



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

**Dpto. de didáctica de las Ciencias experimentales, sociales y
de la matemática.**

**EL ERROR EN PRUEBAS ESCRITAS COMO
ELEMENTO DE APRENDIZAJE
MATEMÁTICO**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación
Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y
Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.**

Alumna: Silvia Rueda Valencia

Tutor: José Roberto Arias García

Valladolid, junio de 2022

Índice general

Introducción	1
1. Marco teórico	3
1.1. Errores matemáticos	3
1.1.1. Fundamentos epistemológicos de los errores	4
1.1.2. Investigaciones previas sobre los errores en la Educación Matemática	7
1.1.3. Caracterización y clasificación de los errores matemáticos	9
1.2. Bases de orientación	14
1.2.1. Aplicación en la detección y corrección de errores	22
1.3. Uso de la plataforma TikTok en la enseñanza	22
2. Metodología	27
2.1. Investigación de diseño	27
2.2. Fase de preparación y diseño	32
2.2.1. Problema de investigación	32
2.2.2. Objetivos	33
2.2.3. Contexto	34
2.2.4. Diseño instruccional	37
2.3. Fase de implementación/intervención	42
2.3.1. Puesta en práctica	42
2.3.2. Análisis de datos	44
2.3.2.1. Tipología de los errores cometidos por los alumnos	44

2.3.2.2.	Estructuración de los grupos de trabajo	47
2.3.2.3.	Detección de errores por parte de los alumnos	48
2.3.2.4.	Corrección de errores por parte de los alumnos	57
2.3.2.5.	Coevaluación de los alumnos	62
2.4.	Fase de análisis retrospectivo	64
2.4.1.	Conclusiones	64
2.4.2.	Propuestas de mejora	66
2.4.3.	Líneas futuras	69
	Bibliografía	71

Anexo 1: Unidad didáctica **74**

Introducción

El error aparece de forma sistemática en todo proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A pesar de ser una gran fuente de información, para el alumno y el docente, sobre el proceso de construcción de los conceptos matemáticos llevado a cabo en el aula, la presencia de estos errores en las producciones de los estudiantes tiende a ser penalizada, provocando que los alumnos traten de ocultarlos.

En la didáctica de las matemáticas, el estudio de los errores que cometen los alumnos es una cuestión de permanente interés. Agoiz (2019) señala que son dos los aspectos considerados como prioritarios en las investigaciones sobre los errores: las causas y la clasificación de los errores y su tratamiento curricular. Los investigadores coinciden en el análisis de los errores aporta una valiosa información tanto al docente como a los alumnos. Sin embargo, las metodologías utilizadas habitualmente en la enseñanza de las matemáticas no utilizan el error de forma positiva, a pesar de las investigaciones realizadas sobre sus beneficios. Los estudios sugieren realizar la identificación de los errores, búsqueda de orígenes y corrección de los mismos, proponiendo el cambio a una enseñanza diagnóstica.

Motivados por la falta de material e instrumentos relacionados con la detección y corrección de los errores de los alumnos, exponemos un estudio donde se ha llevado a cabo la creación de recursos para trabajar los errores como fuente de aprendizaje en la Educación Secundaria. Proponemos el estudio de los errores tomando como punto de partida las producciones de los alumnos en las pruebas escritas. Es frecuente en la ESO aplicar modelos de evaluación basado esencialmente en exámenes, centrando la atención únicamente en la calificación numérica final.

Sin embargo, las pruebas escritas aportan información útil, en términos de errores, que puede ser beneficiosa para el aprendizaje de los alumnos y que, habitualmente, es desaprovechada. En nuestra investigación realizamos el diseño de propuestas de trabajo propias de la evaluación formativa eligiendo como punto de partida los errores cometidos por los alumnos en las pruebas escritas. Hacemos uso de la base de orientación como instrumento para trabajar los errores en el aula e introducimos en nuestra propuesta el uso de la plataforma de vídeos TikTok en la enseñanza.

En el presente trabajo se expone una investigación basada en diseño sobre el estudio de errores y se desarrolla a lo largo de dos capítulos. En el primer capítulo, describimos el marco teórico en el que se basa nuestra investigación, desarrollando tres puntos fundamentales: los errores matemáticos, las bases de orientación, y el uso de la plataforma TikTok en la enseñanza.

En el segundo capítulo, presentamos la investigación realizada. Explicamos en primer lugar las características principales de las investigaciones de diseño y, a continuación, detallamos la investigación concreta realizada. Desarrollamos las tres fases propias de este tipo de estudios. En la primera fase determinamos cuál es el problema de estudio y nuestros objetivos, así como la metodología planificada para, posteriormente, ponerla en práctica. En la segunda fase, exponemos cómo se llevó a cabo la puesta en práctica y realizamos el análisis de los resultados obtenidos. Por último, en la última fase, incluimos las conclusiones, las propuestas de mejora y un tercer apartado sobre las perspectivas de futuro.

Capítulo 1

Marco teórico

En este apartado trataremos de determinar el marco teórico que contextualiza el trabajo que hemos desarrollado. Para comprender la investigación realizada en este trabajo, es necesario definir y explicar previamente los tres conceptos fundamentales que estamos estudiando: los errores matemáticos, las bases de orientación y el uso de la plataforma TikTok en la enseñanza.

Comenzamos el capítulo hablando de los errores matemáticos exponiendo sus fundamentos, las líneas principales de investigación en las que se dividen los estudios previos sobre los errores y las características generales y clasificación de los errores. A continuación, definimos las bases de orientación con un ejemplo de aplicación en la resolución de problemas, y, por último, comentamos los resultados de algunos estudios realizados sobre el uso de la plataforma TikTok en la enseñanza.

1.1. Errores matemáticos

Nuestro objeto de estudio son los errores matemáticos al considerarlos fuente de aprendizaje pues como señala del Puerto et al. (2006, p.2) “el error es posible en todo proceso de adquisición y consolidación de conocimientos”. Aunque dicho aprendizaje puede darse en cualquier ámbito, este trabajo se circunscribe al ámbito científico donde numerosos filósofos y epistemólogos han reflexionado sobre la importancia de los errores de cara al aprendizaje. Por ello, trataremos las teorías de algunos autores de cara a la importancia de la detección y eliminación de errores

para el avance del conocimiento y de la ciencia, así como las investigaciones previas que se han realizado sobre los errores en Matemáticas. Posteriormente, nos centraremos en los errores matemáticos explicando las posibles causas y algunas de las numerosas clasificaciones que se han elaborado sobre los errores que comenten los alumnos en la enseñanza de las Matemáticas.

1.1.1. Fundamentos epistemológicos de los errores

Según Rico (1995, p.1), “La preocupación por el conocimiento erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el avance de la ciencia, ha ocupado una parte importante de las reflexiones de los filósofos y epistemólogos”. Sin embargo, las diferentes teorías del aprendizaje consideran el error de formas distintas. Por ejemplo, en las teorías conductistas, el error se considera como una deficiencia del conocimiento del estudiante que el docente debe corregir (Gómez, 2015). En cambio, las teorías constructivistas sostienen que todo conocimiento es construido. Por tanto, el constructivismo considera el error como un fallo en la construcción del conocimiento y no como una distracción o la consecuencia de una falta de conocimiento específico. Tomando la posición de las teorías constructivistas, destacamos a cuatro autores que han hecho reflexiones sobre la falibilidad del conocimiento humano: Popper, Bachelard, Lakatos y Brousseau.

Popper (1991) comienza intentando dar respuesta a la pregunta: *¿Cuál es la fuente última de conocimiento?*; ese fue el punto de partida para llegar a desarrollar una serie de reflexiones. Finalmente, Popper (1991) llega a la siguiente conclusión:

La pregunta por las fuentes de nuestro conocimiento puede ser reemplazada de manera similar. La pregunta que siempre se ha formulado es, en espíritu, semejante a esta: “¿Cuáles son las mejores fuentes de nuestro conocimiento, las más confiables, las que no nos conducen al error, y a las que podemos y debemos dirigirnos, en caso de duda, como corte de apelación final?” Propongo, por ende, reemplazar la pregunta acerca de las fuentes de nuestro conocimiento por la pregunta totalmente diferente: “¿Cómo podemos detectar y eliminar el error?” (p. 49)

Cuestionándose ahora esta nueva pregunta, propone el racionalismo crítico como respuesta.

Este sistema busca producir conocimiento a partir de una actitud crítica que cuestiona tanto las propias argumentaciones y teorías como las de otros, tratando de detectar los errores y eliminarlos. Defiende que esta es la mejor forma de asegurar el avance de la ciencia. Este pensamiento incluye el error en el proceso de adquisición de conocimiento, y la observación, el razonamiento y la intuición adquieren labor principal de ayudar en la crítica de las conjeturas.

El planteamiento basado en el uso de los errores que propone Popper, lo pone en práctica Lakatos, en el ámbito de las matemáticas, en su obra “Pruebas y refutaciones”. En Lakatos (1978), el autor en primer lugar presenta el enunciado del siguiente problema:

¿Existe una relación entre el número de vértices, V , el número de aristas, A , y el número de caras, C , de los poliedros, análoga a la relación trivial que hay entre el número de vértices y aristas de los polígonos, a saber, que hay tantos vértices como aristas: $V = A$?
(p. 22)

A modo de diálogo entre un maestro y sus alumnos, se hacen diversas conjeturas que intentan dar solución al problema. Cada vez que se propone una conjetura nueva, esta es criticada mediante contraejemplos globales y locales. En esta metodología, la detección y utilización de los errores juega un papel fundamental.

Popper y Lakatos no descartan la posibilidad de la transmisión y permanencia en el tiempo de una concepción errónea en el sistema educativo que ha sido considerada como cierta. Esta postura está en contra de la clásica, que defiende como única opción posible la retransmisión de la verdad. Lakatos considera el error como el resultado de unos conocimientos limitados, señalando que la veracidad de una concepción es relativa a las teorías que se mantienen vigentes en cada momento (del Puerto et al., 2006).

Bachelard también sostiene la idea de que es inevitable la aparición de errores en el conocimiento humano. En Bachelard (1993), el filósofo introduce y desarrolla la noción de *obstáculo epistemológico*, planteando el origen de los errores que se comenten en el desarrollo del conocimiento científico en términos de obstáculos. Para definir este concepto, no se refiere a los

posibles factores externos o la propia capacidad de cada persona, sino que afirma que es en el acto de conocer donde aparecen las dificultades y las confusiones. Es en ese momento en el que se ponen de manifiesto las causas de estancamiento o retroceso, que también denomina *causas de inercia*, y a lo que se refiere con *obstáculos epistemológicos*. Con esta idea, el autor define las causas que provocan los errores, como un conocimiento anterior mal adquirido o adquirido de forma insuficiente (obstáculo), que ofrece resistencia y que, una vez fijado, cuando se utiliza en un contexto o situación inadecuado produce el error.

Bachelard (1993) comenta su asombro ante el hecho de que los profesores de ciencias *no comprendan que no se comprenda*. Este autor señala que son pocos los docentes que han investigado sobre la psicología del error, la ignorancia y la irreflexión. Comenta que los profesores, en general, piensan que una lección puede hacerse comprender mediante la repetición continua de los conceptos. No tienen en cuenta que los alumnos llegan a clase con unos conocimientos ya construidos en los que hay que profundizar.

Brousseau (1983) (citado por Socas, 1997) continua con la noción de obstáculo de Bachelard, desarrollando estas ideas en el ámbito específico de la didáctica de la Matemática. Los dos autores comparten la definición de un obstáculo como:

Aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este contenido resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas. (Socas, 1997, pp. 140-141)

Brousseau amplía la teoría de Bachelard dividiendo los obstáculos según su origen en ontogenético, didáctico y epistemológico:

- Los *obstáculos ontogenéticos* son los que provienen de las limitaciones del alumno en su desarrollo.
- Los *obstáculos didácticos* aparecen por la forma de enseñar del profesor, de las elecciones didácticas que toma.

- Los *obstáculos epistemológicos* son los relacionados con el concepto, con la dificultad intrínseca que tienen algunos conceptos para ser aprendidos.

Según Sastre et al. (2014), en el proceso de adquisición de un nuevo conocimiento matemático el alumno toma como base concepciones previas, en muchas ocasiones falsas o incompletas, que se integran al nuevo conocimiento o son reemplazadas por otras concepciones más evolucionadas. Los obstáculos se manifiestan mediante la presencia de errores específicos persistentes, que deben tenerse en cuenta para que se produzca una evolución en el aprendizaje del alumno. Las respuestas erróneas aportan información importante sobre los estudiantes que puede utilizarse de forma positiva en el desarrollo de metodologías, dejando de lado la postura correctora y sancionadora de la educación tradicional hacia la presencia de errores.

1.1.2. Investigaciones previas sobre los errores en la Educación Matemática

Centrándonos en el ámbito de la Educación Matemática, según Rico (1995, p.10), “los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. Aparecen continuamente en las producciones de los alumnos cada vez que se les plantea un problema. Es por ello que el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas tiene una larga historia y siempre ha sido un tema de interés en la Educación Matemática. En cada época, el estudio de errores ha estado influenciado por las corrientes predominantes en pedagogía y psicología y condicionado por la organización del currículo de matemáticas en el sistema educativo.

Agoiz (2019) señala que la investigación de los errores en el aprendizaje de las matemáticas puede dividirse en tres etapas. La primera de ellas se caracteriza por la clasificación de los errores y su asociación con causas relativas al contenido matemático. En una segunda etapa, que comienza en la década de los ochenta aproximadamente, reconocen el error como un elemento que aparece de forma natural en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tratando comprender el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos llevado a cabo por los alumnos. Los estudios de esta etapa aseguran que, en algunos casos, los errores cometidos por los alumnos muestran un patrón común. También reconocen que el origen de los errores puede estar relacio-

nado con otras variables del proceso educativo como el profesorado, el currículo o el contexto. En la tercera etapa, las investigaciones además de analizar y clasificar los errores, tratan de conocer su origen, no sólo en analizar y clasificar los errores, sino en conocer su origen, permitiendo implementar procedimientos que ayuden a los alumnos a corregir sus errores.

En Rico (1995, pp.10-11), se analizan las investigaciones realizadas sobre el estudio de errores en el aprendizaje de las matemáticas escolares. Según este autor, son cuatro las principales líneas de investigación:

1. Análisis de errores, las causas que lo producen o los elementos que los explican, y clasificación de errores detectados.
2. Tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas. El autor incluye en esta línea los trabajos dedicados a la organización didáctica de la enseñanza de las matemáticas considerando los errores. También incluye los estudios sobre la enseñanza diagnóstica, que consiste en prever errores, detectarlos y proponer medios para su corrección.
3. Determinar qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los alumnos. Incluye los estudios relacionados con el papel del tratamiento de los errores de los alumnos en las formaciones del profesorado.
4. Trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores. Se refiere a los estudios que incluyen técnicas estadísticas como el contraste de hipótesis para analizar los errores. En esta línea también considera los trabajos de la psicometría que van dirigidos al estudio de errores en el aprendizaje y los estudios sobre programas de ordenadores sobre la interpretación de los errores como bugs.

La investigación que se desarrolla en este trabajo corresponde con el tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas. La intención de esta investigación es aportar recursos didácticos para trabajar los errores en la enseñanza de las matemáticas.

A continuación, hacemos una breve explicación de algunos estudios relativos a la primera

línea de investigación descrita por (Rico, 1995): análisis, causas y clasificación de los errores.

1.1.3. Caracterización y clasificación de los errores matemáticos

Es tarea del docente identificar los errores que cometen los alumnos y guiarlos para que puedan superarlos. Comprender cuál es su posible origen o relacionarlo con otros errores similares facilitaría esta tarea. Sin embargo, llegar a una delimitación clara de las posibles causas de un error o hacer una lista con los posibles errores que podemos encontrarnos, es una labor difícil por todas las variables que rodean el proceso de enseñanza/aprendizaje donde se producen: el profesor, el entorno social, el medio cultural, etc. Numerosos autores han hecho su propia clasificación de los errores en el aprendizaje de las matemáticas, con diferentes enfoques. En este trabajo desarrollamos las clasificaciones planteadas por Davis, Radatz, Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar y Socas.

Mulhern (1989) (citado por Rico, 1995) determina las características generales de los errores cometidos por los alumnos:

1. Los errores con frecuencia surgen de manera espontánea y sorprendente porque, hasta el momento, han permanecido ocultos para el profesor.
2. Los errores son resistentes ya que superarlos implica una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos.
3. Los errores pueden ser: sistemáticos o por azar. Los sistemáticos se producen con mayor frecuencia y son un síntoma de que el alumno considera como correcto un método o una comprensión de conceptos equivocada. Los que se cometen por azar son ocasionales, señalan una falta de atención y no tienen mucha relevancia.
4. Los alumnos, en muchas ocasiones, no son conscientes de los errores que cometen porque no comprenden el significado de los símbolos y conceptos con los que trabajan.

Para Brousseau et al.(1986) (citado por Agoiz, 2019) son cuatro las causas de los errores cometidos por los alumnos:

1. Grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de las matemáticas.
2. Producto de la aplicación correcta de un procedimiento imperfecto sistematizado, que el alumno utiliza de modo consciente y con confianza. En este caso, el profesor puede identificar fácilmente un patrón.
3. Utilización por el alumno de un procedimiento sistemático imperfectos, a partir concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.
4. Uso de métodos inventados por el propio alumno, no formales y originales, pero inadecuados para la realización de alguna tarea.

En cuanto a la clasificación de los errores, Davis (1984) (citado por Rico, 1995) elaboró una teoría de esquemas o constructos personales, que combinado con la teoría de procesamiento de la información, plantea un mecanismo mediante el que analiza el pensamiento humano y algunos de sus errores. El modelo de Davis hace la siguiente clasificación de errores:

1. Reversiones binarias. Pone como ejemplos: $4 \times 4 = 8$; $2^3 = 6$
2. Errores inducidos por el lenguaje o la notación. Por ejemplo: $2x - x = 2$.
3. Errores por recuperación de un esquema previo. Por ejemplo: $(x+3)^2 = x^2 + 9$. Recupera el esquema previo de la potencia de un producto $(xy)^2 = x^2y^2$ y lo utiliza.
4. Errores producidos por una representación inadecuada.
5. Reglas que producen reglas. Por ejemplo: A partir de la implicación

$$(x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ó } x = 3$$

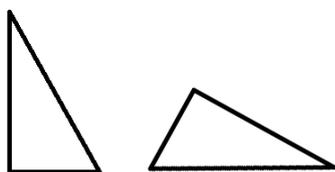
pueden pasar a generar una regla dando como cierta la implicación

$$(x - 2)(x - 3) = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ ó } x = 5$$

También encontramos la clasificación de Radatz (1979) (citado por Agoiz, 2019) hecha a partir de la teoría del procesamiento de la información:

1. Errores debido a dificultades de lenguaje. A semeja el aprendizaje del lenguaje matemático con el de una lengua extranjera. No comprender el vocabulario matemático es una fuente de errores para muchos alumnos. Por ejemplo: expresar la tercera parte de una cantidad x como $x + \frac{1}{3}$.
2. Errores debido a dificultades para obtener información espacial. Se refiere a la dificultad que tienen algunos alumnos para pensar mediante imágenes espaciales o visuales. Por ejemplo, identificar solo el triángulo de la izquierda de la figura 1.1 como rectángulo.

Figura 1.1: Triángulo rectángulo (izquierda) y mismo triángulo girado (derecha).



3. Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Este tipo de errores incluye la ignorancia de algoritmo, aplicación de procedimientos incorrectos y dominio insuficiente de símbolos y conceptos.
4. Errores debido a asociaciones incorrectas o a la rigidez del pensamiento. Son los errores asociados a la incapacidad del pensamiento del alumno para adaptarse a situaciones nuevas. Son originados por la aplicación de reglas o propiedades que conoce en situaciones diferente, en las que no son válidas. Hace la siguiente división:
 - a) *Errores de perseveración.* Predominan elementos singulares de una tarea. Aplica propiedades de situaciones particulares en el contexto general. Por ejemplo: considerar el teorema de pitágoras válido en todos los tipos de triángulos.
 - b) *Errores de asociación.* Interacciones incorrectas entre algunos elementos. Por ejemplo, operar de la siguiente forma: $\sqrt{9+4} = \sqrt{9} + \sqrt{4}$
 - c) *Errores de interferencia.* Operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros. Por ejemplo: realizar $2^2 \cdot 3^4 = 6^8$, multiplicando base por base y exponente por expo-

nente, similar a la regla de multiplicación de fracciones (numerador por numerador y denominador por denominador).

d) *Errores de asimilación* La información es mal procesada por fallos en la interpretación del alumno del lenguaje matemático. Por ejemplo: realizar $3x - 1 = 2x$.

e) *Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas.* Aplicación reglas o estrategias que han funcionado previamente a tareas diferentes. Por ejemplo: para resolver la ecuación $3x^2 + 2x + 5 = 2$ aplicar la fórmula para las ecuaciones de segundo grado considerando que $a = 3$, $b = 2$ y $c = 5$.

5. Errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Son los errores producidos por la aplicación de reglas o estrategias análogas en situaciones distintas.

Por otro lado, Movshovitz-Hadar et al. (1987) (citado por Rico, 1995) hacen una clasificación de los errores basándose en un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos. Está fundamentada más en el conocimiento matemático que en el procesamiento de la información. Determinan seis categorías para clasificar los errores:

1. Datos mal utilizados. Errores producidos por el mal tratamiento de los datos que aparecen en la tarea por parte del alumno. Incluye casos en los que se añaden datos extraños, se olvida algún dato necesario para la resolución, se usan valores numéricos de una variable para otra distinta, etc.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje. Errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico. Por ejemplo, expresar en forma de ecuación una relación diferente a la enunciada.
3. Inferencias no válidas lógicamente. Errores debidos al uso de razonamiento falsos. Incluyen en esta categoría errores como deducir a partir de un enunciado condicional su enunciado contrario, utilizar de forma incorrecta los cuantificadores o hacer saltos injustificados en una inferencia lógica.
4. Teoremas o definiciones deformados. Errores producidos por el uso inadecuado de un

principio, regla o definición. Por ejemplo, la aplicación de teoremas sin las condiciones necesarias.

5. Falta de verificación en la solución. Errores que se presentan cuando los pasos de la realización de la tarea son correctos, pero el resultado final no responde a la pregunta planteada.
6. Errores técnicos. Incluyen errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros relacionados con la ejecución de algoritmos básicos.

Socas (1997), considera los errores como la presencia de algún esquema cognitivo inadecuado y aborda la identificación de los errores en el aprendizaje de matemáticas considerando solo tres posibles orígenes:

1. Obstáculos. Se refiere a los errores causados por la presencia en el alumno de algún obstáculo epistemológico. Utiliza el concepto que define Bachelard (1993) y, posteriormente, clasifica Brousseau (1983) (citado por Socas, 1997) en diferentes tipos. Hace referencia al cognitivismo, compartiendo la idea de que la mente de los alumnos no es una página en blanco, sino que el alumno tiene un conocimiento previo ya adquirido.
2. Ausencia de sentido. Estos errores se originan en los diferentes estadios de desarrollo de los sistemas de representación cognitivos: semiótico, estructural y autónomo.

Se refieren a los errores que aparecen en el aprendizaje de un nuevo lenguaje de signos matemáticos. Si ponemos el ejemplo del aprendizaje de los exponentes, el primer estadio es donde los alumnos aprenden signos nuevos a partir de signos antiguos ya conocidos, y corresponde con la definición de la potencia a^3 de un número como $a^3 = a \cdot a \cdot a$, utilizando los signos de multiplicación. El estadio estructural, es donde el sistema antiguo de signos organiza la estructura del sistema nuevo de signos y se añaden propiedades propias del nuevo sistema. Siguiendo con nuestro ejemplo, mediante procesos, usando la multiplicación, como $a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^7$, utilizando los signos de multiplicación, llegamos a la propiedad de multiplicación de potencias con la misma base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, definida con signos del nuevo sistema. Comienzan a aparecer

problemas que ya no funcionan con la estructura del sistema antiguo, como son la potencia de números negativos o calcular a^0 , que adquieren significado solo con el sistema nuevo de signos. En el último estadio, el nuevo sistema de signos adquiere un significado propio independiente del sistema anterior. En el ejemplo corresponde con la definición de $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Divide los errores en estas tres etapas:

- a) Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Algunos errores del álgebra pueden ser causados por un manejo incorrecto de la aritmética. Por ejemplo, alumnos que no dominan las operaciones con fracciones, pueden cometer errores en álgebra como el siguiente:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1+1}{x+y}$$

- b) Errores de procedimientos. Se refiere al uso de fórmulas o reglas de procedimiento en situaciones nuevas donde no se pueden aplicar. Por ejemplo, el uso de la propiedad distributiva de esta forma: $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot x \cdot z$.
- c) Errores de álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico. Son los errores de naturaleza estrictamente algebraica sin tener relación con la aritmética. Por ejemplo, el sentido del signo “=”.

3. Actitudes afectivas y emocionales. Se refiere a los errores que tienen su origen en la falta de concentración, el exceso de confianza, bloqueos, etc.

Existen otras clasificaciones de errores posteriores a esta realizadas por diferentes autores. En Gamboa et al. (2018) hacen una descripción de cada una de ellas, aunque en este trabajo no entraremos en detalle con ninguna clasificación más.

1.2. Bases de orientación

Las bases de orientación, también llamadas guías de navegación o cartas de estudio, son un instrumento educativo que Sanmartí (2007) (citado por Pons y Piquet, 2017) define como:

Una base de orientación es aquel instrumento que resume de manera gráfica y ordenada la acción a realizar, con el fin de promover que los alumnos anticipen y planifiquen por

sí mismos las operaciones que deben llevar a cabo para resolver con éxito los diferentes tipos de tareas escolares. (Pons y Piquet, 2017, p.260)

Resulta interesante en la enseñanza que cada estudiante construya su propia base de orientación, con ayuda del profesor, recogiendo sus propias particularidades para verlo como una herramienta útil y no solo una lista de instrucciones. Ayuda a los alumnos a reflexionar sobre sus conocimientos y comprender su propio pensamiento.

Para entender cómo se puede utilizar esta herramienta en la enseñanza de Matemáticas, podemos ver el uso que se hace de ella en la resolución de problemas. En Torregrosa et al. (2020), se estudia el uso de esta herramienta en la resolución de problemas matemáticos de patrones. El propósito de usar las bases de orientación es mejorar la autorregulación de los alumnos en lugar del aprendizaje de algún contenido matemático particular. Dan su propia definición de base de orientación para la resolución de problemas como “un instrumento secuencial paso a paso en el cual se sintetizan de manera subjetiva o personal las acciones a realizar durante un procedimiento científico o para explicar un constructo teórico” (Torregrosa et al., 2020, p.45).

Sanmartí (2010) (citado por Torregrosa et al., 2020) elabora unas premisas a tener en cuenta sobre el uso de las bases de orientación. La primera hace referencia a la construcción de la base. Puede ser el propio profesor el que la elabore, por falta de conocimiento del instrumento, y mostrársela a sus alumnos, pero lo ideal es que sean los propios alumnos los que las creen. De esta forma, cada alumno añade sus propias particularidades. En todo caso, el docente orienta a los alumnos en la creación de las bases con unas preguntas clave. Luego el primer paso es planificar una serie de preguntas guía para ayudar a los alumnos en la tarea.

En la tabla 1.1, se muestra un ejemplo de posibles preguntas clave para la construcción de bases de orientación en la resolución de problemas.

Tabla 1.1: Preguntas clave para la creación de la base de orientación (izquierda) y caracterización o finalidad de dichas preguntas (derecha)

Elementos estructurales de la acción	
¿A qué categoría pertenece la situación planteada?	Identificación del problema
¿Por qué se debe realizar esta tarea?	Motivo de la tarea
¿Qué se quiere conseguir con la realización de la acción que interviene como solución de la tarea?	Objetivo de la acción
¿Qué operaciones es necesario realizar para ejecutar la acción y por qué?	Operaciones de la acción
¿Qué conocimientos son necesarios para efectuar de manera consciente estas operaciones?	Contenidos de la base
¿En qué condiciones tenemos que realizar la tarea planteada?	Condiciones de realización
Anticipación de la acción	
¿Qué estrategia o estrategias se pueden adoptar para resolver la situación planteada?	Estrategias y orden de ejecución
¿Cuál es el resultado esperado de las operaciones proyectadas?	Posibles resoluciones
Planificación de la acción	
¿Cuál de las estrategias parece la más adecuada?	Elección de la estrategia
¿Cuál es el plan de ejecución que seguiremos?	Plan de trabajo

Fuente: Pons y Piquet (2017, p.266)

La segunda premisa de Sanmartí (2010) (citado por Torregrosa et al., 2020) es que la construcción de las bases debe ser personal, lo que quiere decir que podemos encontrarnos tantas bases de orientación como alumnos haya en el aula.

Una vez construidas las bases de orientación, el siguiente punto importante a tener en cuenta, es cómo se puede hacer una evaluación. Según Torregrosa et al. (2020, p.47), las bases de

orientación deben ser evaluadas y reguladas a partir de la autoevaluación o coevaluación. El objetivo de hacer una evaluación no está relacionado con aprender a resolver el problema de forma correcta, sino que consiste en realizar preguntas que permitan al alumno hacer reflexiones sobre su propio pensamiento y sobre su proceso de resolución del problema (Torregrosa et al., 2020). De esta forma, cada alumno puede cambiar su base de orientación para mejorarla.

La última premisa es que las bases de orientación no se construyen para que permanezcan inmutables, sino que son transformadas por el alumno a medida que adquiere nuevos conocimientos, con la ayuda de la autoevaluación y la coevaluación.

En Torregrosa et al. (2020) ponen en práctica este instrumento con alumnos de entre 11 y 12 años. Muestran algunos ejemplos de bases de orientación elaboradas por los alumnos sobre la resolución del siguiente problema:

Figura 1.2: Segundo problema de lógica y patrones matemáticos planteado a los alumnos.

PROBLEMA 2
Juliana ha escrito en una tabla numérica los números naturales 1, 2, 3, 4, 5... Poniéndolos de tal manera como se ve en el dibujo:

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
12	13	16	17	20
21	24	25	28	29
22	23

Ha ido colocando los números hasta el 100 y se ha preguntado: "¿Cuánto suman los números de todas las casillas que tienen un lado en común con el 100?" ¿Cómo lo has sabido? Explícalo paso a paso.

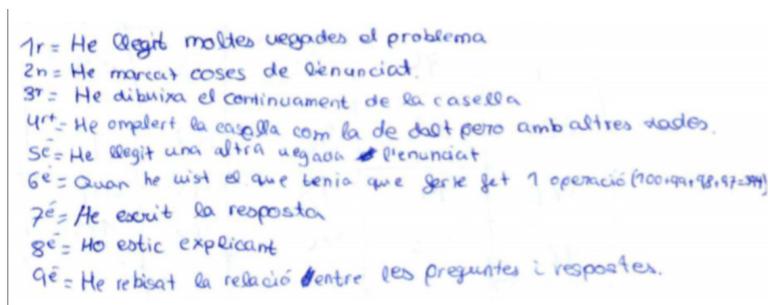
Fuente: Torregrosa et al. (2020, p.51)

La metodología que han seguido en el aula es la siguiente: en primer lugar, el profesor presenta el enunciado del problema a los alumnos y plantea a los alumnos las preguntas clave (tabla

1.1) para comenzar con la construcción de las bases de orientación. Los docentes anotando en la pizarra las respuestas aportadas por los alumnos poniendo en común todas sus ideas, creando un formato lineal de base de orientación con dos columnas: En una de ellas anotaron las destrezas matemáticas que se utilizan para resolver el problema, o ítems que forman la base, y en la otra columna cada alumno anotó con una cruz los ítems que utilizaban al aplicar la base. Posteriormente, cada alumno resolvió individualmente el problema y se hizo una puesta en común sobre las estrategias llevadas a cabo y las soluciones obtenidas. En segundo lugar, se permite al alumnado modificar la base de orientación atendiendo a las observaciones que se habían realizado en la puesta en común.

Cada alumno elaboró la base de orientación de forma personal. Muestran producciones de alumnos en las que se expresa la resolución del problema describiendo una serie de pasos que hay que seguir, como ocurre en la producción original de un alumno. que mostramos en la figura 1.3.

Figura 1.3: Producción original del alumno.



1r = He llegit moltes vegades al problema
 2n = He marcat coses de qüenunciat.
 3r = He dibuixa el continuament de la casella
 4r = He omplert la casella com la de dalt però amb altres vales.
 5e = He llegit una altra vegada i qüenunciat
 6e = Quan he vist el que tenia que fer he fet 1 operació (100+91+98+97=386)
 7e = He escrit la resposta
 8e = Hoestic explicant
 9e = He revisat la relació entre les preguntes i respostes.

Fuente: Torregrosa et al. (2020, p.55)

El estudiante que ha realizado la base de orientación muestra los pasos que realiza para resolver el problema como si se tratase de una lista que hay que seguir (Torregrosa et al., 2020).

Sin embargo, muestra otras elaboraciones de alumnos que utilizan otros recursos para explicar la resolución del problema. Un ejemplo es la siguiente base de orientación en la que el alumno expresa de forma gráfica cómo ha conseguido resolver el problema:

del alumnado, que lleva a resolver un problema de manera satisfactoria, convirtiéndose para el aprendiz en una herramienta útil para la planificación y autonomía, así como para la autoevaluación. (Pons y Piquet, 2017, p.260)

Esta investigación analiza cómo el atasco, los errores de los alumnos y el bloqueo se reflejan en la resolución de los problemas, haciendo mención a su importancia en el proceso de aprendizaje de los alumnos. Pons y Piquet (2017) señala que en la educación tradicional el error es considerado como algo negativo que los alumnos aprenden a ocultar para no ser penalizados. Sin embargo, el error es fundamental en el aprendizaje de los alumnos y, para llegar a construir nuevos conocimientos cada individuo debe superar diversos obstáculos identificados gracias a los errores que cometen. De hecho, según Pons y Piquet (2017), se ha comprobado que los alumnos con mayor capacidad para detectar y corregir errores tienen más éxito en la escuela.

En conclusión, el autor señala que el error es útil (Sanmartí, 2007) (citado por Pons y Piquet, 2017) y atascarse contribuye de forma positiva en el aprendizaje de los alumnos (Mason et al., 1982) (citado por Pons y Piquet, 2017). Por ello, la base de orientación que desarrolla destaca la importancia de revisar la resolución propuesta para el problema, con el objetivo de que cada alumno aprenda a detectar los puntos de bloqueo o errores que comente para, posteriormente, centrarse en encontrar una estrategia alternativa.

La base de orientación utilizada en este estudio, se basa en las cuatro fases de Pólya (1945) (citado por Pons y Piquet, 2017) para la resolución de problemas: entender el problema, concebir un plan de acción, llevar a cabo el plan de acción y volver la mirada atrás. Con ello, profesores y alumnos colaboraron en el diseño de la base de orientación presentada en la tabla 1.2 determinando tres dominios de actuación y sus características fundamentales (dimensiones). Pons y Piquet (2017) destaca que los pasos descritos en la tabla 1.2 no deben matenerse en el mismo orden de forma estricta a la hora de resolver el problema.

Tabla 1.2: Base de orientación utilizada

Resolución de problemas	
Dominios (D)	Dimensiones (d)
Comprendo el problema	<i>d</i> ¹ Distingo las preguntas que he de responder y entiendo todo aquello que se me pide que haga.
	<i>d</i> ² Distingo los datos y me aseguro que los entiendo.
	<i>d</i> ³ Expreso el problema para entenderlo mejor haciendo un dibujo, esquema, diagrama... (lo que me parezca más adecuado) y hago pruebas si me es necesario.
Para cada pregunta formulada	
Tengo un plan de acción	<i>d</i> ⁴ Pienso alguna estrategia de resolución a partir de la representación y las pruebas o ejemplos que he hecho, y trato de aplicarlo.
	<i>d</i> ⁵ Encuentro los datos y los razonamientos y/o algoritmos que necesito para aplicar la estrategia.
	<i>d</i> ⁶ Aplico la estrategia y la escribo de manera que se entienda todo aquello que he pensado.
Reviso mi tarea	<i>d</i> ⁷ Si no lo consigo, detecto dónde me bloquee o me equivoque y aplico una nueva estrategia (con todo lo que necesite).
	<i>d</i> ⁸ Una vez resuelto, <ul style="list-style-type: none"> • investigo si hay otras soluciones y las encuentro. Si sólo hay una, razono porque no hay más. • razono si se podría hacer de otras maneras.
	<i>d</i> ⁹ Releo lo que he hecho, y me aseguro que lo explico todo, que respondo de manera razonada y que se entiende. Relaciono, si hace falta, con el resto de preguntas y tareas solicitadas.

Fuente: Pons y Piquet (2017, p.266)

Finalmente, Pons y Piquet (2017) destaca de nuevo la necesidad de incluir la revisión del atasco o el error en toda base de orientación para la resolución de problemas, ya que aporta al docente información que puede utilizar para adaptar el material de trabajo.

1.2.1. Aplicación en la detección y corrección de errores

Una vez especificadas las características principales de las bases de orientación y su aplicación en la resolución de problemas, nos centramos en el uso de este instrumento para trabajar con los errores matemáticos de los alumnos en el aula.

Así, partiendo de un error particular de cada alumno, consideramos una base de orientación para la detección y corrección de errores como una serie de pasos o instrucciones a seguir para realizar de forma correcta la tarea matemática donde se ha cometido el error, con una primera parte consistente en la identificación del error. Consideramos que la construcción de una base de orientación para trabajar los errores de los alumnos puede dividirse en dos fases:

1. **Detección del error.** Consiste en la identificación del error cometido. Para realizar esta primera parte, el alumno reflexiona sobre los conceptos que están relacionados con su error y qué tipo de error ha cometido.
2. **Corrección del error.** Una vez detectado el error, cada alumno especifica los pasos a seguir para realizar bien la tarea matemática en la que ha cometido el error.

En el presente estudio se desarrolla el diseño de una serie de actividades que tienen como finalidad guiar a los alumnos en la construcción de una base de orientación para la detección y corrección de los errores.

1.3. Uso de la plataforma TikTok en la enseñanza

El uso de la tecnología en la educación es cada vez más habitual. Según Castro et al. (2016) (citado por Blanco et al., 2019), debido al auge que tienen las TIC, ya es imposible prescindir de ella en el proceso educativo, dada la amplia gama de posibilidades que brinda. En los últimos años, un hecho significativo que ha impulsado la incorporación de las nuevas tecnologías al

aula, ha sido el confinamiento vivido en el año 2020. A causa de la pandemia mundial por el COVID-19 la educación tuvo que adaptarse con urgencia a las TIC.

En particular, el uso de los vídeos como recurso educativo está presente en metodologías actuales tales como el *Flipped Classroom*, donde los estudiantes aprenden los contenidos, tanto fuera como dentro del aula, mediante la visión de vídeos explicativos que pueden reproducirse en el momento que se considere oportuno (Niccolas et al., 2021). Plataformas de vídeo como YouTube son usadas para almacenar vídeos didácticos creados por el profesorado con la finalidad de utilizar este medio como un complemento a la formación presencial (Romero et al., 2017). En el estudio realizado por R. A. Rodríguez et al. (2017), utilizan el vídeo como recurso educativo en la enseñanza de matemáticas con la plataforma Vimeo, creando vídeos con contenidos conceptuales y procedimentales para mostrar a los estudiantes el procedimiento para trazar las líneas y puntos notables de un triángulo. Los resultados obtenidos evidencian que el uso de vídeos tutoriales en la educación favorece la comprensión de los contenidos por parte de los alumnos. El uso de vídeo tutoriales en el aula, creados por profesores y disponibles para los alumnos, también fue utilizado en el estudio realizado por Blanco et al. (2019), obteniendo de nuevo resultados satisfactorios.

En nuestra investigación hacemos uso de la plataforma de vídeos TikTok como herramienta en el aula para utilizar el vídeo como recurso didáctico. Hoy en día, TikTok es la red social que está de moda entre los adolescentes en España, comenzando a adquirir éxito durante el confinamiento del 2020. Por tanto, es una herramienta adaptada a esta época, muy utilizada y con posibilidades académicas como indican algunos estudios recientes. En Iturriaga et al. (2021), utilizan la plataforma en una metodología activa del tipo flipped classroom, donde el profesor sube vídeos explicativos cortos a TikTok sobre conceptos relacionados con la asignatura de Historia para, posteriormente, aplicarlos en el aula en diversas cuestiones. Realiza una comparación con otras asignaturas en las que no se emplea esta metodología y concluye que los alumnos se muestran más motivados con respecto al empleo de TikTok en el aula frente a otros métodos. En el estudio de Baldevenites et al. (2021), desarrollan diferentes estrategias para hacer uso de

TikTok en el aula utilizando las herramientas básicas que ofrece la plataforma (Tabla 1.3).

Tabla 1.3: Estrategias desarrolladas para el uso de TikTok.

Estrategia	Descripción	Aplicación
Duo	Creaciones de videos o utilización de videos con permisos de retransmisión compartida para interactuar asincrónicamente con otro usuario de la plataforma	Ejercicios de memorización: Algoritmos matemáticos, Movimientos corporales, Música y ritmo. Ejercicios de repetición: Pronunciación y grafomotricidad.
Story line	Videos en hiperlapsos o combinación de videoclips secuenciados lógicamente para dar continuidad a una historia o cronología deseada por el autor.	Formatos expositivos de temáticas o ideas a desarrollar. Infografías o fotogramas secuenciados apoyados de narrativas.
Acrósticos	Uso de recursos de texto sobre imagen o video para el desarrollo de acrósticos	Recursos audiovisuales de acompañamiento para acrósticos en temáticas diversas
Vídeos tutoriales	Creación de videos personales o de terceros para explicación, argumentación o instrucción de temáticas diversas	Recetarios, manualidades, movimientos físicos, instructivos, dinámicas,...
Carpetas o segmentación de videos	Organización de espacios personalizados para privacidad y visualización de los videos propios, de los estudiantes y de terceros	Carpeta de evidencia: Videos de los estudiantes en tu espacio de “me encanta” y con posibilidades de privacidad en la segmentación del video a compartir. Carpeta de materiales: Almacenaje de videos de creación propia o de terceros.

Fuente: Baldevenites et al. (2021).

Concluyen que esta red social es una herramienta amigable con el interés cultural de los estudiantes permitiendo la motivación adecuada de los alumnos.

Por último, el proyecto de (C. Rodríguez, 2021) también utiliza TikTok como herramienta mencionando la importancia de la formación en el uso responsable de las tecnologías que se está dando en segundo plano.

En los estudios presentados, usan el vídeo como metodología de trabajo en el aula, utilizando vídeos ya creados o que realizan los propios docentes. En nuestro estudio, son los propios alumnos los que deberán crear vídeos con contenidos conceptuales y procedimentales, beneficiándose así del aprendizaje que pueden llegar a adquirir en el proceso de creación del vídeo. TikTok es la plataforma de vídeos elegida para que los alumnos lleven a cabo la creación de los vídeos explicativos. TikTok permite hacer vídeos desde 15 segundos hasta 3 minutos de duración y editarlos de forma rápida y sencilla. Se puede añadir audio a los vídeos desde la galería de la app o añadir la voz del usuario superpuesta. Su interfaz tiene un funcionamiento muy intuitivo y es la sencillez de la plataforma y su popularidad lo que nos hace pensar que puede funcionar como herramienta educativa.

Capítulo 2

Metodología

Tras haber mostrado el marco teórico en el que nos situamos, comenzamos con el desarrollo de la investigación en la que se centra el TFM. En este capítulo, en primer lugar, aclaramos en qué consiste la metodología de investigación basada en diseño, dando sus características principales y la estructura general que sigue. A continuación, desarrollamos cada una de las fases de este tipo de investigaciones: definimos el problema que se quiere trabajar con la investigación y planteamos cuáles son nuestros los objetivos, hacemos una descripción del contexto en el que se ha llevado a cabo la parte práctica de la investigación y describimos el instrumento diseñado para trabajar en el aula y los datos obtenidos.

2.1. Investigación de diseño

En el presente trabajo se utiliza la metodología de investigación de diseño, con un enfoque cualitativo. Esta metodología está orientada a la innovación educativa y tiene como objetivo analizar el problema de estudio mediante el diseño, desarrollo e implementación cíclica de una propuesta innovadora. La idea es crear nuevas situaciones en la enseñanza, partiendo de ideas teóricas, y llevarlas a la práctica en un contexto concreto.

Las características principales de las investigaciones de diseño, que se detallan en Molina (2021), son las siguientes:

- *Intervencionistas*: los estudios de diseño tratan de cambiar y comprender una situación

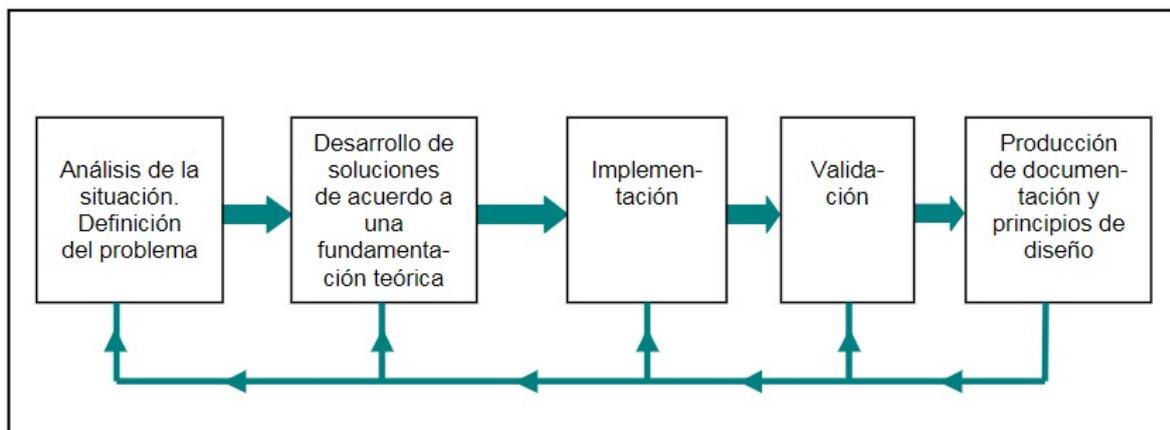
educativa previamente estudiada de forma teórica. Los propios investigadores participan en el proceso de enseñanza.

- *Adaptativos*: los investigadores están dispuestos a modificar tanto el modelo teórico como el diseño del producto puesto en práctica basándose en la información que van obteniendo.
- *Multivariantes*: son estudios complejos, por ocurrir en contextos naturales, y a las variables de estudio hay que añadirles otras relacionadas con las condiciones del entorno. Se considera desde el principio que no se van a poder controlar todas las variables, aunque esta complejidad implica que se debe hacer una recogida de datos exhaustiva.
- *Multiniveles*: hay dos tipos de niveles en estos estudios. En primer lugar, están los niveles dependiendo del alcance de la investigación. Por ejemplo, puede tratarse de un experimento de enseñanza que se realiza a nivel de aula y las conclusiones son relativas únicamente al proceso de enseñanza-aprendizaje que ocurre en ese aula. Otros estudios, pueden ser a nivel de todo el centro, involucrando a todas las aulas del centro o incluso a nivel de comunidad autónoma, etc. Por otra parte, están los niveles dependiendo de los participantes implicados en la construcción de conocimiento. Un ejemplo del nivel mínimo sería una investigación formada por un grupo de alumnos que crean conocimiento matemático en el aula y un grupo de docentes e investigadores que construye conocimiento sobre el proceso llevado a cabo en el aula. Se podría añadir otro nivel con un grupo de investigadores que crean conocimiento sobre el desarrollo profesional de los docentes en el aula y así sucesivamente.
- *Orientados por la teoría*: se basan en fundamentos teóricos para el diseño de la investigación, pero combinando diferentes perspectivas teóricas. Se considera que dar respuesta al problema de investigación requiere de la combinación de múltiples perspectivas teóricas.
- *Generadores*: son estudios que generan teoría sobre el proceso de enseñanza/aprendizaje en un contexto concreto y sobre el diseño de situaciones para promover el aprendizaje. También generan productos innovadores y preguntas de investigación que surgen en el desarrollo del estudio.

- *Cíclicos*: este tipo de investigaciones constan de dos tipos de ciclos: microciclos y macrociclos. La forma de organizar cada macrociclo en una investigación de diseño no está bien definida. Encontramos diferentes formas de definir las etapas en las que se dividen los macrociclos en cada investigación de este tipo. Sin embargo, según (de Benito y Salinas, 2016), todas las estructuras planteadas incluyen una serie de acciones comunes: definición del problema, diseño, desarrollo, implementación y evaluación.

El modelo propuesto por Reeves(2000;2006) (citado por de Benito y Salinas, 2016) divide la estructura de un macrociclo en las siguientes 5 fases:

Figura 2.1: Proceso de una investigación de diseño.



Fuente: de Benito y Salinas (2016, p.49)

Comienza con el análisis de la situación y la definición del problema que se trata en la investigación. La siguiente fase, consiste en diseñar posibles soluciones para ese problema basándose en un marco teórico específico. La tercera fase consiste en la implementación, la puesta en práctica del diseño, seguida de la validación o recogida de datos. Por último, se realiza el análisis de los datos recogidos para produciendo documentación y principios de diseño basados en los resultados del macrociclo.

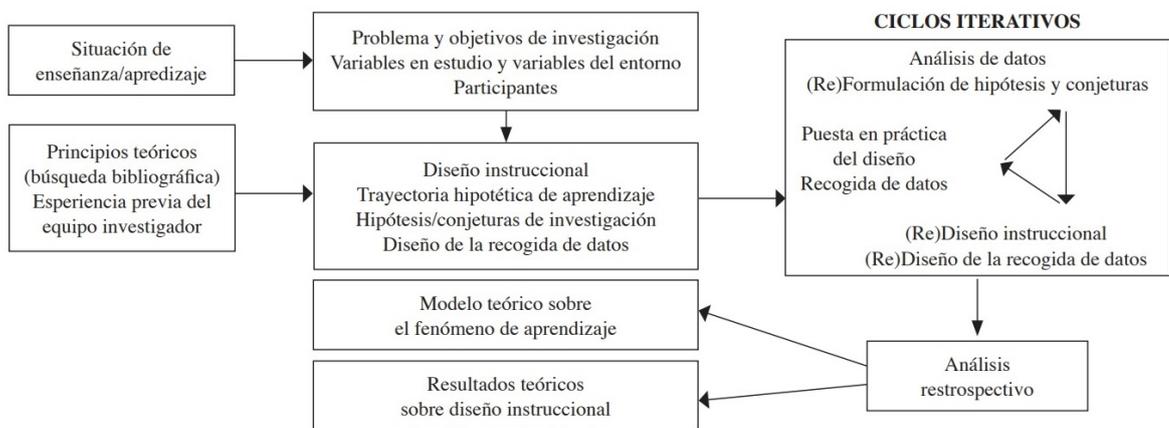
La estructura propuesta por Easterday et al. (2014) (citado por de Benito y Salinas, 2016) divide cada macrociclo en 6 fases: focalizar, comprender, definir, concebir, construir y

probar.

Por otro lado, Garelo et al. (2010) (citado por de Benito y Salinas, 2016) señalan que este tipo de investigaciones se pueden dividir en tres fases: fase de preparación, fase de implementación y fase de análisis retrospectivo.

Utilizando esta última división, en Molina et al. (2011) estructuran cada macrociclo de la siguiente forma:

Figura 2.2: Estructura general de cada macrociclo en una investigación de diseño.



Nota: Imagen tomada de Molina et al. (2011).

1. **Fase de preparación y diseño:** se parte de una situación de enseñanza/aprendizaje en un contexto real, se formula el problema, los objetivos y las variables en estudio y del entorno de la investigación. Hay que concretar qué conocimiento se quiere generar y qué queremos diseñar. Por otro lado, se hace el diseño del proceso de enseñanza/aprendizaje que se va a llevar a cabo y la recogida de datos. También, se hacen las primeras conjeturas de investigación basandonos en los principios teóricos y en las experiencias previas de los investigadores.
2. **Fase de implementación/intervención:** esta segunda fase está compuesta por microciclos, formados por las tres fases que se muestran en el esquema. La primera

consiste en la puesta en práctica del diseño y la recogida de datos, en la segunda se analizan los datos y se reformulan las conjeturas basándose en la información ya obtenido, y por último se hace el rediseño instruccional y de la recogida de datos.

3. **Fase de análisis retrospectivo:** Se recopilan y organizan todos los datos recogidos. Se trata de profundizar en la comprensión del proceso de enseñanza/aprendizaje que se ha puesto en práctica, para dar respuesta a conjeturas planteadas inicialmente. En esta fase también hay que identificar los aspectos específicos del ambiente de aprendizaje y acciones específicas del investigador que han contribuido en la obtención de esos resultados.

Independientemente de las diferentes etapas que tenga un macrociclo, en todos los casos, una vez acabadas todas las fases, se volvería a iniciar un segundo macrociclo teniendo en cuenta la experiencia del investigador en el macrociclo anterior. Este carácter cíclico tiene el objetivo de contribuir a la retroalimentación del modelo teórico y del diseño instruccional (Molina et al., 2011).

La investigación de diseño que presentamos en este trabajo ha consistido en un experimento de enseñanza, realizado a nivel de aula, durante el periodo de prácticas del máster. Debido a la corta duración de este periodo, la investigación está formada únicamente por un macrociclo.

En el periodo de prácticas, cada alumno del máster entra en un centro de Enseñanza Secundaria Obligatoria durante 6 semanas para llevar a la práctica los conocimientos adquiridos en la parte teórica del máster. Está formado por dos fases: la fase de observación (con una duración de 2 semanas) y la fase de intervención (con una duración de 4 semanas). La primera fase se ha utilizado para la preparación y diseño de investigación, definiendo las variables en estudio y del entorno y las características de los participantes. En la fase de intervención, se ha puesto en práctica el diseño y se ha realizado la recogida de datos.

A continuación, detallamos las características del macrociclo que se ha realizado para la investigación, utilizando la estructura de Molina et al. (2011), que se centra en tres fases: fase de

preparación y diseño, fase de implementación/intervención y fase de análisis retrospectivo.

2.2. Fase de preparación y diseño

Comenzamos la primera fase concretando cuál es el problema al que la investigación trata de dar una solución, los objetivos que se persiguen con el estudio. Seguidamente, describimos el contexto en el que se desarrolla la fase de intervención y detallamos el diseño de la propuesta de trabajo que se ha llevado a la práctica.

2.2.1. Problema de investigación

Como ya se ha introducido en el capítulo anterior, hay numerosas reflexiones acerca del uso de los errores como fuente de aprendizaje en la educación. Sin embargo, en la educación tradicional el error es considerado como algo negativo que los alumnos deben evitar, siendo penalizada la aparición de los errores en las producciones de los alumnos. Como consecuencia, son pocas las herramientas creadas para utilizar el error en el aula en la Educación Secundaria, y no es habitual hacer uso de los errores de los alumnos para favorecer su aprendizaje.

El presente trabajo, pretende utilizar de forma positiva el error, buscando sacar beneficio de su aparición en las producciones de los alumnos. Para ello, hacemos uso del modelo de evaluación basado esencialmente en pruebas escritas, utilizando la información valiosa que aportan las respuestas erróneas de los estudiantes, tanto para el docente como para el alumno. A menudo, esta información no se analiza ni se tiene en cuenta en el proceso educativo, dando valor únicamente a la calificación numérica final. Abordamos el diseño de una propuesta de trabajo, que tiene como punto de partida los errores cometidos en las pruebas escritas, para conseguir un óptimo aprovechamiento educativo poniendo el foco en los conceptos cuya comprensión ha resultado ser más deficiente.

En definitiva, podemos concluir que con esta investigación se pretende dar respuesta a la siguiente pregunta: *¿Se pueden utilizar los errores cometidos en pruebas escritas por los alumnos como un elemento de aprendizaje?*

Para llevarlo a cabo, se diseñan una serie de actividades para guiar a los alumnos en la construcción de su propia base de orientación para la detección y corrección de los errores. Tiktok es la plataforma para dar formato visual a la base de orientación. Lo que permite no solo un soporte de elaboración o presentación, sino que ofrece un instrumento de apoyo de autoreflexión personal que podrá ser visionado todas las veces que se quieran.

2.2.2. Objetivos

Maxwell (2008) propone la división de los objetivos de una investigación en tres tipos: personales, prácticos e intelectuales. Los primeros de ellos, se refieren a la motivación del investigador a realizar una investigación particular atendiendo a sus ambiciones profesionales y experiencias personales. Los objetivos prácticos, se centran en conseguir cambiar una situación concreta, dar solución práctica al problema en el que se basa la investigación. Por último, los objetivos intelectuales están orientados a la búsqueda de conclusiones, a nivel teórico, sobre el fenómeno investigado mediante la interpretación de los hechos producidos en la realidad. Con respecto a la investigación que se desarrolla en el presente trabajo, exponemos a continuación los objetivos marcados siguiendo la división de Maxwell (2008):

Los objetivos **personales**, aquellos que nos motivan a realizar este estudio específico sobre el uso de los errores como elemento de aprendizaje, son:

- Proporcionar materiales didácticos que me permitan trabajar de forma positiva los errores de los alumnos en mi futuro como docente, cambiando la visión de la educación tradicional que considera el error matemático como un obstáculo y algo que los alumnos deben evitar.
- Profundizar en herramientas que se alejan de la enseñanza tradicional para poder hacer uso de ellas como futura docente.

Los objetivos **prácticos**, centrados en cambiar el escaso uso que se hace del error en la enseñanza de las matemáticas, corresponden con los siguientes:

- Proponer un diseño instruccional para hacer uso de los errores presentes en las produccio-

nes de los alumnos en el aula. Para ello, se pretende desarrollar una base de orientación en relación con los errores matemáticos que sirva de autoevaluación para los alumnos.

Los objetivos **intelectuales**, centrados en la comprensión teórica del uso de los errores en la Educación Matemática, son los siguientes:

- Comprender los beneficios o inconvenientes que tiene utilizar los errores en el aula en la Educación Secundaria.

2.2.3. Contexto

En esta sección, detallamos las características del centro donde se ha realizado la parte práctica de la investigación y del alumnado que ha participado. También, exponemos los contenidos matemáticos que se han utilizado para trabajar los errores de los alumnos.

El centro

La investigación ha tenido lugar en el IES Ramón y Cajal, situado en el barrio de las Delicias de la ciudad de Valladolid. Se trata de un centro público, que depende de la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León, y cuenta con más de 900 alumnos, 85 profesores y 9 miembros del personal no docente. El centro se creó en 1980 como centro exclusivamente de formación profesional pasando a ser Instituto de Educación Secundaria en 1990.

El barrio de Las Delicias ha estado ligado desde sus inicios a una población de clase obrera, aunque cuenta con mayor variedad social actualmente. Desde los años 90 se ha apreciado la llegada de numerosa población inmigrante que, a día de hoy, muestra una incidencia más elevada que en el resto de la ciudad.

En el centro se imparten enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional Básica, Ciclos Formativos de Grado Medio y de Grado Superior de las familias profesionales de Sanidad, Imagen Personal y Química. Ofrece también el bachillerato de excelencia en idiomas y la ampliación del bachillerato de ciencias en investigación y orientación científica e industrial. La amplia oferta educativa que ofrece el centro y el barrio en el que se sitúa explica la diversidad del alumnado en edad, nacionalidad, cultura y nivel socio-económico.

El centro acoge a alumnado del barrio en ESO y Bachillerato, pero también recibe alumnos que residen en otras zonas de la ciudad, en pueblos de la provincia o, incluso, que proceden de otras ciudades de dentro y de fuera de la Comunidad Autónoma de Castilla y León y que se desplazan a Valladolid para proseguir estudios en los ciclos de formación profesional.

El profesorado está formado, en su mayoría, por profesionales que cuentan con una amplia experiencia docente y se esfuerzan en adaptar la metodología a las características del alumnado, convencidos de que la formación es indispensable para el buen desempeño de la profesión, participan en actividades y cursos para la mejora de las competencias y de la calidad educativa.

Los participantes

La puesta en práctica del diseño de investigación se ha llevado a cabo en un grupo del cuarto curso de la ESO, en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Enseñanzas Académicas.

El grupo cuenta con 20 alumnos, de entre 15 y 16 años, que están cursando el cuarto curso de la ESO con la opción de enseñanzas académicas (iniciación al Bachillerato). La mayoría quiere estudiar Bachillerato el año que viene, aunque no se ha podido observar una preferencia clara por el bachillerato de ciencias. Dos alumnos del grupo quieren cursar el bachillerato de ciencias con ampliación en investigación y orientación científica e industrial, y destacan por sus resultados en la asignatura de matemáticas.

Como características específicas de los participantes, señalamos que es un grupo trabajador y con interés por la ciencia. Crean un buen ambiente de trabajo en el aula y tienen una actitud participativa ante cualquier tarea que se plantea en clase. En general, es un grupo bueno académicamente en comparación con el resto de alumnos de 4ºESO del centro, aunque en la asignatura de Matemáticas son pocos los que sobresalen. Sin embargo, gracias al esfuerzo y el interés de los alumnos, la mayoría de los participantes aprueban la asignatura de Matemáticas.

Decisiones metodológicas y didácticas del departamento de Matemáticas

La metodología empleada en el centro en la asignatura de matemáticas viene marcada por la programación didáctica del departamento de matemáticas (Santos, 2021). En este documento, señalan los siguientes pasos a seguir en el desarrollo de cada unidad didáctica de la asignatura:

1. Exploración de los conocimientos previos y comentario de los objetivos a alcanzar. Se parte de algunas cuestiones sencillas relacionadas con el tema que se va a estudiar, manteniendo un diálogo con los alumnos que permitirá al profesor comprobar el nivel general de la clase con respecto a los contenidos de la unidad, detectar lagunas de conocimiento y conocer qué alumnos van a necesitar más ayuda.
2. Exposición por parte del profesor y diálogo con los alumnos. Durante la exposición de cada tema se fomentará la participación de los alumnos. Durante la exposición del profesor de los contenidos, se fomentará la participación de los alumnos. Esta participación se pretende conseguir con la formulación de preguntas a los estudiantes y la propuesta de actividades en las que los alumnos deben reflexionar sobre algún concepto concreto de la unidad.
3. Aplicación de la teoría a la resolución de problemas y preguntas orales para valorar el grado de comprensión. Tras introducir un procedimiento, se debe poner en práctica hasta conseguir cierta soltura en su ejecución por parte de los alumnos. Dependiendo de cada grupo de estudiantes, varía la cantidad de actividades relacionadas con el procedimiento y el tiempo dedicado en el aula. Se intentará corregir en clase todas las actividades realizadas, por parte del profesor o por parte de los alumnos, con el objetivo de aclarar cualquier duda.
4. Propuesta y resolución de ejercicios para fijar conceptos. Se propondrán una variedad de actividades ordenadas de menor a mayor dificultad, con el fin de afianzar los conocimientos adquiridos y llevar a cabo una aplicación práctica de los mismos a situaciones de la vida cotidiana, siempre que sea posible. Durante el tiempo que los alumnos dediquen a resolver problemas, el profesor ejercerá de guía y prestará ayuda a los alumnos con menor

rendimiento porponiéndoles actividades de refuerzo su es necesario. A los alumnos más capacitados se les propondrán problemas que les permitan la ampliación de los conocimientos adquiridos.

Unidad didáctica

La fase de intervención tuvo lugar a finales del mes de marzo, utilizando los contenidos de la unidad didáctica de geometría analítica (ver Anexo 1).

La unidad didáctica ha sido diseñada de acuerdo a la metodología y los contenidos marcados por la programación didáctica del departamento de matemáticas del IES Ramón y Cajal.

Esta unidad incluye siete sesiones dedicadas a impartir los contenidos de la unidad, mediante el uso de la clase magistral participativa y la resolución de problemas de geometría analítica. En la octava sesión se realiza la prueba escrita sobre los contenidos del tema tomando las respuestas de los alumnos como punto de partida para trabajar la detección y corrección de errores. Por último, las dos siguientes sesiones están dedicadas a las actividades diseñadas para trabajar los errores matemáticos de los alumnos en el aula, que desarrollamos de forma detallada en el apartado de diseño instruccional.

2.2.4. Diseño instruccional

El instrumento diseñado para dar solución al problema de la investigación, tiene como objetivo principal guiar a los alumnos en la construcción de una base de orientación para la detección y corrección de errores cometidos en la prueba escrita.

Tomando como base el marco teórico definido para la investigación, se han diseñado un total de cuatro actividades para guiar a los alumnos en el proceso de detección y corrección de errores cometidos en la prueba escrita de la unidad didáctica. Las dos primeras actividades tienen como objetivo la detección de errores matemáticos, la siguiente trata sobre la corrección de los mismos y, en la última, se realiza la coevaluación de las bases de orientación construidas.

Por las circunstancias específicas del contexto en el que se ha realizado la fase de implementación, y la corta duración del periodo de prácticas del máster, la metodología planteada para trabajar los errores de los alumnos consiste en el trabajo cooperativo de los estudiantes formando grupos de 3 o 4 personas. En otras circunstancias, podría ser planteado como trabajo individual en el que cada alumno detecta y corrige sus errores. La dinámica planificada para llevar a cabo en el aula es la siguiente:

1. Se realiza una prueba a los alumnos con problemas sobre los contenidos de la unidad didáctica, en nuestro caso, de geometría analítica. Se intenta tratar todos los contenidos del tema para poder detectar errores en todos los conceptos trabajados en la unidad didáctica.
2. El docente corrige los exámenes de los alumnos señalando los errores cometidos y sin dar una calificación numérica a los problemas del examen. Simplemente rodea los errores presentes en los exámenes sin llegar a corregirlos.
3. Se entregan las pruebas escritas a los estudiantes, sin calificación numérica, haciendo énfasis en que deben prestar atención a los errores que han cometido y que están señalados.
4. Se forman grupos de 3 o 4 personas, agrupando a los alumnos que hayan cometido el mismo error o errores en el mismo problema. De esta forma, trabajan de forma conjunta el problema en el que han tenido más dificultades.
5. Los grupos realizan las siguientes actividades diseñadas para trabajar en la construcción de las bases de orientación para la detección y corrección de los errores, así como la autoevaluación de las bases construidas. El profesor toma un papel de guía o asesor en el aula:

Actividad 1: Reconocimiento del error

Esta primera actividad consiste en la identificación de los errores comunes cometidos. Su finalidad es localizar el error común o mayoritario entre los miembros del grupo para trabajar en la corrección del mismo posteriormente. Para ayudar a los alumnos en esta tarea, se entrega a cada grupo el siguiente enunciado:

Ya habéis visto vuestro examen corregido. Todos los miembros del grupo tenéis un error señalado en rojo. Lo primero que debéis hacer es reconocer el error matemático que habéis cometido. Para ello, vais a trabajar en grupo poniendo en común lo que podéis observar en vuestros exámenes y escribir lo que consideráis.

Este enunciado debe ir acompañado de una serie de preguntas guía a las que los alumnos deben responder. En la tabla 2.1, hemos recogido las preguntas guía utilizadas para esta actividad junto con su intención, que consideramos que los alumnos deben plantearse para realizar el reconocimiento del error.

Tabla 2.1: Preguntas guía para el reconocimiento de errores.

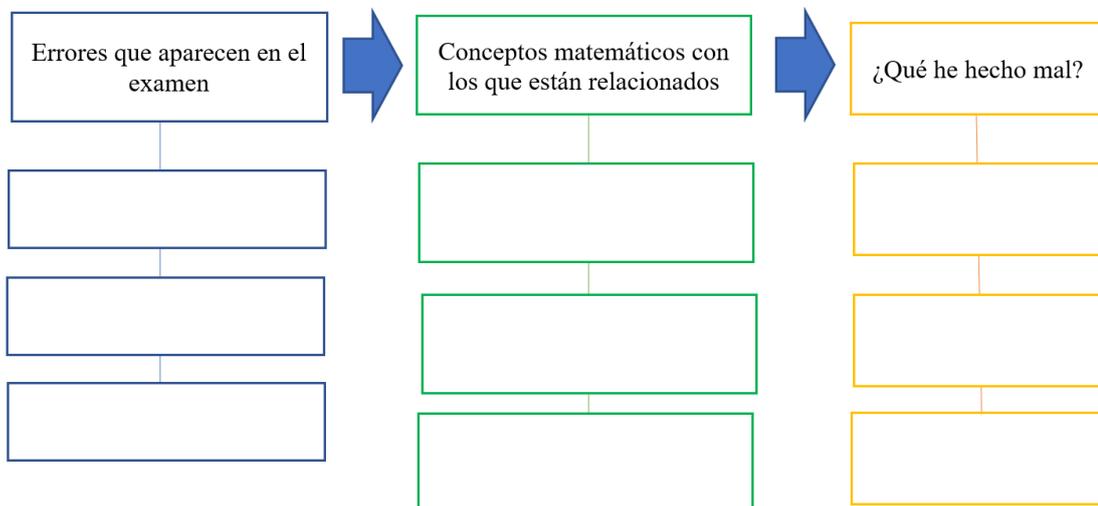
Orientación a través de preguntas	
Preguntas	Intención
¿Qué es lo que está mal?	Reconocimiento individual del error
¿Con qué concepto matemático visto en el tema está relacionado vuestro error?	Conjunto conceptual que fundamenta la base de orientación
¿Tenéis los miembros del grupo la misma parte señalada en rojo?	Reconocimiento grupal del error
¿Habéis notado un error común?	Retroalimentación grupal

Actividad 2: Esquema del error

La segunda actividad continua trabajando con la detección de errores. Una vez identificado el error común cometido por los miembros del grupo, analizan los conceptos matemáticos con los que está relacionado y comprenden qué tipo de error han cometido.

Para ello, cada grupo debe hacer un esquema sobre su error con sus las características básicas. Para guiar a los alumnos en la construcción del esquema, se entrega a cada grupo el siguiente enunciado, acompañado de la estructura que deben seguir los esquemas creados por los alumnos:

Una vez hecho el reconocimiento, el siguiente paso es hacer un esquema sobre vuestro error. En él debe aparecer:



Actividad 3: Corrección del error

Con esta actividad comenzamos con la corrección de los errores. Ya han identificado el error y observado con qué concepto matemático está relacionado. En esta actividad deben crear una lista con los pasos a seguir para realizar bien la tarea matemática donde han cometido el error. El enunciado de esta actividad es el siguiente:

Ya conocemos perfectamente el error que hemos cometido en el examen. Llegó la hora de corregirlo. Imaginaros que tenéis que resolver un problema similar al del examen. Explicad los pasos que hay que seguir para resolver de forma correcta el problema.

De nuevo, como en la primera actividad, acompañamos el enunciado con una serie de preguntas guía para orientar en esta la segunda fase de la creación de una base de orientación para la detección y corrección de errores. En la tabla 2.2 mostramos las preguntas guía propuestas acompañadas de su intención.

Tabla 2.2: Preguntas guía para la corrección de los errores.

Orientación a través de preguntas	
Preguntas	Intención
¿Qué concepto matemático trata el problema?	Identificación de los fundamentos conceptuales
¿Qué herramientas crees que pueden ser útiles en este problema?	Identificación de contenidos útiles
¿Cómo empezaríais a resolverlo?	Elección de una estrategia
¿Qué pasos hay que seguir?	Estrategia y orden de ejecución.

Actividad 4: Evaluación del error

Con la última actividad, pretendemos realizar la coevaluación de las bases de orientación creadas. Para ello, cada grupo expone qué error común han trabajado y la base de orientación con la corrección del error. Posteriormente, sus compañeros realizan propuestas de mejora del trabajo mediante el diálogo en el aula. Cada grupo anota las indicaciones dadas por sus compañeros. El docente trata de guiar el diálogo que se produce tras la exposición de los trabajos para que los alumnos evalúen los siguientes aspectos:

- Explican de forma clara cuál es el error cometido.
- Identifican todos los conceptos matemáticos relacionados con el error.
- Las explicaciones dadas para resolver de forma correcta el problema son claras.
- Incluyen todos los pasos necesarios para realizar correctamente la tarea matemática.

El enunciado que se entrega a los estudiantes es el siguiente:

Es el momento de compartir con los demás el trabajo sobre vuestro error. A continuación, podéis tomar nota de los comentarios que vuestros compañeros os hacen para mejorar vuestro trabajo.

6. Una vez realizadas las actividades, cada grupo debe realizar un vídeo en TikTok, para entregar al profesor, que cumpla las siguientes condiciones:

- Al comienzo del vídeo deben mostrar la tarea matemática que van a realizar y una fotografía del error cometido en el examen que han trabajado en el aula con las dos primeras actividades.
- Posteriormente, realizan la explicación de los pasos a seguir para resolver de forma correcta el problema donde han cometido en error. Cada paso debe estar explicado de forma breve y clara.
- El vídeo no puede durar más de 1 minuto.
- No puede aparecer ninguna figura humana en el vídeo por los problemas que conlleva.

2.3. Fase de implementación/intervención

En esta segunda fase se implementa la propuesta diseñada para trabajar los errores en el aula. Como hemos comentado anteriormente, se ha llevado a cabo en un aula de cuarto de la ESO en la unidad didáctica de geometría analítica.

2.3.1. Puesta en práctica

Las actividades diseñadas para trabajar los errores se han realizado en dos sesiones en el aula, posteriores a la realización del examen de la unidad. En dicha prueba, los alumnos debían resolver los siguientes problemas relacionados con los contenidos vistos previamente de geometría analítica:

1.- Dados los puntos $A = (-1, 3)$ y $B = (2, 0)$ calcula las coordenadas del vector \overrightarrow{AB} . Si tenemos el punto $C = (-2, 1)$, determina las coordenadas del punto D para que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

2.- Dados los vectores $\vec{u} = (-1, -3)$, $\vec{v} = (3, 1)$ y $\vec{w} = (2, 1)$, calcula y representa gráficamente el resultado de las operaciones:

- a) $\vec{u} + \vec{v}$
- b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- c) $\vec{u} - 2\vec{w}$
- d) $\vec{v} - \vec{w}$

3.- Calcula las coordenadas del punto B que es el simétrico de $A = (2, 6)$ con respecto de $M = (2, 0)$.

4.- Demuestra que el triángulo cuyos vértices son $A = (4, 0)$, $B = (-2, 0)$ y $C = (1, 3\sqrt{3})$ es equilátero.

5.- Hallar las ecuaciones vectorial, paramétricas, en forma continua, general, explícita y punto-pendiente de la recta que pasa por los puntos $A = (3, -1)$ y $B = (5, 2)$.

6.- Un paralelogramo tiene un vértice en el punto $A = (-3, 2)$ y dos de sus lados están sobre las rectas $r: y = -2x + 7$ y $s: y = 5$. Calcular las ecuaciones de los otros dos lados y las coordenadas de sus vértices.

7.- Dado el triángulo de vértices $A = (-1, 1)$, $B = (3, 4)$ y $C = (3, 0)$, halla la ecuación de la mediatriz de AB , la ecuación de la mediatriz de BC y el circuncentro del triángulo (punto de intersección de las mediatrices).

El procedimiento seguido en las dos sesiones dedicadas a la implementación del diseño instruccional es la siguiente: en la primera sesión, se entregaron los exámenes a los alumnos con los errores marcados, sin calificación numérica. Se organizaron cinco grupos de trabajo de cuatro personas, agrupando a los alumnos que habían cometido errores en el mismo problema. Cada grupo tenía asignado el siguiente error común o mayoritario para los miembros del grupo y señalado en las pruebas escritas. Una vez organizados los grupos de trabajo, los alumnos realizaron las tres primeras actividades diseñadas para trabajar los errores. La metodología planificada

consideraba la realización del vídeo en TikTok tras realizar la cuarta actividad, prevista para la segunda sesión. Sin embargo, por las circunstancias del momento y la disposición de tiempo suficiente, los alumnos comenzaron a trabajar en el aula en la grabación del vídeo de TikTok sobre el error trabajado, con los permisos pertinentes del centro para que los alumnos pudiesen hacer uso de los teléfonos móviles. Al finalizar la sesión, se pidió a los participantes como tarea para realizar en casa que acabasen de grabar el vídeo, en el caso que no hubiesen tenido tiempo suficiente en el aula.

En la segunda sesión, se realizó la última actividad planificada destinada a la coevaluación de los trabajos de los participantes. Se procedió a la proyección de los vídeos de TikTok de cada grupo y, posteriormente, el diálogo de los estudiantes con los comentarios de mejora pertinentes sobre los vídeos de sus compañeros.

2.3.2. Análisis de datos

Los datos obtenidos, para su posterior análisis, corresponden con los errores encontrados en las producciones de los estudiantes y las respuestas aportadas por los alumnos a cada una de las actividades presentadas en el apartado de diseño instruccional. A ello se suma la observación en ambas sesiones por parte del investigador. En esta sección analizamos todos los datos recogidos en la puesta en práctica del diseño.

2.3.2.1. Tipología de los errores cometidos por los alumnos

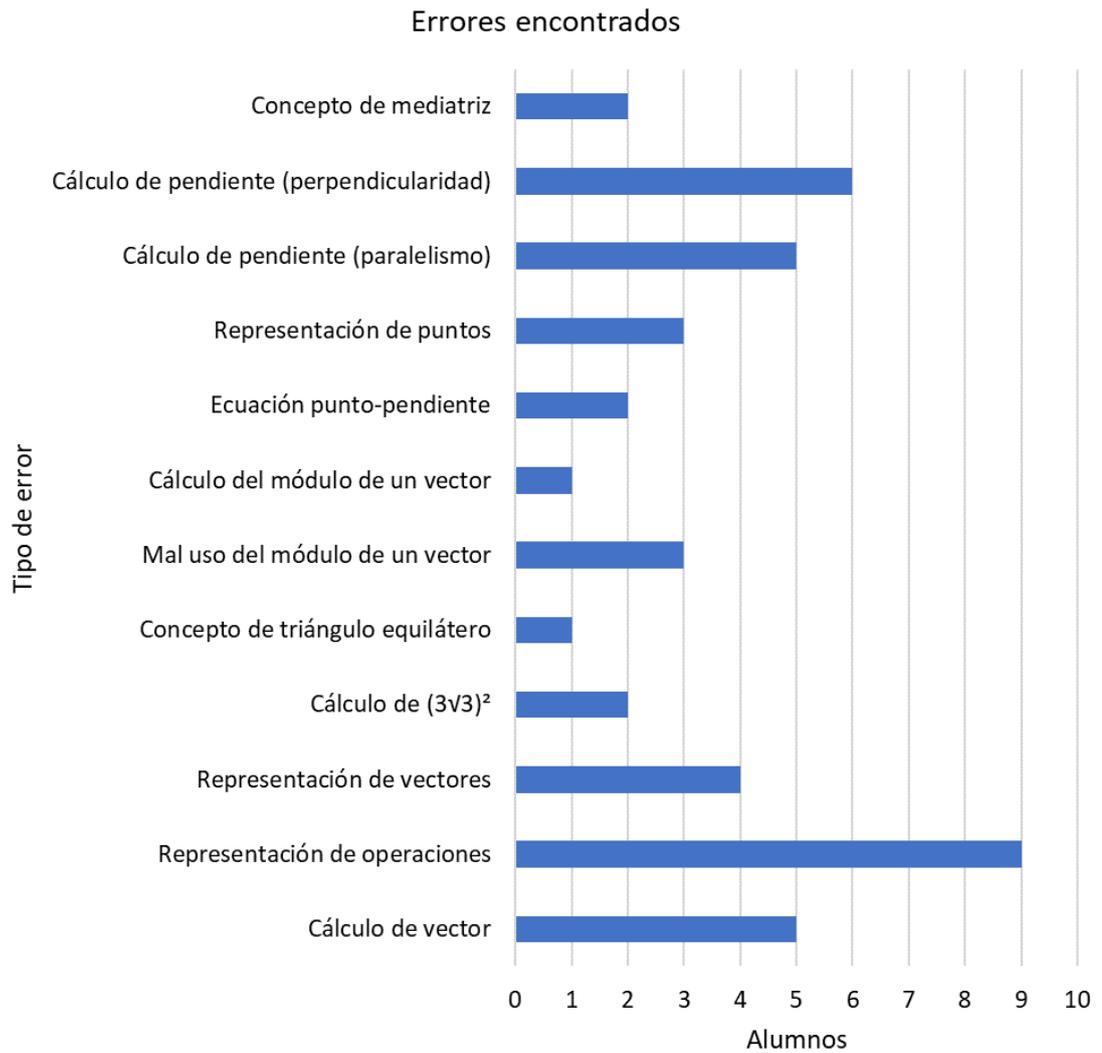
Comenzamos el análisis de datos mostrando los errores encontrados en las respuestas de la prueba escrita. Describimos los errores que hemos detectado en las producciones de los alumnos observando los más frecuentes entre los participantes. Para ello, creamos una serie de categorías que abarcan toda la tipología de errores cometidos por los alumnos en el examen. En la tabla 2.3 mostramos estas categorías acompañadas de una descripción del error y el tipo de error que se considera en la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987) explicada en el capítulo anterior.

Tabla 2.3: Errores detectados en las producciones de los alumnos.

Error	Descripción	Clasificación
Cálculo de un vector a partir de dos puntos.	Fallo en las operaciones realizadas	Errores técnicos.
Representación de operaciones con vectores.	Fallo en la ejecución del procedimiento enseñado para operar gráficamente con vectores.	Errores técnicos.
Representación de vectores.	Representar vectores como si se tratase de puntos en el plano.	Definiciones deformadas.
Errores en el cálculo de $(3\sqrt{3})^2$.	Realizar una aproximación de $\sqrt{3}$ con la calculadora para poder operar.	Errores técnicos.
Concepto de triángulo equilátero.	Uso de la definición equivocada.	Falta de verificación en la solución.
No hacer uso del módulo de un vector.	Comparar distancias entre dos puntos con razonamientos basados en las coordenadas de los vectores en lugar de comparar sus módulos.	Inferencias no válidas lógicamente.
Cálculo del módulo de un vector.	Fallo en las operaciones realizadas	Errores técnicos.
Ecuación punto-pendiente de una recta.	Sustituir de forma incorrecta los datos en la fórmula general de la ecuación punto-pendiente	Errores técnicos.
Representación de puntos en el plano.	Fallo al trasladar las coordenadas de los puntos al plano.	Errores técnicos.
Cálculo de la pendiente de rectas paralelas a una dada.	Uso del método para calcular la pendiente de una recta perpendicular a otra dada	Definiciones deformadas.
Cálculo de la pendiente de rectas perpendiculares a una dada.	Uso del método para calcular la pendiente de una recta perpendicular a otra dada.	Definiciones deformadas.
Concepto de mediatriz.	Realizar cálculos correctos confundiendo el concepto de mediatriz con el de mediana o punto medio.	Falta de verificación en la solución.

Utilizando esta categorización de los errores, mostramos la frecuencia con la que se ha dado cada error en el siguiente diagrama (figura 2.3). De esta forma, cuantificamos el número de alumnos que han cometido el mismo tipo de error:

Figura 2.3: Diagrama de barras con la frecuencia de cada tipo de error.



Observamos que el error más común es la representación de operaciones con vectores, seguido del cálculo de pendientes de rectas paralelas y perpendiculares. Los tres errores están relacionados con conceptos matemáticos que los alumnos ven por primera vez en esta unidad

didáctica. En cambio, los menos frecuentes son errores técnicos concretos en las operaciones realizadas en el examen y fallos causados por asociar a un concepto del enunciado una definición que no le corresponde.

2.3.2.2. Estructuración de los grupos de trabajo

Para crear los grupos de trabajo se tienen en cuenta los errores que ha cometido cada alumno, tratando de agrupar a los participantes que presentan el mismo error en la prueba escrita. Esta tarea no fue sencilla y, de hecho, algunos grupos presentaban el error la mayoría de los miembros, pero no en su totalidad. Los errores presentes en cada grupo son los siguientes:

- G1. El error mayoritario es la representación de vectores como puntos. Otros errores: representación gráfica de las operaciones con vectores (Problema 2).
- G2. El error mayoritario es no hacer uso del módulo del vector. Otros errores: cálculo del módulo de un vector y error en el concepto de triángulo equilátero (Problema 4).
- G3. Los tres miembros del grupo presentan errores diferentes. Errores presentes: no hacer uso del módulo del vector, error en el cálculo del módulo de un vector y error provocado por realizar operaciones correctas respondiendo a una cuestión que no se preguntaba (Problema 4).
- G4. El error mayoritario está en el cálculo de la pendiente de rectas paralelas. Otros errores: la representación de puntos en el plano (Problema 6).
- G5. El error mayoritario está en el cálculo de la pendiente de rectas perpendiculares. Otros errores: cálculo de vectores y error en el concepto de mediatriz (Problema 7).

Tras haber analizado los tipos de errores encontrados en las producciones de los alumnos y realizado la estructuración en grupos, continuamos con el análisis de las respuestas de los alumnos en las actividades. Con las actividades pretendemos guiar a los alumnos en la construcción de las bases de orientación para trabajar los errores realizando, en primer lugar, una fase de detección de los errores, en segundo lugar, otra fase de corrección de los errores y, por último, la

coevaluación de las bases construidas incluyendo propuestas de mejora.

Esta división clara en fases del proceso de construcción de las bases de orientación, incluyendo su coevaluación, nos lleva a dividir los datos obtenidos en las respuestas de los alumnos a las actividades de la siguiente forma:

- *Detección de errores por parte de los alumnos*: Analizamos las respuestas aportadas por los alumnos en las dos primeras actividades.
- *Corrección de errores por parte de los alumnos*: Analizamos las respuestas de los alumnos en la actividad 3.
- *coevaluación de los alumnos*: analizamos los datos obtenidos en el desarrollo de la actividad 4.

Así, analizamos de forma individual el camino seguido por cada grupo en cada una de estas partes.

2.3.2.3. Detección de errores por parte de los alumnos

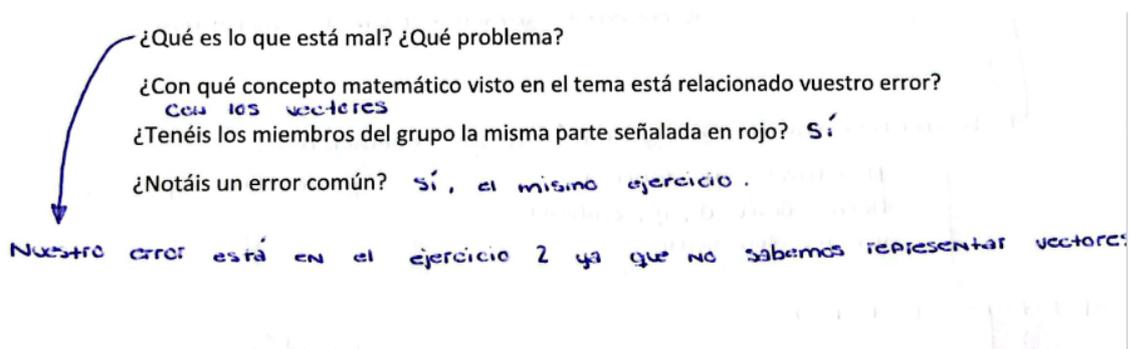
Las producciones de los alumnos relacionadas con la detección de errores, corresponden con las respuestas a la actividad 1 (reconocimiento del error) y la actividad 2 (esquema del error), ambas descritas en el quinto paso de la metodología planificada, desarrollada en el apartado de diseño instruccional. Como ya hemos comentado, algunos grupos cuentan con un error que es común para todos los miembros, pero otros grupos presentan varios errores entre sus integrantes. Sin embargo, cada grupo de trabajo tiene asignado un problema concreto del examen en el que han cometido errores todos ellos. Mostramos, a continuación, el camino seguido por cada grupo para la detección de los errores que cometen.

En la primera actividad, los grupos se centran en responder a las preguntas guía aportadas en el enunciado. Comenzamos analizando las respuestas del grupo 1. Los miembros de este grupo cometen errores en la representación de las operaciones de vectores. Sus fallos son derivados de errores en la representación de vectores en el plano, cometiendo de forma mayoritaria el error

de representar las coordenadas del vector como si se tratase de punto en el plano. Dos de los miembros del equipo solo habían cometido este error en su examen. No presentaban ninguno de los otros errores categorizados en la tabla 2.3. Al comprobar que sus compañeros de grupo también tenían un error marcado en la representación de vectores, supieron identificar dónde estaba su error rápidamente. Responden de forma clara a las preguntas, como se muestra en la figura 2.4, indicando que su error está en la representación de vectores.

Responden a la primera pregunta identificando el error concreto que han cometido todos los miembros del grupo. Sin embargo, relacionan su error con los vectores sin concretar que es en la representación de los mismos donde cometen los errores. A pesar de ello, dejan claramente identificado el error.

Figura 2.4: Producción original del grupo 1 (Actividad 1).

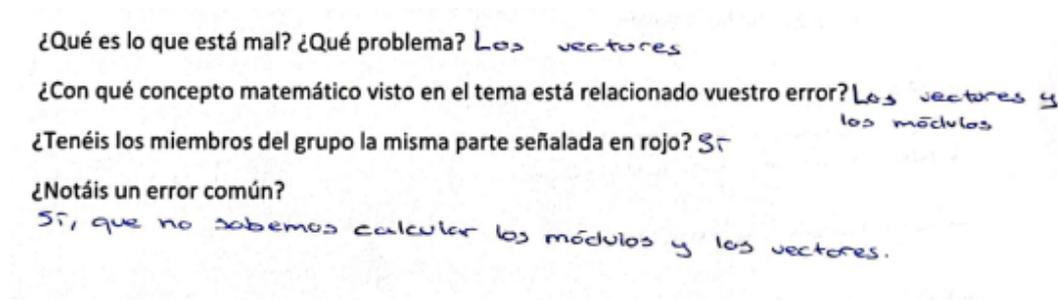


En el grupo 2, la mayoría de alumnos han cometido el error en el problema 4, por no hacer uso del módulo de los vectores calculados para comparar la longitud de los lados del triángulo equilátero. En su lugar, comparan las coordenadas de los vectores, deduciendo que como las coordenadas no son iguales, la longitud de los vectores tampoco va a ser la misma. Además, presentan errores técnicos en el cálculo de vectores y otro error en el concepto de triángulo equilátero, utilizando la definición de triángulo isósceles en su lugar. Las respuestas de este grupo a las preguntas guía planteadas para la actividad (figura 2.5) son breves y generales, pero indican que han podido identificar el error con el concepto de módulo y el cálculo de vectores,

sin mencionar el error con el concepto de triángulo equilátero. Esta rápida relación de su error con el concepto de módulo, no utilizado por la mayoría para resolver el problema, se debe a que el alumno que comete el error en el concepto de triángulo equilátero sí que utiliza el módulo de los vectores en su resolución. Luego ayuda a sus compañeros a detectar qué han hecho mal en el problema.

Como observamos en la figura 2.5, al igual que en el grupo anterior, relacionan los errores con el concepto de vector y añaden el concepto de módulo de un vector. Identifican de forma general el error que debe trabajar el grupo indicando que su fallo está en el cálculo de los vectores y los módulos, haciendo una primera aproximación al error.

Figura 2.5: Producción original del grupo 2 (Actividad 1).

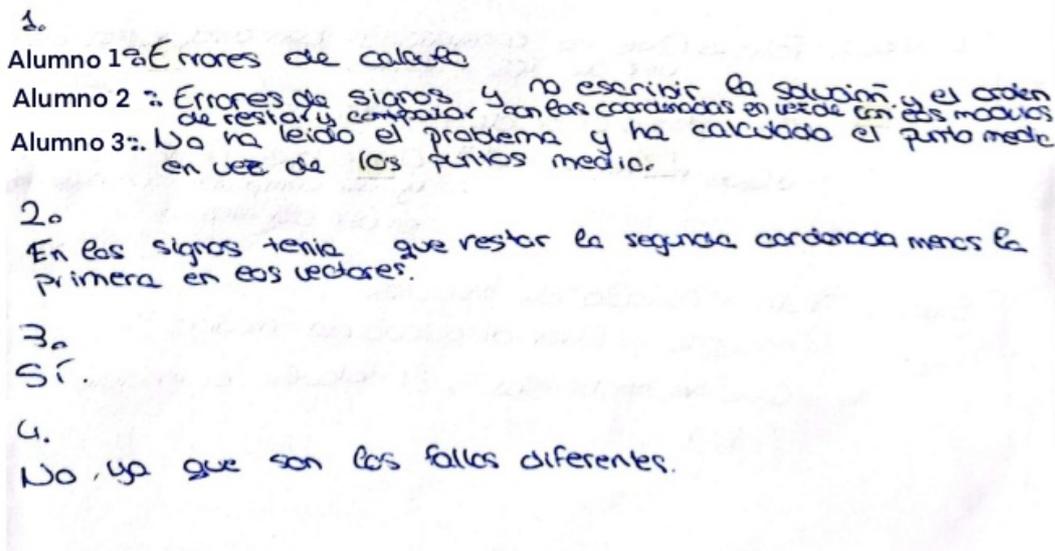


El grupo 3 está formado por alumnos que cometen fallos en el mismo problema, pero no se repite el mismo error. Todos ellos resuelven mal el problema 4, como el grupo anterior, pero cada uno por uno de estos errores: error por no usar el módulo de los vectores, error por no hacer uso del módulo de un vector y error por dar una solución distinta a la que se pide. En este grupo tratan de identificar los errores de todos los integrantes del grupo (en este caso 3 alumnos, a falta de una persona que no acudió a clase ese día) en lugar de elegir un error concreto y centrarse en él. Responden a las preguntas guía individualmente dando cada alumno la respuesta con su error (figura 2.6).

Identifican cada uno de los errores, pero no los relacionan con ningún concepto matemático. Describen el error de cálculo que ha cometido el Alumno 2 sin aportar ningún concepto con el

que puedan estar relacionados sus fallos.

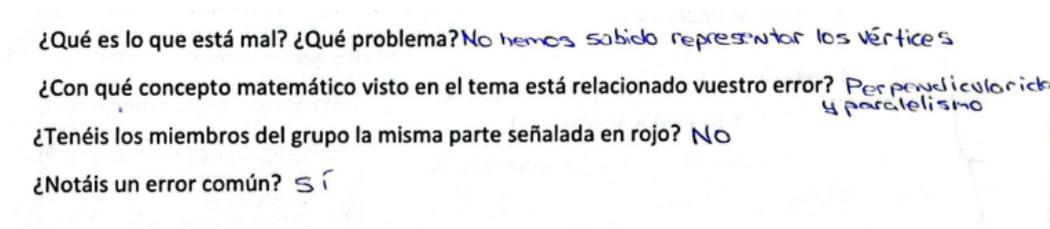
Figura 2.6: Producción original del grupo 3 (Actividad 1).



El grupo 4, no deja claro el error sobre el que van a trabajar. El error que ha cometido la mayoría de miembros del grupo corresponde con el cálculo de la pendiente de una recta paralela a otra dada, en el problema 6. Utilizan el método para calcular la pendiente de una recta perpendicular. Identifican el problema en el que han cometido fallos todos los miembros del grupo, pero proporciona respuestas demasiado breves y generales a las preguntas guía planteadas sin identificar el error en el cálculo de la pendiente de la recta (figura 2.7).

Identifican como error general no saber representar los vértices del paralelogramo del enunciado, fallo también presente en algún miembro del grupo, pero no detectan el error en el cálculo de la pendiente. Sin embargo, relacionan su error con la perpendicularidad y el paralelismo por tratarse de un problema que trabaja esos conceptos. Muestran que notan un error común sin aportar más explicaciones en su respuesta.

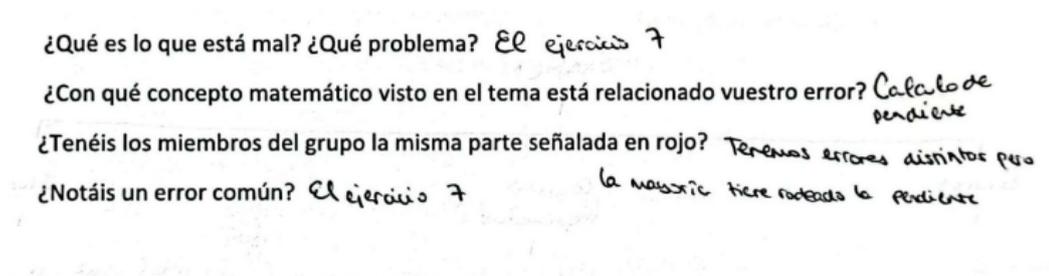
Figura 2.7: Producción original del grupo 4 (Actividad 1).



Por último, el quinto grupo está formado por alumnos que cometen errores en el cálculo de la pendiente de una recta perpendicular a otra dada en el problema 7. Emplean el método para calcular la pendiente de las rectas paralelas. También encontramos entre los miembros del grupo errores en el cálculo de vectores y en el concepto de mediatriz, confundiéndolo con el concepto de mediana. Responde de forma clara a las preguntas guía como se muestra en la figura 2.8, dejando claro que han conseguido identificar el error.

Localizan el problema en el que han cometido los errores, y lo relacionan con el concepto de cálculo de la pendiente. Muestran que, a pesar de tener fallos distintos, identifican como mayoritario el error en el cálculo de la pendiente de la recta.

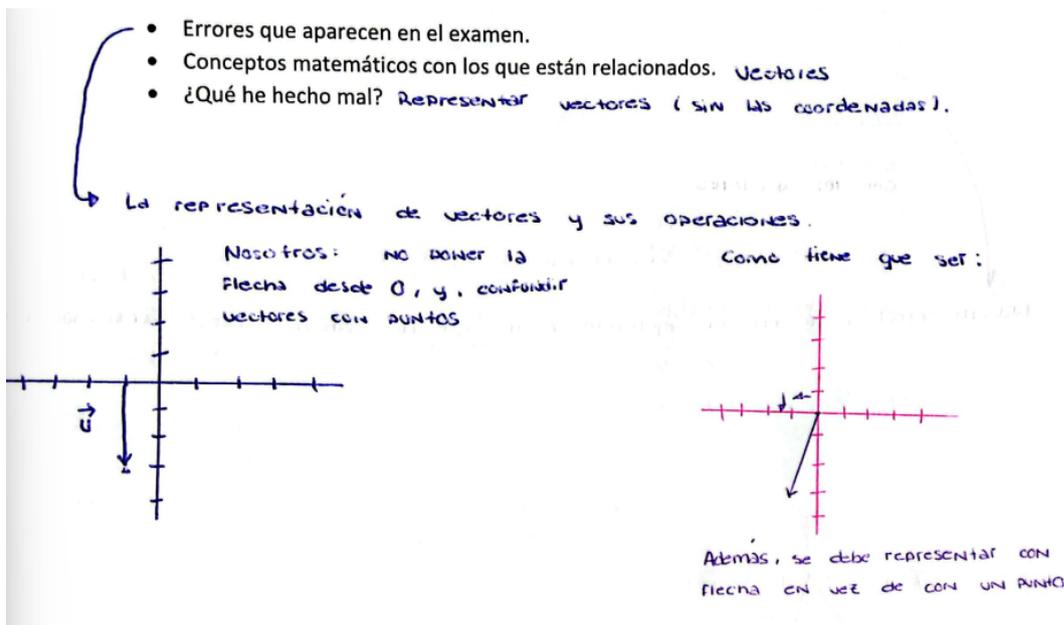
Figura 2.8: Producción original del grupo 5 (Actividad 1).



En la actividad 2, deben realizar un esquema del error y relacionarlo con los conceptos matemáticos implicados. En él deben aparecer: los errores cometidos en el examen, los conceptos matemáticos relacionados y una breve explicación de qué han hecho mal. De esta forma, detallan los errores que han identificado realizando cada grupo su propio esquema personal. Los alumnos tienen libertad para presentar el esquema en el formanto que deseen pudiendo observar la forma particular que tiene cada grupo de organizar las ideas.

Analizamos los esquemas creados por cada grupo. El grupo 1, había conseguido identificar el error concreto de la representación de vectores. Responden a cada uno de los apartados que debe incluir el esquema y añaden ya en esta actividad la forma adecuada de realizar la tarea, como podemos ver en la figura 2.9. Realizan el esquema únicamente de la representación de vectores, sin mencionar en ningún momento errores en las operaciones con vectores.

Figura 2.9: Producción original del grupo 1 (Actividad 2).

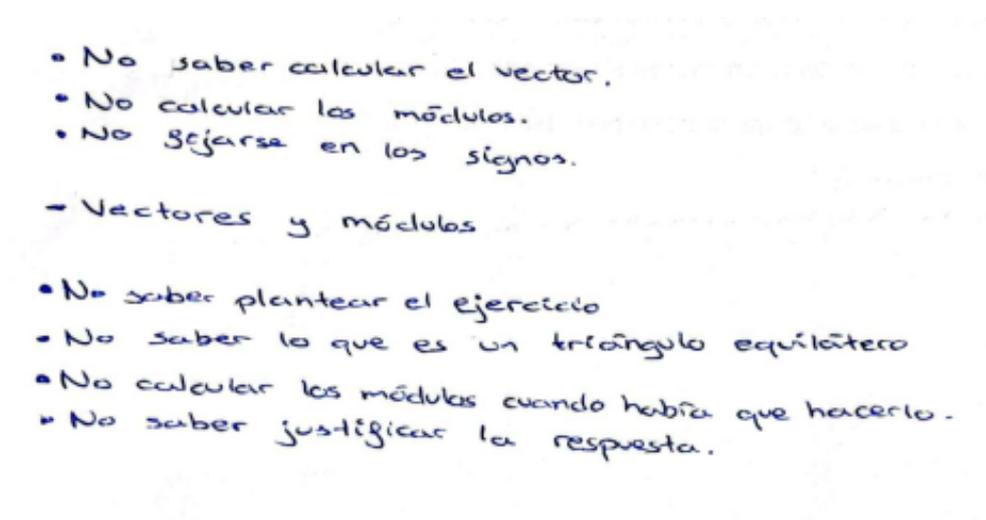


Este grupo es el único que se centra en un solo error, el más común entre los integrantes de cada grupo. Aunque se explica que deben centrarse en un único error, el resto de grupos identifican más de un fallo cometido por el grupo en el mismo problema del examen y, en vez de centrarse en el error mayoritario, hacen el esquema incluyendo varios errores señalando en cada caso cada una de las cuestiones que debe incluir en el esquema: el error cometido, el concepto matemático con el que se relaciona y lo que han hecho mal.

En el esquema del grupo 2 (figura 2.10), podemos observar que realmente no muestran los errores cometidos en el examen. Expresan con una frase los fallos que encuentran en el examen indicando lo que han hecho mal en la primera parte del esquema: “No saber calcular el vector”,

“No calcular los módulos” y “No fijarse en los signos”. A pesar de haber señalado en la actividad 1 que sus errores están en el cálculo de módulos y vectores, con esta actividad identifican de forma más detallada todos los errores cometidos por los miembros del grupo (no utilizar el módulo del vector para comparar distancias, error en el concepto de triángulo equilátero y errores en el cálculo de vectores) en la parte del esquema que explican qué han hecho mal.

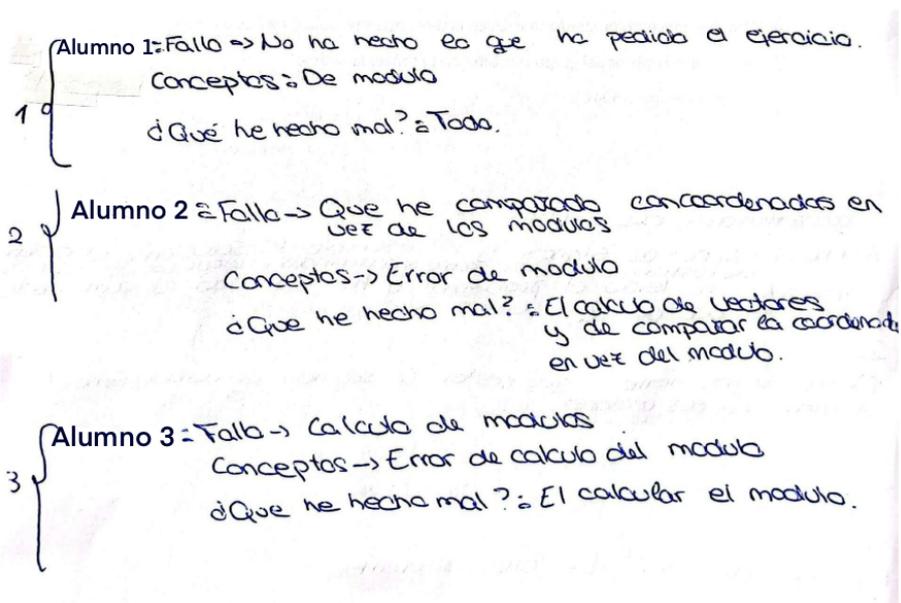
Figura 2.10: Producción original del grupo 2 (Actividad 2).



El grupo 3, divide los errores de nuevo según el alumno que lo ha cometido, como ya hicieron en la actividad 1. Hacen un esquema de cada error con los tres componentes pedidos (figura 2.11). Como el grupo anterior, en lugar de escribir textualmente el fallo cometido en el examen, describen verbalmente el error cometido por cada uno de ellos.

Identifican correctamente cada uno de los errores, aunque ni el Alumno 1 ni el Alumno 3 especifican qué parte concreta del ejercicio han hecho mal. En su lugar dan respuestas generales indicando el Alumno 1 que ha hecho mal “Todo” y el Alumno 3 vuelve a repetir que es el cálculo del módulo lo que ha hecho mal sin concretar qué error concreto de cálculo comete.

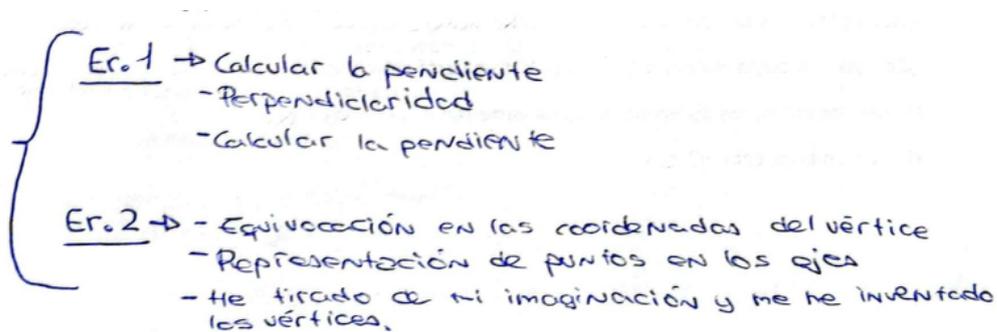
Figura 2.11: Producción original del grupo 3 (Actividad 2).



El siguiente grupo, amplía el número de errores identificados entre sus integrantes. En la primera actividad, indican que su error está en la representación de los vértices del paralelogramo definido en el problema 6. Sin embargo, en esta actividad hacen su esquema (figura 2.12) con dos errores identificados: el cálculo de la pendiente y la representación de puntos en el plano.

De nuevo, expresan con una frase los errores que cometen en el examen. Concretan de forma más específica que en la actividad anterior (figura 2.7) los conceptos matemáticos con los que relacionan cada error.

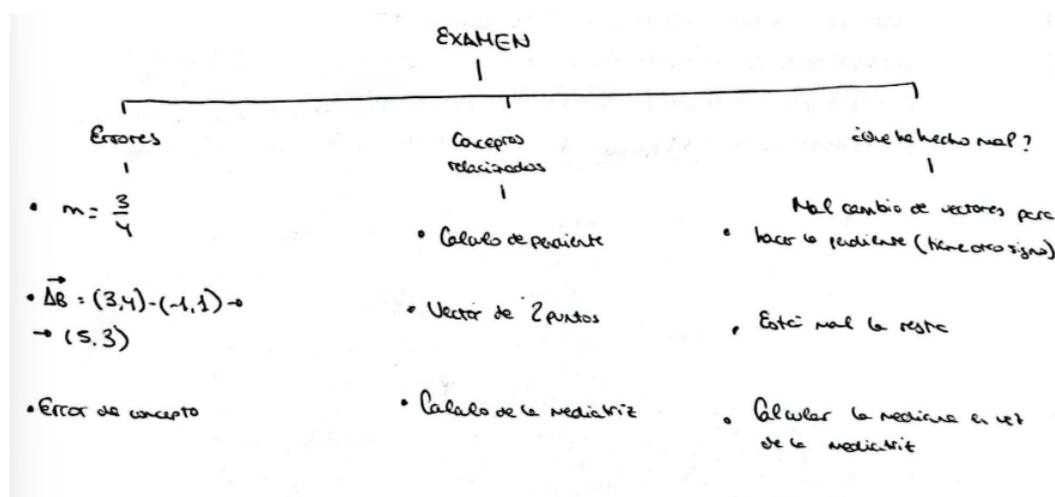
Figura 2.12: Producción original del grupo 4 (Actividad 2).



Por último, el quinto grupo señala tres errores cometidos por los miembros del grupo en el mismo problema. Este grupo, al igual que el primero, sí muestra los errores cometidos exactamente como son encontrados en el examen como observamos en su esquema (figura 2.13). Consiguen identificar todos los errores presentes entre los integrantes del grupo: error en el cálculo de la pendiente de una recta perpendicular, error en el cálculo de vectores y error en el concepto de mediatriz. Recogen en un mismo esquema los tres aspectos pedidos para cada uno de los tres errores que han identificado.

Relacionan correctamente cada error con los conceptos matemáticos de cálculo de pendiente, vector de dos puntos y cálculo de la mediatriz y especifican de forma concreta qué han hecho mal en cada uno de los errores expresando que se ha producido por: “Mal cambio de vectores para hacer la pendiente (tiene otro signo)”, “Está mal la resta” y “Calcular la mediana en vez de la mediatriz”.

Figura 2.13: Producción original del grupo 5 (Actividad 2).



Observamos que ambas actividades son necesarias para conseguir la detección de los errores cometidos por los alumnos. La primera actividad aporta una aproximación de la identificación del error, consiguiendo que todos los alumnos identifiquen el problema en el que se tienen que centrar. Sin embargo, es en la actividad 2 cuando realmente detectan los errores que cometen relacionándolo con los conceptos matemáticos implicados.

2.3.2.4. Corrección de errores por parte de los alumnos

Analizamos las respuestas de los alumnos a la actividad 3, descrita también en el apartado de diseño instruccional, en la que deben corregir el problema el error que han cometido. Una vez detectado el error, pasamos a crear una lista con los pasos a seguir para realizar bien la tarea matemática donde han cometido el error. Para ello, se realiza a los alumnos las preguntas guía recogidas en la tabla 2.2, para facilitar la construcción de los pasos que hay que seguir para realizar de forma correcta cada problema.

El primer grupo, realiza la corrección con la suma gráfica de vectores. Como observamos en la figura 2.14, resumen el procedimiento a seguir en cinco pasos aportando una representación gráfica para ilustrar el proceso que han seguido. Hacen énfasis en el paso 3 en que se deben representar los vectores mediante flechas, y no como puntos en el plano, dejando claro que conocen el error que han cometido y han corregido.

Figura 2.14: Producción original del grupo 1 (Actividad 3).

¿Qué pasos hay que seguir? (para sumar un vector):

1. Empezar en (0,0)
2. Movemos el vector por el eje según las coordenadas que nos dan.
3. UNIR el (0,0) al punto al que llegamos mediante FLECHAS
4. A partir del extremo del vector que acabamos de representar, nos vamos a mover en el eje las posiciones que las coordenadas del vector nos indique.
5. Una vez representados los dos vectores, se une el inicio del primer vector con el extremo del segundo vector.

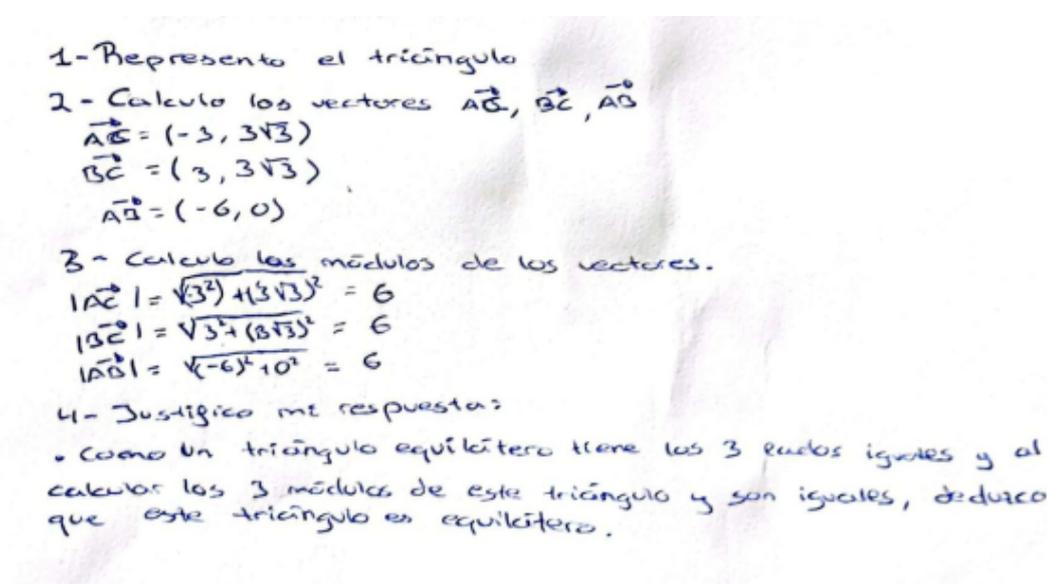
REPRESENTACIÓN

$\vec{u} + \vec{v}$
 $\vec{u} = (-1, -3) ; \vec{v} = (3, 1)$

El grupo 2, hace la corrección del problema 4 del examen. Muestra la resolución del problema en cuatro pasos: representación del triángulo, cálculo de los vectores, cálculo de los módulos y justificación de la respuesta. Junto a cada paso, muestran los cálculos matemáticos que deben realizar, esta vez sin cometer los errores identificados.

Como observamos en la figura 2.15, esta vez sí que hacen uso del módulo del vector para comparar la longitud de los lados del triángulo, corrigiendo también los fallos de cálculo cometidos por los miembros del grupo.

Figura 2.15: Producción original del grupo 2 (Actividad 3).



El grupo 3, responde a cada una de las preguntas guía que se proporcionan en el enunciado para ayudar a los alumnos en la redacción de los pasos a seguir para corregir el problema. Por tanto, las respuestas enumeradas que aparecen en la figura 2.16 responden a cada una de las preguntas recogidas en la tabla 2.2, siguiendo el mismo orden.

Responden a la primera pregunta guía con un resumen del proceso que van a seguir para resolver el problema: “Calcular las longitudes de los lados del triángulo a través del módulo para saber si es un triángulo equilátero”. Esta vez sí tienen planteado utilizar el módulo para resolver

el ejercicio, dejando claro que conocen la forma correcta de realizar la tarea matemática.

Tanto el grupo 2 como el grupo 3 hacen la corrección del problema 4. Observamos que ambos muestran los mismos pasos a seguir, aunque lo presenten de forma distinta. Consiguen, como el grupo anterior, corregir sus errores y realizar de forma correcta el problema.

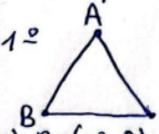
Figura 2.16: Producción original del grupo 3 (Actividad 3).

1- Calcular las longitudes de los lados del triángulo a través del módulo para saber si es un triángulo equilátero.

2- Cálculo de vectores y de módulos

3- Representar el triángulo

4- 1º Representar triángulo.
2º Calcular vectores.
3º Calcular módulos
4º Comparar longitudes para ver si es un triángulo equilátero.

1º 

$A(4,0); B(-2,0); C(1,3\sqrt{3})$

2º $\vec{AB} = (-2,0) - (4,0) = (-6,0)$
 $\vec{AC} = (1,3\sqrt{3}) - (4,0) = (-3,3\sqrt{3})$
 $\vec{BC} = (1,3\sqrt{3}) - (-2,0) = (3,3\sqrt{3})$

3º $|\vec{AB}| = \sqrt{(-6)^2} = 6$
 $|\vec{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$
 $|\vec{BC}| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$

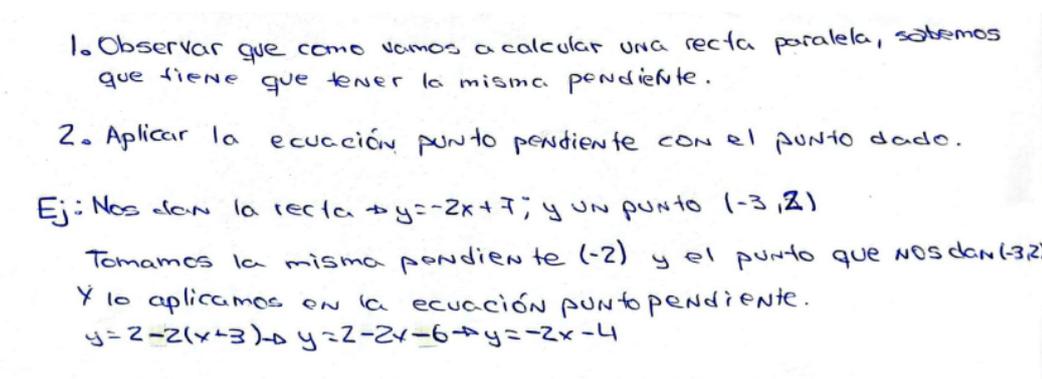
4º Como AB, AC, BC tienen la misma longitud es un triángulo equilátero.

El cuarto grupo, a pesar de haber detectado también errores en la representación de puntos en el plano, para esta actividad se centran en el error del cálculo de la pendiente de una recta paralela a otra dada. Como se muestra en la figura 2.17, en lugar de resolver el problema 6 en su totalidad, explican los pasos a seguir para calcular la ecuación de la recta paralela.

Se centran en la corrección de este error concreto describiendo dos pasos a seguir para realizar el procedimiento, incluyendo también un ejemplo siguiendo los pasos que describen. En el

primer paso destacan el hecho de que, al tratarse del cálculo de una recta paralela, la pendiente va a ser la misma que la de la recta dada. Observamos que esta vez sí que utilizan los conceptos adecuados en la resolución de la tarea matemática.

Figura 2.17: Producción original del grupo 4 (Actividad 3).



El último grupo, responde a todas las preguntas guía como ocurría en la respuesta del grupo 3 (figura 2.16). Indican todos los conceptos matemáticos con los que está relacionado el problema: cálculo de puntos medios, perpendicularidad, ecuaciones de la recta y mediatrices. Señalan también que van a utilizar casi todos los conceptos aprendidos en el tema para la resolución del problema, indicando algunas fórmulas vistas en la unidad.

Dividen el proceso seguido para resolver el problema en 5 pasos. Podemos observar en la respuesta de este grupo (figura 2.18) que confunden de nuevo el concepto de mediatriz con el de punto medio. Este error puede atribuirse a una falta de atención por parte de los alumnos puesto que realizan el cálculo de la mediatriz de forma correcta y consiguen resolver el problema. Además, en la entrega final del vídeo de TikTok no encontramos este fallo de concepto.

Figura 2.18: Producción original del grupo 5 (Actividad 3).

¿Qué pasos hay que seguir?

- 1/ Cálculo de puntos medios, perpendiculares, ecuaciones de la recta y mediatrices
- 2/ Casi todos los conceptos aprendidos en el tema
 - $\vec{AB} = B - A$ • Ecuaciones de la recta
 - $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$ • $m = \frac{d_2}{d_1}$
- 3/ Cantándonos en el cálculo de perpendiculares:
 - Para calcular la primera mediatriz M_1
 - ① Los vectores $\vec{AB} = B - A = (3, 4) - (-1, 1) = (4, 3)$
 - ② La mediatriz $M_1 = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(1, \frac{5}{2} \right)$
 - ③ Sacar la pendiente y calcular la ecuación $\vec{AB} (4, 3) \rightarrow (-3, 4)$
 - $m = -\frac{4}{3}$
 - ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE
 - $y = \frac{5}{2} - \frac{4}{3}(x - 1)$
 - $y = \frac{5}{2} - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$
 - $y = \frac{26}{6} - \frac{4}{3}x$
 - ④ Hacemos lo mismo para M_2
 - $\vec{BC} = C - B = (3, 0) - (3, 4) = (0, -4) \rightarrow \frac{-4}{0} = 0 \rightarrow m = 0$
 - $M_2 = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{4+0}{2} \right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{4}{2} \right) = (3, 2)$
 - ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE
 - $y = 2 - 0(x - 3)$
 - $y = 2$
 - $x = 2$

⑤ CIRCUNCENTRO

$$\begin{cases} y = \frac{26}{6} - \frac{4}{3}x \\ y = 2 \end{cases}$$

substitución: $z = \frac{26}{6} - \frac{4}{3}x$

$$\frac{12 - 26}{6} = -\frac{4}{3}x$$

$$\frac{-14}{6} = -\frac{4}{3}x \quad \left| \frac{4}{3}x - \frac{14}{3} = 0 \right|$$

Podemos considerar que todos los grupos consiguieron corregir sus errores. Resolvieron de forma correcta los problemas en los que habían cometido fallos describiendo los pasos que tienen que seguir para coseguir resolverlos.

Al final de esta actividad, como hemos mencionado en la descripción de la puesta en práctica de las actividades, los alumnos realizaron el vídeo de TikTok sobre los errores trabajados en el aula. Cada grupo presentó los errores cometidos en el examen y explicó cada uno de los pasos a seguir, desarrollados en la actividad 3, para realizar de forma correcta el problema. Los alumnos hicieron uso de la voz superpuesta para explicar los errores que habían detectado y cada uno de los pasos (desarrollados en la actividad 3) que realizaban para la correcta resolución del problema. Crearon, mediante un vídeo de TikTok, las bases de orientación para la detección y corrección de errores, a partir de las cuestiones trabajadas con las actividades y siguiendo las

reglas marcadas para la creación de los vídeos descritas en el apartado de diseño instruccional.

2.3.2.5. Coevaluación de los alumnos

La actividad 4 estaba planteada para realizar la coevaluación de las bases para la detección y corrección de los errores creadas por los alumnos. Como las bases fueron creadas en formato de vídeo de TikTok, se procedió a la proyección de los vídeos realizados por los grupos.

Cada vez que se proyectaba un vídeo, se dedicaban unos minutos para que sus compañeros hicieran propuestas de mejora. Cada grupo debía anotar los comentarios de sus compañeros para poder mejorar la base de orientación sobre su error. En primer lugar, se ponían en cuestión los aspectos descritos en el apartado de diseño instruccional:

- Explican de forma clara cuál es el error cometido.
- Identifican todos los conceptos matemáticos relacionados con el error.
- Las explicaciones dadas para resolver de forma correcta el problema son claras.
- Incluyen todos los pasos necesarios para realizar correctamente la tarea matemática.

A pesar de insistir en estos cuatro aspectos que debían valorar del vídeo, no se consiguió que los alumnos hicieran críticas constructivas sobre las bases. Felicitaban a sus compañeros por el trabajo realizado. Todos los grupos recibieron comentarios favorables acerca de estos cuatro aspectos, sin ninguna propuesta para mejorar las bases de orientación creadas.

En segundo lugar, se tuvo en cuenta si habían cumplido las normas marcadas sobre la presentación del error cometido en el examen (debía aparecer una foto del examen con el error al principio del vídeo), la duración del vídeo y la ausencia de figuras humanas en el TikTok. En esta ocasión, se produjeron críticas hacia un grupo que superó el minuto de duración que se había marcado como máximo y otro grupo que no incluyó en el vídeo la foto del error cometido en el examen.

Las producciones de los alumnos en esta actividad son escasas. Los grupos 1, 2 y 3 no obtu-

vieron ninguna propuesta de mejora por parte de sus compañeros. En la figura 2.19 observamos las anotaciones del tercer grupo con respecto a esta actividad donde expresan que no han recibido ningún comentario por parte de sus compañeros.

Figura 2.19: Producción original del grupo 3 (Actividad 4).

Es el momento de compartir con los demás el trabajo sobre vuestro error. A continuación, podéis tomar nota de los comentarios que vuestros compañeros os hacen para mejorar vuestro trabajo.

No ha habido comentarios.

El grupo 4 no incluyó la foto del error que cometieron en el examen y que iban a corregir. A pesar de recibir esta crítica, el grupo no realizó ninguna anotación de los comentarios que recibieron. Por último, el grupo 5 excedió el tiempo de duración marcado y expresó de la siguiente forma (figura 2.20) los comentarios que realizaron sus compañeros acerca de su base de orientación.

Figura 2.20: Producción original del grupo 5 (Actividad 4).

Es el momento de compartir con los demás el trabajo sobre vuestro error. A continuación, podéis tomar nota de los comentarios que vuestros compañeros os hacen para mejorar vuestro trabajo.

Nuestros compañeros nos han valorado positivamente, exceptuando el tiempo de duración del video.

Podemos considerar que con la coevaluación de los alumnos no se consiguió la retroalimentación esperada. Los comentarios de mejora sobre los vídeos fueron escasos sin dar la posibilidad a ningún grupo de una transformación de su base para continuar aprendiendo sobre el error que están corrigiendo y sin conseguir tampoco una reflexión de los alumnos sobre los errores de sus compañeros.

2.4. Fase de análisis retrospectivo

En la última fase de la investigación, tratamos de profundizar en la comprensión del proceso de enseñanza que se ha puesto en práctica aportando nuestras propias conclusiones.

Aunque solo ha sido posible realizar un macrociclo completo en esta investigación, planteamos una serie de propuestas de mejora y correcciones que deberían tenerse en cuenta en caso de iniciar un segundo macrociclo. Por último, incluimos las líneas futuras a tener en cuenta en caso de volver a poner en práctica el diseño presentado, explicando las cuestiones que no se han podido realizar por falta de tiempo.

2.4.1. Conclusiones

A partir del análisis de los errores presentes en los exámenes de los alumnos, obtenemos información sobre la construcción del conocimiento en el proceso de aprendizaje de los alumnos. Observamos que los participantes, en su mayoría, no tienen asimilados los nuevos conceptos matemáticos tratados en el tema. Existe una fuerte influencia de los conocimientos previos de los alumnos en el proceso de aprendizaje de nuevos contenidos que está presente en la naturaleza de los errores que cometen. Asocian los contenidos de este tema con conceptos previos ya asimilados. Por ello, se producen errores en la representación de vectores y en las operaciones con vectores por interpretar las coordenadas de un vector de la misma forma que las de un punto en el plano.

Otro indicio de la falta de comprensión de los nuevos conceptos introducidos en la unidad, es la confusión producida en los problemas de perpendicularidad y paralelismo. Los alumnos realizan de forma mecánica los procedimientos enseñados en el tema, pero sin comprender realmente los conceptos que manejan.

Basándonos en los errores detectados en los exámenes, también detectamos el origen de algunos fallos en situaciones particulares presenciadas en el aula durante el desarrollo de la unidad. Por ello, destacamos la importancia de la acción del docente en el proceso de enseñanza

y de construcción del conocimiento. Los errores que comenten los alumnos también son fuente de aprendizaje para el docente acerca de su profesión.

En cuanto al uso del error en el aula como fuente de aprendizaje, por la corta duración del periodo de prácticas, no se ha podido hacer un seguimiento posterior a la puesta en práctica analizando el impacto de haber trabajado la detección y corrección de errores en el aula. Sin embargo, los resultados obtenidos de la puesta en práctica del diseño consideramos que son satisfactorios. Reflexionando sobre los errores cometidos, haciendo la previa identificación de ellos, todos los grupos consiguieron describir los pasos que tenían que seguir para realizar bien el problema donde habían cometido el fallo, corrigiendo sus errores.

Como hemos podido observar, cada grupo muestra su forma particular de identificar y corregir sus errores. El primer grupo indicaba en la corrección que “los vectores deben representarse con flechas” dejando constancia de que son conscientes del paso de la resolución en el que han cometido el error. También cabe destacar la corrección de los errores de los grupo 2 y 3 en la que ambos muestran los mismos pasos a seguir, aunque lo presenten de forma distinta, mostrando su forma particular de explicar cómo resolver el problema. El grupo 4, elige centrarse en su error concreto de cálculo de rectas paralelas, sin llegar a resolver el problema por completo. Y por último, el grupo 5 vuelve a cometer un fallo en el concepto de mediatriz en el segundo paso de su corrección, confundiéndolo con el punto medio. Se lo hemos atribuido a una falta de atención, ya que en la entrega final del vídeo de TikTok no se comete, aunque podría ser un indicio de que este grupo no consiguió corregir todos sus errores.

Sobre la metodología empleada para corregir los errores del examen, por el feedback que hemos podido recibir del alumnado, afirmaron que prefieren trabajar los problemas del examen estudiando sus errores en lugar de copiando en su cuaderno la solución correcta aportada por el profesor. Con respecto al uso de la base de orientación como instrumento, al principio los alumnos mostraron cierta confusión sobre la creación de las bases al tratarse de la primera vez que utilizaban este instrumento. Fue cuestión de minutos que los alumnos comprendiesen la tarea que debían hacer, pudiendo concluir que la base de orientación funcionó como herramienta

educativa para trabajar con los errores.

En cuanto al uso de la plataforma TikTok, en general, los alumnos estaban sorprendidos por utilizar la red social para un trabajo del instituto. Nunca habían utilizado la plataforma en el aula. Algunos estudiantes mostraban entusiasmo por poder hacer uso de la red social en clase. De hecho, algunos vídeos incluían memes populares del momento, con fines humorísticos, lo cual podemos interpretar como que los alumnos muestran interés en la creación de los vídeos. Sin embargo, otros alumnos menos familiarizados con la plataforma, mostraron cierto rechazo hacia el uso de TikTok. Podemos considerar que el uso de la plataforma sirvió de motivación para el alumnado, aunque no en su totalidad.

Aunque no podamos sacar conclusiones de manera general sobre el uso de metodologías innovadoras por el bajo número de participantes en la investigación, puede ser un punto de partida para dar la oportunidad a nuevas metodologías de trabajo que se alejan de la educación tradicional y que aportan una mayor motivación al alumnado.

2.4.2. Propuestas de mejora

Tras la puesta en práctica de las actividades y el análisis de los datos, en este apartado recogemos una serie de propuestas para mejorar el diseño instruccional basándonos en los resultados obtenidos en esta investigación. En rasgos generales, mencionar que los alumnos no están habituados a trabajar con los errores que cometen. Desde el primer momento se guió a los alumnos en el desarrollo de las actividades, siendo también mejorable la acción docente en caso de volver a poner en práctica el diseño.

Con vistas a la puesta en práctica de nuevo de las actividades, basándonos en la experiencia del macrociclo realizado, destacamos las siguientes propuestas de mejora a tener en cuenta en caso de emplear el recurso diseñado en la investigación para la detección y corrección de errores.

1. En caso de que sea posible, organizar los grupos de forma que todos los alumnos hayan cometido el mismo fallo común. Hemos observado que el primer grupo, formado por

alumnos que han cometido el mismo error, se han enfocado desde el primer momento en su error logrando identificarlo y corregirlo. En cambio, en el resto de grupos, aunque se enfatizó que debían encontrar en error cometido por el mayor número de miembros del equipo, se aprecia cierta confusión sobre el error que deben detectar y corregir llegando a identificar varios errores en lugar de centrarse en uno.

2. Cambiar las preguntas guía de la primera actividad por otras más claras y concretas para que los alumnos puedan extraer mayor información de esta actividad. A su vez, cambiar el orden en el que aparecen en el enunciado entregado a los alumnos. En la tabla 2.4 recogemos las nuevas preguntas guía, reordenadas, propuestas para esta actividad. El nuevo orden elegido, lleva a los alumnos a realizarse preguntas cada vez más complejas guiando de forma progresiva la detección del error presente en el examen.

Tabla 2.4: Preguntas guía para el reconocimiento de errores.

Orientación a través de preguntas	
Preguntas	Intención
¿Qué es lo que está mal?¿Qué problema?	Reconocimiento individual del error
¿Qué parte tenéis todo el equipo señalada en rojo?	Reconocimiento grupal del error
¿Notáis un error común?	Retroalimentación grupal
¿Por qué está mal?	Reconocimiento de las causas del error
¿Con qué concepto matemático visto en el tema está relacionado vuestro error?	Conjunto conceptual que fundamenta la base de orientación

3. Dirigir la actividad 4 de coevaluación de los alumnos de forma que los alumnos aporten comentarios sobre todos los aspectos que queremos trabajar con esta actividad. Para ello, proponemos el uso de una rúbrica como instrumento de coevaluación, que evalúe cada uno de los siguientes aspectos:

- Explican de forma clara cuál es el error cometido.
- Identifican todos los conceptos matemáticos relacionados con el error.

- Las explicaciones dadas para resolver de forma correcta el problema son claras.
- Incluyen todos los pasos necesarios para realizar correctamente la tarea matemática.
- Cumple todas las normas marcadas sobre el formato del vídeo.

Sugerimos entregar a cada alumnos la siguiente rúbrica cada vez que se exponga el trabajo de un grupo, para que puedan obtener una retroalimentación por parte de sus compañeros:

Aspectos	Sí	No	Sugerencias de mejora
Explican de forma clara cuál es el error cometido			
Identifican todos los conceptos matemáticos relacionados con el error			
Las explicaciones dadas para resolver de forma correcta el problema son claras			
Incluye todos los pasos necesarios para resolver el problema			
Cumple todas las normas marcadas sobre el formato del vídeo			

Los alumnos deben valorar si cumple o no cada uno de los aspectos señalados y, en caso de responder de forma negativa, aportar sugerencias de mejora a tener en cuenta. De esta forma, también se puede realizar fácilmente la autoevaluación de las bases creadas por cada grupo, entregando esta rúbrica a todos los alumnos, incluyendo los creadores del trabajo que se está evaluando.

4. Realizar una sesión previa explicando las funciones de la plataforma TikTok para asegurar que todos los alumnos conocen y saben utilizar la aplicación. Podría ocurrir que haya alumnos que no saben manejar la plataforma y, dado que va a ser utilizada para la creación de las bases, recomendamos mostrar las funciones de TikTok y explicar su funcionamiento previamente.

2.4.3. Líneas futuras

La parte práctica de la investigación, como ya hemos mencionado, se ha llevado a cabo en el periodo de prácticas del Máster. La corta duración de este periodo, ha provocado que el estudio de los errores se reduzca a dos sesiones de trabajo en el aula, dejando una parte planificada de la investigación sin poner en práctica. A continuación, explicamos cuáles serían los pasos siguientes a estas dos sesiones que deberían llevarse a cabo para continuar con el trabajo de los errores en el aula.

Tras identificar y corregir el error con la creación de una base de orientación, como señala Sanmartí (2010) (citado por Torregrosa et al., 2020) en su última premisa sobre este instrumento, las bases deben ser transformadas por el alumno a medida que este adquiere nuevos conocimientos con la ayuda de la autoevaluación y coevaluación. Es por ello, que el siguiente paso debe ser la transformación de las bases teniendo en cuenta las propuestas de mejora aportadas por sus compañeros.

En la puesta en práctica solo se pudo realizar un único ciclo de mejora formado por la creación de la base y la coevaluación de los alumnos. El siguiente paso, sería comenzar, de nuevo, otro ciclo de mejora en el que cada grupo transforma su base y la muestra ante sus compañeros. Sin embargo, no se pudieron llevar a cabo más ciclos en esta investigación.

El diseño propuesto para el uso de los errores en el aula, se completaría con la realización de sucesivos ciclos de mejora, los que fueran necesarios dependiendo de las características del alumnado. La continua evaluación de las bases de orientación tiene como objetivo tratar de depurar el error presente en cada alumno, permitiendo que continúe reflexionando sobre su

identificación y corrección con el objetivo de que no vuelva a cometerlo.

Por último, aunque solo hemos podido trabajar los errores en la unidad didáctica de geometría analítica, la metodología empleada es aplicable a cualquier tema de la asignatura, tratando de corregir los errores presentes con respecto a los contenidos propios de cada unidad. Para poder comprobar si podemos utilizar los errores de los alumnos como fuente de aprendizaje, se debería seguir aplicando la metodología diseñada con los contenidos de unidades posteriores. De esta forma podríamos analizar si trabajar los errores en el aula es beneficioso para el aprendizaje de los alumnos y si la metodología diseñada es apropiada para conseguir realizar la detección y corrección de errores.

Bibliografía

- Agoiz, A. C. (2019). Errores frecuentes en el aprendizaje de las matemáticas en bachillerato. *Cuadernos del Marqués de San Adrián: revista de humanidades*(11), 129–141.
- Bachelard, G. (1993). *La formación del espíritu científico*. Siglo xxi.
- Baldevenites, E. V. L., Sánchez, E. E. L., y Lucero, S. I. (2021). El uso de la plataforma de vídeos tik tok como recurso pedagógico de enseñanza multidisciplinaria. En *Innoeducatic 2021: Libro de actas de las viii jornadas iberoamericanas de innovación educativa en el ámbito de las tic y las tac las palmas de gran canaria, 18 y 19 de noviembre de 2021* (pp. 99–103).
- Blanco, Y. C., Sigcha, M. V. C., y Rodríguez, L. A. G. (2019). El video como recurso educativo en blended learning, experiencia en un curso de zotero. *Revista Tecnología Educativa*, 4(2).
- de Benito, B., y Salinas, J. M. (2016). La investigación basada en diseño en tecnología educativa. *Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa*.
- del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., y Seminara, S. A. (2006, abr.). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4), 1-13. doi: 10.35362/rie3842646
- Gamboa, R., Castillo, M., y Hidalgo, R. (2018). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. , 19(1), 1–31. doi: 10.15517/aie.v19i1.35278
- Gómez, P. (2015, 01). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación*, 370.
- Iturriaga, M., Martínez, S., Sáez, A., Sedano, E., Tomé, E., y cols. (2021). Tiktok como herramienta educativa en el aula.
- Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Alianza Editorial.
- Maxwell, J. A. (2008). Designing a qualitative study. *The SAGE handbook of applied social research methods*, 2, 214–253.
- Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución.

Investigación en Educación Matemática XXIV, 83–97.

- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(1), 75–88.
- Niccolas, H., Garnica, J., Sánchez, C., San Martín, I., Reséndiz, G., Toto, N., y Monzalvo, A. (2021). Uso de videos en el estudio y comprensión de la teoría de sistemas y el pensamiento de sistemas: Propuesta de una guía para la búsqueda y selección. En *Proceedings innodoct/20. international conference on innovation, documentation and education* (pp. 741–750).
- Pons, J. V., y Piquet, J. D. (2017). La base de orientación en la resolución de problemas: “cuando me bloqueo o me equivoco”. *REDIMAT*, 6(3), 256–282.
- Popper, K. R. (1991). *Conjeturas y refutaciones: el desarrollo del conocimiento científico*. Paidós Ibérica.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez, y L. Rico (Eds.), *Educación matemática* (pp. 69–108). Iberoamérica.
- Rodríguez, C. (2021). Tiktok como un entorno virtual de aprendizaje.
- Rodríguez, R. A., López, B. S., y Mortera, F. J. (2017). El video como recurso educativo abierto y la enseñanza de matemáticas. *Revista electrónica de investigación educativa*, 19(3), 92–100. doi: 10.24320/redie.2017.19.3.936
- Romero, R., Ríos, A., y Román, P. (2017). Youtube: evaluación de un catálogo social de vídeos didácticos de matemáticas de calidad. *Prisma Social*(18), 515–539.
- Santos, C. (2021). *Programación didáctica del departamento de matemáticas*. Valladolid: IES Ramón y Cajal. (no publicado)
- Sastre, P., Cañibano, A., y D’Andrea, R. E. (2014). ¿errores u obstáculos epistemológicos? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27(1), 227–233.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico et al. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125–154). ICE-Horsori.
- Torregrosa, A., Deulofeu, J., y Albarracín, L. (2020). Caracterización de procesos metacogni-

tivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación matemática*, 32(3), 39–67.

Anexo 1: Unidad didáctica

UNIDAD DIDÁCTICA: GEOMETRÍA ANALÍTICA

Curso: 4ºESO

Contenido

1. Introducción	1
2. Competencias clave.....	2
3. Objetivos	3
4. Contenidos, criterios de evaluación y estándares	5
5. Temporalización de contenidos	7
6. Metodología	8
7. Recursos	9
8. Atención a la diversidad	10
9. Evaluación	10

1. Introducción

La presente unidad didáctica corresponde al bloque de Geometría de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, en el nivel de 4ºESO, según lo establecido en la *ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.*

Desarrolla los conceptos relacionados con la geometría analítica. Los alumnos no han tenido contacto previo con estos contenidos en cursos anteriores, por lo que la unidad didáctica comienza introduciendo el concepto de vector en el plano, las operaciones con vectores y la forma de calcular el punto medio de un segmento utilizando geometría analítica. A continuación, se presentan las diferentes formas de expresar algebraicamente una recta, así como el concepto de pendiente, enseñando a calcular las ecuaciones de la recta partir de dos puntos conocidos. Finalmente, se muestra la forma de calcular rectas paralelas y perpendiculares a una dada, al igual que la forma de conocer la posición relativa de dos rectas. Esta unidad didáctica también incluye actividades preparadas para trabajar con los errores matemáticos que comenten los alumnos en las pruebas escritas.

El alumnado ya ha utilizado la representación de puntos en el plano en cursos anteriores, la ecuación explícita de la recta en el bloque de funciones. También, han

realizado el estudio de la posición relativa de dos rectas resolviendo el sistema de ecuaciones que forman. No obstante, nunca han tenido contacto previo con los contenidos de geometría analítica que se desarrollan en la unidad didáctica.

1. Competencias clave

El artículo 2 de la *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato*, establece las siete competencias clave del Sistema Educativo Español. En esta unidad didáctica, en orden de importancia, se tratan las siguientes competencias clave:

COMPETENCIA MATEMÁTICA Y COMPETENCIAS BÁSICAS EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Desde el departamento de matemáticas, se establece la forma de trabajar esta competencia, señalando de forma específica los siguientes puntos que trata esta unidad didáctica:

- Conocer y utilizar los elementos matemáticos básicos
- Expresarse con propiedad en el lenguaje matemático
- Organizar la información utilizando procedimientos matemáticos.
- Comprender e interpretar información presentada en formato gráfico.
- Resolver problemas seleccionando los datos y las estrategias apropiadas.
- Manejar los conocimientos sobre ciencia y tecnología para solucionar problemas, comprender lo que ocurre a nuestro alrededor y responder preguntas.

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

A partir de lo establecido por el departamento de matemáticas, en esta unidad didáctica se adquiere la comunicación lingüística mediante:

- Utilizar el vocabulario adecuado, las estructuras lingüísticas y las normas ortográficas y gramaticales para elaborar textos escritos y orales.
- Comprender el sentido de los textos escritos y orales.
- Expresarse oralmente con corrección, adecuación y coherencia.
- Respetar las normas de comunicación en cualquier contexto: turno de palabra, escucha atenta al interlocutor...

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

Desde el departamento de matemáticas, se establece la forma de trabajar esta competencia, señalando de forma específica los siguientes puntos que trata esta unidad didáctica:

- Desarrollar capacidad de diálogo con los demás en situaciones de convivencia y trabajo y para la resolución de conflictos.
- Reconocer la riqueza en la diversidad de opiniones e ideas.
- Mostrar disponibilidad para la participación activa en ámbitos establecidos.
- Concebir una escala de valores propia y actuar conforme a ella.
- Evidenciar la preocupación por los más desfavorecidos y el respeto a los distintos ritmos y potencialidades.

APRENDER A APRENDER

Desde el departamento de matemáticas, se establece la forma de trabajar esta competencia, señalando de forma específica los siguientes puntos que trata esta unidad didáctica:

- Seguir los pasos establecidos y tomar decisiones sobre los siguientes en función de los resultados intermedios.
- Planificar los recursos necesarios y los pasos a realizar en el proceso de aprendizaje.
- Identificar potencialidades personales como aprendiz: estilos de aprendizaje, inteligencias múltiples, funciones ejecutivas.
- Desarrollar estrategias que favorezcan la comprensión rigurosa de los contenidos.
- Tomar conciencia de los procesos de aprendizaje.

COMPETENCIA DIGITAL

Desde el departamento de matemáticas, se establece la forma de trabajar esta competencia, señalando de forma específica los siguientes puntos que trata esta unidad didáctica:

- Manejar herramientas digitales para la construcción del conocimiento.
- Utilizar los distintos canales de comunicación audiovisual para transmitir informaciones diversas.

2. Objetivos

OBJETIVOS GENERALES

Los objetivos de la asignatura Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en el cuarto curso son:

1. Conocer y utilizar diferentes estrategias de resolución de problemas.
2. Describir y analizar diversas situaciones para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas.
3. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.
4. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.
5. Elaborar y presentar informes de manera clara y ordena sobre el proceso seguido para la resolución de un problema.
6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.
7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o contruidos.
8. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.
9. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.
10. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas para realizar diferentes cálculos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos que se persiguen con esta unidad didáctica son los siguientes:

1. Saber representar vectores en el plano e identificar vectores iguales.
2. Identificar los elementos de un vector: módulo, dirección y sentido.
3. Saber calcular la distancia entre dos puntos utilizando el módulo y utilizarlo en la resolución de problemas de geometría.
4. Calcular el punto medio de un segmento y saber aplicarlo en la resolución de problemas.
5. Identificar puntos alineados en el plano utilizando vectores.

6. Saber calcular las diferentes ecuaciones de la recta a partir de la representación gráfica, dos puntos dados o un punto y la pendiente.
7. Calcular rectas perpendiculares y paralelas a una recta dada conociendo un punto por el que pasa.
8. Utilizar los conceptos de paralelismo, perpendicularidad, ecuaciones de la recta y punto medio de un segmento para calcular las mediatrices, medianas y alturas de un triángulo.

3. Contenidos, criterios de evaluación y estándares

En esta sección se muestran los contenidos que trata la unidad didáctica junto con los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje asociados extraídos de la *ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.*

CONTENIDOS

- Iniciación a la geometría analítica en el plano: coordenadas. Vectores.
- Definiciones geométricas y analíticas de las operaciones: suma de vectores y producto de número por vector.
- Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua y general o implícita.
- Paralelismo, perpendicularidad: condiciones de las coordenadas de los vectores.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

- Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores.
- Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.
- Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.
- Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos.
- Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Para desarrollar la unidad didáctica, se han ordenado los contenidos que hay que tratar siguiendo este índice:

1. Vectores en el plano
 - a. Módulo, dirección y sentido
2. Operaciones con vectores
 - a. Producto de un vector por un número
 - b. Suma y resta de vectores
 - c. Combinación lineal de dos vectores
3. Punto medio de un segmento y puntos alineados
4. Ecuaciones de la recta
 - a. Ecuación vectorial
 - b. Ecuaciones paramétricas
 - c. Ecuación en forma continua
 - d. Ecuación general
 - e. Ecuación explícita
 - f. Ecuación punto-pendiente
5. Paralelismo y perpendicularidad
 - a. Rectas paralelas
 - b. Rectas paralelas a los ejes
 - c. Vectores perpendiculares
 - d. Rectas perpendiculares
6. Posición relativa de dos rectas

4. Temporalización de contenidos

SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN. VECTORES EN EL PLANO

Introducción del tema explicando el índice que se va a seguir. Explicación de primer punto de vectores en el plano y resolución de ejercicios para consolidar los contenidos. Proponer tarea para casa sobre representación de vectores y cálculo de sus coordenadas.

SESIÓN 2: OPERACIONES CON VECTORES

Corrección la pizarra los ejercicios propuestos para casa del día anterior por parte de la profesora con ayuda de los alumnos. Explicación los contenidos del segundo punto del tema: operaciones con vectores. Realizar ejemplo de todas las operaciones utilizando coordenadas y, también, representándolas gráficamente. Proponer tarea para casa sobre operaciones con vectores.

SESIÓN 3: PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO. PUNTOS ALINEADOS. PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Corrección la pizarra los ejercicios propuestos para casa del día anterior por parte de la profesora con ayuda de los alumnos. Explicación del tercer punto de los contenidos. Deducir la fórmula del punto medio de un segmento usando vectores y la forma de comprobar si tres puntos están alineados usando geometría analítica. Hacer ejercicios sobre estos conceptos y proponer para casa ejercicios de cálculo de puntos simétricos con respecto a un punto, puntos alineados y un problema geométrico sencillo que se resuelve usando geometría analítica.

SESIÓN 4: ECUACIONES DE LA RECTA

Corrección la pizarra los ejercicios propuestos para casa del día anterior por parte de la profesora con ayuda de los alumnos. Desarrollo del cuarto punto de los contenidos. Describir todas las ecuaciones de la recta poniendo varios ejemplos. La profesora resuelve un ejercicio en la pizarra sobre las ecuaciones de la recta para consolidar los contenidos. Proponer para casa dos ejercicios sobre ecuaciones de la recta. En uno de ellos tienen que calcular las ecuaciones a partir de dos puntos dados y en el otro a partir de la representación gráfica.

SESIÓN 5: PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

Corrección la pizarra los ejercicios propuestos para casa del día anterior por parte de la profesora con ayuda de los alumnos. Explicación del quinto punto de los contenidos. Hacer ejercicios de cálculo de rectas paralelas y perpendiculares a partir de una dada. Comenzar a resolver problemas geométricos sobre paralelogramos y cálculo de mediatrices con ayuda de los alumnos, introduciendo el concepto de la posición relativa de dos rectas. Se proponen para casa dos problemas: uno sobre un paralelogramo y otro

sobre el cálculo de alturas. Similares a los problemas resueltos en clase.

SESIÓN 6: RESOLUCIÓN ANALÍTICA DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Corrección la pizarra los ejercicios propuestos para casa del día anterior por parte de la profesora con ayuda de los alumnos. Resolución de problemas en la pizarra usando geometría analítica. Se pide participación por parte de los alumnos. Para casa se proponen dos problemas geométricos.

SESIÓN 7: RESOLUCIÓN ANALÍTICA DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS. DUDAS DE LOS ALUMNOS

Corrección la pizarra los ejercicios propuestos para casa del día anterior por parte de la profesora con ayuda de los alumnos. Al ser la última sesión previa al examen, está dedicada a resolver las dudas que tengan los alumnos sobre los conceptos de la unidad.

SESIÓN 8: EXAMEN SOBRE LOS CONTENIDOS

Evaluación de la unidad didáctica mediante un examen con problemas similares a los resueltos en clase.

SESIÓN 9: ERRORES MATEMÁTICOS

Realizar en el aula las tres primeras actividades preparadas para trabajar los errores matemáticos que han cometido en el examen. Empezar a preparar en clase un vídeo utilizando la aplicación TikTok sobre los pasos a seguir para realizar bien el ejercicio en el que han cometido fallos. Como tarea para casa, deben acabar el vídeo sobre su error que empezaron en clase.

SESIÓN 10: ERRORES MATEMÁTICOS

Realiza en el aula la cuarta actividad preparada para trabajar con los errores matemáticos que han cometido en el examen.

5. Metodología

La dinámica seguida en la mayoría de las sesiones, de acuerdo con las decisiones metodológicas acordadas en el departamento, es la siguiente:

1. Corrección en la pizarra de los ejercicios mandados para casa el día anterior y resolución de dudas respecto a dichos ejercicios. Suele durar alrededor de 10 o 15 minutos.
2. Exposición por parte del profesor de los contenidos previstos para esa sesión manteniendo un diálogo con los alumnos. Se fomenta en las explicaciones la participación de los alumnos. Tiene una duración de 25 minutos aproximadamente.

3. Resolución de problemas en la pizarra relacionados con los contenidos de la sesión, realizando preguntas orales a los alumnos para mantener un diálogo con ellos. Suele durar 10 o 15 minutos.
4. Propuesta de ejercicios para fijar los conceptos de la sesión.

Esta metodología se emplea de la sesión 1 a la sesión 7. Como se trata de un grupo de alumnos numeroso y, la mayoría de ellos, son participativos, la metodología descrita anteriormente es adecuada teniendo en cuenta las características del grupo.

TRABAJO COOPERATIVO

En las sesiones 9 y 10, la metodología empleada es diferente. Su objetivo es que los alumnos trabajen los errores matemáticos cometidos en el examen escrito de la unidad, y traten de corregirlos. Para ello, se agrupa a los alumnos dependiendo de los errores cometidos. En un mismo grupo están aquellos que han cometido fallos en el mismo concepto matemático. Se reparte a cada grupo una ficha con las actividades relacionadas con los errores que se pueden encontrar en el Anexo 2.

Mientras los alumnos trabajan, la profesora controla el ambiente del aula y el tiempo dedicado a cada actividad. También, resuelve las dudas que vayan surgiendo a los alumnos.

USO DE TIC

En la sesión 9, hacen uso de los móviles y la aplicación TikTok en el aula. Tras reflexionar sobre sus errores con las actividades preparadas, los alumnos tienen que hacer un vídeo explicando los pasos a seguir para hacer bien el ejercicio en el que han cometido el error. Los vídeos deben cumplir los siguientes requisitos:

1. No pueden durar más de 1 minuto.
2. Los alumnos no pueden salir en el vídeo.
3. La explicación de cada paso a seguir debe ser breve y clara.

En la última sesión, se hace la visualización de los vídeos en clase y los alumnos deben hacer comentarios sobre los vídeos de sus compañeros. Cada grupo hace anotaciones sobre las posibles mejoras de su vídeo. Tienen la oportunidad de repetir el vídeo y hacer la entrega final con las correcciones hechas después de haber sido evaluados por sus compañeros.

6. Recursos

Para el desarrollo de los contenidos de la unidad didáctica, se ha utilizado el libro de texto de *Matemáticas Orientadas a Las Enseñanzas Académicas 4* de la editorial Anaya. Los ejercicios trabajados en clase han sido tomados de este libro.

En todas las sesiones se ha utilizado la pizarra de clase para las explicaciones y

corrección de ejercicios. En la última sesión, se ha utilizado también el proyector para la visualización de los vídeos hechos por los alumnos sobre los errores matemáticos.

7. Atención a la diversidad

El grupo en el que se ha puesto en práctica la unidad cuenta con un alumno con TDA. Las medidas tomadas de atención a la diversidad han sido:

- Situar al alumno en primera fila para que pueda seguir mejor las explicaciones y poder llamarle la atención en caso de que se distraiga.
- Durante los exámenes, si es necesario, se da al alumno 20 minutos a mayores para que pueda hacer el examen.

8. Evaluación

De acuerdo con el departamento de matemáticas, un 20% de la nota final del trimestre es de observación diaria y tareas para casa y el 80% es de las pruebas escritas.

Las revisiones diarias de las tareas mandadas para casa y anotaciones sobre la participación de cada alumno contribuyen al 20% de la nota final.

De acuerdo con la programación del tercer trimestre, al cual corresponde esta unidad, el examen parcial de la sesión 8 cuenta un 25% del 80% de la nota final que corresponde a las pruebas escritas. Este examen consiste en una serie de ejercicios similares a los realizados en clase permitiendo comprobar si los alumnos han aprendido y saben utilizar los conceptos y procedimientos básicos vistos en la unidad. Las actividades sobre los errores matemáticos pueden subir la nota del examen parcial de la unidad hasta un punto. Para la evaluación de las actividades, se tiene en cuenta que los vídeos de los alumnos cumplan los requisitos mencionados anteriormente y los comentarios de los alumnos sobre los vídeos de sus compañeros recogidos en la última actividad.

Bibliografía

Santos, C. (2021). *Programación didáctica del departamento de matemáticas*. Valladolid: IES Ramón y Cajal (no publicado).