A(a,b) = Vol\big(H(a,b)\big) = |a||b''|$$

siendo b'' la componente vertical de b respecto de a.

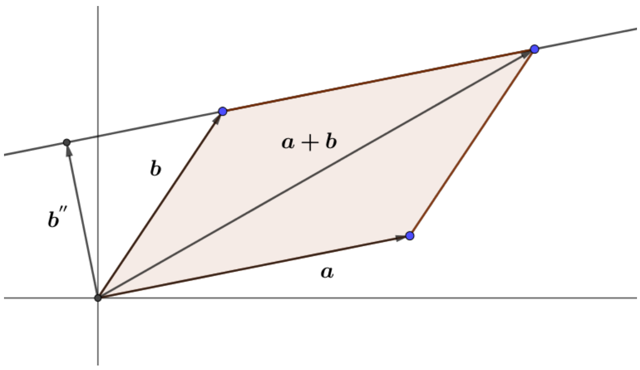


Ilustración 2

Proposición

Sean dos vectores a y b del plano, entonces b se puede descomponer de la forma $b = b' + b''$ tal que $b' \in \mathbb{R}a$ y b'' es un vector ortogonal al vector a siendo esta descomposición única.

Demostración

Si denotamos b' a la proyección horizontal de b sobre el vector a, el ángulo formado por los vectores b' y b es igual al que forman a y b que viene determinando por

$$cos\ \alpha = \frac{< a,b >}{|a||b|}$$

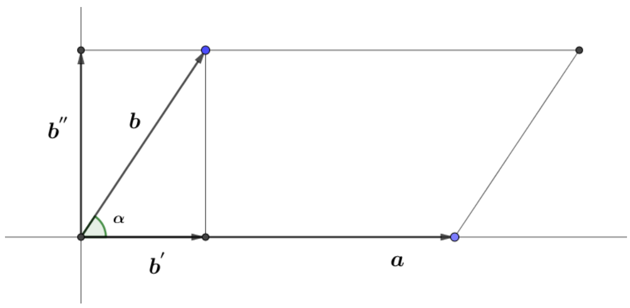


Ilustración 3

Por la ilustración anterior, podemos realizar el siguiente desarrollo:

$$cos(\alpha) = \frac{|b'|}{|b|} = \frac{< a, b >}{|a||b|}$$

Por lo que se tiene que

$$|b'| = \frac{< a, b >}{|a|}$$

Sabemos que b' viene definida de la forma $b' = \beta a$ donde β es un número real por lo que su módulo es igual a $|\beta||a|$

$$\frac{< a, b >}{|a|} = |b'| = |\beta||a|$$

$$|\beta| = \frac{< a, b >}{|a|^2} = \frac{< a, b >}{< a, a >}$$

Entonces, si tomamos $b' = \frac{<a,b>}{|a|^2}a$, se tiene que $b = \frac{<a,b>}{|a|^2}a + b''$. Si desarrollamos la igualdad tenemos que

$$b'' = b - \frac{< a, b >}{< a, a >}a$$

Por la propiedad del producto escalar, podemos realizar el siguiente desarrollo

$$< b'', a > = < a, b > - \frac{< a, b >}{< a, a >} < a, a > = < a, b > - < a, b > = 0$$

y hemos demostrado que b' y b'' verifican que $b' \in \mathbb{R}a$ y b'' es ortogonal al vector a.

Para demostrar que la descomposición es única, vamos a suponer que b se puede descomponer de la siguiente manera

$$b = b_1' + b_1'' = b_2' + b_2''$$

donde b_1' y b_2' son vectores de la forma $\mathbb{R}a$ y b_1'' y b_2'' son vectores ortogonales al vector a.

$$c = b_1' - b_2' = b_2'' - b_2'$$

A partir de esta igualdad, se tiene que $c = \beta a$ y $< c, a > = 0$, por lo que $< \beta a, a > = \beta < a, a > = 0$, obteniendo que $\beta = 0$ y $c = \beta a = 0$, demostrando así que la descomposición es única.

A continuación, vamos a demostrar las propiedades fundamentales que cumple el área, donde para ello vamos a demostrar un resultado previo que nos va a permitir igualar las fórmulas del área del triángulo a partir de cualquiera de las tres bases y sus alturas correspondientes.

> **Teorema** (Brahmagupta)
>
> Dado un triángulo $\Delta\, ABC$ con $AC = b,\ AB = c$, R el circunradio y h_a la longitud de la altura AD del vértice A respecto de la base BC. Entonces
>
> $$bc = 2Rh_a$$

Demostración

Sea A' el punto tal que AA' es el diámetro de la circunferencia y consideramos los triángulos $\Delta\, ADB$ y $\Delta\, ACA'$ que se muestra en la ilustración

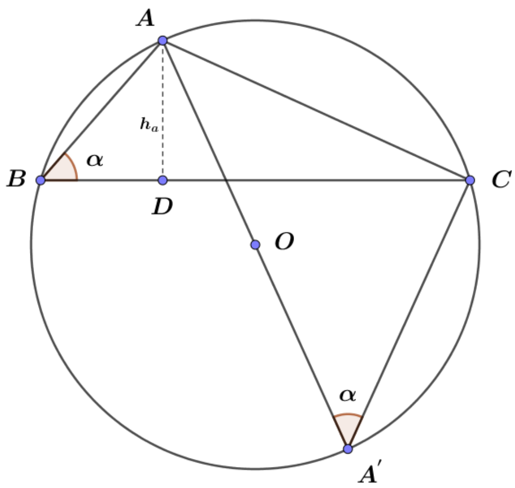


Ilustración 4

Los ángulos $< DBA$ y $< CA'A$ son congruentes (debido al teorema del arco capaz) como se muestra en la ilustración anterior. Además, el ángulo $< ACA'$ está inscrito en una semicircunferencia, así que es un ángulo recto, por lo que $< ACA'$ y $<\ ADB$ son congruentes. Entonces los triángulos $\Delta\, ADB$ y $\Delta\, ACA'$ son congruentes ($\Delta\, ADB \sim \Delta\, ACA'$), así que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AA'}$$

$$AD * AA' = AC * AB$$

$$AD * 2R = AC * AB$$

Entonces en esta última expresión tenemos $AD = h_a$ y $AA' = 2R$, donde finalmente obtenemos que $2Rh_a = bc$.

Corolario

Dado un triángulo $\Delta\, ABC$ con $BC = a, AB = c$ y $AC = b$, entonces se verifica que

$$\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{abc}{4R}$$

siendo R el circunradio de los vértices a, b y c.

Demostración

De la igualdad anterior, si multiplicamos en ambos miembros por a, entonces se tiene que

$$abc = 2Rah_a$$

$$\frac{1}{2}ah_a = \frac{abc}{4R}$$

Por el teorema anterior, tenemos también que se cumplen que

$$abc = 2Rbh_b \quad \text{y} \quad abc = 2Rch_c$$

Entonces se tiene que

$$\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{abc}{4R}$$

PROPIEDADES DEL ÁREA

1) Dados dos vectores a y b del plano, se verifica que $\mathrm{A(a, b) = A(b, a)}$

Demostración

Para los vectores a y b, los vectores a'' y b'' (siendo a'' la componente vertical de a respecto de b y b'' la componente vertical de b respecto de a) verifican que $|a''| = |h_b|$ y $|b''| = |h_a|$ como se muestra en la siguiente ilustración:

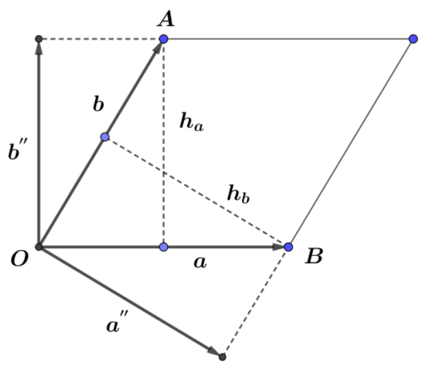


Ilustración 5

Por el teorema anterior, $A(a,b) = |a||b''| = ah_a = bh_b = |b||a''| = A(b,a)$, por lo que se demuestra en resultado que andábamos buscando.

2) Dados dos vectores a y b del plano, entonces se verifica que $A(a,\beta b) = |\beta| A(a,b)$ siendo β un número real.

Demostración

Por la definición de área, tenemos que $A(a,\beta b) = |a||(\beta b)''|$ donde $\beta b = \alpha a + (\beta b)''$ con α es un número real y se verifica que $< a,(\beta b)'' \geq 0$, siendo esta descomposición única. De la misma forma, para el vector b se puede descomponer de la forma $b = \mu a + b''$ con $< a, b'' > = 0$. Si descomponemos $\beta b = \beta\mu a + \beta b''$ se cumple que

$$< a, \beta b'' >= \beta < a, b'' >= 0$$

Por lo que $(\beta b)'' = \beta b''$ y por la definición de área tenemos que

$$A(a,\beta b) = |a||(\beta b)''| = |a||\beta b''| = |\beta||a||b| = |\beta| A(a,b)$$

3) Dados dos vectores a y b del plano, entonces de verifica que $A(\beta a, b) = |\beta| A(a,b)$ siendo β un número real.

Demostración

Por la primera y la segunda propiedad, tenemos que

$$A(\beta a, b) = A(b, \beta a) = |\beta| A(b,a) = |\beta| A(a,b)$$

4) Dados dos vectores a y b en el plano, entonces se tiene que $A(a,b) = A(a, b + \lambda a)$ para todo número real λ.

Demostración

Por la definición de área, tenemos que

$$A(a,b) = |a||b''| \quad \text{y} \quad A(a, b + \lambda a) = |\mathrm{a}||(\mathrm{b} + \lambda \mathrm{a})''|$$

Como ya demostramos anteriormente, podemos expresar $b = \alpha a + b''$ siendo b'' la componente vertical de b respecto de a, donde esta descomposición es única

$$b + \lambda \mathrm{a} = \alpha a + \lambda \mathrm{a} + \mathrm{b}'' = (\alpha + \lambda)\mathrm{a} + \mathrm{b}''$$

De esta igualdad tenemos que $(\alpha + \lambda)\mathrm{a} \in Ra$ y b'' es un vector ortogonal al vector a, por lo que se verifica que $(b + \lambda \mathrm{a})'' = \mathrm{b}''$.

$$A(a, b + \lambda \mathrm{a}) = |\mathrm{a}||(\mathrm{b} + \lambda \mathrm{a})''| = |a||b''| = A(a,b)$$

5) Sean a y b dos vectores del plano, se verifica que $A(a+\lambda \mathrm{b}, \mathrm{b}) = \mathrm{A}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ para todo número real λ.

Demostración

Por la primera propiedad, se verifica que $A(a+\lambda \mathrm{b}, \mathrm{b}) = \mathrm{A}(\mathrm{b}, \mathrm{a}+\lambda \mathrm{b})$. Por la segunda propiedad tenemos que $A(b, a+\lambda \mathrm{b}) = \mathrm{A}(\mathrm{b}, \mathrm{a}) = \mathrm{A}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$, por lo que hemos demostrado que

$$A(a+\lambda \mathrm{b}, \mathrm{b}) = \mathrm{A}(\mathrm{b}, \mathrm{a}) = \mathrm{A}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$$

A partir de estas dos últimas propiedades tenemos que se verifica $A(\alpha a, \beta b) = |\alpha||\beta| A(a, b)$ siendo a y b vectores del plano y α, β números reales.

Como resumen, hemos demostrado las siguientes propiedades:

1) $\boldsymbol{A(a,b) = A(b,a)}$
2) $\boldsymbol{A(a, b+\alpha a) = A(a,b)}$
3) $\boldsymbol{A(a+\alpha b, b) = A(a,b)}$
4) $\boldsymbol{A(\alpha a, \beta b) = |\alpha||\beta| A(a,b)}$

Podemos observar que el área cumple las transformaciones elementales excepto en la cuarta propiedad que al multiplicarlo por un escalar el área queda multiplicada por el valor absoluto del escalar. Entonces,

A continuación, vamos a calcular el módulo de b'', donde para ello vamos a desarrollar su producto escalar descomponiendo b'' en la forma $b'' = b - \beta a$ con $\beta = \frac{<a,b>}{|a|^2}$

$$|b''|^2 = <b-\beta a, b-\beta a> = <b,b> - \beta <b,a> - \beta <a,b> + \beta^2 <a,a> =$$

$$= <b,b> - 2\beta <a,b> + \beta^2 <a,a> = <b,b> - 2\frac{<a,b>}{<a,a>} <a,b> +$$

$$+ \frac{<a,b>^2}{<a,a>^2} <a,a> = \frac{<a,a><b,b> - <a,b>^2}{<a,a>}$$

$$<b'', b''> = \frac{<a,a> - <a,b>^2}{<a,a>}$$

A partir de este desarrollo vamos a calcular el área de paralelogramo formado por ambos vectores.

$$\left(A(a,b)\right)^2 = < a,a > < b'',b'' > \geq < a,a > \frac{< a,a > < b,b > - < a,b >^2}{< a,a >} =$$

$$= < a,a > < b,b > - < a,b >^2$$

$$< a,a > < b,b > \; - < a,b >^2 = \begin{vmatrix} < a,a > & < a,b > \\ < a,b > & < b,b > \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= |A^t A|$$

donde A es la matriz definida por

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Por las propiedades de los determinantes, $|A^t A| = |A^t||A| = |A||A| = |A|^2$, donde finalmente hemos demostrado que

$$\boxed{A(a,b) = |det(A)|}$$

es decir, el valor absoluto del determinante de la matriz A.

A partir de las propiedades anteriores y la definición del área, podemos establecer la siguiente afirmación:

determinante = área + signo

El determinante como área tiene el mismo comportamiento respecto a las transformaciones elementales excepto en la cuarta propiedad que establece que $A(\alpha a, \beta b) = |\alpha||\beta| A(a,b)$, donde la igualdad se mantiene, pero no el signo.

Por ejemplo, si consideramos los vectores $u = (3,1)$ y $v = (-1,-2)$, vamos a calcular su determinante y su área.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Realizamos la operación elemental $F_2 - \frac{1}{3}F_1$ donde el determinante de los vectores u y v ni el área varían

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \frac{-5}{3} \end{pmatrix}$$

Ahora aplicamos la operación elemental $F_1 \; + \frac{3}{5}F_2$ obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{3} \end{pmatrix}$$

Aquí obtenemos que $det(u, v) = 3 * \frac{-5}{3} = -5$ y $A(u, v) = |3| \left|\frac{-5}{3}\right| = 5$, pudiendo observar la diferencia que existe entre el determinante y el signo.

Otra manera más intuitiva de poder demostrar el área generada por dos vectores puede realizarse de forma geométrica, que puede ser más adaptada a los alumnos de los cursos de secundaria donde podrán apreciar de una forma más ilustrativa el cálculo del área y su relación con el determinante.

Sean $u = (a, b)$ y $v = (c, d)$ dos vectores del plano, entonces el área del paralelogramo formado por ambos vectores es el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Demostración

Si representamos gráficamente el paralelogramo formado por los vectores, podemos realizar la siguiente descomposición:

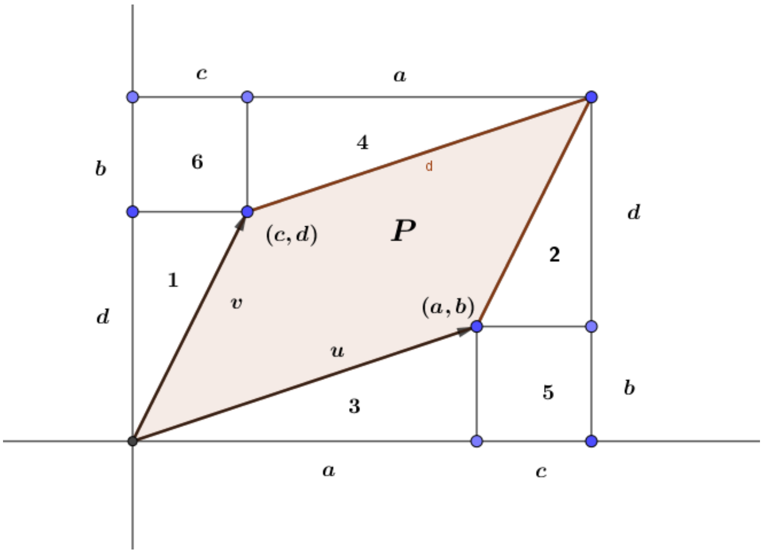


Ilustración 6

Los triángulos 1 y 2 de la imagen son semejantes, donde sus los lados de ambos triángulos tienen la misma longitud, por lo que el área de cada triángulo es igual a $\boldsymbol{cd}/\boldsymbol{2}$

Los triángulos 3 y 4 también son semejantes y tienen los lados de ambos la misma longitud, por lo que el área de cada triángulo viene es igual a $\boldsymbol{ab}/\boldsymbol{2}$ y el área de los rectángulos 5 y 6 es igual a $\boldsymbol{bc}$.

A continuación, vamos a calcular el área del rectángulo mayor.

$$A(R) = (a + c)(b + d)$$

$$A(R) = A(1) + A(2) + A(3) + A(4) + A(5) + A(6) + A(P) = cd + ab + 2bc + A(P)$$

Si igualamos ambas igualdades, tenemos que

$$(a + c)(b + d) = cd + ab + 2bc + A(P)$$

$$ab + ad + cb + cd = cd + ab + 2bc + A(P)$$

$$A(P) = ad + bc - 2bc = ad - bc$$

$$A(P) = det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Cuando los puntos están en otro cuadrante la fórmula que se acaba de obtener dará el negativo del área del paralelogramo. Así para el paralelogramo formado por dos puntos (a, b) y (c, d) su área viene dada por

$$\left| det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|$$

Sean $u = (a, b)$ y $v = (c, d)$ dos vectores del plano, entonces el área del paralelogramo formado por los vectores u y $v + \mu u$ es igual al área del paralelogramo formado por u y v.

Demostración

Al igual que antes, vamos a realizar la siguiente descomposición:

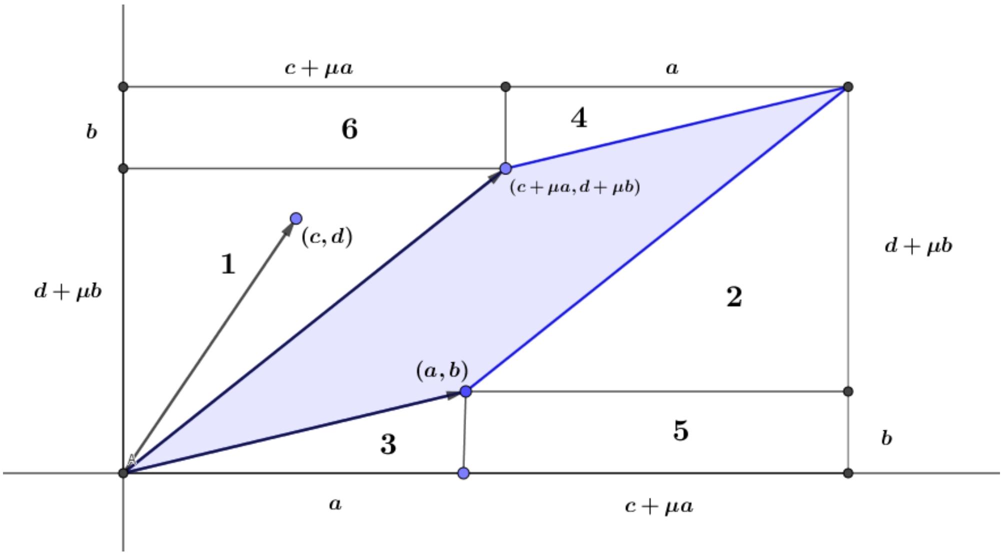


Ilustración 7

Los triángulos 1 y 2 son semejantes y sus lados tienen la misma longitud, luego son semejantes y cumple que

$$A(1) = A(2) = \frac{(c + \mu a)(d + \mu b)}{2}$$

Los triángulos 3 y 4 son semejantes y sus lados también tienen la misma longitud, por lo que son semejantes y verifican que

$$A(3) = A(4) = \frac{ab}{2}$$

Los rectángulos 5 y 6 son semejantes y tienen la misma área que viene dado por

$$A(5) = A(6) = (c + \mu a)b$$

El área del rectángulo grande es igual a $(b + d + \mu b)(a + c + \mu a)$, por lo que se tiene que

$$(b + d + \mu b)(a + c + \mu a) = A(1) + A(2) + A(3) + A(4) + A(5) + A(6) + A(P)$$

$$(b + d + \mu b)(a + c + \mu a) = (c + \mu a)(d + \mu b) + ab + 2(c + \mu a)b + A(P)$$

$$ab + b(c + \mu a) + a(d + \mu b) + (d + \mu b)(c + \mu a) =$$

$$= (d + \mu b)(c + \mu a) + ab + 2(c + \mu a)b + A(P)$$

$$b(c + \mu a) + a(d + \mu b) = 2(c + \mu a)b + A(P)$$

$$a(d + \mu b) - (c + \mu a)b = A(P)$$

$$ad - cd = A(P)$$

De la misma manera, se puede demostrar que se verifican las mismas propiedades que demostramos en el caso anterior, por lo que el área cumple las propiedades de las operaciones elementales.

Dado un triángulo definido por tres vértices $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ y $C = (x_3, y_3)$, el área del triángulo es igual a

$$\frac{1}{2} det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración

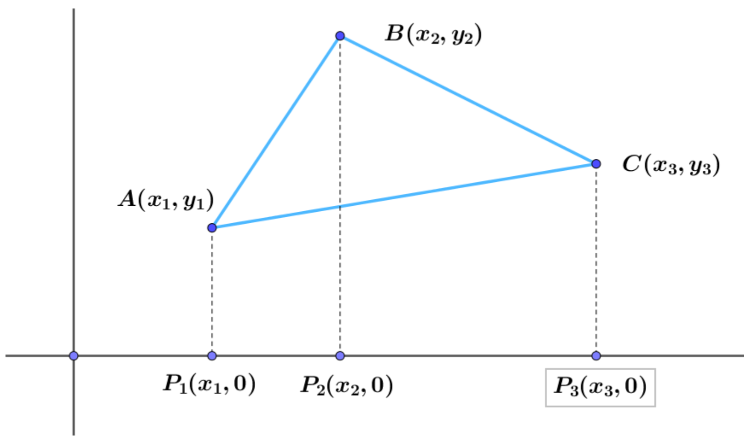


Ilustración 8

Se puede calcular el área de este triángulo de la siguiente manera:

$$A(ABC) = A(P_1ABP_2) + A(P_2BCP_3) - A(P_1ACP_3)$$

El área de un trapecio rectángulo es $^1/_2$ de la distancia entre los lados paralelos por la suma de las longitudes de los lados paralelos.

$$A(P_1ABP_2) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)$$

$$A(P_2BCP_3) = \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 + y_3)$$

$$A(P_1ACP_3) = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 + y_3)$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 + y_3) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 + y_3) =$$

$$= \frac{1}{2}x_2y_1 - \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_3y_2 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 =$$

$$= \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 + x_1y_3)$$

Esta expresión es igual a

$$\frac{1}{2}det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando los puntos están en otro cuadrante o se etiquetan en orden diferente, la fórmula que se acaba de obtener dará el negativo del área del triángulo. Así, para un triángulo de vértices (x_1, y_1) (x_2, y_2) y (x_3, y_3) tenemos que el área del triángulo viene dada por

$$\left|\frac{1}{2}det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

Ahora supongamos que tenemos un paralelogramo formado por cuatro puntos A, B, C y D como se muestra en la siguiente figura:

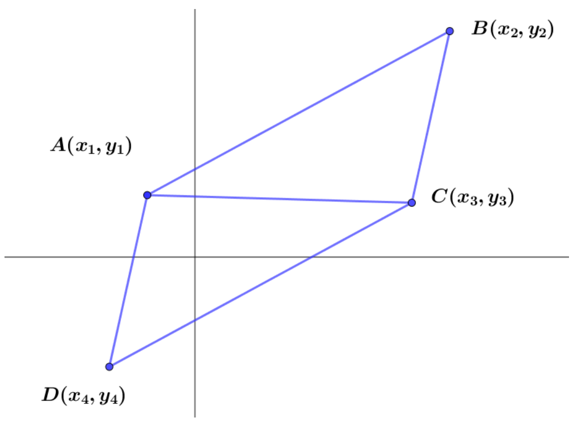


Ilustración 9

Como la diagonal divide al paralelogramo en dos triángulos iguales, entonces su área es igual a

$$\left|det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

3.4.2 VOLUMEN Y DETERMINANTE

Para el caso de espacio R^3, para definir el volumen de tres vectores, vamos a dar una definición previa.

Definición

Definimos el paralepípedo formado por tres vectores u, v y w en el espacio como el conjunto definido como

$$H(u,v,w) = \{\alpha u + \beta v + \mu w : 0 \leq \alpha, \beta, \mu \leq 1\}$$

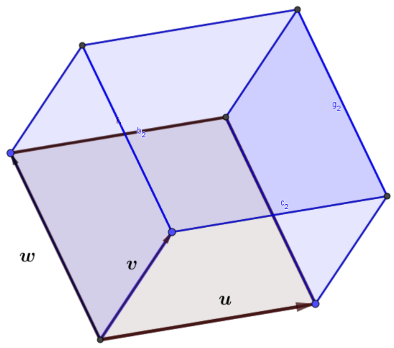


Ilustración 10

De la misma manera que definimos el área de dos vectores en el plano, vamos a definir el volumen que genera tres vectores en el espacio.

Definición

Sean u, v y w tres vectores del espacio, definimos el volumen del paralepípedo generado por los tres vectores como

$$V(u,v,w) = Vol\big(H(u,v,w)\big) = Área(u,v) * |w''|$$

Siendo w'' la componente vertical de w respecto de los vectores u y w.

Al igual que ocurre con el área en el caso del plano, en el espacio se verifica que el volumen verifica las mismas propiedades que verificaba el área, como por ejemplo la siguiente propiedad:

Sean u, v y w tres vectores, entonces si a un vector se le suma una combinación lineal de los otros dos, el volumen no varía.

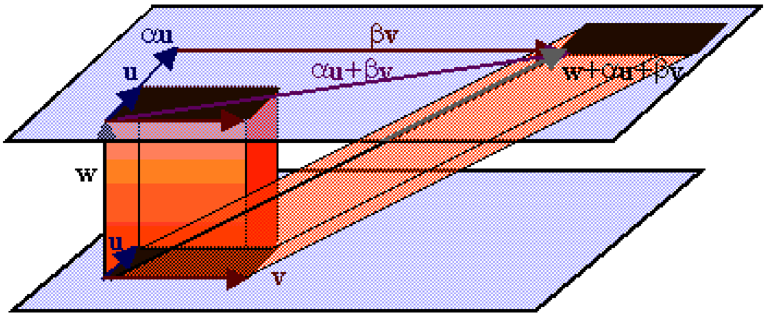


Ilustración 11

En esta ilustración se puede observar que al tomar tres vectores u, v y w, el volumen del paralepípedo formado por los vectores u, v y $\alpha u + \beta v$ no varía.

Finalmente, al igual que ocurría con el área, el volumen generado por tres vectores es igual al valor absoluto del determinante de la matriz formada por los vectores salvo el signo, por lo que queda reflejado

3.5 MARCO TECNOLÓGICO. MAXIMA

Maxima es un sistema informático diseñado para la manipulación de expresiones simbólicas y algebraicas, incluyendo diferenciación, integración, desarrollos en series de Taylor, transformadas de Laplace, ecuaciones diferenciales ordinarias, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, matrices, tensores... Maxima puede también realizar gráficas utilizando funciones matemáticas o tablas de datos en dos y tres dimensiones

Maxima es un programa para trabajar en modo consola (o línea de comandos). Existen, sin embargo, varios interfaces gráficos (GUI) para trabajar de forma más amigable; actualmente los de uso más extendido son xMaxima, wxMaxima, pero hay muchos más.

Maxima se puede descargar de forma gratuita y permite manejar de forma adecuada el manejo de expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones lineales y el manejo de matrices, por lo que supone una "herramienta" adecuada para que los alumnos de bachillerato aprendan a manejar matrices utilizando varias funciones que nos van a permitir calcular determinantes, resolver ecuaciones lineales, reducir expresiones algebraicas, calcular el rango de una matriz y otros muchos resultados que son fundamentales dentro de la programación didáctica que vamos a desarrollar posteriormente.

Para introducir Maxima en nuestra propuesta didáctica, vamos a introducir las principales funciones y comandos de Maxima que nos van a permitir manejar matrices y realizar todos los cálculos y operaciones matriciales estudiadas dentro de los cursos de secundaria.

Como primer paso, para introducir una matriz en Maxima existen varias formas que permiten definir una matriz. Como primer ejemplo, vamos a definir una matriz a partir de los elementos de sus filas; para ello, mediante la instrucción

```
A: matrix([1, 2,4], [4, 3, x], [3, 1, 2]);
```

se obtiene una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & x \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

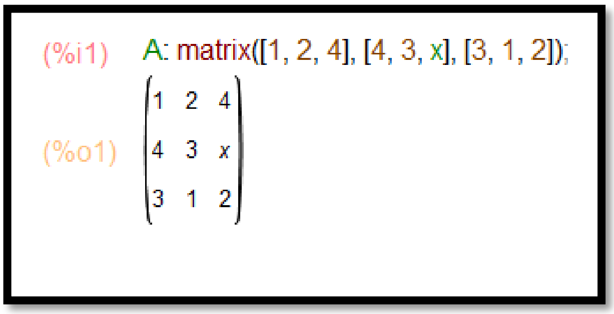


Ilustración 12

En este caso cada una de las filas de la matriz corresponde con los tres vectores introducidos en el comando anterior, por lo que para poder introducir una matriz se tendrá que identificar cada una de las filas e implementarlas dentro del comando. Para ello, introducimos la función **matrix** antes de expresar los elementos de la matriz y separamos cada elemento de las filas dentro de los corchetes con una coma, al igual que ocurre al cerrar cada corchete.

También es posible definir una matriz cuando el valor de un elemento $(i,\ j)$-ésimo de la matriz está definida en función de su posición en la matriz. Como ejemplo, para una matriz de dimensión 4×3 se puede escribir de la siguiente manera:

```
a[i, j]:=i^2+3*j;
genmatrix(a, 4, 3);
```

generando una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \\ 12 & 15 & 18 \\ 19 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

En este caso los elementos de esta matriz verifican la expresión $i^2 + 3j$. Por ejemplo, el elemento de la segunda fila y la segunda columna es igual a $2^2 + 3 * 2 = 10$

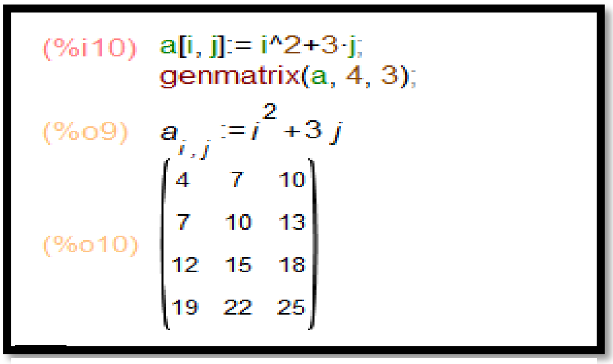


Ilustración 13

También es posible extraer submatrices de una matriz con la función **submatriz** en la que podemos eliminar los elementos de las filas y columnas que se indican.
Un ejemplo que vamos a ilustrar es el siguiente:

```
A: matrix([1, 4, 2], [2, 1, 3], [2, 5, 2]);
submatrix(1, A, 3);
```

A partir de aquí se obtiene la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Para ello, dentro de la función **submatrix**, al escribir la matriz A, se ha indicado previamente las filas que se desean "eliminar" y después las columnas que al igual que en el caso de las filas se desean "quitar". En este ejemplo se ha obtenido de la matriz A definida anteriormente al "eliminar" la primera fila y la segunda columna. Otro ejemplo sería el siguiente:

```
submatrix(1, 2, A, 3);
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$$

en la que se ha eliminado las dos primeras filas y la tercera columna.

También podemos añadir filas o columnas a una matriz mediante los comandos **addrow** y **addcol**. Por ejemplo, si consideramos la matriz A definida en el ejemplo anterior, podemos escribir la siguiente instrucción:

```
addrow(A, [1, 2, 3], [2, 5, 1]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

```
addcol( A, [2, 5, 9]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Para las operaciones de matrices se expresan mediante los operadores $+, -$ y $*$ para la suma, resta y multiplicación de matrices.

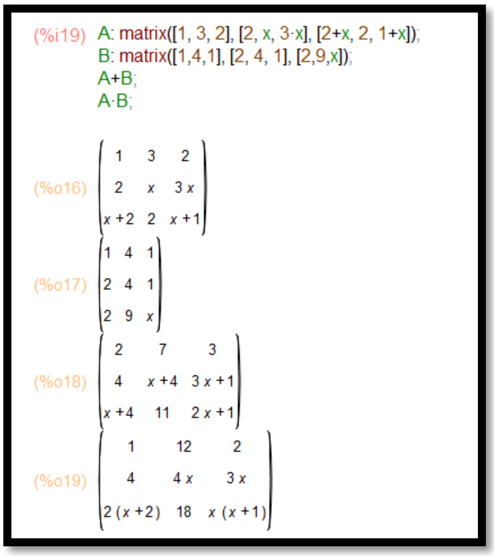


Ilustración 14

En este ejemplo hemos definido dos matrices y realizado su suma y su multiplicación en la que como se puede observar cómo en los ejemplos anteriores que Maxima permite introducir matrices donde sus elementos son expresiones algebraicas, lo cual es útil para el estudio de los sistemas de ecuaciones.

Para poder introducir las principales matrices, existen varios comandos que nos permiten construir matrices conocidas sin tener que estar enumerando todos sus elementos.

Como ejemplo, mediante la función **ident** podemos construir la matriz identidad. Por ejemplo

```
ident(3);
```

da como resultado la matriz identidad de orden tres.

La función **zeromatrix** permite construir matrices con todos sus elementos iguales a cero.

```
zeromatrix(3,4);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se ha obtenido la matriz de dimensiones 3×4.

También es posible calcular la matriz traspuesta, el determinante de una matriz y su inversa mediante las funciones **transpose**, **determinant** e **invert**.

Como ejemplo, a partir una matriz cuadrada vamos a calcular su matriz traspuesta, su determinante y su matriz inversa.

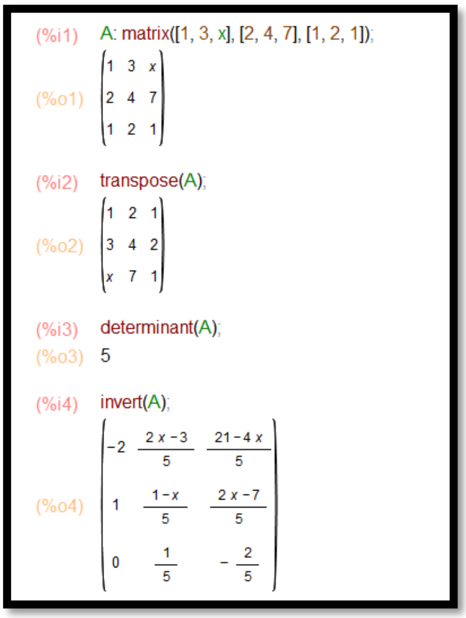


Ilustración 15

Como se puede apreciar, en este ejemplo hemos realizado el cálculo de las operaciones descritas anteriormente con una matriz que tiene un elemento con la expresión algebraica x.

También existen otras funciones como por ejemplo la función **rank** que permite calcular el rango de una matriz y la función **minor** que nos calcula el menor de un elemento. Para la matriz A definida en el ejemplo anterior, si introducimos la instrucción

```
minor(A, 1, 2);
rank(A);
```

nos da como resultado la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con rango tres.

Cuando los coeficientes de un sistema lineal se tengan en forma matricial y los términos independientes en un vector, el sistema se podrá resolver con la función **linsolve_by_lu.**
Como ejemplo, vamos a resolver un sistema lineal de la forma $AX = B$ donde la matriz de coeficientes A y el vector columna B vienen dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```
A: matrix([2, 5, 1], [4, 3, 7], [1, 4, 2]);
B: matrix([1], [3], [9]);
linsolve_by_lu(A,B)
```

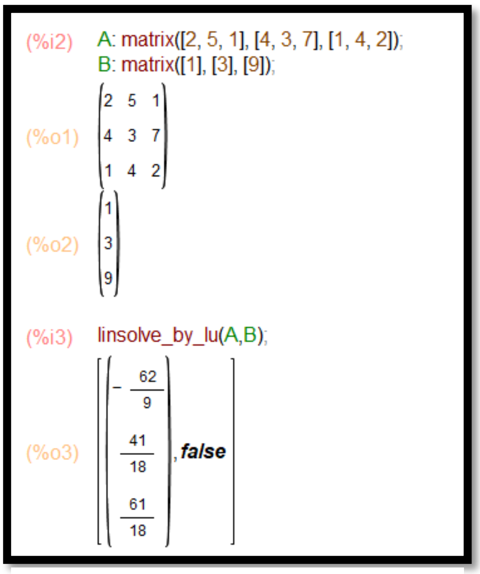


Ilustración 16

En este caso la solución del sistema lineal es igual al vector columna

$$X = \begin{pmatrix} -{}^{62}/_{9} \\ {}^{41}/_{18} \\ {}^{61}/_{18} \end{pmatrix}$$

Como un ejemplo de actividad que resulta de interés para el desarrollo de nuestra propuesta didáctica va a ser el hecho de comprobar los términos del determinante de una matriz cuadrada de orden cuatro. Para ello, si introducimos la instrucción

```
A: genmatrix(a,4,4);
determinant(A);
expand(determinant(A));
```

donde el comando **expand** reduce la expresión algebraica del desarrollo del determinante.

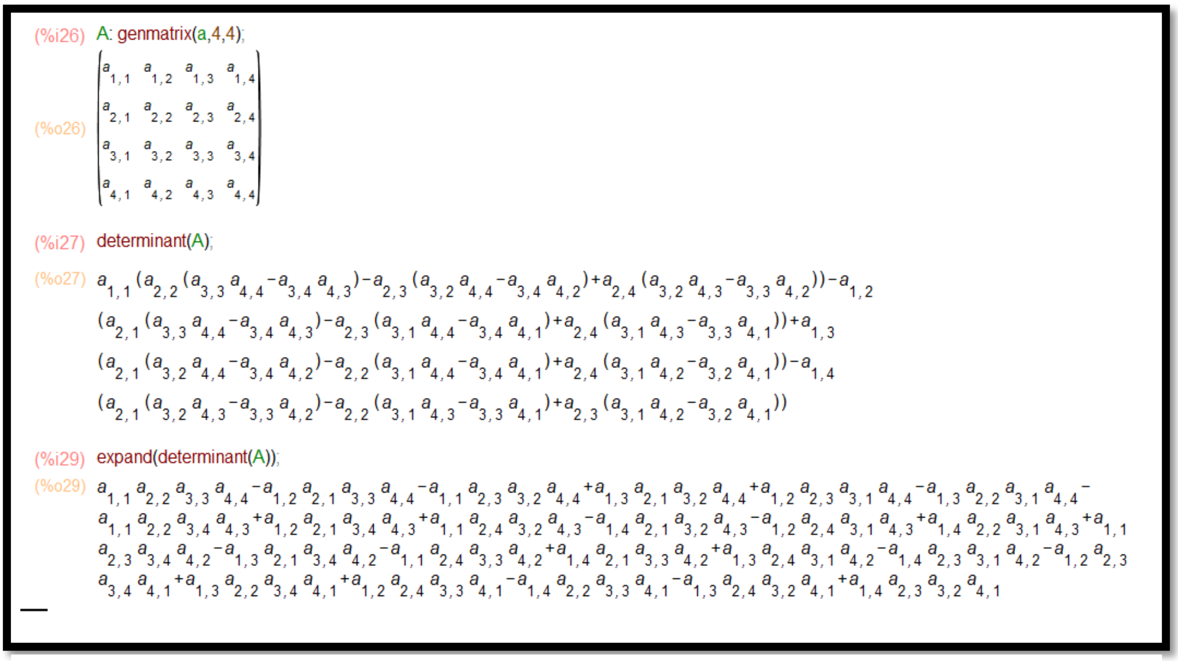


Ilustración 17

En esta ilustración el alumno va a poder observar los términos de una matriz de orden cuatro y comprobar en algunos términos que el signo que acompaña a cada uno de ellos corresponde con el índice del término correspondiente.

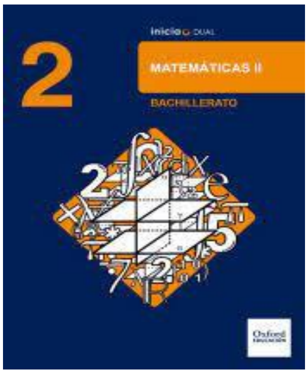
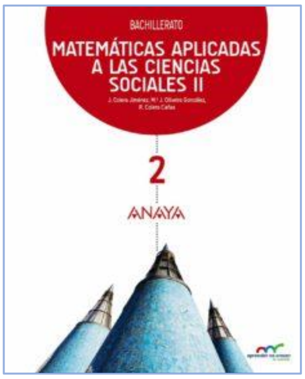
Esta es una primera actividad cuyo objetivo está marcado en una primera observación del determinante de una matriz de orden mayor que tres, donde el cálculo realizado a mano es "laborioso". Maxima nos ha permitido calcularlo de forma "inmediata", por lo que se puede percibir como una "calculadora" para las matemáticas.

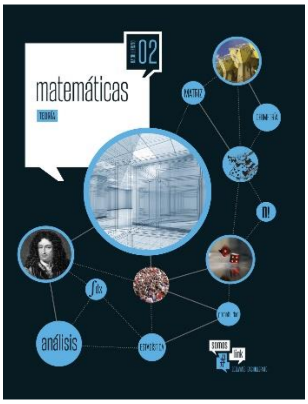
4. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

El libro de texto es uno de los principales recursos utilizado por los docentes en el aula, por lo que es necesario hacer un análisis detallado de las diferentes opciones con las que pueden contar. A continuación, vamos a realizar un análisis de tres libros de texto enfocándonos principalmente en el tema correspondiente a "Determinantes". Nos vamos a centrar en sus contenidos y la forma de razonar y proponer ejercicios y problemas, la claridad y la organización en las explicaciones, reflexión de los procedimientos y formas de afrontar los problemas, así como un análisis comparativo de los tres libros de texto, estableciendo las semejanzas y diferencias existentes entre ellos.

4.1 LIBROS DE TEXTO

Hemos seleccionado tres libros de texto de editoriales diferentes, siendo dos de ellos libros de texto de la asignatura de *Matemáticas II* del segundo curso de Bachillerato y el otro de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Los dos primeros libros de texto que vamos a analizar han sido utilizados en el centro de educación secundaria donde he podido realizar mis prácticas y me ha permitido observar cómo conciben los alumnos las matemáticas. En el caso de la modalidad de *Ciencias y Tecnología* estuve presente durante la impartición de las últimas sesiones de la unidad correspondiente al determinante de una matriz.

<table>
<tr><th>LIBRO DE TEXTO OXFORD</th><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Bescós i Escruela, E., Pena i Terrén, Z., (2016) Matemáticas II
2º Bachillerato Editorial Oxford.
ISBN: 8435157434552</td></tr>
<tr><td>Portada del libro Matemáticas II
2º Bachillerato Editorial Oxford</td></tr>
<tr><th>LIBRO DE TEXTO ANAYA</th><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, Mª. J. y Colera Cañas, R. (2016). Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.
2º Bachillerato Editorial Anaya.
ISBN: 9788469812808</td></tr>
<tr><td>Portada del libro Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato Editorial Anaya</td></tr>
</table>

LIBRO DE TEXTO EDELVIVES	
Cardona García, S., Rey Navarro, J.A. (2016). *Matemáticas II.* 2^o Bachillerato Editorial Edelvives. ISBN:9788414003572	
Portada del libro Matemáticas II 2^o Bachillerato Editorial Edelvives	

4.2 CONTENIDO Y ORGANIZACIÓN

LIBRO DE TEXTO EDITORIAL OXFORD

Este libro de texto está estructurado en un total de catorce unidades, donde la última unidad se titula "*Resolución de Problemas*" y las otras trece unidades están estructurados en cuatro bloques, donde nos vamos a centrar en la parte correspondiente al bloque de Álgebra.

El bloque de Álgebra de la asignatura *Matemáticas II* del curso 2^o de Bachillerato queda estructurado en este libro en los tres primeros temas:

- Tema 1: Sistemas de ecuaciones
- Tema 2: Matrices
- Tema 3: Determinantes

En este análisis del libro nos vamos a enfocar en el tema tres correspondiente a la unidad de determinantes.

Esta unidad cuenta con una pequeña introducción histórica breve del determinante, un total de siete **apartados**, un apartado de **ejercicios resueltos** y una lista de **ejercicios y problemas** con una pequeña **autoevaluación**.

APARTADOS

Apartado 1: Determinantes de segundo orden (2 páginas)

En este apartado, se discute la resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de forma generalizada, obteniendo así la fórmula del determinante de una matriz y la fórmula de Cramer en el caso de matrices cuadradas de orden dos.

Apartado 2: Determinantes de tercer orden (5 páginas)

En este segundo apartado se expone la fórmula general del determinante de matrices de orden tres sin calcular la discusión de un sistema de orden tres, definiendo el menor complementario y el adjunto de un elemento de una matriz. Después se describe la regla de Sarrus junto con una ilustración gráfica usando grafos y por último se describe el método de Cramer junto con unos ejemplos resueltos en matrices de orden tres.

Apartado 3: Determinantes de orden n (1 página)

Aquí se expone la definición general del determinante de una matriz de orden n por su desarrollo a través de la primera columna y la fórmula de Cramer para un sistema de n ecuaciones lineales y n incógnitas.

Apartado 4: Propiedades de los determinantes (1 página)

Aparecen enunciadas seis de las propiedades principales del determinante, así como un ejemplo de su aplicación en cada uno de ellas.

Apartado 5: Cálculo de la matriz inversa aplicando los determinantes (2 páginas)

Aparece la definición de matriz adjunta de una matriz cuadrada de orden n, así como la relación entre el determinante y la inversa de una matriz y el cálculo de la inversa usando determinantes.

Apartado 6: Cálculo del rango de una matriz aplicando los determinantes (3 páginas)

Se recuerda la definición de rango de una matriz como el número de filas o columnas linealmente independientes. A continuación, se define el menor de orden k de una matriz A de dimensiones $m \times n$, así como una nueva definición del rango de una matriz:

$$Se\ denomina\ rango\ de\ una\ matriz\ al\ orden\ del\ mayor\ menor\ distinto\ de\ cero$$

Por último, se describe el proceso del cálculo del rango mediante el uso del determinante mediante un ejemplo extendido y detallado.

Apartado 7: Teorema de Rouché-Fröbenius (5 páginas)

Se enuncia de manera rigurosa junto con un ejemplo el teorema de Rouché-Fröbenius, estableciendo la relación entre el rango de la matriz de coeficientes, el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas del sistema, así como un ejercicio resuelto de un problema de discusión de un sistema de ecuaciones a partir del valor de un parámetro desconocido.

En todos los apartados vienen ejercicios y ejemplos resueltos bastantes completos e ilustrativos del temario de cada apartado, con pequeñas observaciones que aparecen remarcadas en cada ejemplo y una o dos actividades planteadas para que sean realizadas por los alumnos.

Al final de esta unidad aparecen un total de diez ejercicios resueltos con explicaciones de los pasos realizados, una lista de 48 ejercicios y problemas distribuidos en cuatro páginas donde el alumno podrá poner en práctica todo el temario de esta unidad y una pequeña autoevaluación donde hay un total de siete ejercicios a realizar para poder evaluar los principales objetivos de esta unidad.

El contenido de esta unidad está perfectamente ajustada a los contenidos fijados en el BOCyL (*ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015*) y tiene breves anotaciones históricas y complementarias al lado de todas las explicaciones teóricas que ayudan a entender el temario de las unidades. Todos los temas están muy bien presentados con ejercicios resueltos y una lista de ejercicios propuestos para el alumno.

<u>LIBRO DE TEXTO EDITORIAL ANAYA</u>

Este libro de texto de la asignatura de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II* de 2^o de Bachillerato está compuesto por un total de trece unidades estructuradas en un total de tres bloques:

- Álgebra
- Análisis
- Estadística y probabilidad

En esta especialidad de matemáticas el bloque de geometría no se encuentra presente. Por tanto, los determinantes están enfocados a la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones, por lo que el enfoque dado con respecto a los otros dos libros es ligeramente diferente.

Antes de empezar la primera unidad, encontramos un tema introductorio titulado *Resolución de Problemas* (al igual que ocurría con el libro de la editorial Oxford, con la diferencia de que en el de Oxford aparecía en el último tema) donde se presentan pautas y consejos que hay que seguir a la hora de afrontar un problema. Aparecen descritas las diferentes formas de resolver un problema, como por ejemplo el método inductivo, las equivalencias entre dos o más proposiciones, el método de reducción al absurdo…

Aparecen descritas las diferentes formas de poder resolver problemas y demostrar proposiciones y teoremas debido a que a menudo se desconocen muchos de estos métodos para poder afrontar las demostraciones en el ámbito universitario.

En este libro el bloque de Álgebra queda estructurada en un total de cuatro temas correspondientes a los cuatro primeros temas del libro:

- Tema 1: Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss.
- Tema 2: Álgebra de matrices.
- <u>Tema 3: Resolución de sistemas mediante determinantes.</u>
- Tema 4: Programación lineal.

A continuación, vamos a realizar un análisis del contenido y la estructura de tema tres correspondiente a la unidad de determinantes. Esta unidad empieza con una introducción histórica del determinante de una matriz detallada, cuenta con un total de diez apartados, una lista de **ejercicios y problemas** y una pequeña **autoevaluación**.

APARTADOS

Apartado 1: Determinante de orden dos (1 página)
Se presenta la fórmula del determinante de una matriz de orden dos junto con una pequeña observación para poder recordar mejor su fórmula.

Apartado 2: Determinante de orden tres (3 páginas)
Describe la fórmula del determinante de una matriz de orden tres junto con una breve descripción de la regla de Sarrus y aparecen enumeradas las propiedades fundamentales del determinante.

Apartado 3: Menor complementario y adjunto (1 página)
Aparece definido el "menor" de orden r de una matriz, el menor complementario de un elemento de una matriz cuadrada y su adjunto.

Apartado 4: Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea (1 página)

Se explica el desarrollo de un determinante de una fila o una columna usando adjuntos.

Apartado 5: El rango de una matriz a partir de sus menores (1 página)
Se recuerda la definición del rango de una matriz como el número de filas o columnas linealmente independientes y se vuelve a definir como el máximo orden de sus menores no nulos.

Apartado 6: Criterio para saber si un sistema es compatible (1 página)
Se enuncia la condición que aparece definida en el teorema de Rouché para saber si un sistema es compatible usando el rango (en este caso la intención es calcular el rango con el determinante).

Apartado 7: Regla de Cramer (2 páginas)
Aparece enunciada la regla de Cramer para un sistema de ecuaciones de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas y su aplicación en otro tipo de sistemas.

Apartado 8: Sistemas homogéneos (1 página)
Se define qué es un sistema homogéneo y se enuncia el criterio para saber si tiene soluciones utilizando el rango.

Apartado 9: Discusión de sistemas mediante determinantes (2 páginas)
En este apartado hay un total de cuatro ejercicios resueltos sobre la discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales usando determinantes.

Apartado 10: Cálculo de la inversa de una matriz (1 página)
Aparece descrito el proceso para calcular la inversa de una matriz de orden tres utilizando determinantes.

En cada uno de los diez apartados aparecen siempre varios ejemplos de ejercicios resueltos y una pequeña lista de ejercicio propuestos muy parecidos a los que aparecen resueltos.

A lo último de la unidad hay una lista de ejercicios y problemas resueltos muy detallados con todo el contenido de la unidad y una lista de 56 ejercicios y problemas propuestos muy completos.

El contenido de esta unidad se ajusta perfectamente al establecido en el BOCyL (*ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015*), notando diferencias notables con respecto al contenido que se estudia dentro de la asignatura *Matemáticas II*. Tiene una buena estructura sabiendo presentar todos los contenidos con ejercicios resueltos que facilita mucho los procedimientos para saber aplicar bien el determinante en las matrices. Sin embargo, desde nuestro punto de vista, el contenido teórico está presentado a lo largo de toda la unidad con "pocas" justificaciones o demostraciones del contenido desarrollado lo que reduce todo este temario a la aplicación de un pensamiento "algorítmico".

LIBRO DE TEXTO EDITORIAL EDELVIVES

Este libro de texto cuenta con un total de doce unidades estructuradas en los bloques correspondientes en esta materia.
El bloque de Álgebra está dividido en dos unidades:

- Tema 1: Matrices y determinantes
- Tema 2: Sistemas de ecuaciones lineales

En este apartado nos vamos a centrar en el primer tema ya que es donde aparece definido el determinante y sus propiedades.
Esta unidad está estructurada en un total de siete apartados y una página al final con ejercicios y problemas propuestos.

APARTADOS

Apartado 1: Definición de matriz (2 páginas)
Se define el concepto de matriz, la dimensión de una matriz y las principales matrices elementales, como por ejemplo la matriz nula y la matriz identidad.

Apartado 2: Operaciones con matrices (4 páginas)
Se describen las principales operaciones básicas de matrices con diversos ejemplos ilustrados.

Apartado 3: Determinantes (2 páginas)
Aparecen descritas la fórmula del determinante para matrices de orden dos y orden tres, se define el menor complementario y el adjunto de un elemento de una matriz cuadrada y la fórmula general del determinante de una matriz cuadrada.

Apartado 4: Propiedades de los determinantes (4 páginas)
Se enumeran las propiedades de los determinantes con ejemplos de su aplicación en una matriz de orden tres.

Apartado 5: Rango de una matriz (4 páginas)
Se define el concepto de rango y su cálculo a partir de su definición o aplicando determinantes.

Apartado 6: Matriz inversa (4 páginas)
Se define la inversa de una matriz y se detalla los diferentes métodos para calcularla, ya sea a partir de su definición o usando determinantes.

Apartado 7: Ecuaciones y sistemas matriciales (2 páginas)
Aquí aparecen varios ejemplos de ecuaciones matriciales resueltos donde se utilizan las propiedades de las operaciones elementales de matrices y la inversa de una matriz.

Después de todos estos apartados hay una página con un total de diecinueve ejercicios y problemas propuestos. Los ejercicios propuestos están planteados de forma apropiada para desarrollar y aplicar correctamente los contenidos de esta unidad.

El contenido de esta unidad se ajusta perfectamente al establecido en el BOCyL (*ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015*). Presenta una estructura adecuada y una división del contenido adaptado, pero la cantidad de ejercicios resueltos es más escasa respecto a los de los dos libros de texto anteriores. Además, desde nuestro punto de vista no se puede apreciar razonamientos analíticos o geométricos en el concepto de determinante y sus propiedades. El hecho de estar presente esta unidad antes de haber estudiado el tema correspondiente al estudio y resolución de sistemas de ecuaciones lineales provoca que no se pueda explicar con mucha claridad conceptos como el rango, el determinante, la inversa de una matriz…

4.3 ANÁLISIS COMPARATIVO DE LIBROS DE TEXTO

A lo largo de este aparado, las comparaciones y los comentarios realizados están dados desde nuestro punto de vista, pudiendo no coincidir con la opinión de otros lectores que puedan no compartir el desarrollo que vamos a exponer a continuación.

Al comparar los tres libros podemos afirmar que se ajustan perfectamente a los contenidos establecidos dentro del BOCyL (*ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo de 2015*) estando estructurados de una forma apropiada todo el contenido desarrollado.

La inclusión de temas históricos es apropiada en todos los libros de texto, pero he de destacar en este aspecto el libro de la editorial Anaya, donde al comienzo de cada unidad hay anotaciones y aclaraciones bastante detalladas sobre inclusiones históricas relacionadas con el contenido de cada unidad que incentivan la curiosidad del lector.

En lo que respecta a la presentación, los tres libros tienen buenos esquemas, con recuadros correctamente marcados y divisiones de las explicaciones, pero en este caso voy a destacar los libros de la editorial Anaya y la editorial Edelvives, los cuáles permiten diferenciar de forma visual las explicaciones teóricas y los ejercicios resueltos

En el análisis, la cantidad y la rigurosidad de las justificaciones y demostraciones de los procesos realizados he de mencionar el libro de Oxford. A lo largo de todas las unidades las explicaciones y los razonamientos seguidos en la resolución de los problemas están bien definidas, con ilustraciones que complementan de forma adecuada las explicaciones y comentarios sobre la importancia de las resoluciones en algunos problemas.

En las unidades correspondientes al bloque de geometría hay ilustraciones en cada explicación que ayudan a entender de una manera más intuitiva las operaciones con vectores en el plano y en el espacio y las superficies como la esfera, el elipsoide, el hiperboloide de dos hojas...

Los libros de Anaya y Oxford tienen una cantidad razonable de ejercicios y problemas propuestos en los que hay que aplicar todos los contenidos de cada unidad y relacionan muy bien todo el temario aplicando los resultados y razonamientos que se deben de adquirir en cada unidad.

El libro de la Editorial Anaya resalto su manera de introducir contextos y aclaraciones históricas que sirven como una introducción muy adecuada en cada unidad.

El libro de la editorial Edelvives destaca por su buena presentación al igual que ocurre con el libro de Anaya y el libro de Oxford por su análisis exhaustivo de los problemas y el contenido.

OXFORD	ANAYA	EDELVIVES
- Contenidos y ejercicios bien justificados. - Ajustada correctamente a los contenidos establecidos. - Ilustraciones e imágenes muy visuales. - Problemas y ejercicios propuestos. -Adaptación de los problemas en nuestro entorno.	- Buena estructura de los temas. - Ajustada a los contenidos establecidos. - Tema introductorio de resolución de problemas. - Temas históricos - Esquematización excelente -Ejercicios y ejemplos resueltos. - Problemas adaptados a nuestro entorno.	- Buena estructuración. -Ejemplos y ejercicios resueltos -Muy ajustada a los contenidos establecidos. - Esquematización buena.

Como en la asignatura de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II* no aparece el determinante de orden n ya que en el BOCyL (*ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo de 2015*) solo se indica el estudio de determinante en matrices cuadradas de orden dos y orden tres, nos vamos a centrar en los libros de las editoriales de Oxford y Edelvives, donde vamos a establecer una comparación sobre la unidad correspondiente a los determinantes.

En el libro de Oxford, para el determinante de orden dos, se realiza una discusión de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y demuestra el determinante de orden dos de la manera en la que los demostramos anteriormente. Define el determinante de orden dos y demuestra la fórmula de Cramer en el caso de $n = 2$.

Como ejemplo, aparece resuelto el siguiente sistema de ecuaciones lineales usando las fórmulas de Cramer

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y después hay dos actividades propuestas idénticas al ejemplo.

Para el determinante de orden tres, aunque no se demuestra su definición discutiendo un sistema, si deja indicado que se deduciría el determinante de la misma manera que en el caso de matrices de orden dos. Se describe la relación que hay entre la fórmula del determinante de orden tres y la de orden dos, definiendo en esta parte el menor complementario y el adjunto de un elemento de una matriz, al igual que se formula el método de Cramer para orden tres.

Como ejemplos, aparecen varios ejercicios resueltos de sistemas de ecuaciones lineales de tres incógnitas utilizando el método de Cramer.

Para el determinante de una matriz de orden n, mediante la descripción general de un sistema de ecuaciones lineales aparece definido el determinante de orden n y el método de Cramer para un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.
Para las propiedades de los determinantes, en este caso aparecen enunciadas las principales propiedades con un ejemplo en cada caso, pero no justifica su demostración.

En general, desde nuestro punto de vista en el libro de Oxford el concepto de determinante y sus propiedades aparecen muy buenas justificaciones y te indica qué es el determinante. Sin embargo, no está definido el determinante utilizando permutaciones, lo que hace "pensar" en la existencia de una definición formal del determinante.

En el caso del libro de la editorial Edelvives, se exponen las fórmulas del determinante para matrices cuadradas del orden dos y orden tres sin ninguna mención ni justificación de la obtención de dichas fórmulas y se define el determinante de forma general definiendo el menor complementario y el adjunto de un elemento. Después hay un ejemplo del cálculo de un determinante de orden poco detallado
Todo esto aparece explicado en dos páginas, por lo que no se establece ninguna reflexión o relación alguna del cálculo de alguna de las fórmulas con la resolución de un sistema de ecuaciones.

Las propiedades de los determinantes vienen enunciadas sin ninguna demostración o justificación, pero el análisis realizado sobre su aplicación para poder calcular el determinante a partir de las propiedades es más exhaustivo. Por ejemplo, cuando aparece la siguiente propiedad enunciada de la siguiente manera:

Si a una de las "líneas" de un determinante se le suma o resta una combinación lineal de las "líneas" paralelas, el valor del determinante no varía.

Como ejemplo aplicando esta propiedad, aparece resuelto el cálculo del determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

junto con los siguientes consejos:

- *Se escoge una línea que contenga a un 1 o un* -1 *o, en su defecto, una en la que todos los elementos sean múltiplos.*
- *Si el determinante es de orden* n*, se hacen ceros* $n-1$ *elementos de la "línea" escogida.*
- *Para hacer ceros en una fila, se combinan columnas, y para hacerlo se combinan filas.*
- *Hay que usar combinaciones sencillas del tipo:* $i =$ *"línea"* $i \pm k$ *"línea"* j.
- *Nunca se ha de multiplicar por ningún número la "línea" que va a ser modificada.*

Ambos libros se ajustan perfectamente a los objetivos marcados dentro del BOCyL (*ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015*), se aprecia un respeto hacia el lector y sabe utilizar un lenguaje matemático apropiado en todo momento. Sin embargo, desde mi punto de vista, el temario es más detallado en el libro de Oxford, donde la rigurosidad y las justificaciones de las definiciones y las demostraciones de los resultados estudiados es más "profunda".

Comparando los dos libros en la parte correspondiente a determinantes, mientras que el libro de Oxford está muy encaminado a entender bien los procesos y definiciones, el libro de Edelvives está muy enfocado a realizar ejercicios presentando sus resoluciones como "pasos", sin entender bien que se está resolviendo.

Ambos libros están perfectamente adaptados a una correcta enseñanza del correspondiente curso de Bachillerato, pero desde mi punto de vista el libro de Oxford es más analítico y presenta numerosos problemas y ejercicios resueltos, mientras que el libro de Edelvives cuenta con un número menor de problemas propuestos, por lo que el alumno no va a poder poner en práctica todos los conocimientos adquiridos en esta unidad de una manera tan detallada que en el libro de la editorial Oxford.

5. PROPUESTA DIDÁCTICA

En este apartado del trabajo se expone una propuesta didáctica centrada en el desarrollo del determinante en secundaria. Esta propuesta didáctica va a estar enfocada a suplir las deficiencias que desde nuestro punto de vista aparecen establecidas en secundaria, en las que a menudo aparecen las definiciones de determinante y sus propiedades de forma poco "justificada" en la que se nota un cierto pensamiento "algorítmico" que como hemos comprobado en el análisis realizado de los libros de texto anteriores, las propiedades aparecen sin demostraciones con solo ejemplos resueltos en los que se "aplica" cada propiedad.

Para su realización se ha tenido en cuenta todo el contenido desarrollado anteriormente, como el estudio de la interpretación geométrica del determinante que no aparece mencionada en los libros de texto. Para todo ello, el profesor se adaptará al nivel académico de cada uno de los alumnos, estableciendo una serie de objetivos claros que permitan un aprendizaje significativo el cuál permita desarrollar las capacidades necesarias para afrontar los problemas y los contenidos desarrollados en esta unidad.

El apoyo en los recursos TIC va a suponer un aspecto clave en esta propuesta didáctica que va a permitir un gran avance en el cálculo de todas las operaciones algebraicas y matriciales. En esta unidad nos centraremos en el uso de los programas Geogebra y Maxima, que nos van a ayudar a mostrar las propiedades geométricas y realizar todos los cálculos necesarios para desarrollar los determinantes y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

La siguiente propuesta didáctica está estructurada en los siguientes apartados:

- Introducción contextual.
- Objetivos didácticos.
- Competencias clave.
- Contenidos.
- Metodología.
- Recursos.
- Temporalización.
- Actividades de aprendizaje y enseñanza.
- Planes complementarios.
- Evaluación.
- Atención a la diversidad.
- Autoevaluación didáctica.

5.1 INTRODUCCIÓN CONTEXTUAL

Nos encontramos en la asignatura de *Matemáticas II* del segundo curso de Bachillerato del ámbito *Científico-Tecnológico* que tiene la siguiente estructura:

- Bloque 1: Contenidos comunes
- Bloque 2: Álgebra
- Bloque 3: Geometría
- Bloque 4: Funciones
- Bloque 5: Estadística y probabilidad

La unidad didáctica que vamos a desarrollar pertenece al Bloque de Álgebra donde se estudian las unidades correspondientes a matrices y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que posteriormente son utilizadas en el siguiente bloque para calcular posiciones relativas de rectas y planos, intersecciones de rectas y planos y otros muchos resultados.

Los contenidos del bloque de matrices que están establecidos en el BOCyL (*ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo)* son los siguientes:

Contenidos
• Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. • Clasificación de matrices. Operaciones. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales. • **Determinantes. Propiedades elementales. Menor complementario y matriz adjunta**. **Rango de una matriz**. **Matriz inversa**. • Ecuaciones matriciales. Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, posiblemente dependientes de un parámetro. • Método de Gauss**.** Teorema de Rouché-Frobenius. Regla de Cramer. • Aplicación a la resolución de problemas

En esta propuesta didáctica nos vamos a centrar en la definición de determinante y sus propiedades, estableciendo las definiciones rigurosas del determinante y sus propiedades algebraicas y geométricas descritas a lo largo de este presente trabajo. Para ello, vamos a utilizar ciertos contenidos que no aparecen establecidos en el BOCyL (*ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo*) pero que son aplicables en un curso de Bachillerato y permitirán comprender de una forma más rigurosa el concepto de determinante y su interpretación geométrica.

Conocimientos previos

Para que el alumno logre una correcta asimilación de los contenidos nuevos, es necesario que el alumno posea una serie de conocimientos previos:

- Conocer la definición de matriz y sus operaciones suma y producto.
- Identificar las principales matrices básicas (matriz identidad, traspuesta de una matriz…)
- Comprender la definición de rango de una matriz.
- Distinguir las distintas operaciones fundamentales en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Dominar el método de Gauss y saber aplicarlo en contextos de la vida real.
- Definición rigurosa de función biyectiva y realizar correctamente la composición de dos o más funciones.
- Saber calcular la ecuación de una recta en el plano euclídeo.
- Interpretación geométrica de la suma de vectores y su producto por un escalar.
- Identificar triángulos y otros polígonos congruentes.
- Manejar el producto escalar y sus propiedades. Ángulo entre dos vectores.

El método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales, las operaciones elementales con vectores y el producto escalar y sus propiedades son contenidos estudiados en la asignatura de *Matemáticas I*, por lo que se puede apreciar la importancia de los contenidos de cursos anteriores en la que no solo se desarrollan conceptos dentro del bloque de Álgebra de otros cursos, sino que también nos vamos a enfocar en desarrollar la interpretación geométrica del determinante y su relación con el área y el volumen, conceptos fundamentales para los cursos posteriores dentro de la etapa universitaria. En gran parte de los grados universitarios el papel que desempeñan las matrices y el determinante es fundamental ya que, dentro del estudio de los espacios vectoriales, las aplicaciones lineales, la matriz de Jordan y otros muchos resultados el manejo y la importancia de las matrices y el determinante es fundamental para su desarrollo.

5.2 OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Los objetivos didácticos planteados en esta unidad didáctica son los siguientes:

1. Comprender la definición algebraica de determinante mediante la discusión de un sistema de ecuaciones lineales y saber resolver problemas aplicados en contextos de la vida real usando las matrices y el determinante.
2. Aplicar las propiedades del determinante que nos van a permitir establecer relaciones entre las operaciones elementales de las matrices y las combinaciones lineales de vectores.

3. Definir el concepto de función biyectiva y saber establecer que propiedades se mantienen entre dos conjuntos a través de una biyección.
4. Conocer el concepto de permutación y dominar el cálculo del índice a través de varios métodos.
5. Establecer la relación entre el concepto de volumen y el determinante. Aplicar el determinante para calcular el volumen de figuras sencillas.
6. Comprender la definición de determinante usando permutaciones y su equivalencia con el desarrollo del determinante por filas o columnas.
7. Saber calcular el rango de una matriz mediante el determinante y establecer la existencia de soluciones en un sistema de ecuaciones lineales.
8. Dominar el uso de programas informáticos que permitan realizar cálculos matriciales y nos permiten desarrollar y reducir expresiones algebraicas (como el desarrollo del determinante de una matriz cuadrada) y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

5.3 COMPETENCIAS CLAVE

Desde las instituciones de la Unión Europea se recomienda la adquisición de las competencias clave como una necesidad indispensable para todos los alumnos y se señala especialmente su importancia para un correcto aprendizaje en cada una de las materias que se imparten en secundaria. Además, es importante saber entrelazar el contenido y las habilidades en cada una de las asignaturas para poder contribuir a un desarrollo completo del alumno.

Entonces las competencias clave se contemplan como conocimiento en la práctica, es decir, un conocimiento adquirido a través de la participación activa del alumno en prácticas sociales, por lo que se pueden desarrollar tanto en el contexto educativo formal a través del currículo, como en los no formales e informales.

Por lo tanto, las competencias se conceptualizan como un aprendizaje permanente que han de ser entrenadas en todo momento y se van adquiriendo con el tiempo. Preparan al alumno para una correcta evolución dentro del mundo globalizado.

Las competencias clave se dividen en siete competencias que vamos a pasar a describir a continuación.

Competencia matemática y competencias básicas en ciencias y tecnología (CM)

El contenido del área de matemáticas está íntimamente relacionado con la adquisición de estas competencias. Esta habilidad está presente en la identificación y aplicación de los diferentes contenidos, argumentos y razonamientos para la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo, la contribución a la competencia matemática se logra en la medida en que el aprendizaje de dichos contenidos va dirigido a su utilidad dentro de la vida cotidiana fuera del entorno educativo. También el desarrollo de las destrezas y habilidades dentro del pensamiento matemático contribuye al desarrollo de las competencias básicas en ciencias y tecnología. La presencia de las matemáticas en las ciencias y la tecnología es cada vez mayor, ya que suponen una herramienta necesaria en todos los ámbitos.

- En esta unidad se desarrolla rigurosamente el concepto de determinante, sus propiedades y su interpretación geométrica, estableciendo una mejor comprensión de su utilidad y su aplicación tanto en la resolución de sistemas como en su estrecha relación con la geometría. También las nuevas tecnologías nos van a ayudar a adquirir también su importancia en las ciencias y en nuestra vida cotidiana.

Competencia en comunicación lingüística (CL)

Los alumnos deben de tener la capacidad de saber utilizar el lenguaje como un medio de comunicación para saber interpretar de forma correcta los problemas planteados y saber expresarse idóneamente y saber traducir los problemas matemáticos a la vida cotidiana.

Para su desarrollo es necesario adquirir las principales expresiones y razonamientos del lenguaje matemático, indispensables para poder entender y resolver los problemas matemáticos de una manera formal y sistematizada.

- En concreto en esta unidad se aportan estructuras lingüísticas y gramáticas que deben ser interpretadas correctamente por el alumno. Surgen razonamientos y contenidos relacionados con aquellos dados anteriormente que requieren el desarrollo de nuevos desarrollos y notaciones que permiten expresar de diversas maneras algunos contenidos, como las diferentes formas de expresar una matriz o las formas de poder expresar una permutación.

Competencia Digital (CD)

El desarrollo de las nuevas tecnologías y el dominio de las herramientas informáticas son cada vez más importantes dentro del área de las matemáticas. Permiten hacer más “divertidas” las matemáticas a los alumnos y nos ayudan a hacer más “accesibles” conceptos abstractos gracias al papel que desempeñan las matemáticas por ejemplo dentro del desarrollo de los videojuegos o el uso de páginas web.

- El desarrollo de esta competencia se desarrolla a través del uso de diversos programas informáticos, como el ***Maxima***, que nos facilitará el cálculo de las operaciones matriciales y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. También con el programa ***Geogebra*** vamos a poder visualizar la parte geométrica del determinante. De esta forma se incentiva el uso de herramientas informáticas que ayuda a poder manejar las matrices de una manera más accesible.

Competencia de aprender a aprender (AA)

Es indispensable para el aprendizaje de los alumnos la posibilidad de utilizar diversas herramientas matemáticas y saber comprender la información que reciben de ellas.

Para el desarrollo de esta competencia es necesario incidir en los contenidos relacionados con la autonomía, la perseverancia, el esfuerzo, la reflexión y análisis crítico al abordar diferentes situaciones de complejidad. También es necesario potenciar el desarrollo de estrategias y formas de facilitar el aprender a aprender, ya que es importante transmitir diversas formas de poder afrontar los problemas y entender los contenidos necesarios.

- En esta unidad el alumno aprenderá diversas formas de poder definir el determinante, así como saber comprender de una forma adecuada sus propiedades y las formas de poder comprender y aplicar su utilización en los problemas de una forma más práctica. Para ello, se establecerán todas las justificaciones y demostraciones necesarias que permitan un mejor entendimiento de los conocimientos establecidos, así como las diferentes formas de razonar y resolver los problemas de la unidad correspondiente.

Competencia social y cívica (CSC)

Con esta competencia se busca reforzar la capacidad de trabajo en equipo, ya que se inculcan aspectos como la aceptación de distintos puntos de vista, o distintas formas de proceder a las soluciones matemáticas. Con la imposición de trabajos que necesiten la participación de varios compañeros fomentamos esta competencia.

- En esta unidad se desarrollará esta competencia con la realización de un trabajo grupal y el uso de programas informáticos de forma grupal donde se fomentará la necesidad de desarrollar una buena relación y coordinación entre los compañeros.

Sentido de Iniciativa y Espíritu Emprendedor (SIEE)

En esta competencia el alumno desarrolla una serie de aptitudes que les permiten desarrollar sentido de iniciativa y mayor confianza en sus capacidades personales. Se fomentará la autonomía en el desarrollo de problemas y el espíritu para afrontar retos, siendo constantes en el trabajo y en la superación de dificultades.

- Una buena manera de fomentar esta competencia es potenciar el uso de herramientas informáticas y algunos recursos didácticos manipulativos donde el alumno pueda apreciar la importancia del determinante. Además, el uso que se le proporciona a las matrices y los determinantes en las demás ciencias puede incentivar al alumno y promover un desarrollo adecuado de su creatividad.

Conciencia y expresiones culturales (CEC)

Las matemáticas son parte de nuestra cultura y están muy presentes en nuestro entorno. Además, hay que saber valorar todos los progresos conseguidos gracias a su desarrollo a lo largo de la historia y la importancia que ha supuesto para todas las demás ciencias. La geometría está muy presente en la arquitectura, por lo que es una de las ramas de las matemáticas que se puede apreciar mejor. La importancia también de las matrices ha supuesto un gran avance en nuestra sociedad, ya que no solo han servido para resolver sistemas de ecuaciones lineales, sino que dio lugar a la teoría de grafos y otras muchas ramas presentes tanto en la ingeniería, economía y otras ramas.

- Esta competencia se desarrollará con los alumnos mostrando la evolución histórica de las matrices y los determinantes, haciendo algunas menciones sobre la importancia que tuvieron algunos matemáticos como por ejemplo Leibniz, Gauss, Cauchy y otros muchos más en el desarrollo tanto de las matrices como los determinantes.

5.4 CONTENIDOS

Los contenidos que vamos a desarrollar en esta unidad se clasifican en contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales.

1. Contenidos conceptuales

- Definición de determinante de matrices de segundo y tercer orden.

- Método de Cramer en matrices de segundo y tercer orden.

- Definición de permutación. Transposiciones e índice de una permutación.

- Definición de ciclo. Cálculo del índice de una permutación usando ciclos.

- Definición de determinante a través de las permutaciones.

- Desarrollo del determinante por filas o columnas. Menor complementario y matriz adjunta.

- Propiedades de los determinantes.

- Definición del área de dos vectores en el plano.

- Cálculo del área de dos vectores. Propiedades del área.

- Relación del área y volumen de vectores con el determinante.

2. Contenidos procedimentales. *(Aportación de herramientas para realizar creaciones propias)*

Se explicará cada uno de los pasos a seguir para que el alumno pueda adquirir habilidades en el manejo de las matrices y los determinantes en varios contextos.

- Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss.

- Usar el determinante para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

- Identificar correctamente los términos en el desarrollo de las fórmulas de los determinantes.

- Aplicar las propiedades del determinante para calcular determinantes de mayor orden.

- Aprender a usar algunos programas informáticos relacionados con el cálculo de matrices.

- Manejar el concepto de función biyectiva y permutación.

- Saber utilizar las permutaciones y el índice para calcular el determinante.

- Comprender la relación existente entre el volumen de vectores y el determinante.

- Calcular el volumen formado por varios vectores.

3. Contenidos actitudinales. (*Aportaciones para un desarrollo de educación en valores)*

A través de los siguientes contenidos, se inculca ciertas formas de conducta y educación en valores.

- Limpieza y orden a la hora de plantear los problemas.

- Razonamiento analítico y geométrico en las demostraciones.

- Gusto e interés por entender los conceptos relacionados con matrices.

- Buena presentación.

- Confianza en las capacidades de uno mismo para afrontar los problemas y expresar las soluciones.

- Manejo apropiado de las nuevas tecnologías para el estudio de las matemáticas.

- Saber reflexionar sobre los errores cometidos.

- Respeto y confianza con los compañeros.

5.5 METODOLOGÍA

La metodología se puede definir como el conjunto de normas y decisiones que se aplican en un aula para lograr los objetivos planteados en la unidad y poder contribuir de manera adecuada al desarrollo de las competencias clave. El profesor tiene que adaptarse al tiempo y el espacio necesario en cada unidad, valiéndose de los recursos y los diferentes medios que permitan un desarrollo óptimo de las clases.

En esta propuesta didáctica, la metodología que se va a emplear será una combinación de exposición magistral participativa, donde el alumno podrá participar de forma activa en la clase tras la asimilación de conceptos y de aprendizaje cooperativo donde los alumnos se apoyarán entre ellos para un correcto aprendizaje que permita un mayor acercamiento entre los compañeros y aprender a trabajar de forma grupal, un aspecto fundamental a la hora de poder desempeñar un empleo en el mundo laboral.

Lección magistral participativa

La lección magistral participativa consiste en exponer y explicar los diferentes contenidos y conocimientos que se describen en la unidad, donde se pueden resolver dudas o plantear problemas permitiendo las intervenciones de los alumnos en todo momento para poder exponer sus dudas o propuestas y reflexiones sobre el contenido o la resolución de problemas.

El profesor irá utilizando los recursos disponibles (pizarra, pizarra digital, proyector…) y los alumnos podrán ir tomando los apuntes y las anotaciones necesarias.

Esta es una de las metodologías más empleada en el aula y es importante tener en cuenta numerosos aspectos a la hora de explicar y plantear las ideas oportunas, como por ejemplo no resolver un problema directamente, sino ir desarrollándolos por pasos y preguntar o sugerir a los alumnos diferentes "razonamientos" que se pueden desarrollar y hacerles reflexionar sobre los fallos cometidos.

Para ello, se pedirá a los alumnos que expongan todos los razonamientos que han desarrollado en los problemas, explicando y justificando todos los pasos que han realizado para que ellos mismos se den cuentan de sus propios errores. Sus compañeros podrán intervenir y resolverles las dudas que les hayan podido surgir, fomentando así la capacidad crítica de cada alumno y un correcto desarrollo de apoyo y comprensión entre todos los compañeros de la clase.

En esta unidad, esta metodología es imprescindible ya que el desarrollo de las explicaciones y las demostraciones de las propiedades del determinante, su interpretación geométrica y la resolución de problemas que desde nuestro punto de vista van a estar encaminadas a desarrollar un razonamiento un poco apartado del pensamiento “algorítmico” que se desarrolla a lo largo de muchas unidades impartidas en secundaria.

Aprendizaje cooperativo

El aprendizaje y el trabajo cooperativo es un enfoque que trata de organizar las actividades en el aula para poder convertirlas en una experiencia social y académica de aprendizaje para poder fortalecer en los alumnos el trabajo grupal y el desarrollo del compañerismo en el aula.

Para ello, en algunas de las sesiones de la unidad se realizarán grupos heterogéneos con diversos niveles de competencia, donde se va a crear una identidad de grupo y se desarrollará unas relaciones de apoyo mutuo que incentivará la resolución de problemas y una mejor asimilación de los contenidos explicados en clase.

Para ello, en las sesiones dedicadas al estudio de las permutaciones y los ciclos, como es un contenido bastante aplicable al aula donde se pueden emplear diversos recursos didácticos, se podrá incentivar un mejor aprendizaje de la definición de aplicación biyectiva, el concepto de permutación y su descomposición en ciclos y transposiciones, aspectos muy importantes para poder introducir la definición rigurosa de determinante.

A cada grupo se le repartirá una serie de actividades donde no solo tendrán que resolver los problemas, sino que con la ayuda del profesor irán reflexionando no solo sobre su aplicación, sino también sobre su importancia dentro del álgebra y sus aplicaciones en otras áreas.

Para otro aprendizaje cooperativo, las sesiones dedicadas al aula de informática, se realizan grupos para poder manejar los diferentes programas y herramientas informáticas que nos permitirán manejar matrices de una manera mucho más eficiente.

Para poder desempeñar ambas metodologías, el profesor tendrá que realizar apuntes de apoyo, investigar sobre las dudas que pueden plantearse en clase y saber gestionar el tiempo empleado y los recursos existentes.

5.6 RECURSOS

Los recursos didácticos necesario para poder desarrollar esta Unidad Didáctica deben de favorecer un aprendizaje óptimo del alumnado, poniendo en práctica todos los conocimientos adquiridos esta unidad.

- **Libro de texto** donde los alumnos podrán repasar los conceptos estudiados, hacer problemas, repasar dudas, analizar ejercicios resueltos…
- **Fotocopias de apoyo** con contenido complementario con ejercicios resueltos y actividades y problemas planteados a los estudiantes.

- **Pizarra** para poder desarrollar el contenido teórico de la unidad, realizar esquemas y anotaciones, resolver ejercicios y problemas planteados donde los alumnos podrán tomar anotaciones…
- **Cuaderno** del alumno para poder tomar todas las anotaciones y apuntes necesarios ya sea del contenido explicado en pizarra, las fotocopias de apoyo o cualquier otro recurso. Podrán utilizarlo también para resolver problemas y plantear dudas que el profesor podrá corregir, además de ser un punto de apoyo clave para poder estudiar.
- **Bolígrafo, lápiz goma y otros utensilios** que servirán para escribir en el cuaderno o folios.
- **Folios** donde al igual que el cuaderno podrán tomar apuntes.
- **Ordenadores y otros recursos TIC** que servirán como un punto de apoyo bastante efectivo para comprender los conceptos y realizar cálculos utilizando herramientas informáticas.
- **Enlaces de páginas web** complementarias para esta unidad.

5.7 TEMPORALIZACIÓN

SESIÓN 1

Para comenzar, se explicará la definición rigurosa de función biyectiva y permutación con varios ejemplos de permutaciones expresados en forma matricial y la definición de transposición e índice de una permutación.

Después se definirá el concepto de ciclo, la descomposición de una permutación en ciclos y el cálculo del índice de una permutación utilizando ciclos. Para ello, se expondrán ejemplos en la pizarra de permutaciones y su descomposición en ciclos y permutaciones. (35 minutos)

Como un ejemplo se les puede descomponer la siguiente permutación en ciclos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

En esta permutación, a partir de la “imagen” del uno, después la imagen del tres y así sucesivamente, su representación en ciclos es la siguiente:

$$(1 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 4)$$

manteniéndose el seis fijo ya que su imagen corresponde con coincide. Realizamos su descomposición en trasposiciones:

$$(1\ 4)(1\ 2)(1\ 5)(1\ 3)$$

y observamos que su índice es par.

Después, se realizarán grupos de tres o cuatro personas donde resolverán actividades que fomentarán el trabajo en equipo y el desarrollo social de cada alumno.
En esta sesión, el concepto de permutación y el cálculo del índice serán los objetivos fundamentales que nos van a permitir definir el determinante e identificar cada uno de los términos en el desarrollo de la fórmula del determinante.
Al final de la sesión se entregarán apuntes de apoyo con actividades resueltas sobre el cálculo del índice utilizando ciclos y la representación matricial de las permutaciones.

SESIÓN 2

En esta segunda sesión, se expondrá la definición de determinante de las matrices de segundo y tercer orden mediante la discusión de un sistema de ecuaciones lineales y el método de Cramer al igual que en el desarrollo que realizamos en el punto *[3.3 Motivación del determinante*]. Para ello, el profesor podrá hacer uso del programa Maxima que en el caso del determinante de orden tres los cálculos podrán ser más visibles a los alumnos. (35 minutos)

Esta sesión se realizará de forma magistral en la pizarra, donde el objetivo principal va a ser que el alumno comprenda la relación existente entre la resolución de un sistema de ecuaciones lineales y la justificación de las fórmulas del determinante sin que sean presentadas al alumno de forma "mágica" sin ningún razonamiento o justificación.

Resolución en pizarra de algún problema sobre el cálculo del determinante de matrices cuadradas y el método de Cramer en sistemas de ecuaciones lineales. (15 minutos).
Al final de la clase se mandarán un par de actividades para hacer junto con apuntes de apoyo de temas anteriores de otros cursos que van a ser necesarios en esta unidad.

SESIÓN 3

En esta sesión se corregirán las actividades del día anterior. Se pedirá que un alumno salga a la pizarra de forma voluntaria a resolver algún problema (10 minutos)
Después se demostrarán las propiedades principales de los determinantes que desarrollamos anteriormente en el caso de matrices de orden dos y orden tres, prestando especial atención a los razonamientos seguidos y sus aplicaciones a la hora de calcular un determinante. Algunas de las propiedades se mandarán como actividad para que los alumnos los demuestren como actividad. (25 minutos)
Se resolverán ejercicios en pizarra por parte del profesor y se mandarán un par de actividades sobre el cálculo de determinantes aplicando sus propiedades sin necesidad de tener que desarrollar la fórmula del determinante.

SESIÓN 4

En esta sesión se expondrá la interpretación geométrica del determinante tomando a su vez anotaciones en la pizarra y los cálculos que se realizan.

Para ello, se realizará un breve repaso sobre las operaciones con vectores en el plano y la definición de producto escalar y sus propiedades.

Se definirá el área de dos vectores a y b en el plano utilizando productos escalares como realizamos anteriormente, demostrando la descomposición de un vector de la forma $b = b' + b''$ como demostramos anteriormente.

Para las propiedades que describimos anteriormente, demostraremos únicamente la propiedad que establecía que $A(a, b + \beta a) = A(a, b)$, dejando las demás propiedades enunciadas junto con algunas indicaciones que pueden servir a los alumnos a poder demostrarlas ellos.

Es importante hacerles entender que el área tiene las mismas propiedades que las operaciones fundamentales a la hora de resolver un sistema (excepto en la propiedad $A(\alpha a, \beta b) = |\alpha||\beta|A(a, b)$), dejando entrever su relación con el determinante.

Para el caso del volumen en el espacio, de forma análoga se les deja indicado que se puede demostrar que el volumen del paralelogramo formado por tres vectores en el espacio es igual al determinante de la matriz formada por los tres vectores.

Esta parte es importante ya que es donde se aprecia la relación entre la definición del determinante y el volumen de vectores junto con sus propiedades.

SESIÓN 5

En esta sesión calcularemos el área de dos vectores usando productos escalares, llegando a la igualdad que establecimos anteriormente que nos "definió" el área como el valor absoluto del determinante de ambos vectores. Para una visualización más intuitiva, con la descomposición que realizamos anteriormente, al descomponer la suma de dos vectores de la siguiente forma:

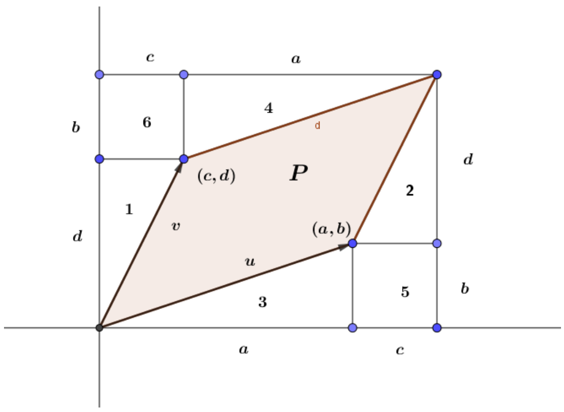


Ilustración 18

Para el caso del volumen en el espacio, de forma análoga se les deja indicado que se puede demostrar que el volumen del paralelogramo formado por tres vectores en el espacio es igual al determinante de la matriz formada por los tres vectores.

A lo largo de estas dos últimas sesiones se dejará indicado la relación existente entre el volumen y el determinante, siendo interpretado el determinante como

determinante = área + signo

SESIÓN 6

Al comienzo de esta sesión se expondrá la definición rigurosa de determinante usando permutaciones e índices, identificando cada término de las fórmulas del determinante con la permutación y su índice correspondiente. Se realizarán dos ejemplos sobre el cálculo del determinante de orden dos y de orden tres, así como explicar el cálculo del determinante por su desarrollo por columnas, pudiendo así comparar ambos métodos de cálculo. (30 minutos)

Durante el resto de la clase, se realizará un esquema de todo el contenido visto hasta el momento con algunos ejercicios resueltos durante y se mandarán actividades para el día siguiente.

(20 minutos)

SESIÓN 7

Se empezará la clase explicando el cálculo del rango de una matriz y su inversa mediante determinantes con varios ejemplos. (20 minutos)

Se mandará hacer un par de ejercicios durante el resto de la clase y saldrán voluntarios para resolverlos en pizarra. Al final se mandarán problemas y ejercicios para la siguiente sesión.

SESIÓN 8

Durante esta sesión se van a realizar ejercicios y problemas sobre todo el contenido visto a lo largo de todas las sesiones anteriores. Se pedirán a los alumnos resolver ejercicios en la pizarra mandados en la sesión anterior y después el profesor resolverá ejercicios y problemas.

SESIÓN 9

En esta octava sesión, se irá al aula de informática. Se usarán algunos el programa Maxima que permite manejar el cálculo matricial y la resolución de sistemas. Se explicarán como implementar los siguientes aspectos:

- Implementar una matriz en Maxima.
- Manejar las operaciones elementales con matrices.
- Calcular el determinante con la función **determinant**.
- Calcular la traspuesta e inversa de una matriz.
- Resolver un sistema de ecuaciones lineales (**linsolve_by_lu**)
- **…**

Esta sesión servirá para realizar una pequeña introducción en el manejo de las matrices dentro del programa Maxima, pudiendo comprobar la importancia de las nuevas tecnologías dentro de las matemáticas.

SESIÓN 10

En esta novena sesión se realizarán grupos de tres o cuatro personas atendiendo al número de alumnos de la clase. Cada grupo tendrá que resolver con la ayuda del programa Maxima una serie de actividades planteadas. Para ello, el profesor irá resolviendo las dudas que puedan ir surgiendo a los diferentes grupos realizados.

SESIÓN 11

Se realizará un repaso de todo el temario visto a lo largo de toda la unidad y se realizarán en clase ejercicios y problemas que permitan resolver todas las dudas y preguntas planteadas de cara al examen.

SESIÓN 12

En esta sesión se realizará un examen sobre el contenido de esta unidad.

SESIÓN 13

Se resolverá el examen del día anterior y las dudas planteadas por los alumnos.

5.8 ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA

Las actividades de aprendizaje y enseñanza se irán realizando a lo largo de la unidad didáctica y se basarán en el temario desarrollado en las sesiones. Estas actividades llevarán un tiempo asignado, por lo que se adaptará al nivel y el tiempo asignado de los alumnos y las sesiones y tendrán que adecuarse al desarrollo progresivo del contenido de la unidad. Parte de las actividades propuestas han sido tomadas de algunos libros de texto mencionados anteriormente que están perfectamente ajustadas al aula.

Algunas de las actividades aparecerán descritas junto con su solución para que el lector pueda comparar las formas de resolver las actividades y contemplar los razonamientos seguidos en su resolución.

1. Actividades sobre la definición de determinante y sus propiedades (orden 2 y 3)

Actividad 1: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales y calcula sus soluciones a través del método de Gauss y el método de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Solución: Como primer paso para resolver por el método de Gauss, intercambiamos la primera y la tercera fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ahora, si denotamos F_1, F_2 y F_3 a las tres filas, realizamos las operaciones $F_1, F_2 - F_1$ y $F_3 - 2F_1$ respectivamente en la primera, segunda y tercera fila, lo que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

A continuación, realizamos las operaciones elementales F_1, F_2 y $F_3 - F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

A partir de aquí tenemos que $z = 1$, $y = -2$ y $x = 3$.

Con el método de Cramer, si calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y el determinante de las matrices formadas al aplicar el método de Cramer obtenemos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 9 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-12}{6} = -2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Este primer problema te permite poder comparar ambos métodos de resolución de problemas, recordando los pasos seguidos en la demostración del cálculo del determinante y la aplicación que tiene su uso en la resolución de sistemas.

Como objetivo también se encuentra el manejo de las operaciones elementales, donde al haber estudiado el método de Gauss en el curso anterior y el cálculo de los determinantes, donde pueden aplicar la fórmula del determinante en un método de resolución de ecuaciones.

Actividad 2: Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y el método de Cramer

$$a)\ \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Estos dos ejercicios te permiten poder comparar ambos métodos de resolución de problemas, recordando los pasos seguidos en la demostración del cálculo del determinante y la aplicación que tiene su uso en la resolución de sistemas. Para este problema, la condición impuesta es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea distinto de cero.

Actividad 3: Si consideramos la siguiente matriz cuadrada de orden tres

$$P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

donde se tiene que $|P| = 7$, calcula el determinante de las siguientes matrices sin desarrollarlos.

$$A = \begin{pmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} a+2x & b+2y & c+2x \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2x+r \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & x+y & 5x \end{pmatrix}$$

Solución: Esta actividad está centrada en aplicar las propiedades de los determinantes sin necesidad de tener que calcular el determinante.

En la matriz A, hemos intercambiado la primera y la tercera columna y después la primera y la segunda.

$$|P| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & b & a \\ r & q & p \\ z & r & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ r & z & x \end{vmatrix} = |A| = 7$$

En la matriz B, se desarrollan los siguientes pasos

$$|B| = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} == 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= -3|P| = -21$$

En este desarrollo hemos usado la propiedad de multiplicar una fila por una constante y la propiedad de que al sumar una fila otra fila el determinante no varía. Aquí el alumno podrá comprobar como mediante las propiedades que tiene el determinante se puede calcular el determinante de una matriz sin necesidad de desarrollarlo, lo que permite un "ahorro" en los cálculos realizados y permite observar de forma más intuitiva las propiedades del determinante.

Actividad 4: Calcular el determinante de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5^2 & 7^2 & 9^2 \\ 7^2 & 9^2 & 11^2 \\ 9^2 & 11^2 & 13^2 \end{pmatrix}$$

Actividad 5: Demuestra que el determinante de la matriz A definida por

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (a-b)^3$$

verifica que $|A| = (a-b)^3$ sin desarrollar el determinante.

Solución: Como primer paso, vamos a restar a la primera columna la tercera columna, donde el determinante no varía con esta operación, obteniendo la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ab & b^2 \\ 2a - 2b & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, a la segunda columna le restamos la tercera (el determinante no varía) obteniendo la matriz

$$\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ab - b^2 & b^2 \\ 2a - 2b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último, si a la primera columna le restamos la segunda multiplicada por dos, tenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - 2ab & ab - b^2 & b^2 \\ 0 & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de este desarrollo, se obtiene que $|A| = (a-b)(a^2 + b^2 - 2ab) = (a-b)^3$.

Para este ejercicio, el alumno tiene que tener totalmente asimiladas el dominio de las operaciones elementales de las matrices y conocer las propiedades principales del determinante.

Para su resolución, los errores que puede cometer el alumno pueden ser variados, ya que tienen que razonar como expresar el producto realizado anteriormente como un determinante, lo que presenta un cierto nivel de dificultad para los alumnos de bachillerato.

Actividad 6: Demostrar que para dos matrices cuadradas $A.B$ de orden dos se verifica que

$$|A||B| = |AB|$$

Demostrar esta propiedad por parte del alumno para matrices de orden dos es una buena aplicación que permite obtener un resultado fundamental en el cálculo de los determinantes. Con esta actividad se pone de manifiesto si han entendido las demostraciones de las propiedades que se han desarrollado en clase.

Actividad 7: Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierde una partida, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno de ellos posea en ese momento. Cada uno pierde una partida y al final cada uno tiene 24 céntimos de euros. ¿Cuánto dinero tenía cada jugador al iniciar el juego?

2. Actividades sobre permutaciones y transposiciones

Actividad 1: Demostrar que el grupo de las permutaciones S_n es finito y tiene $n!$ elementos.

Actividad 2: Demostrar que el producto de dos ciclos disjuntos es conmutativo.

Estas dos actividades pondrán a prueba si el alumno ha entendido el concepto de permutación y de ciclo, pudiendo resolver ambas actividades de forma visual.

Como actividades grupales para este apartado, primero se realizará la siguiente actividad:

Actividad 3: Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in S_7$ las permutaciones dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular los productos $\sigma_1\sigma_2$ y $\sigma_2\sigma_1$ y su descomposición como producto de transposiciones.

Actividades en el aula

Las transposiciones son muy interesantes para ser llevadas a cabo en el aula a través de métodos que pueden resultar “atractivos” para los alumnos, ya que les van a dar ideas intuitivas.

A continuación, vamos a describir un procedimiento para poder calcular el índice de una permutación de forma constructiva. Como ejemplo, vamos a calcular el índice de la permutación $\sigma \in S_8$ dada por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 8 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Para ello, vamos a tomar las imágenes de la permutación de la siguiente manera:

2	4	5	1	8	6	3	7

Para la primera posición, buscamos el número que ocupa la primera posición y lo intercambiamos por la posición que tiene el número uno

2	4	5	1	8	6	3	7
1	4	5	2	8	6	3	7

Ahora, en la primera columna intercambiamos la segunda posición por la posición que ocupa el número dos en la segunda fila

2	4	5	1	8	6	3	7
1	4	5	2	8	6	3	7
1	2	5	4	8	6	3	7

A continuación, intercambiamos el número tres por la posición tercera de la siguiente forma:

2	4	5	1	8	6	3	7
1	4	5	2	8	6	3	7
1	2	5	4	8	6	3	7
1	2	3	4	8	6	5	7

Como en la cuarta fila el cuatro se encuentra en la columna cuatro, no lo cambiamos y pasamos al siguiente. Como en la columna 5 de la última fila se encuentra el ocho, intercambiamos el ocho y el cinco.

2	4	5	1	8	6	3	7
1	4	5	2	8	6	3	7
1	2	5	4	8	6	3	7
1	2	3	4	8	6	5	7
1	2	3	4	5	6	8	7

Como en la última fila el seis se encuentra en la sexta columna, entonces no lo cambiamos de posición. En la séptima columna se intercambian las casillas siete y ocho.

2	4	5	1	8	6	3	7
1	4	5	2	8	6	3	7
1	2	5	4	8	6	3	7
1	2	3	4	8	6	5	7
1	2	3	4	5	6	8	7
1	2	3	4	5	6	8	7

Finalmente, como el número de filas que hemos bajado son cinco, el índice de la permutación anterior es $(-1)^5 = -1$.
Este método de cálculo es muy constructivo y puede permitir al alumno percibir el cálculo del índice de una permutación y puede ser llevada a cabo al aula mediante recursos manipulativos muy ventajosos.

Mediante la división de la clase en grupos propuesto en la sesión tres, se entregarán tablas y cartulinas con números, describiendo un poco los procesos que hay que seguir y que va a servir para que los alumnos aprendan a trabajar en grupo. Además, mediante este método y otros totalmente similares nos permite no solo calcular el índice, sino descomponer permutaciones en ciclos y transposiciones.

3. Definición de determinante de orden n

Actividad 1: Si se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, justifica razonadamente la fórmula del determinante de la matriz usando su desarrollo por permutaciones.

Para resolver este ejercicio, el alumno tiene que demostrar que ha comprendido la definición de determinante y saber dominar el uso de permutaciones y el cálculo del índice. Para ello, el desarrollo de actividades grupales para calcular el índice es fundamental ya que permite un mayor desarrollo de su uso en las matrices.

Actividad 2: ¿Sabrías decir cuál de estos dos productos pueden formar parte del desarrollo de un determinante de orden 4?

a) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{42}$
b) $a_{14}a_{41}a_{23}a_{32}$

Actividad 3: Calcula el determinante de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Actividades con Máxima

Actividad 1: Define las siguientes matrices que se definen a continuación y establece para que casos las matrices tienen determinante nulo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3+x \\ 3 & 4-x \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & x+5 & 3 \\ 7 & 4 & 7 \\ 1 & 3x & x \end{pmatrix}$$

Solución: Para esta actividad primero implementaremos las matrices anteriores y calcularemos sus determinantes. Para ello, en el caso de la matriz A si implementamos el siguiente código

```
A: matrix([2, 3+x], [3, 4-x]);
determinant(A);
solve(determinant(A));
```

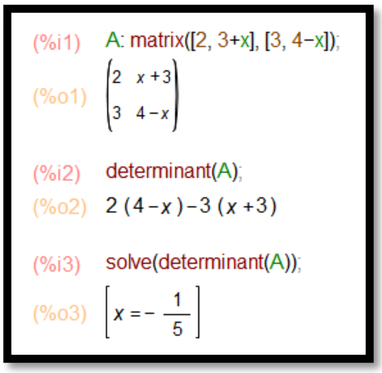


Ilustración 19

Para el caso de la matriz B se procede de la misma manera.

```
B: matrix([2, x+5, 3], [7, 4, 7], [1, 3*x, x]);
determinant(B)
solve(determinant(B));
```

Esta actividad supone una pequeña introducción al manejo de matrices en Maxima en la que el alumno pondrá a prueba la implementación de matrices con Maxima y el cálculo del determinante de una matriz en la que se resolverá además mediante la función **solve** la expresión resultante de calcular el determinante de la matriz correspondiente en cada caso.

Actividad 2: Resuelve por el método de Cramer el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ siendo la matriz de coeficientes A y el vector columna B de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Para resolver este ejercicio con Maxima, lo primero que se le planteará al alumno será resolver el problema en pasos, donde para ello primero deberemos implementar las matrices.

```
A: matrix([2, 1, 3], [1, 2, 4], [3, 4, 6]);
B: matrix([3], [1], [4]);
Ax: matrix([3, 1, 3], [1, 2, 4], [4, 4, 6]);
x: determinant(Ax)/determinant(A);
Az: matrix([2, 1, 3], [1, 2, 1], [3, 4, 4]);
z: determinant(Az)/determinant(A);
```

dando como resultado

$$X = \begin{pmatrix} 7/4 \\ -1/8 \\ -1/8 \end{pmatrix}$$

También si implementamos el siguiente código

```
A: matrix([2, 1, 3], [1, 2, 4], [3, 4, 6]);
B: matrix([3], [1], [4]);
linsolve_by_lu(A,B);
```

se obtiene el mismo resultado.

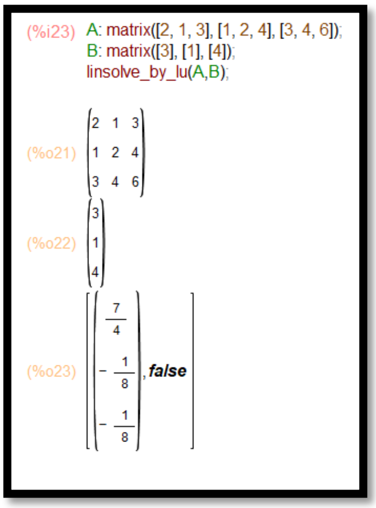


Ilustración 20

Actividad 3: Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & x+4 \\ 9 & x & 2 \\ 6 & 3 & x+2 \end{pmatrix}$$

Calcula el rango de la matriz en función de los valores del parámetro x usando determinantes.

Solución: Para resolver este problema, primero calculamos el determinante de la matriz A por lo que vamos a obtener una ecuación de segundo grado.

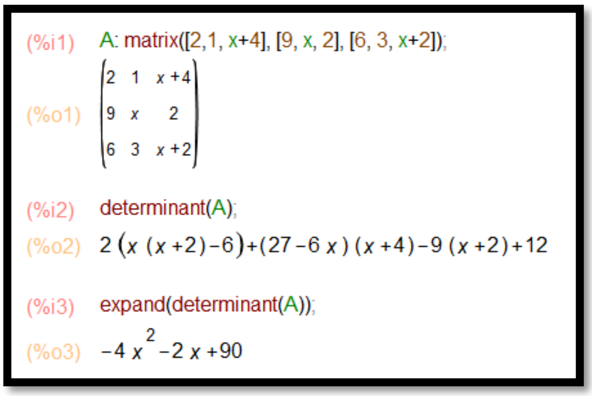


Ilustración 21

Mediante el comando **solve** como en el caso anterior resolvemos la expresión anterior obteniendo las soluciones $x_1 = \frac{9}{2}$ y $x_2 = -5$. Para todos los valores distintos se tiene que el rango de la matriz es igual a tres. Para $x = \frac{9}{2}$, vamos a introducir el comando

```
B: matrix([2, 1, 9/2+4], [9, 9/2, 2], [6, 3, 9/2+2]);
C: submatrix(1, B, 1);
determinant(submatrix(1, B, 1));
```

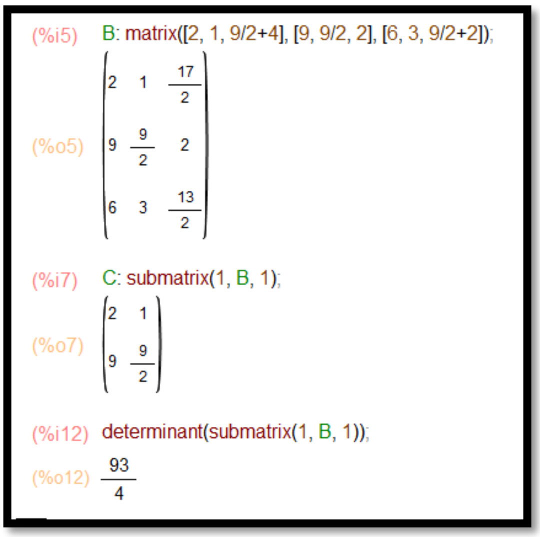


Ilustración 22

A partir de aquí se obtiene que el determinante de la submatriz es distinto de cero, luego el rango es igual a dos.

Para el caso de $x = -5$ se procede de la misma manera.

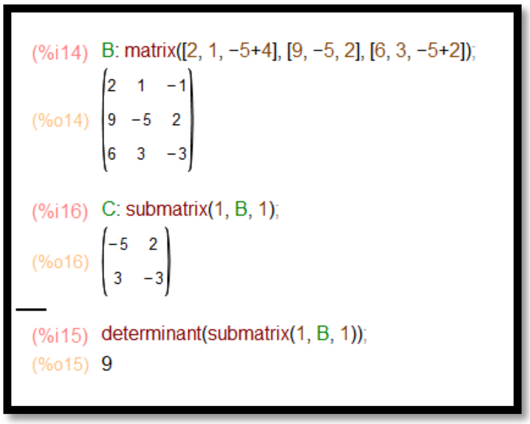


Ilustración 23

5.9 PLANES COMPLEMENTARIOS

Como planes complementarios participaremos en actividades sugeridas por el Departamento, el centro o cualquier otra entidad pública o privada.

Se realizarán ofertas a los alumnos para participar en olimpiadas matemáticas, gymkanas matemáticas, actividades interactivas no solo relacionadas con las matrices, sino también perspectivas históricas sobre su importancia y visitas guiadas a la universidad para que los alumnos vayan conociendo el entorno al que se van a enfrentar el curso próximo. Como ejemplo de prueba de gymkana se puede proponer varios problemas relacionados con grafos que permitan relacionar problemas ya conocidos, como poder dibujar la estrella del pentágono sin “levantar el lápiz”, proponer rutas y saber establecer los diferentes caminos a través de matrices…

5.10 EVALUACIÓN

La evaluación nos permite obtener información sobre el aprendizaje adquirido por los alumnos y comprobar el grado de adquisición de los objetivos didácticos planteados. De esta manera vamos a poder comprobar si los recursos didácticos empleados han favorecido la impartición de la unidad, si la metodología ha estado perfectamente ajustada y otros muchos aspectos que vamos a evaluar.

Criterios de Evaluación, Estándares de Aprendizaje evaluables y Competencias básicas

Los Criterios de Evaluación vienen establecidos por el cumplimiento que se plantean en los objetivos marcados dentro de esta propuesta didáctica. Los Criterios de Evaluación propuestos están vinculados a unos Estándares de Aprendizaje Evaluables, es decir, a las capacidades que debe adquirir el alumno con los contenidos de la unidad.

A continuación, vamos a desarrollar una tabla en la que vamos a especificar los criterios de evaluación, los estándares de aprendizaje evaluables vinculados y las competencias que se desarrollan en cada caso.

Criterios de evaluación	**Estándares de aprendizaje evaluables**	**Competencias**
1. Utilizar el lenguaje matricial para representar transposiciones y calcular el índice de una permutación.	**1.1** Expresa correctamente la composición de permutaciones manejando correctamente su interpretación matricial.	CM, CL, AA, CSV
	1.2 Comprende la relación entre las transposiciones y el índice de una permutación.	CM, CL, AA, CSC
	1.3 Descompone permutaciones en producto de ciclos disjuntos estableciendo una composición adecuada de las imágenes de cada elemento.	CM, CL, AA, CSC
	1.4 Calcula el índice de una permutación a partir de su descomposición en ciclos.	CM, CL, AA, CSC
2. Resolver un sistema de ecuaciones lineales y calcular la fórmula de determinante hasta orden tres mediante la resolución de un sistema e interpretar su significado	2.1 Aplica correctamente el método de Gauss a un sistema de ecuaciones lineales.	CM, CL, AA, SIEE
	2.2 Justifica razonadamente el cálculo del determinante en matrices cuadradas.	CM, CL, AA, SIEE
	2.3 Calcula determinantes de matrices cuadradas hasta orden tres.	CM, CL, AA
	2.4 Resuelve sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Cramer.	CM, CL, AA
3. Realizar demostraciones sencillas relativas a las	3.1 Utiliza adecuadamente el desarrollo de los determinantes en matrices	CM, CL, AA, SIEE

propiedades de los determinantes en el caso de matrices hasta orden tres.	cuadradas de orden dos y orden tres para demostrar sus propiedades.	
	3.2 Relaciona de forma adecuada las implicaciones que se establecen entre algunas de las demostraciones.	CM, CL, AA, SIEE
	3.3 Calcula determinantes de algunas matrices usando las propiedades, analizando los elementos que constituyen la matriz.	CM, CL, AA, SIEE
4. Utilizar los productos escalares entre vectores para calcular el área de dos vectores y el volumen de tres vectores y su relación con el determinante.	4.1 Maneja adecuadamente el producto escalar de dos vectores y maneja adecuadamente las propiedades del producto escalar.	CM, CL, AA, SIEE
	4.2 Define adecuadamente el área de dos vectores en el plano y comprende las propiedades del área.	CM, CL, AA, SIEE
	4.3 Calcula el área de dos vectores en el plano, identificando la fórmula del determinante.	CM, CL, AA, SIEE
	4.4 Calcula el volumen de tres vectores y establece la relación con el determinante	CM, CL, AA, SIEE
5. Calcular el determinante de una matriz a partir de las permutaciones y el desarrollo de los determinantes por columnas.	5.1 Definir correctamente la definición de determinante usando permutaciones, estableciendo la relación entre cada término del determinante con la permutación y su índice correspondiente.	CM, CL, AA, SIEE
	5.2 Calcula el determinante de una matriz a través de su desarrollo por filas o columnas.	CM, CL, AA, SIEE
6. Obtener el rango de una matriz y la matriz inversa (esta última hasta orden 3), tanto por el método	6.1 Determina el rango de una matriz, hasta orden cuatro, aplicando el método de Gauss o determinantes.	CM, CL, AA, SIEE

de Gauss como usando determinantes.	6.2 Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.	CM, CL, AA, SIEE
7. Uso habitual de las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de aprendizaje.	7.1 Utiliza adecuadamente el programa Maxima para realizar las principales operaciones matriciales básicas.	CM, CL, AA, CD, SIEE, CSC
	7.2 Calcula la traspuesta de una matriz, el determinante y la inversa de una matriz cuadrada y resuelve sistemas de ecuaciones lineales usando Maxima.	CM, CL, AA, CD, SIEE, CSC
8. Expresar verbalmente el proceso seguido en la resolución de un problema.	8.1 Utiliza el lenguaje matemático de forma adecuada en el proceso de la resolución de un problema.	CM, CL, AA, SIEE, CSC, CD
	8.2 Aplica los contenidos teóricos de forma adecuada para resolver un problema	CM, CL, AA, SIEE, CSC, CD

Instrumentos de evaluación

Prueba escrita

Al final de la unidad, los alumnos realizarán un examen donde pondrán a prueba todos los conocimientos adquiridos. La prueba escrita estará compuesta por una serie de ejercicios y problemas parecidos a los que se han realizado en clase.

Trabajos cooperativos

En esta unidad se valorará las actividades y problemas grupales que se han realizado en clase. Para ello, se valorará no solo la coordinación del grupo, también se observará la aportación y esfuerzo de cada miembro.

Actitud y participación en clase

Se valorará el comportamiento de cada alumno en clase y la participación activa que se puede evaluar cuando por ejemplo se resuelven dudas cuando el profesor propone un dilema, hacer los ejercicios y problemas mandados en pizarra…

Cuaderno de clase

Se tendrá en cuenta los apuntes tomados en clase, la presentación de las actividades realizadas, la limpieza, la presencia de los problemas resueltos. Es necesario también notar los errores cometidos anotaciones propias apuntadas en el cuaderno.

Participación en actividades complementarias

La participación en actividades complementarias es una parte importante ya que es donde se manifiesta el interés del alumno en la materia.

Todos los instrumentos mencionados van a suponer un punto de apoyo para establecer la nota del alumno, donde se van a tener en cuenta todo lo mencionado anteriormente.

Criterios de calificación

Los criterios de calificación que vamos a emplear en esta unidad didáctica son los siguientes:

- 70 % prueba escrita realizada al final de la unidad.
- 20 % basado en la participación, el esfuerzo y dedicación mostrados.
- 10% comportamiento y actitud en clase.

Para la calificación de la unidad didáctica, se hará la media aritmética teniendo en cuenta los porcentajes mostrados, donde el alumno tendrá que sacar un 5 o más de media para poder aprobar y para poder realizar la media deberá de obtener una calificación en la prueba escrita igual o mayor que un 4,5.

Para los alumnos que no hayan alcanzado la nota requerida, se les dará material de apoyo y actividades de recuperación que deberán de entregar al profesor al final.

Si al final se obtiene una calificación negativa, tendrán que recuperar el temario correspondiente a esta unidad al final del trimestre mediante la realización de una prueba escrita que supondrá el 100% de la calificación de esta unidad.

5.11 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

La diversidad entre los alumnos de secundaria y bachillerato está presente a la hora de impartir clases en un centro escolar. No todos los alumnos tienen las mismas capacidades ni el mismo interés por la materia. El ritmo de aprendizaje de cada estudiante es diferente, donde se pueden presentar alumnos con un grado menor de comprensión o alumnos con altas capacidades, por lo que el profesor tiene que saber adaptarse a todos los alumnos. Por todo esto, es conveniente dar respuesta a la diversidad de intereses, motivaciones, capacidades y estilos de aprendizajes que los alumnos manifiestan.

Por todo esto, es necesario conocer las circunstancias personales de los alumnos, el rendimiento académico de los años anteriores, prestar una atención especial a cada alumno fijándose si desarrollan las tareas, si se comporta adecuadamente con los compañeros de clase…

Entre las medidas de atención a la diversidad se encuentran medidas de apoyo para alumnos con necesidades educativas especiales como adaptaciones curriculares significativas, adaptar el contenido a las personas con sobredotación intelectual con fotocopias de apoyo con el contenido más explicado o mandar actividades adaptadas a su nivel.

Para todo esto vamos a llevar a cabo las siguientes medidas para poder dar respuesta a todos los alumnos.

a) Fichas de refuerzo para los alumnos que presenten dificultades y repaso de los contenidos explicados para que puedan comprenderlos mejor.

b) Actividades de refuerzo para poder repasar los problemas y el temario de la unidad.

c) Atención personalizada para alumnos con sobredotación intelectual con fichas de apoyo con un cierto grado de dificultad, proponerles libros, páginas web o cualquier otro recurso donde se pueda encontrar el temario más detallado…

d) Reuniones con los padres de los alumnos para conocer las circunstancias personales de cada alumno

e) Reuniones de los tutores de los diferentes cursos para comentar el avance de los cursos del centro.

f) Reuniones del departamento correspondiente para prefijar exámenes, horarios, programar el contenido adaptándolo al nivel de la clase…

g) Evaluaciones por parte del equipo orientativo del centro.

5.12 AUTOEVALUACIÓN DIDÁCTICA

Tras finalizar la impartición de la unidad didáctica, el profesor hará una reflexión crítica y analizará todos aquellos aspectos que considere oportunos y permitan valorar los criterios establecidos durante el desarrollo de la unidad. Para ello, al final de la unidad el profesor realizará una autoevaluación donde se tendrá en cuenta las notas obtenidas por los alumnos, los objetivos propuestos al comienzo de la unidad, las dificultades planteadas por los alumnos, la metodología llevada a cabo…

Como ejemplo de algunas de las preguntas que realizaríamos en el cuestionario y la forma de poder ir contestándolo sería el siguiente.

	Buena	Mala	Regular
Comportamiento del docente en el aula.			
Claridad en las explicaciones y la resolución de problemas.			
Metodología empleada.			
Temporalización utilizada en el aula			
Dificultad planteada en las actividades y los exámenes.			
Esquematización del contenido de la unidad			
Desarrollo adecuado de las clases			
Interés mostrado por el profesor en el aula			
Preocupación del profesor de que los alumnos entiendan el temario			
Respeto del profesor hacia los alumnos.			

En la autoevaluación pueden incluirse más preguntas, ya que la mejora de la docencia siempre está y cada día hay que descubrir nuevas formas de poder acercarse un poco más al aula y saber transmitir al alumno no solo los conocimientos de la materia, sino la importancia de la comunicación entre los grupos de la clase, aportar visiones más positivas en los alumnos que presenten un menor rendimiento académico…

Mediante esta autoevaluación el profesor analizará las respuestas dadas por los alumnos y a través de ellas no solo podrá ver su propia autoevaluación, sino el punto de vista de cada alumno y la percepción que tiene la clase sobre el docente.

6. CONCLUSIONES

Durante el desarrollo de este trabajo de fin de máster he podido analizar de una manera más “profunda” la importancia de las matrices y el determinante en la etapa de bachillerato y los diferentes conocimientos y objetivos clave planteados en la propuesta didáctica.

Durante el desarrollo de este trabajo hemos expuesto todos los resultados principales que nos han permitido poder definir el determinante mediante permutaciones que como detallamos en este trabajo, esta definición de determinante no aparece reflejado en los libros de texto de secundaria, donde generalmente solo aparece la definición de determinante de una matriz cuadrada a través del desarrollo por filas o columnas.

En la propuesta didáctica realizada, hemos incluido contenidos que no aparecen reflejados en los libros de texto de secundaria pero que son aplicables a un curso de bachillerato y como hemos comentado a lo largo del trabajo nos han ayudado a poder desarrollar el determinante de una forma más intuitiva que no se basa en "aplicar" una fórmula "mágica". Para ello, uno de los objetivos principales de esta propuesta ha sido la demostración y justificación de los resultados, centrándonos sobre todo en las propiedades y la interpretación geométrica del determinante, apreciando la relación entre el área y el volumen con el determinante.

La importancia de las nuevas tecnologías en el aula también ha estado presente, ya que durante la realización del presente trabajo he podido apreciar la importancia que tienen programas informáticos para el manejo de las matrices, y en este caso Maxima, aunque existen otros programas como MatLab y Octave que también nos permiten manejar no solo matrices, sino también otras muchas funciones que facilitan el cálculo.

Gracias a la elaboración de este trabajo de fin de máster he podido comprobar la gran importancia que tiene la demostración de los resultados en el aula, ya que al igual que ocurre con el determinante y todos los resultados que hemos desarrollado en este trabajo, hay muchos resultados que desde mi punto de vista pueden ser demostrados en el aula. Por tanto, a la hora de desarrollar una unidad didáctica no debemos centrarnos únicamente en los contenidos que hemos establecido, sino también en las maneras en las que queremos enseñarlos y los objetivos que hemos fijado. Debemos ser capaces de transmitir los contenidos no como conocimientos aislados, sino ser capaces de enlazarlas con sus aplicaciones y establecer conexiones con otras materias, no solo con las que a priori puedan parecer más afines, sino con todas.

`

7. BIBLIOGRAFÍA

Alaminos Prats, J., Aparicio del Prado, C., Extremera Lizana, J., Muñoz Rivas, P., y Villena Muñoz, A.R., (2008). *Prácticas de ordenador con Maxima.* Extraído de https://www.ugr.es/~alaminos/resources/Apuntes/practicas_de_ordenador_con_maxima.pdf

Apuntes marea verde: https://www.apuntesmareaverde.org.es/

Aroca, J.M., Fernández Bermejo M.J., (2019). *Álgebra lineal y geometría* Universidad de Valladolid.

Bescós i Escruela, E., y Pena i Terrén, Z., (2016). *Matemáticas II* 2º Bachillerato Editorial Oxford.

Cardona García, S., Rey Navarro, J.A. (2016). *Matemáticas II.*2º Bachillerato Editorial Edelvives.

Colera Jiménez, J., Colera Jiménez, L., y Oliveira González, Mª. J., (2009). *Matemáticas II*2º Bachillerato Editorial Anaya

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, Mª. J. y Colera Cañas, R. (2016). *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.* 2º Bachillerato Editorial Anaya.

De Burgos Román, J., (2006). *Álgebra lineal y geometría cartesiana.* Universidad Politécnica de Madrid McGraw-Hill S.A

Geogebra geogebra.org

Goldman, A. y Berele, A., (2001). *Geometry: theorems and constructions* Prentice Hall, Inc

Grossman, S.I., (2008). *Álgebra lineal*McGraw-Hill S.A

Hernández Rodríguez, E., Vázquez Gallo, M.J., Zurro Moro, M.A., (2012). *Álgebra lineal y geometría* PEARSON EDUCACIÓN S.A.

Medel, J.J. y García, C.V. (2016, enero-marzo). Historia del determinante. *Ciencia*, *60.* https://www.revistaciencia.amc.edu.mx/images/revista/67_1/PDF/Determinante.pdf

Merino, L., Santos, E., (2006). *Álgebra lineal con métodos elementales* Universidad de Granada.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2004). *Geometría de los determinantes*. http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/determinantes/geo_det.pdf

ORDEN EDU/363/2015, *4 de mayo de 2015*, BOCyL

ORDEN EDU/362/2015, *4 de mayo de 2015*, BOCyL

ORDEN ECD/65/2015, *21 de enero de 2015*, BOE

Rodríguez, M. (2015). *Primeros pasos en Maxima.* Extraído de: https://maxima.sourceforge.io/docs/tutorial/es/max.pdf

Wikipedia. wikipedia.org

http://matematicas.unex.es/~montalvo/Algebra%20II/Algebra03.pdf

http://riotorto.users.sourceforge.net/