UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática

PENSAMIENTO ALGEBRAICO, CONOCIMIENTO Y ACTIVIDADES BASADAS EN PATRONES PARA LA TRANSICIÓN DE PRIMARIA A SECUNDARIA

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumna: Raquel Pérez Martín

Tutor: Edgar Martínez Moro

Valladolid, junio 2022

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi tutor Edgar Martínez Moro, por un lado, por darme la oportunidad de realizar este trabajo con el fin de mejorar mi futura práctica docente. Y, por otro lado, por su ayuda siempre que la he necesitado.

Agradecer también a todos los profesores del Máster, de quienes he aprendido nuevos conocimientos que me han ayudado para elaborar este trabajo y, sobre todo, a crecer personal y profesionalmente.

Me gustaría hacer una mención especial al Colegio La Inmaculada Misioneras, donde he podido realizar mis prácticas externas y llevar a cabo el presente trabajo de investigación. Mi paso por este centro ha sido muy enriquecedor para mi formación y estoy enormemente agradecida a todos los docentes con los que he tenido la suerte de compartir esta etapa.

Por último, agradecer a mi familia, amigos y a todos los compañeros que he conocido este año, su apoyo, compañía y ayuda.

RESUMEN

En la actualidad, el álgebra ha sido motivo de numerosos estudios e investigaciones debido a las problemáticas encontradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este trabajo trata de comprender la evolución del pensamiento algebraico de los estudiantes en la transición de Primaria a Secundaria, así como las dificultades que estos presentan, a partir de tareas de generalización de patrones.

De este modo, se lleva a cabo una investigación cualitativa que recoge los resultados de estudiantes desde 5º de Primaria hasta 4º de Secundaria a una propuesta de actividades que involucran la generalización de patrones. Además de la secuencia de tareas a desarrollar en estas etapas educativas, también se elabora una rúbrica de evaluación de los niveles de algebrización.

El objetivo principal es comprender las dificultades que tiene el alumnado en el paso de un pensamiento aritmético a un pensamiento algebraico y proporcionar herramientas que puedan servir de referencia en la práctica docente, con el fin de evitar desajustes en tareas de razonamiento algebraico.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, generalización, tareas, patrones.

ABSTRACT

Currently, algebra has been the subject of numerous studies and research due to the problems encountered in the teaching-learning process. This work aims understand the evolution of algebraic thinking of students in the transition from Primary to Secondary School, as well as the difficulties they present, based on pattern generalization tasks.

Thus, a qualitative research work is carried out to collect the results of students from 6th grade of Primary to 4th of ESO to a proposal of activities that involve the generalization of patterns. In addition to the sequence of tasks to be developed in these educational stages, an evaluation rubric for algebraic levels is also elaborated.

The main objective is to understand the difficulties that students have in the transition from arithmetic to algebraic thinking and to provide tools that can serve as a reference in teaching practice, in order to avoid mismatches in algebraic reasoning tasks.

Keywords: Algebraic thinking, generalization, tasks, patterns.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICAS

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el álgebra ha sido motivo de innumerables investigaciones debido a las problemáticas encontradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta tiene una gran presencia como contenido matemático en diferentes etapas del sistema educativo, especialmente en la etapa de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Pensar algebraicamente está caracterizado por la introducción de símbolos para representar objetos, el uso de letras para representar cantidades o que una notación particular tenga distintos significados, entre otros aspectos. Según muestran diversos estudios, esta introducción y manipulación simbólica causa dificultades en la mayoría de los estudiantes, sobre todo, en la transición de Educación Primaria a Secundaria.

En particular, autores como Wagner y Parker (1999, como se citó en Castro, 2012), sugieren que las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra pueden ser clasificadas en tres tipos: aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y otras que son consecuencia de las técnicas de enseñanza.

Como respuesta a esta problemática, las investigaciones en educación matemática se han centrado en estudiar la introducción de formas de razonamiento algebraico desde los primeros niveles de Educación Primaria. De hecho, durante los últimos años, algunos currículos de Educación Primaria (NCTM, 2000; ACARA, 2015) ya han incorporado conocimientos de naturaleza algebraica.

Asimismo, diversos investigadores consideran los procesos de generalización como una vía de acceso a esta introducción temprana al pensamiento algebraico. Fomentan que se promueva su estudio a través de situaciones de variación y cambio que involucren la generalización de patrones y secuencias que vinculen la visualización, exploración y manipulación de números y figuras.

Desde esta perspectiva, la finalidad de este trabajo es comprender la evolución del pensamiento algebraico en la transición de Primaria a Secundaria a partir de una propuesta de tareas basadas en la generalización de patrones y de una rúbrica de evaluación, así como determinar el nivel de algebrización que poseen los alumnos de cada curso. Además, el matiz fundamental de este estudio es el de un trabajo de investigación, lo cual permitirá examinar cómo se ha ajustado dicha propuesta con el fin de mejorarla para la práctica docente.

En el primer capítulo se realiza una contextualización del problema, es decir, se recogen las razones que originan la realización de este estudio y que permitieron generar el problema de investigación. Todo ello sustentado en investigaciones antecedentes que forman parte de la línea de investigación: problemática aritmético-algebraica y dificultades en el pensamiento algebraico. Además, se dan a conocer los objetivos que se persiguen.

El segundo capítulo corresponde a una descripción del marco teórico que sustenta el trabajo. Se explican las principales teorías que sustentan los procesos algebraicos: Capas de generalidad (Radford, 2010a, 2011), la Teoría Antropológica de la Didáctica (Bosch et al., 2006) y la Teoría del Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2007, Godino et al, 2008, Godino, 2012, Godino et al, 2017), los patrones en el aprendizaje del álgebra, y la generalización como proceso de enseñanza. Además, se expone el modelo de demanda cognitiva según Smith y Stein (1998) de tareas de generalización de patrones.

El tercer capítulo engloba todo el marco metodológico de la investigación. Se expone el tipo de investigación utilizado, Investigación Basada en Diseño, cuyo objetivo es evaluar si la propuesta de tareas de generalización de patrones se ajusta al proceso de enseñanza-aprendizaje en la transición de Primaria a Secundaria. Además, se presenta el contexto de estudio, el instrumento de recogida de datos y las fases propias del diseño de investigación.

En ellas se recoge la exploración y comprensión del tema de investigación, la preparación y el diseño de la propuesta de tareas y de la rúbrica de evaluación, así como la implementación de dichas actividades en el aula. Para finalizar, se expone el análisis de los datos, destacando algunos errores y dificultades encontradas, y la evaluación y reflexión de la investigación.

Por último, en el cuarto capítulo, a partir del estudio realizado desde las diferentes tareas planteadas y las actividades realizadas por estudiantes desde 5º curso de Primaria hasta 4º curso de Secundaria se dan a conocer las conclusiones.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

El álgebra, como contenido del currículo de Matemáticas, está muy presente en las diferentes etapas en el Sistema Educativo, especialmente desde Educación Secundaria Obligatoria. Sin embargo, en los últimos años han surgido propuestas de introducir ciertas cuestiones de pensamiento algebraico en Educación Primaria (Socas, 2011).

De acuerdo con este autor, las investigaciones en pensamiento algebraico a nivel internacional últimamente se han orientado, por un lado, "al análisis de las características esenciales del pensamiento algebraico, niveles de organización y problemas que ocasionan en la enseñanza y en el aprendizaje" y, por otro lado, en "la descripción y estudio de respuestas y procesos de solución de estudiantes y profesores en tareas específicas de dicho pensamiento" (Socas, 2011, p. 6).

Además, señala que la investigación en pensamiento algebraico trata de encontrar soluciones a preguntas como: ¿qué pueden hacer los estudiantes y los profesores en las distintas etapas o niveles del Sistema Educativo en pensamiento algebraico?

Estos estudios, si se toman como referencia los contenidos tratados, se pueden agrupar en tres grandes núcleos (Socas, 2011, p. 6):

1. La transición del pensamiento numérico al algebraico, analizando los aspectos del primero que son la base para los conocimientos de la aritmética generalizada.
2. Los procesos específicos del pensamiento algebraico como la sustitución formal, la generalización y la modelización.
3. La búsqueda de propuestas que mejoren la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en Educación Secundaria.

En el marco de las consideraciones teóricas, estos señalan la falta de paradigmas teóricos en la investigación del álgebra y centran su atención en los fenómenos didácticos, cuyas causas puedan atribuirse a la materia matemática implicada en el proceso de enseñanza – aprendizaje del lenguaje algebraico.

Kieran (1992, como se citó en Socas, 2011) adopta una perspectiva histórico – epistemológica y hace una revisión y reconceptualización de gran parte de las investigaciones existentes en álgebra en términos de un modelo que denota "experimental – estructural". Este autor trata de analizar y comprender mejor las dificultades que los estudiantes tienen al aprender el álgebra y los problemas de su enseñanza.

Además, realiza una distinción entre usar letras para representar incógnitas en la resolución de ecuaciones, usar letras para representar datos, expresando soluciones generales, y usar letras como herramienta para promover reglas que expresen las relaciones numéricas, que surgen en lenguaje algebraico en momentos históricos diferentes.

Socas (2011) relata que parte de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del álgebra escolar tiene sus raíces en el desarrollo histórico del álgebra como sistema simbólico. Por tanto, acepta como punto de partida que la discusión histórica y el análisis epistemológico del pensamiento algebraico juegan un papel esencial a la hora de determinar los procesos de enseñanza – aprendizaje del álgebra escolar.

En particular, Bednarz et al. (1996, como se citó en Socas, 2011) ofrecen en su libro un análisis y reflexión sobre las distintas vías de introducción del álgebra en el ámbito escolar. Las aproximaciones que tratan son la generalización de patrones numéricos y geométricos, la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y matemáticos, y la introducción de problemas funcionales.

En los últimos años, Kieran (2007, como se citó en Socas, 2011) aporta un nuevo trabajo en el que hace una revisión de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, mostrando nuevas formas de construir significados para los símbolos algebraicos y para su manipulación. Además, se centra en las diferentes fuentes de significados para el lenguaje algebraico en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria.

Por otro lado, Carraher y Schilemann (2007, como se citó en Socas 2011) realizan una amplia revisión sobre el razonamiento algebraico de los alumnos de 6 a 12 años, con el fin de apostar por esta corriente de investigación y fundamentar en ella que el álgebra tiene un lugar en el currículo de Educación Primaria. A esta corriente se la denomina “Early Algebra” y abarca tanto el razonamiento algebraico como las relaciones algebraicas en la etapa de Primaria.

En consecuencia, la transición de la aritmética al álgebra ha sido y es un tema de investigación permanente. Socas (2011) señala que esta transición ha sido abordada, en un primer momento, tratando de entender la relación entre la aritmética y el álgebra para poner énfasis en aquellos aspectos que puedan mejorar este paso.

Esto ha originado diversas propuestas (Pre-álgebra, Early Algebra) en el desarrollo curricular condicionadas, entre otras cuestiones, por los resultados obtenidos en las investigaciones desarrolladas sobre las dificultades y errores en la enseñanza, y aprendizaje de la aritmética y el álgebra.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.2.1. PROBLEMÁTICA ARITMÉTICO-ALGEBRAICA

Verschaffel y De Corte (1996, como se citó en Cortés et al., 2016, p. 241), caracterizan el pensamiento aritmético en Educación Primaria como la estructura cognitiva que tiene que ver con los conceptos numéricos y el sentido de los números, el significado de operaciones aritméticas, el control de hechos básicos de la aritmética, el cálculo mental y escritura de la aritmética o la lectura y escritura de problemas verbales y habilidades aritméticas.

Sin embargo, la división de estos contenidos en el currículo escolar es muy clara; aritmética para Educación Primaria y álgebra para Educación Secundaria Obligatoria. De hecho, esta tradición curricular ha impulsado investigaciones centradas en "la búsqueda de "cortes" entre la aritmética y el álgebra (Filloy y Rojano, 1989), o la noción de obstáculo epistemológico, utilizada para dar cuenta de los problemas de aprendizaje del álgebra, entre otros" (Cortés et al., 2016, p. 242).

La transición de la aritmética al álgebra es, por tanto, un paso importante para abordar conceptos más complejos dentro del currículo de Matemáticas. Los estudiantes deben lidiar con un cambio en las notaciones y estructuras con las que habían trabajado en toda la etapa de Primaria

Kieran (2004, p. 140) afirma que "los estudiantes operan en un marco de referencia aritmético y tienden a no ver los aspectos relacionales de las operaciones, es decir, su atención se centra en el cálculo". Por tanto, para desarrollar una forma de pensar algebraicamente se requiere de ciertos enfoques que incluyen, pero no se limitan a (Kieran, 2004, p. 140-141):

- Las relaciones y no simplemente en el cálculo de un número.
- Las operaciones, así como sus inversas, y en la idea relacionada de hacer/deshacer.
- Representar y resolver un problema en lugar de simplemente resolverlo.
- Un enfoque tanto en números como en letras. Esto incluye trabajar con letras que a veces pueden ser incógnitas, variables o parámetros, aceptar expresiones literales y comparar expresiones de equivalencia basadas en propiedades.
- El significado del signo igual.

Asimismo, Rojas y Vergel (2013) añaden otros cambios significativos como la concatenación de símbolos, el uso de paréntesis o el reconocimiento y uso de estructuras.

En cuanto al estudio de las dificultades y errores de la relación entre la aritmética y el álgebra, Socas (2011) distingue, a grandes rasgos, tres etapas.

〉 En la primera etapa, la investigación consistía en hacer recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de situaciones problemáticas. El objetivo era realizar un análisis de los tipos de errores detectados y realizar una clasificación que permitiera examinar cómo surgen y qué factores podrían haber influido en ellos. (Socas, 2011).

〉 En una segunda etapa, añade Socas (2011), se tomó conciencia de que el error era algo normal en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Brousseau et al. (1986, como se citó en Socas, 2011, p. 11) describen que “los errores que cometen los alumnos muestran, en algunos casos, un patrón consistente”. Esto los lleva a señalar posibles caminos en los que el error puede presentarse; errores como consecuencia de concepciones inadecuadas, como la aplicación correcta de un procedimiento sistematizado que es inapropiado, como consecuencia del uso de métodos propios del estudiante, etc.

Además, “esta segunda etapa se caracteriza por reconocer que los errores son también fruto de otras variables en el proceso educativo, como del profesorado, del currículo, del contexto y de sus interacciones” (Socas, 2011, p. 11).

- En los últimos años, correspondientes a la tercera etapa, se encuentran estudios en los que se abordan globalmente los obstáculos y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico en Educación Secundaria. Estas dificultades son organizadas en cinco grandes categorías que permiten describir su procedencia:

> Dos de ellas están asociadas a la propia disciplina, complejidad de los objetos de las matemáticas y procesos de pensamiento matemático. Una tercera está relacionada con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas. La cuarta está asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos y, la quinta, se relaciona con las actitudes afectivas y emocionales hacia esta materia (Socas, 2011, p. 12).

De esta forma, Socas (2001, 2007) aborda los errores que cometen los alumnos desde tres orígenes distintos; obstáculos (cognitivos, didácticos y epistemológicos), ausencia de sentido (semiótico, estructural y autónomo) y actitudes afectivas (emociones, actitudes y creencias).

En consecuencia, dadas las dificultades y errores que tienen los alumnos, el panorama investigador refleja en los últimos años una insatisfacción generalizada sobre las formas tradicionales de la enseñanza del álgebra. Esto ha generado una preocupación por hacer del álgebra un estudio accesible para todos y buscar formas más efectivas que las tradicionales para abordar con garantías la enseñanza de esta rama de las matemáticas.

Diversas investigaciones ponen de manifiesto que la aritmética es primordial para acceder al álgebra y la búsqueda de la relación entre ambas ha llevado a considerar dos posiciones diferentes.

Una sustenta que el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y que depende fuertemente de su fundamentación, dado que esta tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente.

La otra posición sugiere que se debe promover en la Educación Primaria el desarrollo de los aspectos algebraicos que ya posee el pensamiento de los niños, o bien, que se deben fomentar cambios en la forma de pensar de los alumnos que les conduzca al pensamiento algebraico.

1.2.1. PROBLEMAS ASOCIADOS AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Los problemas asociados al pensamiento algebraico han sido estudiados en diferentes trabajos. En particular, desde la perspectiva de la psicología cognitiva, Kieran y Filloy (1989, como se citó en Flores y Escribano, 2017, p. 55) han identificado los factores que influyen sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra, que ponen de manifiesto las consecuencias de considerar el álgebra como aritmética generalizada.

Según Godino y Font (2004) y Cajaraville et al. (2012), las primeras experiencias con el razonamiento algebraico están relacionadas con la aritmética generalizada. Estas experiencias de los estudiantes con la aritmética son importantes para la comprensión progresiva del lenguaje algebraico y, además, el concepto matemático que hace posible esta generalización es el de variable.

Diversos trabajos aludidos en Flores y Escribano (2017) tratan de encontrar soluciones a preguntas como: "¿qué pueden hacer y qué no pueden hacer los estudiantes en los niveles de comprensión del álgebra?" (Flores y Escribano, 2017, p. 56). Esta percepción se puede agrupar en los siguientes núcleos:

Los obstáculos epistemológicos (intrínsecas al objeto) debidos, en gran parte, a la naturaleza del álgebra, su lenguaje, los elementos que lo componen y/o las reglas que lo rigen. En los estudios de Kieran (1997, como se citó en Flores y Escribano, 2017, p. 56), se señala que, en los problemas del álgebra elemental, en los que se presenta la variable como un valor desconocido, las demandas conceptuales de los estudiantes se centran en:

- Comprender las letras como objeto que se usa para representar incógnitas, números generalizados y relaciones entre cantidades.
- Traducir los problemas a modelos algebraicos, basados en ecuaciones que representan las cantidades desconocidas y los datos restantes del problema.
- Resolver dichas ecuaciones.

Estas demandas generan dificultades de aprendizaje en muchos alumnos.

Otros problemas mencionados en Gallardo y Pizón (2000) están relacionados con la comprensión sobre la concatenación de términos algebraicos en relación con la del sistema de numeración, las transformaciones entre números positivos y negativos en expresiones algebraicas, la inversión incorrecta de las operaciones (transposición de términos en una ecuación) o la diferencia de la incógnita respecto a su coeficiente.

Por último, en cuanto a los obstáculos o dificultades ontogénicas, es decir, inherentes al propio sujeto, nos encontramos las relacionadas con la complejidad que supone la abstracción y la generalización.

1.2.1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Debido a la problemática presentada, el problema general de esta investigación es la existencia de dificultades al pasar de un pensamiento aritmético (operacional) a un pensamiento algebraico.

De forma más específica, en este trabajo nos centraremos en las dificultades que se localizan en la introducción de razonamientos o experiencias basadas en patrones en la transición de Primaria a Secundaria.

1.2.2. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Partiendo del problema específico definido anteriormente, se ha llegado a las siguientes preguntas las cuales orientan el trabajo de investigación:

1. ¿Cómo establecen los estudiantes de Primaria y Secundaria la regla que define un patrón?
2. ¿Cómo justifican esa regla?
3. ¿Qué nivel de algebrización se puede esperar de cada curso o etapa educativa?

1.2.3. OBJETIVOS DE ESTUDIO

El objetivo general de la investigación es acercarse a la comprensión, mediante la observación de las soluciones a las tareas de generalización de patrones, de la evolución del pensamiento algebraico de estudiantes desde 5º de Primaria hasta 4º de Secundaria, así como de las principales dificultades que estos encuentran.

Este objetivo, se descompone a su vez en varios objetivos específicos:

Objetivo práctico

Diseñar una propuesta de actividades de generalización de patrones para alumnos de 5º de Primaria hasta 4º de Secundaria y una rúbrica de evaluación de los niveles de algebrización.

Objetivos intelectuales

Analizar la evolución del pensamiento algebraico en la transición de Primaria a la ESO a través de una rúbrica de evaluación de los niveles de algebrización.

Determinar el nivel de algebrización que desarrollan los alumnos de cada etapa o curso académico.

Objetivos personales

Comprender mejor las dificultades que tiene el alumnado en el paso de un pensamiento aritmético a un pensamiento algebraico para que mi docencia pueda ajustarse y solventar estos obstáculos.

Disponer de más criterios o herramientas que me ayuden a planificar el desarrollo de mi docencia con el fin de evitar desajustes en tareas de razonamiento algebraico.

1.3 JUSTIFICACIÓN

El problema de investigación surge de tres contextos diferentes pero complementarios; personal, curricular e investigador. En primer lugar, se exponen las razones personales que han motivado el interés por estudiar dicha problemática.

1.3.1. JUSTIFICACIÓN PERSONAL

Dentro de las matemáticas, la rama que siempre ha llamado más mi atención ha sido la del álgebra. Por este motivo, mi trabajo de fin de grado de Matemáticas también estaba englobado dentro de esta área. La curiosidad o interés por el álgebra surge en Secundaria, al observar que era el bloque de Matemáticas que presentaba mayor dificultad para los alumnos.

Por este motivo y porque mi vocación desde muy pequeña ha sido ser profesora de Matemáticas, tenía gran interés en comprender de donde surgían esas dificultades y cómo yo algún día, en mi labor de docente, podría solventarlas.

Tras las clases recibidas en el máster, decidí enfocar mi trabajo hacia la comprensión de la evolución del pensamiento algebraico de los alumnos en la transición de Educación Primaria a Secundaria y, al mismo tiempo, proporcionar herramientas para solventar las dificultades que surgen en este proceso.

En particular, después de la lectura de diversas investigaciones y documentos sobre el pensamiento algebraico, la mayoría de ellos enmarcados dentro de la temática de investigación en el que se desarrolla este trabajo, decidí profundizar en la generalización de patrones algebraicos.

1.3.2. JUSTIFICACIÓN CURRICULAR

En relación con el tema que abordamos en este trabajo, los documentos vigentes para la Educación Primaria (BOCYL, 2016) estructuran el currículo de Matemáticas en cinco bloques; "*Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*", "*Números*", "*Medida*", "*Geometría*" y "*Estadística y probabilidad*", sin incluir el campo del álgebra.

Aunque no haya una alusión específica a los contenidos relacionados con el álgebra en esta etapa, desde los documentos oficiales se establece cierta disposición para la resolución de problemas. Este razonamiento, unido a conocimientos relativos a patrones, regularidades, estructuras o lenguaje algebraico, será un componente fundamental del pensamiento algebraico.

En ese sentido, el NCTM (2000), National Council of Teachers of Mathematics, organismo de referencia en enseñanza de las matemáticas a nivel internacional, propone incluir un bloque temático sobre álgebra en los diseños curriculares para la Educación Infantil y Primaria. Para dicho bloque se establecen cuatro estándares de aprendizaje (Aké et al., 2013):

1. Comprender patrones, relaciones y funciones.
2. Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos.
3. Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
4. Analizar el cambio en diversos contextos.

Estos estándares han sido desarrollados de manera más explícita para los distintos niveles o grados. En particular, los conocimientos que los alumnos deberían adquirir en la última etapa de Primaria y primeras de Secundaria, de cada uno de los cuatro estándares de aprendizaje presentados son (Oteiza, 2019):

Tabla 1

Conocimientos correspondientes a cada uno de los estándares de aprendizaje definidos por el NCTM en 6º de primaria y 1º y 2º de ESO

E1	Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones mediante tablas, gráficas, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas.
	Relacionar y comparar distintas formas de representación de una relación.
	Identificar funciones, lineales o no lineales y contrastar sus propiedades a partir de tablas, gráficas o ecuaciones.
E2	Iniciar la comprensión conceptual de los diferentes usos de las variables.
	Explorar relaciones entre expresiones simbólicas y gráficas en líneas, poniendo especial atención en el significado de la ordenada en el origen y la pendiente.
	Usar el álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas, particularmente, aquellos que presenten situaciones lineales.
	Reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas sencillas y resolver ecuaciones lineales.
E3	Modelizar y resolver problemas contextualizados usando representaciones diversas, como gráficas, tablas y ecuaciones.
E4	Utilizar gráficas para analizar la naturaleza de los cambios cuantitativos en relaciones lineales.

Nota. Elaboración propia. Adaptado de Oteiza (2019).

En resumen, el NCTM propone utilizar el álgebra como un lenguaje de representación y orienta su enseñanza hacia su aplicación a otros bloques.

Por otro lado, los documentos vigentes para la Educación Secundaria Obligatoria (BOCYL, 2015) estructuran el currículo de Matemáticas en cinco bloques; "*Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*", "*Números y álgebra*", "*Geometría*", "*Funciones*" y "*Estadística y probabilidad*".

Se observa que en el segundo bloque ya se incluye el estudio del álgebra. Este propone el estudio de los diferentes conjuntos de números, sus operaciones y propiedades, y la utilización del lenguaje algebraico para expresar de manera simbólica propiedades o relaciones, para transformar e intercambiar información y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.

A continuación, se muestra una tabla que recoge los estándares de aprendizaje que se establecen para los cursos de 1º, 2º, 3º y 4º de Secundaria según el BOCYL (2015).

Tabla 2

Resumen de los estándares de aprendizaje correspondientes a cada curso académico en el bloque

CURSO	**ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE**	
1º y 2º ESO	Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.	
	Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.	
	Utiliza las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.	
	Comprueba, dada una ecuación, si un número (o números) es (son) solución de la misma.	
	Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer grado, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.	
2º ESO	Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.	
3º ESO	*M. Académicas*	Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.
	M. Aplicadas	Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas lineales de dos

		ecuaciones con dos incógnitas, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.
4º ESO	*M. Académicas*	Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.
		Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante inecuaciones, ecuaciones o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos.
	M. Aplicadas	Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.
		Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

Nota. Elaboración propia. Adaptado de BOCYL (2015).

De lo anterior se deduce que en el primer curso de Secundaria se lleva a cabo una introducción del lenguaje algebraico. En el segundo curso se utiliza dicho lenguaje para generalizar propiedades y simbolizar relaciones, y en el tercer y cuarto curso se realizan traducciones de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico, así como transformaciones de expresiones algebraicas.

1.3.3. JUSTIFICACIÓN INVESTIGADORA

Por último, como se ha mencionado en epígrafes anteriores, son numerosos los estudios e investigaciones que hablan sobre el pensamiento algebraico, su relación con la aritmética y las dificultades y errores que surgen en esta transición.

En particular, estudios recientes argumentan que el pensamiento algebraico desde edades tempranas puede favorecer el desarrollo de conceptos matemáticos complejos (Blanton y Kaput, 2005). Por este motivo, en los últimos años han surgido corrientes como el “Early Algebra” que “proponen la introducción del álgebra desde los primeros años de escolarización y consideran que una de las vías más eficaces para ello es la generalización de patrones” (Zapatera, 2018, p. 51).

Debido a lo referido en líneas anteriores, es necesario abordar el estudio de esta problemática, de modo que se puedan brindar más herramientas que puedan servir de referencia a los docentes en la introducción del pensamiento algebraico como, por ejemplo, a través de tareas de generalización de patrones.

En este trabajo se ofrece una propuesta de tareas de generalización de patrones y una rúbrica de evaluación que sirva como pequeña aportación al estudio de esta problemática dejando abiertas posibles líneas de investigación para un futuro.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 PENSAMIENTO ALGEBRAICO

En los últimos años, un foco importante de la investigación en educación matemática ha sido el desarrollo del pensamiento algebraico en las primeras etapas de enseñanza, que apoya la introducción del álgebra temprana en el currículo de Educación Primaria (Callejo et al., 2016). Autores como Cai y Knuth (2011) destacan que un desarrollo temprano del pensamiento algebraico puede, en particular, facilitar el contacto de los estudiantes con el simbolismo algebraico.

Vergel (2014) asume el pensamiento algebraico como una forma particular de reflexionar matemáticamente y además considera la generalización de patrones como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela.

Para Godino y Font (2000, p. 774), "el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas". Relatan que "a medida que se va desarrollando este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, variables y las funciones".

En particular, el pensamiento algebraico es caracterizado por Radford (2006) mediante tres elementos interrelacionados; el sentido de la indeterminación (incógnitas, variables y parámetros), la analiticidad (como forma de trabajar los objetos indeterminados) y la designación simbólica de sus objetos. Este autor plantea la necesidad de reflexionar explícitamente sobre la relación entre el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de generalización (Rojas y Vergel, 2013).

Alrededor del proceso de enseñanza – aprendizaje del pensamiento algebraico, González (2013), pone de manifiesto que "pensar algebraicamente está relacionado con un uso eficaz del lenguaje algebraico caracterizado por la introducción de tales símbolos, que un mismo objeto puede representarse de formas diversas y que es habitual que una notación particular tenga diferentes significados".

Como ya hemos mencionado, en las últimas décadas se han desarrollado un número significativo de trabajos de investigación que reflexionan acerca de la posibilidad de desarrollar, desde edades tempranas, la capacidad de los niños y jóvenes para razonar algebraicamente. Estos trabajos plantean la necesidad de incluir en el currículo los desarrollos teóricos y que, "a partir del contacto con experiencias significativas desde la formación inicial en aritmética, es posible avanzar en la construcción de esquemas asociados al pensamiento algebraico" (Rojas y Vergel, 2013, p. 690).

Por ejemplo, Azarquiel (1993, como se citó en Rojas y Vergel, 2013, p. 691) reconoce la necesidad de desarrollar procesos de pensamiento que permitan la construcción de un pensamiento algebraico, el cual tiene lugar a lo largo de un proceso continuo dentro del trabajo aritmético y geométrico que se inicia en los primeros años.

Kieran (2004, p. 149) señala que el pensamiento algebraico en las primeras etapas escolares "debería incluir el desarrollo de formas de pensar sobre la relación entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción". Esta definición se basa en el modelo descrito por Kieran (1996) de la existencia de tres tipos de actividades del álgebra escolar (generacionales, transformacionales y globales).

Por lo tanto, se puede afirmar que existe un consenso en la comunidad de investigadores en didáctica del álgebra respecto a la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de Educación Básica, es decir, desde Primaria (Rojas y Vergel, 2013).

2.2 TEORÍAS QUE SUSTENTAN LOS PROCESOS ALGEBRAICOS

2.2.1. CAPAS DE GENERALIDAD

Radford (2010a, citado por Vergel, 2014, p. 86) "reconoce que los objetos matemáticos son objetos generales y la actividad matemática es esencialmente simbólica. Además, plantea la necesidad de reflexionar explícitamente sobre la relación dialéctica entre el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de generalización".

Argumenta que el uso de notaciones (es decir, el simbolismo alfanumérico) no es una condición necesaria ni suficiente para pensar algebraicamente, ya que el pensamiento algebraico no se trata de usar o no notaciones, sino de razonar de ciertas maneras.

Según Radford (2011), lo que distingue el pensamiento aritmético del algebraico es el hecho de que en este último se trata con cantidades indeterminadas concebidas de manera analítica. Es decir, considerar las cantidades indeterminadas (incógnitas o variables) como si fueran conocidas y realizar cálculos con ellas como se haría con números conocidos.

De esta forma, la manera distintiva en la que el pensamiento algebraico puede definirse, sobre bases epistemológicas, es por la indeterminación y la analiticidad. Estos dos elementos, son los que hacen el pensamiento algebraico distinto de la aritmética y de otras formas de pensamiento, pero pueden tomar varias formas. "Esto es así porque el pensamiento algebraico puede operar en diferentes capas de generalidad, algunas más concretas y otras más generales" (Radford, 2011, p.311).

Con el fin de mostrar cómo la indeterminación y la analiticidad están presentes en los procedimientos de los estudiantes, Radford (2011) sugiere tener en cuenta que, aunque la indeterminación se suele expresar mediante letras, también existen otras formas en las que expresarlo. Antiguamente, los matemáticos usaban varias formas de pensar y lidiar con la indeterminación; por ejemplo, los babilónicos usaban nombres contextuales según el problema y diagramas geométricos.

De acuerdo con lo anterior, podemos asumir que el pensamiento algebraico es una forma particular de reflexionar matemáticamente y que, además, está caracterizado, según Radford (2010a) por tres elementos estrechamente relacionados:

- La indeterminación (en oposición a la determinación numérica), propia de objetos básicos como incógnitas, variables y parámetros.
- La analiticidad, como forma de trabajar con los objetos indeterminados.
- La designación simbólica, como la manera específica para nombrar o referir los objetos.

Además, en relación con la generalización de patrones, añade una distinción entre generalización e inducción. Afirma que, "así como no toda simbolización es algebraica, no toda actividad de modelado conduce al pensamiento algebraico" (Radford, 2010a, p. 40).

Esta generalidad algebraica, según este autor, se compone de diferentes capas, y el alcance de generalidad que podemos alcanzar dentro de una determinada capa está relacionado con la forma material que usamos para razonar y expresar lo general. Es decir, las capas de generalidad se pueden distinguir en términos de las pautas o indicaciones a los que recurren los estudiantes para pensar algebraicamente.

Los gestos, el lenguaje y la percepción son componentes materiales del pensamiento. Lo material (por ejemplo, los gestos) e inmaterial (por ejemplo, imágenes) del pensamiento constituyen su "textura semiótica". Esta textura marca los límites de lo que es decible, pensable e intencional (Radford, 2011).

De esta manera, Radford (2010a) considera la generalización de patrones como punto de partida para la algebrización, y después de ella propone generalizaciones factuales, conceptuales y simbólicas.

Estas son las denominadas capas de generalidad que se caracterizan por medios semióticos de objetivación, motivados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos y lenguaje natural, que darán el carácter progresivo de generalidad en cada una de estas etapas (Rivas, 2021).

- *Pensamiento algebraico factual*. En esta capa de generalidad, la indeterminación queda implícita, es decir, no alcanza el nivel de la enunciación, ya que se expresa en acciones concretas. Por ejemplo, a través del trabajo sobre números. Además, los medios semióticos de objetivación son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras (Vergel, 2014).
- *Pensamiento algebraico contextual*. En este estrato la indeterminación es explícita, se vuelve

objeto del discurso. La formulación algebraica es una mera descripción del término general, y los estudiantes tienen que trabajar con formas reducidas de la expresión (surge la idea de contracción semiótica). Los medios semióticos de objetivación, como los gestos y las palabras, son sustituidos por otros tales como frases “clave” (Vergel, 2014).

- *Pensamiento algebraico simbólico*. Según Radford (2010), como se citó en Vergel (2014, p. 89), en esta capa de pensamiento, “hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso”, a través de signos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, las frases “clave” son representadas por estos símbolos. Esto conlleva pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica.

2.2.2. TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LA DIDÁCTICA

Como segunda teoría que sustenta los procesos algebraicos encontramos la Teoría Antropológica de la Didáctica, la cual, según Bosch et al. (2006), “aparece con las primeras formulaciones de la Teoría de la Transposición Didáctica. Esta, además, puede ser considerada como un desarrollo de la teoría de las situaciones didácticas, con la que comparte sus principios fundamentales”.

El origen de esta teoría puede deberse, por una parte, a la necesidad del investigador de desentenderse de los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones escolares y, por otra parte, a la necesidad de indagar sobre las condiciones y restricciones que afectan a todo proceso de divulgación del conocimiento matemático en la escuela (Bosch et al., 2006).

La Teoría Antropológica de la Didáctica, como modelo teórico, propone que toda actividad humana puede ser modelada mediante praxeologías (praxis + logos). Esta noción primitiva “constituye la herramienta fundamental para modelar la actividad matemática, entendida como una actividad humana” (Bosch, et al., 2006, p. 38). De hecho, estos autores añaden que en toda actividad humana es posible distinguir el nivel de praxis o del “saber hacer”, que engloba el tipo de problemas y cuestiones que se estudian, así como las técnicas para resolverlo, y el nivel de logos o del “saber”, referido a la teoría.

Posteriormente, con el objetivo de tener herramientas más precisas para analizar los procesos didácticos institucionales, Yves Chevallard (1999), máximo ponente de esta teoría introdujo la distinción de diferentes tipos de praxeologías. Para ello, tuvo en cuenta el grado de complejidad de sus componentes (Bosch et al., 2006, p. 39):

- *Praxeologías puntuales*: si están generadas por un único tipo de tareas. Esta noción es relativa a la institución considerada y está definida a partir del bloque práctico técnico.
- *Praxeologías locales*: que son el resultado de la integración de diversas praxeologías puntuales. Cada una de las cuales está caracterizada por una tecnología que sirve para explicar, justificar, producir y relacionar entre sí las técnicas de todas las praxeologías puntuales que la integran.

- *Praxeologías regionales*: obtenidas mediante la coordinación, articulación y posterior integración alrededor de una teoría matemática común (de diversas praxeologías locales). La reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un lenguaje común que permita describir, interpretar, relacionar, justificar y producir las diferentes tecnologías de las praxeologías locales que integran la praxeología regional.
- *Praxeologías globales*: surgen agregando varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes tecnologías.

Por otro lado, en el desarrollo de la Teoría Antropológica de la Didáctica, Gascón (2011), como se citó en Gascón y Nicolás (2019), estudia cuestiones pertenecientes a las tres fundamentales de dicha problemática:

- La dimensión *económica* responde a la cuestión de ¿cómo se comportan las praxeologías en una institución determinada? A esta dimensión corresponden las cuestiones relativas a las condiciones que regulan la organización y el funcionamiento de dichas praxeologías en la institución de referencia, es decir, las cuestiones concernientes al sistema de reglas, principios y leyes que rigen la vida institucional de las mismas.
- La dimensión *ecológica* responde a la cuestión ¿por qué las praxeologías han llegado a ser como son en dicha institución y cómo podrían modificarse? La problemática ecológica está constituida por las cuestiones relativas a las condiciones que se requieren para promover la "vida" de cierto tipo de praxeologías en una institución concreta, así como las cuestiones referentes a las condiciones que facilitan y a las restricciones que dificultan o impiden que las praxeologías en cuestión se modifiquen en una dirección determinada.
- La dimensión *epistemológica* responde a la cuestión ¿cómo construir un modelo epistemológico – didáctico de referencia, específico de las praxeologías que están en juego, que responda a la problemática matemático – didáctica? Para estudiar las dimensiones económica y ecológica de la problemática didáctica, los didactas utilizan inevitablemente – como referencia - un modelo (aunque sea implícito) de las praxeologías matemáticas que están en juego, esto es, un modelo epistemológico de referencia (MER) del ámbito de la actividad matemática en cuestión.

En particular, para el estudio de la dimensión epistemológica, se ha propuesto un modelo epistemológico de referencia del álgebra en Educación Secundaria. Este modelo está constituido por tres etapas que responden al proceso de algebrización de la actividad matemática. Según Munzón et al. (2015, p. 112), la construcción de dicho modelo del álgebra elemental tiene, al menos, dos objetivos:

> En primer lugar, será útil para reinterpretar lo que se considera "álgebra" en la matemática escolar actual y para indagar el papel que desempeña el algebra elemental en la relación con las

demás áreas. Y, en segundo lugar, será imprescindible para estudiar la ecología institucional de este ámbito de la matemática escolar.

2.2.3. ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICO

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemático (EOS) es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y su aprendizaje (Godino, 2014).

Con dicho fin, se adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones implicadas y las interacciones sobre las mismas. Godino (2014) añade que esta teoría se apoya y nutre de aportaciones de las diversas disciplinas y tecnologías interesadas en la cognición humana como son la epistemología, psicología, sociología, semiótica y/o Ciencias de la Educación.

El punto de partida del enfoque ontosemiótico, tal y como mencionan Godino et al. (2007), fue "una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de las matemáticas como una actividad socialmente compartida de resolución de problemas, un lenguaje simbólico y un sistema conceptual organizado lógicamente".

Por todo lo anterior, Godino y Burgos (2017), definen el EOS "como un sistema teórico modular e inclusivo que proporciona herramientas para el análisis epistémico y cognitivo de la actividad matemática, asumiendo presupuestos antropológicos y semióticos sobre la naturaleza de las matemáticas". Además, adopta principios didácticos de tipo socio-constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza – aprendizaje.

Estos autores afirman que la herramienta clave para el análisis epistémico y cognitivo es la de configuración ontosemiótica. Esta tiene en cuenta las prácticas matemáticas operativas, discursivas y normativas realizadas ante una situación – problema, así como los objetos y procesos matemáticos implicados en ellas.

Las herramientas que componen el EOS se han desarrollado en tres etapas. En cada una de ellas, los autores Godino et al. (2007) y Godino (2012), han ido refinando progresivamente el objeto de indagación.

En los primeros trabajos, publicados en el periodo 1993-1998, Godino y Batanero (1994), Godino (1996), y Godino y Batanero (1998), desarrollaron y precisaron progresivamente las nociones de "significado institucional y personal de un objeto matemático", relacionándolas con las de conocimiento y comprensión. "En esta primera fase se propuso como noción básica para el análisis epistémico y cognitivo los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones – problemas" (Godino, 2012, p. 54).

En la segunda etapa, a partir de 1998, entre los autores mencionados anteriormente, surgió la necesidad de elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados. En este periodo, resume Godino (2012, p. 54), se intentó progresar en el desarrollo de una ontología y semiótica específicas que estudiasen los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en la interacción didáctica.

Por último, en la tercera etapa, el interés se puso en los modelos teóricos propuestos en el área de la didáctica de las matemáticas sobre la instrucción matemática. De esta forma, se propuso distinguir, en un proceso de instrucción matemática, seis dimensiones, cada una de ellas modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias (Godino, 2012).

Estas dimensiones engloban la epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (relativa a funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y afectiva (actitudes, emociones, etc., de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas).

Godino (2012, p. 55) añade que "el modelo ontológico y semiótico de la cognición proporcionó criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y se adoptó la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las configuraciones y trayectorias didácticas".

En conclusión, el conjunto de supuestos y nociones teóricas (herramientas teóricas) que actualmente constituyen el Enfoque Ontosemiótico sobre el Conocimiento e Instrucción Matemática, se clasifican en cinco grupos, cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de Matemáticas.

1. *Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipo de problemas*.

   El EOS adopta como elemento central la actividad de resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático (Godino y Batanero, 1994). Estos autores (1994, p.334) consideran práctica matemática a "todo tipo de actuaciones o expresiones (verbales, gráficas, gestuales, etc.) que alguien realiza para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas".

   Estas prácticas, pueden ser idiosincráticas de una persona o compartidas dentro de una institución. En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular para resolver un problema específico es interesante considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) que realizan las personas cuando se enfrentan a situaciones de tipo problemático. (Godino et al., 2007)

Esta noción de sistema de prácticas (institucionales y personales), según Godino et al. (2017), aporta la visión antropológica y pragmatista de las matemáticas e introduce las nociones de significado institucional y personal de los objetos matemáticos, distinguiendo distintos tipos de estos.

Por otro lado, el significado de un objeto matemático se concibe en función del sistema de prácticas en el que este objeto interviene, desempeñando un papel relevante. Esto implica asumir un postulado pragmático sobre el significado, añaden estos autores. Dado que los sistemas de prácticas son relativos a los contextos de usos y marcos institucionales, se deriva la necesidad de reconocer la pluralidad de significados para los conceptos.

Los sistemas de prácticas y, en consecuencia, también los significados se han categorizado en el EOS teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre carácter personal o idiosincrático de las prácticas (prácticas personales) y el institucional (prácticas sociales o compartidas). Los procesos de aprendizaje implican el encaje progresivo de los significados personales e institucionales, así como la apropiación por parte del alumno de estos últimos significados.

En cuanto a los significados institucionales, Godino et al. (2007) distinguen entre implementado, evaluado, previsto y referencial; y en cuanto al significado personal introduce tres tipos: global, declarado y logrado.

Figura 1

Tipos de significados institucionales y personales

Fuente: Godino et al. (2008, p. 6)

2. *Configuración de objetos y procesos matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas.*

La noción de “sistema de prácticas” es útil para ciertos análisis didácticos y para conseguir un análisis más concreto de la actividad matemática, que requiere introducir una tipología de objetos matemáticos. Godino et al. (2008, p. 6) consideran que “los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia, es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática”.

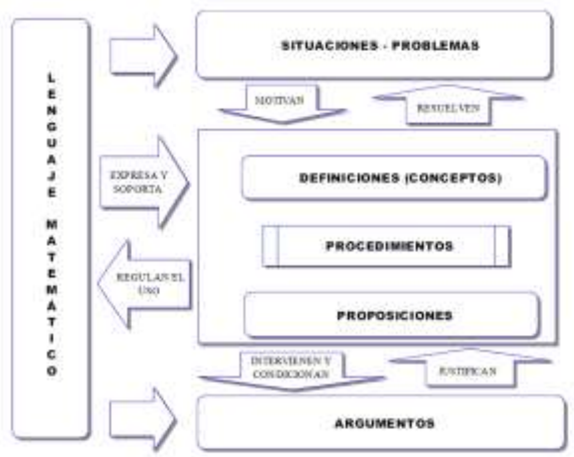
En el primer nivel se encuentran aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). Estas entidades se denominan objetos matemáticos primarios y engloban a elementos lingüísticos, situaciones – problemas, conceptos – definición, proposiciones, procedimientos y argumentos.

En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. “Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales)” (Godino et al., 2008, p. 8).

En el segundo nivel se encuentran una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior.

Figura 2

Configuración de objetos primarios



Fuente: Godino et al. (2008, p.7)

Estos, según el juego de lenguaje en el que participen, pueden ser contemplados desde distintos puntos de vista o dualidades (Godino y Burgos, 2017, p. 50-51):

- Ostensivo/no ostensivo: que permite distinguir lo material o perceptible (ostensivo) de lo abstracto, ideal o material (no ostensivo).
- Extensivo/intensivo: que diferencia la función particular de un objeto en un contexto o práctica (extensivo) de la función general en diversos contextos o clases de prácticas

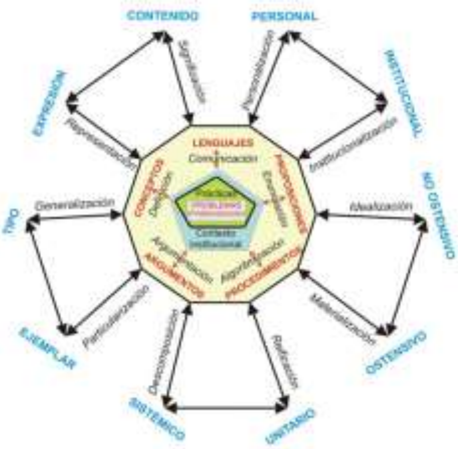
(intensivo).

- Personal/institucional: que distingue la perspectiva de los sujetos individuales (personal) de la compartida en una institución o comunidad de prácticas (institucional).
- Significante/significado, es decir, antecedente o consecuente de una función semiótica que relaciona una expresión con un contenido.
- Unitario/sistémico: que diferencia los objetos considerados globalmente como un todo (unitario) de aquellos que son considerados como sistemas formados por componentes estructurados (sistémico).

Según Godino y Burgos (2017, p. 51), “tanto los objetos primarios como las dualidades se pueden considerar desde la perspectiva proceso – producto, lo cual proporciona criterios para distinguir tipos de procesos matemáticos. En consecuencia, se tienen procesos de problematización, definición, enunciación, argumentación, particularización – generalización, representación – significación, etc.”.

Figura 3

Configuración de objetos y procesos



Fuente: Godino et al. (2008, p.10)

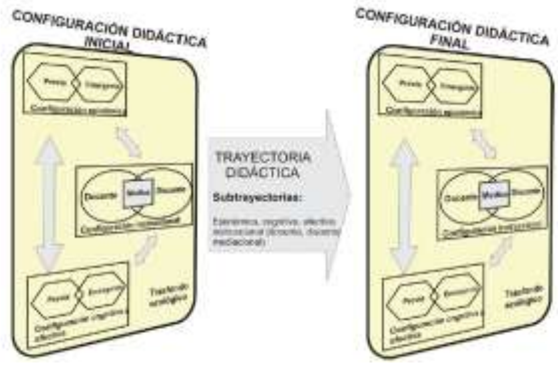
3. *Configuración didáctica*

La configuración didáctica constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática. Godino (2012, p. 55) lo define como “un sistema articulado de roles docentes y discentes a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación-problema”.

“Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémicas (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático" (Godino, 2012, p. 55).

Figura 4

Interacciones didácticas



Fuente: Godino et al. (2008, p. 13)

4. *Dimensión normativa*

Godino (2012, p. 55) describe esta dimensión como un "sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, que generaliza las nociones de contrato didáctico y normas socio-matemáticas". Uno de los factores explicativos de los fenómenos didácticos es el reconocimiento del efecto de estas normas, las cuales intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático.

Figura 5

Tipo de normas

Fuente: Godino et al. (2008, p. 14)

La identificación de las diferentes facetas de esta dimensión (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) permite, por un lado, valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y alumnos y, por otro lado, sugerir cambios en los tipos de normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los sistemas didácticos.

5. *Idoneidad didáctica*

Las nociones teóricas anteriores se complementan con la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción. Esta noción, como criterio general, "es relativo a las circunstancias contextuales, la adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático" (Godino et al., 2017, p. 95).

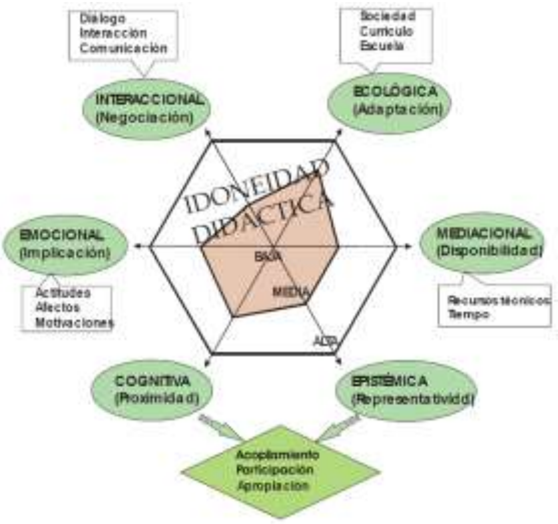
Estos autores añaden que "el sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza – aprendizaje" (Godino et al., 2017, p. 95).

Además, Godino et al. (2008) la definen como la articulación coherente y sistémica de la idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas.

De esta forma, podemos hablar de idoneidad didáctica como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global. Como se puede deducir, la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza – aprendizaje.

Figura 6

Componentes de la idoneidad didáctica



Fuente: Godino et al. (2008, p. 16)

Batanero, Godino et al. (2017, p. 95) afirman que, en el marco del EOS, “las nociones de conocimiento y competencia se relacionan teniendo en cuenta las conexiones entre práctica y objeto”. Añaden que la práctica, como acción orientada al fin de resolver un problema o realizar una tarea, conlleva una capacidad o competencia por parte del sujeto que la realiza.

No obstante, la realización competente de una práctica implica la intervención de objetos interconectados que regulan y emergen de la misma, los cuales constituyen el conocimiento declarativo correspondiente. Por tanto, la dialéctica entre práctica y objeto, y entre competencia y conocimiento, se puede mostrar mediante el análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas puestas en juego para la resolución de un problema matemático.

2.3 MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA SEGÚN LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LA DIDÁCTICA

Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctica se postula que el álgebra debe interpretarse como un instrumento genérico de modelización de praxeologías u estructuras matemáticas.

En particular, Munzón et al. (2010), postulan que “el álgebra escolar, antes de ser tematizada como objeto explícito de la enseñanza, debe utilizarse para profundizar el estudio de determinadas organizaciones matemáticas previamente construidas”.

Por este motivo, estos autores proponen una concreción de este proceso de algebrización articulado en tres etapas, como se ha mencionado anteriormente. Para ello, parten de un modelo inicial en el cual las estructuras matemáticas giran en torno a problemas aritméticos. A dicho proceso de resolución, siguiendo la propuesta de Yves Chevallard (2005, como se citó en Munzón et al., 2010), lo designaron como los programas de cálculo aritmético (PCA).

Munzón et al. (2010) consideran como “problema aritmético” a aquellos problemas que pueden resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división, etc.) ejecutables a partir de los datos del problema. Estos datos, suelen ser cantidades conocidas.

El estudio de estos sistemas hace que aparezcan cuestiones de naturaleza teórica relacionadas con la necesidad de explicar las razones por las cuales se obtiene un resultado dado, de justificar o interpretar resultados equivalentes, etc. Esta ampliación de la problemática en torno a los PCA es la que se tomará como base para describir las tres etapas sucesivas del proceso de algebrización que constituyen el modelo epistemológico de referencia (Munzón et al., (2015)).

La primera etapa del proceso de algebrización aparece cuando es necesario considerar el programa de cálculo aritmético no solo como un proceso sino como un todo, es decir, traduciendo la formulación retórica del PCA a una formulación escrita.

Esto conlleva expresar de manera explícita su estructura de forma global y, por lo tanto, considerando la jerarquía de las operaciones, las reglas del uso de paréntesis y las propiedades de las relaciones entre ellas. Aparece entonces la necesidad de construir nuevas técnicas, esencialmente de “simplificación”, para trabajar las expresiones algebraicas (Munzón et al., 2010, 2015).

El paso a la segunda etapa del proceso de algebrización se produce cuando las técnicas de simplificación y el trabajo sobre un PCA no es suficiente para resolver el problema propuesto porque los “datos” y la propia “incógnita” vienen dados en forma de relaciones entre variables.

En consecuencia, esta etapa se identifica con la necesidad de igualar dos PCA con dos mismos argumentos no numéricos. De esta manera, aparece una mayor complejidad en las técnicas algebraicas de la primera etapa y, además, se requiere de nuevas técnicas como las de cancelación o el cálculo entre ecuaciones. Además, estas se consideran como nuevo objeto matemático (Munzón et al., 2010, 2015).

La tercera etapa corresponde al momento en el que se produce una fuerte generalización de los problemas del modelo anterior, debido a la necesidad de no limitar el número de variables con las que se trabaja y de eliminar la distinción entre parámetros e incógnitas. Los PCA que intervienen en esta etapa pueden ser interpretados como fórmulas o modelos algebraicos de un sistema matemático (Munzón et al., 2010, 2015).

Tabla 3

Resumen de las etapas del modelo epistemológico de referencia (MER) según la TAD.

Etapas del MER	***Modelo***
Primera etapa	Incluye problemas representables por un PCA escrito que contiene un símbolo no numérico (parámetro) junto con técnicas de simplificación de expresiones algebraicas. *Ejemplo:* $PCA_1(x,3,2) = \frac{x}{3} - 2$ $PCA_2(y,2) = \frac{y}{2} - 2$ $PCA_1 = PCA_2 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}y$
Segunda Etapa	Engloba problemas representables por una igualdad entre dos PCA con los mismos argumentos no numéricos, así como técnicas de cancelación. *Ejemplo:* $PCA_1(n,3,m) = 3n - \lvert m - n \rvert$

	$PCA_2(n, 3, m, 2) = m + n + 3m + 2$ $PCA_1 = PCA_2 \Longrightarrow \lvert m - n \rvert = 2n - 4m - 2$
Tercera Etapa	Recoge problemas representables por una fórmula algebraica sin limitar el número de variables y sin diferenciar las incógnitas de los parámetros, así como de técnicas para estudiar cómo depende cada variable de las restantes. *Ejemplo:* *¿Qué relación hay entre el perímetro P y el área de un triángulo isósceles? ¿En qué casos P y A determinan un único triángulo isósceles?*

Nota. Elaboración propia. Ejemplos adaptados de Munzón et al. (2010).

El MER que Munzón et al. (2010) han desarrollado, muestra que la razón de ser del álgebra escolar no puede reducirse a la ampliación de la solución aritmética de los problemas mediante el cálculo de ecuaciones.

Se requiere una indagación teórica sobre los PCA que genere la necesidad de escribirlos para modificarlos y relacionarlos. En particular, el proceso de algebrización elemental culminaría en la tercera etapa (con el trabajo de fórmulas) y no en la segunda (trabajo con ecuaciones).

2.4 MODELO DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL

La perspectiva pragmatista, antropológica y semiótica del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático (EOS), aporta herramientas teóricas que puedan ayudar a caracterizar el razonamiento en términos de los tipos de objetos y procesos que intervienen en la práctica matemática.

Godino, Castro et al. (2012) consideran que la actividad algebraica tiene lugar cuando una persona aborda la solución de cierto tipo de problemas o tareas, realizando determinadas prácticas operativas y discursivas. "En dichas prácticas, intervienen elementos de naturaleza diversa y, en particular, medios de expresión, reglas conceptuales, procedimentales, proposiciones y justificaciones" (2012, p. 492).

En consecuencia, la consideración de una práctica matemática y el pensamiento que la acompaña como de índole algebraica, puede hacerse en términos de la presencia de cierto tipo de objetos y procesos que intervienen en la misma, usualmente considerados en la literatura como algebraicos (Godino et al., 2014). Dichos objetos y procesos vinculados a las prácticas están interrelacionados formando configuraciones (Godino, Castro et al., 2012).

2.4.1. TIPOS DE OBJETOS Y PROCESOS ALGEBRAICOS

Godino et al. (2014) relatan que una práctica matemática se considera algebraica si presenta cierto tipo de objetos y procesos considerados normalmente en la literatura como algebraicos. De esta manera, definen los siguientes tipos de objetos algebraicos:

Relaciones binarias. De equivalencia o de orden, y sus respectivas propiedades (reflexiva,

transitiva y simétrica). Estas relaciones son usadas para definir nuevos conceptos matemáticos.

Operaciones y sus propiedades. Operaciones realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones, geométricas, etc.). El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades tales como la asociativa, distributiva, conmutativa, la existencia de elemento neutro y de un inverso.

Asimismo, pueden intervenir también otros conceptos como el de ecuación, inecuación e incógnita, y procedimientos tales como la eliminación, la trasposición de términos, la factorización y el desarrollo de términos, entre otros.

Funciones. Es necesario considerar los distintos tipos de funciones y el álgebra asociada a ellos, es decir, las operaciones y sus propiedades. Además, es preciso distinguir los diferentes objetos involucrados: funciones, variables, fórmulas, parámetros, etc., y contemplar las distintas representaciones de una función: tabular, gráfica, como fórmula analítica.

Estructuras, sus tipos y propiedades. Como, por ejemplo, semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc. Características del álgebra superior o abstracta.

Por otro lado, en el caso de la práctica o actividad algebraica, "los procesos de particularización-generalización tienen una importancia especial, dado que la generalización es uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico" (Godino et al., 2014, p. 205). De esta forma, para el análisis de los niveles de algebrización de la actividad matemática es útil fijar la atención en los objetos resultantes del proceso de generalización y de particularización.

Como resultado de un proceso de generalización, se obtiene un tipo de objeto matemático que Godino, Aké et al. (2012) denominan objeto intensivo, que viene a ser la regla que genera la clase y que permite identificar un elemento particular como representante de esta (generalidad).

Equivalentemente, mediante el proceso de particularización, se obtienen objetos denominados por estos mismos autores como extensivos, es decir, objetos particulares. Estos atributos de los objetos matemáticos son relativos al juego del lenguaje en que participan, y no son entidades absolutas (Godino, Castro et al., 2012).

Por ejemplo, en el estudio de las funciones, $y = 3x + 2$, sería una función particular perteneciente a la clase o tipo de funciones lineales, y la expresión $y = mx + n$, sería un objeto intensivo. No obstante, en el estudio de las funciones polinómicas, la función lineal definida anteriormente, es un caso particular (un extensivo) de dicha clase de funciones (un intensivo).

Asimismo, la función lineal particular $y = 3x + 2$, está constituida por otros extensivos, como son los números 3 y 2, así como de otros intensivos, tales como el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales sobre el que toma valores la variable independiente y la dependiente de dicha función.

Cabe destacar que una colección finita simplemente enumerada de objetos particulares no se debe considerar como un intensivo hasta el momento en el que el sujeto muestra la regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. “Es entonces cuando el conjunto pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen, como una entidad unitaria emergente del sistema” (Godino, Aké et al., 2012, p. 287). En consecuencia, además de la generalización que da lugar al conjunto, hay un proceso de unitarización.

La dualidad que permite describir el proceso anterior por el cual una entidad compuesta o sistémica (un intensivo) pasa a ser vista como una entidad unitaria (proceso de reificación, objetivación) es la unitario – sistémico.

Por otra parte, la creación de objetos intensivos está estrechamente relacionada y dependiente de otro proceso primario, como es el de simbolización o representación (Godino, Castro et al., 2012), es decir, la nueva entidad unitaria tiene que ser materializada mediante un nombre, icono, gesto o símbolo.

“El objeto ostensivo que materializa al objeto unitario emergente de la generalización es otro objeto que refiere a la nueva entidad intensiva, por lo que tiene lugar un proceso de representación que acompaña a la generalización y a la materialización” (Godino, Aké et al., 2012, p. 287).

De esta forma, la dualidad ostensivo-no ostensivo, aporta una nueva comprensión de los procesos de generalización, a los intensivos resultantes y a los objetos que, necesariamente, deben intervenir para que tenga lugar la generalización.

Finalmente, Godino, Aké et al. (2012, p. 287) añaden que “este símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa o sustituye para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones (proceso de reificación)”. Estos símbolos – objetos forman nuevos conjuntos sobre los cuales se definen operaciones, propiedades y estructuras, esto es, sobre los cuales se opera de manera sintáctica, analítica o formal.

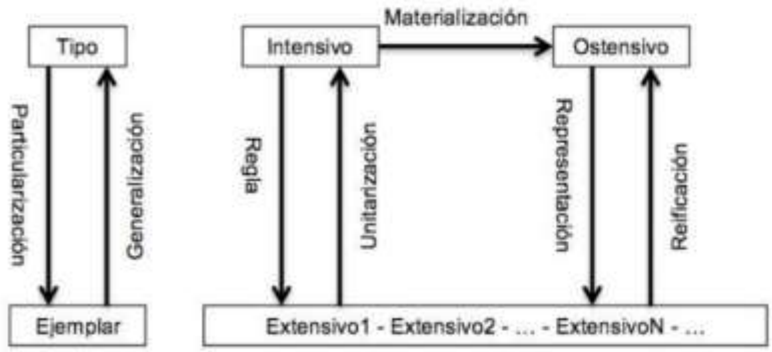
Los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferiblemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización.

A continuación, se describe, según Godino, Aké et al. (2012), la frontera entre la aritmética y el álgebra en términos de las dualidades y procesos descritos (ver Figura 7). Cabe destacar que esta frontera no está objetivamente establecida ya que estas dualidades y procesos son relativos al contexto donde se desarrolla la práctica matemática.

Este triple proceso; reconocimiento o inferencia de la generalidad, unitarización y materialización, va a permitir definir dos niveles primarios del pensamiento algebraico, distinguibles de un nivel más avanzado en el que el objeto intensivo es visto como una nueva entidad representada con lenguaje alfanumérico (Godino, Aké et al., 2012).

Figura 7

Procesos asociados a la dualidad ejemplar-tipo



Fuente: Godino, Aké et al. (2012, p.288)

2.4.2. NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN

Las características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas, abordables en Educación Primaria y Secundaria, permiten definir distintos niveles o grados de algebrización.

En primer lugar, Godino et al. (2014) proponen distinguir dos niveles de algebrización primarios, que denominan protoalgebraicos al considerarlos como primitivos o incipientes. Dichos niveles están enmarcados entre un nivel cero de algebrización y un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica.

Los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en el tipo de objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática, de acuerdo con el EOS (Godino et al., 2007; Godino, 2012).

Cabe destacar que los niveles de algebrización no se asignan a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que realiza el sujeto que resuelve el problema matemático. Por tanto, dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro.

De este modo, no se trata de niveles exclusivamente matemáticos centrados en tareas, sino de estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas. Además, el cambio en algunas de las variables de la tarea puede dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización (Godino et al., 2014).

Por todo lo anterior, los criterios básicos para definir los niveles de algebrización son:

I. <u>Generalización o inferencia de intensivos</u>. Presencia de objetos algebraicos intensivos.
II. <u>Unitarización</u>. Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.
III. <u>Formalización y ostensión</u>. Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales. Tipo de lenguajes usados.
IV. <u>Transformación</u>. Utilización de objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones.

En función del grado en el que se desarrollen estos criterios, se pueden distinguir los siguientes niveles de algebrización.

<u>NIVEL 0 (ausencia de razonamiento algebraico)</u>

Indica ausencia de razonamiento algebraico, es decir, no se trabaja sobre conceptos y propiedades de índole estructural o funcional. El alumno utiliza correctamente el conteo numérico y dibuja los siguientes casos del patrón establecido. Además, da expresión numérica para cada uno de ellos.

En el aspecto estructural, no se reconocen propiedades y se utiliza el signo "igual" en su aceptación de resultado de operaciones. En el aspecto funcional, se identifica una regla recursiva, la cual se expresa en lenguaje natural, numérico, icónico, verbal o gestual, y los procedimientos son aritméticos, no indican que se opera con la incógnita. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este se obtiene como resultado de operaciones entre objetos particulares.

Por otro lado, en tareas de generalización, el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.

De esta forma, en este nivel intervienen números particulares, operaciones aritméticas aplicadas a estos números y la igualdad como resultado de la operación. Es cierto que en la tarea el sujeto debe reconocer la oportunidad de aplicar los conceptos (objetos intensivos) de multiplicación y sustracción de números naturales.

Sin embargo, estos procesos de particularización no se les considera como propios del razonamiento algebraico. Las reglas que definen las situaciones de uso de tales conceptos no se hacen explícitas en la realización de la tarea (Godino et al., 2014).

<u>NIVEL 1 (principiante de algebrización)</u>

Indica un primer acercamiento incipiente a las formas de razonamiento protoalgebraico. El alumno es capaz de generalizar a un caso concreto sin utilizar el dibujo o esquema de este, realizando correctamente la aritmética.

En el aspecto estructural, se comienzan a reconocer propiedades de las operaciones y se reconoce el significado relacional del signo "igual", por lo que emerge el concepto de equivalencia. Pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente.

En el aspecto funcional, se reconoce explícitamente la regla recursiva y se generaliza usando lenguajes natural, numérico, icónico o gestual (es decir, expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal), y los procedimientos utilizados no indican que se opera con la incógnita. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos.

NIVEL 2 (intermedio de algebrización)

Indica un acercamiento intermedio a las formas de razonamiento protoalgebraico. El alumno muestra algunas evidencias de que empieza a expresar el caso general con una regla algebraica, en función de $'n'$.

En el aspecto estructural, se comienzan a utilizar propiedades y las operaciones. Se utiliza el significado relacional del signo igual por lo que emerge la noción de equivalencia. Además, las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$.

En el aspecto funcional, se determina un patrón por análisis de términos específicos de una secuencia. El lenguaje utilizado es natural, numérico, icónico o gestual, y se formaliza expresando una regla general, pero sin operar con las variables para obtener formas canónicas de la expresión.

Lo que hace distintivo a este nivel respecto del anterior es el lenguaje, pues se comienzan a introducir el uso de símbolos (no precisamente alfanuméricos). Sin embargo, los procedimientos utilizados no indican que se opera con la incógnita.

Se establecen conexiones entre los elementos de las representaciones producidas y se dan o usan propiedades del patrón, sin hacer transformaciones. Además, intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal.

NIVEL 3 (consolidado de algebrización)

Indica formas consolidadas de razonamiento algebraico. Lo que caracteriza a este nivel es la introducción de elementos simbólicos o alfanuméricos, pero, sobre todo, el cálculo analítico para obtener formas equivalentes en las expresiones. Asimismo, se realiza correctamente la abstracción para obtener la regla general del patrón.

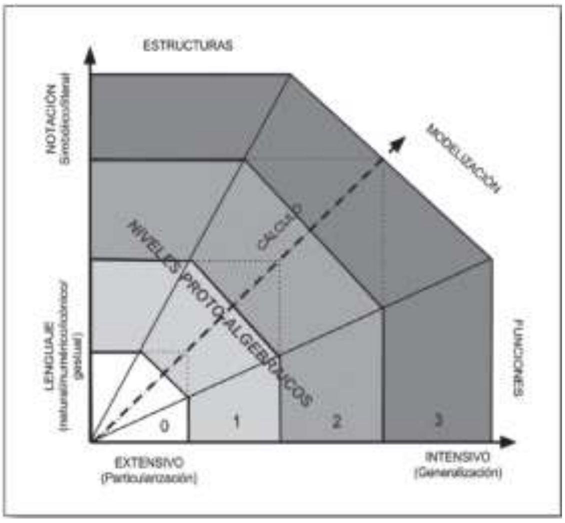
Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos. Además, se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Intervienen ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$.

Estos niveles de algebrización están relacionados con dos aspectos que Kaput (2008) identifica como característicos del álgebra y del razonamiento algebraico. Por un lado, el álgebra como simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones y, por otro, el álgebra como razonamiento guiado sintácticamente y acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales.

El primer aspecto se concreta, en el modelo de Godino et al. (2014) en dos niveles protoalgebraicos de razonamiento, y el segundo se asocia a un nivel consolidado.

Figura 8

Niveles protoalgebraicos de razonamiento



Fuente: Godino et al. (2014, p. 216).

Las etapas del proceso de algebrización de las praxeologías matemáticas, que se identifican y describen en diversos trabajos realizados en el marco de la Teoría Antropológica de la Didáctica (Bosch et al., 2006; Gascón, 2011; Munzón et al., 2010, 2015), corresponden a tareas y actividades matemáticas que, según la modelización del razonamiento de autores como Godino et al. (2014), tienen ya un carácter algebraico consolidado.

Cabe destacar que los tipos de objetos y procesos algebraicos considerados en el modelo de Godino et al. (2014), suponen un análisis microscópico complementario al abordado mediante la noción de la praxeología.

Al incluir dicho modelo niveles protoalgebraicos, está más adaptado a etapas en las que el razonamiento algebraico es incipiente (sexto ciclo de Educación Primaria y primer ciclo de Educación Secundaria), mientras que los sucesivos niveles del proceso de algebrización, propuestos desde la Teoría Antropológica de la Didáctica (Munzón et al., 2010), están más centrados en la caracterización del razonamiento algebraico en niveles educativos superiores.

El modelo de los niveles de razonamiento algebraico elemental descritos anteriormente, permiten describir el álgebra escolar, identificando formas de razonamiento algebraico en prácticas operativas y discursivas propias de la Educación Primaria, como acabamos de mencionar.

Es por ello por lo que la nueva visión del álgebra precisa su desarrollo también en Educación Secundaria. Godino et al. (2015) relatan que los niveles 1, 2 y 3 continúan manifestándose en esta etapa y, en particular, lograr el dominio del tercer nivel suele ser un objetivo central en el primer curso de Secundaria.

Godino et al. (2015) señalan que el uso de parámetros y su tratamiento puede ser un criterio para delimitar niveles superiores de algebrización, ya que está ligado a la presencia de familias de ecuaciones y funciones y, por tanto, implica nuevos grados de generalidad.

Por tanto, estos autores ligan el primer encuentro con los parámetros a un cuarto nivel de algebrización y la realización de cálculos o tratamientos conjuntos con parámetros y variables a un quinto nivel. El estudio de estructuras algebraicas específicas lleva a reconocer un sexto nivel de algebrización de la actividad matemática.

NIVEL 4 (uso de parámetros)

Este nivel trata de un primer encuentro con parámetros y coeficientes variables que implica la discriminación del dominio y rango de la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica.

NIVEL 5 (tratamiento de parámetros)

Un nivel superior de algebrización se puede ligar a la actividad matemática cuando se realizan cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen uno o más parámetros, junto con otras variables.

Las operaciones con parámetros, cuando son realizadas de manera comprensiva y no puramente algorítmica, y el establecimiento de relaciones entre ellos, conllevan una complejidad semiótica de mayor nivel. Esto se debe a que los objetos intervinientes y emergentes de estos sistemas de prácticas ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel anterior (familia de ecuaciones o de funciones).

NIVEL 6 (tareas estructurales)

Godino et al. (2015) consideran que puede ser de utilidad caracterizar el sexto nivel de algebrización de forma que ayude a centrar la atención en la naturaleza específica de la actividad matemática implicada y su mayor complejidad ontosemiótica.

En Bachillerato, se introducen algunas estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial) y el estudio del álgebra de funciones (adición, sustracción, división, multiplicación y composición), poniendo en juego objetos y procesos algebraicos de mayor grado de generalidad que los considerados en el nivel anterior.

Tabla 4

Rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental en Educación Primaria y Secundaria.

Niveles	Tipos de objetos	Transformaciones	Lenguajes
0	No intervienen objetos intensivos. En tareas estructurales, pueden intervenir datos desconocidos.	Se opera con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.
1	En tareas estructurales, pueden intervenir datos desconocidos. En tareas funcionales, se reconocen los intensivos.	En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales, se calcula con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos.
2	Intervienen indeterminadas o variables.	En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funciones, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico-literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.
3	Intervienen indeterminadas o variables.	En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico-literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.
4	Variables, incógnitas y parámetros. Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con tercer Grado de generalidad)	Hay operaciones con variables, pero no con los parámetros.	Simbólico-literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.
5	Variables, incógnitas y parámetros. Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con tercer grado de generalidad)	Hay operaciones con los parámetros y, por tanto, con objetos con un tercer grado de generalidad.	Simbólico-literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a la información contextual.

6	Estructuras algebraicas abstractas (espacios vectoriales, grupos, anillos, …) Relaciones binarias generales y sus propiedades. (Objetos intensivos con cuarto grado de generalidad)	Hay operaciones con los objetos que forman parte de las estructuras.	Simbólico-literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.

Nota. Adaptado de Godino et al. (2014, p. 215).

Por otro lado,”se ha iniciado el estudio de la articulación de este modelo con las etapas del proceso de algebrización definidas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico” (Godino et al. 2015, p. 136). Estos autores añaden que a pesar de que las etapas según la Teoría Antropológica de la Didáctica se refieren a recorridos de estudios potenciales y los niveles según el EOS a la actividad efectivamente desarrollada por los sujetos, es posible establecer paralelismos entre ambos modelos.

De esta forma, se concluye que el nivel 0 y 1 del modelo basado en EOS se corresponde con el “Programa de Cálculo Aritmético” y el nivel 2 y 3 se corresponden con la etapa 1 y 2 de la Teoría Antropológica de la Didáctica respectivamente. Sin embargo, la etapa 3 del proceso de algebrización propuesta por esta teoría, analizada desde la perspectiva EOS, lleva a proponer la distinción de dos niveles adicionales (4º y 5º nivel en el modelo EOS).

Esto se debe a que tienen en cuenta la complejidad ontosemiótica del uso de parámetros para expresar familias de ecuaciones y funciones. Por último, el nivel 6 del EOS propuesto no se corresponde de manera explícita con un nivel en el modelo basado en la Teoría Antropológica de la Didáctica.

2.5 PATRONES EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

La literatura ofrece varias definiciones de patrones, la idea básica implícita en esta noción es que toda situación repetida con regularidad da lugar a un patrón (Castro, 1999). Según Guerrero y Rivera (2002), un patrón es una regla entre elementos u objetos matemáticos como números, formas, etc.

Papic y Mulligan (2005) definen patrón como una regularidad espacial o numérica. Asimismo, un patrón matemático puede ser descrito como cualquier regularidad predecible que, por lo general, implique operaciones numéricas, espaciales o relaciones lógicas.

Los patrones que expresan relaciones y funciones, a menudo, se representan gráfica, verbal, numérica o analíticamente a través de tablas, gráficos o fórmulas. La mayoría puede representarse de varias formas. De hecho, los patrones relacionados con las matemáticas a menudo son más eficaces si hay interacción entre estas múltiples representaciones (Steen, 1988).

Estos, suelen formarse a partir de un núcleo generador; en algunos casos el núcleo se repite y, en otros, el núcleo crece de forma regular. Las teorías matemáticas ayudan a entender las relaciones entre patrones y a comprender sus estructuras; ayudan a explicar y predecir fenómenos naturales que se ajustan a un patrón (Castro, 1999).

Los patrones se asocian comúnmente al pensamiento algebraico, debido a la presencia en ellos de abstracción y la generalización (Barbosa y Vale, 2015). Según Liljedahl y Zazkis (2002), estos permiten la transición al álgebra mediante el establecimiento de relaciones de tipo funcional. La función recursiva, generalmente asociada a los patrones, es considerada una potente vía de expresar relaciones y analizar propiedades de los procesos matemáticos.

Asimismo, "pueden servir como contexto para la introducción de diferentes formas de expresiones algebraicas sobre la misma relación y percibir que tales relaciones pueden ser descritas correctamente de diferentes maneras" (Castro y Ruiz, 2018, p. 91). El trabajo con patrones permite la formulación y justificación de las generalizaciones y el uso de estas generalizaciones para hacer predicciones.

En particular, English y Warren (1995, como se citó en Ávila et al., 2010, p. 35), defienden la postura de que trabajar con patrones matemáticos sirve para introducir el concepto de variable. Además, el trabajo con patrones proporciona a los estudiantes la oportunidad de observar y verbalizar sus generalizaciones y expresarlas simbólicamente.

Las siguientes acciones, ligadas a los patrones, son señaladas por Steen (1988, como se citó en Castro y Ruiz, 2018, p. 91), y constituyen la descripción misma de lo que significa hacer matemáticas (Liljedahl, 2004, como se citó en Castro y Ruiz, 2018, p. 91):

- Reconocer. Descubrir situaciones matemáticas en diversos contextos.
- Visualizar. Ver patrones en datos y en situaciones no matemáticas.
- Verbalizar. Expresar en palabras la naturaleza de los patrones percibidos por la vista.
- Simbolizar. Formalizar en símbolos matemáticos las relaciones encontradas en los patrones.
- Analizar. Relacionar un patrón con otro, y predecir nuevos patrones.

Podemos considerar distintos tipos de patrones atendiendo a diferentes criterios. En particular, se dice que un patrón es numérico o geométrico dependiendo de los elementos que lo forman. Según la forma de presentarse, pueden hacerse mediante representación simbólica (es el caso de los numéricos) o con imágenes (en el caso de las geométricas), que potencian la visualización. Por último, en función de su formación, pueden ser de repetición y de desarrollo o de crecimiento (los elementos de la secuencia crecen de un término al siguiente) (Castro y Ruiz, 2018).

Para que un patrón sea de tipo numérico, el hecho de estar formado por números es condición necesaria pero no suficiente. Para ser considerado numérico, el patrón ha de cumplir además que el valor de los diferentes elementos sea relevante en la sucesión. Es decir, el patrón no ha de poder ser transferido a un patrón no numérico, sin pérdida de alguna propiedad de este (Castro y Ruiz, 2018, p.92).

Todos los tipos de patrones contribuyen al desarrollo del razonamiento matemático, pero los patrones numéricos de crecimiento conducen, de forma más natural, al descubrimiento de una relación entre dos cantidades variables, facilitando así el razonamiento funcional (Rivera y Becker, 2008).

2.6 GENERALIZACIÓN ALGEBRAICA DE PATRONES

Son numerosos los investigadores que establecen que el desarrollo de las habilidades en la generalización de patrones son el preámbulo necesario para el estudio del álgebra (Ávila et al., 2010).

Una revisión de la literatura de investigación arroja diferentes interpretaciones del término generalización. Estas apreciaciones revelan el doble significado del término, que denota por un lado proceso y por otro lado producto (Liang, 2013).

Generalización como proceso

Varios investigadores han visto la generalización como un proceso de extensión de los propios argumentos o esquemas más allá del caso o casos considerados. Según Radford (1996), quién examinó el número de patrones, la generalización es un procedimiento que saca una conclusión “Alpha” de una secuencia de hechos observados "$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$".

Es decir, según Radford (2010), la generalización algebraica de un patrón se basa en la capacidad de captar un elemento común notado en algunos elementos de una secuencia S, ser consciente de que este elemento común se aplica a todos los elementos de S y ser capaz de usarlo para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S.

La definición de Radford captura el sentido de Mason (1996) de “ver lo general a través de lo particular”, pero descuida ciertas actividades que suelen preceder a la extensión de varios casos a una conclusión general. Estas actividades incluyen examinar algunos casos dados presentados en la tarea, reconocer el patrón de estos casos y predecir otros (Liang, 2013).

También otros autores como Rivera y Becker (2011) al referirse al patrón generalización como acciones de construcción y justificación de reglas, consideraron la generalización como un proceso.

En particular, “Piaget y colaboradores han sido de los primeros en tratar la generalización como un proceso fundamental en la construcción del conocimiento. Establecen relaciones entre los conceptos de generalización y abstracción, donde la generalización estaría sometida a la abstracción” (Castro et al., 2010, p. 59).

Generalización como producto

> Cuando la regla formal derivada de una tarea de generalización se denomina generalización, la generalización del término es vista como un producto. Por ejemplo, Rivera y Becker (2005) son dos investigadores que han adoptado esta interpretación.
>
> Compartiendo la misma visión están Kaput et al. (2008) quienes se refirieron a generalización como "una declaración única que se aplica a múltiples instancias a través de una especie de extensión unificadora que se refiere a todos ellos de alguna manera unitaria". Estos autores argumentan que al usar la generalización como un enfoque para acceder al álgebra puede hacer avanzar el pensamiento algebraico. Definen la generalización como un medio que permite a los estudiantes usar conceptos y procedimientos matemáticos para expresar, manipular y abstraer ideas matemáticas.

Amit y Neria (2008, como se citó en Ávila et al., 2010, p. 35) plantea que la generalización, vista como proceso o como un producto de la educación matemática, tiene méritos e importancia como un objetivo instruccional en sí. "Sin embargo, esta también puede servir como un medio para construir nuevo conocimiento, actuando como un iniciador para el aprendizaje en el álgebra".

De igual forma, Krutestskii (1976 como se citó en Ávila et al., 2010, p. 34) clasifica la generalización como una de las habilidades cognitivas más importantes que puede mostrar un estudiante para generar conocimiento matemático (objetos, relaciones y operaciones).

Además, distingue dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y lo conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver lo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado (Krutestskii, 1976 como se citó en Castro et al., 2010, p. 59).

Por otro lado, Cañadas y Castro (2007) consideran que la generalización implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares. Es el paso clave y el más costoso en términos cognitivos dentro del razonamiento inductivo.

Asimismo, Castro et al. (2010, p. 5) destacan la importancia de la generalización para generar conocimiento matemático y señalan que "es posible llegar a la generalización a través de la abstracción de lo que es regular y común, a partir del descubrimiento de patrones".

Poyla (1945, como se citó en Castro et al., 2010, p. 59) sostiene que "la generalización lleva a construir conocimiento a partir de la acumulación de ejemplos (casos concretos) entre los que se detecta y se sistematiza una regularidad".

Existen distintos tipos de generalizaciones que los autores clasifican en función de sus características (Merino, 2012). Dörfler (1991, como se citó en Merino, 2012, p. 23) distingue entre generalizaciones empíricas y generalizaciones teóricas. Las primeras consisten en encontrar una cualidad o propiedad común entre muchos objetos o situaciones.

Radford (2010) diferencia entre generalización algebraica, cuando los estudiantes llegan a obtener una expresión que les permite obtener cualquier caso particular, y la generalización aritmética, cuando expresan numéricamente el patrón común de los casos particulares y lo utilizan para obtener cualquier otro caso particular, pero sin introducirse en el contexto algebraico.

En la relación entre la generalización y patrones lineales, Stacey (1989) distingue entre generalización cercana (que implica encontrar un patrón próximo o elementos que pueden ser hallados por conteo, dibujando o haciendo una tabla) y generalización lejana, en la que encontrar un patrón requiere entender la regla general.

En síntesis, los procesos de generalización consisten en descubrir un patrón o regla a partir de una secuencia de objetos, que pueden ser numéricos o geométricos. Las investigaciones explican al respecto que un alumno puede comprender una regla, aun cuando no pueda expresarla en lo que llamamos lenguaje algebraico.

2.7 TAREAS DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES

Las tareas de generalización de patrones se han llevado a cabo en diversas investigaciones con el fin de estudiar el proceso de generalización que realizan los estudiantes. Estas se pueden definir como tareas matemáticas relacionadas con examinar algunos casos particulares y ser capaz de generar nuevos casos particulares o dar la expresión del término general (verbalmente, con diagramas o con formas simbólicas).

Numerosos investigadores, por ejemplo, Vergel (2014), sostienen que tales tareas son una herramienta muy útil para promover el pensamiento algebraico.

Los tres objetivos principales que se encuentran al explorar tales tareas de generalización son, en primer lugar, que pueden usarse para introducir la noción de variable. En segundo lugar, se pueden utilizar para desarrollar dos aspectos centrales del pensamiento algebraico; el énfasis en las relaciones entre cantidades tales como las entradas y salidas, y la idea de expresar una regla explícita usando letras para representar los valores de las salidas. Y, en tercer lugar, que pueden usarse para desarrollar la noción de equivalencia de expresiones algebraicas.

En cuanto al formato de visualización del patrón, nos encontramos con tareas de generalización numérica y figurativa o geométrica. Las primeras tienden a tener un formato bastante consistente de visualización de patrones y, por lo general, enumeran al menos los cuatro primeros términos de un patrón en orden secuencial. Por el contrario, las tareas de generalización figurativa tienden a mostrar más variaciones en el formato del patrón.

Asimismo, podemos distinguir entre tareas de generalización cercana y lejana (Stacey, 1989). Las tareas de generalización cercana son aquellas preguntas que se pueden resolver dibujando o contando paso a paso. Mientras que las de generalización lejana requieren encontrar un término que está mucho más lejos de los dados y la estrategia de conteo paso a paso no es un método práctico. Por otro lado, hay una amplia gama de tareas de generalización de patrones en términos de la forma en la que se presentan, así como el tipo de funciones involucradas. Cañadas et al. (2008) relatan que el razonamiento se ve relacionado con la resolución de problemas y con las representaciones que hacen los sujetos en dicho proceso.

Dentro de estas tareas, se pueden diferenciar entre las que presentan diferentes casos particulares (tres o más configuraciones sucesivas) y se plantea identificar el patrón y llegar a la generalización; y aquellas que se plantean esas mismas cuestiones, pero a partir de un único caso particular (configuración única) (Merino, 2012). Otros enfoques menos comunes incluyen proporcionar dos o tres configuraciones no sucesivas.

Si ahora se tiene en cuenta el tipo de funciones, la generalización de patrones ha tendido a centrarse tanto en la lineal como en la cuadrática, siendo los primeros los más generalizados en la literatura de investigación.

Un patrón lineal se define por una regla funcional de la forma "$a \cdot n + b$", donde n es la variable independiente que, normalmente, es el número de figura. Además, la regla funcional de un patrón lineal se puede expresar en dos variables. Este tipo de tarea no es tan común ni ha sido tan investigado como el patrón lineal de una variable.

Las tareas de generalización que involucran patrones cuadráticos suelen seguir dos patrones ampliamente reconocidos; los números cuadráticos y triangulares. Además de estos dos patrones populares, existen otras tareas de generalización cuadrática cuyos patrones no se ajustan a ninguno de ellos.

2.8 MODELO DE DEMANDA COGNITIVA DE ACTIVIDADES DE PATRONES ALGEBRAICOS

En este contexto, es necesario prestar atención a las tareas que se proponen, ya que pueden ser utilizadas como medio para articular los contenidos y alcanzar los objetivos de enseñanza. Por ello, dada la importancia que tienen las tareas matemáticas para dirigir la enseñanza, resulta necesario "indagar qué tipo de ellas plantea el profesorado y evaluar la dificultad que supone la resolución de tales actividades" (Pincheira y Alsina, 2021, p. 490).

El modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998) surgió con el fin de valorar la idoneidad de los problemas que se plantean a los alumnos, en particular aquellos con mucho talento matemático. Es por ello por lo que resulta útil disponer de un modelo teórico que permita evaluar la dificultad que la resolución de un problema plantea a los estudiantes.

Este modelo ha sido utilizado con éxito en numerosas investigaciones para valorar el esfuerzo intelectual que deben realizar los estudiantes para resolver una actividad matemática (Benedicto et al., 2015).

Para Stein et al. (2009, p. 1, como se citó en Benedicto et al., 2015), la demanda cognitiva de una tarea es “el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder participar en la tarea y resolverla con éxito”.

Los autores mencionados anteriormente, elaboraron unos criterios teóricos para identificar el nivel de demanda cognitiva necesario para resolver problemas o ejercicios, que se conoce como el modelo de la demanda cognitiva.

Este modelo identifica cuatro niveles de demanda cognitiva de tareas, evaluando la reflexión y el razonamiento requeridos para que el estudiante pueda resolverlas con éxito. Dichos niveles son (Pincheira y Alsina, 2021):

- *Memorización*.

  Corresponde a las tareas de menor demanda cognitiva, es decir, que solo requieren razonamientos simples. Implican reproducir fórmulas, reglas o definiciones, no hay conexión con otros conceptos.

- *Algoritmos sin conexiones*.

  Corresponden a tareas algorítmicas. Utilizan un procedimiento evidente y se focaliza en la producción de respuestas correctas en lugar de promover la comprensión matemática.

- *Algoritmos con conexiones*.

  Estas tareas requieren la atención de los estudiantes sobre el uso de procedimientos con el fin de desarrollar niveles más profundos de ideas y conceptos matemáticos. Presentan mayor grado de esfuerzo cognitivo.

- *Hacer matemáticas*.

  Corresponden a tareas que requieren de un procedimiento complejo y no algorítmico. Exige comprender conceptos, procesos y relaciones matemáticas.

De acuerdo con Smith y Stein (1998), los dos primeros tipos de tareas se asocian a una demanda cognitiva de bajo nivel, mientras que las dos últimas se corresponden a un alto nivel cognitivo.

A partir del trabajo realizado por dichos autores, Benedicto et al. (2015) plantean una adaptación de dicho modelo para actividades de patrones geométricos. Para ello, han analizado cada una de las características que definen los niveles de demanda cognitiva y han identificado seis categorías, de forma que cada característica de un nivel se ajusta, por su objetivo, a alguna de ellas.

Estas categorías, definidas en Benedicto et al. (2015, p. 155), son:

> El *procedimiento* de resolución que requiere la actividad; la *finalidad* con la que se propone la actividad; el *esfuerzo cognitivo* necesario para llevar a cabo su resolución; los *contenidos* matemáticos implícitos en su resolución; el tipo de *explicaciones* requeridas de los estudiantes; y las formas de *representación* de la solución.

Tabla 5

Análisis teórico de la demanda cognitiva de actividades de patrones geométricos

Nivel de d. c.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
BAJO Memorización	Recuento directo	*Procedimiento de resolución*	No se resuelven usando algoritmos, sino recurriendo a datos recordados o tomados directamente del enunciado.
		Objetivos	Reproducción de elementos (datos, reglas, fórmulas, etc.) previamente aprendidos, recordados o tomados directamente del enunciado.
		Esfuerzo cognitivo	Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo. No son ambiguas. Indican claramente qué hacer.
		Contenidos	No tienen conexión con los conceptos o significado subyacente a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.
		Explicaciones	No requieren explicaciones
		Representación	El enunciado utiliza la representación geométrica y su resolución, en caso de representarse, utilizará la aritmética.
BAJO-MEDIO Algoritmos sin conexiones	Término inmediato/ próximo	*Procedimiento de resolución*	Son algorítmicas. Indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente por el contexto.
		Objetivos	Enfocadas a obtener respuestas correctas, pero no a desarrollar la comprensión matemática.
		Esfuerzo cognitivo	Su resolución con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.
		Contenidos	Existe conexión implícita entre los conceptos o significados subyacentes y los algoritmos usados. A pesar de existir dicha conexión, el estudiante no tiene

				por qué percatarse de ella para resolver correctamente el problema.
			Explicaciones	Se enfocan únicamente en describir el algoritmo utilizado.
			Representación	Se pueden utilizar múltiples representaciones (aritmética, diagramas visuales, materiales manipulativos, etc.), pero sólo se usan aquellas que resultan de más ayuda para resolver el problema.
MEDIO-ALTO	Algoritmos con conexiones	Término próximo / lejano	*Procedimiento de resolución*	Las cuestiones anteriores de la actividad sirven como sugerencia explícita o implícita de la vía a seguir, que es un algoritmo general con conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes.
			Objetivos	Orientan al estudiante a usar algoritmos con la finalidad de que tengan una comprensión más profunda de los conceptos e ideas matemáticos.
			Esfuerzo cognitivo	Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Se pueden utilizar algoritmos generales, pero al aplicarlos, hay que prestar atención a la estructura del patrón.
			Contenidos	Los estudiantes necesitan considerar conscientemente ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos para resolver con éxito la cuestión.
			Explicaciones	Explicaciones que hacen referencia a las relaciones subyacentes utilizando casos concretos.
			Representación	Se representa de varias formas y los estudiantes utilizan aquellas que los llevan a un razonamiento más abstracto.
ALTO	Hacer matemáticas	Término general	*Procedimiento de resolución*	Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. Los estudiantes deben analizar la actividad y examinar las restricciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones.
			Objetivos	Los estudiantes necesitan explorar y comprender los conceptos, procesos o relaciones matemáticos.

	Esfuerzo cognitivo	Requieren un considerable esfuerzo cognitivo. Requieren de los estudiantes auto-control y auto-regulación de los propios procesos cognitivos.
	Contenidos	Los estudiantes deben acceder a conocimiento y experiencias relevantes y usarlos adecuadamente durante la resolución de la actividad.
	Explicaciones	Explicaciones y demostraciones sobre el término general de la serie.
	Representación	Se utiliza una representación algebraica, que algunas veces puede estar conectada con otras formas de representación.

Nota. Benedicto et al. (2015, p. 155 - 156).

CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO

3.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Tal y como menciona Creswell (2013), los investigadores en educación aportan a sus estudios su particular manera de entender cómo funcionan las cosas y la forma en la que se construye el conocimiento. Así, la dimensión epistemológica y ontológica que aporta el investigador influirá fuertemente en las decisiones metodológicas que tome en la fase de diseño de sus investigaciones.

Desde mi forma de entender lo que la investigación puede aportar a la educación, considero que mi práctica viene marcada por la cosmovisión post-positivista, ya que empleo secuencias estructuradas de investigación donde los métodos rigurosos de recogida y análisis de datos juegan un papel fundamental.

Además, desde esta perspectiva, se aboga por una realidad social que incorpore múltiples perspectivas individuales en lugar de creer en la existencia de una única realidad (Creswell, 2013). Asimismo, considero importante la objetividad y la generalización de los resultados de una investigación.

Por otro lado, con el fin de dar respuesta a los objetivos planteados en la investigación, se decide emplear una metodología de enfoque cualitativo. Es decir, se busca describir, comprender o explorar la evolución del pensamiento algebraico en la transición de Primaria a Secundaria y definir qué nivel de algebrización se puede esperar de cada curso académico.

En consecuencia, para realizar este estudio, se va a llevar a cabo una Investigación Basada en Diseño. Es un tipo de investigación orientado hacia la innovación educativa cuya característica fundamental consiste en la introducción de una nueva herramienta o recurso para transformar una situación problemática. Esto es, tiene como finalidad unir la teoría y la práctica.

Dicha investigación tiene un objetivo explicativo y de asesoramiento, es decir, dar una idea teórica de cómo se pueden promover formas particulares de enseñanza y aprendizaje del álgebra en la transición con la aritmética (a partir de la observación de respuestas a tareas de generalización de patrones).

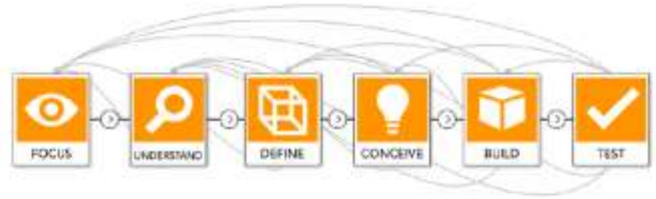
A pesar de tener ese objetivo general, en las fases de la investigación se incluyen otros objetivos como, por ejemplo, el descriptivo; conocer la evolución del pensamiento algebraico en dicha transición.

Además, la investigación basada en diseño implica un proceso reflexivo y, a menudo, cíclico, en el cual el diseño es una parte crucial de la investigación. En particular, el proceso de diseño consta de seis fases iterativas: enfocar, comprender, definir, concebir, construir y probar (ver Figura 9).

En este trabajo únicamente se va a llevar a cabo un ciclo dividido en cinco fases que engloban todas las explicadas anteriormente: “Exploración y comprensión”, “Preparación y diseño”, “Experimento de enseñanza”, “Análisis de los datos” y “Evaluación y reflexión”.

Figura 9

Fases iterativas de una investigación basada en diseño



Fuente: Easterday et al. (2014).

3.2 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se ha llevado a cabo en el Colegio La Inmaculada Misioneras, situado en la ciudad de Valladolid, en el curso académico 2021-2022, dado que he tenido la oportunidad de realizar las prácticas externas del máster en dicho centro. Este abarca las etapas de Educación Infantil, Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria.

En particular, aunque el ciclo de investigación de este estudio se ha desarrollado en la etapa de Secundaria, se ha llevado a cabo una recogida de datos en los últimos cursos de la etapa de Primaria para poder comprender mejor la transición del pensamiento algebraico.

Los participantes de esta investigación son 121 estudiantes, con edades comprendidas entre los 10 y 16 años, que cursan la asignatura de Matemáticas. En particular, en el estudio han participado:

Tabla 6

Cuadro resumen de los participantes de la investigación

CURSO	ALUMNOS	EDAD
5º Primaria	22	10 – 11 años
6º Primaria	21	11 – 12 años
1º ESO	20	12 – 13 años
2º ESO	23	13 – 14 años
3º ESO	18	14 – 15 años
4º ESO	17	15 – 16 años

Nota. Elaboración propia.

El nivel socioeconómico en el que está inmerso es medio-bajo y los alumnos/as proceden de distintos barrios y pueblos próximos al centro de Valladolid. Cabe destacar que existe un importante número de familias desestructuradas.

Es un centro que presta especial atención a la diversidad, a las destrezas lógico-matemática y lingüística, el bilingüismo, la educación en valores cristianos, el deporte, el uso de las TIC, etc.

3.3. INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE DATOS

En la presente investigación, el principal instrumento que se ha utilizado para la recogida de datos es un cuestionario, es decir, los datos se han recogido a través de respuestas de los participantes a preguntas previamente elaboradas por el investigador y presentadas por escrito en un formulario debidamente diseñado.

Para ello, inicialmente se realizó una búsqueda de trabajos que se han desarrollado en torno a la generalización de patrones (Merino, 2012; Liang, 2013; Arbona et al., 2016; Castro y Ruiz, 2018; etc.), poniendo el principal foco de atención en las características propias de la tarea y del patrón figurativo. En particular, de estos trabajos se han obtenido y adaptado algunas de las actividades propuestas.

En consecuencia, se ha diseñado un cuestionario para cada curso académico. Cada uno de ellos consta de varias tareas de generalización y estas, a su vez, están compuestas por varias cuestiones relacionadas con un enunciado previo que presenta un patrón figurativo. Cabe destacar que, en el diseño de las pruebas escritas, se han tenido en cuenta los objetivos de investigación planteados anteriormente, así como el problema y las preguntas de investigación.

Las actividades típicas de patrones algebraicos constan de varias cuestiones de generalización, de manera que cada cuestión supone un incremento del grado de abstracción y, en consecuencia, de la demanda cognitiva necesaria para su correcta resolución. Esto permite plantear las actividades a alumnos con diferentes conocimientos o capacidades matemáticas.

Además, las tareas propuestas están diseñadas de forma gradual y permiten adaptarlas según las necesidades de los alumnos, añadiendo o eliminando cuestiones y aumentando o disminuyendo la complejidad.

3.4 FASES DEL DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

Como se ha mencionado anteriormente, en esta investigación basada en diseño, únicamente ha sido posible llevar a cabo un ciclo. Este se compone de las fases explicadas a continuación.

3.4.1. EXPLORACIÓN Y COMPRENSIÓN

De acuerdo con el diseño de investigación, la intención teórica de este estudio es, a partir del diseño de una secuencia de actividades basadas en la generalización de patrones, comprender la evolución del pensamiento algebraico en la transición de Primaria a la Secundaria.

En consecuencia, se determinará cómo de bien enfocada o planteada está dicha propuesta con el fin de mejorarla y que permita tomar buenas decisiones en la enseñanza – aprendizaje del pensamiento algebraico a los docentes.

Por este motivo, el contexto de estudio se va a realizar en la etapa de Secundaria con estudiantes de edades comprendidas entre los 12 y 16 años, aunque se incluyan los últimos cursos de la etapa de Primaria para la recogida de datos.

Para comprender mejor la problemática y el tema de estudio, previamente se ha realizado una exploración de la literatura sobre investigaciones basadas en la generalización de patrones (Radford, 2010a; Merino, 2012; Ramírez, 2017, etc.) así como en estudios sobre la problemática aritmético – algebraica (Kieran, 2004; Socas, 2011; Rojas y Vergel, 2013, etc.)

Además, se ha realizado un análisis previo sobre los conocimientos que los alumnos de Secundaria poseen sobre álgebra, ya que los de la etapa de Primaria solo trabajan con conceptos aritméticos.

En el primer curso de Secundaria se realiza una introducción del lenguaje algebraico, en el segundo curso se utiliza dicho lenguaje para generalizar propiedades y simbolizar relaciones y en el tercer y cuarto curso se realizan traducciones de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico, así como transformaciones de expresiones algebraicas.

3.4.2. PREPARACIÓN Y DISEÑO

Para llevar a cabo los objetivos definidos anteriormente, se han diseñado unos cuestionarios, que forman parte del principal instrumento de recogida de datos y que constan de una serie de tareas, y una rúbrica de evaluación. Esta última se elabora con el fin de evaluar los niveles de algebrización que presentan los participantes del estudio en cada una de las actividades propuestas.

En cuanto a las actividades de cada cuestionario, se han planteado tareas figurativas de generalización lineal, cuadrática y con dos o más configuraciones sucesivas, en función del nivel cognitivo que presentan los alumnos en cada curso académico.

Las cuestiones que se plantean en la mayoría de las tareas, excepto para alguna actividad de 3º y 4º curso de ESO, están organizadas de acuerdo con la siguiente estructura. Las primeras están orientadas a determinar las figuras siguientes, cuya finalidad es establecer una regla particular desde la estructura numérica y espacial. Posteriormente, se pide calcular términos específicos, pero no consecutivos y, por último, llegar a una expresión que permita encontrar cualquier término del patrón.

Es decir, puesto que el objetivo final es la comprensión de la evolución en la transición de Primaria a Secundaria, las actividades van a partir de cuestiones propiamente aritméticas, para ir conduciendo al alumnado a cuestiones que requieran de un pensamiento y razonamiento algebraico.

La principal finalidad de esta estructura es, también, que los alumnos vayan descubriendo paso a paso el patrón algebraico. De esta forma, cada cuestión ayuda a resolver la siguiente. Por este motivo, y con el fin de incrementar el nivel de dificultad, algunas tareas de 3º y 4º de ESO sólo constan de dos cuestiones. Además, esta secuencia permite vislumbrar los diferentes tipos de pensamiento algebraico desarrollados por los estudiantes.

Por lo tanto, en las actividades propuestas se ha hecho hincapié en la importancia de tres elementos: las estructuras espacial y numérica, la relación funcional y el proceso inverso. Para continuar la secuencia, los estudiantes necesitan descubrir una regularidad que relaciona la estructura espacial, que emerge de la distribución de los elementos, y la estructura numérica, que emerge del número de elementos de cada figura.

Para identificar el término lejano, los alumnos deben establecer una relación funcional que asocie el término de la figura y la cantidad de elementos que la forman. Y para identificar la posición de una figura, conocido el número de elementos que la forman, el estudiante debe invertir el proceso y establecer una relación funcional inversa a la anterior (Zapatera, 2018, p. 55).

Junto con el diseño de actividades, también se ha de tener en cuenta, como parte de estas tareas de aprendizaje significativo, la evaluación. Es decir, la evaluación debe impulsar el aprendizaje si se basa en tareas que abordan los objetivos de la enseñanza.

Por este motivo, se ha diseñado una rúbrica de evaluación de patrones algebraicos que desglosa todos los niveles de algebrización definidos por Godino et al. (2014) y Godino et al. (2015) en cada uno de los aspectos o rasgos característicos del razonamiento algebraico.

La evaluación de las tareas de generalización propuestas a partir de dicha rúbrica servirá para determinar el alcance del pensamiento algebraico de los estudiantes en cada curso académico, así como su evolución.

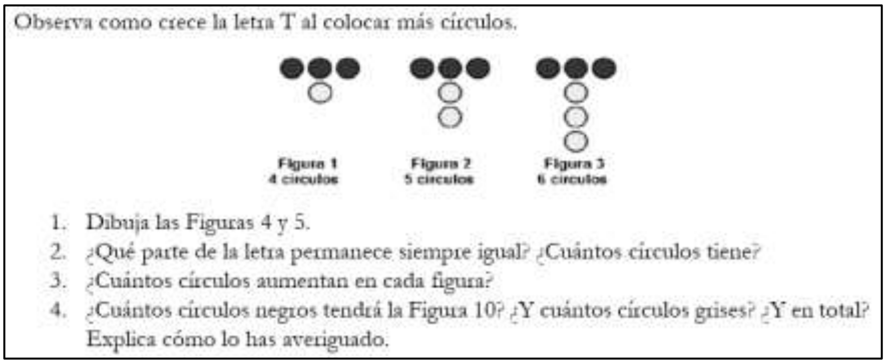
DISEÑO DE LOS CUESTIONARIOS

ACTIVIDAD 1 DE 5º DE PRIMARIA

Esta actividad supone una iniciación a la identificación, descripción y creación de patrones recurrentes. Las cuestiones de esta tarea se basan en que el alumno investigue sobre el patrón de crecimiento dado y extienda dicho patrón para términos cercanos y no muy lejanos.

Figura 10

Actividad 1 de 5º de Primaria


Observa como crece la letra T al colocar más círculos.

1. Dibuja las Figuras 4 y 5.
2. ¿Qué parte de la letra permanece siempre igual? ¿Cuántos círculos tiene?
3. ¿Cuántos círculos aumentan en cada figura?
4. ¿Cuántos círculos negros tendrá la Figura 10? ¿Y cuántos círculos grises? ¿Y en total? Explica cómo lo has averiguado.

Fuente: Adaptación Zapatera (2018).

Esta es una tarea de generalización lineal figurativa con configuraciones sucesivas. Para resolver las primeras cuestiones basta con tener ciertos conocimientos aritméticos, pero la última cuestión supone un nivel bajo-medio de demanda cognitiva para los alumnos de este curso.

A continuación, se presenta el análisis teórico de las cuestiones que integran esta tarea, siguiendo la interpretación del modelo de la demanda cognitiva ofrecida en la Tabla 5. Para cada cuestión de la actividad, se identifican sus características y se asigna el nivel o niveles de demanda cognitiva.

La cuestión 1 tiene nivel bajo/bajo-medio de demanda cognitiva, ya que en ella se pide dibujar las siguientes figuras del patrón mostrado en el enunciado. Las cuestiones 2 y 3 tienen el mismo nivel de demanda cognitiva puesto que los alumnos pueden encontrar directamente la solución contando las figuras del enunciado y a partir de la cuestión anterior.

Este procedimiento es algorítmico y no requiere que los estudiantes utilicen ningún conocimiento matemático, sino que observen el patrón visual de cambio de un término de la serie al siguiente.

Tabla 7

Análisis de la demanda cognitiva de las cuestiones 1, 2 y 3 correspondiente a la actividad 1 de 5º de Primaria

Nivel de d. c.	Tipo de cuestión	Categoría	Indicadores
BAJO/BAJO-MEDIO Algoritmos sin conexiones	Recuento y término inmediato	*Procedimiento de resolución*	Las figuras del enunciado sirven como instrucciones para construir las siguientes y contar la cantidad de círculos que permanecen iguales y los que aumentan.
		Objetivos	Se pretende que el alumno se familiarice con el patrón operando con un caso concreto pequeño, que puede calcular fácilmente. El objetivo de estas cuestiones no

			es la comprensión del algoritmo, sino la obtención de un resultado correcto.
		Esfuerzo cognitivo	Su resolución con éxito requiere una demanda cognitiva limitada. Existe poca ambigüedad sobre lo que hay que hacer, ya que el alumno debe encontrar el patrón para dibujar el caso pedido y dar con la solución.
		Contenidos	Existe conexión implícita entre los conceptos y significados subyacentes y los algoritmos utilizados.
		Explicaciones	Basta con describir cómo se han dibujado las figuras.
		Representación	En la cuestión 1 deben utilizar una representación pictórica y en las cuestiones 2 y 3 también pueden utilizar la aritmética.

Nota. Elaboración propia. Adaptado de Benedicto et al. (2015).

La cuestión 4 tiene un nivel bajo-medio de demanda cognitiva ya que se pide dibujar y calcular los círculos de una figura cercana. Para ello, pueden utilizar la representación pictórica o, aquellos que hayan reconocido el patrón de crecimiento, una representación aritmética.

Tabla 8

Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 4 correspondiente a la actividad 1 de 5º de Primaria

Nivel de d. c.	Tipo de cuestión	Categoría	Indicadores
BAJO-MEDIO Algoritmos sin conexiones	Término próximo (n = 10)	*Procedimiento de resolución*	Las figuras del enunciado sirven como instrucciones para construir las siguientes. Al ser una posición más distante, el enunciado de esta cuestión sugiere de modo implícito considerar las relaciones entre el algoritmo y conceptos subyacentes.
		Objetivos	El objetivo de esta cuestión es que los estudiantes, observando los casos concretos de las cuestiones anteriores, descubran las relaciones entre el patrón y el algoritmo aritmético, profundizando en la comprensión del algoritmo general.
		Esfuerzo cognitivo	Su resolución pictórica con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre cómo dibujar la figura y contar el resultado.
		Contenidos	En la resolución pictórica, el estudiante no necesita

	darse cuenta de la relación entre los términos de la serie para llegar a la respuesta correcta. En la resolución aritmética, el estudiante necesita considerar la relación entre los términos de la serie subyacente al algoritmo aritmético (sumar un círculo gris a la figura anterior).
Explicaciones	Enfocadas a describir el algoritmo utilizado. Hace referencia a las relaciones aritméticas entre la figura y el número de círculos que tienen respecto de la anterior.
Representación	Se suele utilizar la representación pictórica por ser la que resulta de mayor ayuda para resolver la cuestión. Se puede combinar con la aritmética para dar lugar a una representación más general.

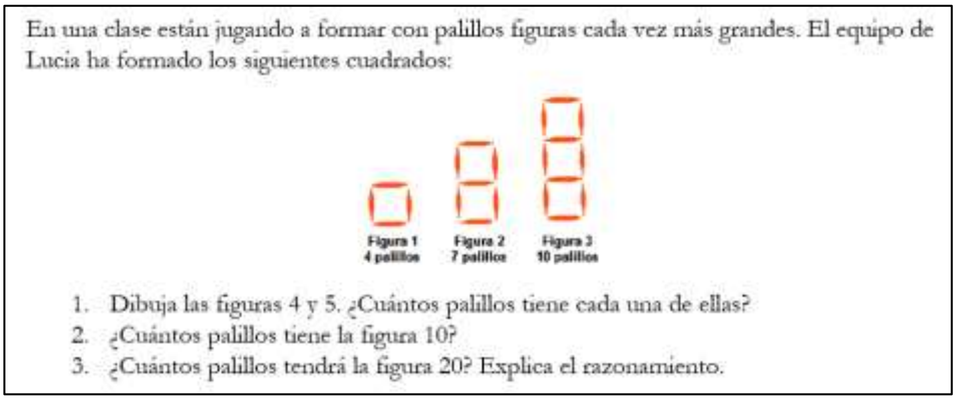
Nota. Elaboración propia. Adaptado de Benedicto et al. (2015)

ACTIVIDAD 2 DE 5º DE PRIMARIA

En esta tarea, además de afianzar los conceptos sobre la identificación, descripción y extensión de los patrones recurrentes, deben descubrir una regla de formación del patrón. El objetivo es que los alumnos expresen verbalmente y por escrito una regla general que permita hallar el número de elementos de cualquier figura.

Figura 11

Actividad 2 de 5º de Primaria


En una clase están jugando a formar con palillos figuras cada vez más grandes. El equipo de Lucia ha formado los siguientes cuadrados:

1. Dibuja las figuras 4 y 5. ¿Cuántos palillos tiene cada una de ellas?
2. ¿Cuántos palillos tiene la figura 10?
3. ¿Cuántos palillos tendrá la figura 20? Explica el razonamiento.

Fuente: Adaptación Zapatera (2018).

Es una tarea de generalización lineal figurativa con configuraciones sucesivas. En ella, los estudiantes deben establecer una relación entre el número de la figura y los palillos utilizados.

La primera cuestión tiene un nivel bajo medio según el modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998), ya que se pide dibujar las siguientes figuras de las dadas en el enunciado y contar aritméticamente el número de palillos que estas poseen (nivel bajo - recuento).

La segunda cuestión se corresponde con un nivel bajo-medio (término inmediato/próximo) y la cuestión 3 con un nivel medio-alto (término próximo/lejano). Se busca que los estudiantes comiencen a identificar el patrón e intenten dar la solución aritméticamente a partir de dicha expresión, sin necesidad de representar gráficamente la figura.

El análisis teórico de las cuestiones que integran esta actividad es equivalente al mostrado en la actividad anterior (ver Tabla 7 para la cuestión 1 y Tabla 8 para la cuestión 2). Para la tercera cuestión se presenta a continuación el análisis teórico correspondiente:

Tabla 9

Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 3 correspondiente a la actividad 2 de 5º de Primaria

Nivel de d. c.	Tipo de cuestión	Categoría	Indicadores
MEDIO-ALTO Algoritmos con conexiones	Término próximo/lejano ($n = 20$)	*Procedimiento de resolución*	Las respuestas a las cuestiones anteriores sirven como sugerencia implícita de la vía a seguir para identificar el algoritmo general para calcular este término concreto y las relaciones subyacentes entre el algoritmo y la serie.
		Objetivos	Que el alumno explore y encuentre la regla general que permita hallar el número de palillos de cualquier figura.
		Esfuerzo cognitivo	Si los alumnos han logrado enunciar una relación para resolver cualquier caso, requerirá un esfuerzo medio-alto. De lo contrario, deberán encontrar una estrategia de resolución no implícita, requiriendo un alto esfuerzo cognitivo.
		Contenidos	Los estudiantes, apoyándose en el conocimiento adquirido en las cuestiones anteriores, necesitan considerar las relaciones de la serie subyacente al algoritmo.
		Explicaciones	Enfocadas a describir el algoritmo utilizado. Hace referencia a las relaciones aritméticas entre la figura y el número de palillos que posee.
		Representación	La resolución conecta la representación geométrica y, tal vez, la aritmética.

Nota. Elaboración propia. Adaptado de et al. (2015).

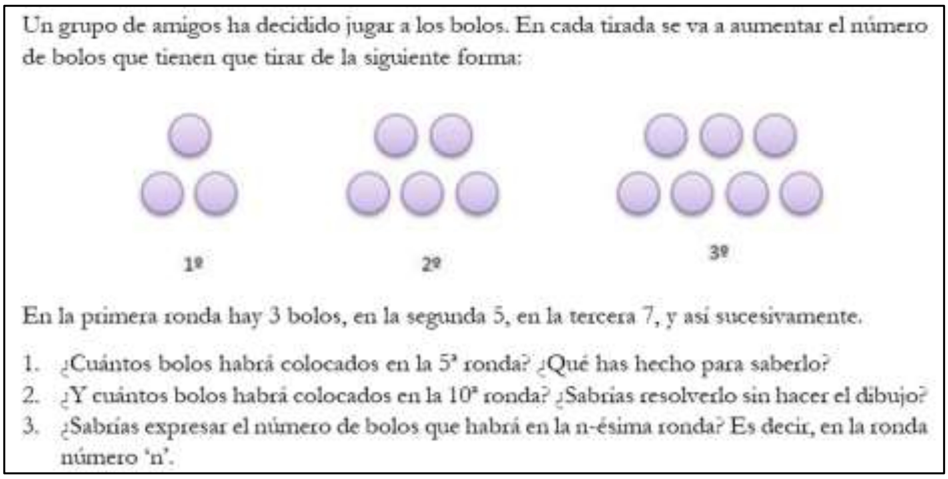
ACTIVIDAD 1 DE 6º DE PRIMARIA

Para este curso académico inicialmente se propone una tarea que engloba todo lo anterior, es decir, afianzar la identificación, descripción y extensión de los patrones recurrentes, con el objetivo de que los alumnos descubran la regla que define el patrón y la expresen aritméticamente.

Se busca que los estudiantes sean capaces de dar respuesta a las preguntas sin necesidad de dibujarlo geométricamente. Además, se añaden cuestiones que engloban mayor demanda cognitiva e introducen el lenguaje algebraico.

Figura 12

Actividad 1 de 6º de Primaria



Un grupo de amigos ha decidido jugar a los bolos. En cada tirada se va a aumentar el número de bolos que tienen que tirar de la siguiente forma:

1º 2º 3º

En la primera ronda hay 3 bolos, en la segunda 5, en la tercera 7, y así sucesivamente.

1. ¿Cuántos bolos habrá colocados en la 5ª ronda? ¿Qué has hecho para saberlo?
2. ¿Y cuántos bolos habrá colocados en la 10ª ronda? ¿Sabrías resolverlo sin hacer el dibujo?
3. ¿Sabrías expresar el número de bolos que habrá en la n-ésima ronda? Es decir, en la ronda número 'n'.

Fuente: Adaptado de Arbona et al. (2016).

Es una tarea lineal figurativa con configuraciones sucesivas. Consta de tres tipos de cuestiones en las cuales el nivel de demanda cognitiva que requieren va aumentando.

La primera cuestión es de generalización inmediata y se corresponde con un nivel bajo/bajo-medio de demanda cognitiva. El análisis teórico correspondiente a esta tarea es equivalente al realizado en la cuestión 1 de la actividad 2 de 5º curso de Primaria (ver Tabla 7).

La segunda cuestión trata de una generalización próxima a los términos dados en el enunciado. Se la asigna un nivel bajo-medio de demanda cognitiva y su análisis teórico es similar al realizado en la cuestión 2 de la actividad 2 de 5º curso de Primaria (ver Tabla 8).

Por último, la tercera cuestión se corresponde con un nivel alto de demanda cognitiva, una introducción al lenguaje matemático. A continuación, se muestra una tabla con el análisis teórico de dicha cuestión.

Tabla 10

Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 3 correspondiente a la actividad 1 de 6º de Primaria

Nivel de d. c.	Tipo de cuestión	Categoría	Indicadores
ALTO Haciendo matemáticas	Término general (n-ésima posición)	*Procedimiento de resolución*	La generalización para el término n-ésimo requiere un pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. Los estudiantes analizan la estructura de la serie para poder obtener una regla general que relacione el número de bolos con el número de tirada.
		Objetivos	Analizar, comprender y enunciar la relación general entre el número de tirada y el número de bolos correspondientes, de manera que lleguen a calcular el término general.
		Esfuerzo cognitivo	Requiere un considerable esfuerzo cognitivo ya que los estudiantes no solo deben ser capaces de comprender la relación existente, sino que deben saber expresarla, ya sea verbal o algebraicamente.
		Contenidos	Se pretende que los estudiantes recurran a las cuestiones anteriores para expresar el lenguaje algebraico la relación general.
		Explicaciones	Explicación de la expresión de cálculo del término general.
		Representación	La resolución se basa en la representación algebraica del algoritmo de cálculo del término general de la serie. Puede estar acompañada de representaciones geométricas o aritméticas de casos concretos o genéricos.

Nota. Elaboración propia. Adaptado de Benedicto et al.

ACTIVIDAD 2 DE 6º DE PRIMARIA

Los alumnos continúan avanzando en el estudio de los patrones recurrentes y reforzando la expresión de la regla general y empiezan a revertir el proceso. Destinada al inicio del estudiante en la generalización mediante problemas de patrones geométricos, a través de la generalización de relaciones directas y la resolución de relaciones inversas.

El objetivo en este curso es invertir el proceso, es decir, hallar el término de una figura a partir del número de elementos que la forman. Esta finalidad representa cierta dificultad para los estudiantes, pero el docente debe trabajarlo de forma progresiva de forma que los alumnos descubran la relación suma – resta y multiplicación – división.

Para ello, se diseña una secuencia formada por los tres primeros términos de una secuencia del patrón geométrico (tarea figurativa lineal de configuraciones sucesivas) y cinco tipos de cuestiones. Esta tarea relaciona el número de mesas con el número de sillas y, a la inversa, el número de sillas con el número de mesas.

Figura 13

Actividad 2 de 6º de Primaria

Juan ha invitado a su cumpleaños a sus compañeros de su clase y sus padres le van a ayudar a colocar las mesas y las sillas.

En un principio han pensado en usar mesas cuadradas y colocarlas como en la siguiente figura:

1. Dibuja 4 mesas juntas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse en 4 mesas?
2. ¿Cuántos invitados pueden sentarse en 5 mesas?
3. ¿Cuántos invitados podrían sentarse en 15 mesas? Explica cómo lo sabes.
4. ¿Cuántas mesas necesitarán si en la clase son 26 compañeros?
5. Si tenemos un número cualquiera de mesas (n), ¿cómo calcularías el número de amigos que se pueden sentar en ellas?

Fuente: Adaptado de Arbona et al. (2016).

Las tres primeras cuestiones son de generalización directa, que permite iniciar a los estudiantes en la formulación de expresiones generales mediante la identificación de patrones y relaciones. Estas cuestiones están ordenadas en función de la demanda cognitiva requerida y son las siguientes.

La primera cuestión es de generalización inmediata, que pide obtener un término inmediato de la figura utilizando su representación. Se corresponde con un nivel bajo/bajo-medio de demanda cognitiva. El análisis teórico correspondiente a esta tarea es equivalente al realizado en la cuestión 1 de la actividad 2 de 5º curso de Primaria (ver Tabla 7).

La segunda cuestión consta de una generalización próxima, que implica una mayor comprensión del patrón y se corresponde con un nivel bajo-medio de la demanda cognitiva. De nuevo, el análisis teórico de esta actividad es similar al realizado en la cuestión 2 de la actividad 2 de 5º curso de Primaria (ver Tabla 8).

Por último, la tercera cuestión, de generalización directa, implica realizar una generalización próxima-lejana, correspondiente al nivel medio-alto de demanda cognitiva. Esta supone una comprensión en profundidad del patrón. Su análisis teórico es equivalente al mostrado en la cuestión 3 de la actividad 2 de 5º curso de Primaria (ver Tabla 9).

La cuarta cuestión se corresponde con una tarea de relación inversa, que permite introducir al estudiante a la inversión de operaciones y contextualizar su introducción en el mundo del álgebra. Dicha cuestión es de relación inversa exacta, es decir, cuya solución numérica es un número natural que corresponde a un término de la secuencia. Es, por tanto, una cuestión de nivel medio-alto según la demanda cognitiva que requiere y su análisis teórico es el siguiente.

Tabla 11

Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 4 correspondiente a la actividad 2 de 6º de Primaria

Nivel de d. c.	**Tipo de cuestión**	**Categoría**	**Indicadores**
MEDIO-ALTO Algoritmos con conexiones	Relación inversa	*Procedimiento de resolución*	Las respuestas a las cuestiones anteriores sirven como sugerencia implícita de la vía a seguir para identificar el algoritmo general para calcular este término concreto y las relaciones subyacentes entre el algoritmo y la serie.
		Objetivos	Introducir al estudiante a la inversión de operaciones.
		Esfuerzo cognitivo	Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo si no han encontrado una relación para resolver cualquier caso.
		Contenidos	Los estudiantes, apoyándose en el conocimiento adquirido en las cuestiones anteriores, necesitan considerar las relaciones de la serie subyacente al algoritmo.
		Explicaciones	Enfocadas a describir el algoritmo utilizado. Hace referencia a las relaciones aritméticas entre el número de mesas y el número de compañeros.
		Representación	La resolución conecta la representación geométrica, aritmética y, tal vez, algebraica para expresar la solución de una manera más abstracta.

Nota. Elaboración propia. Adaptado de Benedicto et al. (2015).

La última cuestión de esta tarea se corresponde con una tarea de mayor demanda cognitiva (nivel alto), con una introducción al lenguaje algebraico. El análisis teórico de esta cuestión es equivalente al realizado en la cuestión 3 de la actividad 1 de este mismo curso académico (ver Tabla 10).

ACTIVIDAD 1 DE 1º Y 2º DE ESO

Para los cursos académicos de 1º y 2º de ESO se propone el mismo cuestionario (es decir, las mismas actividades) con el propósito de observar la evolución del pensamiento algebraico de los alumnos con edades comprendidas entre los 11 y 14 años, es decir, en el paso de Primaria a Secundaria.

En particular, esta actividad es de generalización lineal numérica con configuraciones sucesivas. Cabe destacar que las tareas de generalización numérica tienden a tener un formato bastante consistente de visualización de patrones y, por lo general, enumeran al menos los primeros cuatro términos de un patrón en un orden secuencial.

El objetivo principal de esta tarea es que los alumnos se inicien en el estudio de patrones recurrentes numéricos y comiencen a familiarizarse con el uso del lenguaje algebraico.

Figura 14

Actividad 1 de 1º y 2º de ESO

Dada la siguiente secuencia de números:

78. 560, 77.560, …, …., 74.560, 73.560,

1. Rellena los números que faltan.
2. Escribe los dos siguientes números.
3. Escribe la regla general para calcular el siguiente número de un número cualquiera 'n' según la secuencia anterior.

Fuente: Elaboración propia.

La primera y segunda cuestión que se plantean en esta tarea son de respuesta inmediata y, por tanto, se corresponden con un nivel bajo/bajo-medio de nivel cognitivo. Se pretende que los alumnos expresen numéricamente los valores que faltan en la secuencia mostrada en el enunciado, así como los dos siguientes.

La tercera cuestión presenta mayor demanda cognitiva (nivel alto según el modelo de Smith y Stein (1998)). El objetivo es que los alumnos expresen algebraicamente la regla que define dicha secuencia.

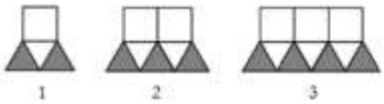
ACTIVIDAD 2 DE 1º Y 2º DE ESO

En esta actividad se propone una tarea de generalización figurativa lineal con configuraciones sucesivas. En ella, se proponen diversas cuestiones que requieren de todos los tipos de niveles de demanda cognitiva.

Figura 15

Actividad 2 de 1º y 2º de ESO

Estudia el patrón y responde a las siguientes preguntas:



1. Completa la tabla:

Número de cuadrados blancos	1	2	3	4	20	n
Número de triángulos grises	2	3	4			

2. Describe el patrón que ves.
3. ¿Cuántos cuadrados blancos hay si tenemos 50 triángulos grises?

Fuente: Liang, B. (2013).

La primera cuestión aborda todos los niveles de demanda cognitiva. La primera pregunta es de generalización inmediata, correspondiente a un nivel bajo/bajo-medio. En segundo lugar, se presenta una pregunta sobre un término lejano, correspondiente a un nivel medio-alto; y, por último, engloba una pregunta con mayor demanda cognitiva (nivel alto), ya que pide expresar la regla general que define el patrón algebraicamente.

Esta cuestión se plantea a través de una tabla para que los alumnos se den cuenta más fácilmente de la relación existente entre el número de cuadrados blancos y el número de triángulos grises.

La segunda cuestión se plantea para observar el tipo de representación que utilizan los alumnos para expresar la regla general del patrón que han deducido con la cuestión anterior. Se espera que los alumnos utilicen una representación de tipo algebraica.

Por último, la tercera cuestión se corresponde con una relación inversa, que requiere de un nivel superior de demanda cognitiva (medio-alto). El análisis teórico de dicha cuestión es equivalente al realizado en la cuestión 4 correspondiente a la actividad 2 de 6º de Primaria (ver Tabla 11).

ACTIVIDAD 2 DE 1º Y 2º DE ESO

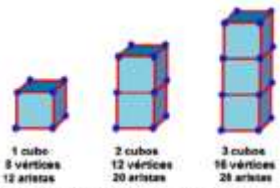
Con esta actividad los estudiantes, en la generalización de patrones recurrentes, comienzan a trabajar con patrones con más de un atributo y se familiarizan con el uso de expresiones simbólicas o algebraicas de la regla general.

Es una tarea de generalización lineal figurativa con configuraciones sucesivas. En ella, cada figura va añadiendo un cubo y los estudiantes deben expresar las reglas, directa e inversa, que relacionan el número de cubos de cada figura con el número de vértices y aristas de esta.

Figura 16

Actividad 3 de 1º y 2º de ESO

Hoy en clase han trabajado con policubos. Carlos y sus amigos los han colocado en vertical, de la siguiente manera:



1. Dibuja 4 cubos y cuenta el número de vértices y aristas.
2. ¿Cuántos vértices tendrían 20 cubos? ¿Y cuántas aristas? Explica cómo lo has hecho.
3. Escribe una regla para calcular el número de vértices sabiendo el número de cubos (n) y otra para hallar el número de aristas.
4. Intenta escribir la regla algebraicamente. ¿Cómo hallarías el número de vértices en 'n' cubos? ¿Y de 'n' aristas?
5. ¿Cuántos cubos necesitaríais para formar una estructura con 44 vértices? ¿Y con 44 aristas?

Fuente: Adaptado de Zapatera (2018).

La primera cuestión es de generalización inmediata, ya que pide considerar el siguiente término del patrón mostrado en el enunciado y contar el número de vértices y aristas que este posee, a partir de su representación geométrica. Por tanto, requiere de un nivel bajo/bajo-medio de demanda cognitiva.

La segunda cuestión considera una generalización lejana (nivel medio-alto de demanda cognitiva), en la cual, a diferencia de las actividades anteriores, es más difícil utilizar la representación geométrica para su correcta resolución. Así, se pretende que los alumnos encuentren la regla que define el patrón y la utilicen para un caso particular, realizando correctamente la aritmética.

La tercera y cuarta cuestión requieren de mayor demanda cognitiva, es decir, de un nivel alto. En la primera de ellas basta con expresar verbal o aritméticamente la regla que define la relación existente entre el número de vértices y el número de cubos, y la regla que define la relación existente entre el número de aristas y el número de cubos. Para ello, han de utilizar las experiencias con las cuestiones anteriores. En la segunda de ellas, se pide expresar dicha regla algebraicamente utilizando un lenguaje simbólico, la cual requiere de mayor abstracción.

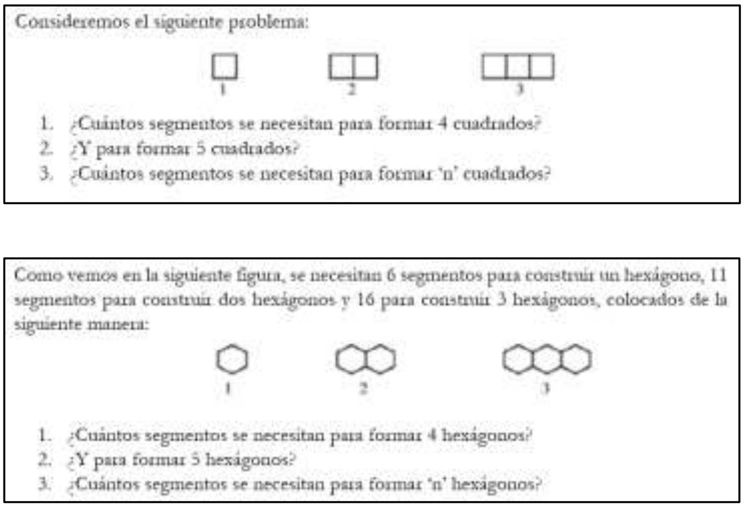
Por último, en la quinta cuestión se plantea una pregunta de relación inversa que requiere de un nivel medio-alto de demanda cognitiva. Se pretende que, una vez los alumnos han obtenido la regla general del patrón, la utilicen para un caso en particular (aplicando la relación inversa).

ACTIVIDAD 1 DE 3º DE ESO

La siguiente actividad, dirigida al tercer curso de Secundaria, consta de dos partes, las cuales muestran tareas de generalización lineal con configuraciones sucesivas. El objetivo es que los alumnos encuentren la relación existente entre el número de segmentos que se necesitan para construir una serie de cuadrados y hexágonos colocados como se muestra en la Figura 17, y expresar dicha regla algebraicamente.

Figura 17

Actividad 1 de 3º de ESO


Consideremos el siguiente problema:

1. ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar 4 cuadrados?
2. ¿Y para formar 5 cuadrados?
3. ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar 'n' cuadrados?

Como vemos en la siguiente figura, se necesitan 6 segmentos para construir un hexágono, 11 segmentos para construir dos hexágonos y 16 para construir 3 hexágonos, colocados de la siguiente manera:

1. ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar 4 hexágonos?
2. ¿Y para formar 5 hexágonos?
3. ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar 'n' hexágonos?

Fuente: "Cuadrados y Hexágonos" por Rivera y Becker (2007), como se citó en Liang, B. (2013).

Las cuestiones 1 y 2 de ambas partes son de respuesta inmediata, luego requieren de un nivel bajo-medio de demanda cognitiva. Se espera que los alumnos de este curso utilicen para su resolución directamente una representación aritmética sin pasar por la geométrica.

La tercera cuestión requiere de un mayor nivel de demanda cognitiva (alto). En ella, los estudiantes deben escribir la regla que definen dichos patrones algebraicamente, utilizando un lenguaje simbólico.

ACTIVIDAD 2 DE 3º DE ESO

En este curso se introducen las tareas de generalización que involucran patrones cuadráticos. Estos han sido investigados por numerosos investigadores como, por ejemplo, Castro y Ruiz (2018) o Healy y Holes (1999), entre otros.

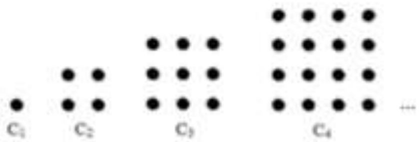
En dicha tarea se percibe que el patrón para construir los sucesivos cuadrados consiste en ir añadiendo una fila y una columna de puntos a la figura anterior (Castro y Ruiz, 2018).

La primera cuestión requiere un bajo-medio nivel de demanda cognitiva ya que engloba una pregunta de respuesta inmediata y, la segunda, implica un nivel superior de demanda cognitiva. Se pretende que los alumnos encuentren la regla que define el patrón y la expresen algebraicamente. Para ello, pueden utilizar distintas estrategias.

Figura 18

Actividad 2 de 3º de ESO

La siguiente imagen muestra la secuencia de números cuadrados. Contesta a las siguientes preguntas.



1. Como se observa en la figura anterior, en el primer término hay un punto, en el segundo término 4 puntos, en el tercer término hay 9 puntos y en el cuarto término hay 16 puntos. ¿Sabrías decir cuántos puntos hay en el quinto, sexto y séptimo término de la secuencia?
2. ¿Podrías escribir una regla general para el n-ésimo término?

Fuente: Elaboración propia.

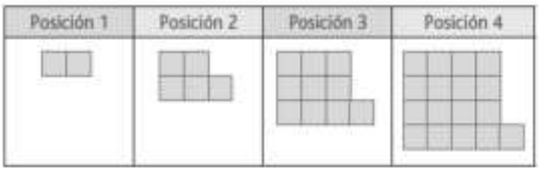
ACTIVIDAD 3 DE 3º DE ESO

La última actividad propuesta para este curso académico consta de otra tarea de generalización cuadrática en la cual se incluye una cuestión de relación inversa.

Figura 19

Actividad 3 de 3º de ESO

Observa la siguiente tabla:



1. Realiza una tabla de valores que relacione el número de la posición con la cantidad de cuadrados dada.
2. ¿Cuántos cuadrados habrá para la quinta posición?
3. Describe la regla general que sigue el patrón anterior.
4. Si tengo 50 cuadrados, ¿en qué posición estoy?

Fuente: Adaptación de Guía didáctica 6º básico (2013).

Esta tarea refleja un patrón creciente que relaciona la posición con la cantidad de cuadrados. Las dos primeras cuestiones son de respuesta inmediata, luego implican un nivel bajo-medio de demanda cognitiva.

En la tercera y cuarta pregunta se asume un mayor grado de nivel de demanda cognitiva. Los alumnos deben expresar algebraicamente la regla que define el patrón cuadrático y utilizar dicha regla para obtener la posición que ocupa un número concreto de cuadrados, es decir, aplicando una relación inversa.

ACTIVIDAD 1 DE 4º DE ESO

La primera tarea planteada a este curso es de generalización lineal figurativa pero únicamente con dos configuraciones sucesivas. Hasta ahora, todas las actividades constaban de tres configuraciones sucesivas, lo que incrementa la dificultad.

Esta tarea fue propuesta por Stacey (1989) en su estudio sobre las estrategias utilizadas por estudiantes, de edades comprendidas entre los 9 y 13 años, a problemas con patrones de generalización lineal.

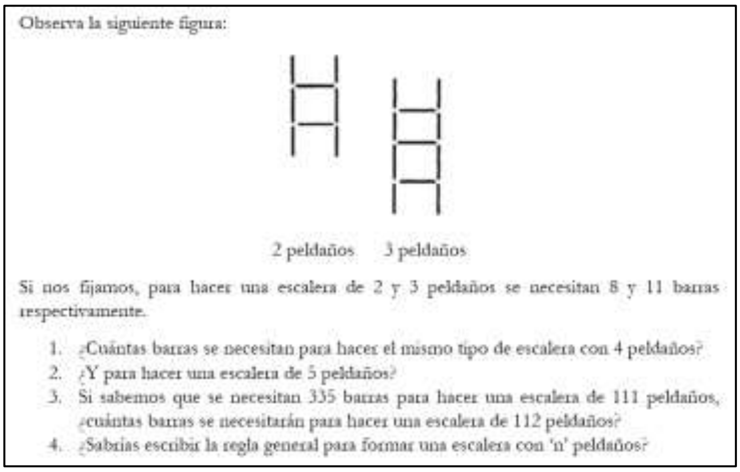
La primera y segunda cuestión son de respuesta inmediata, lo que requiere un nivel bajo-medio de demanda cognitiva por parte de los alumnos. Se espera que estos identifiquen la regla recursiva con las configuraciones del enunciado y resuelvan las cuestiones sin necesidad de representar las figuras geométricamente.

La tercera cuestión es de generalización lejana, es decir, que su resolución no se puede resolver gráficamente o contando paso a paso. De este modo, requiere un nivel medio-alto de demanda cognitiva.

Por último, en la cuarta cuestión pide expresar la regla general que define el patrón mostrado. Requiere de un nivel alto de demanda cognitiva y se espera que los alumnos expresen esa regla algebraicamente.

Figura 20

Actividad 1 de 4º de ESO


Observa la siguiente figura:

2 peldaños 3 peldaños

Si nos fijamos, para hacer una escalera de 2 y 3 peldaños se necesitan 8 y 11 barras respectivamente.

1. ¿Cuántas barras se necesitan para hacer el mismo tipo de escalera con 4 peldaños?
2. ¿Y para hacer una escalera de 5 peldaños?
3. Si sabemos que se necesitan 335 barras para hacer una escalera de 111 peldaños, ¿cuántas barras se necesitarán para hacer una escalera de 112 peldaños?
4. ¿Sabrías escribir la regla general para formar una escalera con 'n' peldaños?

Fuente: Adaptado de Stacey (1989).

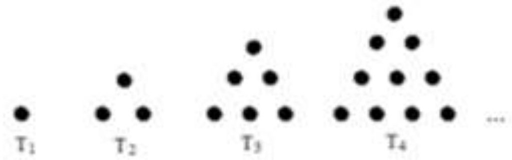
ACTIVIDAD 2 DE 4º DE ESO

En esta actividad se presenta una tarea de generalización cuadrática figurativa con configuraciones sucesivas. Asimismo, se incrementa la dificultad respecto del curso anterior.

Figura 21

Actividad 2 de 4º de ESO

La siguiente imagen muestra la secuencia de números triangulares. Contesta a las siguientes preguntas.



1. Como se observa en la figura anterior, en el primer término hay un punto, en el segundo término 3 puntos, en el tercer término hay 6 puntos y en el cuarto término hay 10 puntos. ¿Sabrías decir cuántos puntos hay en el quinto, sexto y séptimo término de la secuencia?
2. ¿Podrías escribir una regla general para el n-ésimo término?

Fuente: Elaboración propia.

En dicha tarea se percibe que el patrón para construir los sucesivos triángulos consiste en agregar a la figura anterior una fila de puntos con un punto más que la fila anterior (Castro y Ruiz, 2018).

La primera cuestión requiere un bajo-medio nivel de demanda cognitiva ya que engloba una pregunta de respuesta inmediata y, la segunda, implica un nivel superior de demanda cognitiva. El objetivo es que los alumnos encuentren la regla que define el patrón y la expresen algebraicamente. Para ello, pueden utilizar distintas estrategias.

ACTIVIDAD 3 DE 4º DE ESO

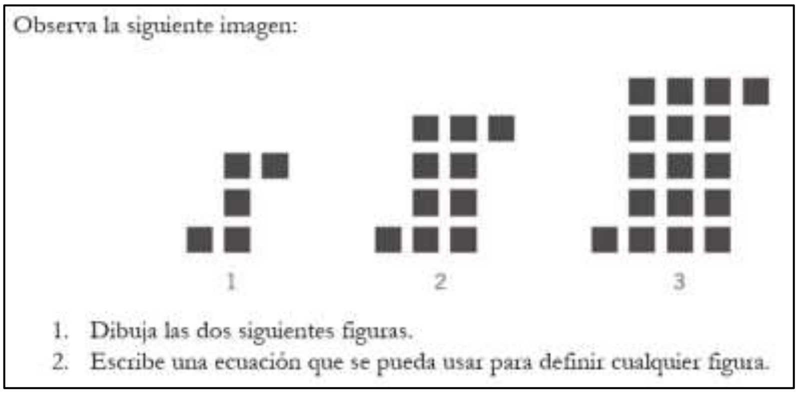
La última tarea que se propone para este curso académico también es de generalización cuadrática figurativa con configuraciones sucesivas. Esta actividad se considera que presenta un grado de dificultad mayor y que, por tanto, requiere de mayor demanda cognitiva que el resto de las actividades.

La primera cuestión es de respuesta inmediata y basta con representar geométricamente las siguientes figuras a las mostradas en el enunciado. Por ello, requiere un nivel bajo-medio de demanda cognitiva.

La segunda cuestión ya requiere mayor demanda cognitiva (alta), en la cual, a partir de las figuras mostradas y las pedidas en la cuestión anterior, deben hallar la regla general que define el patrón.

Figura 22

Actividad 3 de 4º de ESO



Fuente: Adaptada de Smith et al. (2007), como se citó en Liang, B.

DISEÑO DE LA RÚBRICA DE EVALUACIÓN

Para el diseño de la rúbrica de evaluación, se han tenido en cuenta, en primer lugar, los rasgos característicos del razonamiento algebraico definidos por Godino et al. (2014) (ver Tabla 4): "*Procedimientos*", "*Tipos de objetos*" y "*Transformaciones*".

Además, se han incluido otros aspectos como "*Aritmética y patrones*", "*Aspecto estructural*", "*Aspecto funcional*", "*Lenguajes*" y "*Razonamiento algebraico*".

Cada uno de los rasgos o aspectos definidos anteriormente, se han desglosado en función de los niveles de razonamiento algebraico elemental en Educación Primaria y Secundaria, descritos en Godino et al. (2014) (ver Anexo A.4).

3.4.3. EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Una vez elaborado y definido el instrumento de recogida de datos, y conocidas las características fundamentales del grupo de alumnos que va a realizar la prueba, se procede a la implementación en el aula. Todas las actividades correspondientes a cada curso se realizaron durante una sesión de aproximadamente 50 minutos en el aula habitual de Matemáticas.

En primer lugar, para cada curso académico, se realiza una presentación. Se les comunica que esas tareas forman parte de un trabajo de investigación y que ellos han sido seleccionados para llevarlo a cabo, por lo que es importante que colaboren y respondan lo máximo y mejor posible.

A continuación, la investigadora, que actúa como docente, lee con ellos el enunciado de la primera actividad, todas las cuestiones que esta engloba, y se resuelven las posibles dudas que puedan surgir. Cuando terminan dicha actividad, el docente recoge las hojas y entrega la siguiente, siguiendo el mismo procedimiento.

Durante la prueba, se insiste constantemente en la importancia de que expliquen todos sus razonamientos y respuestas, así como que escriban todo lo que sepan. Asimismo, se muestra total disponibilidad para resolver todas las dudas.

Las impresiones tras la realización de la prueba fueron muy buenas. Esta se desarrolló según lo previsto y se pudo obtener de manera satisfactoria toda la información necesaria para llevar a cabo el siguiente paso en la investigación; el análisis de datos.

Por último, he de mencionar que este experimento de enseñanza se ha reducido únicamente a la sesión de trabajo que se realizó con los alumnos. El objetivo es poder extender este ciclo y, en particular, esta fase, a una interacción y duración mayor en el aula.

3.4.4. ANÁLISIS DE LOS DATOS

Una vez se han recogido todas las respuestas de los alumnos a las tareas proporcionadas, se procede al análisis de los datos. Para ello, se van a seguir las cuatro etapas de la espiral de análisis de Creswell (2007).

En primer lugar, se recopilan las actividades y se clasifican por cursos. Una vez se han organizado todos los datos recogidos, se realiza una lectura global y se aportan ideas o palabras clave para su posterior codificación. Es decir, se procede a la lectura y etiquetación de los datos.

El siguiente paso es la descripción, clasificación e interpretación de los datos recogidos. Esta etapa, a su vez, está compuesta de dos procesos fundamentales: codificación y categorización.

CATEGORÍAS

La metodología cualitativa se basa en el uso de categorías. Se denominan categorías a cada uno de los elementos o dimensiones de las variables investigadas y que van a servir para clasificar o agrupar según ellas las diversas unidades (López, 2002).

Para establecer las categorías para el análisis de las respuestas de los alumnos, se parte de algunas clasificaciones realizadas en estudios previos (Merino, 2012) así como de consideraciones conceptuales tratadas en el marco teórico.

Dado que el principal foco del estudio está en el análisis del pensamiento algebraico de los estudiantes, nos vamos a centrar en las últimas cuestiones de cada actividad. Por este motivo, las categorías se establecerán únicamente para cada cuestión escogida.

Además, cabe destacar que en cada cuestión se han evaluado todas y cada una de las categorías, aunque la respuesta final fuese errónea. Esto se debe a que, desde mi punto de vista, un alumno puede haber resuelto la cuestión de manera incorrecta pero el procedimiento, representación o estrategia que ha llevado a cabo, muestren indicios de razonamiento algebraico.

Para el análisis detallado de las respuestas de los alumnos, a continuación, se describen las categorías que se han utilizado para ello.

Categorías atendiendo a los niveles de los distintos aspectos del EOS

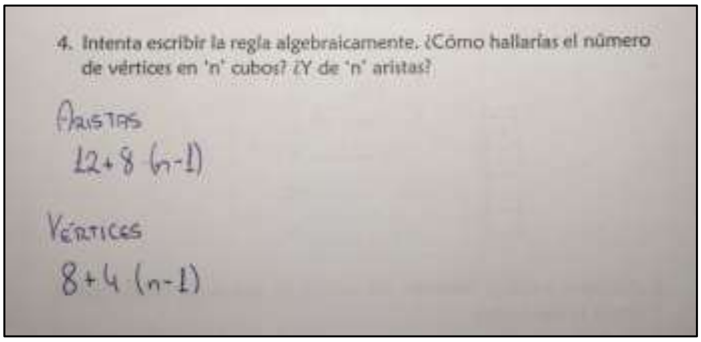
En primer lugar, se consideran rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental y aspectos definidos para la elaboración de la rúbrica de evaluación. Estos son "*Aritmética y patrones*", "*Aspecto estructural*", "*Aspecto funcional*", "*Procedimientos*", "*Tipos de objetos*", "*Transformaciones*", "*Lenguajes*" y "*Razonamiento algebraico*".

Ahora, para cada uno de los aspectos definidos anteriormente y, según la rúbrica elaborada en la fase del diseño (ver Anexo A. 4), se asigna el nivel correspondiente (del 0 al 6) observado en la cuestión analizada.

Por ejemplo, a la siguiente respuesta dada por un alumno de 2º de Secundaria, mostrada en la Figura 23, se le asignan los niveles recogidos en la Tabla 12 (de acuerdo con la rúbrica de evaluación propuesta en el Anexo A. 4).

Figura 23

Respuesta de un alumno de 2º de ESO a la cuestión 4 de la actividad 3 correspondiente a dicho curso



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 12

Cuadro resumen de los niveles asignados a los distintos rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental correspondientes a la solución de un alumno de 2º de ESO a la cuarta cuestión de la actividad 3

ASPECTOS	NIVEL	JUSTIFICACIÓN

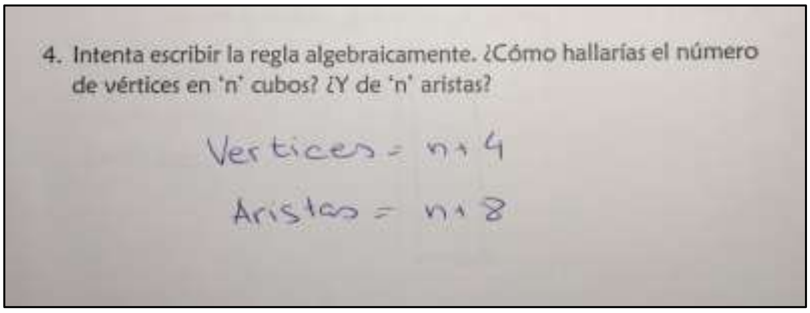
Aritmética y patrones	3	Realiza correctamente la abstracción para obtener la regla general del patrón.
Aspecto estructural	1	Se comienzan a utilizar propiedades de las operaciones. Emerge el concepto de equivalencia y se reconoce el significado del signo igual pero no se utiliza.
Aspecto funcional	3	Obtiene la regla general del patrón.
Procedimientos	3	Los procedimientos utilizados indican que opera con la incógnita. Introduce elementos simbólicos o alfanuméricos.
Tipo de objetos	3	Intervienen indeterminadas o variables. Se generan objetos intensivos.
Transformaciones	2	En tareas estructurales, la ecuación es de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener las formas canónicas de la expresión.
Lenguajes	3	Utiliza un lenguaje simbólico-literal. Los símbolos se utilizan de manera analítica.
Razonamiento algebraico	3	Presenta formas consolidadas de razonamiento algebraico.

Nota. Elaboración propia.

Sin embargo, si observamos la respuesta de otro alumno de 2º de Secundaria a la misma cuestión, mostrada en la Figura 24, los niveles asignados serían los recogidos en la siguiente Tabla 13.

Figura 24

Respuesta de otro alumno de 2º de ESO a la cuestión 4 de la actividad 3 correspondiente a dicho curso



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 13

Cuadro resumen de los niveles asignados a los distintos rasgos característicos del razonamiento algebraico elemental correspondientes a la solución de otro alumno de 2º de ESO a la cuarta cuestión de la actividad 3

ASPECTOS	**NIVEL**	**JUSTIFICACIÓN**
Aritmética y patrones	2	Muestra evidencias de que empieza a expresar el caso general con una regla algebraica en función de la incógnita.
Aspecto estructural	3	Utiliza propiedades de las operaciones y el significado relacional del signo igual.
Aspecto funcional	2	Determina un patrón por análisis de términos específicos de una secuencia y lo formaliza expresando una regla general.
Procedimientos	2	Los procedimientos utilizados no indican que se opera con la incógnita, aunque se familiariza con el uso de símbolos alfanuméricos.
Tipo de objetos	2	Intervienen indeterminadas o variables para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto.
Transformaciones	2	En tareas estructurales, la ecuación es de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener las formas canónicas de la expresión.
Lenguajes	2	Utiliza un lenguaje simbólico-literal.
Razonamiento algebraico	2	Presenta un acercamiento intermedio de razonamiento algebraico.

Nota. Elaboración propia.

Se observa que, a pesar de que la resolución a la cuestión sea incorrecta, se han valorado todas las categorías.

Categorías sobre la estrategia de resolución

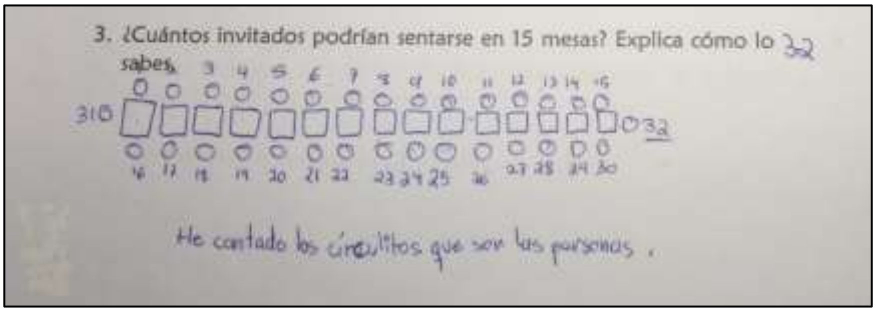
Entre las estrategias identificadas en las respuestas de los alumnos se distinguen las siguientes; conteo, uso de patrón o respuesta directa, detalladas a continuación.

<u>*Conteo*</u>

Se considera que un alumno/a utiliza la estrategia de conteo cuando cuentan los elementos uno a uno para dar la respuesta a la solución, generalmente a partir de un dibujo (ver Figura 25).

Figura 25

Respuesta de un alumno de 6º de Primaria a la cuestión 3 de la actividad 2 correspondiente a dicho curso.



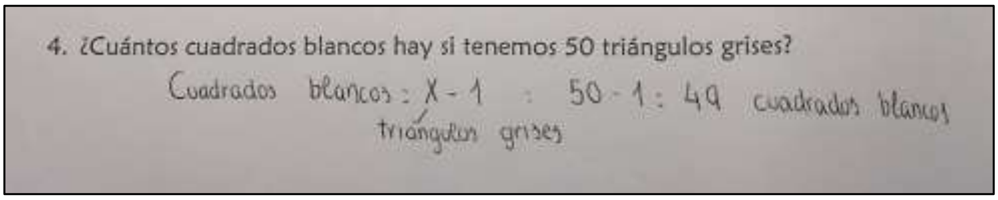
Fuente: Elaboración propia.

<u>Uso de patrón</u>

Se considera que un alumno/a utiliza esta estrategia cuando realiza una operación que involucra los datos proporcionados en el enunciado. Dentro de esta categoría se consideran aquellos casos en los que el estudiante hace uso de un patrón inapropiado, es decir, que no es pertinente a la cuestión trabajada, aquellos que utilizan un patrón incompleto y los que utilizan un patrón apropiado y completo (ver Figura 26).

Figura 26

Respuesta de un alumno de 1º de ESO a la cuestión 4 de la actividad 2 correspondiente a dicho curso



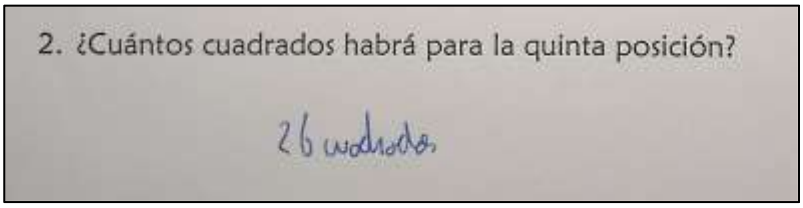
Fuente: Elaboración propia.

<u>Respuesta directa</u>

Se considera que un alumno da una respuesta directa si en ella únicamente consta una solución sin el procedimiento o razonamiento seguido para llegar a ella (ver Figura 27).

Figura 27

Respuesta de un alumno de 3º de ESO a la cuestión 2 de la actividad 3 correspondiente a dicho curso



Fuente: Elaboración propia.

Categorías según la representación de la solución

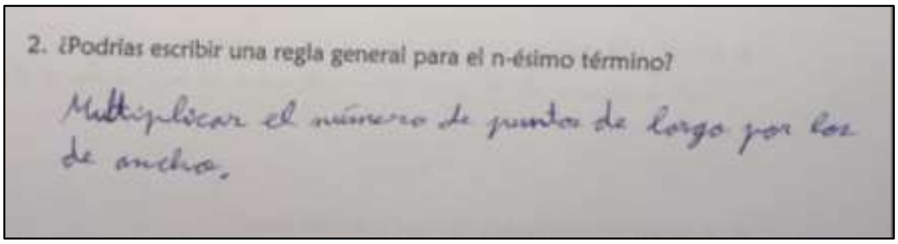
Para clasificar las representaciones de los alumnos se utilizan las siguientes categorías; verbal, simbólica (que incluye la numérica y la algebraica) y la pictórica. En aquellos casos en los que la resolución involucre múltiples representaciones, se tendrá en cuenta aquella que se considere que el alumno ha utilizado principalmente para su resolución y no como apoyo.

<u>*Verbal*</u>

Se considera que el alumno/a ha representado verbalmente la solución si lo ha presentado como un texto en el que se expresa la descripción de la resolución de forma detallada (ver Figura 28).

Figura 28

Respuesta de un alumno de 3º de ESO a la cuestión 2 de la actividad 2 correspondiente a dicho curso



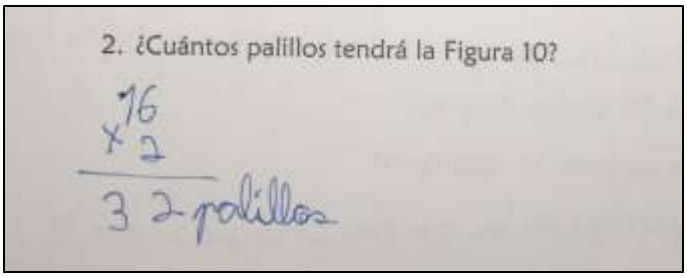
Fuente: Elaboración propia.

<u>*Simbólica*</u>

Se considera representación simbólica a toda representación numérica o algebraica. Con representación numérica se refiere a aquellas soluciones expresadas mediante números (ver Figura 29) y algebraica a aquellas expresiones que combinan letras y números ligadas por los signos de las operaciones (ver Figura 30).

Figura 29

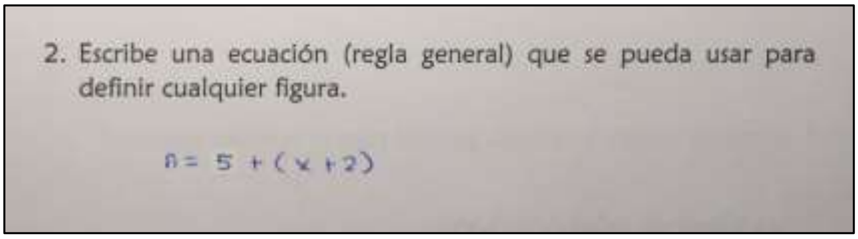
Respuesta utilizando uno representación numérica de un alumno de 5º de Primaria a la cuestión 2 de la actividad 2



Fuente: Elaboración propia.

Figura 30

Respuesta utilizando una representación algebraica de un alumno de 4º de ESO a la cuestión 2 de la actividad 3 correspondiente a dicho curso



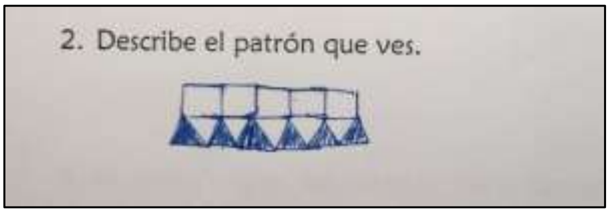
Fuente: Elaboración propia.

<u>Pictórica</u>

Se considera que el alumno ha representado pictóricamente la solución si la ha presentado mediante un dibujo. Dentro de esta representación se consideran aquellos casos en los que el dibujo está completo, incompleto o no se corresponde con el ejemplo genérico (ver Figura 31).

Figura 31

Respuesta de un alumno de 1º de ESO a la cuestión 2 de la actividad 2 correspondiente a dicho curso



Fuente: Elaboración propia.

Categorías según la resolución

En cuanto a la resolución, se establecen las categorías; correcta, incorrecta y en blanco. En algunos casos, sobre todo en los cursos superiores, encontramos casos en los que los alumnos no responden a las cuestiones. En estas ocasiones, el resto de las categorías se dejan sin completar, ya que no hay datos suficientes.

Como resultado de los procesos anteriores, y de la interpretación de lo obtenido en relación con el marco teórico y el contexto de estudio, se procede al análisis de los resultados. Estos se representarán a través de gráficas.

En particular, se va a realizar un análisis detallado sobre la primera actividad propuesta para todos los cursos académicos, ya que, en vista de los resultados obtenidos, parece que es la que mejor se ha ajustado a sus respectivos niveles cognitivos y académicos.

Asimismo, en el Anexo A. 2 y A. 3 se recogen todas las gráficas correspondientes al análisis de la segunda y tercera actividad (propuesta únicamente en los cursos de Secundaria) respectivamente. Para la segunda actividad se han tenido en cuenta las respuestas de la tercera cuestión de los alumnos de 5º y 6º de Primaria, la primera y segunda cuestión de 1º y 2º de ESO y la segunda cuestión de 3º y 4º de ESO.

Y, para la tercera actividad, se recogen los resultados de la cuarta cuestión de 1º y 2º de ESO, la tercera cuestión de 3º de ESO y la segunda cuestión de los alumnos de 4º de ESO.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD 1

Como se ha mencionado previamente, de cada actividad se evaluará la última cuestión, ya que es la propiamente algebraica. En particular, para la actividad 1 de cada curso se evaluará la cuestión 4 de 5º de Primaria y 4º de ESO, la cuestión 5 de 6º de Primaria y la cuestión 3 de 1º, 2º y 3º de ESO.

Nivel predominante en cada uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico

Comencemos estudiando la evolución del nivel predominante de razonamiento algebraico en cada uno de los rasgos o aspectos definidos anteriormente; “*Aritmética y patrones*”, “*Aspecto estructural*”, “*Aspecto funcional*”, “*Procedimientos*”, “*Tipos de objetos*”, “*Transformaciones*”, “*Lenguajes*” y “*Razonamiento algebraico*”.

Para hallar dicho nivel en cada rasgo de razonamiento algebraico, se ha tomado como parámetro estadístico de centralización la mediana. De esta forma, se han obtenido los siguientes resultados (ver

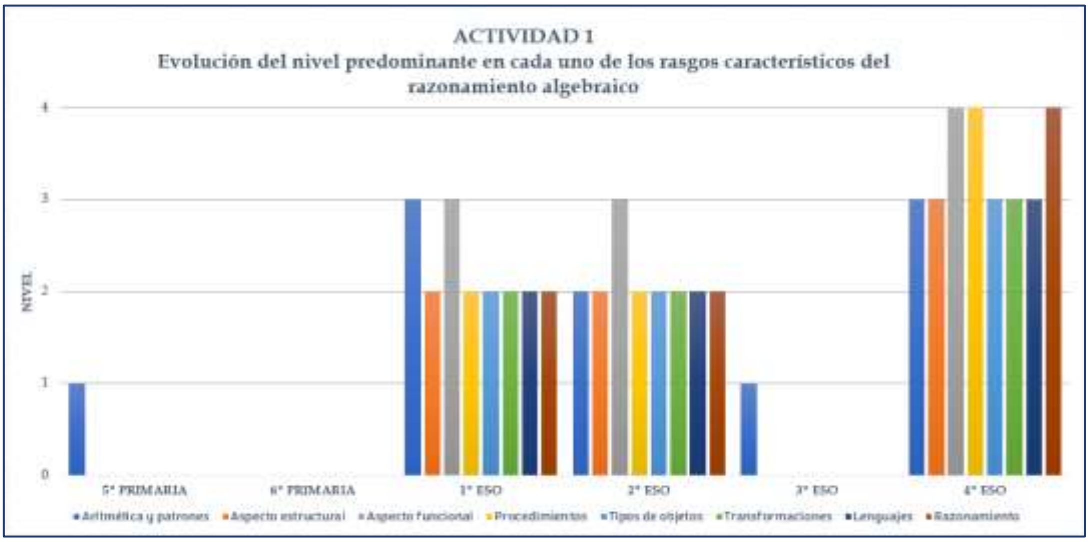
Gráfica 1).

Un análisis simple de los datos permite observar que en los cursos de 5º y 6º de Primaria y 3º de ESO, los alumnos, en la mayoría de los aspectos característicos del razonamiento algebraico, tienen un nivel cero. Es decir, ausencia total de razonamiento y pensamiento algebraico.

En cuanto a la "*Aritmética y patrones*", la mayoría de los alumnos de 5º de Primaria tienen un nivel 1, es decir, son capaces de generalizar a un caso concreto sin utilizar el dibujo y realizando correctamente la aritmética. Sin embargo, los alumnos de 6º de Primaria no alcanzan dicho nivel. En su mayoría utilizan correctamente el conteo numérico, pero a partir de una representación pictórica.

Gráfica 1

Evolución del nivel predominante en cada curso de los rasgos característicos del razonamiento algebraico correspondientes a la actividad 1 de cada curso



Fuente: Elaboración propia.

Si nos fijamos en el curso de 1º de ESO, observamos un claro incremento en el nivel de los estudiantes, ya que la mayoría poseen un nivel 3, es decir, realizan correctamente la abstracción para obtener la regla general del patrón. En los cursos de 2º y 3º de ESO se produce un sutil descenso en dicho nivel.

Los alumnos de 2º de ESO alcanzan un nivel 2, es decir, muestran evidencias de que empiezan a expresar el caso general con una regla algebraica, y los de 3º de ESO alcanzan, en su mayoría, un nivel 1. Por último, los estudiantes de 4º de ESO vuelven a mostrar evidencias de alcanzar un nivel 3 en dicho aspecto.

De este modo, se observa una clara diferencia en el uso de la aritmética entre los alumnos de Primaria y los de Secundaria. Los primeros no alcanzan ningún nivel de abstracción; utilizan correctamente la aritmética, pero sin llegar a generalizar.

Sin embargo, los alumnos de Secundaria comienzan a mostrar evidencias de expresar la regla algebraica en función de la incógnita e, incluso, en algunos casos, realizan correctamente la abstracción para llegar a ella.

En cuanto al "*Aspecto estructural*", se observa claramente que en los cursos de Primaria no se reconocen propiedades y solo se utiliza el signo "igual" en su aceptación de resultado de operaciones, es decir, alcanzan un nivel cero y, en los cursos de Secundaria comienzan a reconocer estas propiedades.

En particular, en los cursos de 1º y 2º de ESO emerge el concepto de equivalencia y comienzan a utilizar el significado relacional del signo "igual" y, en 4º de ESO, ya utilizan como tal las propiedades de las operaciones y el signo "igual".

Si ahora nos fijamos en el "*Aspecto funcional*", el nivel que presentan los alumnos aumenta según avanzamos de curso. De nuevo, en los cursos de Primaria alcanzan un nivel 0, es decir, únicamente llegan a identificar una regla recursiva, y en los cursos de Secundaria, tanto en 1º y 2º como en 4º de ESO, llegan a obtener la regla general del patrón.

Equivalentemente sucede con los "*Procedimientos*". En 5º y 6º de Primaria los procedimientos utilizados son aritméticos y en ningún caso indican que se opera con la incógnita. En 1º y 2º de ESO comienzan a familiarizarse con el uso de símbolos (no alfanuméricos) aunque los procedimientos no indiquen que se opera con la incógnita.

En 4º de ESO ya se observa una clara evolución. Los procedimientos utilizados indican que se opera con la incógnita. Se introducen elementos simbólicos o alfanuméricos y, sobre todo, se utiliza el cálculo analítico para obtener formas equivalentes de las expresiones.

Por otro lado, los "*Tipos de objetos*" que utilizan los alumnos de Primaria son intensivos de primer grado, es decir, objetos extensivos (números particulares) y, los alumnos de 1º y 2º de ESO, ya comienzan a utilizar indeterminadas o variables para referir a los objetos intensivos reconocidos (de grado 2). Los alumnos de 4º de ESO alcanzan un nivel superior al generar objetos intensivos y operar con ellos.

De la misma manera sucede con las "*Transformaciones*". Los alumnos de Primaria operan con dichos objetos intensivos de primer grado mientras que los de 1º y 2º de Secundaria reconocen la generalidad, aunque no operen con las variables para obtener formas canónicas de la expresión. Es en 4º de ESO cuando los alumnos alcanzan un nivel superior, realizando transformaciones en la forma simbólica de las expresiones y operando con las variables.

En cuanto al "*Lenguaje*" que utilizan los alumnos, se vuelve a notar una clara diferencia entre ambas etapas. Los alumnos de Primaria utilizan un lenguaje natural, numérico, icónico o verbal y, los de

Secundaria ya utilizan un lenguaje simbólico-literal.

En el caso de los alumnos de 1º y 2º de ESO, ligado a la información del contexto espacial y temporal y, en el caso de los alumnos de 4º de ESO, estos símbolos se utilizan de manera analítica, es decir, sin referir a la información del contexto.

De este modo, los alumnos de Primaria presentan ausencia de razonamiento algebraico, los alumnos de 1º y 2º de Secundaria muestran un acercamiento intermedio de razonamiento protoalgebraico, los alumnos de 3º ausencia de razonamiento algebraico y, los de 4º, formas consolidadas de razonamiento algebraico.

En conclusión y, en base a todo lo anterior, se observa una clara transición en el pensamiento aritmético – algebraico que poseen los estudiantes de Primaria y Secundaria y una evolución notable de los alumnos de 4º de ESO con respecto a los de 1º y 2º de ESO.

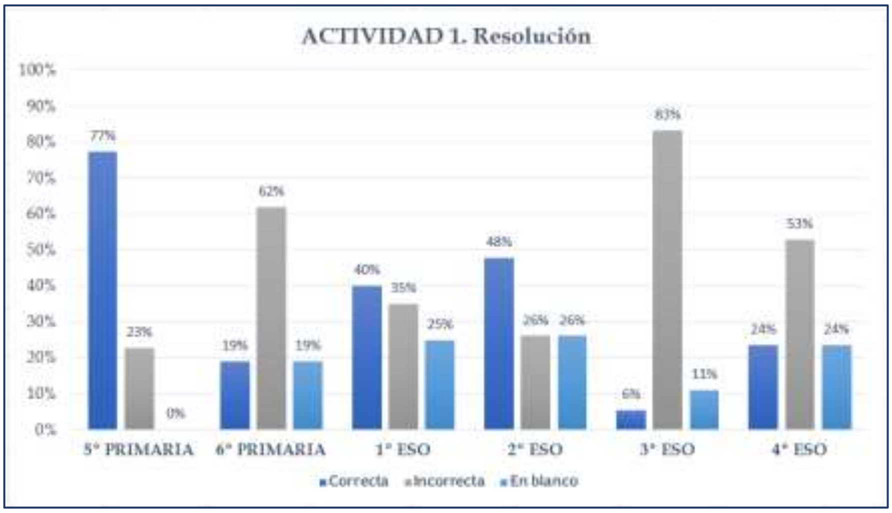
A continuación, antes de analizar la estrategia o representación que los alumnos han utilizado para resolver la actividad, vamos a observar cómo ha sido dicha resolución en cada curso.

Resolución de la actividad

Claramente, observando la Gráfica 2, el curso que resuelve la actividad con mayor éxito es el de 5º de Primaria. A este le siguen los alumnos de 2º de ESO, los de 1º de ESO y los de 4º de ESO. Por ende, los cursos con peores resultados son los de 3º de ESO y 6º de Primaria. Cabe destacar que tan solo un 6% de los alumnos de tercero de Secundaria consiguen resolver correctamente la actividad.

Gráfica 2

Resolución de la actividad 1 dada por los alumnos de cada curso



Fuente: Elaboración propia.

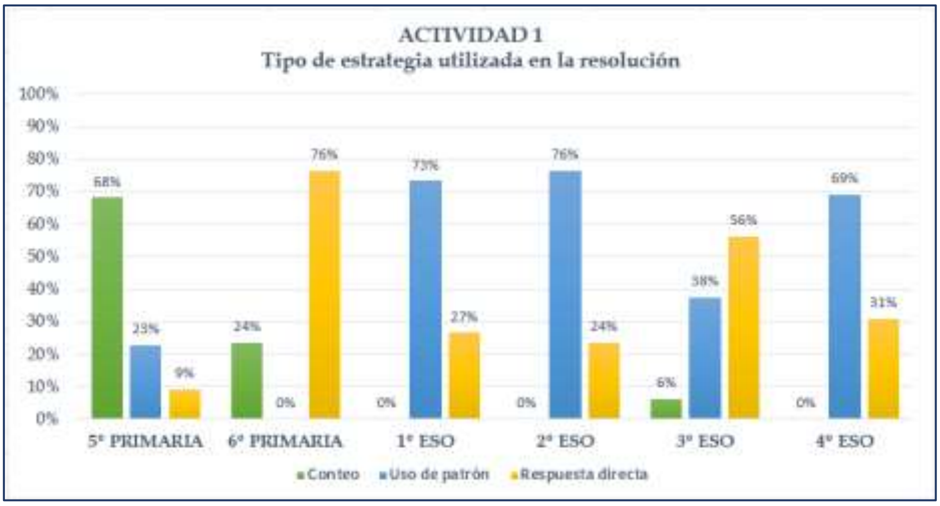
También es destacable que, según se avanza de curso, el número de respuestas en blanco aumenta. Cuando la resolución a la cuestión analizada está en blanco, no se pueden analizar el resto de las categorías; "*Estrategia*" o "*Representación*". Por lo tanto, los resultados que se muestran a continuación corresponden al total de alumnos que no han dejado la respuesta en blanco, es decir, no versan sobre el 100% de los alumnos de cada curso.

Estrategia utilizada en la resolución

Entre los alumnos que han resuelto la actividad, si nos fijamos en la Gráfica 3, se observa claramente una evolución en cuanto a la estrategia de resolución utilizada. En Primaria, la mayoría de los alumnos utilizan técnicas de conteo normalmente, como veremos a continuación, a partir de una representación pictórica. En Secundaria, los alumnos ya comienzan a utilizar expresiones o la regla general del patrón para su resolución.

Gráfica 3

Tipo de estrategia utilizada en la resolución de la actividad 1 por los alumnos de cada curso



Fuente: Elaboración propia.

Tan solo un 6% de los alumnos de 3º de ESO utilizan técnicas de conteo para resolver la cuestión analizada. Siguiendo con el curso mencionado, la mayoría proporcionan una respuesta directa sin ningún tipo de procedimiento ni explicación.

Se puede observar que esto sucede en la mayoría de las respuestas de 6º de Primaria y, en menor medida, de 1º, 2º y 4º de ESO.

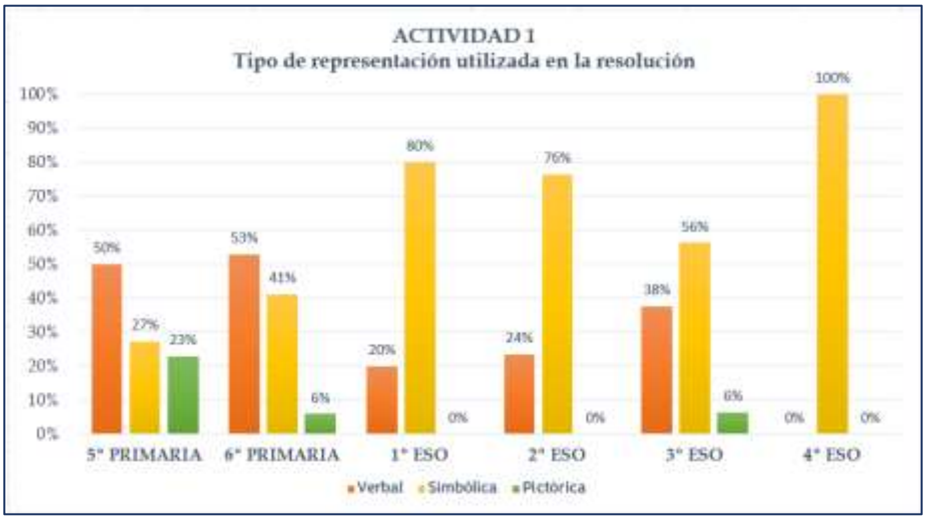
Representación utilizada en la resolución

En primer lugar, a partir de la Gráfica 4, se observa que la representación verbal, que es la más utilizada entre los alumnos de Primaria, es sustituida en los sucesivos cursos de Secundaria por la simbólica, tal y como habíamos señalado anteriormente.

Los alumnos de Primaria, que hacen uso de un lenguaje natural, numérico, icónico, etc., utilizan en su mayoría la representación verbal para proporcionar la solución de la cuestión. Sin embargo, los alumnos de Secundaria, que comienzan a utilizar un lenguaje simbólico-literal, utilizan en su mayoría una representación simbólica.

Gráfica 4

Tipo de representación utilizada en la resolución de la actividad 1 por los alumnos de cada curso



Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a la representación pictórica, se observa que, a pesar del 6% de los estudiantes que la utilizan en 3º de ESO, solo es utilizada por los alumnos de la etapa de Primaria. Estos utilizan dicha representación para el posterior conteo numérico de la solución.

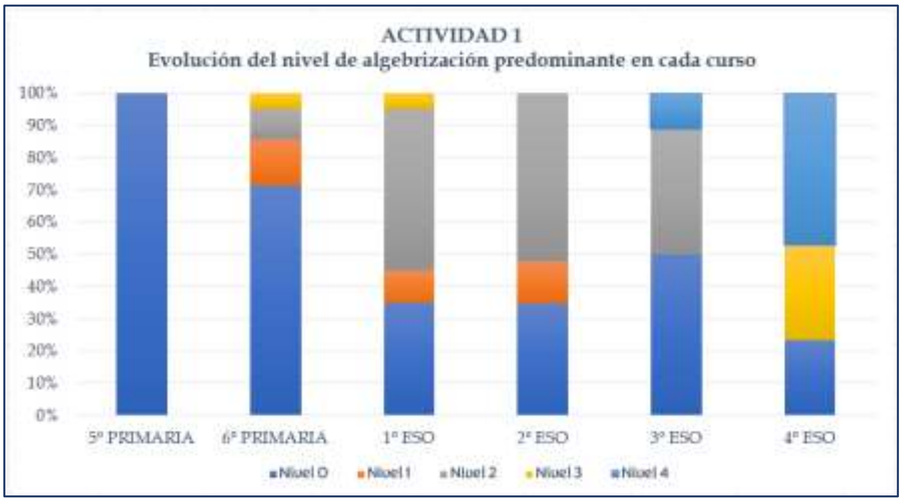
Nivel de algebrización predominante

Por último, se analizará la evolución del nivel de algebrización predominante en cada curso. Para ello, como se trata de una escala cualitativa, utilizaremos como medida de centralización los cuartiles y la mediana.

A grandes rasgos, se observa una clara evolución del nivel de algebrización que presentan los alumnos desde las últimas etapas de Primaria hasta la última etapa de Secundaria.

Gráfica 5

Evolución del nivel de algebrización predominante en cada curso académico



Fuente: Elaboración propia.

En el 5º curso de Primaria, todos los alumnos presentan un nivel 0 de algebrización, es decir, ausencia total de razonamiento algebraico. Sin embargo, en 6º curso de Primaria, aunque el primer y el segundo cuartil se encuentren en un nivel 0, el tercero ya se encuentra en un nivel 1 de algebrización. De hecho, un 10% de los alumnos alcanzan el nivel 2 y un 5% el nivel 3.

Ya en el primer curso de Secundaria la evolución es notable. El primer cuartil sigue en un nivel 0 pero el segundo ya se sitúa en un nivel 2. En particular, un 50% de alumnos en este curso presentan dicho nivel de algebrización, es decir, un acercamiento intermedio de razonamiento algebraico. Igual que en el curso anterior, tan solo un 5% alcanza un nivel 3.

Equivalentemente sucede con los alumnos de 2º de ESO, pero, en este caso, ninguno alcanza un nivel 3 de razonamiento algebraico.

Para el tercer curso de Secundaria, el primer cuartil se sitúa en un nivel 0, el segundo cuartil se encuentra exactamente entre el nivel mencionado anteriormente y el nivel 2, saltándose el nivel 1 y el tercer cuartil sigue en un nivel 2 de algebrización. Se observa entonces como los alumnos de este curso presentan niveles bastante lejanos.

Un 50% de los alumnos se encuentran en un nivel 0 de algebrización, es decir, ausencia de razonamiento algebraico, un 39% presenta un nivel 2, es decir, acercamiento intermedio de razonamiento algebraico y un 11% se sitúa en un nivel 4, es decir, presenta formas consolidadas de razonamiento algebraico.

Por último, para 4º de ESO, el primer cuartil ya se encuentra en un nivel 3 de razonamiento algebraico, es decir, menos del 25% de los alumnos tienen un nivel menor que 3. Además, casi la mayoría de los alumnos (un 47%) presentan un nivel 4, es decir, muestran evidencias de tener formas consolidadas de razonamiento algebraico.

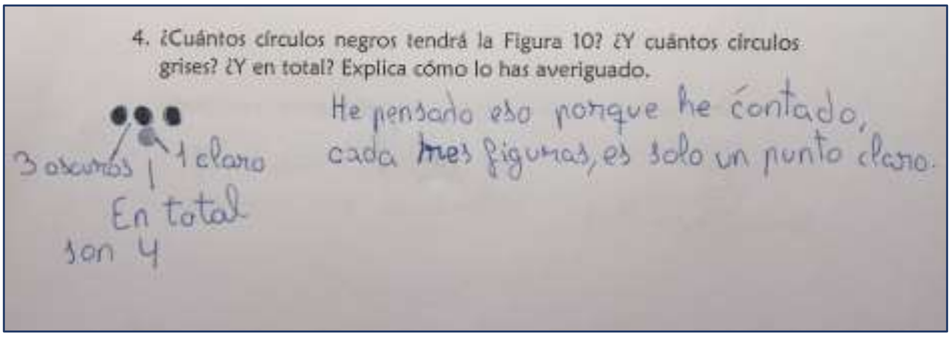
ERRORES Y DIFICULTADES

Una vez se han clasificado, categorizado y analizado todas las respuestas de los alumnos a las actividades propuestas, se han encontrado diversos errores. Además, también se han identificado algunas dificultades presentadas por los estudiantes al resolver las tareas.

Comenzando con el curso de 5º de Primaria, el error que se ha observado con mayor frecuencia está relacionado con la regla recursiva. Los alumnos no consiguen identificar bien dicha regla y, en consecuencia, dibujan mal los siguientes casos del patrón establecido.

Figura 32

Respuesta de un alumno de 5º de Primaria a la cuestión 4 de la actividad 1 correspondiente a dicho curso



Fuente: Elaboración propia.

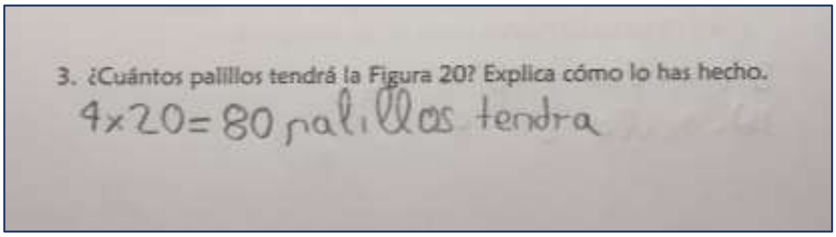
Si observamos la Figura 32, el alumno identifica que la parte del patrón que siempre permanece igual son los tres círculos negros y uno gris, en lugar de únicamente los círculos negros. No ha reconocido que hay tantos círculos grises como el número de posición de la figura.

Otro error muy frecuente (ver Figura 33), particularmente en la resolución de la actividad 2, es el empleo de proporcionalidad para obtener términos lejanos en función de los ya calculados en cuestiones anteriores. En concreto, un 59% de los alumnos utilizan esta técnica para resolver la tercera cuestión.

El alumno cuya resolución se muestra la Figura 33, utiliza proporcionalidad y razona que, si la figura 1 de dicha actividad tiene cuatro palillos, entonces la figura 20 tendrá 80 palillos. Equivalentemente, otros alumnos utilizan la cuestión anterior (número de palillos que tiene la figura 10) y deducen que, entonces, la figura 20 tiene el doble de palillos (ver Figura 34).

Figura 33

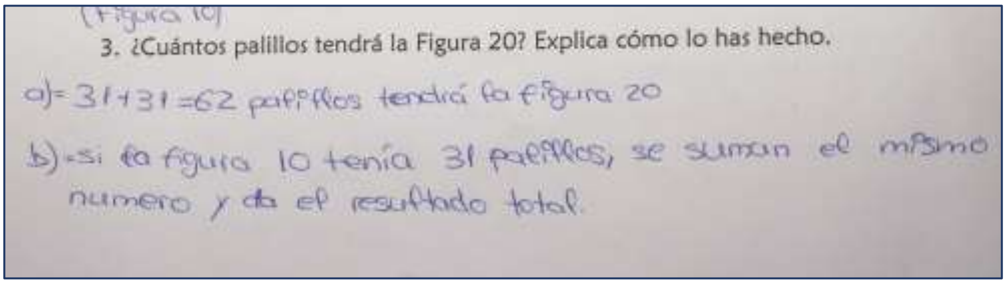
Respuesta de un alumno de 5º de Primaria a la cuestión 3 de la actividad 2 correspondiente a dicho curso



Fuente: Elaboración propia.

Figura 34

Respuesta de un alumno de 5º de Primaria a la cuestión 3 de la actividad 2 correspondiente a dicho curso

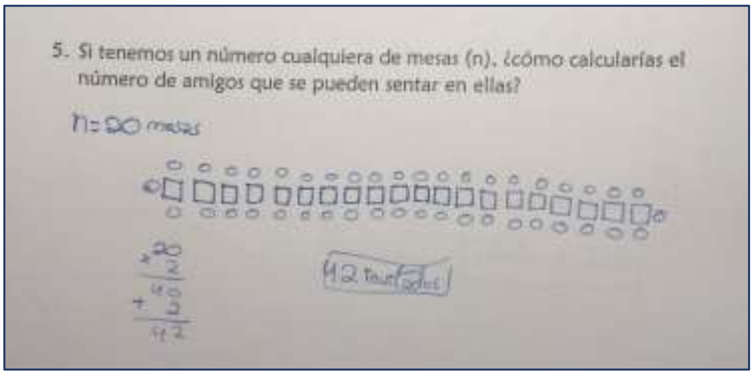


Fuente: Elaboración propia.

Sin embargo, en 6º de Primaria, dado que ya se introduce una cuestión que aborda el empleo de lenguaje algebraico, el error más común ha sido tomar la incógnita 'n' como un número en particular.

Figura 35

Respuesta de un alumno de 6º de Primaria a la cuestión 5 de la actividad 2 correspondiente a dicho curso



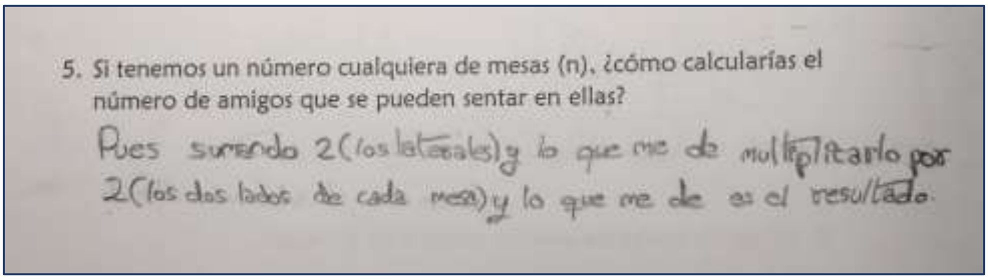
Fuente: Elaboración propia.

Por ejemplo, este alumno da un valor particular a la variable y calcula, utilizando la regla recursiva correctamente, el número de invitados que pueden sentarse.

En este curso destaca la dificultad de comprender el significado de dicha variable para identificar correctamente la regla general del patrón.

Figura 36

Respuesta de otro alumno de 6º de Primaria a la cuestión 5 de la actividad 2 correspondiente a dicho curso



Fuente: Elaboración propia.

El alumno cuya respuesta se ve reflejada en la Figura 36, identifica al revés la regla general. La regla que verbalmente está indicando es la siguiente: $(n + 2) \cdot 2$, que no se corresponde con la correcta: $n \cdot 2 + 2$.

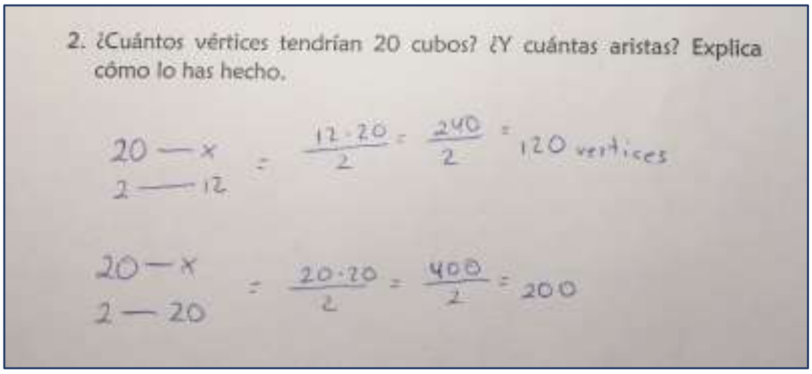
Por otro lado, en los cursos de Secundaria, el error más común es el empleo de proporcionalidad para calcular los términos desconocidos en función de los que ya conocen.

En particular, cabe destacar que un 61% de los alumnos de 2º de ESO han utilizado esta técnica para resolver la segunda cuestión de la actividad 3 correspondiente a dicho curso.

En el caso mostrado en la Figura 37, el alumno toma como referencia el número de vértices y aristas que tienen dos cubos (datos proporcionados en el enunciado) para calcular el número de vértices y aristas que tienen 20 cubos.

Figura 37

Respuesta de un alumno de 2º de ESO a la cuestión 2 de la actividad 3 correspondiente a dicho curso



Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a las dificultades observadas por los alumnos durante el proceso de resolución de las actividades, la más frecuente ha sido la interpretación de la variable $'n'$ como una incógnita, así como utilizar un modelo de proporción directa para encontrar los términos más lejanos del patrón.

Además, la mayoría de los estudiantes mostró dificultades en las cuestiones que tenían como objetivo el uso de un pensamiento inverso. En estos casos, para su resolución, también han utilizado proporcionalidad.

3.4.5. EVALUACIÓN Y REFLEXIÓN

A pesar de que, en la mayoría de las actividades propuestas, tan solo una minoría de alumnos responde de manera correcta a las cuestiones, han utilizado una amplia gama de estrategias y representaciones que se van a analizar a continuación.

En primer lugar, observando las gráficas correspondientes a las actividades (ver también Anexo A. 2 y A. 3), se puede deducir que la única actividad que se ha ajustado en su totalidad al nivel cognitivo de todos los alumnos ha sido la primera.

Si observamos las gráficas de la “Evolución del nivel de algebrización predominante en cada curso” de la actividad 2 y de la actividad 3, el nivel que predomina en la mayoría de los cursos es el cero.

Esto puede estar relacionado con la dificultad o la demanda cognitiva que requieren las actividades, es decir, quizás no se ajustan al nivel correspondiente de los alumnos a los que va dirigida. De este modo, una vez observadas las respuestas, se pueden reajustar las cuestiones y adaptarlas a las necesidades de los alumnos para casos futuros.

Cabe destacar que en el curso de 3º de ESO, se encuentran alumnos con hasta cuatro niveles de algebrización distintos. Por ejemplo, si nos fijamos en la gráfica antes mencionada de la actividad 3, hay alumnos que resuelven la cuestión con un nivel cero de algebrización y otros con un nivel cuatro de algebrización. En esta misma actividad, lo mismo sucede con los alumnos de 4º de ESO.

De esta manera, según lo observado en la resolución de las tareas de generalización de patrones propuestas, se puede concluir que la actividad matemática de la mayoría de los alumnos de 5º y 6º de Primaria se ubica entre los niveles cero y uno de algebrización.

La actividad matemática de los alumnos de 1º y 2º de ESO se encuentra entre los niveles cero, uno y dos de algebrización, llegando en algunos casos, los alumnos de segundo curso, a un nivel tres de algebrización.

En 3º de ESO se localiza en los niveles cero, uno y dos de algebrización, obteniendo en una minoría de casos un nivel tres o cuatro de algebrización. Y, por último, en 4º de ESO, el pensamiento algebraico de los alumnos se ubica entre un nivel dos, tres y cuatro de algebrización.

Se observa una clara evolución del razonamiento algebraico, pero, en esta pequeña investigación, no se cumplen los niveles de algebrización establecidos por Godino et al. (2014) para las distintas etapas educativas. Para estos autores, del nivel cero al tercero permite describir el álgebra escolar identificando formas de razonamiento algebraico en prácticas operativas y discursivas en Educación Primaria, y del cuarto al sexto nivel en Educación Secundaria.

Además, añaden que, aunque los primeros niveles también están presentes en Educación Secundaria, los alumnos logran el dominio del tercer nivel en 1º de ESO. Sin embargo, según lo observado, dicho nivel se lograría en 2º y 3º de ESO. Los niveles del cero al dos (en pocos casos de Secundaria el nivel tres) se englobarían desde la etapa de Primaria hasta 3º de ESO, y ya es en 4º de ESO donde estarían más presentes los niveles tercero y cuarto.

Por otro lado, atendiendo a las soluciones proporcionadas por los alumnos, destaca la utilización de técnicas de conteo, sobre todo, en los cursos de Educación Primaria. Los conteos son usados generalmente al iniciar el desarrollo de las tareas y a través de ellos establecen la relación de aumento entre los elementos de una figura y otra consecutiva.

Estas técnicas de conteo y recursiva son útiles para describir términos cercanos de la secuencia, pero se ha comprobado que son difíciles de aplicar en generalizaciones lejanas, como revelaron algunos estudiantes. Tratar de resolver cuestiones de generalización lejana a través del conteo es un proceso exhaustivo y puede llevar a realizar representaciones desorganizadas y complejas, siendo un obstáculo para percibir la estructura del patrón.

Asimismo, en la etapa de Primaria también predomina la representación verbal de las soluciones, lo que hace cobrar importancia a otras formas de expresar la generalización diferente a la algebraica. A la vista de los resultados, se puede pensar que la generalización verbal es una forma más accesible para estos estudiantes que la algebraica.

En los cursos de Secundaria, pese a la presencia del sistema de representación gráfico en los enunciados de las actividades, la mayor parte de los alumnos que generalizan, trabajan previamente en el sistema de representación numérico. A pesar de ello, comienzan a hacer uso de símbolos y, en algunos casos, son capaces de expresar la regla general algebraicamente. Es decir, tratan la indeterminación y la analiticidad de forma más explícita.

El trabajar estrictamente en contextos numéricos impide que los estudiantes entiendan el mal uso del razonamiento proporcional. Cuando los alumnos observaron que en algunas cuestiones el conteo no era factible, optaron por generalizar usando una de las relaciones más simples que se aplican en situaciones de proporción directa. Y nada más lejos de la realidad, ya que ninguno de los patrones presentados encaja al modelo de proporción directa.

Además, muchos estudiantes mostraron dificultades en las cuestiones de relación inversa. En su mayoría, no han sido capaces de realizar las operaciones inversas y para su resolución han aplicado estrategias alternativas como adivinar o comprobar la respuesta, utilizar la cuestión anterior y/o utilizar proporcionalidad.

En conclusión, reflexionando sobre los posibles factores que pueden haber influido en el razonamiento algebraico de los alumnos, destacamos aspectos principalmente relacionados con la estructura de las tareas:

1. Todas las actividades incluían preguntas cerradas de generalización cercana y lejana.
2. La magnitud de los valores asignados a las variables influyó en el tipo de estrategias aplicadas y, en general, los estudiantes utilizaron distintas estrategias para abordar estas situaciones.
3. Algunas tareas presentaban cuestiones que tratan la relación inversa.
4. La estructura del patrón, ya que, por ejemplo, la relación recursiva en patrones no lineales no es tan evidente como en patrones lineales.

A partir del análisis de los datos, se puede concluir que el estudio de patrones, a través de secuencias numéricas o geométricas, ha aportado elementos importantes para el desarrollo algebraico de los estudiantes; llevándolos a analizar elementos del patrón, establecer una regla general, encontrar términos lejanos o generalizar utilizando una letra como variable.

CONCLUSIONES

A continuación, se presentan las conclusiones del Trabajo de Fin de Máster, así como la relevancia que han tenido todas las asignaturas impartidas durante el mismo en la realización del presente trabajo.

ESPECÍFICAS DEL TFM

Actualmente, el pensamiento algebraico está inmerso en numerosos estudios e investigaciones debido a las problemáticas encontradas en el proceso de enseñanza – aprendizaje. En particular, muchos de ellos muestran las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes en la transición de Primaria a Secundaria.

Entre las principales teorías que sustentan los procesos algebraicos se encuentra la Teoría Antropológica de la Didáctica, que propone un Modelo Epistemológico de Referencia del Álgebra en Educación Secundaria, y el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemático. Este último aporta diversos criterios para delimitar los distintos niveles de algebrización en las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas en Educación Primaria y Secundaria.

Son numerosos los investigadores que han realizado estudios en base a esta problemática. De hecho, en la actualidad, muchos abordan la necesidad de introducir en Educación Primaria algunas ideas o pensamientos algebraicos. Por ejemplo, Aké (2003) sintetiza algunas de las características del razonamiento algebraico elemental que motivan la posibilidad y el interés de su desarrollo desde los primeros niveles educativos.

Otros, promueven la generalización de patrones como forma de desarrollar el pensamiento algebraico. En concreto, Ramírez (2017) en su estudio pretende delimitar el nivel de generalización aritmético – algebraico que desarrollan los estudiantes de 2º de ESO y Merino (2012) en alumnos de 5º de Primaria.

En Socas (2011) se puede encontrar un análisis de variedad de estudios que se han desarrollado a nivel internacional en Álgebra y las aportaciones que deben ser consideradas para un mejor desarrollo del currículo en dicha área.

Con todo lo anterior, el objetivo principal de este trabajo era conocer la evolución del pensamiento algebraico de los alumnos en las etapas de Primaria y Secundaria a través de la resolución de tareas de generalización de patrones para, por un lado, delimitar el nivel de algebrización que desarrolla cada uno de ellos y, por otro lado, identificar los principales errores y dificultades.

Tras realizar el estudio sobre el pensamiento algebraico en la transición de Primaria a Secundaria y llevar a cabo una pequeña investigación sobre un grupo de alumnos que se encuentran en esas etapas, podemos destacar diversos aspectos.

Tal y como muestran los resultados presentados, las tareas que involucran la exploración de patrones geométricos, promueven el surgimiento de múltiples estrategias de generalización, potenciando el desarrollo de un razonamiento algebraico más flexible.

En primer lugar, si nos fijamos en la forma de establecer la regla que define un patrón, la mayoría de los estudiantes emplean una representación pictórica, verbal y numérica, utilizando en algunos casos un lenguaje simbólico – literal. La mayoría de las justificaciones se expresan verbalmente, utilizando las cuestiones anteriores y/o a partir de dibujos.

Asimismo, se ha observado una clara evolución del razonamiento algebraico a lo largo de los distintos cursos que han participado en el estudio. El nivel de generalización aritmético – algebraico que han desarrollado los alumnos de 5º y 6º de Primaria es cero o uno, es decir, ausencia de razonamiento algebraico o un acercamiento incipiente.

Los alumnos de 1º y 2º de ESO, han desarrollado, en algunos casos, hasta un nivel dos de algebrización, es decir, algunos logran un acercamiento intermedio de razonamiento algebraico. Sin embargo, los alumnos de 3º de ESO desarrollan niveles muy parecidos y algún estudiante desarrolla un nivel tres o cuatro de algebrización.

Por último, el nivel de algebrización que han obtenido la mayoría de los alumnos de 4º de ESO ya se encuentra en dos, tres o cuatro, es decir, acercamiento intermedio o formas consolidadas de razonamiento algebraico.

Es preciso mencionar que, al ser una investigación reducida a un número muy pequeño de participantes, los datos no son suficientes para generalizar estos niveles. De esta forma, se dejan abiertas posibles líneas de investigación, por ejemplo, a partir de más ciclos, acerca de los niveles algebraicos que pueden llegar a desarrollar los alumnos de cada etapa educativa.

A pesar de que los estudiantes no han desarrollado todas las estructuras cognitivas y matemáticas para comprender la complejidad del pensamiento algebraico, considero que serían capaces de lograrlo con una secuencia didáctica de tareas que se ajuste a sus necesidades y que esté enfocada a ir superando las dificultades encontradas.

Atendiendo a lo anterior, coincido con Kieran (2004) y otros autores, en que el inicio temprano del estudio del álgebra en el currículo de Matemáticas podría ser favorable para los estudiantes. Más aún, si se hace a partir de la generalización de patrones, ya que es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela.

Por ello, a la hora de formular o seleccionar tareas con patrones, los docentes deben tener en cuenta una amplia variedad de factores que pueden influir en el desarrollo de las habilidades o destrezas cognitivas de los alumnos. Incluyendo todos estos aspectos a la hora de planificar el trabajo en el aula.

En particular, en este trabajo se ha presentado una propuesta de tareas de generalización de patrones, así como una rúbrica de evaluación de los niveles de algebrización como herramienta de análisis de dichas tareas en Educación Primaria y Secundaria, dejando abiertas posibles líneas de investigación para un futuro.

Con la finalidad de continuar este estudio se proponen otras líneas de investigación como, por ejemplo, desarrollar más ciclos de la Investigación Basada en Diseño, llevar a cabo dicha investigación en otros centros educativos u observar de qué manera se enfrenta un alumno a las diferentes tareas propuestas.

GENERALES DEL MÁSTER

Con este trabajo finalizo mi etapa en el Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. En él he adquirido los conocimientos psicopedagógicos y didácticos en torno a los procesos de enseñanza, desarrollo y evaluación del proceso de aprendizaje de los alumnos y diseño tanto del currículo como de los documentos que se quieran implantar en el centro docente.

Además, las prácticas docentes realizadas en un colegio han cobrado mucho significado e importancia no solo para desempeñar mi futura profesión y aprender de primera mano la labor de un docente, sino también para la realización de este estudio.

En cuanto a los aspectos teóricos recibidos en el Módulo genérico: Psicopedagógico y Social, me han ayudado a tener una base sólida acerca del sistema educativo, el centro escolar, el desarrollo evolutivo de los alumnos, las estrategias de enseñanza – aprendizaje, etc.

En particular, los conocimientos aprendidos en la asignatura “Aprendizaje y desarrollo de la personalidad” me han servido para diseñar una propuesta de actividades que se ajuste a las necesidades educativas y al desarrollo cognitivo de los alumnos en cada etapa educativa. Además, han contribuido a lograr la motivación adecuada del alumnado en las distintas intervenciones.

Por otro lado, se detallan los conocimientos adquiridos en cada una de las asignaturas del Módulo Específico de Matemáticas y su didáctica, relacionados con los contenidos curriculares, la didáctica y la innovación e investigación, y que se han tenido en cuenta para el desarrollo del presente trabajo.

Complementos de Matemáticas.

Esta asignatura me ha ayudado para conseguir un dominio de los contenidos teórico-prácticos de Matemáticas que se cursan en la ESO y Bachillerato desde una perspectiva superior. En particular, en el área de álgebra, campo en el que se desarrolla mi trabajo.

Modelos Matemáticos en Educación Secundaria

Con esta asignatura he adquirido conocimientos de modelos matemáticos para motivar y ejemplificar las clases teóricas, así como de identificar la presencia de las matemáticas en distintos entornos multidisciplinares.

Asimismo, he aprendido a buscar, obtener, procesar y comunicar información sobre el pensamiento y los procesos algebraicos para aplicarlos en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este caso, en las etapas de Educación Primaria y Educación Secundaria.

Resolución de Problemas en Educación Secundaria

En dicha asignatura he aprendido, por un lado, a enunciar actividades de tipo algebraico utilizando un lenguaje preciso y adaptado a cada etapa educativa y, por otro lado, a utilizar diversas estrategias para resolver dichas tareas.

Diseño Curricular en Matemáticas

Con el conocimiento adquirido en esta asignatura he podido diseñar las actividades transformando los currículos correspondientes a cada etapa educativa en tareas evaluables que se puedan implementar en el aula. Además, se ha desarrollado una rúbrica que permite evaluar el nivel de algebrización de cada alumno.

Metodología y Evaluación en Matemáticas

Esta asignatura me ha servido para conocer y desarrollar metodologías didácticas atendiendo tanto a la diversidad del alumnado como a los recursos disponibles del centro. También me ha permitido entender la evaluación como un instrumento de aprendizaje, utilizando técnicas para estimular el esfuerzo y la motivación en el alumnado.

Didáctica de la Matemática

Gracias a los conocimientos impartidos en esta asignatura, he sido capaz de investigar y analizar el desempeño que tiene el área del álgebra dentro de la enseñanza de las matemáticas para poder mejorar mi docencia.

Además, me ha servido para identificar los principales problemas y dificultades que muestran los alumnos en la resolución de las tareas propuestas con el fin de plantear alternativas docentes para mejorar su aprendizaje en este campo.

Innovación Docente en Matemáticas

En esta asignatura he aprendido a dar importancia al valor formativo que tienen las Matemáticas para el desarrollo del razonamiento algebraico, abstracción e intuición de los estudiantes en las distintas etapas educativas.

Asimismo, ha despertado mi interés en conocer la evolución del pensamiento algebraico en la transición de Primaria a Secundaria con el fin de aplicar propuestas docentes innovadoras que mejoren el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas

Considero que, a partir de los conocimientos aprendidos en esta asignatura, he adquirido la capacidad investigadora suficiente para planificar y desarrollar propuestas de tareas de investigación a partir del empleo de herramientas de búsqueda de información y bases de datos.

Por último, me ha ayudado a diseñar el presente trabajo de investigación definiendo los elementos característicos del mismo y teniendo en cuenta las principales teorías y modelos de los procesos algebraicos como ámbito científico de investigación.

BIBLIOGRAFÍA

ACARA (2015). The Australian Curriculum: Mathematics. Recuperado el 23 de mayo de 2022, de https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Aké, L.P., Godino, J. D., y Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. Unión. Revista Iberoamericana de educación matemática. 33, 39-52.

Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016). El uso de los problemas de patrones geométricos para la introducción del álgebra en educación primaria. *XII Jornades d'Educació Matemàtica. Comunicacions.*

Ávila, M. S., López, C. y Luna, J. (2010). La generalización de patrones cuadráticos: un estudio con alumnos de licenciatura en matemáticas. CULCyT. *Cultura científica y tecnológica*. 40, 34-40.

Barbosa, A. y Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network.* 10, 57-70.

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En Fernández, C., Molina, M. y Planas, N. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153- 162). Alicante: SEIEM.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2005) Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36* (5), 412 – 446.

Bosch, M., García, F.J., Gascón, J., y Ruíz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18* (2), 37-74.

Cajaraville, J. A., Cachafeiro, L., Fernández, T., Ferro, y Salinas, M. (2012). Problemática Didáctica del estudio del álgebra en Educación Secundaria. Santiago de Compostela: Imprenta Universitaria.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives. Berlín, Alemania: Springer

Callejo, M. J., García-Reche, A., y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 5 – 25.

Cañadas, M.C, Castro, E., y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137-151.

Castro, E. (1999). Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Actas del III (pp. 113-116) SEIEM: Valladolid.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM

Castro, E, Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO,* 54, 55-67.

Castro, E. y Ruiz, J. F. (2018) Patrones en números figurados. *Aplicación para la enseñanza.* En P. Flores, J. L., Lupiáñez y I. Segovia. (Eds.), *Enseñar matemáticas*. *Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 89-102). Granada: Atrio.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2)*,* 221-226.

Creswell, J.W. (2007). Qualitative inquirí & Research Design. Choosing among five approaches. California, EE.UU.: Sage Publications.

Creswell, J.W. (2013). Indagación cualitativa y diseño de investigación: elección entre cinco tradiciones. Thousand Oaks, CA: Sabio.

Easterday, M. W., Lewis, D. R. y Gerber, E. M. (2014). Desig-Based Research Process: Problems, Phases, and Applications. En *ICLS Proceedings Volume 1* (pp. 317-324).

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. For the Learning of Mathematics, Kingston, 9, 19-26.

Flores, W.O. y Escribano, E.A. (2017). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *Ciencia e Interculturalidad*. *19* (2), 54-64. https://doi.org/10.5377/rci.v19i2.3119

Gallardo, A. y Pizón M. (2000). Semántica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones lineales. Educación Matemática. 12(2), 81-96.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 203-231.

Gascón, J., y Nicolás, P. (2019). Economía, ecología y normatividad en la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática Pesquisa, 21*(4), 36-52. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p036-052 .

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 417-424), Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de Investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, P. M.C, F. García, y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, (pp. 49-68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Recuperado el 24 de mayo de 2022 en http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics. Education*, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae, Revista de Ensino de Ciências e Matemática,* 10, 7-37.

Godino, J.D., Aké, L.P., Gonzato, M., Wilhelmi, M.R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 285 - 294). Jaén: SEIEM

Godino, J.D., Castro, W. F., Aké, L.P. y Wihelmi, M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educaçao Matemática, 26* (42), 483-511.

Godino, J. D. y Font, V. (2000). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros. Universidad de Granada.

Godino, J. D. y Font, V. (2004). Razonamiento algebraico para maestros. En J. D. Godino, (Ed.). Matemática y su didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros (771-826). Recuperado el 24 de mayo de 2002 en http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Neto, T. Wilhelmi, M.R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117 – 142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, Rio Claro (SP)*, *31*(57), 90-113. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., y Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 49-66). Zaragoza: SEIEM.

González, A. (2013). Estudio del Pensamiento Algebraico en los libros de texto venezolanos. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.). VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 1164-1171). Montevideo, Uruguay: SEMUR.

Guerrero, L., y Rivera, A. (2002). Exploration of patterns and recursive functions. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1-4. 262-272.

Healy, L., y Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: Making connections with computers? *Thinking and Learning*, *1*(1), 59 - 84. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0101_3

Kaput, J. J. (2008).What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., Blanton, M.L. y Moreno, L. (2008). Algebra forma symbolization point of view. En J.J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*, (pp. 19-55). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *Proceedings of 8th international congress on mathematical education: Selected lectures*, (pp. 271-290). Sevilla, España: SAEM Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *18*(1), 139-151.

Liang, B. (2013). *Pattern Generalisation in Secondary School Mathematics: Students' Strategies, Justifications and Beliefs and the Influence of Task Features*. [Thesis Submitted for the Degree of Doctor of Philosophy, University of London]

Liljedahl, P. y Zazkis, R. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics*, *49*(3), 379-402.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI: Revista de Educación* (4), 167-179. Recuperado el 24 de mayo de 2022 en http://hdl.handle.net/10272/1912

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N., Bednarz, C., Kieran y L., Lee (Eds), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*, (pp. 65-86). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Módulo nº 2: Patrones y álgebra. Matemática. Guía didáctica / 6º Básico. (2013) Ministerio de Educación. Gobierno de Chile.

Papic, M. y Mulligan, J. (2005). Preschoolers' mathematical patterning. In The Proceedings of the 28th Mathematical Education Research Group of Australasia Conference. (pp. 609-616).

Munzón, N. R., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo arit-mético y la introducción del álgebra en secundaria. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.). Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 545-556) Lleida: SEIEM.

Munzón, N. R., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. REDIMAT, 4(2), 106-131.

NCTM (2000). Principios y estándares 2000. Reston VA: NCTM. Traducción, M. Fernández (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales), 2003.

ORDEN EDU 362/2015, 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria y obligatoria en la Comunidad

de Castilla y León. (2015). Boletín Oficial de Castilla y León, 32190-32231.

ORDEN EDU 26/2016, 21 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación primaria en la Comunidad de Castilla y León. (2016). Boletín Oficial de Castilla y León, 34184-34746.

Oteiza, M. (2019). *Enseñanza del álgebra en secundaria: estado actual y propuestas didácticas*. [Trabajo de fin de máster. Universitat de les Illes Ballears]. Repositorio Institucional UIB. http://hdl.handle.net/11201/151008

Pincheira, N y Alsina, Á. (2021, 8 – 10 septiembre). Explorando la demanda cognitiva de tareas matemáticas de búsqueda de patrones diseñadas por futuros profesores de Educación Primaria. En P. D., Diago, D. F., Yáñez, M.T., González-Astudillo y D., Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 489– 496). Valencia: SEIEM.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalisation. En N. Bednarz, C.

Kieran y L. Lee (Eds.), Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching (pp. 107 – 111). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective, PME-NA, 1, 2-21.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2010a). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. PNA, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.). *Early algebraization. Advances in mathematics education* (pp. 303-322).Berlin: Springer-Verlag.

Rivas, M. F. (2021). Niveles de algebrización en las actividades propuestas para la adquisición del lenguaje algebraico en los libros de texto de 1º de Secundaria (EBR, Perú). [Tesis para optar el Titulo de Lincenciado en Educación, Nivel Secundaria, especialidad Matemática y Física. Universidad de Piura.]

Rivera, F. D., y Becker, J. R. (2005). Figural and numerical modes of generalising in algebra. *Mathematical Teaching in the Middle School*, *11*(4), 198 - 203.

Rivera, F. D., y Becker, J. R. (2007). Abduction-induction (generalisation) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behaviour*, *26*(2), 140 - 155.

Rivera, F. D., y Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematic Education*, *40*(1), 65-82.

Rivera, F. D., y Becker, J. R. (2011). Formation of pattern generalisation involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 323 - 366). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Rojas, P. J., y Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista científica*, 2, 688-694. https://doi.org/10.14483/23448350.7753

Socas, M. M. (2001). Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. En C., Matías, F., Pablo y B., María Pilar (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Socas, M. M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didácticas de las Matemáticas, 77,* 5-34. Recuperado el 24 de mayo de 2022 en http://www.sinewton.org/numeros/

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Steen, L.A. (1988). The Science of Patterns. *Science, 240,* 611-616.

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria*. [Tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.] Repositorio institucional Universidad Distrital. Recuperado el 24 de mayo de 2022 en https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/2608

Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.). *Algebraic Thinking, Grades K-12,* (pp. 328-340). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 97, 51-67

ANEXOS

A. 1. PROPUESTA DE TAREAS DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES

ACTIVIDADES PARA 5º DE PRIMARIA

Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 1

Un grupo de amigos ha decidido jugar a los bolos. En cada tirada, se va a aumentar el número de bolos que tienen que tirar.

1º 2º 3º

De esta forma, en la primera tirada hay 3 bolos, en la segunda tirada hay 5 bolos, en la tercera tirada hay 7 bolos, y así sucesivamente.

1. ¿Cuántos bolos habrá colocados en la 5ª tirada? ¿Qué has hecho para saberlo?

2. ¿Y cuántos bolos habrá colocados en la 10ª tirada? ¿Sabrías resolverlo sin hacer el dibujo?

3. ¿Sabrías expresar el número de bolos que habrá en la n-ésima tirada? Es decir, en la tirada número 'n'.

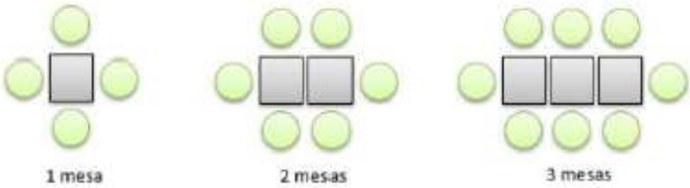
Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 2

Juan ha invitado a su cumpleaños a los compañeros de su clase y sus padres le van a ayudar a colocar las mesas y las sillas. En un principio han pensado en usar mesas cuadradas y colocarlas como en la siguiente imagen:



1. Dibuja 4 mesas juntas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse en 4 mesas?

2. ¿Cuántos invitados pueden sentarse en 5 mesas?

Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 1

Observa como crece la letra T al colocar más círculos.

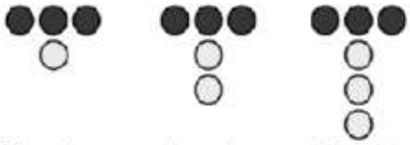


Figura 1 **4 círculos** — **Figura 2** **5 círculos** — **Figura 3** **6 círculos**

1. Dibuja las Figuras 4 y 5.

2. ¿Qué parte de la letra permanece siempre igual? ¿Cuántos círculos tiene?

3. ¿Cuántos círculos aumentan en cada figura?

4. ¿Cuántos círculos oscuros tendrá la Figura 10? ¿Y cuántos círculos grises? ¿Y en total? Explica cómo lo has averiguado.

Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 2

En una clase están jugando a formar, con palillos, figuras cada vez más grandes. El equipo de Lucía ha formado los siguientes cuadrados:

Figura 1 4 palillos | Figura 2 7 palillos | Figura 3 10 palillos

1. Dibuja las Figuras 4 y 5. ¿Cuántos palillos tiene cada una de ellas?

2. ¿Cuántos palillos tendrá la Figura 10?

3. ¿Cuántos palillos tendrá la Figura 20? Explica cómo lo has hecho.

Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 1

Dada la siguiente secuencia de números:

78. 560, 77.560, …, …, 74.560, 73.560,

1. Rellena los números que faltan.

   78. 560, 77.560, __________, __________, 74.560, 73.560,

2. Escribe los dos siguientes números.

3. Escribe la regla general para calcular el siguiente número de un número cualquiera 'n' según la secuencia anterior.

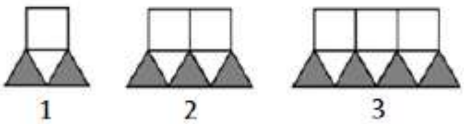
Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 2

Observa el siguiente patrón y responde a las siguientes preguntas:



1. Completa la tabla:

Número de cuadrados blancos	1	2	3	4	20	n
Número de triángulos grises	2	3	4			

2. Describe el patrón que ves.

3. ¿Cuántos cuadrados blancos hay si tenemos 50 triángulos grises?

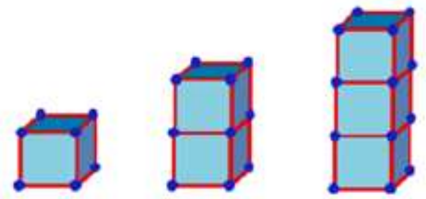
Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 3

Carla y sus amigos han trabajado en clase con policubos. Los han colocado en vertical, de la siguiente manera:



1 cubo
8 vértices
12 aristas

2 cubos
12 vértices
20 aristas

3 cubos
16 vértices
28 aristas

1. Dibuja 4 cubos y cuenta el número de vértices y aristas.

2. ¿Cuántos vértices tendrían 20 cubos? ¿Y cuántas aristas? Explica cómo lo has hecho.

3. Escribe una regla para calcular el número de vértices sabiendo el número de cubos (n) y otra para hallar el número de aristas.

4. Intenta escribir la regla algebraicamente. ¿Cómo hallarías el número de vértices en 'n' cubos? ¿Y de 'n' aristas?

5. ¿Cuántos cubos necesitaríais para formar una estructura con 44 vértices? ¿Y con 44 aristas?

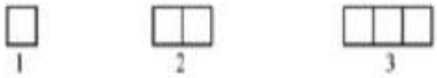
Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 1

Observa la siguiente secuencia:

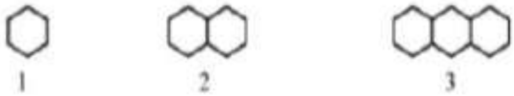


1. ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar 4 cuadrados?

2. ¿Y para formar 5 cuadrados?

3. ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar 'n' cuadrados?

Ahora, como vemos en la siguiente figura, se necesitan 6 segmentos para construir un hexágono, 11 segmentos para construir dos hexágonos y 16 para construir 3 hexágonos, colocados de la siguiente manera:



1. ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar 4 hexágonos?

2. ¿Y para formar 5 hexágonos?

3. ¿Cuántos segmentos se necesitan para formar 'n' hexágonos?

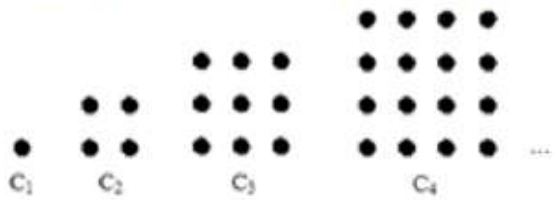
Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 2

Observa la siguiente secuencia y contesta a las siguientes cuestiones:



Como se observa en la figura anterior, en el primer término hay un punto, en el segundo término 4 puntos, en el tercer término hay 9 puntos y en el cuarto término hay 16 puntos.

1. ¿Sabrías decir cuántos puntos hay en el quinto, sexto y séptimo término de la secuencia?

2. ¿Podrías escribir una regla general para el n-ésimo término?

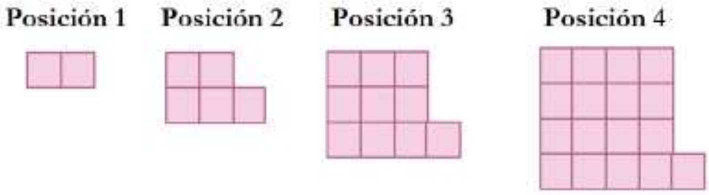
Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 3

Observa la siguiente tabla:



1. Realiza una tabla de valores que relacione el número de la posición con la cantidad de cuadrados dada.

2. ¿Cuántos cuadrados habrá para la quinta posición?

3. Describe la regla general que sigue el patrón anterior.

4. Si tengo 50 cuadrados, ¿En qué posición estoy?

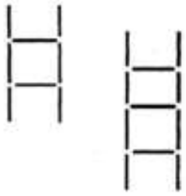
Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 1

Observa la siguiente figura:



2 peldaños 3 peldaños

Si nos fijamos, para hacer una escalera de 2 y 3 peldaños se necesitan 8 y 11 barras respectivamente.

1. ¿Cuántas barras se necesitan para hacer el mismo tipo de escalera con 4 peldaños?

2. ¿Y para hacer una escalera de 5 peldaños?

3. Si sabemos que se necesitan 335 barras para hacer una escalera de 111 peldaños, ¿cuántas barras se necesitarán para hacer una escalera de 112 peldaños?

4. ¿Sabrías escribir la regla general para formar una escalera con 'n' peldaños?

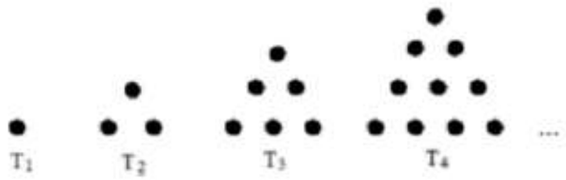
Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 2

Observa la siguiente secuencia y contesta a las siguientes preguntas:



Como se observa en la figura anterior, en el primer término hay un punto, en el segundo término 3 puntos, en el tercer término hay 6 puntos y en el cuarto término hay 10 puntos.

1. ¿Sabrías decir cuántos puntos hay en el quinto, sexto y séptimo término de la secuencia?

2. ¿Podrías escribir una regla general para el n-ésimo término?

Colegio La Inmaculada Misioneras
Misioneras Seculares de Jesús Obrero
Curso 2021/2022

Iniciales del nombre y apellidos:

Curso:

Actividad 3

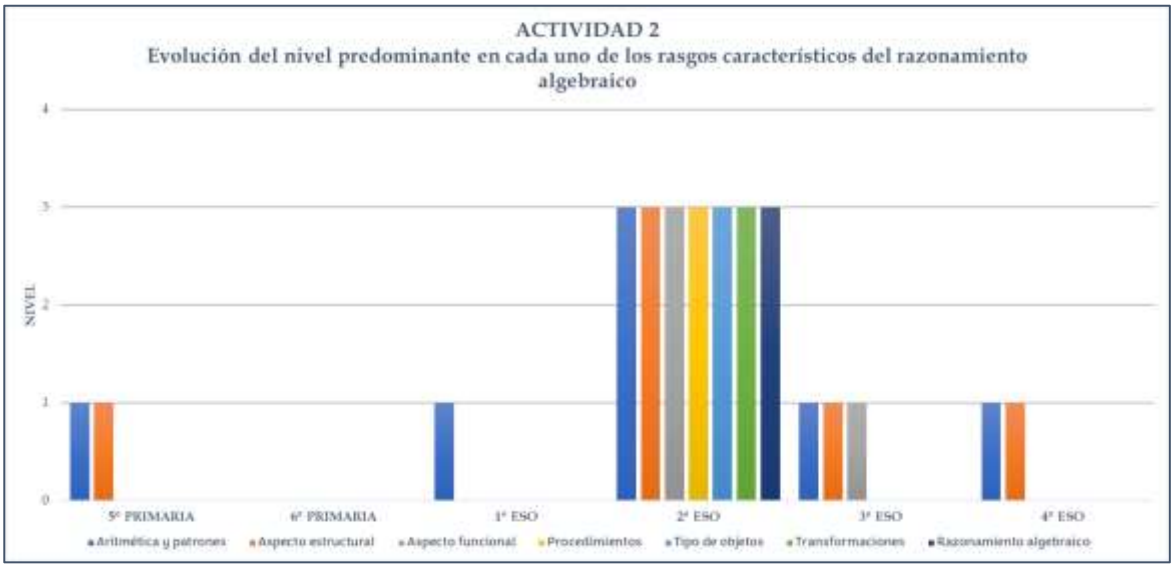
Observa la siguiente imagen:

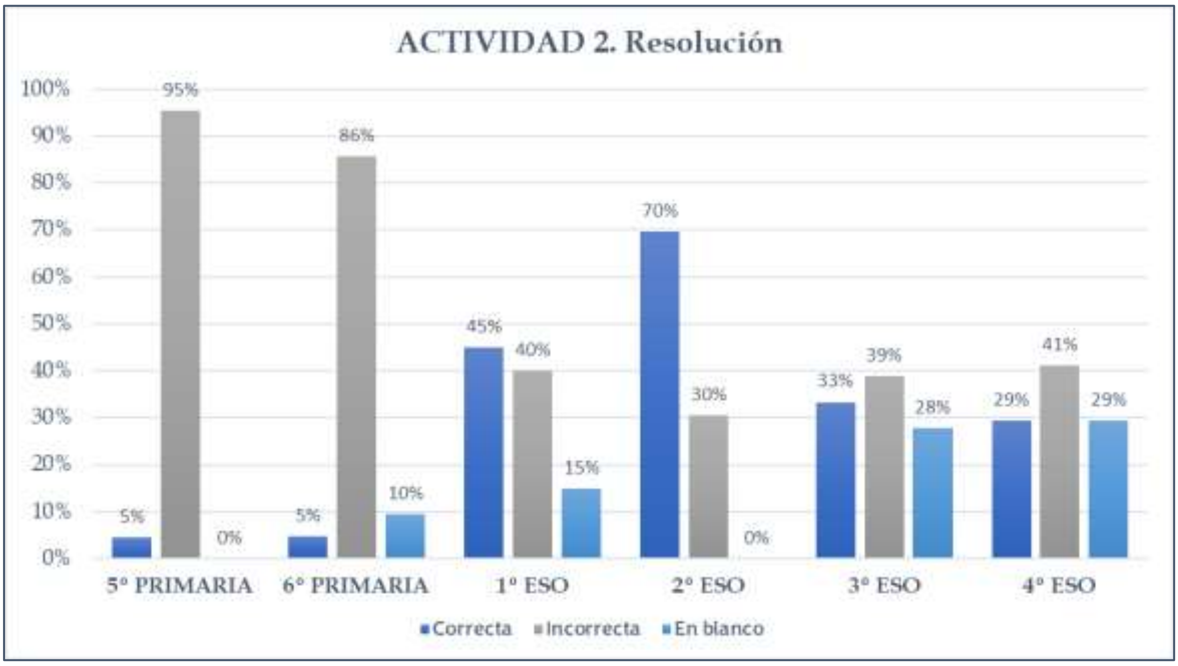
1 2 3

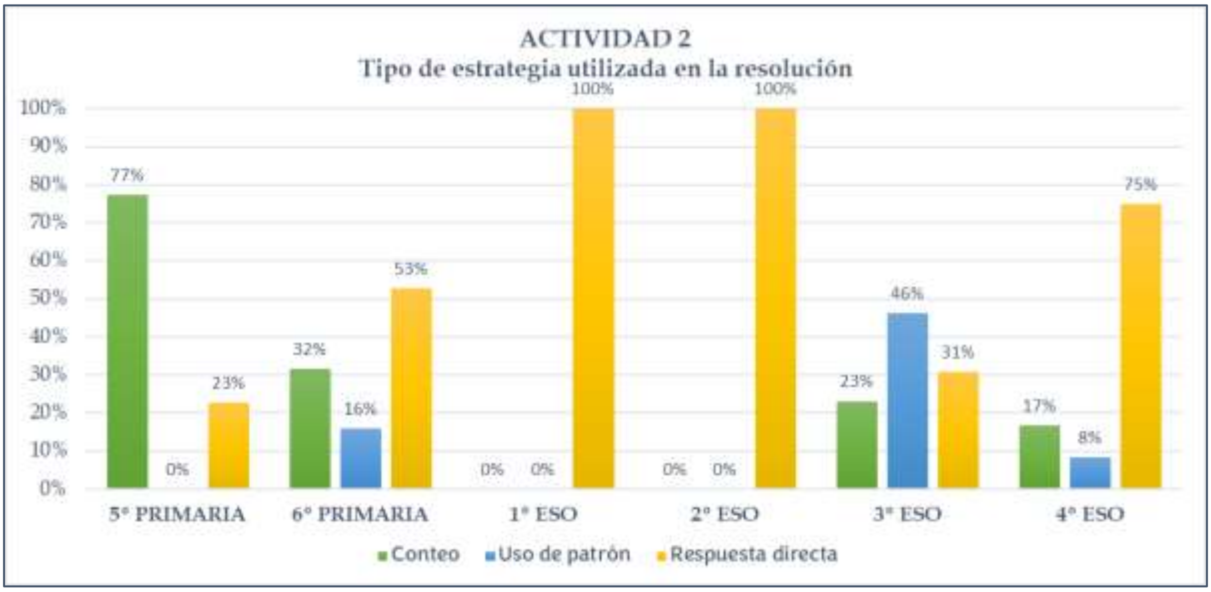
1. Dibuja las dos siguientes figuras.

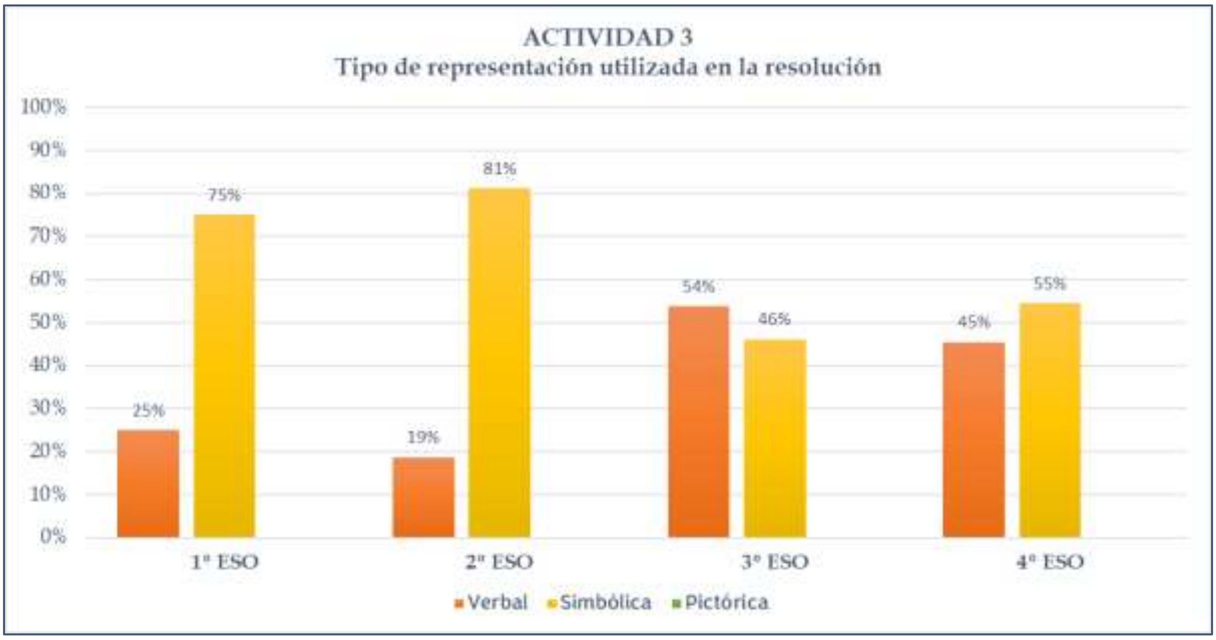
2. Escribe una ecuación (regla general) que se pueda usar para definir cualquier figura.

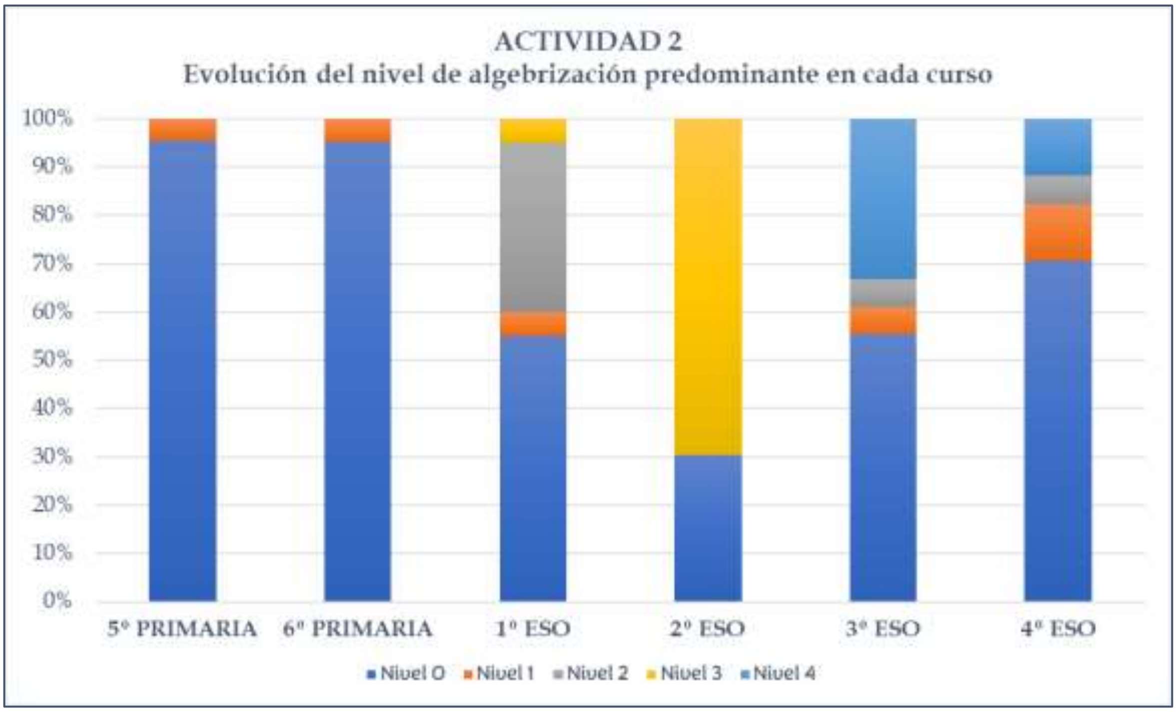
A. 2. GRÁFICAS CORRESPONDIENTES AL ANÁLISIS DE DATOS DE LA ACTIVIDAD 2



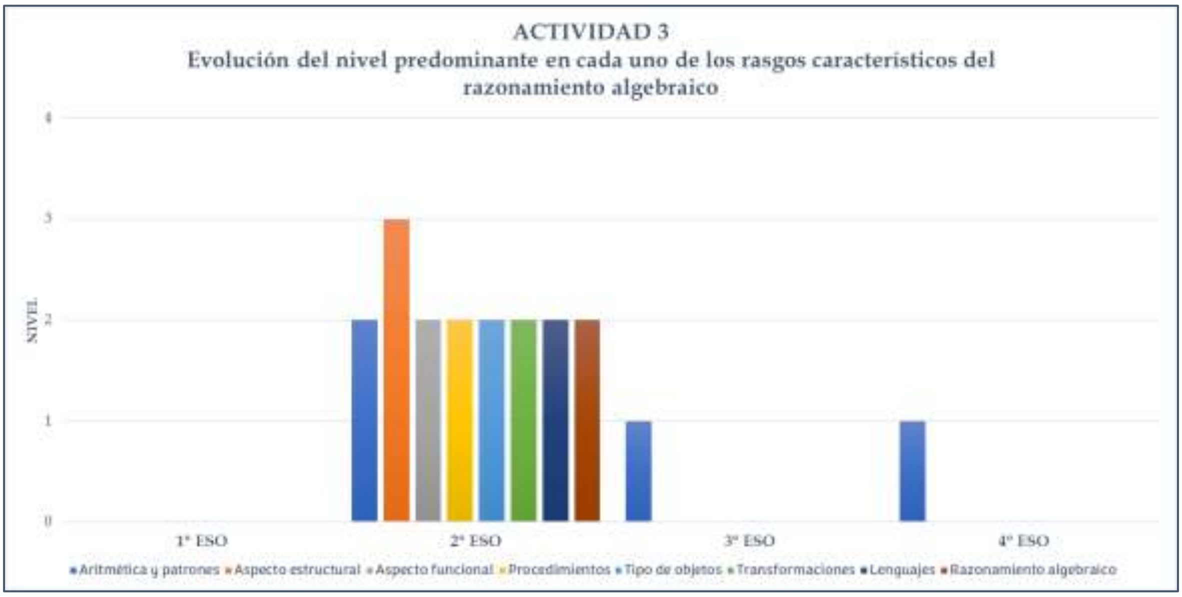


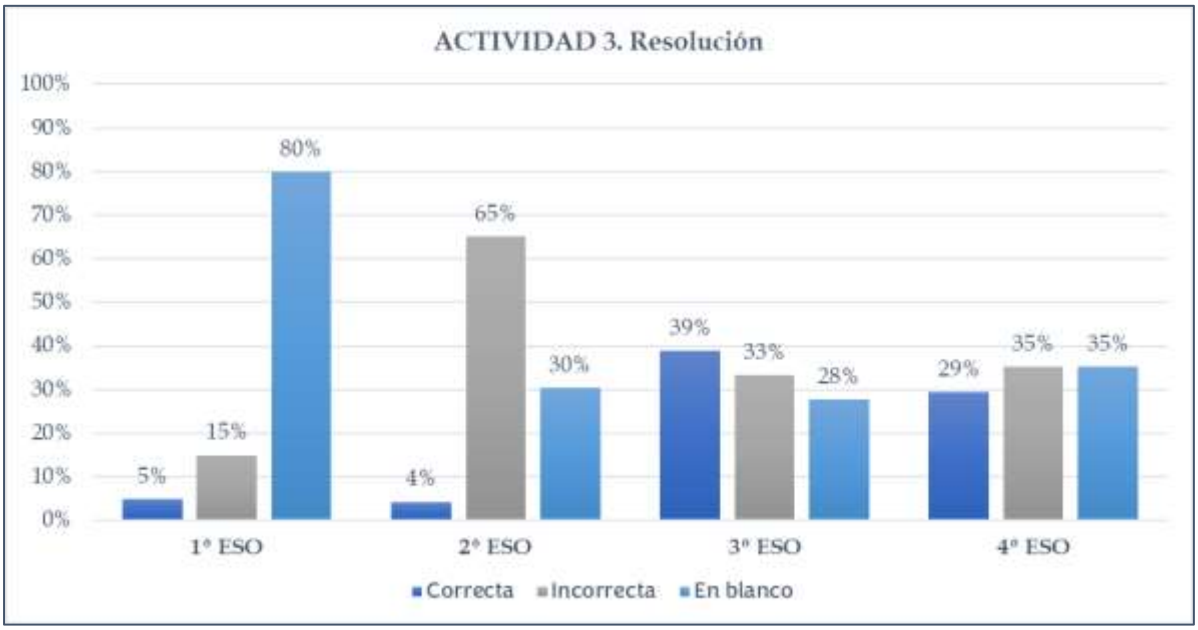

ACTIVIDAD 2
Tipo de estrategia utilizada en la resolución
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
77%
0%
23%
32%
16%
53%
0%
0%
100%
0%
0%
100%
23%
46%
31%
17%
8%
75%
5° PRIMARIA
6° PRIMARIA
1° ESO
2° ESO
3° ESO
4° ESO
Conteo
Uso de patrón
Respuesta directa

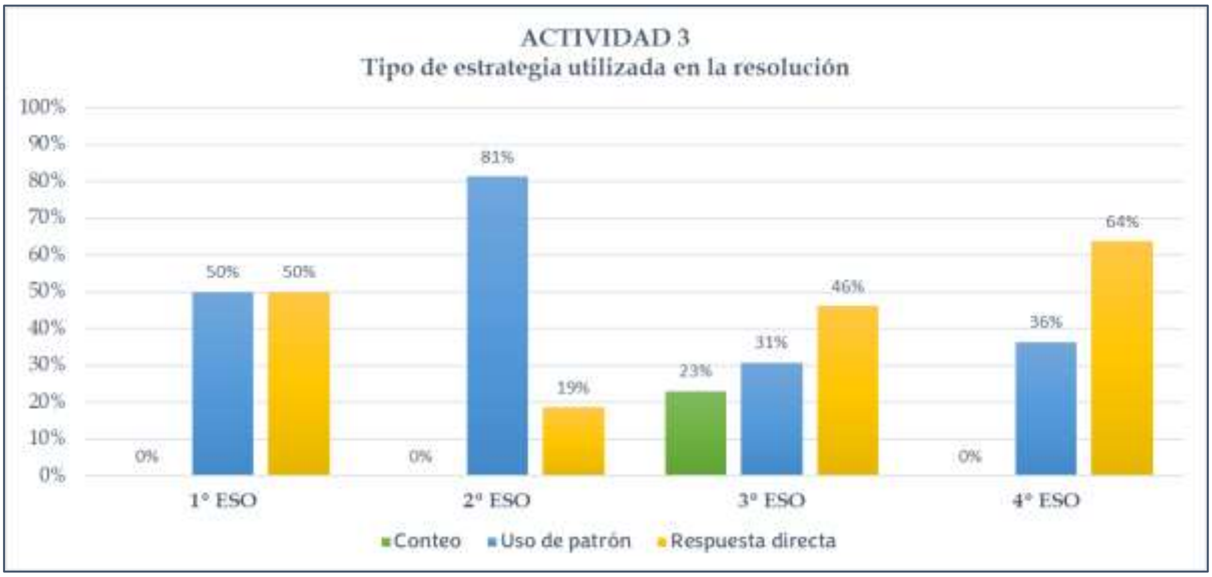

ACTIVIDAD 3
Tipo de representación utilizada en la resolución
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
25%
75%
19%
81%
54%
46%
45%
55%
1° ESO
2° ESO
3° ESO
4° ESO
Verbal
Simbólica
Pictórica

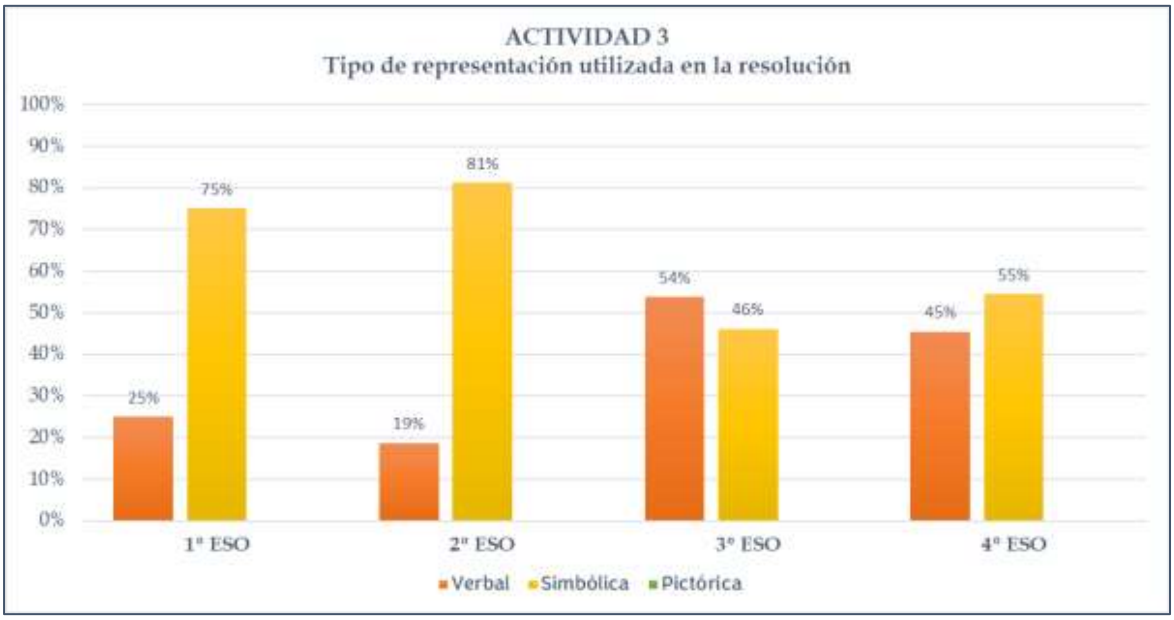

ACTIVIDAD 2
Evolución del nivel de algebrización predominante en cada curso
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
5º PRIMARIA
6º PRIMARIA
1º ESO
2º ESO
3º ESO
4º ESO
Nivel 0
Nivel 1
Nivel 2
Nivel 3
Nivel 4

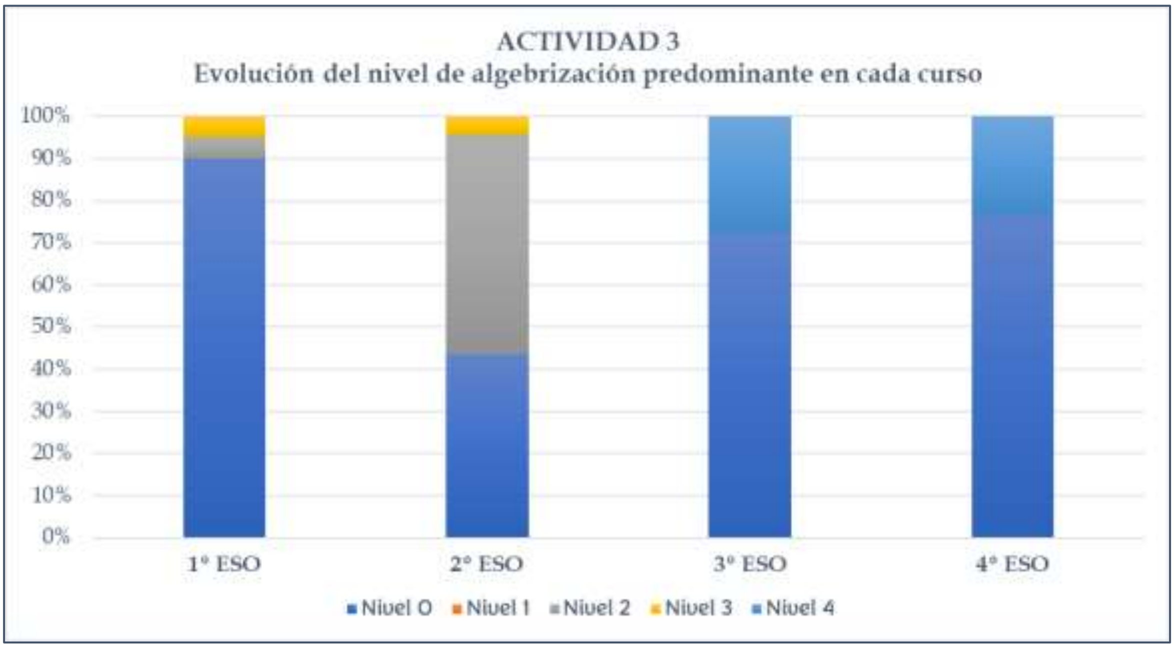
A. 3. GRÁFICAS CORRESPONDIENTES AL ANÁLISIS DE DATOS DE LA ACTIVIDAD 3






ACTIVIDAD 3
Tipo de estrategia utilizada en la resolución
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
0%
50%
50%
0%
81%
19%
23%
31%
46%
0%
36%
64%
1° ESO
2° ESO
3° ESO
4° ESO
Conteo
Uso de patrón
Respuesta directa


ACTIVIDAD 3
Tipo de representación utilizada en la resolución
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
25%
75%
19%
81%
54%
46%
45%
55%
1° ESO
2° ESO
3° ESO
4° ESO
Verbal
Simbólica
Pictórica


ACTIVIDAD 3
Evolución del nivel de algebrización predominante en cada curso
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
1° ESO
2° ESO
3° ESO
4° ESO
Nivel 0
Nivel 1
Nivel 2
Nivel 3
Nivel 4

A. 4. RÚBRICA DE EVALUACIÓN

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Aritmética y patrones	Utiliza correctamente el conteo numérico y dibuja los siguientes casos del patrón establecido. Da expresión numérica para cada uno de ellos.	Es capaz de generalizar a un caso concreto sin utilizar el dibujo o esquema de este, realizando correctamente la aritmética.	Muestra algunas evidencias de que empieza a expresar el caso general con una regla algebraica en función de la incógnita.	Realiza correctamente la abstracción para obtener la regla general del patrón.
Aspecto estructural	No se reconocen propiedades y se utiliza el signo "igual" en su aceptación de resultado de operaciones.	Se comienzan a reconocer propiedades de las operaciones. Se establece una relación genérica entre números y unas propiedades reutilizables de sus operaciones. También se reconoce el significado relacional del signo "igual". Emerge el concepto de equivalencia.	Se comienzan a utilizar propiedades de las operaciones. Emerge el concepto de equivalencia.	Se utilizan propiedades de las operaciones. Utiliza el significado relacional del signo igual.
Aspecto funcional	Se identifica una regla recursiva.	Se reconoce explícitamente la regla recursiva y se generaliza, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.	Se determina un patrón por análisis de términos específicos de una secuencia. Se formaliza expresando una regla general.	Se obtiene la regla general del patrón.
Procedimientos	Los procedimientos utilizados son aritméticos, no indican que se opera con la incógnita.	Los procedimientos utilizados son aritméticos, realizando correctamente los pasos.	Los procedimientos utilizados no indican que se operan con la incógnita, aunque se familiarizan con el uso de símbolos (no alfanuméricos).	Los procedimientos utilizados indican que se operan con la incógnita. Se introducen los elementos simbólicos o alfanuméricos. Sobre todo, el cálculo analítico para obtener formas equivalentes en las expresiones.
Tipos de objetos	Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.	En tareas estructurales, pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales, se reconocen los intensivos (se usan objetos intensivos de segundo grado de generalidad).	Intervienen indeterminadas o variables para referir a los intensivos reconocidos (intensivos de grado 2), aunque ligados a la información de contexto espacial temporal.	Intervienen indeterminadas o variables. Se generan objetos intensivos y se opera con ellos.
Transformaciones	Se opera con objetos intensivos de primer grado (números particulares), es decir, objetos extensivos.	Se aplican relaciones y propiedades genericas de las operaciones con objetos intensivos de primer grado, tanto en tareas estructurales como funcionales.	En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma $Ax\pm B=C$. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de la expresión.	Se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma $Ax\pm B=Cx\pm D$. Se opera con las variables.
Lenguajes	Lenguaje natural, numérico, icónico, verbal o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares.	Lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Usa lenguaje simbólico-literal, pero sin ejecutar las operaciones indicadas con dichos símbolos. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos.	Simbólico-literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.	Simbólico-literal. Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.
Razonamiento algebraico	Ausencia de razonamiento algebraico	Acercamiento incipiente de razonamiento protoalgebraico	Acercamiento intermedio de razonamiento protoalgebraico	Formas consolidadas de razonamiento algebraico

Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6	
Uso de parámetros como registro numérico y para expresar familias de ecuaciones y funciones.	Se realizan cálculos analíticos en los que intervienen uno o más parámetros, conjuntamente con más variables.	Se realizan cálculos analíticos en los que intervienen uno o más parámetros, conjuntamente con más variables.	**Aritmética y patrones**
Se utilizan propiedades de las operaciones. Utiliza el significado relacional del signo igual.	Las operaciones con parámetros, y el establecimiento de relaciones entre ellos, conllevan una complejidad semiótica de mayor nivel, dado que los objetos intervinientes y emergentes de estos sistemas ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel anterior. Son realizadas de manera compresiva y no puramente algoritmica.	Las operaciones con parámetros, y el establecimiento de relaciones entre ellos, conllevan una complejidad semiótica de mayor nivel, dado que los objetos intervinientes y emergentes de estos sistemas ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel anterior. Son realizadas de manera compresiva y no puramente algoritmica.	**Aspecto estructural**
Se obtiene la regla general del patrón.	Se obtiene la regla general del patrón.	Se obtiene la regla general del patrón.	**Aspecto funcional**
Los procedimientos utilizados indican que se operan con la incógnita. Se introducen los elementos simbólicos o alfanuméricos. Sobre todo, el cálculo analítico para obtener formas equivalentes en las expresiones.	Los procedimientos utilizados indican que se operan con la incógnita. Se introducen los elementos simbólicos o alfanuméricos. Sobre todo, el cálculo analítico para obtener formas equivalentes en las expresiones.	Los procedimientos utilizados indican que se operan con la incógnita. Se introducen los elementos simbólicos o alfanuméricos. Sobre todo, el cálculo analítico para obtener formas equivalentes en las expresiones.	**Procedimientos**
Variables, incógnitas y parámetros. Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con tercer grado de generalidad).	Variables, incógnitas y parámetros. Familias de ecuaciones y fucniones (objetos intensivos con tercer grado de generalidad)	Estructuras algebraicas abstractas. Relaciones binarias generales y sus propiedades. (Objetos intensivos de cuarto grado de generalidad)	**Tipos de objetos**
Hay operaciones con variables, pero no con parámetros.	Hay operaciones con parámetros y, por tanto, con objetos con un tercer grado de generalidad.	Hay operaciones con los objetos que forman parte de las estructuras.	**Transformaciones**
Primer encuentro con parámetros y coeficientes de variables.	Simbólico-literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a la información contextual.	Simbólico-literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a la información contextual.	**Lenguajes**
Formas consolidadas de razonamiento algebraico	Formas consolidadas de razonamiento algebraico	Formas consolidadas de razonamiento algebraico	**Razonamiento algebraico**

A. 5. ANÁLISIS DETALLADO DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

ACTIVIDADES DE 5º CURSO DE PRIMARIA

	Actividad 1																							
	Pregunta 4																							
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores		
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	Observaciones
VVN	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1			1					
LRN	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1			1					
CSA	1	1	0	0	0	0	0	0	1						1	1			1					
DDS	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1			1					
IMP	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			1	
EF	1	2	0	0	0	0	0	0	1				1				1		1					
DFF	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1					1		1		1	1	
MJSS	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1			1					
IG	1	0	0	0	0	0	0	0	1					1			1		1					
LFG	1	0	0	0	0	0	0	0	1					1		1			1					
SFG	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				
IPA	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1			1					
MFL	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1			1	
CR	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1		1					
CSF	0	2	0	0	0	0	0	0	1				1				1		1					
DVG	1	0	0	0	0	0	0	0	1					1		1			1					
MMC	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1					1	1					
LSR	1	0	0	0	0	0	0	0	1					1				1	1					
HMH	1	1	0	0	0	0	0	0	1					1		1			1					
HCG	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				
DGD	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1					1	1					
JZG	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1					1	1					
Total	14	6	0	0	0	0	0	0	22	0	0	0	15	5	2	11	6	5	17	5	0	1	3	

	Actividad 2																								
	Pregunta 2																								
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores			
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	3	Observaciones
VVN	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1			1		
LRN	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1						
CSA	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
DDS	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1		1						
IMP	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1					
EF	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1		1					
DFF	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1		1		1	1		
MJSS	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1						
IG	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1			1						
LFG	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1				1	
SFG	0	1	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1						
IPA	0	1	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1						
MFL	1	0	0	0	0	0	0	0	1					1			1		1						
CR	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1					1	1						
CSF	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1		1		1			
DVG	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1						
MMC	0	0	1	1	0	0	0	0	1					1			1		1						
LSR	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
HMH	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1			1		
HCG	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1			1			
DGD	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1		1	
JZG	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1						
Total	2	2	1	1	0	0	0	0	22	0	0	0	8	2	12	2	9	11	12	10	0	4	3	4	

	Actividad 2																								
	Pregunta 3																								
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores			
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	3	Observaciones
VVN	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
LRN	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1		1		1			
CSA	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
DDS	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1		1		1			
IMP	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
EF	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1		1		1			
DFF	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1					1		1		1			
MJSS	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
IG	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			1		
LFG	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1				1	
SFG	0	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
IPA	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
MFL	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1			1		
CR	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
CSF	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1					1		1		1			
DVG	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1					1		1				1	
MMC	1	1	1	1	0	0	0	1		1			1				1		1						
LSR	0	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
HMH	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1			1		
HCG	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
DGD	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
JZG	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1				1	
Total	14	13	1	1	0	0	0	1	21	1	0	0	17	0	5	3	13	6	1	21	0	5	3	13	

	Actividad 1																							
	Pregunta 3																							
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores		
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	Observaciones
CRC	1	1	0	1	0	1	0	1		1			1				1		1					
VSM	0	0	0	1	0	0	0	0	1				1					1	1					
ACY	1	0	0	1	0	0	0	1	1						1	1				1		1		
FMM	2	2	1	1	0	2	0	2			1			1			1		1					
OLD	2	2	1	1	0	2	0	2			1			1			1		1					
LPC	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1		
GDI	2	2	1	1	0	2	0	2			1			1			1		1					
BLC	2	2	1	1	0	2	0	2			1			1			1		1					
JEM	1	0	0	1	0	0	0	1	1				1				1		1					
HGE	2	2	1	1	0	2	0	2			1			1			1		1					
GPR	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1					1	1					
CVA	1	1	1	1	0	0	0	0		1					1	1			1					
EEPH	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1					1	1					
SLL	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1					
ASS	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1					
AMM	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1				
JOF	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1			1	
SPS	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1					
ADLR	1	1	1	1	0	0	0	0		1					1	1			1					
MMA	1	1	1	1	0	0	0	1		1					1	1			1					
SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1					
Total	17	14	8	12	0	11	0	14	12	4	5	0	7	5	9	4	10	7	17	4	0	2	1	

	Actividad 1																								
	Pregunta 4																								
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores			
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	3	Observaciones
CRC	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1					
VSM	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1			1						Por tanteo
ACY	1	0	0	1	0	0	0	1	0						1		1		1						
FMM	0	0	0	0	0	0	0	1	1				1				1			1			1		
OLD	1	2	1	1	0	0	0	1		1			1				1		1						
LPC	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1			
GDI	1	2	1	1	0	0	0	1		1			1				1		1						
BLC	2	3	1	1	0	0	0	2			1		1				1		1						
JEM	1	0	0	1	0	0	0	0	1						1		1		1						
HGE	1	1	0	1	0	0	0	0	1				1				1			1			1		
GPR	1	2	1	1	0	0	0	1		1			1				1		1						
CVA	1	0	0	1	0	0	0	0	1						1		1			1					
EEPH	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1						
SLL	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1	1						
ASS	0	0	0	0	0	0	0	1	1				1				1			1			1		
AMM	1	2	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1					
JOF	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1			1		
SPS	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1					
ADLR	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1					
MMA	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1			1						Por tanteo
SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1				
Total	16	14	4	8	0	0	0	8	16	3	1	0	11	0	9	3	15	2	10	10	1	1	4	0	

	Actividad 1																								
	Pregunta 5																								
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores			
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	3	Observaciones
CRC	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1					
VSM	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1				
ACY	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1		1			1		
FMM	2	0	0	0	0	2	0	2	1						1	1			1						
OLD	1	2	1	1	0	0	0	1		1			1				1			1			1		
LPC	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1			
GDI	2	2	1	1	0	0	0	1		1			1				1			1			1		
BLC	2	0	1	0	0	2	0	2	1						1	1				1				1	
JEM	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1					
HGE	2	1	2	2	1	1	1	2			1				1	1			1						
GPR	2	1	1	1	0	0	0	1		1					1	1			1						
CVA	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1			1		
EEPH	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1				
SLL	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1			1		
ASS	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1				
AMM	2	0	2	0	1	2	2	2			1				1		1			1					
JOF	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1					
SPS	3	2	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1						
ADLR	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1					
MMA	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1				
SRR	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1			1		
Total	17	9	11	8	5	9	6	14	15	3	2	1	4	0	13	9	7	1	4	13	4	1	6	1	

	Actividad 2																							
	Pregunta 2																							
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores		
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	Observaciones
CRC	1	2	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1			1	
VSM	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1		1					
ACY	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1		1					
FMM	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1		1					
OLD	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1			1	
LPC	1	2	1	1	0	0	0	1		1			1				1		1					
GDI	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1			1	
BLC	1	2	1	1	0	0	0	1		1			1				1		1					
JEM	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1				
HGE	2	1	2	1	0	0	0	2			1			1			1		1					
GPR	1	2	1	1	0	0	0	1		1			1				1		1					
CVA	1	2	1	1	0	0	0	1		1					1	1			1					
EEPH	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1		1					
SLL	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1		1					
ASS	1	2	0	1	0	0	0	0	1				1				1			1			1	
AMM	1	2	1	1	0	0	0	1		1			1				1		1					
JOF	1	2	0	1	0	0	0	0	1				1				1			1			1	
SPS	1	0	1	0	0	0	0	1	1						1	1			1					
ADLR	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1				
MMA	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1				
SRR	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1		1					
Total	21	18	8	8	0	0	0	8	15	5	1	0	9	1	11	3	18	0	13	8	0	0	5	

	Actividad 2																							
	Pregunta 3																							
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores		
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	Observaciones
CRC	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1		
VSM	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
ACY	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1		1		
FMM	0	0	1	0	0	0	0	0	1					1		1				1		1		
OLD	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1		
LPC	1	2	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1		
GDI	1	1	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1		
BLC	0	0	0	0	0	0	0	0	1					1		1				1				
JEM	0	0	0	0	0	0	0	0	1					1		1				1				
HGE	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1		1		
GPR	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1				
CVA	0	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1		1		
EEPH	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			1	
SLL	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1		1		
ASS	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
AMM	1	2	1	1	0	0	0	1		1			1				1		1				1	
JOF	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			1	
SPS	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			1	
ADLR	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1				
MMA	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1				
SRR	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1		1		
Total	9	6	2	1	0	0	0	1	20	1	0	0	6	3	10	12	7	0	1	18	2	10	4	

	Actividad 1																							
	Pregunta 3																							
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores		
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	Observaciones
BJC	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
LMS	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
DSA	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
MH	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
GCG	3	3	3	3	3	2	3	3				1		1			1		1					
CPS	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
LRM	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
TFV	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
LHA	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1			1		1		
PSL	1	1	1	1	2	1	2	1		1					1		1			1				
RBL	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
MCL	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
RRA	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
MAL	3	1	1	2	2	2	0	1		1					1	1			1					
TD	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1				
SVA	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1				
LMC	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
MNO	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
BRM	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
MMR	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
Total	39	25	35	26	27	25	25	25	7	2	10	1	0	11	4	3	12	0	8	7	5	1	3	

	Actividad 2																						
	Pregunta 1 y 2																						
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
BJC	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1				1			
LMS	3	1	3	2	2	2	2	2			1				1		1		1				
DSA	2	1	2	1	0	1	1	1		1					1	1			1				
MH	3	1	3	2	2	2	2	2			1				1		1		1				
GCG	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
CPS	1	0	0	0	1	0	0	0	1						1	1				1			
LRM	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
TFV	3	1	3	2	2	2	2	2			1				1		1		1				
LHA	3	1	3	2	2	2	2	2			1				1		1		1				
PSL	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
RBL	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
MCL	3	1	3	2	2	2	2	2			1				1		1		1				
RRA	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
MAL	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
TD	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
SVA	1	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
LMC	1	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
MNO	3	1	3	2	2	2	2	2			1				1		1		1				
BRM	1	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
MMR	3	1	3	2	2	2	2	2			1				1		1		1				
Total	37	12	26	19	18	17	18	18	11	1	7	1	0	0	17	9	8	0	9	8	3	0	

	Actividad 2																						
	Pregunta 3																						
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
BJC	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
LMS	3	3	3	3	3	2	3	2				1		1			1		1				
DSA	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
MH	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
GCG	3	3	3	3	3	2	3	3				1		1			1		1				
CPS	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
LRM	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
TFV	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
LHA	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
PSL	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
RBL	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
MCL	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
RRA	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
MAL	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
TD	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
SVA	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
LMC	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
MNO	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
BRM	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
MMR	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
Total	22	22	6	22	6	4	6	5	18	0	0	2	0	2	18	18	2	0	18	2	0	0	

	Actividad 3																						
	Pregunta 2																						
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
BJC	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1	
LMS	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1			1				
DSA	2	3	2	1	0	1	0	2			1		1				1		1				
MH	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1			
GCG	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
CPS	2	3	2	1	0	1	0	2			1		1				1		1				
LRM	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
TFV	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1			1				
LHA	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1			
PSL	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1	
RBL	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1		1				
MCL	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1			
RRA	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1			
MAL	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1			
TD	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1	
SVA	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1	
LMC	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
MNO	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1	
BRM	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1		1	
MMR	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1	
Total	20	6	4	2	0	2	0	4	18	0	2	0	13	0	5	6	12	0	5	13	2	7	

	Actividad 3																						
	Pregunta 4																						
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
BJC	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
LMS	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
DSA	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
MH	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
GCG	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1			
CPS	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
LRM	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
TFV	3	2	3	3	3	2	3	3				1		1			1		1				
LHA	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
PSL	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
RBL	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
MCL	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
RRA	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
MAL	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
TD	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
SVA	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1		1			1			
LMC	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
MNO	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
BRM	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
MMR	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1		
Total	7	5	5	5	5	4	5	5	18	0	1	1	0	2	2	1	3	0	1	3	16	0	

	Actividad 1																							
	Pregunta 3																							
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores		
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	Observaciones
CSM	3	1	1	2	2	2	0	1		1					1	1			1					
PLL	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1			1		1		
RTE	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
MSL	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
PLM	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
VVJ	3	1	1	2	2	2	0	1		1					1	1			1					
CSY	3	1	1	2	2	2	0	1		1					1	1			1					
ZGI	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1			1		1		
RBS	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
MCA	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
GRH	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
ZPE	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
LAC	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
ABA	0	0	0	0	0	0	0	0	1					1			1			1				
MAI	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1			1		1		
CBA	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
HPN	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1			1		1		
JGA	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
ACA	3	2	3	2	2	2	2	2			1			1			1		1					
SMA	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1				
SAA	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
CAR	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
SSE	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
Total	46	27	39	30	30	30	24	27	8	3	12	0	0	13	4	4	13	0	11	6	6	4	0	

	Actividad 2																						
	Pregunta 1 y 2																						
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
CSM	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
PLL	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
RTE	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
MSL	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
PLM	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
VVJ	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
CSY	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
ZGI	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
RBS	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
MCA	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
GRH	1	0	0	0	1	0	0	0	1						1	1				1			
ZPE	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
LAC	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
ABA	1	0	0	0	1	0	0	0	1						1	1				1			
MAI	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
CBA	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
HPN	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
JGA	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
ACA	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
SMA	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
SAA	3	3	3	3	3	2	3	3				1			1		1		1				
CAR	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
SSE	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
Total	55	48	48	48	50	32	48	48	7	0	0	16	0	0	23	7	16	0	16	7	0	0	

	Actividad 2																						
	Pregunta 3																						
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
CSM	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
PLL	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
RTE	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
MSL	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
PLM	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
VVJ	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
CSY	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
ZGI	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
RBS	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
MCA	3	3	3	3	3	2	3	2				1		1			1		1				
GRH	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
ZPE	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
LAC	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
ABA	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
MAI	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
CBA	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
HPN	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
JGA	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
ACA	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
SMA	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
SAA	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
CAR	1	1	0	1	0	0	0	0	1						1	1			1				
SSE	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1			
Total	25	20	3	20	3	2	3	2	22	0	0	1	0	1	22	22	1	0	18	5	0	0	

	Actividad 3																							
	Pregunta 2																							
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores		
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
CSM	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1		1	
PLL	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1	
RTE	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1		1	
MSL	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1		1	
PLM	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1		1	
VVJ	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1	
CSY	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1		1	
ZGI	2	3	2	1	0	1	0	2			1		1				1		1				
RBS	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1		1			
MCA	2	3	2	1	0	1	0	2			1		1				1		1				
GRH	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1		1	
ZPE	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1	
LAC	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1			1				
ABA	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1		1	
MAI	0	0	0	0	0	0	0	0	1						1			1		1			
CBA	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1			
HPN	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1			1				
JGA	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1			1				
ACA	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1		1	
SMA	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1			1				
SAA	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1			1				1		1	
CAR	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1	
SSE	1	0	0	0	0	0	0	0	1				1				1			1		1	
Total	23	6	4	2	0	2	0	4	21	0	2	0	17	0	6	14	7	2	6	17	0	14	

	Actividad 3																							
	Pregunta 4																							
	Niveles								N. Predom				Estrategia			Representación			Resolución			Errores		
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	Observaciones
CSM	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
PLL	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1		1		
RTE	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1		1		
MSL	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1				
PLM	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1				
VVJ	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1				
CSY	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
ZGI	3	1	3	3	3	2	3	3				1		1			1		1					
RBS	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
MCA	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
GRH	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
ZPE	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
LAC	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
ABA	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
MAI	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
CBA	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
HPN	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
JGA	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
ACA	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
SMA	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
SAA	2	3	2	2	2	2	2	2			1			1			1			1			1	
CAR	0	0	0	0	0	0	0	0	1												1			
SSE	1	0	0	0	0	0	0	0	1						1	1				1		1		
Total	30	37	27	27	27	26	27	27	10	0	12	1	0	13	3	3	13	0	1	15	7	3	9	

	Actividad 1																									
	Pregunta 3b																									
	Niveles								N. Predom					Estrategia			Representación			Resolución			Errores			
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	4	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	2	3	Observaciones
LOE	3	1	2	2	2	2	2	2			1				1			1		1						Igual que en P3a
GGL	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1			1		1			Igual que en P3a
FGL	2	3	2	3	3	2	2	2			1					1	1				1			1		Igual que en P3a
MMI	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1				1					Igual que en P3a
PTR	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1			1		1			Igual que en P3a
CRA	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1				Igual que en P3a
CTD	1	0	0	0	0	0	0	0	1					1				1			1					Igual que en P3a
SMS	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1				1					Igual que en P3a
VSC	2	3	2	3	3	2	2	2			1					1	1				1			1		Igual que en P3a
SRS	0	0	0	0	0	0	0	0	1							1			1		1					Igual que en P3a
STB	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1		1			1					Igual que en P3a
SO	2	3	2	3	3	2	2	2			1					1	1				1			1		Igual que en P3a
GCA	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1				Igual que en P3a
PCA	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1		1			1					Igual que en P3a
LMD	2	3	2	3	3	2	2	2			1				1			1			1				1	Igual que en P3a
EGJ	2	3	2	3	3	2	2	2			1				1			1			1				1	Igual que en P3a
GFD	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1				1					Igual que en P3a
MSR	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1						Perfecto
Total	28	28	24	29	26	21	21	24	9	0	6	0	3	1	6	9	6	9	1	2	14	2	2	3	2	

	Actividad 2																							
	Pregunta 2																							
	Niveles								N. Predom					Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	4	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
LOE	3	1	2	2	2	2	2	2			1				1			1			1			
GGL	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
FGL	2	3	1	1	1	1	1	1		1				1			1				1			
MMI	1	0	1	0	0	0	0	0	1							1	1				1			
PTR	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
CRA	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
CTD	1	0	0	0	0	0	0	0	1					1				1			1			
SMS	2	1	1	0	0	0	0	1	1							1	1			1				
VSC	1	0	1	0	0	0	0	0	1							1	1				1			
SRS	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
STB	1	2	1	1	0	0	0	0	1					1			1				1			
SO	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
GCA	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
PCA	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
LMD	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
EGJ	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1			1			
GFD	3	1	4	4	2	3	1	4					1			1	1			1				
MSR	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
Total	29	28	31	28	20	21	19	28	10	1	1	0	6	3	6	4	6	7	0	6	7	5	0	

Actividad 3

Pregunta 3

	Niveles								N. Predom					Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	4	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
LOE	1	0	1	0	0	0	0	0	1							1	1				1			
GGL	1	0	0	0	0	0	0	0	1					1				1			1		1	
FGL	3	3	3	2	0	0	0	1	1					1			1				1			
MMI	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
PTR	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
CRA	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
CTD	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
SMS	3	4	4	0	0	0	0	4	1							1	1			1				
VSC	1	0	1	0	0	0	0	0	1							1	1				1			
SRS	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1				1			
STB	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1			1				
SO	1	0	0	0	0	0	0	0	1					1				1			1			
GCA	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
PCA	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
LMD	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				Perfecto
EGJ	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				Perfecto
GFD	3	4	4	4	0	0	0	4					1			1	1			1				
MSR	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
Total	27	27	29	22	12	12	12	25	13	0	0	0	5	3	4	6	7	6	0	7	6	5	1	

	Actividad 3																							
	Pregunta 4																							
	Niveles								N. Predom					Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	4	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
LOE	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1			1				
GGL	1	0	0	0	0	0	0	0	1					1				1			1		1	
FGL	3	3	3	2	0	0	0	1		1				1				1		1				
MMI	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1			1				
PTR	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
CRA	3	3	3	2	0	0	0	1	1					1				1		1				
CTD	1	0	0	0	0	0	0	0	1					1				1			1			
SMS	3	3	3	2	0	0	0	1	1					1				1		1				
VSC	3	3	3	2	0	0	0	1	1							1	1			1				
SRS	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1				1			
STB	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1			1				
SO	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
GCA	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
PCA	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
LMD	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				Perfecto
EGJ	3	4	4	4	3	0	3	4					1		1			1		1				
GFD	3	3	3	2	0	0	0	1	1					1				1		1				
MSR	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
Total	33	31	31	26	12	9	12	21	13	1	0	0	4	6	4	5	5	10	0	12	3	3	1	

	Actividad 1																								
	Pregunta 4																								
	Niveles								N. Predom					Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	4	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
CMS	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				Perfecto
CRJ	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
ZGJ	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
BJD	1	3	0	3	4	3	4	0				1				1		1			1		1	
MCM	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
MVO	1	3	0	3	4	3	4	0				1				1		1			1		1	
ACR	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
MAM	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1			1			
SPS	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1			1			
MGL	1	3	0	3	4	3	4	0				1				1		1			1			
LAS	1	3	0	3	4	3	4	0				1				1		1			1			
SSD	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
MBN	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1			1			
PRE	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
MAS	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
RVC	3	0	4	4	3	3	3	4				1			1			1			1			
LMF	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1			1			
Total	31	44	36	48	43	39	43	36	4	0	0	5	8	0	9	4	0	13	0	4	9	4	2	

	Actividad 2																							
	Pregunta 2																							
	Niveles								N. Predom					Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	4	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
CMS	3	4	4	1	0	0	0	3	1							1	1			1				
CRJ	1	1	1	1	0	0	0	1		1						1	1				1			
ZGJ	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
BJD	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
MCM	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
MVO	3	4	4	4	3	3	3	4					1	1					1	1				
ACR	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
MAM	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1			1				
SPS	3	4	4	1	0	0	0	3	1							1	1				1			
MGL	1	2	0	0	0	0	0	0	1					1				1			1		1	
LAS	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
SSD	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1				1		1	
MBN	3	4	4	1	0	0	0	3	1							1	1				1			
PRE	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
MAS	1	0	0	0	1	1	1	1		1						1	1				1			
RVC	3	4	4	1	0	0	0	3	1							1	1			1				
LMF	3	2	2	1	2	2	2	2			1					1	1				1			
Total	26	29	27	14	9	9	9	24	12	2	1	0	2	2	1	9	9	2	1	5	7	5	2	

	Actividad 3																								
	Pregunta 2																								
	Niveles								N. Predom					Estrategia			Representación			Resolución			Errores	
Alumno	AP	AE	AF	P	TO	T	L	RA	0	1	2	3	4	Conteo	Uso de patrón	Respuesta directa	Verbal	Simbólica	Pictórica	Correcta	Incorrecta	En blanco	1	Observaciones
CMS	3	0	3	0	0	0	0	0	1							1	1			1				
CRJ	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1				1			
ZGJ	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				Perfecto
BJD	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
MCM	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
MVO	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1		1			1			
ACR	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
MAM	3	4	4	2	3	3	3	4					1		1			1		1				
SPS	3	4	4	1	0	0	0	3	1							1	1				1			
MGL	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
LAS	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1	1				1			
SSD	1	0	0	0	0	0	0	0	1							1		1			1			
MBN	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
PRE	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
MAS	0	0	0	0	0	0	0	0	1													1		
RVC	3	4	4	1	0	0	0	3	1							1	1				1			
LMF	3	4	4	4	3	3	3	4					1		1			1		1				
Total	25	24	27	16	12	12	12	22	13	0	0	0	4	0	4	7	5	6	0	5	6	6	0	