



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Matemática Aplicada

**Estudio para hacer una programación
dinámica en orden a impartir
matemáticas en Bachillerato haciendo un
estudio de diversas metodologías
dependiendo de los conceptos a impartir.**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación
Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y
Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.**

Alumna: Marta Esteban García

Tutor: Cesáreo Jesús González Fernández

Valladolid, Junio 2022

RESUMEN

El trabajo consiste en el diseño de una programación didáctica en la asignatura de Matemáticas II en segundo de Bachillerato que incorpora dos unidades didácticas elaboradas bajo los marcos teóricos de la Didáctica Matemática: “Límites de funciones y continuidad” y “Aplicaciones de las derivadas”. Los marcos metodológicos vinculados al método expositivo y las propuestas pedagógicas para la enseñanza en Bachillerato. En cada uno de ellos se hace un tratamiento profundo de alguno de los métodos de exposición posible y su idoneidad para los conceptos que se explican en el curso estudiado.

Índice

Introducción	1
1. Programación didáctica	5
1.1. Marco legal.....	5
1.2. Introducción contextual.....	6
1.3. Competencias básicas.....	9
1.4. Objetivos	12
1.5. Contenidos.....	15
1.6. Temporalización.....	19
1.7. Recursos	23
1.8. Metodología	24
1.9. Evaluación.....	27
Evaluación trimestral.	28
Recuperación.....	29
Examen final	30
Convocatoria extraordinaria.....	30
Consideraciones relativas a la evaluación.....	31
1.10. Atención a la diversidad.....	31
1.11. Plan de fomento a la lectura	32
1.12. Actividades complementarias y extraescolares	33
1.13. Evaluación de la programación	33
2. Unidades didácticas.....	35
2.1. Unidad 9. Límites de funciones. Continuidad.....	35
2.1.1. Introducción	35
2.1.2. Contribución a las competencias clave	36
2.1.3. Objetivos	37
2.1.4. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje.....	38
2.1.5. Metodología	43

2.1.6.	Recursos	43
2.1.7.	Temporalización.....	43
2.1.8.	Atención a la diversidad.....	52
2.1.9.	Criterios e instrumentos de evaluación	53
2.2.	Unidad 11. Aplicaciones de las derivadas.....	54
2.2.1.	Introducción	54
2.2.2.	Contribuciones a las competencias básicas	54
2.2.3.	Objetivos	56
2.2.4.	Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje.....	57
2.2.5.	Metodología	65
2.2.6.	Recursos	65
2.2.7.	Temporalización.....	66
2.2.8.	Atención a la diversidad.....	74
2.2.9.	Criterios e instrumentos de evaluación	75
	Conclusiones	77
	Bibliografía	79

Introducción

Este Trabajo Fin de Máster recoge todos los conocimientos adquiridos en las distintas asignaturas impartidas durante este curso con el fin de presentar una programación didáctica en un curso de bachillerato, concretamente, será para la asignatura de Matemáticas II en el curso de 2º de Bachillerato.

El trabajo está englobado dentro de uno de los tres módulos de los que consta el máster, titulado, el Módulo Prácticum. Se trata del módulo de desarrollo profesional y consta de dos asignaturas:

- las prácticas en un centro de enseñanza de secundaria obligatoria.
- el Trabajo Fin de Máster.

Es por ello que ambas asignaturas deben estar relacionadas y este estudio debe “beber” de lo aprendido en las prácticas.

Al estar conectadas ambas asignaturas es necesario que el entorno para el desarrollo de la programación sea el mismo. Por ello el centro elegido ha sido el IES Juan de Juni, instituto donde la autora realizó sus prácticas, al igual que el nivel (2º de Bachillerato de la modalidad de ciencias) y una de las unidades (*Límites de funciones. Continuidad*) que fue impartida por ella.

El trabajo es una programación didáctica dinámica, condición que a juicio de la autora deberían cumplir todas las programaciones que se realizan en los centros de enseñanza. El departamento está obligado a realizar y presentar la programación didáctica que se deberá seguir antes de comenzar el curso escolar, lo que implica, su redacción sin conocer a los futuros alumnos y, por tanto, desconociendo sus formas de aprender. Sin embargo, ello no debe conllevar a minimizar la importancia de reflexionar sobre lo relativo al curso y la metodología a utilizar, a la par que tener un pilar en el que el profesorado pueda apoyarse según el curso avance. No obstante, es común ver como algunos profesores se aferran a la programación sin tener en cuenta las necesidades de sus alumnos siguiendo, única y “egoístamente”, sus preferencias. Es por ello, que la programación didáctica que en este trabajo se expone no busca fijar todos sus apartados, sino establecer un cierto orden y que haya equidad entre todos los alumnos del curso. La programación debe estar abierta a modificaciones siempre que sean en beneficio de los alumnos.

La elección del curso escolar es el actual, 2021-2022, puesto que, como ya se ha explicado, al tratarse de una programación dinámica, se debe mostrar flexibilidad y esto no podría realizarse escogiendo el curso siguiente, sino el actual, conociendo y comprendiendo a los alumnos a los que se les imparte la clase. Precisamente, es en este curso académico en el que se ha derogado la ley que regulaba la educación, si se dispone de una programación dinámica será posible adaptarse

a la nueva ley que ha entrado en vigor, aunque, en este curso académico, únicamente modifica la evaluación.

Por tanto, en el caso de esta programación, lo que afecta a los alumnos es que podrán adquirir el título de Bachillerato con una asignatura suspensa siempre que se cumplan una serie de requisitos.

Pese a que el título del trabajo indique “un estudio de diversas metodologías” hay que señalar que siempre se debe ser coherente y se debe escuchar a los alumnos para lograr que se sientan más cómodos y alcancen los objetivos del curso. En este trabajo no se va a encontrar ninguna metodología novedosa a aplicar. Tal y como se ha indicado, se trata de una programación para un curso de 2º de Bachillerato y la mayor parte de los alumnos tienen en sus planes inmediatos realizar la Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad, conocida coloquialmente como EBAU. Con la presión a la que se encuentran sometidos en este curso debido a su futuro, no suelen estar dispuestos a innovar con metodologías que no les son familiares, sino que prefieren, lamentablemente, incidir única y exclusivamente en los contenidos que les vayan a preguntar en la prueba de la EBAU para así obtener según ellos, los mejores resultados. Pero como profesores, no se debe permitir que las clases se dediquen en exclusiva a preparar dicha prueba, (aunque por supuesto se deba tener en consideración), al contrario, se debe pretender alcanzar algo más profundo que resolver ejercicios o problemas tipo, se ha de buscar que el alumnado adquiera un hábito de pensamiento, elaborando estrategias que le permitan resolver problemas que le asalten en la vida cotidiana, tomando las decisiones correctas, en resumen, que sean capaces de razonar. Por tanto, la metodología utilizada en este trabajo puede pecar de “tradicional”: lecciones magistrales, resolución de problemas... pero se alternará con pequeños retazos de otras metodologías. Hay que destacar que será muy importante el trabajo individual de cada alumno, ya que, al encontrarse en un curso con menor duración de lo habitual, requerirá más horas de trabajo autónomo para poder alcanzar los mínimos necesarios.

Este Trabajo Fin de Máster se encuentra estructurado en dos grandes capítulos:

- La programación didáctica, que recoge los contenidos mínimos establecidos en el artículo 18 de la Orden EDU/519/2014, de 17 de junio. Su estructura es la siguiente:
 - o Marco legal: en este apartado se recogen todas aquellas legislaciones y normas establecidas por el Ministerio de Educación y la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León, que marcan los contenidos mínimos, así como otras indicaciones que se deben tener en cuenta en el desarrollo de las programaciones, a fin de unificar lo que se imparte en los distintos centros educativos de la comunidad autónoma.
 - o Introducción contextual: se detalla el centro al que va dirigida la programación, así como sus alumnos, sus instalaciones... La programación debe estar en

consonancia con los valores y las instalaciones del centro, al objeto de responder a la realidad que presenta el mismo.

- Competencias básicas: se definen y explican las siete competencias básicas además de la contribución de esta asignatura de Matemáticas II a su desarrollo.
- Objetivos: se enuncian los objetivos que se buscan alcanzar, tanto los que se persiguen a lo largo de toda la etapa educativa de Bachillerato, como aquellos específicos de la asignatura.
- Contenidos: se enuncian los contenidos mínimos que se van a impartir durante el desarrollo de la materia.
- Temporalización: se especifica la posible temporalización a seguir durante este curso indicando el número de sesiones que se pueden llevar a cabo por unidad de forma razonada. Como ya se ha comentado previamente, esto debería ser únicamente una posible orientación para el profesor y no es obligatorio llevarla a rajatabla, sino que debe adaptarse a las necesidades y requisitos de sus alumnos.
- Recursos: se listan los principales medios que se van a utilizar en el desarrollo de esta unidad didáctica.
- Metodología: se explican las estrategias planificadas con las que se busca que el alumnado aprenda y alcance los objetivos planteados.
- Evaluación: se explica la forma de evaluar a los alumnos, especificando las herramientas de evaluación, las ponderaciones para obtener la nota trimestral, la convocatoria extraordinaria y otras consideraciones relativas a la evaluación.
- Atención a la diversidad: se enuncian posibles medidas de actuación en caso de ser necesaria su aplicación. Con todo, se debe recordar que, en Bachillerato, al no ser una enseñanza obligatoria, no se pueden realizar adaptaciones curriculares.
- Plan de fomento a la lectura: para contribuir al desarrollo de la competencia lingüística se proponen varios libros para acercar las matemáticas al alumnado de una forma diferente, tiene carácter voluntario.
- Actividades complementarias y extraescolares: se busca completar la formación matemática que reciben los alumnos por medio de diferentes actividades que resultan más amenas.
- Evaluación de la programación: se definen una serie de herramientas que permitan indicar al profesorado los aspectos a mejorar en la forma de dar las clases, así como de la propia programación didáctica con el fin de ayudarles a mejorar de cara a cursos sucesivos.

- El desarrollo de dos unidades didácticas “*Límites de funciones. Continuidad.*” Y “*Aplicaciones de las derivadas*”. Ambos temas estarán desarrollados siguiendo el siguiente esquema:
 - Introducción: se realiza una pequeña introducción sobre el tema a tratar y se muestran ejemplos de la aplicabilidad del tema en la vida cotidiana con el fin de que los contenidos resulten más atractivos a los alumnos.
 - Contribuciones a las competencias básicas: tras una breve explicación de las competencias, se indica cómo contribuye la unidad didáctica correspondiente a su desarrollo.
 - Objetivos: se enuncian los objetivos que se persiguen en la unidad didáctica.
 - Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje: mediante una tabla se relacionan los contenidos, los criterios de evaluación, los estándares de aprendizaje y las competencias que se buscan desarrollar con cada uno de ellos.
 - Metodología: breve resumen sobre las metodologías que se planea utilizar en las unidades didácticas.
 - Recursos: listado de los recursos que se van a utilizar a lo largo de la unidad didáctica.
 - Temporalización: vienen especificadas las sesiones que se van a impartir durante el desarrollo del tema. Es decir, los contenidos que se van a explicar en cada sesión, los ejercicios que se van a plantear a lo largo del desarrollo de las sesiones. Como se ha indicado, es orientativo y se debe adaptar a las características de los discentes.
 - Atención a la diversidad: se ofrecen diversas medidas para aquellos alumnos que puedan necesitarlo.
 - Criterios e instrumentos de evaluación: se exponen las formas de evaluación de la unidad didáctica.

1. Programación didáctica

1.1.Marco legal

La presente programación didáctica va dirigida a la asignatura de Matemáticas II del curso de 2º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y asume las disposiciones vigentes en la comunidad de Castilla y León sobre Bachillerato derivadas de la derogada Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre para la mejora de la calidad educativa (conocida como LOMCE). La nueva Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (conocida como LOMLOE) sentará las bases de la evaluación.

La programación didáctica está definida como el instrumento específico de planificación, desarrollo y evaluación de cada una de las materias que se imparten, en este caso, de Matemáticas II, y en ella se concretarán los distintos elementos del currículo para el desarrollo de la actividad docente en cada curso.

Las directrices que han servido como base para elaborar esta programación didáctica son las normas y consideraciones establecidas en la siguiente normativa:

- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (BOE de 3 de enero de 2015)
- Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. (BOE de 6 de abril de 2022).
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. (BOE de 29 de enero de 2015).
- Orden EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el Currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del Bachillerato en la comunidad de Castilla y León. (BOCyL de 8 de mayo de 2015).
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (BOE de 30 diciembre de 2020).
- Documentos públicos del instituto de educación secundaria obligatoria Juan de Juni.

1.2.Introducción contextual

El instituto para el que está diseñada esta programación didáctica es el IES Juan de Juni, en la localidad de Valladolid. Se trata de un centro educativo público que imparte las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Su objetivo, según informa su página web, es brindar un servicio público de calidad garantizando la formación integral del alumnado, teniendo en cuenta sus aptitudes e intereses con el objetivo de que todos ellos logren desarrollar al completo sus capacidades, en un buen ambiente de convivencia que ayuda a inculcar los valores que persigue el centro de respeto, libertad, solidaridad mientras se fomenta la responsabilidad y el esfuerzo.



El centro se localiza en el límite suroeste del barrio “La Rondilla” de Valladolid, en la zona de contacto con el casco antiguo ya que la calle en la que se ubica, avenida de Santa Teresa, era, antiguamente, el límite geográfico del casco histórico en su zona norte, además de encontrarse muy próximo al río Pisuegra.

Edificio singular que en origen fue construido como Seminario Menor Diocesano, en los años 1950. Siendo adquirido en los años ochenta por el Ministerio de Educación, iniciando su actividad como centro de educación secundaria en el curso 1987-88.

Esta ubicación dificulta la integración con el entorno puesto que no cuenta con un ámbito de influencia preciso. El edificio se encuentra entre tres barrios y una zona periurbana: la Rondilla, San Nicolás y La Victoria; y las localidades conocidas como “el corredor del Pisuegra”: Santovenia de Pisuegra, Cabezón de Pisuegra y Valoria la Buena, así como los pueblos y fincas agrícolas que están ubicados en la cercanía de estos municipios. Sin embargo, este emplazamiento

sí que ha favorecido que algunas asociaciones vecinales de la zona tengan participación en la vida del centro, ya que utilizan sus instalaciones para diversas actividades culturales y deportivas en horarios no lectivos, algo que no ocurre con los pueblos adscritos.

Analizando los datos socioeconómicos que obran en poder de la secretaría del centro y que permiten conocer las profesiones de los padres del alumnado, se observa que abundan los trabajadores manuales, en la industria y en los servicios, siendo menos frecuente la presencia de los funcionarios. Destacar también que hay un elevado número de progenitores que están parados o jubilados anticipadamente.

El nivel de formación que poseen la mayoría de las familias es el de los estudios primarios, siendo secundarias las titulaciones profesionales medias y progenitores con el bachillerato. Con todo, según ha ido transcurriendo el tiempo, se puede observar un progresivo aumento de padres con titulaciones universitarias.

Por otra parte, también se puede apreciar que, año tras año, se incrementa la matrícula del alumnado inmigrante de origen hispanoamericano, eslavo y magrebí, aunque aún no supera el 7% de alumnado. El instituto es paradigma de la evolución social de la población española en general y vallisoletana en particular.

Con el objetivo de lograr la adecuada convivencia entre todos los miembros de la comunidad del centro, el Reglamento de Régimen Interno establece las siguientes bases:

- El respeto tanto a los individuos como a sus ideas. Potenciando siempre un ambiente de tolerancia y siempre a favor del diálogo.
- La dignidad y respeto de la profesión docente por sus objetivos de transmitir cultura y buscar formar a personas libres, justas y solidarias.
- La obligación de que todos los miembros que pertenecen a la comunidad educativa están obligados a respetar los derechos y cumplir sus deberes.

Estas reglas se deben hacer cumplir siempre puesto que garantizan el correcto y adecuado funcionamiento del centro a la par que favorecen que las relaciones entre los distintos miembros de la comunidad educativa sean positivas, tratando de evitar futuros problemas.

El IES, en ESO, cuenta con una sección bilingüe en inglés en la que los alumnos reciben clases de tres asignaturas en inglés. Están organizadas de forma que nunca superan el 50% del total de las horas del discente. Esta sección no afecta a Bachillerato ni a la asignatura de Matemáticas II. Pese a que para los alumnos pudiera resultar un gran cambio el pasar de dar unas asignaturas en inglés en cuarto de la ESO a estudiarlas en español, en las relacionadas con matemáticas no se produce este problema. A juicio de la autora, se considera positivo que la materia se imparta en castellano puesto que para aquellos discentes a los que les resulte complicado esta ciencia,

enseñarla en un idioma no materno añadiría una dificultad más. Además, el uso del castellano permite recurrir a un vocabulario más amplio con la utilización de sinónimos que ayudan a explicar de manera más correcta los conceptos. Asimismo, hay que recordar que el curso de 2º de Bachillerato dispone de un calendario muy limitado para explicar de manera adecuada todos los temarios, por lo que resulta más acertado que las clases se impartan en la lengua materna de los asistentes.

Con respecto a las instalaciones del centro, se trata de un edificio construido en los años 50 del siglo XX, en el que se inició su actividad educativa en el curso 1987/1988. El centro cuenta con aulas y laboratorios de biología, física y química e informática, gimnasio, biblioteca, teatro, sala de profesores, un departamento para cada especialidad, zona de dirección y administración y un gran patio exterior.

Se intentan fomentar las TICs, gracias a la participación del centro en distintos programas, pero sin embargo, se debe destacar que, tal y como se informa en la Programación General Anual, el centro tiene una carencia considerable de videoproyectores y pizarras digitales, contando únicamente con 11 aulas con videoprojector y/o pizarra digital. Esta información está reflejada en las diferentes memorias de los departamentos didácticos en las que se manifiestan, año tras año, que su centro es de los peor dotados de toda la provincia a ese nivel.

Esta asignatura de Matemáticas II está íntimamente relacionada con Física II, puesto que son necesarios numerosos conceptos matemáticos (derivadas, integrales...) para poder comprender y realizar la mayor parte de los ejercicios. No en vano, han sido múltiples los avances que se han producido en matemáticas intentando entender movimientos o conceptos relacionados con la física. Por ejemplo, para calcular la velocidad de un objeto en un momento concreto se utiliza la derivada de la función. Pese a no contar con la misma afinidad, las matemáticas también contribuyen en el resto de las materias del curso, ya que en todas y cada una de ellas, es necesario que los alumnos piensen, razonen, justifiquen, comprueben, etc. que las soluciones que aportan tienen sentido... y para desarrollar estas cuestiones es imprescindible esta disciplina.

La asignatura de Matemáticas II es una continuación de Matemáticas I, se ampliarán y desarrollarán muchas de las cuestiones vistas en el curso anterior. Se recuerda que se sigue un currículo en espiral, yendo de lo más general a lo más específico, y en esta materia se repasarán muchos conceptos explicados previamente y se verán otros nuevos relacionados. Por ejemplo, en cursos previos han estudiado límites, concepto que se empieza a introducir en 4º ESO, en 1º de Bachillerato se amplía y se ven varias indeterminaciones que se solventan de manera sencilla, tales como $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ pero no se analizan todas, y será ya en 2º de Bachillerato cuando se plantee cómo resolver la mayor parte de las indeterminaciones.

Se recuerda que esta asignatura se aborda en la rama del bachillerato científico-tecnológico, por lo que resulta trivial explicar la utilidad de esta materia en los grados posteriores que realicen los alumnos. Aquellos que realicen carreras tecnológicas tales como ingeniería, seguro tienen varios créditos de matemáticas puras; los que decidan estudiar grados relacionados con ciencias de la salud, contarán, lo más probable, con bioestadística o epidemiología donde serán útiles las matemáticas. Incluso aquellos que opten, finalmente, estudiar carreras relacionadas con las ciencias sociales, seguramente dedicarán una asignatura a la estadística, eso sin contar todos los grados de comercio, economía... O aunque elijan por carreras de letras puras tales como filología clásica, filosofía, el razonamiento va a ser necesario, y por tanto, las matemáticas que haya estudiado, le ayudarán a organizar sus pensamientos.

1.3. Competencias básicas

Las competencias básicas se han convertido en el eje vertebrador que, según la Unión Europea, debe guiar el proceso educativo en todos sus niveles para que la ciudadanía alcance un pleno desarrollo personal, social y profesional que sea capaz de ajustarse a las demandas del mundo globalizado y permita el desarrollo económico. El proyecto DeSeCo (Definición y selección de competencias clave, 2003) de la OCDE define competencia como “la capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada”. El aprendizaje basado en competencias se debe abordar desde todas las áreas de conocimiento y esto es posible gracias a su transversalidad, dinamismo y carácter integral. Las competencias no se adquieren en un momento concreto, sino que se van desarrollando y alcanzando según los individuos adquieren un mayor nivel de desempeño. El desarrollo se va a producir desde el comienzo de la escolarización hasta el final de la educación básica y Bachillerato, para que su adquisición se realice de forma coherente y progresiva a lo largo de la vida educativa del alumno. Son siete las competencias clave a desarrollar en la vida académica del discente según la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero.

- **Competencia lingüística (CCL):** busca que el individuo se pueda comunicar de forma oral, escrita, signada o multimodal de manera coherente y adecuada en las diferentes situaciones que se presenten, estos escenarios pueden implicar el uso de una o varias lenguas. También persigue que el alumno sea capaz de comprender, interpretar y valorar críticamente los distintos mensajes que recibe evitando su manipulación. La comunicación lingüística constituye la base para el pensamiento propio y la construcción del conocimiento, es por ello, que debe haber un aprendizaje permanente a lo largo de toda la vida, de su desarrollo depende que el individuo continúe formándose y aprendiendo en distintos contextos.

Esta competencia se desarrollará ya que las matemáticas son concebidas como un área de expresión que utiliza constantemente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas. Por ello, especialmente en la resolución de problemas, adquiere especial importancia la expresión oral y escrita de los procesos y razonamientos seguidos.

- **Competencia matemática y competencia básicas en ciencia y tecnología (CM):** esta competencia trata de desarrollar el razonamiento matemático con la finalidad de resolver diversos problemas, comprender el entorno natural y social. El individuo en su vida diaria ha de ser capaz de tomar decisiones personales ayudado por su capacidad crítica y una visión razonada y razonable emitiendo juicios fundados. Para el adecuado desarrollo de la competencia matemática es necesario abordar las cuatro áreas relativas a la cantidad (números), al espacio y la forma (geometría), al cambio y las relaciones (análisis) y a la incertidumbre y los datos (estadística). Las competencias básicas en ciencia y tecnología buscan acercar al mundo físico y a la interacción responsable con él. Los ámbitos que se abordarán para el desarrollo de esta competencia son: sistemas físicos regidos por leyes naturales, sistemas biológicos, sistemas de la Tierra y del Espacio y sistemas tecnológicos. Además, se busca que el individuo valore la ciencia y su investigación. Puede entenderse que todo el currículo de la materia contribuye a la adquisición de la competencia matemática, puesto que la capacidad para utilizar distintas formas de pensamiento matemático, con objeto de interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella, forma parte del propio objeto de aprendizaje. Las competencias básicas en ciencia y tecnología se desarrollarán con el uso de aplicaciones y se intentará que los alumnos comprendan como las leyes naturales que rigen el mundo físico vienen determinadas por las matemáticas.
- **Competencia digital (CD):** fomenta una utilización responsable y crítica de las tecnologías digitales en la vida diaria de los alumnos. Esta competencia quiere que el individuo sea conocedor en el entorno digital tan desarrollado hoy día, siendo capaz de valorar las fortalezas y debilidades de las tecnologías. Es necesario comprender y realizar una adecuada gestión de la información que se puede encontrar y saber analizarla, conocer los diferentes medios de comunicación, creación de contenidos, así como todo lo relativo a la ciberseguridad. La incorporación de las herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje y resolución de problemas, contribuye a mejorar esta competencia, del mismo modo que la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico ayuda a interpretar mejor la realidad expresada.

- **Aprender a aprender (AA):** se pretende que el aprendizaje sea permanente a lo largo de la vida y por ende, esta competencia se caracteriza por la habilidad para iniciar (gracias a la motivación o curiosidad), organizar (conocer y gestionar los procesos de aprendizaje) y persistir en el aprendizaje. La finalidad es que el individuo sea capaz de aprender de manera eficaz y autónoma.

La forma de construir y transmitir el conocimiento matemático constituye una oportunidad para el desarrollo de esta competencia. Tras la incorporación de nuevas informaciones, es necesaria la integración de estas en la estructura del conocimiento de cada persona, la habilidad para iniciar, organizar y persistir en este aprendizaje. Para el aprendizaje de las matemáticas es necesario que el alumno trabaje por su cuenta para que pueda llegar a comprender realmente todos los conceptos que se imparten.

- **Competencia sociales y cívicas (CSC):** implica la habilidad para utilizar los conocimientos sobre la sociedad y así ser capaz de interpretar fenómenos y problemas sociales, resolver conflictos, interactuar con otras personas basándose en el respeto mutuo. La competencia social se centra más en el bienestar personal y colectivo, conociendo un estilo de vida saludable, los códigos de conducta, la igualdad, la no discriminación, las distintas culturas... La competencia cívica se basa en los conceptos de democracia, justicia, igualdad, ciudadanía, derechos humanos y civiles. Ambas competencias son claves para permitir a las personas convivir en una sociedad plural, dinámica, cambiante y compleja y para favorecer las relaciones interpersonales.

Las matemáticas son utilizadas para describir fenómenos sociales, fundamentalmente, a través de la estadística aportando criterios científicos para predecir y tomar decisiones.

- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE):** se busca la capacidad de transformar las ideas en actos. Los individuos deben contar en su formación con conocimientos relacionados con las oportunidades de carrera, el mundo del trabajo, la educación económica, financiera... Deben ser capaces de pensar de forma creativa, gestionar el riesgo y manejar la incertidumbre.

El proceso de resolución de problemas contribuye de forma especial a fomentar la autonomía e iniciativa personal al planificar estrategias, asumir retos y contribuyen a convivir con la incertidumbre controlando los procesos de toma de decisiones. Además, la autonomía, la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica también se desarrollarán en la asignatura.

- **Conciencia y expresiones culturales (CEC):** esta competencia implica conocer, comprender, apreciar y valorar las diversas manifestaciones culturales y artísticas. Se

requieren conocimientos que permitan acercar al alumno las distintas manifestaciones sobre la herencia cultural: patrimonio cultural, artístico, literario, filosófico, etnográfico....

El conocimiento matemático es expresión universal de la cultura, en particular, la geometría ofrece medios para describir y comprender el mundo que nos rodea y permite apreciar la belleza de las estructuras que se han creado.

1.4. Objetivos

Los objetivos generales que se buscan en esta etapa de Bachillerato se encuentran recogidos en el Real Decreto 1105/2014 por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Son los siguientes:

- a) Ejercer la ciudadanía democrática y adquirir una conciencia cívica siguiendo los valores de la Constitución Española, los derechos humanos fomentando la construcción de una sociedad justa y equitativa. Promover la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizando y evaluando las desigualdades y discriminaciones existentes. Se debe promover la no discriminación entre todas las personas independientemente de sus condiciones o circunstancias personales o sociales.
- b) Reforzar su madurez personal y social con el fin de que actúen de forma responsable e independiente y se desarrolle su espíritu crítico buscando que sean capaces de anticipar y resolver conflictos personales, familiares y sociales.
- c) Reforzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina.
- d) Dominar, tanto en oralmente como por escrito, la lengua castellana.
- e) Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.
- f) Uso adecuado y responsable de las tecnologías de la información y la comunicación.
- g) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, su contexto histórico y los factores clave de su desarrollo. Participar en el desarrollo y mejora de su entorno social.
- h) Saber los conocimientos científicos y tecnológicos y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
- i) Entender los procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar la contribución de la ciencia y la tecnología y los cambios generados en la calidad de vida, y desarrollar sensibilidad y respeto por el medio ambiente.
- j) Consolidar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.

- k) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria.
- l) Utilizar la educación física y el deporte para promover el desarrollo personal y social.
- m) Fomentar actitudes respetuosas y preventivas en el ámbito de la seguridad vial.

Los objetivos que se expondrán a continuación son aquellos que corresponden al curso de 2º de Bachillerato de la asignatura de Matemáticas II. Estos objetivos vienen especificados en la orden EDU/363/2015, de 4 de mayo por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del Bachillerato en la comunidad de Castilla y León. Se dividen en cinco grandes bloques que se disponen a continuación.

Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas

1. Expresar de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. Ser capaz de redactar un informe para comunicar las ideas matemáticas de forma rigurosa y ordenada, obtenidas en la resolución de un problema o una demostración.
2. Utilizar razonamientos y estrategias de resolución de problemas, para realizar los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
3. Demostrar propiedades o teoremas sencillos relativos a contenidos matemáticos propios de este curso.
4. Planificar y practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de:
 - a. la resolución de un problema;
 - b. la generalización de propiedades y leyes matemáticas;
 - c. la profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.Y elaborar un informe escrito riguroso y preciso que reúna el proceso de investigación realizado.
5. Desarrollar procesos matemáticos en contextos de la realidad cotidiana a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.
6. Valorar y apreciar las matemáticas como recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana.
7. Fomentar las actitudes personales relacionadas con las matemáticas.
8. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.
9. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones futuras.

10. Manejar las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, para poder realizar cuestiones matemáticas tales como representación de gráficas, cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, ...
11. Usar regularmente y de forma correcta las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de aprendizaje.

Bloque 2. Números y álgebra.

1. Usar el lenguaje matricial y sus operaciones para describir e interpretar datos y relaciones.
2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y saber resolverlos utilizando las técnicas adecuadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), e interpretar sus soluciones.
3. Resolver ecuaciones matriciales sencillas.
4. Obtener el rango de una matriz y su matriz inversa (hasta orden 3), tanto por el método de Gauss como usando determinantes.

Bloque 3. Análisis.

1. Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo.
2. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de diversos problemas geométricos, de cálculo de límites, de representación de funciones y de optimización.
3. Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas.
4. Aplicar el cálculo de integrales definidas en la medida de áreas de regiones planas y a la resolución de problemas.

Bloque 4. Geometría.

1. Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores.
2. Estudiar la dependencia lineal de un conjunto de vectores, y decidir si forman una base.
3. Resolver problemas entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.
4. Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes, calculando su valor y teniendo en cuenta su significado geométrico.

Bloque 5. Estadística y probabilidad.

1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos y a sucesos aleatorios condicionados en contextos relacionados con el mundo real. Conociendo la regla de Laplace, la axiomática de la probabilidad y el teorema de Bayes.
2. Reconocer correctamente cuándo usar las distintas distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.
3. Utilizar el vocabulario y la notación adecuadas para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística. Interpretar críticamente informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, detectando posibles errores tanto en la presentación de los datos como en las conclusiones.

1.5.Contenidos

Los contenidos correspondientes al curso de 2º de Bachillerato de la asignatura de Matemáticas II aparecen recogidos en la Orden EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la comunidad de Castilla y León. Establece la Orden que los alumnos deben adquirir una serie de contenidos específicos que se presentan organizados en 14 temas que habrán de explicarse a lo largo del curso. La temporalización se verá en el apartado siguiente. Se recuerda que hay un bloque común que se va a dar a lo largo de todas las unidades.

1. Matrices (bloque: Números y álgebra)

- Matrices. Definición. Tipos de matrices.
- Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos.
- Operaciones con matrices.
- Matriz inversa. Menor complementario y matriz adjunta. Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss.
- Solución matricial de un sistema de ecuaciones lineales.
- Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.
- Rango de una matriz.

2. Determinantes (bloque: Números y álgebra)

- Determinantes de segundo orden. Resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Determinantes de tercer orden.
- Determinantes de orden n .
- Propiedades de los determinantes.
- Cálculo de la matriz inversa aplicando los determinantes.
- Cálculo del rango de una matriz aplicando los determinantes.

3. Sistemas de ecuaciones (bloque: Números y álgebra)

- Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas equivalentes.
- Resolución de sistemas. Método de Gauss. Teorema de Rouché-Frobenius. Aplicación de este teorema a la resolución de sistemas con parámetros.
- Discusión de sistemas. Sistemas con parámetros.

4. Vectores (bloque: Geometría)

- Vectores en el espacio. Operaciones con vectores. Vectores linealmente dependientes e independientes.
- Productos de vectores en el espacio. Producto escalar y su interpretación geométrica. Propiedades del producto escalar. Ángulo entre dos vectores. Producto vectorial y su interpretación. Producto mixto.

5. Rectas y planos en el espacio (bloque: Geometría)

- Rectas en el espacio. Ecuación vectorial de la recta. Ecuaciones paramétricas de la recta. Ecuaciones en forma continua.
- El plano. Ecuación vectorial del plano. Ecuaciones paramétricas del plano. Ecuación general del plano. Vector normal a un plano.
- Posiciones relativas en el espacio. Posiciones relativas de dos planos, de tres planos, de dos rectas y de una recta y un plano.

6. Propiedades métricas (bloque: Geometría)

- Ángulos en el espacio. Ángulos entre dos planos, entre recta y plano y entre dos rectas.
- Distancias en el espacio. Distancia entre dos puntos, de un punto a un plano, de un punto a una recta y entre dos rectas que se cruzan.

7. Combinatoria y probabilidad (bloque: Estadística y probabilidad)

- Experimento aleatorio. Sucesos.
- Operaciones con sucesos. Unión de sucesos. Intersección de sucesos. Propiedades de las operaciones con sucesos.
- Probabilidad. Ley empírica de la probabilidad. Ley de los grandes números. Definición clásica de probabilidad. Ley de Laplace.
- Probabilidad condicionada.
- Independencia de sucesos.
- Probabilidad total.
- Teorema de Bayes.

8. Distribuciones de probabilidad (bloque: Estadística y probabilidad)

- Variable aleatoria.
- Distribución de probabilidad discreta. Función de probabilidad. Media, varianza y desviación típica de una variable aleatoria discreta. Distribución binomial.
- Distribución de probabilidad continua. Función de densidad. Distribución normal. Aproximación de la binomial por la normal.

9. Límites y continuidad (bloque: Análisis)

- Límite de una función en un punto. Definición de límite. Límites laterales en un punto. Límite infinito en un punto.
- Límite de una función en el infinito.
- Cálculo de límites (límite de la suma, del producto y del cociente de funciones, límite de composición de funciones, límite de la función exponencial, límite de una función elevada a otra función).
- Continuidad de una función en un punto. Definición. Función continua en un punto. Propiedades derivadas de la continuidad en un punto. Tipos de discontinuidades.
- Continuidad de una función en un intervalo. Función continua en un intervalo. Propiedades de una función continua en un intervalo.
- Teorema de Bolzano.
- Teorema de Weierstrass.

10. Derivadas (bloque: Análisis)

- Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica.
- Derivadas laterales.
- Continuidad y derivabilidad.

- Función derivada.
- Reglas de derivación (derivada de la función inversa, de la función constante, de las funciones suma, resta, producto y cociente...)

11. Aplicaciones a las derivadas (bloque: Análisis)

- Monotonía y derivada de una función. Crecimiento y decrecimiento en un intervalo. Extremos locales. Determinar extremos absolutos en un intervalo cerrado.
- Curvatura de una función. Puntos de inflexión.
- Regla de L' Hôpital.
- Teorema de Rolle.
- Teorema del valor medio de Lagrange y sus consecuencias.
- Optimización de funciones.

12. Representación de funciones (bloque: Análisis)

- Representación de funciones en base a su dominio, recorrido, simetría, monotonía, curvatura, extremos relativos, puntos de inflexión, asíntotas.

13. Primitiva de una función (bloque: Análisis)

- Primitiva de una función.
- Integrales inmediatas.
- Técnicas elementales para el cálculo de primitivas: integración por partes, cambio de variables y descomposición en fracciones simples de fracciones racionales cuyo denominador tenga sus raíces reales.

14. Integral definida (bloque: Análisis)

- Área definida bajo una curva.
- Integral definida de una función continua.
- Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow.
- Aplicación de la integral definida al cálculo de figuras planas.

Bloque común a todas las unidades. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

- Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias para la resolución de problemas.
- Coherencia de las soluciones obtenidas, al igual que el proceso realizado.

- Iniciación a la demostración matemática: métodos (reducción al absurdo, inducción, contraejemplos...), razonamientos (deductivo e inductivo), lenguajes, etc.
- Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos.
- Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes sobre el proceso de resolución de un problema o en la demostración de un resultado.
- Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas.
- Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado.
- Práctica de los procesos de matematización y modelización.
- Desarrollo de actitud adecuada para poder afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- Utilización de medios tecnológicos para diversos procesos: recogida y almacenamiento de datos, elaboración e interpretación de representaciones gráficas, diseño de simulaciones, elaboración de informes, comunicación de ideas matemáticas....

1.6.Temporalización

La temporalización de los contenidos que se deben impartir en el curso de segundo de Bachillerato viene determinada por la estructura del sistema educativo en el que dispone que al menos deben realizarse tres evaluaciones a lo largo del curso. La última sesión se entenderá como la de evaluación final ordinaria del curso tal y como se indica en la Orden EDU/363/2015, de 4 de mayo. Los contenidos aparecerán distribuidos a lo largo del curso, divididos en las 14 unidades didácticas ya señaladas. El orden que se sigue no es aleatorio ni arbitraria, por el contrario ha sido elegido con base a las relaciones que existen entre los diferentes bloques.

La asignatura de Matemáticas II cuenta con cuatro horas semanales, lo que supone 126 horas a lo largo del curso, pese a que la Junta de Castilla y León marque el día 3 de junio como el fin de curso en Bachillerato, las notas finales deberán estar el 27 de mayo a fin de que los estudiantes que lo deseen tengan el tiempo suficiente para poder prepararse la prueba de la EBAU. Esa semana se podrá utilizar como repaso de todo el curso, tal y como lo ha establecido la dirección del instituto, para ayudar a los alumnos, que así lo deseen a afianzar sus conocimientos y resolver sus dudas.

SEPTIEMBRE						
L	M	X	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

OCTUBRE						
L	M	X	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

NOVIEMBRE						
L	M	X	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

DICIEMBRE						
L	M	X	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

ENERO						
L	M	X	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

FEBRERO						
L	M	X	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28						

MARZO						
L	M	X	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

ABRIL						
L	M	X	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

MAYO						
L	M	X	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

JUNIO						
L	M	X	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

	Días no lectivos, festivos laborales o vacaciones
	Días que no hay clase (lunes)
	Fecha posible de exámenes, serán los alumnos los que fijen la fecha definitiva
	Fecha examen final fijada por el instituto
	Clases (optativas) de repaso de cara al examen final o EBAU

	1.- Matrices		8.- Distribuciones de probabilidad
	2.- Determinantes		9.- Límites y continuidad
	3.- Sistemas de ecuaciones		10.- Derivadas
	4.- Vectores		11.- Aplicaciones a las derivadas
	5.- Rectas y planos en el espacio		12.- Representación de funciones
	6.- Propiedades métricas		13.- Primitiva de una función
	7.- Combinatoria y probabilidad		14.- Integral definida

Se darán 14 unidades didácticas, siguiendo el calendario anteriormente establecido.

En la primera evaluación se estudiarán 4 unidades y se realizarán dos exámenes (en un principio fechados en los días 14 de octubre y 12 de noviembre). Estos son los títulos y las sesiones establecidas para su desarrollo:

1. Matrices (8 sesiones)
2. Determinantes (8 sesiones)
3. Sistemas de ecuaciones (9 sesiones)
4. Vectores (7 sesiones)

En la segunda evaluación se explicarán 6 unidades y se realizarán tres exámenes (22 de diciembre, 8 de febrero y 9 de marzo):

5. Rectas y planos en el espacio (9 sesiones)
6. Propiedades métricas (10 sesiones)
7. Combinatoria y probabilidad (8 sesiones)
8. Distribuciones de probabilidad (8 sesiones)
9. Límites y continuidad (8 sesiones)
10. Derivadas (6 sesiones)

En la tercera evaluación se expondrán las 4 unidades restantes y se realizarán dos exámenes (6 de abril y 20 de mayo):

11. Aplicaciones de las derivadas (9 sesiones)
12. Representación de funciones (7 sesiones)
13. Primitiva de una función (10 sesiones)
14. Integral definida (8 sesiones)

Es necesario recordar que esta temporalización será siempre una guía orientativa. Se han establecido el número de sesiones a impartir siguiendo un criterio razonable, según las dificultades que puedan representar los diversos conceptos que se estudian en las unidades didácticas. En caso de que el profesor considere necesario modificar este número de sesiones para conseguir que sus alumnos comprendan los conceptos, goza de una total libertad, siempre y cuando sea en beneficio de los estudiantes. Asimismo, se han establecido fechas orientativas para la realización de los exámenes trimestrales, estarán supeditadas a la decisión que tomen los alumnos.

Indicar que los exámenes de recuperación no están señalados en el calendario, puesto que son los alumnos los que deben fijar la fecha exacta para su realización, pues al afectar a una parte de la

clase, se harán en horas lectivas, mientras se sigue explicando temario para el resto o aprovechar alguna tarde libre.

1.7. Recursos

Para el desarrollo de los contenidos fijados y la consecución de los objetivos definidos, se dispondrá, en primer lugar y como material principal y básico, del libro de texto recomendado por el departamento. De esta forma, los alumnos siempre contarán con un texto que puede servir como apoyo, consulta, refuerzo y ampliación sobre los contenidos explicados en clase. Destacar también la importancia de los recursos digitales que son una herramienta muy eficaz para la comunicación fluida entre profesor y alumnos.

- Libro de texto. *Matemática II*, Fernando Alcaide, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano, Vicente Rivière, Luis Sanz, editorial Savia SM. Pese a que la gran parte del desarrollo de las clases se produzca utilizando la pizarra, es conveniente el uso del libro de texto para realizar sus actividades, apoyar la explicación dada o ampliar conocimientos.
- Entorno virtual. *Microsoft Teams*. Una de las consecuencias de la pandemia fue la adquisición por parte de la Junta de Castilla y León de dicho entorno para arbitrar las clases en aquellos meses de enclaustramiento. Después su uso ha continuado, con nuevos objetivos pues permite la posibilidad de intercambio de apuntes, de la corrección del examen...
- Aplicaciones digitales tales como *Wolfram Alpha*, *Geogebra*,... Se utilizarán diferentes aplicaciones para apoyar las explicaciones y para que los alumnos aprendan a manejarlas en un futuro, puesto que son muy prácticas y enriquecedoras.
- Calculadora científica. Al poder hacer uso de ella en la EBAU se considera imprescindible que el alumno sea capaz de manejarla con soltura y de forma adecuada.
- Apuntes de apoyo redactados por el profesor para completar las explicaciones o dar un mayor número de ejercicios, cuando sea necesario.
- Cuaderno personal del alumno, donde deberá anotar las explicaciones del profesor, los ejemplos utilizados y deberá recoger los ejercicios propuestos y sus correcciones.
- Un ordenador con su respectivo proyector o una pizarra digital, para poder acceder a diferentes páginas web y poder explicar gracias a las aplicaciones indicadas previamente.

1.8. Metodología

Se entiende la metodología didáctica como los procesos y estrategias que se utilizan para enseñar a los estudiantes, es decir, las acciones que se llevarán a cabo en el aula con el fin de transmitir este conocimiento.

Es fundamental que la metodología de enseñanza esté adaptada al tiempo con el que se cuenta para desarrollar el temario, más en un curso como 2º de Bachillerato, donde al finalizar el año académico, la mayoría de los alumnos realizarán la prueba de la EBAU, llave de acceso a la universidad. Pero no se debe caer en el error de enfocar el curso única y exclusivamente a ese examen, sino que debe dar respuesta a las demandas de los alumnos y permitir que su incorporación a la sociedad se produzca en las mejores condiciones posibles. Es por ello, que no se pueden despreciar metodologías tradicionales, sino que se deben de adaptar a los nuevos tiempos. Y lo que debe primar siempre es dar respuesta a las necesidades de los discentes. Para lograr dichos objetivos es inevitable una metodología didáctica activa, participativa, en la que el alumno y su conocimiento sean los principales protagonistas y se pueda construir a partir de sus nociones previas, basándonos de esta manera en las teorías constructivistas.

En el Bachillerato, tal y como se dice en el BOCYL de 8 de mayo de 2015, la metodología didáctica ha de orientarse a favorecer en el alumnado el aprendizaje autónomo, el trabajo cooperativo y en equipo y la utilización de estrategias de investigación propias del método científico. Esta programación didáctica ha tenido en cuenta diversos factores que favorecen ese proceso de enseñanza y aprendizaje:

- El ritmo de aprendizaje de cada alumno, cada persona aprende a un ritmo diferente. Los contenidos deben estar adaptados y explicados de tal manera que permitan extensiones y gradación para su adaptabilidad en función del receptor. Se debe explicar haciendo uso de todas las herramientas posibles: de forma oral, gráfica, escrita, mediante ejemplos...
- Atención a las necesidades de otras asignaturas. El papel instrumental de las Matemáticas obliga a tener en cuenta la necesidad de su uso en otras asignaturas, tanto de las Ciencias Humanas y Sociales como de las ramas Científica y Tecnológica. Por ejemplo, en Física II se requiere el uso de integrales. Pese a que las unidades en donde se explican las integrales estén fijadas a final de curso, esta temporalización no es definitiva. Está así dispuesta hasta que el departamento de Física informe al de Matemáticas cuándo va a ser necesario que los alumnos sepan manejarlas. La coordinación entre departamentos es fundamental, una propuesta de cambio y se puede iniciar el curso con los temas dedicados al bloque de análisis y posteriormente continuar con geometría, estadística y probabilidad y finalizar el curso con números y álgebra.

- Se debe seguir la perspectiva constructivista, en la que se basa el currículo oficial. Hay que incidir en la importancia de que los conceptos impartidos no están aislados, sino que son parte de un conjunto que tiene coherencia. Los esquemas conceptuales que poseen los alumnos son persistentes y en caso de que haya errores, es difícil modificarlos.

Como se ha indicado, este curso es previo al acceso a la universidad, por ello, aunque no es aconsejable realizar grandes cambios ni innovaciones, siempre se intentará en la medida de lo posible, llevar a cabo metodologías innovadoras que llamen la atención del alumno. Por ejemplo:

Exploración de conocimientos previos.

Las explicaciones empezarán siempre conociendo cuáles son los conocimientos del alumnado sobre la unidad didáctica a explicar. De esta forma se podrán evitar futuros errores si se conoce de manera precisa el punto de partida en donde se encuentran los alumnos. Es mucho más fácil, tanto para ellos como para el docente, explicar y dejar clara la base en que se va a construir posteriormente. Se trabajará durante el tiempo necesario y el profesor realizará de forma oral cuestiones sencillas sobre el tema a tratar. De esta forma se podrá evaluar el nivel al que se enfrentará posteriormente y también servirá para recordar conocimientos previos. Las cuestiones se realizarán de forma individualizada, de modo que el profesor dirija la pregunta a los alumnos que considere, para evitar que siempre respondan los mismos y de ese modo no se pudiera obtener una idea general adecuada. Aunque algún alumno se pueda equivocar, no se tolerará que nadie se ría de él, pues, el respeto hacia todos es la primera norma de conducta que se debe conseguir. Equivocarse es natural y gracias a las equivocaciones se aprende.

Exposición magistral

El profesor será el principal encargado de transmitir la información en la mayor parte de las sesiones. Pero no se tratará de la exposición magistral tradicional, sino que la explicación será abierta, dinámica, fomentando la participación de los alumnos gracias a diversas preguntas que se lanzarán al aire, proposición de ejemplos cotidianos, cambios de entonación,... para evitar la monotonía de las clases, que conlleva a la desconexión y al aburrimiento del alumnado.

El método expositivo a lo largo de la clase irá variando según el momento en que se encuentre:

Al inicio, se procederá a un breve repaso de la lección previa donde se buscará que el alumnado pregunte las diversas dudas que le haya podido surgir, de esta forma se consolidarán los conceptos vistos anteriormente

Seguidamente, para introducir nuevos conceptos se procederá a realizar preguntas para contextualizar y que los discentes entiendan que no son nociones aisladas, sino que todas tienen

relación. Las nuevas ideas se explicarán de forma ordenada y clara, definiéndolas de forma precisa.

Se procederá posteriormente a la realización de ejercicios que aborden los conceptos nuevos para mejorar la comprensión de los mismos.

Resolución de problemas

Las matemáticas no se comprenden correctamente hasta que no se realizan ejercicios y problemas que ponen a prueba los conocimientos adquiridos. Se procederá a la resolución de ejercicios y problemas en clase o para entregar al profesor. Los problemas a realizar serán o bien aquellos que aparecen en el libro de texto recomendado o bien el profesor entregará hojas con nuevos problemas porque considere que los que encuentran en el libro son insuficientes o quiera incidir en algún aspecto. Debido a la importancia de la EBAU, el profesor entregará una hoja de problemas de la EBAU por cada unidad con ejercicios de años anteriores. Esta colección de problemas no será de entrega obligatoria pero sí que se valorará positivamente la entrega de estos ejercicios.

Los alumnos deberán resolver en casa las tareas planteadas por el profesor y deberán salir a la pizarra a corregir los ejercicios, de forma aleatoria e intentando que todos participen, al menos una vez en cada unidad didáctica o en el trimestre.

Visual Thinking

Es una metodología en la que, a través de un dibujo sencillo, generalmente con colores para que resulte más llamativo y atractivo, se explican conceptos complejos. Se trata de una metodología que resulta más eficaz para aquellos alumnos que tienen una memoria visual. Ayuda a conectar ideas y entender mejor el concepto.

Los alumnos podrán crear sus propios dibujos, lo que se valorará positivamente, o el profesor les dará ciertos ejemplos para contenidos que considere relevantes.

Cuaderno de clase

Los alumnos deberán reflejar en su cuaderno una correcta redacción de los ejercicios a resolver, así como su corrección. Asimismo, deberán plasmar las explicaciones del profesor e indicar ciertos aspectos que les puedan ser de utilidad a la hora de estudiar. Es decir, se debe plantear el cuaderno como si fuera un *portfolio* pero sin ser tan profundo: reflexionando sobre sus errores, anotando esquemas o resúmenes, ...

El cuaderno debe tener un orden, limpieza, lenguaje y notación adecuados.

1.9.Evaluación.

La normativa vigente indica que la evaluación de los procesos de aprendizaje del alumnado de Bachillerato deberá ser continua, tendrá un carácter formativo y será un instrumento para la mejora tanto de los procesos de enseñanza como de los procesos de aprendizaje.

Los referentes para la comprobación del grado de adquisición de las competencias y el logro de los objetivos de la etapa en las evaluaciones continua y final de la materia, serán los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, tal y como se señala en la legislación.

Las Matemáticas tienen la particularidad de que los contenidos de cada unidad se apoyan en, y complementan, contenidos de las unidades anteriores y cursos previos. Se trata de una fuente de conocimiento acumulativa y progresiva, es por ello que el currículo que se trabaja a lo largo del instituto es un currículo en espiral. Esto afecta a la evaluación, ya que no se puede considerar evaluaciones puntuales o independientes.

Al comienzo de cada curso, cada profesor, deberá dar a conocer a sus alumnos y a sus padres, madres o tutores legales, los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del curso respectivo para esta materia. Asimismo, se informará sobre los conocimientos mínimos requeridos para que el alumno acabe satisfactoriamente el curso, los procedimientos de evaluación del aprendizaje y los criterios de calificación que se aplicarán.

Para la evaluación de los objetivos didácticos detallados en esta programación didáctica, se utilizarán las siguientes herramientas de evaluación:

- Realización de pruebas de carácter individual. Serán exámenes de una o varias unidades y/o de todo el período de evaluación. En general, se tratará de una colección de ejercicios prácticos y de problemas, siempre que sea posible, con relación a aspectos de la vida cotidiana, en los que se pueda medir el nivel de comprensión de los contenidos por parte de los alumnos. El discente deberá desarrollar los ejercicios y problemas de manera que se pueda seguir y entender su razonamiento y sus destrezas. En ocasiones podrán aparecer preguntas de desarrollo teórico, con el fin de que los alumnos entiendan la necesidad de conocer el lenguaje matemático y el nombre específico de los elementos matemáticos que estudian. Por cada evaluación, mínimo se debe realizar una prueba escrita.
- Control de la realización de los ejercicios que se propongan para casa, tanto a nivel individual como grupal.
- Observación en el aula de la actividad de cada alumno, actitud en clase ante el profesor, trabajo y sus compañeros, el comportamiento, el interés...

- Actividades en el aula, que podrán ser individuales o en grupo, de la materia o proyectos interdisciplinares.
- Explicación en público de manera oral de las actividades realizadas.
- Control del cuaderno de apuntes y actividades: corrección, orden...
- Participación en actividades complementarias: concursos, olimpiadas matemáticas, canguro matemático...

Evaluación trimestral.

La evaluación trimestral se hará fundamentalmente, a través de varios apartados.

- A. Contará con, al menos, una prueba escrita de 90 minutos, el mismo tiempo que los alumnos tienen en la evaluación de Bachillerato para acceso a la universidad (EBAU) con el fin de que se vayan habituando a esa duración de exámenes. Como ya se ha indicado previamente, se integrarán todos los contenidos impartidos previamente hasta la fecha de dicha prueba. El peso de las pruebas será proporcional a la cantidad de materia que se imparta, por ejemplo, en caso de realizarse dos exámenes, la primera prueba tendrá una importancia del 40 % y la segunda un 60% en la nota final. En caso de realizarse tres exámenes, valdrán un 20%, 30%, 50% en la nota final respectivamente. Para aprobar una evaluación, la nota ponderada de todos los exámenes realizados en dicha evaluación será igual o superior a cinco y la nota de cada uno de ellos nunca inferior a tres.

Con carácter general, en la evaluación de todas las pruebas, bien sean exámenes o trabajos, se tendrán en cuenta los aspectos siguientes:

- El nivel de conocimientos adquiridos
 - El dominio de técnicas operativas necesarias en cada momento, distinguiendo las simples equivocaciones de errores que denoten que no se ha adquirido la soltura necesaria.
 - Errores que revelen fallos en razonamiento y deducción lógica.
 - Corrección y precisión en el lenguaje.
 - Orden y presentación de los trabajos.
 - Faltas de ortografía.
- B. Actitud en la asignatura, donde se pueden englobar los siguientes aspectos mencionados anteriormente: control de la realización de ejercicios que se propongan para casa, observación de la actitud del alumno en clase ante el profesor, la materia y sus compañeros, participación en actividades complementarias tales como la olimpiada o el canguro.

No es importante que los ejercicios propuestos para realizar en casa estén perfectamente resueltos sin errores, sino que se pueda intuir que el alumno ha intentado resolverlos y ha dedicado tiempo a pensarlos.

Se valorará negativamente las faltas de respeto hacia el profesor, otros alumnos o al centro, el mal comportamiento o una falta de interés por la asignatura, quedando reflejada en que el alumno no lleve el material necesario a clase, no se esfuerce, no realice ningún ejercicio...

C. Seguimiento del trabajo del alumno, donde se enmarcarán las siguientes actuaciones: actividades que se realicen en el aula, individuales o grupales, exposición pública de las distintas actividades realizadas y control del cuaderno de clase.

Se valorará la limpieza y el orden de las ideas y resultado y la toma de notas y aclaraciones por parte del alumno en el cuaderno de notas. Los ejercicios deben estar correctamente corregidos, señalando los errores que se han cometido y cómo corregirlos.

Se apreciará el esfuerzo que hagan los discentes por salir a la pizarra a corregir o resolver ejercicios, así como las respuestas a cuestiones realizadas en clase. El correcto uso del lenguaje matemático y los conceptos que se estén explicando, ya que se trata de un reflejo del dominio e interés por la materia.

Definidas las tres partes con las que se evalúa la materia, se procede a explicar la manera en que se obtiene la calificación definitiva.

La parte A corresponde con el 70% de la nota de la evaluación, las partes B y C con el 15% cada una. Por lo tanto:

$$Nota\ final = A \cdot 0.7 + B \cdot 0.15 + C \cdot 0.15$$

La nota final del curso se obtendrá calculando la media de las notas de cada trimestre. Se considera que se ha superado la evaluación o el curso siempre y cuando la nota final supere el 5.0.

Recuperación

Para aquellos alumnos que no hayan aprobado en cada evaluación distinta de la final, deberán realizar un examen de recuperación de los contenidos de la evaluación. La prueba tendrá unas características similares a las de las pruebas de la evaluación previa y tendrá lugar en la fecha acordada por el profesor y el alumnado. Se obtendrá una nota E.

Además, el profesor hará entregar de una lista de actividades de refuerzo sobre la evaluación suspensa. Estos ejercicios serán entregados el día del examen de recuperación y serán evaluados, obteniéndose una nota A.

La nota de la recuperación será:

$$\text{Nota recuperación} = 0.8 \cdot E + 0.2 \cdot A$$

En caso de que la nota de la recuperación sea inferior a la nota de la evaluación, para realizar la media para la nota final se contará con la mayor nota de las dos.

Examen final

Se efectuará un examen final para todos los alumnos, sin excepción, en la fecha que disponga el centro. Para aquellos que hayan aprobado servirá para fomentar un repaso de todos los conocimientos explicados previo a la EBAU. Para aquellos que tengan alguna evaluación suspensa servirá para su recuperación.

En el examen final se propondrán cuatro ejercicios por cada evaluación. Aquellos que hayan aprobado deberán realizar tres de ellos. Aquellos que tengan alguna evaluación suspensa deberán realizar todos los ejercicios correspondientes a sus respectivas evaluaciones suspensas.

La nota final para los alumnos será la superior entre la nota alcanzada en el examen y la que surja al realizar las medias de las evaluaciones. Se considera que se ha aprobado la asignatura si la nota obtenida es 5.0 o superior. En caso contrario, deberán acudir a la convocatoria extraordinaria.

Convocatoria extraordinaria

Para la convocatoria extraordinaria, el departamento elaborará un único examen global de la materia. La nota que el alumno obtenga en este examen, redondeada a su parte entera, constituirá la calificación correspondiente a dicha materia. Se considerará que el alumno supera la materia si la nota obtenida es 5.0 o superior, en caso contrario, salvando una excepción que se comentará posteriormente, repetirá al año siguiente con la asignatura.

Este año académico se ha producido un cambio en la legislación educativa. A mitad de curso se ha derogado la ley con la que se inició el curso y se ha aprobado la conocida como LOMLOE. Esta nueva ley afecta a la evaluación de este año académico y tiene como novedad que en caso de que un alumno cuente con una única asignatura suspensa puede obtener el título de Bachillerato siempre y cuando cumpla los siguientes requisitos del Real Decreto 984/2021:

- El equipo docente debe considerar y estar de acuerdo en que el alumno ha alcanzado los objetivos y competencias vinculados al título de Bachillerato.
- El alumno no debe haber abandonado la asignatura según los criterios del centro.
- El alumno se debe haber presentado a todas las pruebas y realizado todas las actividades necesarias para su evaluación, incluyendo las de la convocatoria extraordinaria.
- La media aritmética de las calificaciones obtenidas en todas las materias debe ser igual o superior a cinco.

Consideraciones relativas a la evaluación.

El alumno que por causa justificada no asista a alguna de las pruebas o exámenes realizados deberá aportar un justificante válido. En ese caso, el profesor realizará un examen al afectado en una fecha posterior. En caso de no aportar la justificación adecuada, la calificación de la prueba o examen será cero.

Si un alumno es sorprendido utilizando métodos fraudulentos en la realización de algún examen (copiar, hablar, utilizar el móvil,...) la calificación de ese examen será de 0.0 puntos.

1.10. Atención a la diversidad

El principio de atención a la diversidad se debe considerar en el Bachillerato como un modelo de enseñanza que trata de atender a la heterogeneidad del alumnado, haciendo un modelo de enseñanza adaptativo. Las diferencias personales en capacidades específicas, motivación e intereses suelen estar bastante definidas, ya que la organización de la enseñanza permite que los propios estudiantes resuelvan esta diversidad mediante la elección de modalidades y optativas. No obstante, es obligatorio dar respuesta, a la diversidad de intereses, motivación, capacidades que los estudiantes tienen.

Sin embargo, al ser el Bachillerato una enseñanza no obligatoria, en ningún caso los alumnos serán aprobados sin haber adquirido los conocimientos mínimos. Pese a ello, se proponen varias medidas en caso de ser necesaria su aplicación con el alumnado.

Alumnado con altas capacidades

- Facilitar ejercicios de ampliación que requirieran mayor medida cognitiva según la clasificación de Stein Smith.
- Recomendar o informar sobre planes complementarios en los que desarrollar su capacidad, tales como el canguro matemático.

Alumnado con un ritmo de aprendizaje más lento

- Diseñar actividades más sencillas con el fin de que asimilen lo básico.
- Proponer fichas de actividades de repaso a los contenidos vistos en 1º de Bachillerato.
- Ubicar a dichos alumnos en la parte frontal de la clase para facilitar la atención y absorción de los contenidos.

Alumnos repetidores

- Tener un control exhaustivo del absentismo.
- Prestar atención a la comunicación con el núcleo familiar ante cualquier dificultad que se pueda presentar.
- Proponer fichas de actividades sobre los contenidos que deban entregar.
- Ubicar a dichos alumnos en la parte frontal de la clase para facilitar la atención y absorción de los contenidos.

1.11. Plan de fomento a la lectura

Una de las competencias clave que se debe desarrollar es la competencia lingüística y para ello se van a proponer, aparte de otras actividades que favorecen dicha competencia, la lectura de varios libros relacionados con las matemáticas. Estas actividades son totalmente voluntarias, aunque se valorarán positivamente en la nota de cada alumno.

Para aprovechar esta actividad, se propondrá la realización de un breve y adecuado comentario del libro por parte de los alumnos, que podrá ir acompañado de un cuestionario referente a los contenidos de la lectura. Se exigirá a los alumnos un adecuado grado de rigor en la forma y el fondo de la expresión escrita del comentario.

Para el curso de 2º de Bachillerato se proponen los siguientes libros:

Ingeniosos encuentros entre juegos y matemáticas de Ian Stewart. En este libro se presenta la matemática como un juego de manera divertida para que el lector, sin que se agobie por la simbología, disfrute.

El universo de las matemáticas de William Dunham. Se exploran temas matemáticos característicos, desde los primeros monumentos escritos hasta los enigmas de las series infinitas y las peculiaridades de los números irracionales. También se ofrecen anécdotas sobre la vida de diversos matemáticos.

En busca del grado perdido. Matemáticas con puntos y rayas de Clara Grima. De forma divulgativa presenta los grafos para resolver de manera óptima situaciones o conflictos cotidianos.

Asimismo, por si los alumnos quieren investigar y conocer más sobre la vida de los matemáticos que descubrieron los teoremas y conceptos que estudian, se recomiendan los libros de la colección “*La matemática en sus personajes*” de la editorial Nívola.

1.12. Actividades complementarias y extraescolares

Entre los propósitos que persiguen este tipo de actividades, cuando se realizan desde el área de Matemáticas, destaca el completar la formación que reciben los alumnos en las actividades curriculares, estimulando su deseo de investigar y conocer en profundidad esta ciencia.

- Se celebrarán efemérides tales como el día de las Matemáticas o algún otro día a destacar con actividades que organizaría el departamento: un concurso de fotografía matemática u otras a concretar.
- Participación en el concurso del Canguro Matemático y en las Olimpiadas Matemáticas. Para ello se realizarán clases por las tardes con el objetivo de preparar a aquellos alumnos que deseen participar en dichos concursos. Se entregará material previamente elaborado por el departamento de forma quincenal.
- Comentarios en clase acerca de noticias que aparecen en medios de comunicación o que guarden relación con las matemáticas.
- Participación en conferencias relacionadas con las matemáticas organizadas por la UVa u otros organismos institucionales.
- Participación en Jornadas Científicas junto con los Departamentos de Física y Química, Biología y Tecnología.

1.13. Evaluación de la programación

La programación didáctica es un documento abierto, flexible y revisable, por lo tanto, es fundamental establecer una serie de estrategias que permitan, por un lado evaluar su contenido, y por otro evaluar la eficacia del proceso de enseñanza-aprendizaje de forma a mejorar para los cursos futuros.

En el artículo 21 de la Orden EDU/363/2015 se indica que para evaluar la programación didáctica se incluirán, entre otros, los indicadores de logro referidos a los resultados de la evaluación del curso, a la adecuación de los materiales, recursos didácticos, distribución de espacios y tiempos a los métodos didácticos y pedagógicos y a la contribución de los métodos didácticos y pedagógicos a la mejora del clima de aula y de centro.

La evaluación tiene como interés mejorar el funcionamiento de la práctica docente en unidades didácticas y hacer una reflexión sobre lo aprendido, el cómo se ha aprendido, lo enseñado y el cómo se ha enseñado. Las evaluaciones de las unidades didácticas deben realizarse tras finalizarlas. Asimismo, se van a valorar los objetivos y su consecución al terminar el curso.

Al terminar cada unidad didáctica se le va a dar a los alumnos una rúbrica que deberán rellenar como la siguiente:

Modelo de autoevaluación y evaluación de la unidad didáctica por el alumno						
Al trabajar esta unidad, te has sentido.... Muy mal / Muy bien	0	1	2	3	4	5
Las explicaciones de tu profesora son... Confusas /Claras	0	1	2	3	4	5
¿Cuánto crees que has aprendido? Nada / Mucho	0	1	2	3	4	5
¿Te han resultado interesantes las explicaciones? Nada / Mucho	0	1	2	3	4	5
El método de trabajo ha sido... Muy malo / Muy bueno	0	1	2	3	4	5
Las actividades han sido... Muy difíciles / Muy fáciles	0	1	2	3	4	5
¿Crees que te has esforzado en este tema? Nada / Mucho	0	1	2	3	4	5
¿Qué modificarías o aportarías a la unidad didáctica?						
En caso de haber realizado examen...						
El examen te ha resultado... Difícil / Fácil	0	1	2	3	4	5
¿Qué calificación has obtenido y cuál crees que te mereces?						

A lo largo del curso, en las reuniones del Departamento se analizarán las dificultades encontradas en el desarrollo de la programación y se valorarán posibles ajustes de la programación a las características del grupo. Tras cada evaluación, se procederá al análisis de resultados y a proponer las medidas que se consideren oportunas para su mejora.

A finalizar el desarrollo de las clases, se utilizará la siguiente tabla para el curso que será cumplimentada por el profesor correspondiente y será incluida en la memoria final del curso.

Criterios de evaluación	Indicador de logro	1	2	3	4
Resultados de la evaluación del curso	% aprobados				
Adecuación de los materiales y recursos didácticos, y la distribución de espacios y tiempos a los métodos didácticos y pedagógicos utilizados.					
Contribución de los métodos didácticos y pedagógicos a la mejora del clima de aula y de centro					
La práctica docente					
La coordinación interna del departamento					

Si se ha contestado 1 o 2 a alguna cuestión se debe marcar las causas responsables. Se debe señalar las medidas que se proponen para alcanzar el objetivo marcado.

Este año el departamento había fijado que el objetivo propuesto para el curso 2021/2022, en porcentaje de aprobados para la convocatoria ordinaria de junio sería de un 75 %.

2. Unidades didácticas

En este capítulo del trabajo se va a proceder al desarrollo de dos unidades didácticas como parte del programa del aula. Las dos unidades pertenecen al bloque III de Análisis del 2º curso de Bachillerato. Son las unidades correspondientes a “*Límites de funciones. Continuidad*” y “*Aplicaciones de las derivadas*”.

2.1.Unidad 9. Límites de funciones. Continuidad.

2.1.1. Introducción

Se propone el desarrollo de la unidad didáctica referida a límites de funciones y continuidad en el curso de 2º de Bachillerato en la asignatura de Matemáticas II. Esta unidad didáctica será la primera dedicada al bloque de Análisis, tras haber estudiado previamente los bloques de Números y Álgebra, Geometría y Estadística y Probabilidad.

La legislación en la que se basa esta unidad es la Orden EDU/363/2015, de 4 de mayo en la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la comunidad de Castilla y León.

Se dedicarán un total de 8 sesiones para el desarrollo de esta unidad, como se ha visto en el capítulo anterior en el apartado de Temporalización, que se concretarán de forma detallada más adelante.

En ella se realizará un breve repaso sobre contenidos estudiados en cursos previos como los límites y la resolución de las indeterminaciones de tipo $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ o la continuidad, y se ampliarán dichos conceptos. Asimismo, se estudiarán los teoremas de Bolzano, Darboux y Weierstrass.

Las aplicaciones de los límites y de las funciones continuas son múltiples. Los límites permiten intuir el comportamiento de una función. Por ejemplo: en ingeniería se utilizan para conocer el nivel de producción y poder encontrar el menor coste posible para generar una mayor ganancia, con ellos en economía se puede encontrar el valor máximo o mínimo que puede adquirir el dinero en el mercado financiero en un determinado período o saber cuándo se agotará un recurso según el consumo. Además, los conceptos de continuidad y derivabilidad son de gran utilidad en la física ya que definen velocidades y ritmos de variación.

En definitiva, un buen control y base de este tema será fundamental para que los alumnos puedan continuar aprendiendo en las siguientes unidades didácticas de análisis y de cara a sus futuros grados profesionales.

2.1.2. Contribución a las competencias clave

Las competencias clave vienen marcadas por la Orden ECD/65/2015 del 21 de enero. Se encuentran expuestas a continuación. La forma de contribuir a su desarrollo en esta unidad didáctica está concretada en el apartado 2.1.4. Se realiza un breve repaso de cada una, dado que ya se han explicado previamente:

- **Competencia en comunicación lingüística (CL):** Utilización del lenguaje como instrumento de comunicación oral y escrita. Se fomentará su desarrollo haciendo uso de conceptos matemáticos específicos y se utilizará de forma constante el lenguaje matemático con el objetivo de que el alumno desarrolle y amplíe su vocabulario y lo utilice de forma rigurosa y precisa.
- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CM):** es obvio que esta competencia será la que el estudiante desarrollará más a lo largo de las clases de matemáticas. Se deberá hacer uso del razonamiento matemático para producir e interpretar informaciones, para conocer más sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad y para resolver problemas relacionados con la vida diaria. Esta competencia ayudará al discente a valorar la validez de argumentaciones e informaciones, a seguir razonamientos válidos a la hora de aplicar los teoremas impartidos y a interpretar los resultados obtenidos.
- **Competencias Digitales (CD):** Habilidades para buscar y obtener información y transformarla en conocimiento mediante el uso del aula virtual, donde se colgarán diferentes actividades y recursos relacionados con la unidad o se proporcionarán diferentes webs donde los alumnos pueden ampliar información vista en clase, como por ejemplo la aplicación *Wolfram Alpha* para que puedan comprobar las soluciones a los ejercicios propuestos. También será de especial utilidad el correcto uso de calculadora para ciertas actividades.
- **Competencia aprender a aprender (AA):** Aprender a aprender supone iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuarlo de manera autónoma. En este sentido, el estudiante tendrá a su alcance material suficiente dado por el profesor para profundizar en los conocimientos impartidos. Se trabajará en la autonomía en la resolución de problemas para fomentar el desarrollo de la autonomía personal, la perseverancia y el espíritu crítico.
- **Competencias sociales y cívicas (CSC):** Esta competencia permite vivir en sociedad, comprender la realidad social del mundo en que se vive y ejercer la ciudadanía democrática. Se trabajará en el reconocimiento y la valoración de las aportaciones ajenas, el aprendizaje cooperativo y el respeto mutuo.

- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE):** Se fomentará la resolución de problemas que contribuyen a desarrollar esta competencia ya que serán útiles para planificar estrategias, asumir retos, controlar tiempo y recursos en diversos procesos. Será necesario apoyar las actitudes de confianza y autonomía ante la resolución de los problemas que se aborden. Al tener los alumnos a disposición problemas de diferentes niveles, podrán profundizar en su estudio realizando aquellos que ellos elijan.
- **Conciencia y expresiones culturales (CEC):** Se contribuirá a esta competencia desarrollando actividades dentro de un contexto cultural con el fin de relacionar nuestra unidad con problemas del mundo real. En esta unidad lo podremos conseguir haciendo uso de la sucesión de Fibonacci.

2.1.3. Objetivos

La Orden EDU/363/2015 del 4 de mayo tiene por objeto establecer el currículo y regular la implantación, evaluación y desarrollo del Bachillerato en la comunidad de Castilla y León. Esta orden debe aplicarse a todos los centros docentes y, por ende, al IES Juan de Juni.

Objetivos comunes del curso:

- Expresar de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. Ser capaz de redactar un informe para comunicar las ideas matemáticas de forma rigurosa y ordenada, obtenidas en la resolución de un problema o una demostración.
- Utilizar razonamientos y estrategias de resolución de problemas, para realizar los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
- Demostrar propiedades o teoremas sencillos relativos a contenidos matemáticos propios de este curso.
- Planificar y practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de:
 - o la resolución de un problema;
 - o la generalización de propiedades y leyes matemáticas;
 - o la profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.

Y elaborar un informe escrito riguroso y preciso que reúna el proceso de investigación realizado.
- Desarrollar procesos matemáticos en contextos de la realidad cotidiana a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.

- Valorar y apreciar las matemáticas como recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana.
- Fomentar las actitudes personales relacionadas con las matemáticas.
- Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.
- Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones futuras.
- Manejar las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, para poder realizar cuestiones matemáticas tales como representación de gráficas, cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, ...
- Usar regularmente y de forma correcta las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de aprendizaje.

Objetivos específicos de la unidad didáctica:

- Identificar el dominio y recorrido de una función.
- Conocer la definición de límite de una función en un punto y sus propiedades.
- Conocer la definición de límites en el infinito.
- Identificar y ser capaz de resolver las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ .
- Calcular límites de funciones polinómicas y racionales.
- Conocer el concepto de infinitésimo y saber aplicarlo.
- Identificar y describir las características de monotonía, acotación y convergencia de las sucesiones.
- Dominar el concepto de continuidad de una función e identificar los tipos de discontinuidades.
- Enunciar el teorema de Bolzano correctamente. Conocer su demostración y saber cómo y cuándo aplicarlo.
- Enunciar el teorema de Darboux correctamente. Conocer su demostración y saber cómo y cuándo aplicarlo.
- Enunciar el teorema de Weierstrass correctamente. Saber cómo y cuándo aplicarlo.

2.1.4. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje

Los contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje que se tendrán en cuenta son los que se encuentran en la Orden EDU/363/2015 del 4 de mayo.

Los contenidos que se verán en esta unidad serán los siguientes:

- Concepto de función
- Concepto de dominio y recorrido de una función.

- Límites: de una función en un punto, laterales, en el infinito.
- Propiedades de los límites.
- Cálculo de límites.
- Infinitésimos
- Sucesiones. Monotonía, acotación y convergencia.
- Concepto de continuidad.
- Tipos de discontinuidades.
- Teorema de Bolzano. Aplicación y demostración.
- Teorema de los valores intermedios o de Darboux. Aplicación y demostración.
- Teorema de Weierstrass. Aplicación.
- Acotación de funciones.

En la tabla adjunta se encuentra la relación de los criterios de evaluación con los estándares de aprendizaje, así como su contribución a las competencias clave

CONTENIDOS ESPECÍFICOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias básicas
Límite de una función en un punto y en el infinito.	<p>Conocer la definición de límite de una función en un punto y sus propiedades.</p> <p>Conocer la definición de límites en el infinito.</p> <p>Identificar y ser capaz de resolver las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^∞.</p> <p>Calcular límites de funciones polinómicas y racionales.</p>	<p>Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.</p> <p>Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p>	CM, CL
Continuidad de una función en un punto.	<p>Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello.</p> <p>Identificar el dominio y recorrido de una función.</p> <p>Dominar el concepto de continuidad de una función e identificar los tipos de discontinuidades.</p>	<p>Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.</p> <p>Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p>	CM, CL
Tipos de discontinuidad.	<p>Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello.</p>	<p>Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.</p>	CM, CL

	Identificar el dominio y recorrido de una función. Dominar el concepto de continuidad de una función e identificar los tipos de discontinuidades.	Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.	
Continuidad de una función en un intervalo.	Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. Identificar el dominio y recorrido de una función. Dominar el concepto de continuidad de una función e identificar los tipos de discontinuidades.	Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.	CM, CL
Teorema de Bolzano.	Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. Conocer y utilizar los teoremas de Bolzano, de los valores intermedios o de Darboux y de Weierstrass.	Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos funcionales. Reflexiona sobre el proceso de demostración (estructura, método, lenguaje y símbolos, pasos clave, etc.).	CM, CL, AA, SIEE

		<p>Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p> <p>Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.</p>	
Teorema de Weierstrass	<p>Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello.</p> <p>Conocer y utilizar los teoremas de Bolzano, de los valores intermedios o de Darboux y de Weierstrass.</p>	<p>Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.</p> <p>Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.</p> <p>Reflexiona sobre el proceso de demostración (estructura, método, lenguaje y símbolos, pasos clave, etc.).</p> <p>Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos funcionales.</p> <p>Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p> <p>Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.</p>	CM, CL, AA, SIEE

2.1.5. Metodología

La metodología que se usará para el desarrollo de esta unidad didáctica se basará principalmente en clases magistrales impartidas por el profesor, pero tratando de atraer la atención del alumnado, para ello se fomentará la participación activa del alumnado dentro de las clases planteando preguntas y favoreciendo que los alumnos salgan a la pizarra a resolver ejercicios.

Durante toda la unidad se plantearán, de forma continua, trabajos individuales, tareas para casa, con el objetivo de fomentar la autonomía del alumno, así como ayudarle en la planificación del estudio de esta unidad. Asimismo, se les dará a los alumnos, al inicio de la unidad, una serie de problemas que hayan caído en pruebas de selectividad anteriores relacionados con el tema, con el fin de que tengan una mejor preparación. Estos ejercicios no son obligatorios, pero sí se reflejará de manera positiva en las notas, en caso de que los realicen.

En todo momento, los alumnos podrán interrumpir la clase para preguntar cualquier duda que les surja sobre lo explicado. Esta interrupción será educada y respetuosa hacia el profesor y sus compañeros.

2.1.6. Recursos

A lo largo de esta unidad didáctica se utilizarán los siguientes materiales:

- Libro de texto recomendado por el Departamento de Matemáticas (*Matemática II, Fernando Alcaide, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano, Vicente Rivière, Luis Sanz, editorial Savia Sm*).
- Fotocopias de actividades para el desarrollo de la unidad didáctica.
- Cuaderno de clase en el que los alumnos recogerán las actividades, ejercicios, problemas y explicaciones realizadas.
- Calculadora, útil en las actividades de cálculo de funciones.
- Pizarra, utilizada para la exposición de contenidos y corrección de actividades.
- Pantalla digital, utilizada para proyección de vídeos para ampliar el tema de sucesiones.

2.1.7. Temporalización

La totalidad de las sesiones se impartirán en el aula. La estructuración de los contenidos en las sesiones es la siguiente:

Sesión 1	Definición de función Recorrido y dominio de una función Límite de una función en un punto Límites laterales
Sesión 2	Límites en el infinito Cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales Propiedades límites
Sesión 3	Indeterminaciones de tipo 1^∞ Infinitésimos
Sesión 4	Sucesiones
Sesión 5	Continuidad de una función Tipos de discontinuidades
Sesión 6	Teorema de Bolzano Teorema de los valores intermedios de Darboux
Sesión 7	Teorema de Weiestrass Funciones acotadas
Sesión 8	Repaso y consolidación de contenidos

Las actividades que se encuentran aquí recogidas están extraídas del libro utilizado por el departamento: *Matemática II*, Fernando Alcaide, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano, Vicente Rivière, Luis Sanz, editorial Savia Sm.

SESIÓN 1.

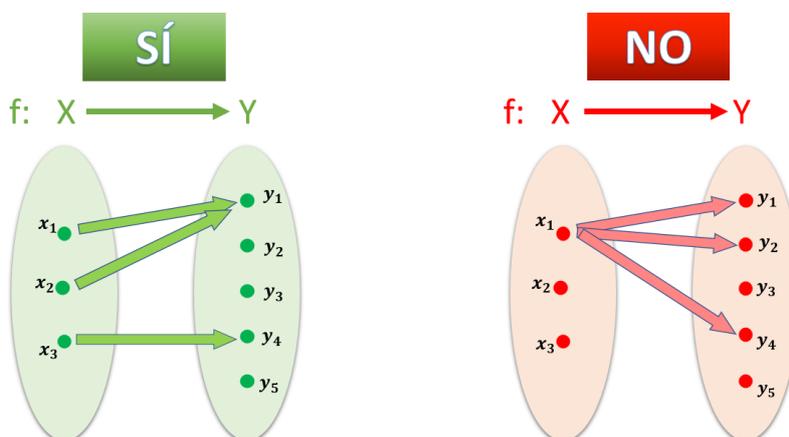
Se realizará una breve introducción sobre la importancia de esta unidad de límites y continuidad y su amplia utilidad en diversos campos como la física o la ingeniería con el objetivo de hacer llamativo el tema a los alumnos.

Al ser la primera unidad de análisis, se realizarán varias preguntas individuales para conocer el nivel en que se encuentran los alumnos. Serán preguntas sencillas, en las que se intentará comprobar si recuerdan conceptos básicos del año pasado, mediante la resolución de diversos ejercicios sencillos sobre resolución de límites. El profesor dirigirá la pregunta a aquellos alumnos que considere.

En esta primera sesión se comentarán brevemente varios símbolos matemáticos como \forall (para todo), \exists (existe), \Leftrightarrow (si y solo si) o \in (pertenece) con el fin de que los alumnos puedan entender

las definiciones que vienen en su libro de texto. De esta manera se les acercará, poco a poco, al lenguaje algebraico utilizado en las matemáticas.

Se definirá lo que es una función real de variable real y se hará uso del siguiente *visual thinking* para que comprendan mejor qué es y qué no una función.



Para que afiancen estos conceptos deberán resolver el siguiente ejercicio.

EJERCICIO. Calcular el dominio de las siguientes funciones:

i. $f(x) = x \cdot |x + 1| - 3x^2$

ii. $f(x) = \frac{|x+1|+x}{|x-1|-x}$

iii. $f(x) = x + 2 \cos x$

iv. $f(x) = \frac{2x}{1+\sin x}$

Posteriormente se definirá de manera formal límite de una función en un punto y límite laterales.

Se incidirá en la importancia de las siguientes afirmaciones:

- Una función tiene límite en un punto si y solo si posee los dos límites laterales y coinciden.
- Si una función tiene límites laterales en x_0 no implica que la función esté definida en ese punto.

Se planteará el siguiente ejercicio para aclarar estas cuestiones.

EJERCICIO. Hallar límites en $x=-1$, $x=1$ y $x=1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

SESIÓN 2.

Se preguntará a los alumnos si tienen alguna duda respecto a la sesión anterior y en caso afirmativo, se resolverá. En esta sesión se continuará explicando límites.

Se definirá formalmente límites en el espacio y se explicará el cálculo de límites de funciones polinómicas y funciones racionales. Asimismo, se verán una serie de propiedades de límites:

- Si el límite existe es único.
- Suma, resta, multiplicación, división y potencias de dos límites.

Posteriormente se realizarán varios ejercicios para consolidar lo explicado. En caso de que no se contara con el tiempo suficiente, se les mandarán como ejercicios de deberes a desarrollar en casa.

EJERCICIO. Resolver los siguientes límites

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^2 - 2x - 4}$

iii. $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{4x^2 + 1} - (2x + 1)]$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x$

v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{2 + x} - \sqrt{x})$

vi. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{x}}$

SESIÓN 3.

Se comienza la sesión resolviendo las nuevas posibles dudas planteadas por los alumnos y, en caso de no haber resuelto en la sesión anterior los ejercicios, se corregirían los que faltaran.

Se explica cómo se resuelven las indeterminaciones de tipo 1^∞ . Se mostrará la fórmula para resolverlas y cómo se puede hallar esa fórmula, puesto que muchos alumnos pueden preferir el razonamiento sencillo del proceso a memorizar una fórmula.

Para trabajar y ejemplificar este problema se proponen los siguientes límites:

EJERCICIO. Resolver los siguientes límites

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3+1}{x^2+1} \right)^{\frac{3}{x-1}}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{(\sqrt{2x^2+1}-x)}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^3-x^2-x+2}{x^2} \right)^{\frac{3-x^2}{x}}$

También veremos los infinitésimos y su utilización, entre los que destacan:

Cuando $x \rightarrow 0$	$x \sim \sin x$	$x \sim \operatorname{tg} x$	$x \sim \ln(1+x)$	$x \sim e^x - 1$
	$x \sim \operatorname{arc} \sin x$	$x \sim \operatorname{arctg} x$	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	
Cuando $x \rightarrow 1$	$x - 1 \sim \ln x$			

En caso de que se contara con el tiempo suficiente, se les podría dar a los alumnos alguna idea intuitiva de porqué se cumplen estas equivalencias con, por ejemplo, es sencillo de entender que la tangente de la función seno de x en 0 se comporta como x .

Se practicarán con los siguientes ejercicios.

EJERCICIO. Resolver los siguientes límites

- i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{x^2-4}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(7x)}{4x^2}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{2x-4}$

Y se propondrán los siguientes ejercicios de límites con parámetros que requieren de un mayor nivel cognitivo de demanda.

EJERCICIO. Hallar el valor del parámetro para que el límite tenga la solución marcada.

- i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3ax^3 - 2ax^2 + ax - 1}{x^2 - 6x^3} = 1$
- ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 2}{x^2 - 2x} \right)^{\frac{3x^2 - 1}{x}} = \frac{1}{e^3}$

SESIÓN 4.

Se comienza la sesión resolviendo las nuevas posibles dudas planteadas por los alumnos y, en caso de no haber resuelto en la sesión anterior los ejercicios, se corregirían los que faltaran.

En esta sesión se estudiarán las sucesiones, su monotonía, acotación y convergencia. Se aprovechará que las sucesiones son unos conceptos matemáticos que se pueden encontrar con gran facilidad en la naturaleza y en caso de que al final de la clase sobrara tiempo, se les ilustraría con el vídeo “Nature by Numbers” de Cristóbal Vila y se comentaría:

https://www.youtube.com/watch?v=kkGeOWYOFoA&ab_channel=Crist%C3%B3balVila

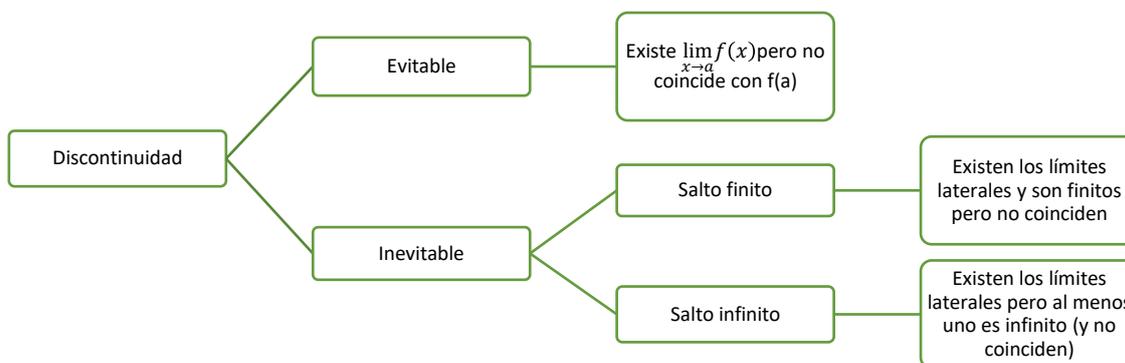
Se les propondrá el siguiente ejercicio para afianzar sus conocimientos.

EJERCICIO. Estudia la monotonía, la acotación y la convergencia de la siguiente función $c_n = \frac{2n+3}{2^n}$.

SESIÓN 5.

Se comienza la sesión resolviendo las nuevas posibles dudas planteadas por los alumnos y, en caso de no haber resuelto en la sesión anterior los ejercicios, se corregirían los que faltaran.

En esta sesión se estudiará la definición de continuidad de una función. Para iniciar esta sesión se podría plantear la eterna discusión que existe sobre si únicamente son continuas aquellas funciones que se pueden representar sin levantar el lápiz del papel. Tras una discusión guiada, se definirá formalmente lo que es una función continua y se preguntará si consideran que la definición formal y la “informal” son equivalentes. De esta forma garantizamos su atención, ya que una controversia en matemáticas, donde se considera que está todo fijado, les resulta llamativo. Tras aclarar todas las dudas con los ejemplos necesarios, se explicará la clasificación de discontinuidades que se pueden resumir con el siguiente esquema:



Se propondrán los siguientes ejercicios para que los discentes practiquen.

EJERCICIO. Ver si las siguientes funciones son continuas y clasificar sus discontinuidades si es que las tienen.

i. $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$

ii. $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

SESIÓN 6.

Se comienza la sesión resolviendo las nuevas posibles dudas planteadas por los alumnos y, en caso de no haber resuelto en la sesión anterior los ejercicios, se corregirían los que faltaran.

En esta sesión se comenzará enunciando y demostrando el teorema de Bolzano. Se incluye la demostración puesto que no se trata de un razonamiento muy complejo y los alumnos de este curso son capaces de entenderlo.

Para consolidar este teorema se proponen los siguientes ejercicios.

EJERCICIO. Analiza si las siguientes ecuaciones tienen soluciones en los intervalos dados.

i. $x^3 - 8x^2 + 3 = 0$ en $[-1,0]$

ii. $x = x \operatorname{sen} x + \cos x$ en $[-\pi, \pi]$

EJERCICIO. Razona que las gráficas de $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$ y $g(x) = e^x$ se cortan en algún punto con abscisa entre -1 y 0.

Se debería tomar la función $F(x) = f(x) - g(x)$.

Posteriormente, se enunciará y demostrará el teorema de los valores intermedios o teorema de Darboux.

Para afianzar este teorema se proponen los siguientes ejercicios. El último ejercicio está sacado de un problema de EBAU del 2020, por lo que se incidiría en él y se abordaría muy cuidadosamente.

EJERCICIO.

Sea la función $f(x) = 2x + 1$. ¿Se puede afirmar que la función toma todos los valores del intervalo $[1,5]$?

EJERCICIO.

Determina si $f(x) = \text{sen}(x) + e^x$ toma el valor $y = 1/2$.

Este ejercicio puede hacerse utilizando el teorema de Darboux o aplicando Bolzano en la función $g(x) = \text{sen}x + e^x - 1/2$.

EJERCICIO.

Demuestre que la ecuación $x^4 + 3x + \text{sen}x$ tiene una solución en $[0,2]$ y pruebe que es única.

SESIÓN 7.

Se empieza la sesión resolviendo las nuevas posibles dudas planteadas por los alumnos y, en caso de no haber resuelto en la sesión anterior los ejercicios, se corregirían los que faltaran.

Esta sesión será la última en la que se explique teoría referida a la unidad. Se enunciará y explicará el teorema de Weierstrass. A continuación, se explicarán las funciones acotadas.

A modo de resumen, se realizará un cuadro esquemático para afianzar los teoremas estudiados, el resultado final será este:

TEOREMA	HIPÓTESIS	TESIS
Bolzano	f continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$	Existe $c \in (a, b)$, $f(c) = 0$.
Darboux	f continua en $[a, b]$	f toma todos los valores intermedios entre el máximo y el mínimo.
Weierstrass	f continua en $[a, b]$	f alcanza el máximo y el mínimo absoluto.

Finalmente se resolverán ejercicios.

EJERCICIOS.

- i. Justifica si $f(x) = 4/x$ está acotada en $[1,3]$.
- ii. Justifica si $f(x) = \frac{3x}{x-2}$ está acotada en $[0,3]$.

SESIÓN 8.

Esta sesión será preparatoria del examen, para ello se realizarán diferentes ejercicios expresamente diseñados, a la par que se resuelven dudas, se realizarán los ejercicios que ellos deseen.... De esta manera, se pretende consolidar los conocimientos de la unidad entre todos los alumnos.

2.1.8. Atención a la diversidad

El principio de atención a la diversidad debemos considerarlo en el Bachillerato como un modelo de enseñanza que trata de atender la heterogeneidad del alumnado, haciendo un modelo de enseñanza adaptativo.

Se ofrecen una serie de medidas generales, en caso de que fueran necesarias.

Si contamos entre nuestro alumnado con algunos que posean un ritmo de aprendizaje más elevado, se les podría mandar ejercicios de ampliación que requieran de mayor medida cognitiva, según la clasificación de Stein Smith. Por ejemplo, añadiendo a los límites valores absolutos.

EJERCICIO. *Calcula los siguientes límites*

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

EJERCICIO. *Calcula el siguiente límite, estudiando previamente los límites laterales.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}$$

EJERCICIO. Calcula los siguientes límites

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{2n^2}$

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{n^2+1}$

iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{2}{n} \right) + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{3}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right]$

En caso de contar con alumnos que tengan un ritmo de aprendizaje más lento, se pueden diseñar actividades más sencillas con el fin de que asimilen lo básico. Se puede proponer una ficha de límites que sirva como repaso a los contenidos vistos en 1º de Bachillerato.

2.1.9. Criterios e instrumentos de evaluación

La evaluación debe ajustarse a las competencias, los objetivos y los contenidos de la asignatura. Por ello, la evaluación de esta unidad didáctica consta de:

- Un examen que se realizará de manera conjunta con la siguiente unidad, Derivadas. Tratará de una prueba escrita al que le corresponderá un porcentaje de la nota del trimestre.
- Puntuación del trabajo y actitud en clase, sumará hasta el 30%. Los alumnos, desde el primer día, conocerán la disposición del docente por corregirles ejercicios que ellos mismos entreguen, voluntariamente realizados. Se valorará positivamente esta acción, puesto que fomenta las competencias de aprender a aprender y sentido de la iniciativa.

La nota de la evaluación se distribuirá de la forma especificada en la programación didáctica.

Se considera que el alumno aprueba si obtiene una calificación final de 5 o superior. En caso contrario, deberá presentarse al examen de recuperación del trimestre correspondiente.

2.2.Unidad 11. Aplicaciones de las derivadas

2.2.1. Introducción

Se propone el desarrollo de la unidad didáctica referida a aplicaciones de las derivadas en el curso de 2º de Bachillerato en la asignatura de Matemáticas II. Esta unidad didáctica será la tercera dedicada al bloque de Análisis, tras haber estudiado previamente las unidades de límites y continuidad y derivadas.

La legislación en la que se basa esta unidad es la Orden EDU/363/2015, de 4 de mayo en la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la comunidad de Castilla y León.

Se realizarán un total de 9 sesiones para el desarrollo de esta unidad, como se ha visto en el capítulo anterior en el apartado de Temporalización, que se concretarán de forma detallada más adelante.

En ella se realizará un breve repaso sobre contenidos estudiados en cursos previos como son los conceptos de monotonía de funciones, es decir, su crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos de funciones. Se explicarán nuevas definiciones y teoremas tales como el teorema de Rolle y del Valor Medio, la resolución de límites por L' Hôpital, la concavidad y la convexidad y se resolverán problemas de optimización.

Las aplicaciones de las derivadas son múltiples, puesto que las derivadas fueron “descubiertas” al intentar resolver dos tipos de problemas: determinar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos y el cálculo de la velocidad instantánea de un objeto. Son esenciales a la hora de optimizar una función, como puede ser construir un envase utilizando la menor cantidad de material posible, hacer máximo unos beneficios o mínimos unos costes... Enunciando estos problemas es obvio la importancia del estudio de las aplicaciones de las derivadas en la Economía, Física y vida cotidiana.

En definitiva, un buen control y base de este tema será fundamental para que los alumnos puedan continuar aprendiendo en las siguientes unidades didácticas de análisis, en especial la que sigue, dedicada a la representación de funciones, y de cara a sus futuros grados profesionales.

2.2.2. Contribuciones a las competencias básicas

Las competencias clave vienen marcadas por la Orden ECD/65/2015 del 21 de enero. Se encuentran expuestas a continuación. La forma de contribuir a su desarrollo en esta unidad didáctica está concretada en el apartado 2.2.4. Se realiza un breve repaso de cada una, puesto que han sido explicadas previamente.

- **Competencia en comunicación lingüística (CL):** Utilización del lenguaje como instrumento de comunicación oral y escrita. Se fomentará su desarrollo haciendo uso de conceptos matemáticos específicos y se utilizará de forma constante el lenguaje matemático con el objetivo de que el alumno desarrolle y amplíe su vocabulario y lo utilice de forma rigurosa y precisa.
- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CM):** es obvio que esta competencia será la que el alumno desarrollará más a lo largo de las clases de matemáticas. Se deberá hacer uso del razonamiento matemático para producir e interpretar informaciones, para conocer más sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana. Esta competencia ayudará al alumno a valorar la validez de argumentaciones e informaciones, a seguir razonamientos válidos a la hora de aplicar los teoremas impartidos y a interpretar los resultados obtenidos y si tienen sentido en los distintos problemas de optimización o de otro tipo.
- **Competencias Digitales (CD):** Habilidades para buscar y obtener información y transformarla en conocimiento mediante el uso del aula virtual, donde colgaremos diferentes actividades y recursos relacionados con la unidad o se proporcionarán diferentes webs donde los alumnos pueden ampliar información vista en clase, como por ejemplo la aplicación *Wolfram Alpha* para que puedan comprobar las soluciones a los ejercicios propuestos, así como del *Geogebra* para que puedan representar las funciones pedidas y verifiquen los puntos críticos. También será de especial utilidad el correcto uso de calculadora para ciertas actividades.
- **Competencia aprender a aprender (AA):** Aprender a aprender supone iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuarlo de manera autónoma. En este sentido, el alumno tendrá a su alcance material suficiente dado por el profesor para profundizar en los conocimientos impartidos. Se trabajará en la autonomía en la resolución de problemas para fomentar el desarrollo de la autonomía personal, la perseverancia y el espíritu crítico.
- **Competencias sociales y cívicas (CSC):** Esta competencia permite vivir en sociedad, comprender la realidad social del mundo en que se vive y ejercer la ciudadanía democrática. Se trabajará en el reconocimiento y la valoración de las aportaciones ajenas, el aprendizaje cooperativo y el respeto mutuo.
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE):** Se fomentará la resolución de problemas que contribuye a desarrollar esta competencia ya que serán útiles para planificar estrategias, asumir retos, controlar tiempo y recursos en diversos procesos. Será necesario apoyar las actitudes de confianza y autonomía ante la resolución de los problemas que se aborden. Al tener los alumnos a su disposición problemas de diferentes niveles, podrán profundizar en su estudio realizando aquellos que ellos elijan.

- **Conciencia y expresiones culturales (CEC):** Se contribuirá a esta competencia desarrollando actividades dentro de un contexto cultural con el fin de relacionar nuestra unidad con problemas del mundo real. En esta unidad lo podremos conseguir gracias a los problemas de optimización.

2.2.3. Objetivos

La Orden EDU/363/2015 del 4 de mayo tiene por objeto establecer el currículo y regular la implantación, evaluación y desarrollo del Bachillerato en la comunidad de Castilla y León. Esta orden debe aplicarse a todos los centros docentes y, por tanto, también al IES Juan de Juni.

Objetivos comunes del curso:

- Expresar de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. Ser capaz de redactar un informe para comunicar las ideas matemáticas de forma rigurosa y ordenada, obtenidas en la resolución de un problema o una demostración.
- Utilizar razonamientos y estrategias de resolución de problemas, para realizar los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
- Demostrar propiedades o teoremas sencillos relativos a contenidos matemáticos propios de este curso.
- Planificar y practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de:
 - o la resolución de un problema;
 - o la generalización de propiedades y leyes matemáticas;
 - o la profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos.
 - o Y elaborar un informe escrito riguroso y preciso que reúna el proceso de investigación realizado.
- Desarrollar procesos matemáticos en contextos de la realidad cotidiana a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.
- Valorar y apreciar las matemáticas como recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana.
- Fomentar las actitudes personales relacionadas con las matemáticas.
- Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.
- Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones futuras.

- Manejar las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, para poder realizar cuestiones matemáticas tales como representación de gráficas, cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, ...
- Usar regularmente y de forma correcta las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de aprendizaje.

Objetivos específicos de la unidad didáctica:

- Representar geoméricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.
- Enunciar el teorema de Rolle correctamente. Conocer su demostración y saber cómo y cuándo aplicarlo.
- Enunciar el teorema del valor medio correctamente. Conocer su demostración y saber cómo y cuándo aplicarlo.
- Resolver límites aplicando la regla de L' Hôpital.
- Interpretar geoméricamente el comportamiento de una función, sabiendo determinar los intervalos en los que crece o decrece, así como sus extremos relativos y absolutos.
- Interpretar geoméricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.
- Conocer la diferencia entre extremos relativos y absolutos.
- Interpretar geoméricamente el comportamiento de una función, sabiendo determinar los intervalos en los que es cóncava o convexa, así como sus puntos de inflexión.
- Identificar propiedades y describir el comportamiento de una función, a partir de la información que proporciona la derivada.
- Aplicar el concepto de derivada y sus propiedades para la resolución de problemas.
- Resolver problemas de optimización haciendo uso de las derivadas.
- Identificar y resolver problemas en situaciones de la vida real aplicando el cálculo de las derivadas.
- Utilizar programas informáticos capaces de calcular gráficamente la derivada de una función.

2.2.4. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje

Los contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje que se tendrán en cuenta son los que se establecen en la Orden EDU/363/2015 del 4 de mayo.

Los contenidos serán los siguientes:

- Teorema de Rolle.
- Teorema del valor medio de Lagrange.

- La regla de L`Hôpital. Aplicación al cálculo de límites.
- Crecimiento y decrecimiento de una función.
- Máximos y mínimos de una función.
- Concavidad y convexidad de una función.
- Puntos de inflexión de una función.
- Problemas de optimización.

En la tabla siguiente se recoge la relación de los criterios de evaluación con los estándares de aprendizaje, así como su contribución a las competencias clave

CONTENIDOS ESPECÍFICOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias básicas
Teorema de Rolle	<p>Representar geoméricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.</p> <p>Enunciar el teorema de Rolle correctamente.</p> <p>Conocer su demostración y saber cómo y cuándo aplicarlo.</p> <p>Utilizar programas informáticos capaces de calcular gráficamente la derivada de una función.</p>	<p>Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.</p> <p>Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.</p> <p>Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p> <p>Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.</p> <p>Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos funcionales.</p> <p>Reflexiona sobre el proceso de demostración (estructura, método, lenguaje y símbolos, pasos clave, etc.).</p> <p>Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.</p>	CM, CL, CD, AA

<p>Teorema del valor medio</p>	<p>Representar geoméricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.</p> <p>Enunciar el teorema del valor medio correctamente. Conocer su demostración y saber cómo y cuándo aplicarlo.</p> <p>Utilizar programas informáticos capaces de calcular gráficamente la derivada de una función.</p>	<p>Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.</p> <p>Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.</p> <p>Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p> <p>Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.</p> <p>Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos funcionales.</p> <p>Reflexiona sobre el proceso de demostración (estructura, método, lenguaje y símbolos, pasos clave, etc.).</p> <p>Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.</p>	<p>CM, CL, CD, AA</p>
--------------------------------	--	---	-----------------------

<p>La regla de L' Hôpital. Aplicación al cálculo de límites.</p>	<p>Resolver límites aplicando la regla de L' Hôpital.</p>	<p>Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p>	<p>CM, CL, CD, AA</p>
<p>Crecimiento y decrecimiento de una función</p>	<p>Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. Representar geoméricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo. Interpretar geoméricamente el comportamiento de una función, sabiendo determinar los intervalos en los que crece o decrece, así como sus extremos relativos y absolutos. Interpretar geoméricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.</p>	<p>Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p>	<p>CM, CL, CD, AA</p>

	<p>Identificar propiedades y describir el comportamiento de una función, a partir de la información que proporciona la derivada.</p> <p>Utilizar programas informáticos capaces de calcular gráficamente la derivada de una función.</p>		
Máximos y mínimos de una función	<p>Representar geoméricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.</p> <p>Interpretar geoméricamente el comportamiento de una función, sabiendo determinar los intervalos en los que crece o decrece, así como sus extremos relativos y absolutos.</p> <p>Interpretar geoméricamente el comportamiento local de una función en el entorno de un punto, según el valor de su derivada en ese punto.</p> <p>Conocer la diferencia entre extremos relativos y absolutos.</p> <p>Identificar propiedades y describir el comportamiento de una función, a partir de la información que proporciona la derivada.</p> <p>Utilizar programas informáticos capaces de calcular gráficamente la derivada de una función.</p>	<p>Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.</p> <p>Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.</p> <p>Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p>	CM, CL, CD, AA

<p>Concavidad y convexidad de una función.</p>	<p>Representar geoméricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.</p> <p>Interpretar geoméricamente el comportamiento de una función, sabiendo determinar los intervalos en los que es cóncava o convexa, así como sus puntos de inflexión.</p> <p>Identificar propiedades y describir el comportamiento de una función, a partir de la información que proporciona la derivada.</p> <p>Utilizar programas informáticos capaces de calcular gráficamente la derivada de una función.</p>	<p>Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.</p> <p>Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.</p> <p>Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p>	<p>CM, CL, CD, AA</p>
<p>Puntos de inflexión de una función</p>	<p>Representar geoméricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.</p> <p>Interpretar geoméricamente el comportamiento de una función, sabiendo determinar los intervalos en los que es cóncava o convexa, así como sus puntos de inflexión.</p> <p>Identificar propiedades y describir el comportamiento de una función, a partir de la información que proporciona la derivada.</p> <p>Utilizar programas informáticos capaces de calcular gráficamente la derivada de una función.</p>	<p>Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.</p> <p>Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.</p> <p>Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p>	<p>CM, CL, CD, AA</p>

<p>Problemas de optimización</p>	<p>Representar geoméricamente la derivada de una función en un punto y en un intervalo.</p> <p>Identificar propiedades y describir el comportamiento de una función, a partir de la información que proporciona la derivada.</p> <p>Aplicar el concepto de derivada y sus propiedades para la resolución de problemas.</p> <p>Resolver problemas de optimización haciendo uso de las derivadas.</p> <p>Identificar y resolver problemas en situaciones de la vida real aplicando el cálculo de las derivadas.</p> <p>Utilizar programas informáticos capaces de calcular gráficamente la derivada de una función.</p>	<p>Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.</p> <p>Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.</p> <p>Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.</p> <p>Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.</p> <p>Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes.</p> <p>Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones similares futuras.</p>	<p>CM, CL, CD, AA, SIEE, CEC</p>
----------------------------------	---	--	----------------------------------

2.2.5. Metodología

La metodología que se usará para el desarrollo de esta unidad didáctica se basará principalmente en clases magistrales impartidas por el profesor. Clases que huirán de la monotonía y el aburrimiento, fomentando para ello la participación activa del alumnado dentro de las clases, planteando preguntas y favoreciendo que los alumnos salgan a la pizarra a resolver ejercicios.

Durante toda la unidad se realizarán de forma continua trabajos individuales, tareas para casa, con el objetivo de fomentar la autonomía del alumno así como ayudarle en la planificación del estudio de esta unidad. Además, se facilitará a los alumnos, al inicio de la unidad, una serie de problemas que incluidos en pruebas de selectividad, relacionados con el tema, al objeto de que les ayude en su preparación y ganar confianza. Estos ejercicios no son obligatorios, pero sí se reflejará de manera positiva en las notas en caso de que se realicen.

En todo momento los alumnos podrán interrumpir educadamente la clase para preguntar cualquier duda que les surja sobre lo explicado.

2.2.6. Recursos

A lo largo de esta unidad didáctica se utilizarán los siguientes materiales:

- Libro de texto recomendado por el Departamento de Matemáticas (*Matemática II, Fernando Alcaide, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano, Vicente Rivière, Luis Sanz, editorial Savia Sm*).
- Fotocopias de actividades para el desarrollo de la unidad didáctica.
- Cuaderno de clase en el que los alumnos recogerán las actividades, ejercicios, problemas y explicaciones realizadas.
- Calculadora, útil en las actividades de cálculo de funciones.
- Pizarra, utilizada para la exposición de contenidos y corrección de actividades.
- Pantalla digital, utilizada para enseñar la representación de las distintas funciones que se puedan pedir.

2.2.7. Temporalización

La totalidad de las nueve sesiones se impartirán en el aula. La estructuración de los contenidos en las sesiones es la siguiente:

Sesión 1	Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Teorema de Rolle
Sesión 2	Teorema del Valor Medio
Sesión 3	La regla de L' Hôpital y su aplicación.
Sesión 4	Regla de L' Hôpital y su aplicación.
Sesión 5	Crecimiento y decrecimiento. Puntos críticos: máximos y mínimos
Sesión 6	Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.
Sesión 7	Problemas de Optimización
Sesión 8	Problemas de Optimización
Sesión 9	Repaso y consolidación de contenidos

SESIÓN 1.

Se realizará una breve introducción sobre la importancia de la aplicación de las derivadas y su amplia utilidad en diversos campos de trabajo como la física o la economía con el objetivo de hacer llamativo el tema a los alumnos y que vean que aquello que van a estudiar en la unidad sí tiene interés y gran utilidad. En esta introducción, también se hablará a los alumnos de la historia y de cómo y de quién descubrieron las derivadas y la disputa entablada entre Newton y Leibniz.

Seguidamente se hará un brevísimo repaso, ya que justo se acabaría de dar en el tema previo, sobre la interpretación geométrica de una derivada en un punto y se procederá a enunciar y demostrar el Teorema de Rolle, que indica bajo qué condiciones se puede asegurar que hay un punto con tangente horizontal.

Posteriormente se procederá a realizar una serie de ejercicios en los que fuera necesario utilizar dicho teorema. Se enuncian algunos.

***EJERCICIO.** Sea $f(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2 + 3$. Demuestra que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(-1, 2)$.*

EJERCICIO. Sea $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}$. Comprueba que f es continua en \mathbb{R} , $f(-8) = f(8)$ y en cambio $f'(x)$ no se anula nunca. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle?

EJERCICIO. Para la siguiente función, demuestra que existe un $\alpha \in (1,3)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

$$f(x) = (x - 2)e^{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}x\right)$$

SESIÓN 2.

Se preguntará a los alumnos si tienen dudas respecto a la sesión anterior y en caso afirmativo, se resolverán.

El principal contenido de esta sesión será explicar y demostrar el teorema del Valor Medio, que garantiza bajo qué condiciones existe un punto en el que la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

A continuación, se realizarán algunos ejercicios en los que es necesario aplicar este teorema.

EJERCICIO.

- Comprueba que $f(x) = \frac{3}{x}$ satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[1,3]$.
- Encuentra el número c cuya existencia asegura dicho teorema.

EJERCICIO. Dada la función $f(x) = \begin{cases} mx & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- Calcula los valores de a , b y m para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ y tenga un extremo relativo en $x = 3$.
- Para los valores de $a = 1$, $b = -6$ y $m = -4$, calcula, si existe, un punto $c \in (0,5)$ tal que la tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = c$ sea paralela al segmento que une $O(0,0)$ y $A(5,-4)$.

EJERCICIO. Demuestre que para $x > 0$ se verifica:

$$\arctg(2x) - \arctg(x) < \frac{x}{1+x^2}$$

SESIÓN 3

Se comenzará la sesión resolviendo las dudas que tengan los alumnos sobre sesiones anteriores y corrigiendo, si es que falta por corregir, algún ejercicio.

Esta sesión estará dedicada a los límites y a su resolución utilizando la regla de L' Hôpital. Antes de comenzar explicándola, se hablará sobre historia de las matemáticas, y de cómo pese a que la regla lleve el nombre del marqués de L' Hôpital, no fue él quien la descubrió, sino quien la desarrolló y demostró fue Johann Bernoulli. Sin embargo, el marqués pagaba por publicar los descubrimientos matemáticos de Bernoulli bajo su nombre.

La regla de L' Hôpital indica que si f y g son dos funciones derivables en un entorno del punto $x = a$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y es: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla de L' Hôpital también puede usarse si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, e incluso si x tiende a ∞ .

Se deberá incidir en la importancia de que se cumplan las condiciones para poder aplicar la regla y, se realizará un ejemplo para que vean esta importancia.

Se calcularía $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2 - \cos x}$. En este caso, $f(0) = 0$, y $g(0) = -1$ por lo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2 - \cos x} = 0$. Si se aplicara L' Hôpital sin comprobar las condiciones, se obtendría:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{2x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{2 + \cos x} = \frac{2}{3}$$

Y este límite sería incorrecto.

Tras incidir en la importancia de la comprobación de las condiciones, se realizarán más ejercicios.

EJERCICIO. *Calcula los siguientes límites*

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \frac{x}{\sin x}}$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x + 3)^{\frac{1}{x}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x(x^2 - x - 2)}{2x^2 - 8x + 8}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} (a^x - ax)^{\frac{a}{x}}, a > 0$

SESIÓN 4

Se comenzará la sesión resolviendo las dudas que tengan los alumnos sobre sesiones anteriores y corrigiendo, si es que falta por corregir, algún ejercicio.

En esta sesión, se continuarán realizando ejercicios donde es necesario aplicar la regla de L' Hôpital. Se proponen a continuación algunos ejemplos.

EJERCICIO. *Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0) = 1$,*

$f'(0) = 2$. Se considera la función $g(x) = 2(f(x))^2$ y se pide:

a) *Hallar la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en $x = 0$.*

b) *Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{e^{-x} - 1}$*

EJERCICIO. *Determina, en cada caso, el valor de a que hace que la función*

sea continua en todo \mathbb{R} .

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{3x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) $g(t) = \begin{cases} at^2, & \text{si } t \leq 1 \\ (t^2 - 1) \ln(t - 1), & \text{si } t > 1 \end{cases}$

EJERCICIO. Sea $f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ la función derivable que para $x \neq 0$ verifica que $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}$.

- a) ¿Cuánto vale $f(0)$?
- b) ¿Cuánto vale $f'(0)$?

SESIÓN 5

Se comenzará la sesión resolviendo las dudas que tengan los alumnos sobre sesiones anteriores y corrigiendo, si es que falta por corregir, algún ejercicio.

En esta sesión se realizará un repaso previo sobre los conocimientos adquiridos en cursos anteriores sobre el crecimiento, decrecimiento y extremos relativos de las funciones.

- Si $f'(a) > 0$ entonces la función $y = f(x)$ es creciente en $x = a$.
- Si $f'(a) < 0$ entonces la función $y = f(x)$ es decreciente en $x = a$.

Se dice además que:

- Una función alcanza en $(a, f(a))$ un máximo global o absoluto si $f(a)$ es el mayor valor que alcanza la función.
- Una función alcanza en $(a, f(a))$ un mínimo global o absoluto si $f(a)$ es el menor valor que alcanza la función.
- Una función alcanza en $(a, f(a))$ un máximo local o relativo si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el mayor valor de la función en ese intervalo.
- Una función alcanza en $(a, f(a))$ un mínimo local o relativo si existe un intervalo que contiene a a en el que $f(a)$ es el menor valor de la función en ese intervalo.

Se denominan puntos singulares o puntos críticos de $y = f(x)$ a los puntos en los que se anula la derivada. Estos puntos singulares son los puntos en los que la función tiene un máximo o un mínimo.

A continuación, se resolverán ejercicios para afianzar estos conceptos.

EJERCICIO. Halla los máximos y mínimos de la función: $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$.

EJERCICIO. Dada la función $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determina los valores de los parámetros a y b sabiendo que $f(x)$ cumple las siguientes propiedades:

- a) $f(x)$ alcanza su máximo en el punto de abscisa $x = 100$.
- b) La gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $A(49, 91)$.

EJERCICIO. Considera la función $f(x) = xg(x)$. Sabiendo que:

- La función $g(x)$ es continua, derivable y tiene un máximo en $x = 1$.
- $f(1)g(1) = 4$
 - a) ¿Tiene la función f un máximo en $x = 1$? Justifica tu respuesta.
 - b) Si además sabemos que $g(x) = ax^2 + bx + c$ calcula los valores de a, b, c para que f tenga un mínimo en $x = 0$.

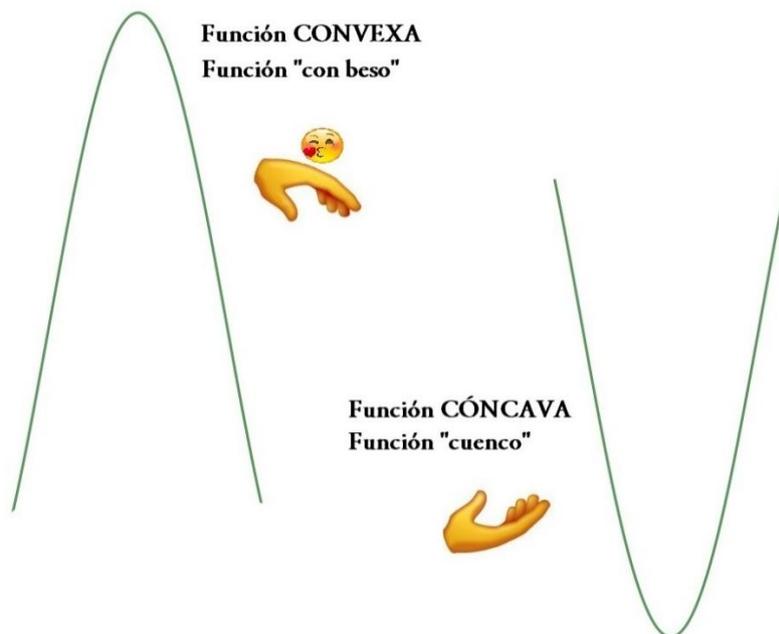
EJERCICIO. Demuestra que para todo número real positivo, P , se cumple que $\ln(1 + P) > \frac{P}{1+P}$. Para ello sigue estos pasos:

- i. Demuestra que la función $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{1+x}$, es continua y derivable en el intervalo $(0, \infty)$.
- ii. Demuestra que $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $(0, \infty)$.
- iii. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- iv. Concluye la demostración.

SESIÓN 6

Se comenzará la sesión resolviendo las dudas que tengan los alumnos sobre sesiones anteriores y corrigiendo, si es que falta por corregir, algún ejercicio.

En esta sexta sesión se estudiará la convexidad y concavidad de una función, así como los puntos de inflexión. Como generalmente suele haber problemas para entender la diferencia entre ambas, se utilizará la siguiente regla mnemotécnica:



Se estudiará:

- f es convexa en $[a, b]$ si $f'' > 0$.
- f es cóncava en $[a, b]$ si $f'' < 0$.
- Si la función $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión, es decir, cambia la concavidad, en $x = a$, y existe la segunda derivada, entonces $f''(a) = 0$.

Posteriormente, se realizarán ejercicios para afianzar y aclarar los conceptos explicados.

EJERCICIO. Halla los valores de m para los que la función $f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$ es siempre cóncava.

EJERCICIO. De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Se sabe que:

- Tiene un máximo en $x = -1$.
- Su gráfica corta al eje X en el punto de abscisa $x = -2$.
- Tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$.

Calcula a , b , c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.

EJERCICIO. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b , sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x - 3$

SESIÓN 7

Se comenzará la sesión resolviendo las dudas que tengan los alumnos sobre sesiones anteriores y corrigiendo, si es que falta por corregir, algún ejercicio.

En esta sesión se introducirán los problemas de optimización, son aquellos problemas que buscan maximizar o minimizar el valor de una variable. Es fácil ver la relación que tienen estos problemas con la vida diaria de los alumnos y puede resultar más sencillo atraer a los estudiantes al ver de forma tan directa su utilidad.

Se propondrán varios, entre ellos los típicos de la caja de zapatos, el bote de tomate, beneficios económicos...

EJERCICIO. Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Disponemos de 192 m^2 de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de la piscina de manera que su capacidad sea máxima.

EJERCICIO. Una tienda vende aceite a 2 € el litro. Al vender x litros los costes de todo tipo (expresados en euros) son $0,5x + Cx^2$. Se sabe que el beneficio máximo se obtiene vendiendo 750 L . Encuentra el valor de C y el beneficio máximo obtenido.

EJERCICIO. De entre todos los números reales positivos x, y , tales que $x + y = 10$, encuentra aquellos para los que el producto $p = x^2y$ es máximo.

SESIÓN 8

Se comenzará la sesión resolviendo las dudas que tengan los alumnos sobre sesiones anteriores y corrigiendo, si es que falta por corregir, algún ejercicio.

En esta sesión se continuarán realizando problemas de optimización.

EJERCICIO. Dados los puntos $A(0,3)$ y $B(4,5)$, señalamos un punto M en el eje X tal que sea mínima la distancia $S = AM + MB$. Obtén el punto M .

EJERCICIO. En un cono de radio R y altura h inscribimos un cono invertido con el vértice en el centro de la base. Calcula las dimensiones del cono pequeño para que su volumen sea máximo

EJERCICIO. Un segmento de longitud l se apoya en los ejes coordenados del primer cuadrante determinando con ellos un triángulo rectángulo. Hallar el valor mínimo de la abscisa en que se apoya para que el área del triángulo mencionado, de hipotenusa l , sea máximo.

SESIÓN 9

Esta sesión será preparatoria para el examen. Se realizarán diferentes ejercicios que se diseñarán específicamente para los alumnos y se resolverán todas las dudas, así como los ejercicios que ellos quieran que se realicen. De esta manera, se busca consolidar los conocimientos de la unidad entre todos los discentes.

2.2.8. Atención a la diversidad

El principio de atención a la diversidad debemos considerarlo en el Bachillerato como un modelo de enseñanza que trata de atender la heterogeneidad del alumnado, haciendo un modelo de enseñanza adaptativo.

Se ofrecen una serie de medidas generales en caso de que fueran necesarias:

Si contamos entre nuestro alumnado con alumnos con altas capacidades matemáticas se les podrá mandar como ejercicios de ampliación algunos que requieran de mayor medida cognitiva según la clasificación de Stein Smith. Por ejemplo, añadiendo valores absolutos en las funciones, o dificultando los problemas de optimización.

EJERCICIO. Si a es un número positivo, calcula el mínimo de $\frac{a+x}{\sqrt{ax}}$ con $x > 0$. A partir del resultado obtenido, demuestra que la media aritmética de dos números positivos es siempre mayor o igual que la media geométrica.

EJERCICIO. Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + k & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Halla el valor de k para que f sea continua en \mathbb{R}
- ¿Verifica f las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, \pi + 1]$.
- ¿Existe algún número c para el que $f'(c)$ coincida con la pendiente de la recta que une los puntos de la curva de abscisas 0 y $\pi + 1$?

En caso de contar con alumnos que tengan un ritmo de aprendizaje más lento se pueden diseñar actividades más sencillas con el fin de que asimilen los conceptos básicos. Se puede proponer además una ficha de funciones para que afiancen continuidad, puntos críticos, con ejercicios de 1º de Bachillerato.

2.2.9. Criterios e instrumentos de evaluación

La evaluación debe ajustarse a las competencias, los objetivos y los contenidos de la asignatura. Por ello, la evaluación de esta unidad didáctica consta de:

- Un examen que se realizará de manera conjunta con la siguiente unidad, *Representación de funciones*. Consistirá de una prueba escrita que corresponderá al porcentaje de la nota del trimestre.
- Puntuación del trabajo y actitud en clase, sumará hasta el 30%. Los alumnos desde el primer día conocerán la disposición del docente por corregir ejercicios que ellos mismos entreguen voluntariamente realizados. Se valorará positivamente esta acción puesto que fomenta las competencias de aprender a aprender y sentido de la iniciativa.

La nota de la evaluación se distribuirá de la forma especificada en la programación didáctica.

Se considera que el alumno aprueba si obtiene una calificación final de 5 o superior. En caso contrario, deberá presentarse al examen de recuperación del trimestre correspondiente.

Conclusiones

Este trabajo ha buscado reflejar la importancia que adquiere la programación didáctica en la labor de cualquier docente a la hora de desarrollar su trabajo en la clase. El principal objetivo de una programación es establecer el marco de referencia que ayude y oriente a los profesores en el desarrollo de su trabajo en el aula, evitando la improvisación, los cambios de criterio, facilitando la toma de decisiones, subsanando errores que se han cometido con anterioridad... es decir, ayuda a aplicar un método de trabajo y enseñanza que tenga por objetivo alcanzar el adecuado aprendizaje de los alumnos. Con su seguimiento se estará labrando el camino hacia una enseñanza de más calidad.

Con todo, no se debe plantear la idea de una programación didáctica inamovible, fija o estanca, sino que tiene que plantearse la programación didáctica como algo cambiante, flexible y adaptativo a cada grupo, a cada momento y a cada circunstancia. Para ello, el profesor ha de ser capaz de encontrar el difícil equilibrio entre las competencias generales definidas para la materia de Matemáticas II de 2º de Bachillerato y los contenidos concretos que tienen que impartirse al grupo escolar específico. Y no se puede olvidar, tampoco, que es imprescindible tener presentes las necesidades particulares de cada alumno.

Ejemplo de ello, fueron las prácticas. Se especificó y planeó detalladamente cada clase a impartir y no se llegó a impartir todo lo planeado. Los alumnos no recordaban muchas veces conceptos estudiados en cursos anteriores lo que retrasó el avance de las clases y hubo que hacer una reducción de conceptos y actividades a desarrollar.

Por ello, aunque en ocasiones no se pueda cumplir con los objetivos marcados, el hecho no puede verse como un fracaso, al contrario, ayudará a mejorar y adecuar mejor el desarrollo del curso para otras ocasiones.

Una buena programación se convierte en una herramienta de ayuda imprescindible en la labor del docente ya que:

- 1.- En ella se reflejan los objetivos educativos y competenciales que deben alcanzar o desarrollar los alumnos.
- 2.- Será la guía a la hora de organizar las actividades y tareas que se crean necesarias para que el alumnado alcance los objetivos educativos propuestos. En ella se recogerán y desarrollarán cuantas acciones y trabajos se consideren necesarios para alcanzar la meta propuesta.
- 3.- Es muy interesante también tener en cuenta la información que aporta sobre el desarrollo del alumnado y así nos ayudará a evaluar los resultados obtenidos tanto a nivel del conjunto de la clase como de manera individual.

4.- Ante estas premisas, es evidente que su seguimiento ayuda a conseguir un aprendizaje de calidad, pues dicho aprendizaje está enfocado en objetivos de grupo, pero sin olvidar los individuales. Y tampoco podrá desligarse de la instrucción recibida por otros grupos del centro.

Por todo ello creo que la programación didáctica es una herramienta muy práctica y útil de cara a organizar y prever las acciones a desarrollar en las clases, aportando seguridad al profesor, pues en ella se recogerán los objetivos de aprendizaje que se trabajarán, la estrategia didáctica que se empleará, los indicadores de evaluación a utilizar, la duración de cada una de las actividades, los recursos necesarios, ... En definitiva, la programación didáctica es el "*planning*" de trabajo para desarrollar, lo más acertada y favorablemente nuestro trabajo.

Bibliografía

- Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Rivière, V. y Sanz, L. (2016). *Matemática II*. Savia SM.
- Instituto de Educación Secundaria Juan de Juni. (14 de junio de 2022). <http://iesjuandejuni.centros.educa.jcyl.es/sitio/index.cgi>
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, 340, de 30 de diciembre de 2020. <https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3>
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 25, de 29 de enero de 2015. <https://www.boe.es/eli/es/o/2015/01/21/ecd65>
- Orden EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el Currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del Bachillerato en la comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León*, 86 de 8 de mayo de 2015. <https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/orden-edu-363-2015-4-mayo-establece-curriculo-regula-implan>
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 3, de 3 de enero de 2015. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2014/12/26/1105/con>
- Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 82, de 7 de abril de 2022. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/04/05/243/con>