Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Máster

Máster en Matemáticas

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS PONDERADOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS.

OPERADORES DE COMPOSICIÓN PONDERADOS.

Autor: Javier Rández Ibáñez

Tutor/es: Javier Sanz Gil

Resumen

Dada una función peso no negativa v sobre un abierto conexo G del plano complejo buscaremos condiciones bajo las cuales el espacio $H_v^\infty(G)$ de todas las funciones holomorfas sobre G tales que el producto $v\,|f|$ esté acotado en G sea normado y completo según la seminorma

$$\|f\|_v = \sup_{z\in G} v(z)\,|f(z)|\,.$$

También estudiaremos la continuidad y compacidad de los operadores de composición ponderados $C_{\varphi,\psi}$ entre los espacios de Banach $H_v^\infty(\mathbb{D})$, con v una función peso, estrictamente positiva, continua, radial y no decreciente. Estos operadores vienen dados por dos funciones holomorfas φ,ψ, de modo que $\varphi(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$ y se definen por

$$C_{\varphi,\psi}(f)(z) = \psi(z)\varphi(f(z)).$$

Antes de hablar de los espacios de funciones holomorfas ponderados $H_v^\infty(G)$, introduciremos varios resultados de Análisis Funcional y Análisis Complejo, que nos darán el contexto y las herramientas necesarias para trabajar con estos espacios y llegar a los resultados deseados.

Abstract

Taking a non-negative weight function v defined on an open and connected set G of the complex plane our goal is to find conditions under which the space $H_v^\infty(G)$ of all holomorphic functions bounded in G, is normed and complete under the seminorm

$$\|f\|_v = \sup_{z\in G} v(z)\,|f(z)|\,.$$

Additionally, we study the continuity and compactness of weighted composition operators $C_{\varphi,\psi}$ between the Banach spaces $H_v^\infty(\mathbb{D})$, with v being a weight function that is strictly positive, continuous, radial, and non decreasing. The operators are described by two holomorphic functions φ,ψ such that $\varphi(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$ and defined as

$$C_{\varphi,\psi}(f)(z) = \psi(z)\varphi(f(z)).$$

Before we proceed to the weighted spaces of holomorphic functions $H_v^\infty(G)$, we want to introduce a few results from functional analysis and complex analysis, which will provide us with the necessary context and tools to work on these spaces and get the desired results.

Índice general

Introducción

En el estudio de numerosos problemas del Análisis Complejo aparecen de forma natural espacios constituidos por funciones holomorfas en un abierto conexo del plano complejo y sometidas a alguna restricción en su tamaño en términos de un peso auxiliar. Dicha restricción suele consistir en la finitud de una norma adecuada, en nuestro caso será la norma del supremo. La línea principal de este Trabajo de Fin de Máster era seguir el artículo «A note on completeness of weighted normed spaces of analytic functions» de Bonet y Vukotić [6], cuyo objetivo es, dada una función peso no negativa v sin ninguna restricción adicional a priori, encontrar condiciones para determinar si el espacio de las funciones holomorfas sobre un abierto conexo G tales que $v\,|f|$ está acotada en G,

$$H_v^\infty(G) = \left\{ f \in H(G) \mid \sup_{z\in G} v(z)\,|f(z)| < \infty \right\},$$

es un espacio de Banach según la seminorma del supremo

$$\|f\|_v = \sup_{z\in G} v(z)\,|f(z)|\,.$$

Es conocido en la literatura que si el peso v es estrictamente positivo, continuo y acotado, entonces estos espacios son de Banach, pero como veremos sin estas condiciones tan beneficiosas, es posible que el espacio $H_v^\infty(G)$ ni siquiera sea normado.

Por otro lado, siguiendo el artículo «Weighted composition operators in weighted Banach spaces of analytic functions» de Contreras y Hernández-Díaz [8, Secciones 2, 3, 4], en el caso particular en el que la función peso v es continua, estrictamente positiva, radial y no decreciente con respecto a $|z|$ sobre la bola unidad del plano complejo

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}\,,$$

nos interesará caracterizar la continuidad y la compacidad de los operadores de composición ponderados $C_{\varphi,\psi}$, donde φ y ψ son funciones holomorfas, con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Estos operadores vienen definidos por

$$C_{\varphi,\psi} \colon H_v^\infty(\mathbb{D}) \to H_w^\infty(\mathbb{D}), \quad C_{\varphi,\psi}(f)(z) = \psi(z)\varphi(f(z)).$$

En el resto del trabajo mostramos varios resultados de Análisis Funcional y de Análisis Complejo que nos serán de utilidad. Estos resultados podrían estudiarse en una asignatura que continuase las asignaturas de Análisis Complejo y Análisis Funcional del Grado en Matemáticas o como extensión de las asignaturas de Teoría de Operadores y Ampliación de Teoría de Funciones del Máster en Matemáticas.

En el Capítulo 1 veremos conceptos de Análisis Funcional que se pueden encontrar en los textos de Conway [9], de Horváth [11], de Meise y Vogt [14], y de Rudin [19]. En la Sección 1.1 trabajaremos los espacios vectoriales topológicos y en particular los espacios localmente convexos y espacios de Fréchet, que son una extensión natural de los espacios normados y los espacios de Banach, en los cuales en lugar de tener una norma que defina la topología tenemos una familia de seminormas que lo hace. Asimismo veremos el análogo a la caracterización de funcionales lineales continuos en un espacio localmente convexo, además de otras propiedades básicas. En la Sección 1.2 demostraremos los clásicos Teoremas de la Aplicación Abierta y del Grafo Cerrado en un contexto más general que el de los espacios de Banach, en concreto buscamos demostrarlos para espacios de Fréchet. En la Sección 1.3, siguiendo la analogía de los espacios normados, buscamos darle una topología localmente convexa al espacio dual de un espacio localmente convexo, esto no será tan directo como en espacios normados, y para el objetivo de este trabajo será suficiente definir la topología débil, que es la menor topología que hace del espacio dual un espacio localmente convexo y a las evaluciones continuas, así como algunas propiedades. En la Sección 1.4 demostraremos el Teorema de Krein-Smulian, el cual nos da una caracterización de los conjuntos convexos del espacio dual que son cerrados en la topología débil. Por último en la Sección 1.5 introduciremos la topología compacto-abierta sobre el espacio de funciones holomorfas en un abierto conexo, $H(G)$, y demostraremos que este espacio es un espacio de Fréchet, por lo que podremos emplear todas las herramientas disponibles para estos espacios.

En el Capítulo 2 vamos a ver resultados de Análisis Complejo siguiendo el artículo de Arendt y Nikolski [1], y los textos de Ash y Novinger [2], de Berenstein y Gay [3], de Hörmander [10], de Kato [12], de Matouśek [13], de Ransford [16], y los de Remmert [17, 18]. En la Sección 2.1 veremos el Teorema de Interpolación de Weierstrass, el cual nos permitirá construir funciones holomorfas con el conjunto de ceros aislados que nosotros deseemos. Para demostrarlo emplearemos productos infinitos de funciones holomorfas, por lo que primero necesitaremos algunos resultados sobre ellos. La Sección 2.2 tratará de los Teoremas de Montel y de Vitali, con los cuales podremos caracterizar la convergencia uniforme sobre compactos de una sucesión de funciones holomorfas localmente acotada. Estos resultados se interpretan en términos de la topología compacto-abierta de $H(G)$, y esta caracterización se traduce en una caracterización de la convergencia de sucesiones acotadas en esta topología. En la Sección 2.3 trataremos un resultado de aproximación, el Teorema de Runge. Este resultado dice que podemos aproximar una función holomorfa a partir de funciones racionales con sus polos bien elegidos fuera de un compacto donde la función es holomorfa. En la Sección 2.4, generalizamos el concepto de holomorfía a funciones en espacios de Banach y el resultado principal que veremos dice que una función en un espacio de Banach es holomorfa si y solo si al componerla con las funciones del espacio dual, estas son todas holomorfas en el sentido clásico. En la Sección 2.5 se muestran propiedades clásicas de la envolvente convexa y se concluye con la noción de envolvente holomórficamente convexa de un subconjunto A contenido en un abierto conexo G del plano complejo

$$Hco(A) = \left\{ z \in G \mid |f(z)| \leq \sup_{\zeta \in A} |f(\zeta)| \,,\ \forall f \in H(G) \right\},$$

demostrando que si K es un compacto de G, entonces su envolvente holomórficamente convexa $Hco(K)$ también es un compacto de G. Por último, en al Sección 2.6, introducimos la noción de función armónica y función subarmónica, así como propiedades básicas como el Principio del Máximo, que dice que si estas funciones tienen un máximo global entonces son constantes, y la desigualdad integral de Poisson

$$u(w + re^{it}) \leq \frac{R+r}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int u(w + Re^{i\theta})d\theta.$$

En el Capítulo 3 introducimos los espacios de funciones holomorfas ponderados $H_v^\infty(G)$ que aparecen en el artículo de Bonet y Vukotić [6]. Primero caracterizamos en la Proposición 3.4 el carácter normado de estos espacios en función de si el conjunto $E_v = \{z \in \mathbb{C} \mid v(z) > 0\}$ posee puntos de acumulación o no. Se caracteriza en la Proposición 3.7 su completitud en función de si la inclusión de este espacio en el espacio de funciones holomorfas con la topología compacto-abierta es continua y se caracteriza cuales de estos espacios, cuando v es acotado, son de Banach en el Teorema 3.9. También se muestran condiciones necesarias más simples en las Proposiciones 3.14 y 3.17 para que el espacio sea Banach y se caracteriza en el Corolario 3.23 que espacios sobre un abierto conexo equilibrado (las bolas centradas en 0 y $\mathbb{C}$) son de Banach para pesos radiales y acotados. Además de esto se ven otras condiciones suficientes para que los espacios sean de Banach ilustrando varios de estos resultados con la ayuda de ejemplos.

Por último en el Capítulo 4, basándonos en los artículos de Bonet, Domański, Lindström y Taskinen [5], de Bonet, Domański y Lindström [4], de Contreras y Hernández-Díaz [8], y el texto de Shapiro [20], nos centramos en los espacios de funciones holomorfas ponderados sobre la bola unidad $H_v^\infty(\mathbb{D})$ y restringimos el peso v a ser un peso estrictamente positivo, radial, continuo y no decreciente según $|z|$. Estas condiciones son suficientes para que estos espacios sean de Banach. Aquí buscaremos caracterizar la continuidad y compacidad de los operadores de composición ponderados

$$C_{\varphi,\psi}\colon H_v^\infty(\mathbb{D}) \to H_w^\infty(\mathbb{D}), \quad C_{\varphi,\psi}(f)(z) = \psi(z)\varphi(f(z)).$$

Conseguiremos caracterizar la continuidad de estos operadores según la finitud del supremo

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|\, w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))},$$

donde $\tilde{v}$ es el peso asociado a v definido por

$$\tilde{v}(z) = (\sup\{|f(z)| \mid f \in H_v^\infty(\mathbb{D}),\ \|f\|_v \leq 1\})^{-1}.$$

También daremos condiciones sobre las funciones φ y ψ para que el operador

$$C_{\varphi,\psi}\colon H_v^\infty(\mathbb{D}) \to H_v^\infty(\mathbb{D})$$

sea continuo para cualquier peso v. Y finalizaremos caracterizando la compacidad de estos operadores en función del decrecimiento, según r crece, de

$$\sup_{|\varphi(z)|>r} \frac{|\psi(z)|\, w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))}.$$

Capítulo 1

Preliminares de Análisis Funcional

En la Sección 1.1 de este capítulo introduciremos la noción de espacios vectoriales topológicos y espacios localmente convexos y los espacios de Fréchet, así como resultados básicos sobre continuidad de aplicaciones lineales entre este tipo de espacios. Los espacios localmente convexos nos dan un marco más general donde se verifican los Teoremas clásicos de Análisis Funcional como son el Teorema de Hahn-Banach, el Teorema de la Aplicación Abierta y el Teorema del Grafo Cerrado, que probaremos en la Sección 1.2. En la Sección 1.3 se explicará la noción de topología débil sobre el espacio dual de un espacio localmente convexo y demostraremos en la Sección 1.4 el Teorema de Krein-Smulian, el cual nos da una caracterización de los conjuntos convexos cerrados en la topología débil. Por último, en la Sección 1.5, introduciremos la topología compacto-abierta sobre el espacio de funciones holomorfas en un conjunto abierto y conexo, el cual es un espacio de Fréchet, y que nos será útil en los capítulos 3 y 4 del trabajo. Para desarrollar este capítulo se han seguido los textos de Conway [9], de Horváth [11], de Meise y Vogt [14], y de Rudin [19].

1.1. Espacios Localmente Convexos

En esta sección vamos a introducir el concepto de espacios vectoriales topológicos y en particular de los espacios localmente convexos y los espacios de Fréchet. Los resultados aquí ilustrados aparecen en el texto de Meise y Vogt [14, Parte IV, Capítulo 22], aunque también se podrían ver, por ejemplo, en el texto de Horváth [11, Capítulo 2].

Definición 1.1. Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E se dice *espacio vectorial topológico* si está equipado con una topología Hausdorff (T2) que hace las operaciones de suma y producto por escalar continuas. De la misma forma, una topología τ en un espacio vectorial E se dice *topología de espacio vectorial* si (E, τ) es un espacio vectorial topológico.

Claramente, una topología τ será de espacio vectorial si verifica

1. Para cada $x, y \in E$ y cada entorno U de $x + y$ existen entornos V y W de x e y respectivamente con $V + W := \{v + w \mid v \in V, w \in W\} \subset U$.

2. Para cada $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, $x_0 \in E$ y cada entorno U de $\lambda_0 x_0$ existe $\epsilon > 0$ y V entorno de x_0 tal que
$$\{\lambda v \mid |\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon, v \in V\} \subset U.$$

Propiedades 1.2. En cada espacio vectorial topológico E se cumple:

(a) Para cada $y \in E$, la traslación por y, $x \mapsto x + y$, es continua. En efecto, ya que la aplicación $x \mapsto (x, y)$ es continua y la suma $(x, y) \mapsto x + y$ también lo es. Por lo tanto es también un homeomorfismo donde su inversa es la traslación por $-y$. En particular los entornos de $x \in E$ son de la forma $x + V = \{x + v \mid v \in V\}$ donde V es un entorno de cero.

(b) Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, la homotecia de razón λ, $x \mapsto \lambda x$, es continua, ya que $x \mapsto (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ es continua, y el producto por escalar $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ también lo es. Igualmente es un homeomorfismo cuya inversa es la homotecia de razón $1/\lambda$.

(c) Para cada entorno de cero U existe un entorno de cero V con $V + V \subset U$. En efecto, ya que $0 + 0 = 0 \in U$, por la continuidad de la suma, existen entornos de cero W_1, W_2 tales que $W_1 + W_2 \subset U$. Si tomamos $V = W_1 \cap W_2$ es claro que $V + V \subset W_1 + W_2 \subset U$.

(d) E tiene una base de entornos de cero cerrados. En efecto, dado U entorno de cero, sea V otro entorno con $V + V \subset U$, entonces $W = V \cap (-V)$ es otro entorno de cero y $-W = W$ y además $W + W \subset U$. Sea ahora $x \in \overline{W}$, entonces $(x + W) \cap W \neq \emptyset$, por lo tanto existe $y \in W$ con $x + y \in W$, pero $-y \in W$, por lo tanto $x = x + y + (-y) \in W + W \subset U$, por lo tanto $\overline{W} \subset U$.

(e) Para cada U entorno de cero, tomando $\lambda_0 = 0$ y $x_0 = 0$, existe $\epsilon > 0$ y V entorno de cero con $W = \{\lambda v \mid |\lambda| \leq \epsilon, v \in V\} \subset U$. Y además $W = \{\lambda w \mid |\lambda| \leq 1, w \in W\}$.

(f) Para cada entorno de cero, U, tenemos que $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} nU$, ya que para cada $x \in E$, la sucesión $(x/n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero.

♢

Definición 1.3. Un subconjunto M de un espacio vectorial E se dice *equilibrado* si

$$M = \{\lambda m \mid \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1, m \in M\}.$$

M se dice *absorbente* si $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} nM$. Por último, M se dice *absolutamente convexo* si es convexo y equilibrado, o equivalentemente, dados0 $a, b \in \mathbb{K}$ con $|a| + |b| \leq 1$, entonces $aM + bM \subset M$.

A partir de las Propiedades 1.2 y la Definición 1.3 tenemos la mitad del siguiente resultado.

Proposición 1.4. *En todo espacio vectorial topológico se verifica que*

1. *Las traslaciones son homeomorfismos.*

2. *Existe una base de entornos de cero $\mathcal{U}$ formada por conjuntos equilibrados y absorbentes. Además si $U \in \mathcal{U}$, entonces existe $V \in \mathcal{U}$ de forma que $V + V \subset U$.*

Recíprocamente si τ es una topología Hausdorff sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial E verificando las dos propiedades (1) y (2), entonces (E, τ) es un espacio vectorial topológico.

Demostración. Para la primera parte del enunciado, las Propiedades 1.2 nos aseguran que en un espacio vectorial topológico se verifican las dos condiciones del enunciado.

Para la segunda parte del enunciado, si $\mathcal{U}$ es una base de entornos de cero que verifica la propiedad del enunciado, debido a que las traslaciones son continuas tendremos que el conjunto $\mathcal{U}_x = \{x + U \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una base de entornos de $x \in E$. Veamos primero que la suma es continua, sean $x, y \in E$ y sea $(x+y)+U$ un entorno de $x+y$, entonces existe $V \in \mathcal{U}$ de modo que $V + V \in U$, por lo tanto $(x + V) + (y + V) \subset (x + y) + U$, donde $x + V$ es entorno de x y $y + V$ es entorno de y. Esto prueba que las sumas son continuas.

Veamos ahora que el producto por escalar es continuo también, primero veamos que dado $U \in \mathcal{U}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ existe $V \in \mathcal{U}$ con $\lambda U \subset V$. Para dicho U existe $V_1 \in \mathcal{U}$ con $V_1 + V_1 \subset U$, para este nuevo entorno existe $V_2 \in \mathcal{U}$ con $V_2 + V_2 \subset V_1$, de modo que $V_1 + V_1 + V_1 + V_1 \subset U$, de este manera, por inducción, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $V_n \in \mathcal{U}$ verificando que $2^n V_n \subset U$. Sea ahora n suficientemente grande de modo que $|\lambda| \leq 2^n$. Entonces tenemos que $2^n V_n \subset U$, y puesto que los entornos son equilibrados, también tenemos que $\lambda 2^{-n} V_n \subset V_n$, lo cual implica que $\lambda V_n \subset 2^n V_n \subset U$.

Ahora bien, sea $x_0 \in E$ y $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ y un entorno suyo de la forma $\lambda_0 x_0 + U$ con $U \subset \mathcal{U}$, por lo dicho antes, existirá $V \in \mathcal{U}$ con $V + V + V \subset U$. Como V es absorbente, existe $n \in \mathbb{N}$ con $x_0 \in nV$, y como es equilibrado, si $|t| \geq n$ tenemos que $x_0 \in nV \subset tV$. Esto implica que si $|k| \leq 1/n$, entonces $kx_0 \subset V$. Por lo probado antes, existe $W \in \mathcal{U}$ de modo que $\lambda_0 W \subset V$. Además, de nuevo porque V es equilibrado, si $|k| \leq 1$ y $x - a \in V$, entonces $k(x - a) \in V$. Sea ahora $W' \subset W \cap V$, $W' \subset \mathcal{U}$, veamos ahora que

$$\{\lambda x \mid |\lambda - \lambda_0| < 1/n,\ x \in x_0 + W'\} \subset \lambda_0 x_0 + U.$$

Esto equivale a ver que si $|\lambda - \lambda_0| < 1/n$ y $x \in x_0 + W'$, entonces $\lambda x - \lambda_0 x_0 \in U$, y esto es cierto, ya que

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0),$$

y $(\lambda - \lambda_0)x_0 \in V$, ya que $|\lambda - \lambda_0| < 1/n$; $\lambda_0(x - x_0) \in V$ ya que $x - x_0 \in W' \subset W$, y teníamos que $\lambda_0 W \subset V$; y por último $(\lambda - \lambda_0)(x - x_0) \in V$ debido a que $x - x_0 \in W' \subset V$, y $|\lambda - \lambda_0| < 1/n \leq 1$. En definitiva,

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 \in V + V + V \subset U,$$

lo cual implica que $\lambda x \subset \lambda_0 x_0 + U$ y concluyendo que

$$\{\lambda x \mid |\lambda - \lambda_0| < 1/n,\ x \in x_0 + S\} \subset \lambda_0 x_0 + U.$$

□

Definición 1.5. Un espacio vectorial topológico E se dice *localmente convexo* si E tiene en cada punto una base de entornos convexos. No es difícil comprobar que es suficiente que E tenga una base de entornos de cero convexos, y además equivale a que E tenga una base de entornos de cero absolutamente convexos.

En un espacio métrico (E, d), una sucesión $\{x_n\}_{n \subset \mathbb{N}} \subset E$ se dice *sucesión de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que si $n, m \geq N$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Y una sucesión se dice *convergente* a un punto $x \in E$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x) < \epsilon$.

Nota 1.6. La noción de espacio vectorial topológico *completo* es más general que la de *secuencialmente completo*, pero en espacios métricos la completitud general se puede enunciar de forma equivalente en términos secuenciales lo cual será suficiente en este trabajo. ♢

Un espacio métrico E se dice *(secuencialmente) completo* si toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión convergente.

Un espacio topológico se dice *metrizable* si existe una métrica que induce la topología del espacio.

Un espacio vectorial topológico es un *espacio de Fréchet*, si es localmente convexo, metrizable y (secuencialmente) completo.

Definición 1.7. Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $q\colon E \to \mathbb{R}$ una aplicación que verifica la desigualdad triangular

$$q(x+y) \leq q(x) + q(y),\ x, y \in E.$$

Diremos que q es un *funcional sublineal* si además

$$q(\lambda x) = \lambda q(x),\ x \in E,\ \lambda \geq 0.$$

Y diremos que es una *seminorma* si es no negativa, $q(x) \geq 0,\ x \in E$, $q(0) = 0$ y además

$$q(\lambda x) \leq |\lambda|\, q(x),\ x \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Proposición 1.8. *Sea E un espacio vectorial topológico y supongamos que U es un entorno de cero convexo. Si definimos*

$$\|x\|_U = \operatorname{ínf}\{t > 0 \mid x \in tU\},$$

entonces $\|\cdot\|_U$ es un funcional sublineal continuo no negativo y

$$\mathring{U} = \{x \in E \mid \|x\|_U < 1\} \subset U \subset \{x \in E \mid \|x\|_U \leq 1\} = \overline{U}.$$

Demostración. Notar que como U es un entorno de cero, es también absorbente, lo cual hace que $\|x\|_U$ esté bien definido para todo $x \in E$ y $\|x\|_U \geq 0\ \forall x \in E$. Ya que $0 \in tU$, $t > 0$, es claro que $\|0x\|_U = \|0\|_U = 0 = 0\|x\|_U$. Ahora, si $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\|\alpha x\|_U &= \operatorname{ínf}\{t > 0 \mid \alpha x \in tU\} = \operatorname{ínf}\left\{t > 0 \mid x \in \frac{t}{\alpha}U\right\}\\ &= \alpha \operatorname{ínf}\left\{\frac{t}{\alpha} > 0 \mid x \in \frac{t}{\alpha}U\right\} = \alpha\|x\|_U.\end{aligned}$$

Para ver la desigualdad triangular notemos que si $\alpha, \beta \geq 0$, no simultáneamente nulos y $a, b \in U$, entonces

$$\alpha a + \beta b = (\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}a + \frac{\beta}{\alpha+\beta}b\right) \in (\alpha+\beta)U,$$

gracias a la convexidad de U. Si $x, y \in E$, $\|x\|_U = \alpha$, $\|y\|_U = \beta$ y $\delta > 0$, entonces $x \in (\alpha+\delta)U$ e $y \in (\beta+\delta)U$. Por lo tanto, $x + y \in (\alpha+\delta)U + (\beta+\delta)U = (\alpha+\beta+2\delta)U$ y así $\|x+y\|_U \leq \alpha+\beta+2\delta$, tomando ahora $\delta \to 0$, resulta que $\|x+y\|_U \leq \alpha+\beta = \|x\|_U + \|y\|_U$.

Para la continuidad en el cero, hay que tener en cuenta que si $x \in \epsilon U$, entonces $\|x\|_U \leq \epsilon$ y por lo tanto

$$\| \cdot \|_U^{-1}([-\epsilon, \epsilon]) = \| \cdot \|_U^{-1}([0, \epsilon]) = \{x \in E \mid \|x\|_U \leq \epsilon\} \supset \epsilon U.$$

La continuidad en el resto de punto se debe a que

$$|\|x\|_U - \|y\|_U| = \begin{cases} \|x\|_U - \|y\|_U \leq \|x-y\|_U, & \text{si } \|y\|_U \leq \|x\|_U, \\ \|y\|_U - \|x\|_U \leq \|y-x\|_U, & \text{si } \|x\|_U \leq \|y\|_U. \end{cases}$$

Por la continuidad en cero, para $\epsilon > 0$ existe U abierto con $0 \in U$ de forma que si $z \in U$ entonces $\|z\|_U < \epsilon$. Así, si $y \in (U+x) \cap (-U+x)$ entonces $x-y \in U$ y $y-x \in U$, concluyendo que $\|x-y\|_U, \|y-x\|_U < \epsilon$, obteniendo así la continuidad en $x \in E$.

Para la última afirmación, veamos primero que $\mathring{U} = \{x \in E \mid \|x\|_U < 1\}$. Si tenemos que $\|x\|_U = \alpha < 1$, entonces $\alpha < \beta < 1$ implica que $x \in \beta U \subset U$, en efecto, como $0 \in U$ y es convexo, dado $\beta < 1$ y $x \in U$, tenemos que $\beta x + (1-\beta)0 \in U$. Por lo tanto $U \supset \{x \in E \mid \|x\|_U < 1\}$ que por la continuidad es un abierto, lo que implica que $\mathring{U} \supset \{x \in E \mid \|x\|_U < 1\}$. Si $x \in \mathring{U} \subset U$, entonces $\|x\|_U \leq 1$. Como $\mathring{U} - x = \left\{ y - x \mid y \in \mathring{U} \right\}$ es absorbente (puesto que es un entorno de cero), existe $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ verificando que $nx \in \mathring{U} - x$, lo que equivale a $(1+n)x = y \in \mathring{U}$. Pero $x = (1+n)^{-1}y$, con $y \in \mathring{U} \subset U$. Por lo tanto $\|x\|_U = (1+n)^{-1}\|y\|_U \leq (1+n)^{-1} < 1$.

Para la otra igualdad, si $x \in U$ es claro que $\|x\|_U \leq 1$, es decir, $U \subset \{x \in E \mid \|x\|_U \leq 1\}$, y como es un cerrado, tenemos que $\overline{U} \subset \{x \in E \mid \|x\|_U \leq 1\}$. Para la igualdad, sea $x \in E$ con $\|x\|_U \leq 1$. Como $0 \in U$ y es convexo, si $s < t$ tenemos que $sU \subset tU$, ya que dado $sy \in sU$, tenemos que $sy = t((s/t)x + (1-s/t)0) \in tU$. Así, como $\|x\|_U \leq 1$, tenemos que $x \in tU$ para todo $t > 1$, es decir $x/t \in U$. Tomando una sucesión $\{x/t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$, con $\{t_n\}$ decreciente a 1, su límite es x y por lo tanto pertenece a la clausura $x \in \overline{U}$, probando la igualdad. □

Nota 1.9. En la Proposición 1.8, para probar que $\| \cdot \|_U$ es un funcional sublineal realmente solo hemos empleado que $0 \in U$ y que U es convexo y absorbente. De la misma manera, en el siguiente resultado para ver que $\| \cdot \|_U$ es una seminorma es suficiente que U sea absolutamente convexo y absorbente. ♢

Corolario 1.10 (Funcional de Minkowski)**.** *Sea E un espacio vectorial topológico y sea U un entorno de cero absolutamente convexo, entonces el funcional de Minkowski*

$$\|x\|_U = \inf \{t > 0 \mid x \in tU\}, \ x \in E,$$

es una seminorma continua en E. Además,

$$\mathring{U} = \{x \in E \mid \|x\|_U < 1\} \subset U \subset \{x \in E \mid \|x\|_U \leq 1\} = \overline{U}.$$

Demostración. Todas las afirmaciones son consecuencia de la Proposición 1.8 excepto que $\| \cdot \|_U$ sea una seminorma, ya que sabemos que $\| \cdot \|_U$ es una aplicación sublineal no negativa, para ver que es una seminorma solo hay que ver que

$$\|\lambda x\|_U = |x| \, \|x\|_U, \ x \in E, \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Esto se debe a que U sea equilibrado, ya que en este caso, tenemos que $\lambda U = |\lambda|\, U$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Por esta razón resulta

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_U &= \text{ínf}\,\{t > 0 \mid \lambda x \in tU\} = \text{ínf}\left\{t > 0 \mid x \in \frac{t}{\lambda} U\right\} \\ &= \text{ínf}\left\{t > 0 \mid x \in \frac{t}{|\lambda|} U\right\} = |\lambda|\,\text{ínf}\left\{\frac{t}{|\lambda|} > 0 \mid x \in \frac{t}{|\lambda|} G\right\} = |\lambda|\,\|x\|_U.\end{aligned}$$

Esto junto a la desigualdad triangular que se obtiene pues U es un entorno de cero convexo permite concluir que $\|\cdot\|_U$ es una seminorma sobre E. □

Nota 1.11. Del Corolario 1.10 es inmediato que si U es un entorno de cero absolutamente convexo en un espacio vectorial topológico, entonces $\{x \in E \mid \|x\|_U \leq 1/2\} = (1/2)\overline{U} \subset \overset{\circ}{U} = \{x \in E \mid \|x\|_U < 1\}$, y es claro que $(1/2)\overline{U}$ es un entorno de cero cerrado absolutamente convexo. Esto prueba que todo espacio localmente convexo tiene una base de entornos de cero cerrados y absolutamente convexos. ♢

Definición 1.12. Sea E un espacio localmente convexo. Una familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de seminormas continuas en E se dice *sistema fundamental de seminormas* si los conjuntos

$$B_\alpha(0, \epsilon) := \{x \in E \mid \|x\|_\alpha < \epsilon\}, \; \alpha \in A, \, \epsilon > 0,$$

forma una base de entornos de cero.

Teorema 1.13. *Todo espacio localmente convexo E tiene un sistema fundamental de seminormas. Y todo sistema fundamental de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tiene las siguientes propiedades:*

S1. Para todo $x \in E$ con $x \neq 0$ existe $\alpha \in A$ con $\|x\|_\alpha > 0$.

S2. Para $\alpha, \beta \in A$ existe $\gamma \in A$ y $C > 0$ con $\text{máx}\,\{\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta\} \leq C\|\cdot\|_\gamma$.

Y recíprocamente, si E es un espacio vectorial y $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de seminormas con las propiedades (S1.) y (S2.), entonces existe una única topología localmente convexa en E para la cual $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ es un sistema fundamental de seminormas.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una base de entornos de cero absolutamente convexos. Consideramos la familia de seminormas formada por los funcionales de Minkowski $\{\|\cdot\|_U\}_{U \in \mathcal{U}}$. Por el Corolario 1.10 sabemos que son seminormas continuas. Si V es un entorno de cero en E, entonces existe $U \in \mathcal{U}$ de forma que

$$B_U(0, 1) = \{x \in E \mid \|x\|_U < 1\} \subset U \subset V,$$

probando que la familia de seminormas es un sistema fundamental.

Sea ahora $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sistema fundamental de seminormas en E. Veamos que verifica (S1.). Si $x \in E$, $x \neq 0$, puesto que la topología es Hausdorff, existen abiertos U, V tales que $U \cap V = \emptyset$ y $0 \in U$, $x \in V$. Para el U anterior, existirá un $\alpha \in A$ y $\epsilon > 0$ de modo que $B_\alpha(0, \epsilon) \subset U$, es decir, $x \notin B_\alpha(0, \epsilon) = \{y \in E \mid \|y\|_\alpha < \epsilon\}$, de modo que $\|x\|_\alpha \geq \epsilon > 0$.

Veamos ahora que verifica (S2.), para ello, sean $\alpha, \beta \in A$. Entonces $B_\alpha(0,1) \cap B_\beta(0,1)$ es un entorno de cero en E, de modo que existe $\gamma \in A$ y $\epsilon > 0$ verificando que

$$B_\gamma(0,\epsilon) \subset B_\alpha(0,1) \cap B_\beta(0,1),$$

es decir, que si $\|x\|_\gamma < \epsilon$, entonces $\|x\|_\alpha < 1$, por lo tanto

$$\|\frac{\epsilon}{2}\frac{x}{\|x\|_\gamma}\|_\gamma = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \Rightarrow \|\frac{\epsilon}{2}\frac{x}{\|x\|_\gamma}\|_\alpha = \frac{\epsilon}{2}\frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\gamma} < 1 \Rightarrow \|x\|_\alpha < \frac{2}{\epsilon}\|x\|_\gamma,\ x \in E.$$

De la misma manera se llega a que $\|x\|_\beta < (2/\epsilon)\|x\|_\gamma$, es decir

$$\text{máx}\{\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta\} < \frac{2}{\epsilon}\|\cdot\|_\gamma.$$

Supongamos ahora que en un espacio vectorial E tenemos una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in A}$ verificando (S1.) y (S2.) y veamos cómo construir una única topología que convierte a E en un espacio vectorial localmente convexo que tiene a la familia anterior como un sistema fundamental de seminormas. Para $x \in E$, $\alpha \in A$ y $\epsilon > 0$ definimos

$$B_\alpha(x,\epsilon) := \{y \in E \mid \|x-y\|_\alpha < \epsilon\}.$$

Esta familia de conjuntos verifica que $E = \cup\{B_\alpha(x,\epsilon) \mid x \in E, \alpha \in A, \epsilon > 0\}$. Veamos además que si $z \in B_\alpha(x,\epsilon) \cap B_\beta(y,\delta)$ existe $\gamma \in A$ y $\xi > 0$ de modo que $B_\gamma(z,\xi) \subset B_\alpha(x,\epsilon) \cap B_\beta(y,\delta)$. En efecto, por la propiedad (S2.) existe $\gamma \in A$ y $C > 0$ con

$$\text{máx}\{\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta\} \le C\|\cdot\|_\gamma.$$

Sea $d_1 = \|x-z\|_\alpha < \epsilon$ y $d_2 = \|y-z\|_\beta < \delta$ y sea $\xi = \text{mín}\{(\epsilon-d_1)/2C, (\delta-d_2)/2C\}$. Si ahora $w \in B_\gamma(z,\xi)$ resulta que

$$\begin{aligned}
\|x-w\|_\alpha &\le \|x-z\|_\alpha + \|z-w\|_\alpha \le d_1 + C\|z-w\|_\gamma < d_1 + \frac{\epsilon-d_1}{2C} = \frac{\epsilon+d_1}{2} < \epsilon \\
\|y-w\|_\beta &\le \|y-z\|_\beta + \|z-w\|_\beta \le d_2 + C\|z-w\|_\gamma < d_1 + \frac{\delta-d_2}{2C} = \frac{\delta+d_2}{2} < \delta,
\end{aligned}$$

lo que prueba que $B_\gamma(z,\xi) \subset B_\alpha(x,\epsilon) \cap B_\beta(y,\delta)$. Estas dos propiedades nos dicen que existe una única topología τ para la cual la familia $\{B_\alpha(x,\epsilon)\}$ es una base. Dado $x \in E$ es claro que una base de entornos abiertos de x es $\{B_\alpha(x,\epsilon) \mid \alpha \in A,\ \epsilon > 0\}$ y es obvio (por los conjuntos que forman la base de la topología) que las seminormas son continuas sobre esta topología.

Veamos ahora que esta topología convierte a E en un espacio vectorial topológico. Como

$$\|y+w-(y+x)\|_\alpha = \|w-x\|_\alpha,\ \alpha \in A,$$

resulta que $B_\alpha(x,\epsilon) + y = B_\alpha(x+y,\epsilon)$, lo que implica que las traslaciones son aplicaciones abiertas con inversas abiertas, es decir, homeomorfismos. También, la base de entornos de cero $\mathcal{U} = \{B_\alpha(0,\epsilon) \mid \alpha \in A,\ \epsilon > 0\}$ está formada por conjuntos equilibrados ya que como $\|\lambda x\|_\alpha = |\lambda|\,\|x\|_\alpha$ resulta que

$$B_\alpha(0,\epsilon) = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \le 1, x \in B_\alpha(0,\epsilon)\}.$$

Los conjuntos también son absorbentes, puesto que dado $x \in E$ y $\alpha \in A$ existe $\lambda \geq 0$ con $\|x\|_\alpha = \lambda$ de modo que $x \in B_\alpha(0, 2\lambda)$ (si $\lambda = 0$, entonces $x \in B_\alpha(0,1)$), y dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $B_\alpha(0, 2\lambda) \subset nB_\alpha(0, \epsilon)$. Y por último, dado $U = B_\alpha(0, \epsilon)$ con $\alpha \in A$ y $\epsilon > 0$, tomando $V = B_\alpha(0, \alpha/2)$, se verifica que $V + V \subset U$ ya que si $x, y \in V$, entonces

$$\|x + y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Es decir, las traslaciones son homeomorfismos y existe una base $\mathcal{U}$ de entornos de cero equilibrados y absorbentes, verificando que si $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ con $V + V \subset U$. Esto prueba que en el caso que τ sea Hausdorff, debido a la Proposición 1.4, el espacio (E, τ) será espacio vectorial topológico.

Para ver que τ es Hausdorff solo hace falta emplear la propiedad (S1.). Ya que si $x \neq y$, entonces $x - y \neq 0$ por lo tanto existe $\alpha \in A$ con $\|x - y\| = d \neq 0$, así sean $x \in U = B_\alpha(x, d/2)$ e $y \in V = B_\alpha(x, d/2)$, tenemos que $U \cap V = \emptyset$, ya que si existe $z \in U \cap V$ resulta

$$d = \|x - y\|_\alpha \leq \|x - z\|_\alpha + \|z - y\|_\alpha < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d,$$

lo que es un absurdo. Con todo esto concluimos que (E, τ) es un espacio vectorial topológico, nos falta ver que es localmente convexo, para lo cual solo hay que tener en cuenta que la base de entornos de cero que estamos considerando está formada por conjuntos convexos, ya que si $x, y \in B_\alpha(0, \epsilon)$ y $s \in [0, 1]$, entonces

$$\|sx + (1 - s)y\|_\alpha \leq s\|x\|_\alpha + (1 - s)\|y\|_\alpha < s\epsilon + (1 - s)\epsilon = \epsilon.$$

Es decir, τ es una topología de modo que (E, τ) es un espacio localmente convexo para el cual la familia $\{\|x\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un sistema fundamental de seminormas.

Vamos a concluir ahora su unicidad. Si τ' es otra topología que convierte a E en un espacio localmente convexo y tiene a $\{\| \cdot \|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ como sistema fundamental de seminormas, resulta que $\mathcal{U} = \{B_\alpha(0, \epsilon) \mid \alpha \in A, \epsilon > 0\}$ es una base de entornos de cero también para esta topología. Por la continuidad de las traslaciones, resulta que $\mathcal{U}_x = \{B_\alpha(x, \epsilon) \mid \alpha \in A, \epsilon > 0\}$ es una base de entornos de x para la topología τ'. Pero estas familias también eran bases de entornos para la topología τ que hemos construido. Por lo tanto como ambas topologías comparten bases de entornos, ambas topologías deben ser la misma, de donde se concluye la unicidad. $\square$

Este resultado generaliza el hecho de que dada una norma en un espacio vectorial, esta determina una única topología en él.

Nota 1.14. La propiedad (S1.) equivale a que el espacio topológico sea Hausdorff. Y una familia de seminormas que verifica la propiedad (S2.) se dice que está *saturada*. $\diamondsuit$

Nota 1.15. Si $\{\| \cdot \|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un sistema fundamental de seminormas en E, entonces una red $\{x_t\}_{t \in T}$ converge a $x_0 \in E$ si, y solo si, $\|x_t - x_0\|_\alpha$ converge a 0 para cada $\alpha \in A$. $\diamondsuit$

Una aplicación lineal entre espacios normados es continua si y solo si es acotada. Esta propiedad se generaliza a los espacios localmente convexos de la siguiente forma.

Proposición 1.16. *Sean E y F espacios localmente convexos con sistemas fundamentales de seminormas $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y $\{q_\beta\}_{\beta\in B}$ respectivamente. Entonces si $f\colon E\to F$ es una aplicación lineal, son equivalentes:*

1. *f es continua.*

2. *f es continua en 0.*

3. *Para cada $\beta\in B$ existe $\alpha\in A$ y $C>0$, tal que $q_\beta(fx)\le Cp_\alpha(x)$ para todo $x\in E$.*

Demostración. (1)⇒(2)⇒(3). La primera implicación es obvia. Para la segunda, sea $\beta\in B$, entonces existe $\alpha\in A$ y $\epsilon>0$ tal que $f(B_\alpha(0,\epsilon))\subset B_\beta(0,1)$. Entonces, para $x\in E$ con $p_\alpha(x)=0$, $tx\in B_\alpha(0,\epsilon)$ para todo $t>0$. Entonces, $tq_\beta(fx)=q_\beta(f(tx))<1$ para todo $t>0$. Esto implica que $q_\beta(fx)=0\le p_\alpha(x)$. Para $x\in E$ con $p_\alpha(x)\ne 0$, para $C=2/\epsilon$, se tiene que

$$q_\beta(fx)=\frac{2}{\epsilon}p_\alpha(x)q_\beta(f(\frac{\epsilon x}{2p_\alpha(x)}))\le\frac{2}{\epsilon}p_\alpha(x).$$

(3⇒1). Si $x_0\in E$ y $\{x_t\}_{t\in T}$ es una red que converge a x_0, por (3), para cada $\beta\in B$,

$$q_\beta(fx_t-fx_0)=q_\beta(f(x_t-x_0))\le Cp_\alpha(x_t-x_0).$$

Por lo tanto (1) se sigue de la Nota 1.15. □

Definición 1.17. Sean E y F espacios vectoriales topológicos. Definimos

$$L(E,F)=\{f\colon E\to F\mid f\text{ lineal y continua}\},$$
$$L(E)=L(E,E)\text{ y }E'=L(E,\mathbb{K}).$$

E' se llama *espacio dual* de E. Los espacios $L(E,F)$ tienen una estructura natural de espacio vectorial, pero en contraste con los espacios de Banach, no está claro si se puede dar una topología localmente convexa a $L(E,F)$ de una forma natural.

Los espacios localmente convexos dan un marco más general donde se verifican las consecuencias que habitualmente se emplean en espacios normados del Teorema de Hahn-Banach. Omitiremos la demostración de estos resultados pues son muy similares a las conocidas en el contexto partidular de los espacios normados.

Proposición 1.18. *Sea E un espacio localmente convexo, F un subespacio de E y p una seminorma continua en E. Entonces,*

(a) Para cada $y\in F'$ existe $Y\in E'$ con $Y|_F=y$.

(b) Para cada $z\in E$ existe $y\in E'$ con $y(z)=p(z)$ y $|y(x)|\le p(x)$, $x\in E$.

(c) Para cada $x\in E$ con $x\ne 0$ existe $y\in E'$ con $y(x)\ne 0$.

Definición 1.19 (Polares)**.** Si $M \subset E$ y $N \subset E'$ son conjuntos no vacíos, definimos sus polares por

$$\begin{aligned} M^\circ &= \{y \in E' \mid |y(x)| \leq 1, \forall x \in M\} \subset E', \\ N^\circ &= \{x \in E \mid |y(x)| \leq 1, \forall y \in N\} \subset E. \end{aligned}$$

Claramente las polares son conjuntos convexos y N° es cerrado en E ya que

$$N^\circ = \bigcap_{y \in N} y^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq 1\}).$$

Teorema 1.20 (Teorema de la Bipolar)**.** *Sea E un espacio localmente convexo y A un subconjunto de E absolutamente convexo. Entonces, $\overline{A} = (A^\circ)^\circ = A^{\circ\circ}$.*

Demostración. Por la Definición 1.19, tenemos que $(A^\circ)^\circ$ es un cerrado, y es fácil ver que $A \subset (A^\circ)^\circ$, de modo que $\overline{A} \subset (A^\circ)^\circ$. Para la otra contención, sea $\xi \in E \setminus \overline{A}$, por la Nota 1.11, E tiene una base de entornos de cero cerrados y absolutamente convexos, de modo que existe un entorno de cero U cerrado y absolutamente convexo con $A \cap (\xi + U) = \emptyset$. Bajo estas hipótesis veamos que existe $y \in A^\circ$ de modo que $|y(\xi)| > 1$.

Sea $V = \{x \in E \mid \|x\|_U \leq 1/2\} = (1/2)U$, este conjunto es absolutamente convexo y absorbente, de modo que $B = A + V$ también es absolutamente convexo y absorbente ya que $\cup_{n \in \mathbb{N}} nB = \operatorname{span}(B) \supset \operatorname{span}(V) = E$, donde

$$\operatorname{span}(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in B \right\}.$$

Por la Nota 1.9, tenemos que $\|\cdot\|_B$ es una seminorma en E. Una de las consecuencias del Teorema de Hahn-Banach nos dice que existe $y \in E'$ de modo que $y(\xi) = \|\xi\|_B$ y $|y(x)| \leq \|x\|_B$, $x \in E$. Como $V \subset B$, es fácil ver que

$$|y(x)| \leq \|x\|_B \leq \|x\|_V = 2\|x\|_U.$$

Supongamos ahora que $y(\xi) = \|\xi\|_B \leq 1$. Entonces $\xi \in tB$ para todo $t > 1$. Elegimos ahora $r > 1$ con $(r-1)/r\|\xi\|_U < 1$. Como $\xi \in rB = rA + rV$, existen $a \in A$ y $v \in V$ tales $\xi = ra + rv$, es decir $a = \xi/2 + v$. Puesto que $A \cap (\xi + U) = \emptyset$, tenemos que $a - \xi \notin U = \{x \in E \mid \|x\|_U \leq 1\}$, por lo tanto $\|a - \xi\| > 1$. Así resulta

$$1 < \|a - \xi\| = \|\frac{1}{r}\xi - v - \xi\|_U = \|\frac{r-1}{r}\xi + v\|_U \leq \frac{r-1}{r}\|\xi\|_U + \frac{1}{2},$$

contradiciendo la elección de r. De modo que $1 < y(\xi)$. Nos falta ver que $y \in A^\circ$, es decir, que $|y(x)| \leq 1, x \in A$. Dado $x \in A$, existe $\epsilon > 0$ con $\|\epsilon x\|_U \leq 1/2$, es decir, $\epsilon x \in V$. Entonces $(1+\epsilon)x \in A + V = B$ y por lo tanto $\|(1+\epsilon)x\|_B \leq 1$. De aquí se sigue que

$$|y(x)| \leq \|x\|_B \leq 1, x \in A.$$

Es decir, hemos encontrado $y \in A^\circ$ con $y(\xi) > 1$, es decir, $\xi \notin (A^\circ)^\circ$. Lo que prueba que $\overline{A} = (A^\circ)^\circ$. $\square$

Proposición 1.21. *Para todo entorno de cero absolutamente convexo U de un espacio localmente convexo E, el funcional de Minkowski verifica*

$$\|x\|_U = \sup\left\{|y(x)| \mid y \in U^\circ\right\}, \; x \in E.$$

Demostración. Dada y una aplicación lineal sobre E, es equivalente que $y \in U^\circ$ a que $|y(x)| \leq \|x\|_U$, $x \in E$. En efecto, si $y \in U^\circ$, tenemos que $|y(z)| \leq 1, z \in U$. Para $x \in E$, sea $\alpha = \|x\|_U$, entonces $x \in \beta U$ para todo $\beta > \alpha$, es decir $x = \beta z_\beta$ para algún $z_\beta \in U$, por lo tanto, $|y(x)| = |\beta y(z_\beta)| = \beta\,|y(z_\beta)| \leq \beta$, tomando ínfimos resulta $|y(x)| \leq \alpha = \|x\|_U$. Recíprocamente, si $|y(x)| \leq \|x\|_U, x \in E$, la continuidad de y se sigue de la continuidad de la seminorma, y si $x \in U$, es directo que $|y(x)| \leq \|x\|_U \leq 1$, y por lo tanto $y \in U^\circ$. Esta equivalencia nos dice que

$$\|x\|_U \geq \sup\left\{|y(x)| \mid y \in U^\circ\right\}, \; x \in E.$$

Para la otra desigualdad, por la Proposición 1.18 dado $x \in E$ existe $y \in E'$ de modo que $y(x) = \|x\|_U$ y $|y(z)| \leq \|z\|_U$, $z \in E$, es decir, existe $y \in U^\circ$ con $y(x) = \|x\|_U$. Esto prueba la igualdad. □

1.2. Teoremas de la Aplicación Abierta y del Grafo Cerrado

El objetivo de esta sección es demostrar los Teoremas de la Aplicación Abierta y del Grafo Cerrado sobre espacios de Fréchet, aunque para ello los demostraremos sobre espacios metrizables y secuencialmente completos. El primer Teorema dice que una aplicación lineal, continua y sobreyectiva entre espacios de Fréchet es abierta y el segundo que si una aplicación lineal tiene el grafo cerrado, entonces la aplicación es continua. Estos resultados se han obtenido del texto de Horváth [11, Capítulo 3, Sección 17], aunque también se pueden ver con mayor generalidad en el texto de Meise y Vogt [14, Parte IV, Capítulo 24].

Definición 1.22. Sea E un espacio métrico y M un subconjunto de E. Se dice que M es *denso en ninguna parte* si $\overset{\circ}{\left(\overline{M}\right)} = \emptyset$, es decir, si su clausura no tiene puntos interiores. M se dice que es de *I-categoría* en E si M es unión a lo sumo numerable de conjuntos densos en ninguna parte, y se dice que es de *II-categoría* en E si no es de I-categoría en E.

Lema 1.23. *Sean E y F espacios vectoriales topológicos y $f\colon E \to F$ lineal, continua y sobreyectiva. Si F es un espacio de II-categoría, entonces para todo entorno U de 0 en E, $\overline{f(U)}$ es un entorno de 0 en F.*

Demostración. Sea V un entorno equilibrado de 0 tal que $V + V \subset U$, como V es absorbente, $E = \cup_{n=1}^\infty nV$ y por lo tanto $F = \cup_{n=1}^\infty nf(V)$ ya que f es lineal y sobreyectiva. Ahora, F es un espacio de II-categoría, luego alguno de los conjuntos $n\overline{f(V)} = \overline{nf(V)}$ es de interior no vacío. Por lo tanto existe $x \in E$ punto interior de $\overline{f(V)}$.

Como V es equilibrado, también lo es $f(V)$ y por lo tanto $\overline{f(V)}$. Luego $-\overline{f(V)} = \overline{f(V)}$, de donde, $0 = x + (-x)$ es un punto interior de $\overline{f(V)} + \overline{f(V)}$. Ahora, como $(y, z) \mapsto y + z$

es continua, $\overline{f(V)} + \overline{f(V)} \subset \overline{f(V) + f(V)}$. Pero $f(V) + f(V) = f(V + V) \subset f(U)$ y por lo tanto $\overline{f(V) + f(V)} \subset \overline{f(U)}$, luego 0 es un punto interior de $\overline{f(U)}$, concluyendo que $\overline{f(U)}$ es un entorno de 0. □

Lema 1.24. *Sean (E, d) y (F, d') espacios métricos y supongamos que E es secuencialmente completo. Si $f\colon E \to F$ es continua verificando que*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \textit{tal que}\ \forall x \in E,\ \overline{f(B(x,\epsilon))} \supset B(f(x),\delta), \tag{1.25}$$

entonces, fijado ϵ y el δ que proporciona la condición (1.25), $\forall a > \epsilon$, $B(f(x),\delta) \subset f(B(x,a))$.

Demostración. Fijamos $\epsilon > 0$ y $a > \epsilon$. Sea $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números estrictamente positivos tal que $\epsilon_1 = \epsilon$ y $a = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_n > 0$ con $\delta_1 = \delta$ tal que $B(f(x),\delta_n) \subset \overline{f(B(x,\epsilon_n))}$. Además podemos suponer que $\delta_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Sea $x_0 \in E$ y sea $y \in B(f(x_0),\delta)$. Queremos ver que $y = f(x)$ para algún $x \in B(x,a)$, vamos a obtener este x como límite de una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ cuyo primer término es x_0. Construimos esta sucesión de forma inductiva de modo que

$$x_n \in B(x_{n-1},\epsilon_n) \quad \text{y} \quad f(x_n) \in B(y,\delta_{n+1}). \tag{1.26}$$

Para $n = 0$ no hay nada que comprobar en la primera condición y $f(x_0) \in B(y,\delta_1)$ equivale a $y \in B(f(x_0),\delta_1)$. Supongamos construidos $n-1$ elementos de la sucesión satisfaciendo (1.26). Entonces tenemos que $y \in B(f(x_{n-1}),\delta_n)$, y como $B(f(x_{n-1}),\delta_n) \subset \overline{f(B(x_{n-1},\epsilon_n))}$, existe $x_n \in B(x_{n-1},\epsilon_n)$ de forma que $f(x_n) \in B(y,\delta_{n+1})$. Luego la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ existe.

Esta sucesión es de Cauchy, ya que

$$d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon_{n+1} + \epsilon_{n+2} + \cdots + \epsilon_{n+p} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \epsilon_k$$

y puesto que esta serie converge, el resto es arbitrariamente pequeña para n suficientemente grande. Como E es secuencialmente completo, esta sucesión converge, sea entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E$ y $d(x,x_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = a$, por lo tanto $x \in B(x_0,a)$ y como f es continua, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Ahora, $f(x_n) \in B(y,\rho_{n+1})$ $\forall n$, concluimos que $f(x) = y$. □

Proposición 1.27. *Sea E un espacio localmente convexo. Son equivalentes:*

1. *E tiene una base de entornos de cero numerable.*

2. *E tiene un sistema fundamental de seminormas numerable.*

3. *Existe una métrica d en E que induce la topología de E.*

Demostración. 1⇔2. Esta equivalencia se deduce de la demostración del Teorema 1.13, teniendo en cuenta que si se tiene una base de entornos de cero numerable, por cada entorno de la base obtenemos una seminorma, y toda esta familia de seminormas forma un sistema fundamental. Y recíprocamente si $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de seminormas, entonces

$$\mathcal{U} = \{B_n(0,1/m) \mid n,m \in \mathbb{N}\} \ \ B_n(0,1/m) = \{x \in E \mid \|x\|_n < 1/m\},$$

es una base de entornos de cero numerable

3⇒1. Es directo pues todo espacio métrico es 1º numerable, luego tiene una base de entornos de cero numerable.

2⇒3. Sea $E = (E, \{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}})$. Definimos

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}.$$

Vamos a ver que esta función es una métrica. Primero, $d\colon E\times E \to [0,\infty)$ está bien definida, ya que

$$0 \leq d(x,y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty.$$

Ya que las $\|\cdot\|_n$ son seminormas, se verifica que $\|x-y\|_n = \|y-x\|_n$ lo que prueba que $d(x,y) = d(y,x)$.

También es obvio que $d(x,x) = 0$, $\forall x \in E$. Y si $d(x,y) = 0$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n} = 0 \Rightarrow \|x-y\|_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

y como $\{\|\cdot\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de seminormas en E, por lo tanto $x-y=0$, es decir $x=y$.

Falta ver que se verifica la desigualdad triangular. Para ello tengamos en cuenta la desigualdad

$$0 \leq t \leq s \Leftrightarrow 0 \leq \frac{t}{1+t} \leq \frac{s}{1+s}.$$

Sean ahora $x,y,z \in E$, como las $\|\cdot\|_n$ son seminormas, verifican la desigualdad triangular, y por lo tanto

$$0 \leq \|x-z\|_n \leq \|x-y\|_n + \|y-z\|_n.$$

Entonces

$$0 \leq \frac{\|x-z\|_n}{1+\|x-z\|_n} \leq \frac{\|x-y\|_n + \|y-z\|_n}{1+\|x-y\|_n+\|y-z\|_n} \leq \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n} + \frac{\|y-z\|_n}{1+\|y-z\|_n},$$

sumando ahora sobre todo $\mathbb{N}$ resulta que

$$\begin{aligned} d(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x-z\|_n}{1+\|x-z\|_n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|y-z\|_n}{1+\|y-z\|_n} \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Con esto podemos concluir que d es una métrica sobre E.

Veamos ahora que esta métrica genera la misma topología que el sistema de seminormas $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para ello observemos primero que $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ para todo $x,y,z \in E$. De esta igualdad es claro que $B_d(x,\epsilon) + z = B_d(x+z,\epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$. Para ver la igualdad de las topologías, basta comparar una base de entornos de cero, ya que por la propiedad anterior, en ambas topologías podemos obtener bases de entornos en otros puntos simplemente trasladando una base de entornos de cero.

Si denotamos por
$$B_n(0,\epsilon) = \{x \in E \mid \|x\|_n < \epsilon\},$$
las bolas centradas en cero relativas a la seminorma $\|\cdot\|_n$, obtenemos que
$$\mathcal{U}_E = \{B_n(0,\epsilon) \mid n \in \mathbb{N},\, \epsilon > 0\}$$
es una base de entornos de cero de la topología de E.

Por otro lado
$$\mathcal{U}' = \{B_d(0,\epsilon) \mid \epsilon > 0\}$$
es una base de entornos de la topología inducida por la métrica d.

Sea ahora $\epsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$ y $M \in \mathbb{N}$ de forma que $\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$. El conjunto
$$V = \bigcap_{n=1}^{N} B_n(0, \frac{\epsilon}{M})$$
es un entorno de cero de la topología de E, y si $x \in V$ resulta que
$$d(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\|x\|_n}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$
Por lo tanto $V \subset B_d(0,\epsilon)$, lo que prueba que la topología de E es más fina que la inducida por d.

Para ver la inclusión contraria, sea $0 < \epsilon < 1/2$, si $x \in B_d(0, \epsilon/2^n)$ resulta que
$$d(x,0) < \frac{\epsilon}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2^n}\frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n} < \frac{\epsilon}{2^n} \Rightarrow \frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n} < \epsilon \Rightarrow \|x\|_n < \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \leq 2\epsilon.$$
Esto prueba que $B_d(0,\epsilon/2^n) \subset B_n(0,2\epsilon)$, para $0 < \epsilon < 1/2$. Si $\epsilon \geq 1/2$, basta tener en cuenta que $B_d(0, \frac{1}{4}\frac{1}{2^n}) \subset B_n(0, 2\frac{1}{4}) \subset B_n(0,2\epsilon)$. Con lo que la topología inducida por d es más fina que la de E, probando la otra inclusión.

Con esto hemos visto que el espacio topológico $(E, \{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ coincide con el espacio (E,d). □

Teorema 1.28. *Supongamos que E es un espacio vectorial topológico Hausdorff y que es 1º Numerable. Entonces la topología en E se puede definir por una métrica d invariante por traslaciones.*

Demostración. Como E es Hausdorff, dado $a \neq b$, existen U, V abiertos tales que $a \in U$ y $b \in V$ con $U \cap V = \emptyset$, por lo tanto $b \notin U$. Es decir, si $a \neq b$, existe un entorno U de a con $b \notin U$. Como E es 1º Numerable, existe $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base de entornos de 0 numerable. Entonces $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{0\}$, ya que dado $a \neq 0$, existe un abierto U tal que $0 \in U$ y $a \notin U$, entonces existirá un entorno básico $V_{n_0} \subset U$, por lo tanto $a \notin V_{n_0}$, luego $a \notin \cap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Además, podemos añadir a esta familia de entornos un entorno V_0 adicional que sea equilibrado, esta nueva familia $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sigue siendo una base de entornos de 0 y verificando que $\cap_{n=0}^{\infty} V_n = \{0\}$.

Sea ahora, $W_1 = V_0$ y construimos una nueva familia $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de entornos de 0 equilibrados de forma que $W_{n+1} + W_{n+1} + W_{n+1} \subset V_n \cap W_n$. Es claro que $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sigue siendo una base de entornos de 0 con $\cap_{n=1}^{\infty} W_n = \{0\}$, pero además son todos equilibrados y verifican que

$$W_1 \supset W_2 \supset \cdots \supset W_n \supset W_{n+1} \supset \cdots$$

Definimos $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\gamma(0) =& 0,\\ \gamma(x) =& \frac{1}{2^k} \text{ si } x \in W_k \setminus W_{k+1},\\ \gamma(x) =& 1 \text{ si } x \notin W_1.\end{aligned}$$

Es claro que $\gamma(x) = 0$ si y solo si $x = 0$ y puesto que los entornos básicos son absorbentes, si $|\lambda| = 1$, $\gamma(\lambda x) = \gamma(x)$ y si $|\lambda| \le 1$, $\gamma(\lambda x) \le \gamma(x)$.

Definimos ahora,

$$d(x, y) = \text{ínf} \sum_{i=1}^{p} \gamma(t_i - t_{i-1})$$

donde el ínfimo se toma respecto de todas las secuencias finitas $(t_i)_{0\le i\le p}$ tal que $t_0 = x$ y $t_p = y$. Es obvio que $d(x, y) \le \gamma(x - y)$. Veamos que $\frac{1}{2}\gamma(x - y) \le d(x, y)$. Para ello, veamos por inducción sobre p que para cada par x, y y cada secuencia finita $(t_i)_{0\le i\le p}$ con $t_0 = x$ y $t_p = y$, se verifica

$$\frac{1}{2}\gamma(x - y) \le \sum_{i=1}^{p} \gamma(t_i - t_{i-1}). \tag{1.29}$$

Para $p = 1$ es directo, pues solo hay una secuencia así, $t_0 = x$, $t_1 = y$, y es obvio que $\frac{1}{2}\gamma(x - y) \le \gamma(x - y)$. Sea ahora $p > 1$, y supongamos la hipótesis de inducción, es decir, que si $q < p$, para cualquier secuencia finita de las que estamos considerando con q términos se verifica (1.29). Sea

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p} \gamma(t_i, t_{i-1}),$$

si $\alpha \le \frac{1}{2}$, se verifica (1.29) ya que $\gamma(x) \le 1\ \forall x \in E$. Supongamos entonces que $\alpha > \frac{1}{2}$. Existe q tal que $1 \le q \le p$ verificando

$$\sum_{i=1}^{q-1} \gamma(t_i - t_{i-1}) \le \frac{1}{2}\alpha \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{q} \gamma(t_i - t_{i-1}) > \frac{1}{2}\alpha.$$

Se debe verificar entonces que $\sum_{q+1}^{p} \gamma(t_i - t_{i-1}) \le \frac{1}{2}\alpha$. Ahora, como $q - 1 < p$ y $p - q < p$, aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que

$$\gamma(t_{q-1} - x) \le \alpha \quad \text{y} \quad \gamma(y - t_q) \le \alpha.$$

Por otro lado, es claro que $\gamma(t_q - t_{q-1}) \le \alpha$. Sea ahora $k \in \mathbb{N}$ el menor entero tal que $\frac{1}{2^k} \le \alpha < \frac{1}{2}$, entonces $k \ge 2$ y

$$t_{q-1} - x \in W_k,\ t_q - t_{q-1} \in W_k, y - t_q \in W_k.$$

Por lo tanto

$$y - x = (y - t_q) + (t_q - t_{q-1}) + (t_{q-1} - x) \in W_k + W_k + W_k \in W_{k-1}$$

y así $\gamma(y-x) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2\alpha$.

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{1}{2}\gamma(x-y) \leq d(x,y) \leq \gamma(x-y). \tag{1.30}$$

Concluyamos viendo que, en efecto, d es una métrica invariante por traslaciones, que induce la topología original de E.

La aplicación d es métrica:

1. Por (1.30), $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.

2. Como $\gamma(-x) = \gamma(x)\ \forall x \in E$, se deduce que $d(x,y) = d(y,x)\ \forall x, y \in E$.

3. Si $x, y, z \in E$, sea $\epsilon > 0$, existirán $(t_i)_{0 \leq i \leq p}$ con $t_0 = x$, $t_p = y$, y $(u_j)_{0 \leq j \leq q}$ con $u_0 = y$, $u_q = z$, tales que

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma(t_i - t_{i-1}) \leq d(x,y) + \epsilon \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{q} \gamma(u_j - u_{j-1}) \leq d(y,z) + \epsilon.$$

Entonces, combinando estas dos secuencias tendremos que

$$d(x,z) \leq \sum_{i=1}^{p} \gamma(t_i - t_{i-1}) + \sum_{j=1}^{q} \gamma(u_j - u_{j-1}) \leq d(x,y) + d(y,z) + 2\epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, esto implica la desigualdad triangular, es decir

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Para ver que esta métrica es invariante por traslaciones, basta notar que $\gamma(y-x) = \gamma((y+a)-(x+a))\ \forall x, y, a \in E$, lo que implica que $d(x+a, y+a) = d(x,y)\ \forall x, y, a \in E$. Debido a que es invariante por traslaciones, para ver que las topologías son iguales, basta ver que todo entorno de 0 de la topología inducida por d es entorno de 0 de la topología original y viceversa.

Sea $B(0,\epsilon) = \{x \in E \mid d(x,0) \leq \epsilon\}$, entonces es claro que $\{B(0,2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}\}$ es una base de entornos de 0. Por último, notando que $\gamma(x) \leq \frac{1}{2^n}$ si y solo si $x \in W_n$ y teniendo en cuenta (1.30) se puede ver que

$$B(0, 2^{-(n+1)}) \subset W_n \subset B(0, 2^{-n}).$$

Concluimos con esto que la topología inducida por la métrica d es la misma que la topología original de E. □

Teorema de la Aplicación Abierta. *Sean E y F espacios vectoriales topológicos metrizables secuencialmente completos y $f\colon E \to F$ lineal, continua y sobreyectiva. Entonces f es una Aplicación Abierta.*

Demostración. Los espacios metrizables son siempre Hausdorff y 1º Numerables, por lo tanto empleando el Teorema 1.28 podemos dotar a E y F de métricas invariantes por traslaciones equivalentes a sus métricas originales. Como F es métrico secuencialmente completo, es un espacio de II-categoría, por lo tanto empleando el Lema 1.23 deducimos que $\forall\epsilon > 0$, $\overline{f(B(0,\epsilon))}$ es un entorno de 0 en F (donde las bolas las consideramos en la métrica invariante por traslaciones), por lo tanto $\exists\delta > 0$ tal que $B(0,\delta) \subset \overline{f(B(0,\epsilon))}$. Mediante traslaciones resulta que $\forall x \in E$, $B(f(x),\delta) \subset \overline{f(B(x,\epsilon))}$, verificando la condición del Lema 1.24 ya que E es secuencialmente completo. Por este Lema, $\forall a > \epsilon$, $f(B(0,a))$ es un entorno de 0 en F. Como ϵ es arbitrario, esto implica que todo entorno de 0 de E es entorno de 0 en F. Si ahora U es entorno de $a \in E$, entonces $U - a$ es entorno de 0, por lo tanto $f(U - a) = f(U) - f(a)$ es entorno de 0 en F, concluyendo que $f(U)$ es entorno de $f(a)$ en F, a partir de esto se deduce que la aplicación f es abierta. □

Teorema del Grafo Cerrado. *Sean E y F espacios vectoriales topológicos metrizables y secuencialmente completos, y $f\colon E \to F$ lineal, y supongamos que el grafo de f,*

$$G = \{(x,y) \in E \times F : y = f(x)\},$$

es cerrado, entonces f es continua.

Demostración. Por la suposición de que G es un subespacio cerrado de $E \times F$, se deduce que G es metrizable y secuencialmente completo. La proyección $\pi_1\colon (x,y) \mapsto x$ de G en E es continua y biyectiva, por lo que podemos aplicar el Teorema de la Aplicación Abierta para concluir que esta proyección es un homeomorfismo. Si $\pi_2\colon (x,y) \mapsto y$ es la otra proyección (también continua), resulta que $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas. □

Los espacios de Fréchet son metrizables y secuencialmente completos, por lo tanto es inmediato el siguiente Corolario.

Corolario 1.31. *Si E y F son espacios de Fréchet, entonces los espacios son metrizables y secuencialmente completos, por lo tanto*

1. *Si $f\colon E \to F$ es lineal, continua y sobreyectiva, entonces f es abierta.*

2. *Si $f\colon E \to F$ es lineal y el grafo de f es cerrado, entonces f es continua.*

Nota 1.32. Los Teoremas de la Aplicación Abierta y del Grafo Cerrado se verifican sobre espacios localmente convexos con condiciones más débiles que las aquí expuestas, pero para el objetivo de este trabajo es suficiente con esto. ♢

1.3. Topología débil

En los espacios normados es sencillo darle al espacio dual una estructura de espacio normado, pero en los espacios localmente convexos no es tan claro como hacer algo similar. En esta sección mostraremos cuál es la topología más pequeña que podemos asociar al espacio dual para que sea localmente convexo y haga continuas a las evaluaciones. En el espacio dual se pueden asociar otras topologías localmente convexas, pero no las emplearemos en este trabajo. También veremos el Teorema de Alaoglu-Bourbaki el cual nos dice que la polar de un entorno de cero es un conjunto compacto en la topología débil del espacio dual. La referencia principal para esta sección es el texto de Meise y Vogt [14, Parte IV, Capítulo 23], pero también se puede ver, por ejemplo en el texto de Rudin [19, Parte I, Capítulo 3].

Definición 1.33. Dado F subespacio vectorial de E^* diremos que *separa puntos* de E si dados $x_1 \neq x_2$ existe $y \in F$ de modo que $y(x_1) \neq y(x_2)$.

Un *sistema dual* es un par (E, F) de espacios vectoriales, donde F es un subespacio vectorial de E^* que separa puntos de E.

Nota 1.34.

1. F separa puntos de E si y solo si $x \in E$ y $y(x) = 0$ para todo $y \in F$ implica que $x = 0$.

2. Por el Teorema de Hahn-Banach, (E, E') es un sistema dual para cualquier espacio localmente convexo E.

3. Si (E, F) es un sistema dual, podemos interpretar (F, E) como un sistema dual, donde identificamos E con $J(E)$, donde $J\colon E \to F^*$, $J(x)\colon y \mapsto y(x)$. Por ser (E, F) un sistema dual, J es lineal e inyectiva, y además $J(E)$ separa puntos de F.

$\diamondsuit$

Definición 1.35. Sea (E, F) un sistema dual y $\mathcal{E}(F)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de F. La familia de seminormas $(p_M)_{M\in\mathcal{E}(F)}$,

$$p_M\colon x \mapsto \sup_{y\in M} |y(x)|\,,\ x \in E,$$

verifica (S1.) y (S2.), por lo tanto es un sistema fundamental de seminormas, e induce una topología localmente convexa en E. Esta topología se llama la *topología débil en E correspondiente a F* y se denota por $\sigma(E, F)$.

De la misma forma la topología débil $\sigma(F, E)$ en F viene inducida por las seminormas

$$(p_N)_{N\in\mathcal{E}(E)}, p_N\colon y \mapsto \sup_{x\in N} |y(x)|\,,\ y \in F.$$

Lema 1.36. *Para todo sistema dual (E, F), la topología débil $\sigma(E, F)$ es la topología localmente convexa menos fina en E tal que $E' = F$. Además esta es la menor topología que hace continuas las aplicaciones de F.*

Demostración. Para cada $y \in F$, tenemos que $|y| \leq p_{\{y\}}$, lo que implica, por la caracterización de la continuidad en espacios localmente convexos, que $y \in (E, \sigma(E, F))'$, y por lo tanto $F \subset (E, \sigma(E, F))'$.

Para ver la otra inclusión, sea $\eta \in (E, \sigma(E, F))'$, de nuevo, por la caracterización de la continuidad, existe $C > 0$ y $M = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset F$ con $|\eta| \leq Cp_M$. Definimos la aplicación lineal $A\colon E \to \mathbb{K}^n$ por $Ax = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$, de donde es inmediato que $\ker A \subset \ker \eta$. Por lo tanto η induce una aplicación lineal $\tilde{\eta}$ sobre $\mathrm{Im}(A) \cong E/\ker(A)$ tal que $\eta = \tilde{\eta} \circ A$. Sea ahora η' una extensión lineal de $\tilde{eta}$ sobre $\mathbb{K}^n$, entonces $\eta = \eta' \circ A$. Se sigue por lo tanto que η es una combinación lineal de $y_1, \ldots, y_n$ y por lo tanto está en F.

Si ahora τ es una topología sobre E (E, F)-admisible, se cumple que para $M \in \mathcal{E}(F)$, la seminorma p_M es τ-continua, por lo tanto $\sigma(E, F)$ es menos fina que τ. $\square$

Definición 1.37. Un subconjunto B de un espacio vectorial topológico E se dice *acotado*, si para cada entorno de cero U existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon B \subset U$.

Propiedades 1.38.

1. Sea E un espacio localmente convexo y $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema fundamental de seminormas. Entonces decir que $B \subset E$ es equivalente a que $\sup_{x\in B}\|x\|_\alpha < \infty$ para todo $\alpha \in A$, ya que $B \subset \overline{B_\alpha(0,1)} = \overline{\{x \in E \mid \|x\|_\alpha < 1\}}$ equivale a que $\sup_{x\in B}\|x\|_\alpha \leq 1$.

2. Sea E un espacio normado, $B \subset E$ es acotado si y solo si $\sup_{x\in B}\|x\| < \infty$.

3. La topología de un espacio localmente convexo E viene inducida por una norma si y solo si E tiene un entorno de cero acotado.

   Demostración. Si la topología de E viene inducida por una norma $\|\cdot\|$, entonces $B = \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$ es un entorno de cero y es un conjunto acotado.

   Recíprocamente, sea U un entorno de cero acotado, entonces existe $\alpha \in A$ y $\epsilon > 0$ con $\overline{B}_\alpha(0,\epsilon) \subset U$, por lo tanto también será acotado. Sea ahora $\beta \in A$, entonces $\sup_{x\in\overline{B}_\alpha(0,\epsilon)}\|x\|_\beta = C_\beta < \infty$, es decir, si $\overline{B}_\alpha(0,\epsilon) \subset \overline{B}_\beta(0,C_\beta)$, esto nos dice que las bolas en la seminorma $\|\cdot\|_\alpha$ forman una base de entornos de E, por lo tanto $E = (E, \|\cdot\|_\alpha)$.

   Además esta seminorma es de hecho una norma, pues si tomamos $x \in E$ con $\|x\|_\alpha = 0$, entonces $x \in B_\beta(0,\delta)$ para todo $\beta \in A$ y para todo $\delta > 0$, es decir, $\|x\|_\beta = 0$ para todo $\beta \in A$, pero como es un sistema fundamental de seminormas, verifica (S1.), lo que implica que $x = 0$. □

◊

Teorema 1.39 (Alaoglu-Bourbaki)**.** *Para todo entorno de cero U en un espacio localmente convexo E, su polar U° es absolutamente convexo y $\sigma(E',E)$-compacto.*

Demostración. El conjunto $D = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq 1\}$ es compacto. Por el Teorema de Tychonoff, el producto D^U también es compacto. Definimos

$$J\colon U^\circ \to D^U,\ J(y) = (y(x))_{x\in U};$$

entonces J es inyectiva y como U es absorbente, $(p_M)_{M\in\mathcal{E}(U)}$ es un sistema fundamental de seminormas para $\sigma(E',E)$. Para cada $M \in \mathcal{E}(U)$, cada $\epsilon > 0$ y cada $y \in U^\circ$, tenemos que:

$$J(U^\circ) \cap \left\{\eta \in D^U \mid |\eta(x) - y(x)| < \epsilon,\ \forall x \in M\right\} = J(\{z \in U^\circ \mid p_M(z-y) < \epsilon\}).$$

Por lo tanto $J\colon (U^\circ, \sigma(E',E)|_{U^\circ}) \to J(U^\circ)$ es un homeomorfismo. Ya que D^U es compacto, basta ver que $J(U^\circ)$ es cerrado para concluir que es compacto, y por lo tanto también U° en la topología $\sigma(E',E)$. Para ello, sea $y \in D^U$ tal que $y \in J(U^\circ)$, entonces existe $z \in U^\circ$ tal que $y(x) = J(z)(x) = z(x)$, y por lo tanto se puede extender a una aplicación lineal en E, y viceversa, si $y \in D^U$ es una aplicación lineal en E, es claro que $y \in J(U^\circ)$.

Por otro lado sea y una aplicación tal que

$$\lambda y(u) + \mu y(v) + \nu y(w) = 0\ \forall(\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{K}^3, (u,v,w) \in U^3 \text{ con } \lambda u + \mu v + \nu w = 0. \quad (1.40)$$

Si $x \in U$, como U es absorbente, existen $u \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ con $nu = x$, definimos $y(x) = ny(u)$. Está bien definida la extensión, pues si existiese otro $v \in U$ y $m \in \mathbb{N}$ con $mv = x$, entonces $nu - mv = 0$, y aplicando la propiedad anterior, $ny(u) - my(v) = 0$, es decir, $ny(u) = my(v)$.

Sean ahora $a, b, c \in E$ y $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$, tales que $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$, entonces por ser U absorbente, existen $u, v, w \in U$ y $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ de forma que $a = n_1 u, b = n_2 v, c = n_3 w$ y $\lambda n_1 u + \mu n_2 v + \nu n_3 w = 0$, y por lo tanto se verifica que

$$\lambda n_1 y(u) + \mu n_2 y(v) + \nu n_3 y(w) = \lambda y(a) + \mu y(b) + \nu y(c) = 0.$$

Por lo tanto la propiedad anterior es válida no solo para los elementos de U sino también para los de E. De esa propiedad se deduce la linealidad, ya que si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in E$, entonces

$$(\lambda x) + (-\lambda)x = 0 \Rightarrow y(\lambda x) + (-\lambda)y(x) = 0 \Rightarrow y(\lambda x) = \lambda y(x).$$

Y si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $x, z \in E$, entonces

$$\begin{aligned}(\lambda x + \mu z) + (-\lambda)x + (-\mu)z = 0 &\Rightarrow y(\lambda x + \mu z) + (-\lambda)y(x) + (-\mu)y(z) = 0\\ &\Rightarrow y(\lambda x + \mu z) = \lambda y(x) + \mu y(z).\end{aligned}$$

De este comentario se deduce que

$$J(U^\circ) = \left\{ y \in D^U \mid y \text{ verifica } (1.40) \right\}.$$

Como la aplicación $y \mapsto y(x)$ es continua en D^U para todo $x \in U$, si llamamos

$$f_{u,v,w}^{\lambda,\mu,\nu}(y) = \lambda y(u) + \mu y(v) + \nu y(w),$$

estas aplicaciones son continuas para todo $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$ y $u, v, w \in U$, y se verifica que

$$J(U^\circ) = \bigcap_{\lambda u + \mu v + \nu w = 0} (f_{u,v,w}^{\lambda,\mu,\nu})^{-1}(0),$$

concluimos que $J(U^\circ)$ es cerrado, y por lo tanto compacto, concluyendo que U° es $\sigma(E', E)$-compacto, como queríamos ver. $\square$

1.4. Teorema de Krein-Smulian

En esta sección se demuestra el Teorema de Krein-Smulian, el cual nos permite caracterizar los conjuntos convexos cerrados en la topología débil del espacio dual. Este resultado se ha sacado del texto de Conway [9, Capítulo V, Sección 12] y también aparece en el texto de Horváth [11, Capítulo 3, Sección 10].

Teorema 1.41. *Si E es un espacio vectorial topológico y G es un abierto convexo no vacío de E que no contenga al origen, entonces existe un subespacio cerrado M tal que $M \cap G = \emptyset$.*

Demostración. Si E es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, tomemos cualquier $x_0 \in G$ y sea $H = x_0 - G$, entonces H es un abierto convexo que contiene al 0. Entonces

$$\|x\|_U = \text{ínf} \{t > 0 \mid x \in tG\}$$

es un funcional sublineal continuo no negativo tal que $H = \{x \mid \|x\|_U < 1\}$ por la Proposición 1.8. Como $x_0 \notin H$, $q(x_0) \geq 1$.

Sea $Y = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ y definamos $f_0 \colon Y \to \mathbb{R}$ por $f_0(\alpha x_0) = \alpha q(x_0)$. Si $\alpha \geq 0$, entonces $f_0(\alpha x_0) = \alpha q(x_0) = q(\alpha x_0)$; si $\alpha < 0$, entonces $f_0(\alpha x_0) = \alpha q(x_0) \leq \alpha < 0 \leq q(\alpha x_0)$. Es decir, $f_0 \leq q$ en Y. Aplicamos el Teorema de Hahn-Banach para obtener $f \colon E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo tal que $f|_Y = f_0$ y $f \leq q$ en E. Sea $M = \ker f$, un subespacio cerrado de E, por la continuidad de f.

Ahora bien, si $x \in G$, entonces $x_0 - x \in H$ y por lo tanto

$$f(x_0) - f(x) = f(x_0 - x) \leq q(x_0 - x) < 1.$$

Por lo tanto $f(x) > f(x_0) - 1 = q(x_0) - 1 \geq 0$ para todo $x \in G$. Por lo tanto $M \cap G = \emptyset$.

Si suponemos que E es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, usando que E es también un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y el caso anterior, existe un funcional continuo $\mathbb{R}$-lineal $f \colon E \to \mathbb{R}$ con $G \cap \ker f = \emptyset$. Si $F(x) = f(x) - if(ix)$, entonces F es un funcional continuo $\mathbb{C}$-lineal y $f = \operatorname{Re}(F)$. Por lo tanto $F(x) = 0$ si y solo si $f(x) = f(ix) = 0$. Llamamos $M = \ker F$, es un subespacio cerrado, $M \subset \ker f$, por lo tanto $M \cap G \subset \ker f \cap G = \emptyset$. $\square$

Teorema 1.42. *Si E es un espacio vectorial topológico real y A y B son conjuntos convexos disjuntos con A abierto, entonces existe un funcional lineal continuo $f \colon E \to \mathbb{R}$ y un escalar real α tal que $f(a) < \alpha$ para todo $a \in A$ y $f(b) \geq \alpha$ para todo $b \in B$. Si B es también abierto, entonces además $f(b) > \alpha$.*

Demostración. Sea $G = A - B$, este conjunto es convexo, y como $G = \bigcup_{b \in B} A - b$, G es abierto. Además, como $A \cap B = \emptyset$, $0 \notin G$. Por el Teorema 1.41, existe un subespacio cerrado M en E tal que $M \cap G = \emptyset$ y por su demostración, existe $f \colon E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal con $M = \ker f$. Ahora bien, $f(G)$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$ (por serlo G) y $0 \notin f(G)$. Por lo tanto, o bien $f(x) > 0$ para todo $x \in G$ o bien $f(x) < 0$ para todo $x \in G$; supongamos que $f(x) < 0$ para todo $x \in G$. Por lo tanto, si $a \in A$ y $b \in B$, $0 > f(a - b) = f(a) - f(b)$, es decir, $f(b) > f(a)$. Por lo tanto existe un número real α tal que

$$\sup\{f(a) \mid a \in A\} \leq \alpha \leq \inf\{f(b) \mid b \in B\}.$$

Y como A es abierto y convexo, $f(A)$ será un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Luego $f(A)$ es un intervalo abierto contenido en $(-\infty, \alpha)$, y $f(B)$ un intervalo contenido en $[\alpha, \infty)$, es decir, $f(a) < \alpha$ $\forall a \in A$ $f(b) \geq \alpha$ $\forall b \in B$. Si además B fuese abierto, $f(B)$ debería ser también un intervalo abierto, por lo que $f(b) > \alpha$ $\forall b \in B$. $\square$

Lema 1.43. *Si E es un espacio de Banach, $r > 0$, y $\mathcal{E}(\overline{B(0, \frac{1}{r})})$ es la familia de subconjuntos finitos de $\overline{B(0, \frac{1}{r})} = \left\{x \in E \mid \|x\| \leq \frac{1}{r}\right\}$, entonces*

$$\bigcap \left\{F^\circ \mid F \in \mathcal{E}\left(\overline{B\left(0, \frac{1}{r}\right)}\right)\right\} = \{\varphi \in E' \mid \|\varphi\| \leq r\}.$$

Demostración. Primero, es claro que

$$E = \bigcap \left\{F^\circ \mid F \in \mathcal{E}\left(\overline{B\left(0, \frac{1}{r}\right)}\right)\right\} = \left\{\varphi \in E' \mid |\varphi(x)| \leq 1 \ \forall x \in \overline{B\left(0, \frac{1}{r}\right)}\right\}.$$

Si $\varphi \in \overline{B'(0,r)} := \overline{\{\varphi \in E' \mid \|\varphi\| < r\}} = \{\varphi \in E' \mid \|\varphi\| \leq r\}$, entonces,

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\| \leq r\frac{1}{r} = 1, \quad x \in \overline{B\left(0, \frac{1}{r}\right)},$$

por lo tanto $\overline{B'(0,r)} \subset E$. Para la inclusión contraria, si $\varphi \notin \overline{B'(0,r)}$, como

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| > r,$$

existirá $x \in \overline{B(0,1)}$ tal que $|\varphi(x)| > r$, y por lo tanto, $\frac{1}{r}x \in \overline{B(0,\frac{1}{r})}$ pero $\left|\varphi(\frac{1}{r}x)\right| > 1$, por lo tanto $\varphi \notin E$. □

Lema 1.44. *Si E es un espacio de Banach y A es un subconjunto convexo de E' tal que $A \cap B'(0,r)$ es $\sigma(E', E)$-cerrado para todo $r > 0$, y además $A \cap B(0,1) = \emptyset$, entonces existe $x \in E$ tal que*

$$Re\,(\varphi(x)) \geq 1, \quad \forall \varphi \in A.$$

Demostración. Veamos que existe una familia de subconjuntos finitos $F_0, F_1, \ldots$ de E de forma que

$$\begin{cases} (i) & nF_n \subset \overline{B(0,1)}; \\ (ii) & \overline{B'(0,n)} \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} F_k^\circ \cap A = \emptyset. \end{cases} \tag{1.45}$$

Lo vamos a hacer de forma inductiva. Comenzamos con $F_0 = \{0\}$ que claramente verifica lo pedido. Supongamos ahora elegidos conjuntos $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ de la forma deseada, y sea $Q = \overline{B'(0,n+1)} \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} F_k^\circ \cap A$. Notar que Q es $\sigma(E', E)$-compacto debido a que por el Teorema 1.39 de Alaoglu-Bourbaki $\overline{B'(0,n)}$ es $\sigma(E', E)$-compacto pues

$$\begin{aligned} \overline{B'(0,n)} &= \{y \in E' \mid \|y\| \leq n\} = \left\{y \in E' \mid |y(x)| \leq n, x \in \overline{B(0,1)}\right\} \\ &= \left\{y \in E' \mid |y(x)| \leq 1, x \in \overline{B(0,1/n)}\right\} = \left(\overline{B(0,1/n)}\right)^\circ. \end{aligned}$$

Por otro lado si $B \subset E$, su polar B° es $\sigma(E', E)$ cerrada, ya que

$$B^\circ = \{y \in E' \mid |y(x)| \leq 1, x \in B\} = \bigcap_{x \in B} p_{\{x\}}^{-1}([-1,1]),$$

y las seminormas $p_{\{x\}}$ son continuas en $\sigma(E', E)$. Y por hipótesis teníamos que $\overline{B'(0,n)} \cap A$ es $\sigma(E', E)$-cerrado. Por tanto Q es un conjunto $\sigma(E', E)$ cerrado contenido en uno que es $\sigma(E', E)$-compacto, por lo tanto Q es $\sigma(E', E)$-compacto.

Ahora, si $Q \cap F^\circ \neq \emptyset$ para cada subconjunto finito F de $B(0; \frac{1}{n})$, entonces

$$\emptyset \neq Q \cap \bigcap \left\{F^\circ \mid F \text{ es un subconjunto finito de } B(0; \frac{1}{n})\right\} = Q \cap B'(0,n)$$

donde hemos aplicado el Lema 1.43. Pero esto contradice la condición (ii). Por lo tanto existe un subconjunto finito F_n de $\overline{B(0,\frac{1}{n})}$ tal que $Q \cap F_n^\circ = \emptyset$. De esta forma podemos obtener la familia $F_0, F_1, \ldots$ verificando (1.45).

Si $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ verifica (1.45), entonces $A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{\circ} = \emptyset$, pues si x perteneciese a este conjunto, debería también pertenecer a alguno de los conjuntos de la condición (ii) de (1.45). Podemos ordenar los elementos de $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ en una sucesión y denotarla por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Notar que la condición (i) de (1.45) implica que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Por lo tanto si $\varphi \in E'$, la sucesión $\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, es decir $\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Definimos $T\colon E' \to c_0$ mediante $T(\varphi) = \{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Es claro que la aplicación T es lineal, por lo tanto $T(A)$ es un subconjunto convexo de c_0. También, por la construcción de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, para cada $\varphi \in A$, $\|T(\varphi)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(x_n)| > 1$. Por lo tanto, llamando $D = \{y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \mid \|y\| \leq 1\}$, $T(A) \cap D = \emptyset$. Podemos ahora aplicar el Teorema 1.42 a $T(A)$ y $\overset{\circ}{D}$, y encontrar $f \in l^1 = c_0'$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Re}(f(y)) < \alpha \leq \operatorname{Re}(f(T(\varphi)))$ para cada $y \in \overset{\circ}{D}$ y $\varphi \in A$. Es decir

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} y(n) f(n)\right) < \alpha \leq \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) f(n)\right). \tag{1.46}$$

Sustituyendo f por $f/\|f\|$ y α por $\alpha/\|f\|$, podemos suponer que se verifican las desigualdades anteriores con $\|f\| = 1$. Si $y \in c_0$ con $\|y\| < 1$ (es decir, $y \in \overset{\circ}{D}$), sea $\mu \in \mathbb{F}$ con $|\mu| = 1$ y $|f(\mu y)| = |f(y)|$. Aplicando (1.46) y tomando el supremo sobre todos los $y \in \overset{\circ}{D}$ resulta que $\|f\| = 1 \leq \operatorname{Re}(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) f(n))$ para todo $\varphi \in A$. Pero $f \in l^1$, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n) x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \sup_n \|x_n\| = \|f\| \sup_n \|x_n\|$, y como E es de Banach, tenemos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) x_n \in E$, y $1 \leq \operatorname{Re}(\varphi(x))$ para todo $\varphi \in A$. □

Teorema 1.47 (Teorema de Krein-Smulian)**.** *Sea E un espacio de Banach y A un subconjunto convexo de E' tal que $A \cap \overline{B'(0,r)}$ es $\sigma(E', E)$-cerrado para todo $r > 0$, entonces A es $\sigma(E', E)$-cerrado.*

Demostración. El conjunto A es cerrado en la topología inducida por la norma, ya que cada sucesión convergente en la norma de A es acotada, por lo tanto contenida en algún disco $\overline{B'(0,r)}$, y $\overline{B'(0,r)} \cap A$ es $\sigma(E', E)$-cerrado, y por lo tanto también es cerrado en la topología de la norma.

Por lo tanto, si $\varphi_0 \notin A$, existe $r > 0$ tal que $A \cap \overline{B'(\varphi_0, r)} = \emptyset$. Pero esto implica que $\overline{B'(0,1)} \cap \frac{1}{r}(A - \varphi_0) = \emptyset$. También $\frac{1}{r}(A - \varphi_0)$ es convexo por serlo A y además

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(A - \varphi_0) \cap \overline{B'(0,R)} &= (A - \varphi_0) \cap \overline{B'(0,rR)} = A \cap \overline{B'(\varphi_0, rR)} \\ &= (A \cap \overline{B'(0, \|\varphi_0\| + rR)}) \cap \overline{B'(\varphi_0, rR)} \end{aligned}$$

es $\sigma(E', E)$-cerrado para todos $R > 0$, ya que por $\overline{B'(\varphi_0, rR)}$ lo es, y $A \cap \overline{B'(0, \|\varphi_0\| + rR)}$ lo es por hipótesis. Por lo tanto se verifican todas las condiciones del Lema 1.44. Entonces existe $x \in E$ tal que $|\varphi(x)| \geq \operatorname{Re}(\varphi(x)) \geq 1$ para todo $\varphi \in \frac{1}{r}(A - \varphi_0)$. En particular, $0 \notin \overline{\frac{1}{r}(A - \varphi_0)}$, y por lo tanto $\varphi_0 \notin \overline{A}$. □

Corolario 1.48. *Si E es un espacio de Banach y Y es un subespacio lineal en E', entonces Y es débilmente cerrado si y solo si $Y \cap \overline{B'(0,1)}$ es débilmente cerrado.*

1.5. La topología compacto-abierta

En toda la sección vamos a fijar un abierto conexo del plano complejo, G, denotaremos por $\mathcal{C}(G)$ el álgebra de las funciones continuas en G y por $H(G)$ el de las funciones holomorfas en G. En cualquier abierto G de $\mathbb{C}$, podemos encontrar una sucesión de conjuntos compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $K_n \subset G$ tales que $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ y $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = G$, en efecto, basta considerar

$$K_n = \overline{B(0,n)} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, G^c) \geq \frac{1}{n}\} \subset G,$$

estos conjuntos son compactos por ser cerrados y acotados, además

$$K_n \subset B(0, n+1) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, G^c) > \frac{1}{n+1}\} \subset \overset{\circ}{K}_{n+1},$$

y de la construcción es claro que $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = G$. Cualquier sucesión de compactos que verifique las condiciones de antes se llama una *exhaución* de G. Y si tenemos una exhaución $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de G, dado $K \subset G$, como $\{\overset{\circ}{K}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto de G y $\overset{\circ}{K}_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $K \subset \overset{\circ}{K}_{n_0} \subset K_{n_0}$.

Por otro lado, dada una exhaución $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de G, y $f \in \mathcal{C}(G)$, si denotamos

$$\|f\|_K = \sup\{|f(z)| \mid z \in K\}, \quad K \subset G \text{ compacto},$$

es sencillo ver que $\{\|\cdot\|_{K_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ forma un sistema fundamental de seminormas sobre $\mathcal{C}$, ya que verifican las propiedades (S1.) y (S2.) del Teorema 1.13. Por lo tanto $(\mathcal{C}(G), \{\|\cdot\|_{K_n}\}_{n\in\mathbb{N}})$ es un espacio localmente convexo con un sistema fundamental de seminormas numerable, por lo tanto podemos aplicar la Proposición 1.27 para concluir que la distancia

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1 + \|f-g\|_{K_n}},$$

induce la misma topología que el sistema de seminormas. Por otro lado, si tenemos otra exhaución $\{K'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, debido a que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ con $K'_n \subset K_{m_n}$, y viceversa, dado $m \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $n_m \in \mathbb{N}$ con $K_m \subset K'_{n_m}$, tenemos que $\|\cdot\|_{K'_n} \leq \|\cdot\|_{K_{m_n}}$ y $\|\cdot\|_{K_m} \leq \|\cdot\|_{K'_{n_m}}$, de modo que los sistemas de seminormas son equivalentes, induciendo la misma topología. Y por lo tanto, también serán equivalentes las métricas inducidas. Denotaremos la topología inducida por cualquiera de estas métricas (o sistemas de seminormas) por τ_{co}.

Nota 1.49. La topología compacto-abierta se define en general sobre el espacio de funciones continuas entre dos espacios topológicos, y de forma diferente, pero en este trabajo no nos interesa un marco tan general, esta es la razón por la que la introducimos de esta manera. $\diamondsuit$

El siguiente resultado muestra que la convergencia de sucesiones en este espacio topológico equivale a la convergencia uniforme de las funciones sobre conjuntos compactos de G.

Proposición 1.50. *Dada una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(G)$, se tiene que converge a una función f en la topología τ_{co} si y solo si la sucesión converge uniformemente a f sobre conjuntos compactos de G.*

Demostración. Durante toda la prueba vamos a suponer que $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una exhaución de G y d su métrica asociada.

Veamos la implicación directa, si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en τ_{co}, dado $\epsilon > 0$ y un conjunto compacto $K \subset G$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $K \subset K_{n_0}$ y $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq j_0$, entonces $d(f, f_j) \leq \frac{\epsilon}{2^{n_0}}$. Entonces,

$$\frac{1}{2^{n_0}} \frac{\|f - f_j\|_{K_{n_0}}}{1 + \|f - f_j\|_{K_{n_0}}} \leq d(f, f_j) \leq \frac{\epsilon}{2^{n_0}} \Rightarrow \frac{\|f - f_j\|_{K_{n_0}}}{1 + \|f - f_j\|_{K_{n_0}}} \leq \epsilon,$$

y por lo tanto

$$\|f - f_j\|_K \leq \|f - f_j\|_{K_{n_0}} \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0,$$

es decir, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente sobre compactos.

Para ver el recíproco, sea $\epsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(f, f_j) &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - f_j\|_{K_n}}{1 + \|f - f_j\|_{K_n}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - f_j\|_{K_n}}{1 + \|f - f_j\|_{K_n}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - f_j\|_{K_n}}{1 + \|f - f_j\|_{K_n}} + \frac{\epsilon}{2} \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - f_j\|_{K_m}}{1 + \|f - f_j\|_{K_m}} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{\|f - f_j\|_{K_m}}{1 + \|f - f_j\|_{K_m}} + \frac{\epsilon}{2} \leq \|f - f_j\|_{K_m} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre K_m, existirá $j_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $j \geq j_0$, entonces $\|f - f_j\|_{K_M} < \frac{\epsilon}{2}$, y por lo tanto, si $j \geq j_0$, $d(f, f_j) < \epsilon$, es decir $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la métrica d. □

Caracterizada la convergencia de sucesiones dentro de $(\mathcal{C}(G), \tau_{co})$, veamos ahora que no solo es un espacio métrico y localmente convexo, sino que también es un espacio de Fréchet.

Proposición 1.51. *El espacio $(\mathcal{C}(G), \tau_{co})$ es un espacio métrico secuencialmente completo. Y por lo tanto es un espacio de Fréchet.*

Demostración. Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una exhaución de G y d su métrica asociada, sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(G)$ una sucesión de Cauchy, y sea $K \subset G$ un compacto, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $K \subset K_{n_0}$. Sea $1 > \epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n_1, n_2 \geq N$, entonces $d(f_{n_1}, f_{n_2}) < \frac{\epsilon}{2^{n_0}}$, entonces $\frac{1}{2^{n_0}} \frac{\|f_{n_1} - f_{n_2}\|_{K_{n_0}}}{1 + \|f_{n_1} - f_{n_2}\|_{K_{n_0}}} \leq \frac{\epsilon}{2^{n_0}}$, y por lo tanto $\|f_{n_1} - f_{n_2}\|_K \leq \|f_{n_1} - f_{n_2}\|_{K_{n_0}} < \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$, por lo tanto $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es de Cauchy según la seminorma $\|\cdot\|_K$, lo que implica que para cada $x \in G$, $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$, por lo tanto existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Definimos así $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Esta función así definida es continua, ya que, si $x, y \in G$, existe $m \in \mathbb{N}$ tales que $|f(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ y $|f(y) - f_m(y)| < \frac{\epsilon}{3}$, por otro lado, como f_m es continua, existe $\delta > 0$ tal que $|f_m(x) - f_m(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ cuando $|x - y| < \delta$. Por lo tanto, para dicho δ,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| + |f(y) - f_m(y)| < \epsilon,$$

es decir, f es continua. Ahora, habíamos visto que dado $0 < \epsilon < 1$ y $K \subset G$ compacto, existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que si $n_1, n_2 \geq N$ se verifica que

$$\|f_{n_1} - f_{n_2}\|_K < \frac{\epsilon}{1-\epsilon}.$$

Entonces

$$|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| < \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \quad \forall x \in K,$$

si ahora tomamos límite cuando $n_1 \to \infty$, resulta que si $n_2 \geq N$, entonces

$$|f(x) - f_{n_2}(x)| \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \Rightarrow \|f - f_{n_2}\|_K \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon},$$

lo que prueba que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre K. Como K era un compacto arbitrario, concluimos que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la métrica d, por lo tanto $(\mathcal{C}(G), \tau_{co})$ es un espacio métrico secuencialmente completo. $\square$

En las secciones que siguen nosotros emplearemos el espacio $(H(G), \tau_{co})$, por lo tanto nos interesará el siguiente resultado.

Corolario 1.52. *El espacio $(H(G), \tau_{co})$ es un espacio métrico secuencialmente completo. Por lo tanto es un espacio de Fréchet.*

Demostración. Para ver esto basta notar que $H(G)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}(G)$, lo cual se deduce de que si una sucesión de funciones holormorfas que converge uniformemente sobre compactos a otra función f, entonces la función f también es holomorfa por el Teorema de Weierstrass. $\square$

Cronología del Análisis Funcional

El siguiente eje cronológico se ha realizado a partir del artículo de Ciesielski y Moslehian [7].

Cuadro 1.1: Cronología de resultados importantes de Análisis Funcional

1912	Helly demuestra el Teorema de Hahn-Banach en el espacio de funciones reales continuas sobre un intervalo compacto y lo publica en su artículo «*Über lineare operationenen*».
1927	Hans Hahn demuestra el Teorema de Hahn-Banach en el caso de espacios de Banach en su artículo «*Über lineare Gleichungssyteme in linearen Räumen*».
1927	Banach y Steinhaus demuestran el Teorema de Banach-Stainhaus en su artículo «*Sur le principle de la condensation de singularités*»..
1929	Teorema de Hahn-Banach en el caso real probado por Banach en su artículo «*Sur les fonctionelles linéaires*».
1929	Banach prueba una versión del Teorema de Alaoglu-Bourbaki para espacios de Banach en su artículo «*Sur les fonctionelles linéaires II*».
1938	Soukhomlinov y Sobczyk demuestran independientemente la versión compleja del Teorema de Hahn-Banach, publicado respectivamente en «*Über Fortsetzung von linearen Funktionalen in linearen komplexen Räumen und linearen Quaternionenräumen*» y en «*Extensions of functionals on complex linear spaces*».

Capítulo 2

Preliminares de Análisis Complejo

En este capítulo vamos a mostrar varios resultados sobre funciones de variable compleja. En la Sección 2.1 veremos el Teorema de Interpolación de Weierstrass, el cual demostraremos empleando productos infinitos. Este resultado nos permite construir funciones holomorfas sobre abiertos conexos que se anulen en un conjunto de ceros aislados arbitrariamente prefijado. La Sección 2.2 trata de los Teoremas de Montel y de Vitali, con los cuales damos una caracterización de las sucesiones de funciones holomorfas localmente acotadas que convergen uniformemente sobre compactos. En la Sección 2.3 aparece el Teorema de Runge el cual nos permite aproximar funciones holomorfas a partir de funciones racionales con los polos en ciertos conjuntos. En la Sección 2.4 el objetivo es llegar a ver que una función de variable compleja cuyo conjunto de llegada es un espacio de Banach es holomorfa si y solo si su composición con todo funcional lineal y continuo es holomorfa. En la Sección 2.5 se verán algunos resultados conocidos sobre conjuntos convexos y se introducirá el concepto de envolvente holomórficamente convexa. Por último, en la Sección 2.6 se verán las definiciones de funciones armónicas y subarmónicos así como algunos resultados básicos. Los resultados de este capítulo aparecen en el artículo de Arendt y Nikolski [1], y en los textos de Ash y Novinger [2], de Berenstein y Gay [3], de Hörmander [10], de Kato [12], de Matouśek [13], de Ransford [16], y los de Remmert [17, 18].

2.1. Teorema de Interpolación de Weierstrass

El objetivo de esta sección es presentar el Teorema de Interpolación de Weierstrass, el cual nos permite construir funciones holomorfas con los ceros prefijados. En cierto sentido este Teorema nos dice que las funciones holomorfas no son tan rígidas como quizás puedan parecer. El desarrollo aquí mostrado emplea productos infinitos de funciones holomorfas y sigue el texto de Ash y Novinger [2, Capítulo 6, Sección 2], se puede ver otra demostración diferente sin emplear productos infinitos en el texto de Berenstein y Gay [3, Capítulo 3, Sección 3].

Lema 2.1. *Si* $p_N = \prod_{n=1}^{N}(1 + x_n)$*, con* $x_n \in \mathbb{R}\ \forall n$*, entonces* $p_N \leq \exp(\sum_{n=1}^{N} x_n)$.

Demostración. Basta con tener en cuenta que $1 + x \leq e^x\ \forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto se sigue que $p_N = \prod_{n=1}^{N}(1 + x_n) \leq \prod_{n=1}^{N} e^{x_n} = \exp(\sum_{n=1}^{N} x_n)$. □

Lema 2.2. *Si* $p_N = \prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$*, con* $z_n \in \mathbb{C}$*,* $\forall n$*, entonces* $|p_n - 1| \leq \prod_{n=1}^{N}(1+|z_n|) - 1$*.*

Demostración. Veámoslo por inducción, para $N = 1$, $|p_1 - 1| = |z_1| = (1+|z_1|) - 1$. Supongamos la desigualda cierta hasta cierto $N-1$, entonces

$$|p_N - 1| = |p_{N-1}(1+z_N) - 1| = |(p_{N-1}-1)(1+z_N) + z_N|$$
$$\leq \left(\prod_{n=1}^{N-1}(1+|z_n|) - 1\right)(1+|z_N|)+|z_N| = \prod_{n=1}^{N}(1+|z_N|)-1-|z_N|+|z_N| = \prod_{n=1}^{N}(1+|z_n|)-1.$$

□

Teorema 2.3. *Sea* $G \subset \mathbb{C}$ *un abierto, y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in H(G)$ *una sucesión de funciones holomorfas en* G*. Si las funciones* f_n *son acotadas en* $S \subset \mathbb{C}$*, y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ *converge uniformemente a* u *en* S*, el producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ *converge uniformemente a una función* f*. Como consecuencia,* $f(z_0) = 0$ *si y solo si existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $1 + f_n(z_0) = 0$*.*

En particular, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ *converge uniformemente sobre compactos de* G*, entonces el producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ *converge uniformemente sobre compactos de* G *a* $f \in H(G)$*.*

Demostración. Cada función $|f_n|$ está acotada en S por cierta constante M_n, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ converge uniformemente en S, por lo tanto, su límite u está acotado en S. En efecto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|u(z) - \sum_{n=1}^{n_0}|f_n(z)|\right| < 1 \text{ en } S,$$

por lo tanto

$$|u(z)| \leq 1 + \sum_{n=1}^{n_0}|f_n(z)| \leq 1 + \sum_{n=1}^{n_0} M_n = L.$$

Denotemos ahora $p_N(z) = \prod_{n=1}^{N}(1+f_n(z))$. Si $N \in \mathbb{N}$,

$$|p_N(z)| \leq \prod_{n=1}^{N}(1+|f_n(z)|) \leq e^{\sum_{n=1}^{N}|f_n(z)|} \leq e^L = M.$$

Si $N' > N$,

$$|p_{N'}(z) - p_N(z)| = |p_N(z)|\left|\prod_{n=N+1}^{N'}(1+f_n(z)) - 1\right| \leq |p_N(z)|\left|\prod_{n=N+1}^{N'}(1+|f_n(z)|) - 1\right|$$
$$\leq |p_N(z)|\left(\exp\left(\prod_{n=N+1}^{N'}|f_n(z)|\right) - 1\right).$$

Sea $\epsilon > 0$. Tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=N}^{\infty}|f_k(z)| < \epsilon$ en S. Entonces $|p_{N'}(z) - p_N(z)| \leq M(e^{\epsilon} - 1)$. Como la última expresión tiende a 0 cuando ϵ tiende a 0, obtenemos que la sucesión de funciones $\{p_N(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en S, y por lo tanto, converge uniformemente.

Si ahora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge uniformemente sobre compactos de G, como toda función continua sobre un compacto es acotada, tenemos que las funciones f_n son acotadas en K, y por lo tanto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ converge uniformemente sobre compactos de G a una función $f \in H(G)$, la cual será una función holomorfa sobre G ya que, por el Teorema de convergencia Weierstrass, el límite de funciones holomarfas que converge uniformemente sobre compactos es de nuevo holomorfo. □

Definición 2.4. Definimos los *factores elementales de Weirstrass* $E_n(z),\ n \geq 0$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} E_0(z) =& 1 - z, \\ E_p(z) =& (1-z)\exp\left(\sum_{n=1}^{p} \frac{z^n}{n}\right),\ p \geq 1. \end{aligned}$$

Lema 2.5. *1. Para todo p, $E_p(0) = 1$;*

2. $|1 - E_p(z)| \leq |z^{p+1}|$, cuando $|z| \leq 1$.

Demostración. 1. Es una simple evaluación ver que $E_p(0) = 1$.

2. Para $p = 0$, $|1 - E_0(z)| = |-z| = |z|\ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Si $p > 0$, entonces $-E_p'(z) = z^p \exp(\sum_{n=1}^{p} \frac{z^n}{n})$. Como $-E_p'(z)$ tiene un cero de orden p en 0, entonces $1 - E_p(z)$ tiene un cero de orden $p+1$. Esta misma expresión de la derivada muestra que la serie de potencias en 0 de $1 - E_p(z)$ tiene coeficientes no negativos, por lo tanto la expansión en serie de potencias en el origen de $\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$ es

$$\frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ donde } a_n \geq 0.$$

Entonces, si $|z| \leq 1$,

$$\left|\frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}}\right| \leq 1 - E_p(1) = 1.$$

□

Teorema 2.6. *Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos no nulos, sin puntos de acumulación, o equivalentemente, con $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. Sea $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que para todo $r > 0$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty,$$

donde $r_n = |z_n|$. Entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ converge, y define una función entera con ceros exactamente en los puntos z_n.

Demostración. Fijamos $r > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $r_n \geq r$. Por lo tanto, si $|z| < r$,

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n+1}\right| \leq \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty$, tenemos convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty}\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$ en $B(0,r)$, y por lo tanto convergencia sobre compactos de $\mathbb{C}$. Aplicando ahora el Teorema 2.3, concluimos que el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ a una función $f \in H(\mathbb{C})$, que cumple que $f(z_0) = 0$ si y solo si $z_0 \in \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. □

Nota 2.7. Si varios z_n son iguales a α, se entiende que es un cero múltiple de orden $|n \in \mathbb{N} \mid z_n = \alpha|$. ♢

Corolario 2.8. *Si $p_n = n - 1$, estamos en las condiciones del Teorema 2.6. Y por lo tanto, el producto infinito*

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{n-1}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

converge a una función entera.

Demostración. Consideramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{n}.$$

Ya que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{r}{r_n}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{r}{r_n} = 0,$$

deducimos la convergencia de la serie $\forall r > 0$. □

Teorema de Interpolación de Weierstrass. *Sea G un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Dado $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto de puntos distintos, a lo sumo numerable, sin puntos de acumulación, existe $f(z) \in H(G)$ con ceros exactamente en los elementos de A.*

Demostración. Si $G \neq \mathbb{C}$, veamos que podemos reducirlo al caso en que G es un entorno reducido de infinito, es decir, que existe $R > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subset G$ y A es un conjunto acotado. Para verlo, sean G_1 y A_1 conjuntos como en las hipótesis del Teorema. Elegimos $a \in G_1 \setminus A_1$ y definimos la homografía $T(z) = 1/(z-a)$. La aplicación T es continua y envía el conjunto $G_1 \setminus \{a\}$ en un entorno reducido de infinito, el cual llamaremos G. Además, $G \neq \mathbb{C}$ puesto que $0 \notin T(G_1 \setminus \{a\})$. Definimos $A = T(A_1)$, este conjunto es acotado, ya que como a no es un punto de acumulación de A_1, existirá $r > 0$ de modo que $B(a,r) \cap A_1 = \emptyset$, lo que implica que $|T(w)| \leq 1/r$ para todo $w \in A_1$, es decir $|w| \leq 1/r$ para todo $w \in A$.

Ahora estamos en el caso especial, supongamos ahora que en este caso existe una aplicación holomorfa en G con ceros exactamente en los puntos de A y que existe $\lim_{z\to\infty} f(z) \neq 0$. Consideramos ahora la función $f_1 = f \circ T$. Como T es holomorfa en $G_1 \setminus \{a\}$, resulta que f_1 es también holomorfa en dicho conjunto. Además, f_1 tiene una singularidad evitable en a con $\lim_{z\to a} f_1(z) \neq 0$, ya que $\lim_{z\to a} T(z) = \infty$ y $\lim_{z\to\infty} f(z) \neq 0$. Por lo tanto podemos encontrar una función holomorfa f_2 en G_1 con

$$f_2(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{si } z \neq a, \\ \lim_{z\to a} f_1(z) & \text{si } z = a, \end{cases}$$

con ceros exactamente en los elementos de A.

Veamos ahora el caso especial cuando $G \neq \mathbb{C}$ y es un entorno reducido de infinito y A un conjunto acotado por $R > 0$. En el caso en que A sea un conjunto finito $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, entonces tomamos

$$f(z) = \frac{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}{(z-b)^n},$$

con $b \in \mathbb{C} \setminus G$. Es claro que es holomorfa y con ceros exactamente en los puntos de A, y el límite cuando z tiende a ∞ es $1 \neq 0$. En el caso que $A = \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito, como $G \neq \mathbb{C}$ el conjunto $\mathbb{C} \setminus G$ es un compacto no vacío, y para cada n existe $w_n \in \mathbb{C} \setminus G$ de modo que $|z_n - w_z| = \operatorname{dist}(a_n, \mathbb{C} \setminus G)$. Notemos que $|z_n - w_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$ ya que si no fuese así, existiría $\epsilon > 0$ y una subsucesión de modo que $|z_{n_k} - w_{n_k}| \geq \epsilon$, pero si fuese así, la subsucesión estaría contenida en $\{z \in G \mid \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq \epsilon\} \cap B(0, R) \subset G$, por lo tanto tendría otra subsucesión convergente, de modo que el conjunto A tendría algún punto de acumulación. Sea ahora $\{f_n\}$ la sucesión de funciones en G definidas por

$$f_n(z) = E_n\left(\frac{z_n - w_z}{z - w_n}\right),$$

estas funciones cumplen que $\lim_{z\to\infty} f_n(z) = \lim_{z\to 0} E_n(z) = 1$, esto en particular implica que las funciones f_n son acotadas en G. Entonces f_n tiene un cero simple en z_n y ningún cero más. Además, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ converge uniformemente sobre compactos de G. En efecto, si $K \subset G$ es compacto, sea $r = \operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus G)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ se tiene que $|a_n - w_n| \leq r/2$. Por lo tanto

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| \leq \frac{r/2}{r} = 1/2, \; z \in K.$$

Por lo tanto, por el Lema 2.5, para $n \geq N$

$$\left|1 - E_n\left(\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right)\right| \leq \left|\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right|^{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Por lo tanto tenemos una sucesión de funciones acotadas $\{f_n - 1\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ converge uniformemente sobre los conjuntos compactos de G, por lo tanto aplicando el Teorema 2.3, obtenemos una función holomorfa $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ que tiene ceros exactamente en los elementos de A, y con $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1 \neq 0$.

El único caso que nos falta es $G = \mathbb{C}$. En este caso, si A es finito, basta considerar el polinomio

$$f(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n).$$

Para el caso infinito, consideramos $B = A \setminus \{0\} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números complejos no nulos, que no posee puntos de acumulación, es decir, estamos en las condiciones del Teorema 2.6, entonces, si $p_n = n - 1$, el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{n-1}\left(\frac{z}{z_n}\right),$$

converge a una función entera, f, cuyos ceros son exactamente los elementos de B. Ahora bien, si $0 \notin A$, f se anulará exactamente en los elementos de A, y si $0 \in A$, basta considerar la función $g(z) = zf(z)$. □

Nota 2.9. Este resultado se puede generalizar sin mucha dificultad a abiertos G distintos de la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, y a conjuntos A que pueden incluir el punto del infinito y además los ceros tienen el orden prefijado que nosotros deseemos, esta es la demostración que aparece en el texto de Ash y Novinger [2, Teorema 6.2.6]. Y siguiendo por esta línea de la flexibilidad de las funciones holomorfas, en [2, Capítulo 6, Sección 3] aparece el Teorema de Mittag-Leffler, el cual dice que, bajo condiciones similares al Teorema de Interpolación de Weierstrass, podemos construir funciones meromorfas con los polos de orden prefijado que nosotros deseemos, así como la parte singular que elijamos. ♢

2.2. Teorema de Vitali

En esta sección se presentan los Teoremas de Montel y de Vitali, otro par de Teoremas clásicos de Análisis Complejo. Las demostraciones aquí mostradas aparecen en los textos de Remmert [18, Capítulo 3, Sección 5] y [17, Capítulo 6], también se puede encontrar en otros textos, como en el texto de Ash y Novinger [2, Capítulo 5, Sección 1]. Estos resultados tienen una interpretación en términos de la convergencia de sucesiones sobre la topología compacto-abierta, la cual comentaremos al final de la sección.

Lema 2.10. *Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f_n\colon G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones acotada en todo punto de G. Entonces para cada subconjunto a lo sumo numerable A de G existe una subsucesión que converge puntualmente en A.*

Demostración. Se puede deducir este resultado a partir de un argumento de diagonalización. □

Definición 2.11. Diremos que una familia $\mathcal{F} \subset H(G)$, donde G es un abierto conexo de $\mathbb{C}$, es *localmente acotada* si para todo compacto $K \subset G$ existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y $z \in K$.

Lema 2.12. *Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F} \subset H(G)$ una familia localmente acotada en G. Entonces para cada punto $c \in G$ y cada $\epsilon > 0$ existe una bola $B \subset G$ centrada en c tal que*

$$|f(w) - f(z)| \leq \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall w, z \in B.$$

Demostración. Sea r tal que $\overline{B(c,2r)} \subset G$. Sean $\tilde{B} = B(c,r)$ y $B' = B(c,2r)$. A partir de la fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(w) - f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B'} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - w} - \frac{1}{\zeta - z}\right] d\zeta \\ &= \frac{w-z}{2\pi i}\int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)(\zeta - z)} d\zeta,\ z, w \in B(c,2r), \end{aligned}$$

y como $|(\zeta - w)(\zeta - z)| \geq r^2$ para todo $w, z \in \tilde{B}$ ya que $\zeta \in \partial B'$, se tiene que

$$|f(w) - f(z)| \leq |w - z| \frac{2}{r} \sup_{\zeta \in B'} |f(\zeta)| \quad \forall z, w \in \tilde{B}, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Como $\mathcal{F}$ es localmente acotada, $M = \frac{2}{r}\sup\{\sup_{\zeta \in B'} |f(\zeta)| \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty$ (podemos asumir $M > 0$), y para concluir el resultado basta con tomar $B = B(c, \delta)$, donde $\delta = \text{mín}\left\{\frac{\epsilon}{2M}, r\right\}$. $\square$

Definición 2.13. Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge continuamente* a otra función f en G, si para toda sucesión convergente $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G$, el límite $\text{lím}_{n\to\infty} f_n(x_n)$ existe en $\mathbb{C}$.

Nota 2.14.

1. Podemos tomar por ejemplo la sucesión constante $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $z_n = z_0$ para todo n y definir así la función $f(z_0) = \text{lím}_{n\to\infty} f_n(z_n)$.

2. Si tenemos dos sucesiones $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes al mismo límite $z_0 \in G$, entonces las sucesiones $\{f_n(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f_n(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ tienen el mismo límite. En efecto, podemos considerar la sucesión $\{z'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $z'_n = z_n$ si n es par y $z'_n = w_n$ si n es impar, evidentemente esta sucesión es convergente a z_0 como las otras dos, por lo tanto existirá el límite de la sucesión $\{f_n(z'_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, y este límite será igual al de las subsucesiones $\{f_{2n}(z_{2n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f_{2n-1}(w_{2n-1})\}_{n\in\mathbb{N}}$, que a su vez son subsucesiones de las $\{f_n(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f_n(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ respectivamente, las cuales eran sucesiones convergentes, por lo tanto todas estas sucesiones tendrán el mismo límite. Evidentemente este límite común será $f(z_0)$.

3. Notemos también que $\text{lím}_{k\to\infty} f_{n_k}(z_k) = f(z_0)$ para toda subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para ver esto definamos la sucesión $\{z'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ donde $z'_m = z_1$ si $1 \leq m \leq n_1$ y $z'_m = z_k$ si $n_{k-1} < m \leq n_k$ para todo $k > 1$. Es claro que esta sucesión converge a z_0, luego $\text{lím}_{m\to\infty} f_m(z'_m) = f(z_0)$, y por lo tanto $\text{lím}_{k\to\infty} f_{n_k}(z'_{n_k}) = \text{lím}_{k\to\infty} f_{n_k}(z_k) = f(z_0)$.

4. La convergencia continua de la sucesión $\{f_n\}$ hacia la función f implica la continuidad de f. Para ver esto, sea $z_0 \in G$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a z_0, y $\epsilon > 0$. Como $\text{lím}_{n\to\infty} f_n(z_k) = f(z_k)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ verificando que $|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| < \epsilon$ para cada k. Por la observación anterior, podemos encontrar un $K \in \mathbb{N}$ de modo que si $k \geq K$ entonces $|f_{n_k}(z_k) - f(z_0)| < \epsilon$. De esto se sigue la continuidad, ya que para $k \geq K$

$$|f(z_k) - f(z_0)| \leq |f(z_k) - f_{n_k}(z_k)| + |f_{n_k}(z_k) - f(z_0)| < 2\epsilon.$$

$\diamondsuit$

Teorema 2.15. *Para una sucesión de funciones $f_n\colon G \to \mathbb{C}$ son equivalentes*

1. *La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre compactos de G y f es continua.*
2. *La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es continuamente convergente.*

Demostración. 1⇒2. Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ una sucesión convergente a $z_0 \in G$. Es fácil ver que el conjunto $S = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ es un subconjunto compacto de G. Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, para n suficiente grande $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f(z_k) - f_n(z_k)| < \epsilon$, en particular, para cada n suficientemente grande, $|f(z_n) - f_n(z_n)| < \epsilon$. Por otro lado, por la continuidad de f, también $|f(z_n) - f(z_0)| < \epsilon$ para n suficientemente grande. Esto implica que para n suficientemente grande,

$$|f_n(z_n) - f(z_0)| \leq |f_n(z_n) - f(z_n)| + |f(z_n) - f(z_0)| < 2\epsilon,$$

es decir, la sucesión converge continuamente.

2⇐1. Sea f la función límite, la cual sabemos que es continua. Supongamos la sucesión no converge uniformemente sobre compactos, por lo que que existe $\epsilon > 0$, un compacto $K \subset G$ y una subsucesión $\left\{f_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $\sup_{z\in K} \left|f_{n_j}(z) - f(z)\right| \geq \epsilon$. Entonces podemos encontrar una sucesión de puntos $z_j \in K$ de modo que para todo $j \in \mathbb{N}$

$$|f_{n_k}(z_j) - f(z_j)| \geq \epsilon. \tag{2.16}$$

Como K es compacto, esta sucesión $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ poseerá una subsucesión convergente. Así que sin pérdida de generalidad supongamos que $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a z_0. Pero entonces para j suficientemente grande, tendremos que $|f(z_j) - f(z_0)| < \epsilon/2$, por la continuidad de f y que $\left|f_{n_j}(z_j) - f(z_0)\right| < \epsilon/2$ por la convergencia continua, de modo que, para j suficientemente grande, tendremos que

$$\left|f(z_j) - f_{n_j}(z_j)\right| \leq |f(z_j) - f(z_0)| + \left|f(z_0) - f_{n_j}(z_j)\right| < \epsilon,$$

contradiciendo (2.16). Por lo tanto, la sucesión converge uniformemente sobre compactos de G. □

Teorema 2.17 (Teorema de Montel)**.** *Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Toda sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $H(G)$ que es localmente acotada en G tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de G.*

Demostración. Sea $A \subset G$ un subconjunto denso a lo sumo numerable. Por el Lema 2.10, existe $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente en A. Vamos a ver que de hecho esta sucesión converge uniformemente sobre compactos en G. Veamos que $\lim_{n\to\infty} g_n(z_n)$ existe para cada sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ con $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in G$. Sea $\epsilon > 0$, por el Lema 2.12, existe una bola $B \subset G$ centrado en z_0 tal que $|g_n(w) - g_n(z)| \leq \epsilon$ para todo n si $w, z \in B$. Como A es denso en G, existe $a \in A \cap B$. Ya que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in B$ para todo $n \geq n_1$. Por otro lado, ya que $a \in A$, y $\lim_{n\to\infty} g_n(a)$ existe, existirá n_2 tal que si $n, m \geq n_2$, $|g_n(a) - g_m(a)| \leq \epsilon$. Por lo tanto, si $n, m \geq \max\{n_1, n_2\}$, tendremos que

$$|g_n(z_n) - g_m(z_m)| \leq |g_n(z_n) - g_n(a)| + |g_n(a) - g_m(a)| + |g_m(a) - g_m(z)| \leq 3\epsilon.$$

Por lo tanto $\{g_n(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por lo tanto convergente. Entonces, podemos definir $g(z_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(z_n)$. Por lo tanto la sucesión converge continuamente, lo que equivale a la convergencia uniforme sobre compactos por el Teorema 2.15. □

Corolario 2.18 (Criterio de convergencia de Montel). *Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $H(G)$ localmente acotada en G. Si toda subsucesión de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre compactos de G converge a $f \in H(G)$, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f sobre compactos de G.*

Demostración. Si no fuese así, existiría $K \subset G$ compacto tal que $|f_n - f|_K$ no converge a 0. Existiría $\epsilon > 0$ y una subsucesión $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $|g_j - f|_K \geq \epsilon$ para todo j. Como la subsucesión $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ también sería localmente acotada, por el Teorema de Montel, esta tendría una subsucesión $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre compactos sobre G. Pero $\|h_k - f\|_K \geq \epsilon$ para todo k, f no sería el límite de la sucesión. Esto es una contradicción. □

Lema 2.19. *Sea $G = B(c, r)$, $r > 0$ y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $H(G)$ que es uniformemente acotada en G. Entonces son equivalentes*

1. *La sucesión converge converge uniformemente sobre compactos de G.*

2. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $\left\{f_n^{(k)}(c)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Demostración. 1⇒2. Se debe a que cuando $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre compactos, también lo hace $\left\{f_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, por el Teorema de Weierstrass clásico de Análisis Complejo

2⇒1. Consideramos el desarrollo de f_n en serie de potencias

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}(z-c)^k, \quad a_{nk} = \frac{1}{k!} f_n^{(k)}(c).$$

Por hipótesis, todos los límites $a_k = \lim_{n\to\infty} a_{nk}$, $k \in \mathbb{N}$ existen. Sea M tal que $|f_n(z)| \leq M$, $z \in G, n \in \mathbb{N}$. Entonces, por las desigualdades de Cauchy, $|a_{nk}| \leq \frac{M}{r^k}$, por lo tanto $|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k \in H(G)$. Fijamos ρ con $0 < \rho < r$. Para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z - c| \leq \rho$ y para todo $l \geq 1$ se tiene que

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \sum_{k=0}^{l-1} |a_{nk} - a_k|\, \rho^k + \sum_{k=l}^{\infty} 2M \left(\frac{\rho}{r}\right)^k = \sum_{k=0}^{l-1} |a_{nk} - a_k|\, \rho^k + 2M \frac{(\frac{\rho}{r})^l}{1 - (\frac{\rho}{r})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sea ahora $\epsilon > 0$ arbitrario. Como $\rho < r$, podemos elegir l de forma que $2M\frac{(\rho/r)^l}{1-(\rho/r)} \leq \epsilon$. Y como $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{l-1} |a_{nk} - a_k|\, \rho^k = 0$, existe un n_0 tal que esta suma finita es menor que ϵ para $n \geq n_0$. Por lo tanto $|f_n(z) - f(z)| \leq 2\epsilon$ para todo $n \geq n_0$ y todo z con $|z| \leq \rho$. Como $\rho < r$ se puede elegir arbitrariamente cerca de r, resulta que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente sobre compactos de G. □

Teorema 2.20 (Teorema de Vitali). *Sea $G \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H(G)$ localmente acotada en G. Entonces son equivalentes*

I. *La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de G.*

II. *Existe un punto $c \in G$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $\left\{f_n^{(k)}(c)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

III. *El conjunto* $A = \{z \in G \mid \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ *existe*$\}$ *tiene un punto de acumulación en* G.

Demostración. (I.)⇒(II.). Ya que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge sobre compactos, entonces $\left\{f_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge sobre compactos por el Teorema de Weierstrass clásico de Análisis Complejo.

(II.)⇒(III.). Sea B una bola centrada en c con $\overline{B} \subset G$. Entonces la sucesión $f_n|_B$ es acotada en B y por lo tanto, por el Lema 2.19, convergente en los compactos de B, lo que implica que $B \subset A$, y una bola siempre tiene puntos de acumulación.

(III.)⇒(I.). Por el criterio de convergencia de Montel, basta probar que todas las subsucesiones de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que convergen uniformemente sobre compactos tienen el mismo límite. Pero esto es claro a partir del principio de identidad de funciones holomorfas, ya que cualquiera dos límites deben coincidir en el conjunto A, el cual posee puntos de acumulación en G. □

Nota 2.21. Los resultados que aparecen en esta sección se pueden interpretar en términos de la topología compacto-abierta sobre $H(G)$ definida en la sección 1.5. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones localmente acotada no es más que un conjunto acotado en el espacio $(H(G), \tau_{co})$.

En estos términos, el Teorema de Montel nos dice que toda sucesión $\{f_n\}_{f_n}$ acotada en este espacio posee una subsucesión convergente. Y el criterio de Montel dice que para toda sucesión acotada, si toda subsucesión convergente converge al mismo elemento, entonces toda la sucesión converge a ese elemento.

Por último el Teorema de Vitali caracteriza qué sucesiones acotadas convergen, son las sucesiones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para las que existe algún elemento $c \in G$ de modo que las sucesiones de derivadas evaluadas en dicho punto convergen, es decir, para las cuales las sucesiones $\left\{f_n^{(k)}(c)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $k \in \mathbb{N}$, convergen. O equivalentemente, las sucesiones en las cuales el conjunto formado por los puntos $z \in G$ de modo que sucesión la evaluada en ese punto converge, es decir, $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, tiene algún punto de acumulación. ♢

2.3. Teorema de Runge

El Teorema de Runge es otro teorema clásico de Variable Compleja. Dice que podemos aproximar una función holomorfa a partir de funciones racionales con sus polos bien elegidos fuera de un compacto sobre el cual la función es holomorfa. El desarrollo que aquí aparece es el mostrado en el texto de Ash y Novinger [2, Capítulo 5, Sección 2], aunque aparece en otros textos, como puede ser en el texto de Berenstein y Gay [3, Capítulo 3, Sección 1] o en el texto de Remmert [17, Capítulo 12].

Nota 2.22. En lo que sigue vamos a denotar por $\overline{\mathbb{C}}$ la *esfera de Riemann*, es decir, la compactificación de Alexandroff del plano complejo, $\mathbb{C}$, añadiéndole el punto del infinito, es decir $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Topológicamente, $\overline{\mathbb{C}} \cong S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. ♢

Teorema 2.23 (Teorema de Runge)**.** *Sea* K *un conjunto compacto de* $\mathbb{C}$ *y* $S \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ *que contiene al menos un punto en cada componente conexa de* $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. *Definimos*

$$B(S) = \{f \mid f \text{ es límite uniforme en } K \text{ de funciones racionales cuyos polos están en } S\}.$$

Entonces toda función que sea analítica en un abierto que contenga a K está en $B(S)$. Es decir, existe una sucesión de funciones racionales $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuyos polos están en S y que converge a f uniformemente en K.

Para probarlo vemos primero unos lemas.

Lema 2.24. *Supongamos que K es un subconjunto compacto de un abierto $G \subset \mathbb{C}$. Si $f \in H(G)$, entonces f es límite uniforme de funciones racionales cuyos polos están en $G \setminus K$.*

Demostración. Sea G abierto y $K \subset G$. Existe un ciclo Γ en $G \setminus K$ tal que para toda $f \in H(G)$ y $z \in K$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Sea $\epsilon > 0$. Si denotamos Γ^* el soporte de Γ, es decir, $\Gamma^* = \mathrm{im}\Gamma$, entonces $\delta = \mathrm{dist}(\Gamma^*, K) > 0$ pues son conjuntos compactos disjuntos. Supongamos que $[0,1]$ es el dominio de Γ y sean $s,t \in [0,1]$, $z \in K$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(\Gamma(t))}{\Gamma(t)-z} - \frac{f(\Gamma(s))}{\Gamma(s)-z}\right| &= \left|\frac{f(\Gamma(t))(\Gamma(s)-z) - f(\Gamma(s))(\Gamma(t)-z)}{(\Gamma(t)-z)(\Gamma(s)-z)}\right| \\ &= \left|\frac{f(\Gamma(t))(\Gamma(s)-\Gamma(t)) + \Gamma(t)(f(\Gamma(t)) - f(\Gamma(s))) - z(f(\Gamma(t)) - f(\Gamma(s)))}{(\Gamma(t)-z)(\Gamma(s)-z)}\right| \\ &\leq \frac{1}{\delta^2}(|f(\Gamma(t))|\,|\Gamma(s)-\Gamma(t)| + |\Gamma(t)|\,|f(\Gamma(t)) - f(\Gamma(s))| + |z|\,|f(\Gamma(t)) - f(\Gamma(s))|).\end{aligned}$$

Como Γ y $f\circ\Gamma$ son funciones acotadas y K es un compacto, existe $C > 0$ tal que para $s,t \in [0,1]$ y $z \in K$, la expresión anterior está acotada por

$$\frac{C}{\delta^2}(|\Gamma(s)-\Gamma(t)| + |f(\Gamma(t)) - f(\Gamma(s))|).$$

Por lo tanto, por la continuidad uniforme de Γ y $f\circ\Gamma$ en $[0,1]$, existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ tal que para $t \in [t_{j-1}, t_j]$ y $z \in K$,

$$\left|\frac{f(\Gamma(t))}{\Gamma(t)-z} - \frac{f(\Gamma(t_j))}{\Gamma(t_j)-z}\right| < \epsilon.$$

Definimos

$$R(z) = \sum_{j=1}^n \frac{f(\Gamma(t_j))}{\Gamma(t_j)-z}(\Gamma(t_j) - \Gamma(t_{j-1})),\ z \neq \Gamma(t_j).$$

Entonces $R(z)$ es una función racional cuyos polos están en $\{\Gamma(t_1), \Gamma(t_2), \ldots, \Gamma(t_n)\}$, en particular, en $G \setminus K$. Ahora, para todo $z \in K$,

$$\begin{aligned}|2\pi i f(z) - R(z)| &= \left|\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - \sum_{j=1}^n \frac{f(\Gamma(t_j))}{\Gamma(t_j)-z}(\Gamma(t_j) - \Gamma(t_{j-1}))\right| \\ &= \left|\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\frac{f(\Gamma(t))}{\Gamma(t)-z} - \frac{f(\Gamma(t_j))}{\Gamma(t_j)-z}\right)\Gamma'(t)dt\right| \\ &\leq \epsilon\int_0^1 |\Gamma'(t)|\,dt = \epsilon \cdot \text{longitud de } \Gamma.\end{aligned}$$

□

Lema 2.25. *Sean U y V abiertos de $\mathbb{C}$ con $V \subset U$ y $\partial V \cap U = \emptyset$. Si H es una componente conexa de U y $V \cap H \neq \emptyset$, entonces $H \subset V$.*

Demostración. Sea H una componente de U con $V \cap H \neq \emptyset$. Sea $s \in V \cap H$ y sea T la componente de V que contiene a s. Basta ver que $T = H$. Es claro que $T \subset H$ ya que T es un subconjunto conexo de U que contiene a s, y H es, por definición, la unión de todos los conjuntos con esta propiedad. Escribimos

$$H = T \cup (H \setminus T) = T \cup [(\partial T \cap H) \cup (H \setminus \overline{T})].$$

Pero $\partial T \cap H = \emptyset$, pues sino sería falso que $\partial V \cap U = \emptyset$. Por lo tanto $H = T \cup (H \setminus \overline{T})$ es unión disjunta de dos abiertos, pero como H es conexo y $T \neq \emptyset$ tenemos que $T = H$. □

Lema 2.26. *Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus K$, entonces, siguiendo la notación del Teorema de Runge, $(z - \lambda)^{-1} \in B(S)$.*

Demostración. Supongamos primero que $\infty \in S$. Entonces, para $|\lambda_0|$ suficientemente grande, con λ_0 en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, la serie de Taylor centrada en 0 de $(z - \lambda_0)^{-1}$ converge uniformemente en K. Por lo tanto $(z - \lambda_0)^{-1} \in B(S)$, y se sigue que

$$B((S \setminus \{\infty\}) \cup \{\lambda_0\}) \subset B(S),$$

ya que si $f \in B((S \setminus \{\infty\}) \cup \{\lambda_0\})$ y R es una función racional con polos en $(S \setminus \{\infty\}) \cup \{\lambda_0\}$ que aproxima a f, escribimos $R = R_1 + R_2$ donde los polos de R_1 están en $S \setminus \{\infty\}$ y el único polo posible de R_2 es λ_0. Pero entonces, R_2 se puede aproximar por un polinomio P_0, y por lo tanto $R_1 + P_0$ aproxima a f y tiene sus polos en S, luego $f \in B(S)$.

Por lo tanto, es suficiente probar el Lema para conjuntos $S \subset \mathbb{C}$. Vamos a aplicar el Lema 2.25, sea $U = \mathbb{C} \setminus K$ y

$$V = \left\{\lambda \in G \mid (z - \lambda)^{-1} \in B(S)\right\}.$$

Por hipótesis $S \subset U$ y por lo tanto $S \subset V \subset U$. Veamos que V es abierto, sea $\lambda \in V$ y μ tal que $0 < |\lambda - \mu| < \operatorname{dist}(\lambda, K)$. Entonces $\mu \in \mathbb{C} \setminus K$ y para todo $z \in K$

$$\frac{1}{z - \mu} = \frac{1}{(z - \lambda)(1 - \frac{\mu - \lambda}{z - \lambda})}.$$

Notemos que si $f, g \in B(S)$, entonces $f + g, fg \in B(S)$ también. Como $(z - \lambda)^{-1} \in B(S)$, y $\frac{1}{1 - \frac{\mu - \lambda}{z - \lambda}} \in B(S)$, ya que

$$\frac{1}{1 - \frac{\mu - \lambda}{z - \lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu - \lambda}{z - \lambda}\right)^k$$

converge uniformemente sobre K, ya que $|(\mu - \lambda)/(z - \lambda)| < \operatorname{dist}(\lambda, K)/|z - \lambda| < 1$ y el único polo de las sumas parciales está en $z = \lambda$, y como $(z - \lambda)^{-1} \in B(S)$, se deduce que los polos de las sumas parciales también están en S. De esto se $(z - \mu)^{-1} \in B(S)$. Luego $\mu \in V$, lo que prueba que V es abierto.

Veamos ahora que $\partial V \cap U = \emptyset$. Sea $w \in \partial V$ y sea $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en V convergente a w. Como $|\lambda_n - w| < \operatorname{dist}(\lambda_n, K)$ implica que $w \in W$, entonces debe de ser $|\lambda_n - w| \geq \operatorname{dist}(\lambda_n, K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $|\lambda_n - w| \to 0$, la distancia de w a K debe de ser 0, y por lo tanto $w \in K$, entonces $w \notin U$, por lo tanto $\partial V \cap U = \emptyset$. Por lo tanto hemos visto que V y U verifican las hipótesis del Lema 2.25.

Sea H cualquier componente de U. Por definición de S, existe $s \in S$ tal que $s \in H$. Ahora, $s \in V$ ya que $S \subset V$. Por lo tanto $H \cap V \neq \emptyset$, lo que implica que $H \subset V$. Esto prueba que toda componente de U es una componente de V y en consecuencia $U \subset V$. Por lo tanto concluimos que $U = V$. □

Demostración del Teorema de Runge 2.23. De nuevo notamos que si $f, g \in B(S)$ entonces también $f + g, fg \in B(S)$, por lo tanto, por el Lema 2.26, toda función racional con polos en $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ pertenece a $B(S)$. Entonces, el Teorema de Runge es una consecuencia del Lema 2.24. □

Nota 2.27. En el caso que $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ es conexo, podemos tomar $S = \{\infty\}$, y entonces la sucesión de funciones racionales será una sucesión de polinomios. ♢

Corolario 2.28. *Sea K un compacto de $\mathbb{C}$ con $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ conexo. Entonces K es polinomialmente convexo, esto es*

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |g(z)| \leq \sup_{w \in K} |g(w)|\,,\ \textit{para todo } g \textit{ polinomio} \right\}.$$

Demostración. Es claro que $K \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |g(z)| \leq \sup_{w \in K} |g(w)|\,,$ para todo g polinomio$\}$. Para ver la otra contención, sea $z_0 \subset \mathbb{C} \setminus K$, entonces existen abiertos U, V tales que $z_0 \in U$ y $K \in V$ con $U \cap V = \emptyset$, así, la función

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in U \\ 0, & \text{si } z \in V \end{cases}$$

es holomorfa en $U \cup V$, un abierto que contiene a $K \cup \{z_0\}$. Notemos además, que $\overline{\mathbb{C}} \setminus (K \cup \{z_0\})$ sigue siendo conexo, por lo tanto existe un polinomio p tal que $|p(z) - f(z)| < 1/2$ para $z \in K \cup \{z_0\}$. Entonces $|p(z)| < 1/2$ para todo $z \in K$, pero $|p(z_0)| > 1/2$, por lo tanto $z_0 \notin \{z \in \mathbb{C} \mid |g(z)| \leq \sup_{w \in K} |g(w)|\,,$ para todo g polinomio$\}$, lo que nos da la otra contención. □

2.4. Holomorfía en espacios de Banach

Ahora veremos la noción de función holomorfa en espacios de Banach, que es una generalización directa de la noción habitual. Además veremos que sobre un espacio de Banach es equivalente que una función sea holomorfa a que lo sea en el sentido clásico la composición de dicha función con todo elemento del dual. Para llegar a probarlo hemos empleado resultados del artículo de Arendt y Nikolski [1, Sección 3] y del texto de Kato [12, Capítulo 3, Sección 1.6].

Definición 2.29. Sea E un espacio de Banach, G un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f\colon G \to E$ una función. Entonces diremos que f es *holomorfa* en $z_0 \in G$ si existe el límite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Si f es holomorfa en todo $z_0 \in G$, diremos que f es holomorfa en G.

Teorema 2.30. *Sea E un espacio de Banach. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge si y solo si $\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $\|\varphi\| \leq 1$, $\varphi \in E'$.*

Demostración. $\Rightarrow$. Esta implicación se sigue de

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| \leq \|x_n - x_m\|\|\varphi\| \leq \|x_n - x_m\|.$$

$\Leftarrow$. Para ver esta implicación, supongamos que $\{\varphi(x_n)\}_{n\in N}$ converge uniformemente para $\|\varphi\| \leq 1$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe N tal que $|\varphi(x_n - x_m)| < \epsilon$ si $n, m > N$ y $\|\varphi\| \leq 1$. Por lo tanto

$$\|x_n - x_m\| = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \{|\varphi(x_n - x_m)|\} \leq \epsilon \quad n, m > N.$$

$\square$

Nota 2.31. En este teorema es suficiente suponer la convergencia uniforme de $\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ para toda φ de un conjunto denso de la bola unidad de E', ya que $|\varphi(x_n - x_m)| \leq \epsilon$, implica lo mismo para cualquier φ de la bola unidad. $\diamondsuit$

Teorema 2.32. *Sea E un espacio de Banach, $G \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f\colon G \to E$. Si $\varphi \circ f$ es holomorfa en G para todo $\varphi \in E'$, entonces f es holomorfa.*

Demostración. Sea $\overline{B(\xi, R)} \subset G$ y $\Gamma = \partial B(\xi, R)$ orientado en sentido positivo. Por la fórmula integral de Cauchy tenemos que

$$\varphi(f(z_0)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(f)(z)}{z-z_0}dz \quad z_0 \in B(\xi, R).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}(\varphi(f(z_0+h)) - \varphi(f(z_0))) - (\varphi\circ f)'(z_0)\\
&= \frac{1}{2\pi i h}\int_\Gamma \left(\frac{\varphi(f(z))}{z-z_0-h} - \frac{\varphi(f(z))}{z-z_0}\right)dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(f(z))}{(z-z_0)^2}dz\\
&= \frac{1}{2\pi i h}\int_\Gamma \frac{\varphi(f(z))}{(z-z_0-h)(z-z_0)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(f(z))}{(z-z_0)^2}dz = \frac{h}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(f(z))}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}dz.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\varphi \circ f$ es continua, está acotada sobre Γ, el cual es un compacto, es decir, $\sup_{z\in f(\Gamma)} |\varphi(z)| < \infty$ para cada $\varphi \in E'$, aplicando el Teorema de Banach-Steinhaus concluimos que $\sup_{z\in f(\Gamma)} \|z\| = \sup_{z\in\Gamma} \|f(z)\| = M < \infty$. Por lo tanto

$$|\varphi(f(z))| \leq \|f(z)\|\|\varphi\| \leq M\|\varphi\|, \; z \in \Gamma.$$

Entonces, para $|h| \leq d(z_0, \Gamma) = D$

$$\begin{aligned}\left|\frac{h}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2}dz\right| &\leq \frac{|h|}{2\pi}\mathrm{long}(\Gamma)\sup_{z\in\Gamma}\left\{\frac{|\varphi(f(z))|}{|z-z_0-h|\,|z-z_0|^2}\right\}\\ &\leq \frac{|h|}{2\pi}2\pi RM\|\varphi\|\frac{1}{d(B(z_0,|h|),\Gamma)d(z_0,\Gamma)^2}\\ &\leq |h|\,RM\|\varphi\|\frac{1}{d(B(z_0,D),\Gamma)d(z_0,\Gamma)^2} = |h|\,M'\|\varphi\|.\end{aligned}$$

Esto prueba que $\frac{1}{h}(\varphi(f(z_0+h))) - \varphi(f(z_0))$ converge a $(\varphi\circ f)'(z_0)$ cuando $h \to 0$ uniformemente para $\|\varphi\| \leq 1$. Entonces, por el Teorema 2.30, $\frac{1}{h}(f(z_0+h) - f(z_0))$ converge en la norma de E, por lo tanto f es holomorfa. $\square$

Nota 2.33. Si se supone que $\|f(z)\|$ es acotada en compactos, basta suponer en el Teorema 2.32 que $\varphi\circ f$ es holomorfa para toda φ de un subconjunto fundamental de E' (es decir, un conjunto $S \subset E'$ tal que $\overline{\mathrm{span}(S)} = E'$). Por lo tanto resulta el siguiente Corolario. $\diamondsuit$

Corolario 2.34. *Sea E un espacio de Banach, G un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f\colon G \to E$ localmente acotada. Supongamos además que existe S, un subconjunto fundamental de E', tal que $\varphi\circ f$ es holomorfa para toda $\varphi \in S$. Entonces f es holomorfa.*

Recordemos que, como se indicó en la Definición 1.33, un subconjunto $W \subset E'$ se dice que *separa puntos* si para todo $x \in E\setminus\{0\}$ existe $\varphi \in W$ tal que $\varphi(x) \neq 0$.

Lema 2.35. *Si W es un subespacio de E', W separa puntos si y solo si es $\sigma(E', E)$-denso.*

Demostración. Si W separa puntos, entonces $W^\circ = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0,\ \forall\varphi \in W\} = \{0\}$, y por lo tanto $\overline{W} = W^{\circ\circ} = \{0\}^\circ = E'$, luego W es denso en E'.

Para el recíproco, sea $x \in E$ tal que $\varphi(x) = 0$ para todo $\varphi \in W$. Sea ahora $\psi \in E'$, entonces existe una red $\{\varphi_t\}_{t\in T} \subset W$ que converge en $\sigma(E', E)$ a ψ, en particular será $\lim_t |\varphi_t(x) - \psi(x)| = 0$, y como $\varphi_t(x) = 0$ tendremos que $\psi(x) = 0$. Como $\psi \in E'$ era arbitrario, y E' separa puntos, tendremos que $x = 0$, y por lo tanto W separa puntos. $\square$

Teorema 2.36. *Sea $f\colon G \to E$ una función localmente acotada tal que $\varphi\circ f$ es holomorfa para todo $\varphi \in W$, donde $W \subset E'$ separa puntos. Entonces f es holomorfa.*

Demostración. Sea $H = \{\varphi \in E' \mid \varphi\circ f \text{ es holomorfa}\}$. Entonces H es un subespacio de E' con $W \subset H$, luego es $\sigma(E', E)$-denso. Sea $H_1 = \{\varphi \in H \mid \|\varphi\| \leq 1\}$. Se sigue del Teorema de Vitali que H_1 es $\sigma(E', E)$-cerrado: si $(\varphi_t)_{t\in T}$ es una red de H_1 $\sigma(E', E)$-convergente a φ, entonces φ es un funcional lineal continuo, y como $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|\leq 1}|\varphi(x)| \leq 1$, pues $|\varphi(x)| \leq \lim_t |\varphi_t(x)| \leq 1$, falta ver que $\varphi\circ f$ es holomorfa, para ello tomo una subsucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\varphi_t)_{t\in T}$, dicha subsucesión convergerá puntualmente a φ, por lo tanto para todo $z \in G$, $\lim_n(\varphi_n\circ f)(z) = (\varphi\circ f)(z)$, y como G es abierto, tiene puntos de acumulación, por lo tanto aplicando el Teorema de Vitali se deduce que $(\varphi_n\circ f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre compactos de G a $\varphi\circ f$, en particular, será holomofa, y por lo tanto $\varphi \in H_1$. Ahora, por el Corolario 1.48 del Teorema de Krein-Smulian, H también es $\sigma(E', E)$-cerrado, puesto que lo es $H_1 = H \cap \overline{B'(0,1)}$. Por lo tanto $H = E'$, y aplicando el Corolario 2.34 concluimos que f es holomorfa. $\square$

2.5. Envolvente holomórficamente convexa

El objetivo de esta sección es introducir la noción de envolvente holomórficamente convexa y ver que la envolvente holomórficamente convexa de un compacto está contenida en la envolvente convexa del compacto, propiedad que nos será útil en el capítulo 3. Los resultados sobre envolventes convexas clásicos aparecen en el texto de Matoušek [13, Capítulo 1] y sobre envolventes holomórficamente convexas en el texto de Hörmander [10, Página 8].

Recordemos que la envolvente convexa de un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es el menor conjunto convexo que contenga a C. Y este conjunto se puede expresar por

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \mid n \in \mathbb{N},\ x_k \in C,\ \lambda_k \in [0,1] \text{ y } \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1 \right\},$$

es decir, es el conjunto formado por todas las combinaciones convexas de elementos de C.

Teorema 2.37 (Carathéodory)**.** *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ y x un elemento de la envolvente convexa de C, entonces x es combinación convexa de a lo sumo $n+1$ puntos de C.*

Demostración. Sea x un elemento de la envolvente convexa de C, entonces x es combinación convexa de un número finito de puntos de C

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j,$$

donde cada $x_j \in C$, $0 < \lambda_j \leq 1$ (si algún $\lambda_j = 0$, lo eliminamos y nos quedamos con una combinación convexa con menos puntos) y $\sum_{j=1}^{k} = 1$. Supongamos que $k > n+1$, ya que sino no habría nada que probar. Entonces los vectores $x_2 - x_1, \ldots, x_k - x_1$ son linealmente dependientes, por lo tanto existen escalares $\mu_2, \ldots, \mu_k$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{j=2}^{k} \mu_j (x_j - x_1) = 0.$$

Si definimos $\mu_1 = -\sum_{j=2}^{k} \mu_j$, entonces $\sum_{j=1}^{k} \mu_j x_j = 0$ y $\sum_{j=1}^{k} \mu_j = 0$, y no todos los μ_j son nulos. Por lo tanto, al menos habrá un $\mu_j > 0$. Entonces,

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^{k} \mu_j x_j = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j,$$

para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. En particular, si $\alpha = \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} \mid \mu_j > 0 \right\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$, notemos que $\alpha > 0$ y para todo $1 \leq j \leq k$ se tiene que $\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0$, y $\lambda_i - \alpha \mu_i = 0$. Entonces

$$x = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j,$$

donde todos los $\lambda_j - \alpha \mu_j$ son no negativos, su suma es 1 y al menos $\lambda_i - \alpha \mu_i = 0$. Es decir, hemos representado x como una combinación convexa de a lo sumo $k-1$ puntos de C. Podemos repetir este proceso hasta que lleguemos a representar x como una combinación convexa de como mucho $n+1$ puntos de C. □

Corolario 2.38. *La envolvente convexa de un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ es también compacta.*

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, y sea

$$\Delta = \left\{(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq \lambda_j \leq 1, \forall j = 0, 1, \ldots, n\right\},$$

este es un conjunto compacto, sea ahora $A = K^{n+1} \times \Delta$, que también es un compacto, y sea

$$\begin{aligned} F\colon A &\to \mathbb{R}^n \\ (x_0, x_1, \ldots, x_n, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) &\mapsto \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j. \end{aligned}$$

Esta función es continua, pues es un polinomio, y el Teorema 2.37 dice que la envolvente convexa de K es iguala $F(A)$, es decir, la envolvente convexa de K es la imagen continua de un compacto, luego también es compacto. □

Lema 2.39. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces existe un único $v \in K$ tal que $\|v\| \leq \|w\|$, $\forall w \in K$.*

Demostración. Sea $\delta = \text{ínf}\{\|x\| \mid x \in K\}$. Sea x_j una sucesión en K tal que $\|x_j\| \to \delta$. Notemos que $\frac{x_i + x_j}{2} \in K$, ya que K es convexo, y por lo tanto $\|x_i + x_j\|^2 \geq 4\delta^2$. Como

$$\|x_i - x_j\|^2 = 2\|x_i\|^2 + 2\|x_j\|^2 - \|x_i + x_j\|^2 \leq 2\|x_i\|^2 + 2\|x_j\|^2 - 4\delta^2 \to 0$$

cuando $i, j \to \infty$, entonces $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, por lo tanto tiene un límite $v \in K$ por ser cerrado, y por continuidad de $\|\cdot\|$ tenemos que $\|v\| = \delta$. Este elemento es único, ya que si $y \in K$ es otro elemento con esta propiedad, entonces

$$\|x - y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2 = 0,$$

por lo tanto $x = y$. □

Teorema 2.40. *Sean A y B dos conjuntos convexos, cerrados, no vacíos y disjuntos de $\mathbb{R}^n$ y al menos uno de ellos acotado. Entonces existe un vector no nulo v y un número real c tal que*

$$\langle x, v\rangle > c, \forall x \in A \quad \langle y, v\rangle < c, \forall y \in B,$$

es decir, que el hiperplano $\langle \cdot, v\rangle = c$ separa A y B.

Demostración. Supongamos que B es cerrado y acotado (compacto), si $y \in B$, entonces $A - y = \{x - y \mid x \in A\}$ es cerrado y convexo, por lo tanto tiene un único elemento de norma mínima, $x_0 - y \neq 0$ ya que $A \cap B = \emptyset$, esto equivale a que existe un único $x_0 \in A$ tal que $\text{dist}(A, y) = \text{dist}(x_0, y) = \|x_0 - y\|$. Por otro lado, la función $\text{dist}(A, \cdot)$ es continua, por lo tanto existe algún elemento $y_0 \in B$ que minimiza $\text{dist}(A, y)$, $y \in B$, es decir, que $\text{dist}(A, y_0) = \text{dist}(A, B)$, y para dicho y_0, por el comentario anterior, existe $x_0 \in A$ único tal que $\text{dist}(x_0, y_0) = \text{dist}(A, y_0) = \text{dist}(A, B)$, y $x_0 \neq y_0$.

Debido a que $x_0 \neq y_0$ tenemos que $\langle x_0 - y_0, x_0 - y_0\rangle \|x_0 - y_0\|^2 > 0$ lo cual implica que $\langle y_0, x_0 - y_0\rangle \leq \langle x_0, x_0 - y_0\rangle$.

Sea ahora otro elemento $x \in A$, por la convexidad del conjunto tenemos que $x_t = x_0 + t(x - x_0) \in A$ para $0 < t \leq 1$, entonces

$$\|x_0-y_0\|^2 \leq \|x_t-y_0\|^2 = \|(x_0-y_0)+t(x-x_0)\|^2 = \|x_0-y_0\|^2+2t\langle x_0-y_0, x-x_0\rangle+t^2\|x-x_0\|^2,$$

esto implica que

$$0 \leq 2t\langle x_0 - y_0, x - x_0\rangle + t^2\|x - x_0\|^2,$$

dividiendo ahora por $0 < t \leq 1$ resulta

$$0 \leq 2\langle x_0 - y_0, x - x_0\rangle + t\|x - x_0\|^2 = 2\langle x_0 - y_0, x\rangle - 2\langle x_0 - y_0, x_0\rangle + t\|x - x_0\|^2,$$

tomando límite cuando $t \to 0$ concluimos que

$$\langle x_0, x_0 - y_0\rangle = \langle x_0 - y_0, x_0\rangle \leq \langle x_0 - y_0, x\rangle = \langle x, x_0 - y_0\rangle.$$

De forma análoga se ve que si $y \in B$ tenemos que $\langle y, x_0-y_0\rangle \leq \langle y_0, x_0-y_0\rangle$. Los pasos que prueban esta desigualdad con un razonamiento completamente análogo serían los siguientes tomando $y_t = y_0 + t(y - y_0)$ con $0 < t \leq 1$,

$$\|y_0 - x_0\|^2 \leq \|x_0 - y_t\|^2 \leq \|x_0 - y_0\|^2 - 2t\langle x_0 - y_0, y - y_0\rangle + t^2\|y - y_0\|^2,$$
$$0 \leq -2t\langle x_0 - y_0, y - y_0\rangle + t^2\|y - y_0\|^2,$$
$$0 \leq -2\langle x_0 - y_0, y - y_0\rangle + t\|y - y_0\|^2 = -2\langle x_0 - y_0, y\rangle + 2\langle x_0 - y_0, y_0\rangle + t\|y - y_0\|^2,$$

de modo que al final se puede concluir que

$$\langle y, x_0 - y_0\rangle = \langle x_0 - y_0, y\rangle \leq \langle x_0 - y_0, y_0\rangle = \langle y_0, x_0 - y_0\rangle.$$

Esto prueba que para todo $x \in A$ y todo $y \in B$ se tiene que

$$\langle y, x_0 - y_0\rangle \leq \langle y_0, x_0 - y_0\rangle < \langle x_0, x_0 - y_0\rangle \leq \langle x, x_0 - y_0\rangle.$$

Entonces tomando $v = x_0 - y_0$ y $c \in (\langle x_0, v\rangle, \langle y_0, v\rangle) \neq \emptyset$, por ejemplo

$$\frac{\langle x_0, v\rangle + \langle y_0, v\rangle}{2} = \frac{\langle x_0 + y_0, x_0 - y_0\rangle}{2} = \frac{\|x_0\|^2 - \|y_0\|^2}{2},$$

se concluye el resultado. □

Proposición 2.41. *Sea C un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{H}$ la familia de todos los semi-espacios abiertos de $\mathbb{R}^n$ que contienen a C, entonces*

$$\textit{envolvente convexa de } C = \bigcap_{H\in\mathcal{H}} H.$$

Demostración. Como todos los semi-espacios abiertos de $\mathcal{H}$ son conjuntos convexos que contienen a C, y la intersección de conjuntos convexos es convexa, la envolvente convexa de C está contenida en $\bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$ es directa, ya que el segundo conjunto es un convexo que contiene a C. Para la otra, sea $x \notin C$, entonces los conjuntos $\{x\}$ y C verifican las hipótesis del Teorema 2.40, y por lo tanto existen $v \neq 0$ y c tales que $\langle x, v\rangle < c$ y $\langle y, v\rangle > c$ para todo $y \in C$, entonces $H = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, v\rangle > c\}$ es un semi-espacio abierto que contiene a C, pero $x \notin H$, luego $x \notin \bigcap_{H\in\mathcal{H}} H$, lo que prueba la inclusión contraria. □

Nota 2.42. También se puede ver que la envolvente convexa de C es la intersección de los semi-espacios cerrados de $\mathbb{R}^n$ que contienen a C, la demostración de esto es idéntica, solo cambiaría considerar el semi-espacio cerrado $H' = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, v\rangle \geq c\}$, que contiene a C pero no a x. $\diamondsuit$

Definición 2.43. Sea A un subconjunto de un abierto conexo G de $\mathbb{C}$. La *envolvente holomórficamente convexa* de A en G es el conjunto

$$Hco(A) = \left\{ z \in G \mid |f(z)| \leq \sup_{\zeta \in A} |f(\zeta)|\,,\ \forall f \in H(G) \right\} \subset G.$$

Diremos además que G es *holomórficamente convexo* si para todo compacto $K \subset G$, su envolvente holomórficamente convexa $Hco(K)$ en G es también compacta.

Proposición 2.44. *Cada abierto conexo G de $\mathbb{C}$ es holomórficamente convexo.*

Demostración. Para ver que $Hco(K)$ es un compacto, vamos a ver que

$$Hco(K) \subset \text{envolvente convexa de } K,$$

con esto, ya que K es compacto, su envolvente convexa también lo es, y es fácil ver que si $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $Hco(K)$ con $z_n \to z$, entonces $z \in Hco(K)$, esto se debe a que si $f \in H(G)$, por continuidad, $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = |f(z)| \leq M_f = \sup_{w\in K} |f(w)|$, por lo tanto $Hco(K)$ es un cerrado contenido en un compacto, por lo tanto es compacto.

Terminemos de ver que

$$Hco(K) \subset \text{envolvente convexa de } K.$$

Primero notemos que los conjuntos de la forma $P_{\alpha,C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |e^{\alpha z}| \leq C\}$ son semiplanos cerrados de $\mathbb{C}$. En efecto, sea $\alpha = a + bi$ y $z = x + yi \in P_{\alpha,C}$, entonces

$$e^{\ln C} = C \geq |e^{\alpha z}| = \left|e^{ax-by+i(ay+bx)}\right| = e^{ax-by},$$

esta condición equivale a que $\ln C \geq ax - by$ porque la función ln es creciente. Es decir, el conjunto $P_{\alpha,C}$ es un semiplano determinado por una recta de vector normal $\overline{\alpha}$. Si hacemos variar α en $\mathbb{C}$ y C en $\mathbb{R}^+$, los conjuntos $P_{\alpha,C}$ recorren todos los semiplanos cerrado de $\mathbb{C}$. Por otro lado, es claro que si $C \leq C'$ entonces $P_{\alpha,C} \subset P_{\alpha,C'}$. Si $C < \sup_{z\in K} |e^{\alpha z}|$, es claro que $K \not\subset P_{\alpha,C}$. Y si $C \geq \sup_{z\in K} |e^{\alpha z}|$, $K \subset P_{\alpha,C}$. Entonces para calcular la intersección de todos los semiplanos cerrados que contienen a K basta considerar por cada $\alpha \in \mathbb{C}$ el semiplano $P_{\alpha,C}$, donde $C = \sup_{z\in K} |e^{\alpha z}|$. Es decir,

$$\text{envolvente convexa de } K = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{C}} P_{\alpha, \sup_{z\in K}|e^{\alpha z}|}.$$

Por otro lado, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $e^{\alpha z} \in H(G)$. Pero el conjunto

$$\begin{aligned} Hco(K) &= \left\{ z \in G \mid |f(z)| \leq \sup_{w\in K} |f(w)|\,, \forall f \in H(G) \right\} \\ &\subset \left\{ z \in G \mid |e^{\alpha z}| \leq \sup_{w\in K} |e^{\alpha w}| \right\} \subset P_{\alpha, \sup_{z\in K}|e^{\alpha z}|}, \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Con lo que podemos concluir que

$$Hco(K) \subset \text{envolvente convexa de } K.$$

$\square$

2.6. Funciones subarmónicas

En esta sección vamos a ver algunas propiedades básicas de las funciones armónicas y de las funciones subarmónicas que serán útiles en el Capítulo 3. Esta sección se ha basado en el texto de Ransford [16, Capítulos 1, 2].

Definición 2.45. Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Una función $h\colon G \to \mathbb{R}$ se dice *armónica* si $h \in \mathcal{C}^2(G)$ y $\Delta h = 0$ en G, donde Δ es el operador *Laplaciano*:

$$\Delta h = h_{xx} + h_{yy}.$$

Proposición 2.46. *Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$.*

1. *Si $f \in H(G)$, y $H = Re(f)$, entonces h es armónica en G.*
2. *Si h es armónica en G, y si G es símplemente conexo, entonces $h = Re(f)$ para alguna $f \in H(G)$. Además f está unívocamente determinada salvo suma de constantes imaginarias.*

Demostración. (1). Sea $f = h + ik$, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $h_x = k_y$ y $h_y = -k_x$. Por lo tanto

$$\Delta h = h_{xx} + h_{yy} = k_{yx} - k_{xy} = 0.$$

(2). Si $h = \operatorname{Re}(f)$ para alguna $f \in H(G)$, digamos, $f = h + ik$, entonces

$$f' = h_x + ik_x = h_x - ih_y.$$

Por lo tanto, si f existe, entonces f' está completamente determinada por h, y por lo tanto f está determinada salvo constantes.

Vamos a construir f como una primitiva de $g\colon G \to \mathbb{C}$ dada por

$$g = h_x - ih_y.$$

Entonces $g \in \mathcal{C}^1(G)$ y g verifica las condiciones de Cauchy-Riemann, ya que

$$h_{xx} = -h_{yy} \text{ y } h_{xy} = h_{yx}.$$

Por lo tanto $g \in H(G)$. Como G es simplemente conexo, toda función holomorfa admite primitiva, es decir, existe $G \in H(G)$ con $G' = g$. Si $G = \tilde{h} + i\tilde{k}$, entonces

$$\tilde{h}_x - i\tilde{h}_y = f' = h_x - ih_y.$$

Por lo tanto $(\tilde{h} - h)_x \equiv 0$ y $(\tilde{h} - h)_y \equiv 0$. Entonces $\tilde{h} - h \equiv D \in \mathbb{R}$ es constante en G. Entonces, tomando $f(z) = G(z) - D$, resulta que $\operatorname{Re}(f(z)) = \tilde{h}(z) - D = h(z)$, es decir, $f \in H(G)$ y $\operatorname{Re}(f) = h$ como queríamos ver. ☐

Teorema 2.47 (Propiedad del Valor Medio)**.** *Sea h una función armónica en un entorno abierto del disco $\overline{B(w,r)}$. Entonces*

$$h(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(w + re^{i\theta})d\theta.$$

Demostración. Sea $r' > r$ de forma que h sea armónica en $B(w, r')$, que es símplemente conexo. Por la Proposición 2.46, existe $f \in H(B(w, r'))$ tal que $h = \mathrm{Re}\,(f)$. Por la fórmula integral de Cauchy

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - w| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + re^{i\theta}) d\theta.$$

El resultado se sigue tomando partes reales en ambos lados de la igualdad. □

Definición 2.48. El *núcleo de Poisson* $P\colon B(0,1) \times \partial B(0,1) \to \mathbb{R}$ está definido por

$$P(z, \zeta) = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}.$$

Si $B = B(w, r)$ y $\phi\colon \partial B \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces su *integral de Poisson* $P_B\phi\colon B \to \mathbb{R}$ está definida por

$$P_B\phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{z - w}{r}, e^{i\theta}\right) \phi(w + re^{i\theta}) d\theta.$$

Más explícitamente, si $\rho < r$ y $0 \leq t < 2\pi$, entonces

$$P_B\phi(w + \rho e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta - t) + \rho^2} \phi(w + re^{t\theta}) d\theta.$$

Lema 2.49. *El núcleo de Poisson P verifica:*

1. $P(z, \zeta) > 0$, *para* $|z| < 1, |\zeta| = 1$;
2. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta = 1$ *para* $|z| < 1$;
3. $\sup_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} P(z, \zeta) \to 0$ *cuando* $z \to \zeta_0$ *para* $|\zeta_0| = 1, \delta > 0$.

Demostración. (1). Es claro a partir de la definición.

(2). Podemos expresar la integral como una integral sobre la circunferencia unidad y emplear la fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta =& \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = 1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = 1} \left(\frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta\right) = \mathrm{Re}\,(2 - 1) = 1.\end{aligned}$$

(3). Si $|z - \zeta_0| < \delta$ entonces

$$\sup_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} P(z, \zeta) \leq \frac{1 - |z|^2}{(\delta - |\zeta_0 - z|)^2},$$

ya que

$$|\zeta - z| \geq ||\zeta_0 - z| - |\zeta_0 - \zeta|| = |\zeta_0 - \zeta| - |z - \zeta_0| \geq \delta - |z - \zeta_0| > 0.$$

Y teniendo en cuenta que cuando $z \to \zeta_0$ ocurre que $|z| \to |\zeta_0| = 1$ y $|\zeta_0 - z| \to 0$, resulta que

$$\sup_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta} P(z,\zeta) \leq \frac{1-|z|^2}{(\delta - |\zeta_0 - z|)^2} \to \frac{0}{\delta^2} = 0.$$

□

Teorema 2.50. *Sea $B = B(w,r)$ y $\phi\colon \partial B \to \mathbb{R}$ una función integrable, entonces*

1. *$P_B\phi$ es armónica en B.*
2. *Si ϕ es contina en $\zeta_0 \in \partial G$, entonces $\lim_{z\to\zeta_0} P_B\phi(z) = \phi(\zeta_0)$*

Demostración. (1). Podemos hacer un cambio de variable afín y suponer que $w = 0$ y $r = 1$, entonces $B = B(0,1)$. Entonces

$$P_B\phi(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\phi(e^{i\theta})d\theta\right),$$

por lo que $P_B\phi$ es la parte real de una función holomorfa, por lo tanto es armónica.

(2). Podemos suponer otra vez que $B = B(0,1)$. Por el Lema 2.49,

$$\begin{aligned} |P_B\phi(z) - \phi(\zeta_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})(\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0))d\theta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})\left|\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)\right| d\theta. \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Si ϕ es continua en ζ_0, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$|\zeta - \zeta_0| < \delta \Rightarrow |\phi(\zeta) - \phi(\zeta_0)| < \epsilon.$$

Usando ahora el Lema 2.49, se sigue que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\left|e^{i\theta}-\zeta_0\right|<\delta} P(z,e^{i\theta})\left|\phi(e^{i\theta} - \phi(\zeta_0))\right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})\epsilon d\theta = \epsilon,\ |z|<1.$$

También por el Lema 2.49, existe $\delta' > 0$ tal que

$$|z - \zeta_0| < \delta' \Rightarrow \sup_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta} P(z,\zeta) < \epsilon.$$

Por lo tanto si $|z - \zeta_0| < \delta'$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{\left|e^{i\theta}-\zeta_0\right|\geq\delta} P(z,e^{i\theta})\left|\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)\right| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon\left|\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)\right| d\theta \\ &\leq \epsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\phi(e^{i\theta})\right| d\theta + |\phi(\zeta_0)|\right). \end{aligned}$$

Juntando estas dos desigualdades, deducimos que para $|z - \zeta_0| < \delta'$ entonces

$$|P_B\phi(z) - \phi(\zeta_0)| \leq \epsilon\left(1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\phi(e^{i\theta})\right| d\theta + |\phi(\zeta_0)|\right).$$

Con esto concluye la prueba. □

Definición 2.51. Sea E un espacio topológico y $a \in E$. Sea $u\colon E \to [-\infty, \infty)$, definimos su *límite superior* cuando $x \to a$ como

$$\limsup_{x \to a} u(x) = \inf \{\sup \{u(y) \mid y \in G\} \mid G \text{ abierto con } a \in G\}.$$

Decimos que una función $u\colon E \to [-\infty, \infty)$ es *superiormente semicontinua* si el conjunto $\{x \in E \mid u(x) < \alpha\}$ es abierto en E para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.52. *Sea E un espacio topológico, $u\colon E \to [-\infty, \infty)$ es superiormente semicontinua si y solo si*

$$\limsup_{x \to a} u(x) \leq u(a), \ \forall a \in E.$$

Demostración. Si u es superiormente semicontinua, para $\alpha > u(a)$ tenemos que

$$a \in \{x \in E \mid u(x) < \alpha\} =: U_\alpha,$$

que son abiertos. Entonces

$$\limsup_{x \to a} u(x) \leq \inf \{\sup \{u(y) \mid y \in U_\alpha\} \mid u(a) < \alpha\} \leq \inf \{\alpha \mid u(a) < \alpha\} = u(a).$$

Recíprocamente, supongamos que

$$\limsup_{x \to a} u(x) \leq u(a), \ \forall a \in E.$$

Sea $U_\alpha = \{x \in E \mid u(x) < \alpha\}$, y sea $a \in U_\alpha$, es decir, $u(a) < \alpha$. Como

$$\limsup_{x \to a} u(x) = \inf \{\sup \{u(y) \mid y \in U\} \mid U \text{ abierto con } a \in U\} \leq u(a) < \alpha,$$

existe un abierto U con $a \in U$ de forma que $\sup \{u(x) \mid x \in U\} < \alpha$, y por lo tanto $U \subset U_\alpha$. Como es válido para todo $a \in U_\alpha$, esto prueba que U_α es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y por lo tanto u es superiormente semicontinua. □

Proposición 2.53. *Sea u una función superiormente semicontinua en un espacio topológico E, y sea K un subconjunto compacto de E. Entonces u está acotada superiormente en K y alcanza su máximo.*

Demostración. Los conjuntos $U_n = \{x \in E \mid u(x) < n\}, n \geq 1$ forman un cubrimiento abierto de K, por lo tanto existe un subcubrimiento finito $\{U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_k}\}$. Si $N = \max_{1 \leq j \leq k} n_k$, se verifica que $u(x) < N$ para todo $x \in K$, luego u está acotada superiormente en K. Sea ahora $M = \sup_{x \in K} u(x)$. Entonces los conjuntos $\{x \in E \mid u(x) < M - 1/n\}$ con $n \geq 1$ no forman un cubrimiento abierto de K, ya que no posee un subcubrimiento finito. Por lo tanto $K \notin \cup_{n \geq 1} \{x \in E \mid u(x) < M - 1/n\} = \{x \in E \mid u(x) < M\}$, de modo que $u(x) = M$ para algún $x \in K$. □

Teorema 2.54. *Sea u una función superiormente semicontinua en un espacio métrico (E, d), y supongamos que u está acotada superiormente en E. Entonces existe una sucesión de funciones continuas $\phi_n\colon E \to \mathbb{R}$ tal que $\phi_1 \geq \phi_2 \geq \cdots \geq u$ en E y $\lim_{x \to \infty} \phi_n = u$.*

Demostración. Podemos suponer que $u \not\equiv -\infty$ (ya que si fuese así podemos tomar $\phi_n \equiv -n$). Para $n \geq 1$, definimos $\phi_n \colon E \to \mathbb{R}$ por

$$\phi_n(x) = \sup_{y \in E}(u(y) - nd(x,y)).$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\sup_{x\in B} f(x) = \sup_{x\in B}(f(x) - g(x) + g(x)) \leq \sup_{x\in B}(f(x) - g(x)) + \sup_{x\in B} g(x),$$

llegamos a que

$$\sup_{x\in B} f(x) - \sup_{x\in B} g(x) \leq \sup_{x\in B}(f(x) - g(x)) \leq \sup_{x\in B} |f(x) - g(x)|.$$

De forma análoga,

$$\sup_{x\in B} g(x) - \sup_{x\in B} f(x) \leq \sup_{x\in B}(g(x) - f(x)) \leq \sup_{x\in B} |g(x) - f(x)| = \sup_{x\in B} |f(x) - g(x)|,$$

y por lo tanto

$$\left|\sup_{x\in B} f(x) - \sup_{x\in B} g(x)\right| \leq \sup_{x\in B} |f(x) - g(x)|.$$

Entonces para cada n tenemos

$$\begin{aligned}|\phi_n(x) - \phi_n(x')| &\leq \sup_{y\in E} |u(y) - nd(x,y) - (u(y) - nd(x',y))| = n \sup_{y\in E} |d(x,y) - d(x',y)| \\ &\leq n \sup_{y\in E} |d(x,x') + d(x',y) - d(x',y)| = nd(x,x'),\end{aligned}$$

por lo que ϕ_n es continua en E. Claramente $\phi_1 \geq \phi_2 \geq \cdots \geq u$, y por lo tanto en particular $\lim_{n\to\infty} \phi_n \geq u$. Por otro lado, considerando $B_d(x,r) = \{y \in E \mid d(x,y) < r\}$, tenemos que

$$\phi_n(x) \leq \max\left\{\sup_{B_d(x,r)} u, \sup_E u - nr\right\}, \text{ para todo } r > 0 \text{ y } x \in E,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \leq \sup_{B_d(x,r)} u, \text{con } r > 0 \text{ y } x \in E.$$

Como u es superiormente semicontinua, tomando $r \to 0$ obtenemos que $\lim_{n\to\infty} \phi_n \leq u$. $\square$

Definición 2.55. Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Una función $u \colon G \to [-\infty, \infty)$ superiormente semicontinua se dice *subarmónica* si cuando $\overline{B(a,r)} \subset G$, entonces

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt.$$

Teorema 2.56 (Principio del Máximo)**.** *Sea u una función subarmónica definida en un abierto conexo $G \subset \mathbb{C}$.*

1. *Si u alcanza un máximo global en G, entonces u es constante.*

2. *Si* $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq 0$ *para todo* $\zeta \in \partial G$*, entonces* $u \leq 0$ *en* G*.*

Demostración. Para la primera parte, supongamos que el máximo absoluto de u es $u(z_0) = M$ con $z_0 \in G$. Definimos

$$A = \{z \in G \mid u(z) < M\}, \; B = \{z \in G \mid u(z) = M\}.$$

Como u es superiormente semicontinua, A es abierto. B también es abierto, en efecto, si $u(w) = M$, entonces para $\overline{B(w,r)} \subset G$, debido a que u es subarmónica, tendremos que

$$M = u(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w + re^{it})dt \leq M.$$

Pero si hubiese un $t \in [0, 2\pi]$ para el cual $u(w + re^{it}) < M' < M$, por semicontinuidad superior, también existiría un arco $J \subset [0, 2\pi]$ para el cual $u(w + r^{it}) \leq M' < M$, y la integral anterior sería

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w + re^{it})dt \leq \frac{\mathrm{long}(J)M' + (2\pi - \mathrm{long}(J))M}{2\pi} < M,$$

contradiciendo que

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w + re^{it})dt.$$

Por lo tanto, para una bola D suficientemente pequeña centrada en w resulta que $u(z) = M$ para todo $z \in D$, de donde B también es abierto. Pero como G es conexo y $G = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$, tendremos que o $G = A$ o $G = B$, pero $B \neq \emptyset$, concluyendo que $G = B$ y por lo tanto $u(z) = M$ para todo $z \in G$.

Para la otra, extendemos u a ∂G definiendo $u(\zeta) = \limsup_{z\to\zeta} u(z), (\zeta \in \partial G)$. Entonces u es superiormente semicontinua por la Propsición 2.52 en $\overline{G}$, que es compacto, por lo tanto, por la Proposición 2.53, u alcanza su máximo en algún $w \in \overline{G}$. Si $w \in \partial G$, entonces por la hipótesis $u(w) \leq 0$, por lo tanto $u \leq 0$ en G. Por otro lado, si $w \in G$, por el apartado anterior, u es constante en G, por lo tanto en $\overline{G}$, y de nuevo $u \leq 0$ en G. □

Teorema 2.57. *Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$, y sea $u\colon G \to [-\infty, \infty)$ una funcioón superiormente semicontinua. Entonces son equivalentes.*

1. *La función u es subarmónica en G.*

2. *Siempre que $\overline{B(w,R)} \subset G$, entonces para $r < R$ y $0 \leq t < 2\pi$,*

$$u(w + re^{it}) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2} u(w + Re^{i\theta})d\theta.$$

3. *Siempre que D sea un conjunto abierto y conexo relativamente compacto de G, y h una función armónica en D verificando que*

$$\limsup_{z\to\zeta}(u - h)(z) \leq 0, \; \text{con } \zeta \in \partial G,$$

entonces $u \leq h$ en D.

Demostración. (1)⇒(3). Dado D y h como en (3), la función $u-h$ es subarmónica en D, por lo tanto la conclusión se sigue del Principio del Maximo, Teorema 2.56.

(3)⇒(2). Supongamos que $\overline{B} = \overline{B(w,R)} \subset G$. Por el Teorema 2.54 existe una sucesión de funciones continuas $\phi_n \colon \partial B \to \mathbb{R}$ tales que $\text{lím}_{n\to\infty} \phi_n = u$ y $\phi_1 \geq \phi_2 \geq \cdots \geq u$ en ∂G. Por el Teorema 2.50 cada $P_B\phi_n$ es armónica en G. También, $\text{lím}_{z\to\zeta} P_G\phi_n(z) = \phi_n(\zeta)$ para todo $\zeta \in \partial G$, y por lo tanto

$$\limsup_{z\to\zeta}(u - P_G\phi_n)(z) \leq u(\zeta) - \phi_n(\zeta) \leq 0, \quad \zeta \in \partial G.$$

Por (3) se sigue que $u \leq P_G\phi_n$ en G. Tomando $n \to \infty$ y usando el Teorema de la Convergencia Monótona, obtenemos la desigualdad buscada.

(2)⇒(1). Basta tomar $r = 0$ para ver que cuando $\overline{B(w,R)} \subset G$ entonces

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w + Re^{i\theta})d\theta.$$

□

Proposición 2.58 (Desigualdad Integral de Poisson). *Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$, y se $u \colon G \to [-\infty, \infty)$ una función subarmónica, entonces siempre que $\overline{B(w,r)} \subset G$, para $r < R$ tendremos que*

$$u(w + re^{it}) \leq \frac{R+r}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int u(w + Re^{i\theta})d\theta.$$

Demostración. Basta notar que $(R-r)^2 = R^2 - 2rR + r^2 \leq R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2$, y aplicar que por ser u subarmónica tenemos que

$$\begin{aligned} u(w + r^{it}) &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2} u(w + Re^{i\theta})d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{(R-r)^2} u(w + Re^{i\theta})d\theta = \frac{R+r}{R-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w + Re^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

□

Raíces del Análisis Complejo

El siguiente eje cronológico se ha realizado a partir de la nota de Merino [15].

Cuadro 2.1: Orígenes de los números y del análisis complejo

Siglos VIII-IX	Al-Khwarizmi en su obra Álgebra presenta soluciones a varias ecuaciones cuadráticas pero solo con soluciones positivas.
Siglo XII	Los métodos algebraicos conocidos por los árabes llegan a Italia por dos fuentes, gracias a la traducción a latín de la obra de Al-Khwarizmi realizada por Gerard de Cremona y también gracias al trabajo de Leonardo de Pisa (Fibonacci).
Siglo XIV	Manuscritos florentinos anónimos reducen la ecuación cúbica general $x^3+ax^2+bx+c=0$ a $x^3+px+q=0$ mediante el cambio de variable $x'=x+a/3$.
Siglo XVI	Scipione del Ferro resuelve por primera vez el caso degenerado $x^3+px=q$ con coeficientes positivos. Bombelli introduce la notación $\sqrt{-1}$.
Siglo XVIII	Euler introduce la notación $i=\sqrt{-1}$ y visualiza los números complejos con coordenadas rectangulares y prueba la identidad que lleva su nombre $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.
1811	En una carta de Gauss a Bessel se menciona el teorema conocido como Teorema de Cauchy, posteriormente redescubierto por Cauchy.
1814	Cauchy inicia la teoría de funciones complejas. En una memoria enviada a la Académie des Sciences de Francias aparece el concepto (pero no el término) de función analítica. En esta memoria aparecen las integrales sobre caminos.
1847	Cauchy construye el conjunto de números complecos como $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$.
1885	Carl Runge demuestra el Teorema de Runge.
1896	Hadamard y Poussin demuestran independiente el Teorema de los números primos, es decir, que $\pi(n)\sim n/\ln(n)$ asintóticamente cuando $n\to\infty$, donde $\pi(n)$ es la cantidad de números primos $\leq n$.

Capítulo 3

Los espacios $H_v^\infty(G)$

En este capítulo vamos a seguir el artículo de Bonet y Vukotić [6] en el cual se consideran funciones peso v sobre abiertos conexos G del plano complejo, esto es, una función

$$v\colon G \to [0,\infty)$$

arbitraria y se define el espacio de funciones holomorfas asociadas al peso v:

$$H_v^\infty(G) = \{f \in H(G) \mid \|f\|_v = \sup_{z\in G} v(z)\,|f(z)| < \infty\},$$

junto con la seminorma

$$\|f\|_v = \sup_{z\in G} v(z)\,|f(z)|\,.$$

Ejemplo 3.1. Un ejemplo muy sencillo de este tipo de espacio nos lo da el Teorema de Liouville, el cual dice que una función entera y acotada debe ser constante. Por lo tanto para el peso $v \equiv C > 0$, tenemos que

$$H_v^\infty(\mathbb{C}) = \{f \in H(G) \mid f(z) \equiv \alpha,\, \alpha \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}.$$

Es muy sencillo ver que en este caso $\|\cdot\|_v$ es una norma, y como $\mathbb{C}$ es secuencialmente completo, es claro que $H_v^\infty(\mathbb{C})$ es un espacio de Banach.

Otro ejemplo muy simple es para el peso $v \equiv 0$, en este caso

$$H_v^\infty(G) = H(G),$$

pero este espacio no es ni siquiera normado puesto $\|\cdot\|_v \equiv 0$. ♣

En [6], los autores buscan condiciones sobre el peso v de forma que el espacio $H_v^\infty(G)$ sea de Banach.

Cuando la función peso v es continua y estrictamente positiva es sencillo probar que su espacio asociado es de Banach.

Proposición 3.2. *Sea $v\colon G \to (0,\infty)$ un peso continuo. Entonces $(H_v^\infty(G), \|\cdot\|_v)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sabemos que $\|\cdot\|_v$ es una seminorma en $H_v^\infty(G)$, comprobemos que es una norma. Si $\|f\|_v = 0$, como v es siempre positiva, debe de ser $f(z) = 0$ para todo $z \in G$, por lo tanto es claro que $\|\cdot\|_v$ es una norma.

Veamos que es secuencialmente completo. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de funciones en $H_v^\infty(G)$, es decir, que dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que si $n, m \geq N$, entonces $\|f_n - f_m\|_v < \epsilon$. Para un $z \in G$ fijo podemos tomar $v(z)\epsilon > 0$, y entonces,

$$|f_n(z) - f_m(z)|\, v(z) \leq \|f_n - f_m\|_v < v(z)\epsilon \Rightarrow |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon.$$

Por lo tanto, para cada $z \in G$ $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, que es un espacio secuencialmente completo, por lo tanto podemos definir $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$. Esta función pertenece a $H_v^\infty(G)$, ya que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces $\|f_n - f_m\|_v < 1$ y por lo tanto, para todo $z \in G$

$$|f_n(z) - f_m(z)|\, v(z) \leq \|f_n - f_m\|_v < 1,$$

haciendo ahora $n \to \infty$, tendremos que para todo $m \geq N$, $|f(z) - f_m(z)|\, v(z) \leq 1$, y por lo tanto $\|f - f_m\|_v \leq 1$, por otro lado f_N era acotada para esta norma, y por lo tanto, para todo $z \in G$

$$|f(z)|\, v(z) \leq |f(z) - f_N(z)|\, v(z) + |f_N(z)|\, v(z) \leq 1 + \|f_N\|_v,$$

lo cual implica que $\|f\|_v \leq 1 + \|f_N\|_v$. Además, $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_v = 0$, ya que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ se verifica que $|f_n(z) - f_m(z)|\, v(z) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $z \in G$, tomando de nuevo $n \to \infty$ se tiene que $|f(z) - f_m(z)|\, v(z) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ para todo $z \in G$, por lo que $\|f - f_m\|_v < \epsilon$ para todo $m \geq N$.

Falta ver que es holomorfa en G. Para ello, es suficiente ver que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre compactos de G. En efecto, dado $K \subset G$ compacto, ya que v es continua, existe $0 < m = \min_{z\in K} v(z)$. Entonces, para todo $z \in K$

$$|f(z) - f_n(z)| = \frac{m}{m}\, |f(z) - f_n(z)| \leq \frac{1}{m}\, |f(z) - f_n(z)|\, v(z) \leq \frac{1}{m} \|f - f_n\|_v \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

es decir, la sucesión de funciones holomorfas converge uniformemente a f sobre K, y como K era un compacto arbitrario de G, la sucesión converge uniformemente sobre compactos de G, lo que implica que su límite, f, también es una función holomorfa en G. $\square$

Nota 3.3. Notemos que con los argumentos empleados en la demostración anterior se puede ver que si $z \in G$ y $v(z) > 0$, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f$ en $H_v^\infty(G)$ implica que $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} \to f(z)$ en $\mathbb{C}$. $\diamondsuit$

¿Pero qué pasa cuando no tenemos condiciones tan beneficiosas? En esos casos, el espacio puede no ser secuencialmente completo, o incluso ni siquiera normado como ya se ha visto en el Ejemplo 3.1. En lo que sigue vamos a ver distintas propiedades que nos servirán para saber si estos espacios son de Banach o no.

Dado un peso v en G, vamos a denotar

$$E_v = \{z \in G \mid v(z) > 0\}.$$

Es una propiedad de este conjunto la que caracteriza el carácter normado del espacio $H_v^\infty(G)$.

Proposición 3.4. *Sea $v\colon G \to [0,\infty)$ un peso en un abierto conexo G. Entonces el espacio $H_v^\infty(G)$ es normado si y solo si E_v tiene algún punto de acumulación en G.*

Demostración. Si E_v tiene algún punto de acumulación en G y $\|f\|_v = 0$, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in E_v$, es decir, el conjunto de ceros de f tiene puntos de acumulación, por lo tanto, por el principio de identidad de las funciones holomorfas, $f = 0$, lo que implica que $\|\cdot\|_v$ es una norma.

Recíprocamente, si E_v no posee puntos de acumulación, podemos aplicar el Teorema de Interpolación de Weierstrass y obtener así una función holomorfa $f \in H(G)$, que posee ceros exactamente en los elementos de E_v, por lo tanto $\|f\|_v = 0$ y $f \neq 0$, por lo tanto $\|\cdot\|_v$ no es una norma. □

Dado un espacio seminormado (X, p), el espacio normado asociado está definido por $(\tilde{E}, \tilde{p}) = (X/\ker(p), \tilde{p})$, con $\tilde{p}(x + \ker(p)) = p(x)$, que es una seminorma por serlo p, y además $\tilde{p}(x + \ker(p)) = 0$ si y solo si $p(x) = 0$, es decir si y solo si $x \in \ker(p)$, por lo tanto, $(X/\ker(p), \tilde{p})$ es un espacio normado.

Proposición 3.5. *Sea $v\colon G \to [0,\infty)$ un peso en un abierto conexo G. Si el conjunto E_v no posee puntos de acumulación en G, entonces el espacio normado asociado a $H_v^\infty(G)$ es isométricamente isomorfo a un espacio de Banach l_∞ asociado a un peso.*

Demostración. Como E_v no tiene puntos de acumulación, el conjunto es una sucesión discreta (o un conjunto finito). Escribamos $E_v = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y definimos $\omega(n) = v(z_n),\ n \in \mathbb{N},\ \omega = (\omega(n))_n$ y $l_\infty(\omega) = \{x = (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_\omega = \sup_{n\in\mathbb{N}} \omega(n)\,|x_n| < \infty\}$. La aplicación lineal

$$\begin{aligned} \Phi\colon H_v^\infty(G) &\to l_\infty(\omega) \\ f &\mapsto (f(z_n))_n \end{aligned}$$

está bien definida, y verifica que $\|\Phi(f)\|_\omega = \|f\|_v$ para toda $f \in H_v^\infty(G)$, además es sobreyectiva por el Teorema de Interpolación de Weierstrass y su núcleo coincide con el núcleo de $\|\cdot\|_v$, lo cual concluye el resultado. □

Lema 3.6. *Sea $v\colon G \to [0,\infty)$ un peso en un abierto conexo G. Si el espacio $H_v^\infty(G)$ es normado, la aplicación inclusión $J\colon H_v^\infty(G) \to (H(G), \tau_{co})$ tiene el Grafo Cerrado.*

Demostración. Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H_v^\infty(G)$ tal que $f_j \to f$ en $H_v^\infty(G)$ y $f_j \to g$ en $(H(G), \tau_{co})$ cuando $j \to \infty$. En particular por la Nota 3.3 $f_j(z) \to f(z)$ cuando $z \in E_v$ y $f_j(z) \to g(z)$ para todo $z \in G$, entonces, por el principio de identidad de funciones holomorfas, se concluye que $f = g$ en G, y por lo tanto el grafo de J es cerrado. □

Para $z \in G$, denotaremos por $\delta_z\colon H(G) \to \mathbb{C}$ el funcional "evaluación en z", $\delta_z(f) = f(z)$. Cuando $H_v^\infty(G)$ sea normado, la norma de su espacio dual $H_v^\infty(G)'$ la denotaremos por $\|\cdot\|_v'$.

Proposición 3.7. *Supongamos que el espacio $H_v^\infty(G)$ es normado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a. El espacio $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach.

b. La aplicación inclusión $J\colon H_v^\infty(G) \to (H(G), \tau_{co})$ es continua.

c. La bola unidad cerrada B_v^∞ *de* $H_v^\infty(G)$ *es acotada en* $(H(G), \tau_{co})$.

d. Para cada $z \in G$*, el funcional* $\delta_z \in H_v^\infty(G)'$ *y además* $\sup_{z\in K} \|\delta_z\|_v' < \infty$ *para cada compacto* $K \subset G$.

Demostración. (a.)$\Rightarrow$(b.) Por el Lema 3.6, el grafo de J es cerrado, y los espacios $H_v^\infty(G)$ y $(H(G), \tau_{co})$ son ambos espacios vectoriales topológicos, metrizables y secuencialmente completos, por lo tanto es consecuencia del Teorema del Grafo Cerrado que la aplicación J sea continua.

(b.)$\Rightarrow$(a.) Sea $\{f_j\}_j$ una sucesión de Cauchy en $H_v^\infty(G)$. Por la continuidad de J, toda sucesión de Cauchy en $H_v^\infty(G)$ también lo es en $(H(G), \tau_{co})$, y puesto que este espacio es secuencialmente completo, existe $f \in H(G)$ tal que $\{f_j\}_j$ converge uniformemente a f en los conjuntos compactos de G. Por otro lado,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall j, k \geq N,\ \forall z \in G\colon v(z)\,|f_j(z) - f_k(z)| < \epsilon.$$

Si $v(z) = 0$ entonces $v(z)\,|f_j(z) - f(z)| = 0,\ j \geq N$, y si $v(z) > 0$, tomando $k \to \infty$, $v(z)\,|f_j(z) - f(z)| \leq \epsilon$ para todo $j \geq J$. Esto implica, para $\epsilon = 1$, $v(z)\,|f(z)| \leq 1 + \|f_N\|_v$ para cada $z \in G$ y por lo tanto $f \in H_v^\infty(G)$. Además, para ϵ arbitrario, tenemos que $f_j \to f$ en $H_v^\infty(G)$ cuando $j \to \infty$.

(b.)$\Rightarrow$(c.) Sea U un entorno de cero en $(H(G), \tau_{co})$, por la continuidad de la aplicación inclusión J, existirá V entorno de cero de $H_v^\infty(G)$ con $V \subset U$, ahora bien, como B_v^∞ es acotado en $H_v^\infty(G)$, podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon B_v^\infty \subset V \subset U$, lo que prueba que B_v^∞ es acotada en $(H(G), \tau_{co})$.

(c.)$\Rightarrow$(b.) Sea $f \in H_v^\infty(G) \subset H(G)$, sus entornos son de la forma $f + U$, donde U es un entorno de cero en $(H(G), \tau_{co})$, por otro lado, la bola unidad cerrada B_v^∞ es un entorno de cero de $H_v^\infty(G)$, y por lo tanto también lo será ϵB_v^∞ para todo $\epsilon > 0$. Por la acotación de B_v^∞ en $(H(G), \tau_{co})$, para el entorno de cero U podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon B_v^\infty \subset U$, esto implica que $f + \epsilon B_v^\infty \subset f + U$, donde $f + \epsilon B_v^\infty$ es un entorno de f en $H_v^\infty(G)$, es decir, la aplicación inclusión J es continua en f. como f es arbitrario, concluimos que J es continua.

(b.)$\Rightarrow$(d.) Como $\delta_z \in (H(G), \tau_{co})'$ para todo $z \in G$, y como J es continua, también $\delta_z \in H_v^\infty(G)'$ para cada $z \in G$. Además, dado un compacto $K \subset G$, ya que sa seminorma $\|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(Z)|$ es continua en $(H(G), \tau_{co})$ existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq C \sup_{z\in G} v(z)\,|f(z)| = C\|f\|_v$$

para cada $f \in H_v^\infty(G)$. Lo que implica que $\|\delta_z\|_v' \leq C$ para cada $z \in K$.

(d.)$\Rightarrow$(b.) Fijemos un compacto $K \subset G$ y sea $M = \sup_{z\in K} \|\delta_z\|_v'$. Si $f \in H_v^\infty(G)$ verifica que $\|f\|_v \leq 1$, entonces $|f(z)| \leq \|\delta_z\|_v' \leq M$ para cada $z \in K$. Esto implica que $\sup_{z\in K} |f(z)| \leq M\|f\|_v$ para cada $f \in H_v^\infty(G)$, lo que prueba que la inclusión J es continua. $\square$

Proposición 3.8. *Sea* $v\colon G \to [0, \infty)$ *un peso en un abierto conexo* G *y supongamos que el espacio* $H_v^\infty(G)$ *es de Banach, y consideramos el peso*

$$\tilde{v}(z) = \frac{1}{\|\delta_z\|_v'},\ z \in G,$$

entonces $H_v^\infty(G) = H_{\tilde{v}}^\infty(G)$ *y se verifica la igualdad de normas* $\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{\tilde{v}}$.

Demostración. Por la Proposición 3.7, como el espacio de de Banach, tenemos que para cada $z \in G$, $\delta_z \in H_v^\infty(G)'$, por lo tanto el peso $\tilde{v}$ está bien definido. Tenemos que $v(z) \leq \tilde{v}(z)$. En efecto, si $v(z) = 0$, la desigualdad es obvia. Si $v(z) > 0$ y $g \in H_v^\infty(G)$ verifica que $\|g\|_v \leq 1$, entonces $|g(z)| \leq \frac{1}{v(z)}$, lo que implica que $\frac{1}{\tilde{v}(z)} = \sup_{\|g\|_v=1} |g(z)| \leq \frac{1}{v(z)}$, es decir $v(z) \leq \tilde{v}(z)$. Esto en particular implica que $H_{\tilde{v}}^\infty(G) \subset H_v^\infty(G)$, con la inclusión continua, y $\|\cdot\|_v \leq \|\cdot\|_{\tilde{v}}$.

Veamos ahora que $H_{\tilde{v}}^\infty(G) = H_v^\infty(G)$ y que $\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{\tilde{v}}$. Si $f \in H_v^\infty(G)$ y $\|f\|_v \leq 1$, entonces $\tilde{v}(z)\,|f(z)| = |f(z)|\,/\|\delta_z\|_v' \leq 1$ para cada $z \in G$. Por lo tanto $f \in H_{\tilde{v}}^\infty(G)$ y $\|f\|_{\tilde{v}} \leq 1$. Esto implica que $H_v^\infty(G) \subset H_{\tilde{v}}^\infty(G)$ y la desigualdad de las normas que faltaba, ya que dada $f \in H_v^\infty(G)$, tenemos que $\|\frac{f}{\|f\|_v}\|_v = 1$, por lo tanto $\|\frac{f}{\|f\|_v}\|_{\tilde{v}} \leq 1$, lo que implica que $\|f\|_{\tilde{v}} \leq \|f\|_v$. □

Teorema 3.9. *Sea $v\colon G \to [0, \infty)$ un peso acotado en un abierto conexo G tal que el espacio $H_v^\infty(G)$ es normado. El espacio $H_v^\infty(G)$ es secuencialmente completo si y solo si existe un peso acotado, continuo y estrictamente positivo $\tilde{v}$ en G tal que $H_v^\infty(G) = H_{\tilde{v}}^\infty(G)$.*

Demostración. Ya sabemos por la Proposición 3,2 que si $\tilde{v}$ es un peso continuo y estrictamente positivo en G, entonces el espacio $H_{\tilde{v}}^\infty(G)$ es un espacio de Banach.

Para probar el recíproco, por ser v acotado, existe $M > 0$ tal que $0 \leq v(z) \leq M$ para cada $z \in G$. Por lo tanto, la función constante $f_0(z) = \frac{1}{M}$, $z \in G$ pertenece a $H_v^\infty(G)$ y $\|f_0\|_v \leq 1$.

Por la Proposición 3.7, para cada $z \in G$, tenemos que $\delta_z \in H_v^\infty(G)'$ y

$$\|\delta_z\|_v' \geq |f_0(z)| = \frac{1}{M} > 0.$$

Sea ahora

$$\tilde{v}(z) = \frac{1}{\|\delta_z\|_v'}, \quad z \in G.$$

Por el comentario anterior, $0 < \tilde{v}(z) \leq M$ para cada $z \in G$. Además, $v(z) \leq \tilde{v}(z)$ para cada $z \in G$. Como $H_v^\infty(G)$ es de Banach, podemos aplicar la Proposición 3.8 para ver que $H_v^\infty(G) = H_{\tilde{v}}^\infty(G)$.

Falta probar que el peso $\tilde{v}$ es continuo. Sea $\Delta\colon G \to H_v^\infty(G)'$, $\Delta(z) = \delta_z$ está bien definida y es localmente acotada ya que cada $z \in G$ tiene un entorno compacto en donde Δ está acotada por el apartado (d.) de la Proposición 3.7. Ahora, para cada $f \in H_v^\infty(G) \subset H_v^\infty(G)''$, la aplicación $T_f \circ \Delta\colon G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Por el Teorema 2.36 la aplicación vector valuada $\Delta\colon G \to H_v^\infty(G)'$ es holomorfa, y por lo tanto continua para la norma del dual $\|\cdot\|_v'$ en $H_v^\infty(G)'$. Como la norma es continua, se sigue que la función dada por $\tilde{v}(z) = \frac{1}{\|\Delta(z)\|_v'}$ es continua, por ser composición de continuas. □

Nota 3.10. (1) Un peso v en G es acotado si y solo si la función constante 1 pertenece a $H_v^\infty(G)$ si y solo si cada función analítica acotada en G pertenece a $H_v^\infty(G)$. En este caso, $H_v^\infty(G)$ es no trivial.

(2) Denotaremos la bola centrada en z_0 y de radio r por

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Supongamos que existe un punto $z_0 \in E_v$ con $B(z_0, r_0) \subset E_v$ para algún $r_0 > 0$ y tal que la función $\omega(r) = \sup\{\frac{1}{v(z)} \mid |z - z_0| < r\}$, $0 < r < r_0$ verifica que $\lim_{r \to 0} \frac{\omega(r)}{r^n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea ahora $f \in H_v^\infty(G)$, y sea $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$ su desarrollo en serie de potencias centrado en z_0, entonces, las desigualdades de Cauchy implican que $|a_n| \leq \|f\|_v \frac{\omega(r)}{r^n}$ para cada $0 < r < r_0$, por lo tanto $a_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $H_v^\infty(G) = \{0\}$.

(3) Dado cualquier entero positivo n, el espacio $H_v^\infty(G)$ puede ser n-dimensional, al menos cuando $G = \mathbb{C}$. Tomamos, por ejemplo, $v(z) = \min(1, |z|^{1/2-n})$, $z \in \mathbb{C}$. En este caso, también a partir de las desigualdades de Cauchy se sigue que $H_v^\infty(\mathbb{C})$ está formado por los polinomios de grado a lo sumo $n-1$ ya que $|f(z)| \leq C\,|z|^{n-1/2}$ para $|z| > 1$.

(4) Supongamos que v está localmente acotada, es decir, para cada $z \in G$ existe $r(z) > 0$ de forma que $B(z, r(z)) \subset G$ y $\sup\{v(\zeta) \mid \zeta \in B(z, r(z))\} < \infty$. Si $H_v^\infty(G) \neq \{0\}$, entonces $\|\delta_z\|_v' > 0$ para cada $z \in G$ con $\delta_z \in H_v^\infty(G)'$. Para comprobarlo, basta observar que si $f_0 \in H_v^\infty(G)$ es no nula y tal que $f_0(z_0) = 0$ y k es el orden del cero z_0 de f_0, entonces $g_0(z) = \frac{f_0(z)}{(z-z_0)^k} \in H_v^\infty(G)$ y $g_0(z_0) \neq 0$.

(5) Si v es localmente acotado y la dimensión de $H_v^\infty(G)$ es al menos 2, entonces $H_v^\infty(G)$ separa puntos de G. En efecto, sean $z_1 \neq z_2$ dos puntos de G. Si $\ker(\delta_{z_1})$ en $H_v^\infty(G)$ es $\{0\}$, entonces la dimensión de $H_v^\infty(G)$ es 0 o 1, ya que $\ker(\delta_{z_1})$ es un hiperplano de $H_v^\infty(G)$. En otro caso, existe una función $f \in H_v^\infty(G)$ tal que $f(z_1) = 0$. Si $f(z_2) \neq 0$, hemos acabado. Si $f(z_2) = 0$ y k es el orden del cero z_2 de $f(z)$, entonces $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_2)^k} \in H_v^\infty(G)$ y $g(z_1) = 0 \neq g(z_2)$.

$\diamondsuit$

Ahora vamos a considerar una nueva topología τ en $H_v^\infty(G)$, que combina la convergencia en los subconjuntos compactos de G junto con la convergencia uniforme en E_v inducida por $1/v$. Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una exhaución de G, es decir, una sucesión de compactos con $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ y $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = G$. Definimos la siguiente sucesión de seminormas

$$\|f\|_n = \sup_{z \in K_n} |f(z)| + \|f\|_v, \quad f \in H_v^\infty(G), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Y definimos τ como la topología localmente convexa inducida por esta familia de normas.

Proposición 3.11. *Se verifica que $(H_v^\infty(G), \tau)$ es un espacio de Fréchet y que τ es la menor topología que es más fina que la topología compacto-abierta, τ_{co}, y que τ_v, la topología inducida por la seminorma $\|\cdot\|_v$.*

Demostración. Es claro que si $n \leq m$, entonces $\max\{\|\cdot\|_n, \|\cdot\|_m\} = \|\cdot\|_m$. Y si $f \in H_v^\infty(G)$ con $f \not\equiv 0$, existe $x \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ con $x \in K_n$ de forma que $f(x) \neq 0$, por lo tanto $\sup_{z \in K_n} |f(z)| > 0$, por lo tanto $\|f\|_n > 0$. Estas dos propiedades, según el Teorema 1.13, nos dicen que $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de seminormas en E que induce la topología localmente convexa τ. Por otro lado la Proposición 1.27 nos dice que esta topología también viene inducida por una métrica d y que (E, d) es un espacio métrico lineal. Para ver que es un espacio de Fréchet nos falta ver que es un espacio secuencialmente completo.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_v^\infty(G)$ una sucesión de Cauchy para la métrica d, entonces ya que $\sup_{z\in K_n} |f(z)| \leq \|f\|_n$, resulta que

$$d'(f_n, f_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\sup_{z\in K_k} |f_n(z) - f_m(z)|}{1 + \sup_{z\in K_k} |f_n(z) - f_m(z)|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_n - f_m\|_k}{1 + \|f_n - f_m\|_k} = d(f_n, f_m),$$

donde d' es la métrica que induce la topología τ_{co}. Así, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy en $(H(G), \tau_{co})$, que es un espacio de Fréchet, por lo tanto existe $f \in H(G)$ tal que $f_n \to f$ en el espacio $(H(G), \tau_{co})$.

De la misma forma

$$\frac{\|f_n - f_m\|_v}{1 + \|f_n - f_m\|_v} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_n - f_m\|_v}{1 + \|f_n - f_m\|_v} \leq d(f_n, f_m) < \epsilon, \ \forall n, m \geq N.$$

Entonces para $0 < \epsilon < 1/2$

$$\|f_n - f_m\|_v < \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \leq 2\epsilon, \ n, m \geq N.$$

Es decir, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy para la seminorma $\|\cdot\|_v$. Como $f_n \to f$ en $(H(G), \tau_{co})$, en concreto converge puntualmente, es decir $f_n(z) \to f(z), \ \forall z \in G$. Entonces, para $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\sup_{z\in G} v(z) |f_n(z) - f_N(z)| < 1 \Rightarrow \sup_{z\in G} v(z) |f(z) - f_N(z)| = \|f - f_N\|_v \leq 1 \Rightarrow \|f\|_v \leq 1 + \|f_N\|_v,$$

lo que prueba que $f \in H_v^\infty(G)$. Por otro lado, tomando $\epsilon > 0$ arbitrario, de la misma forma,

$$\sup_{z\in G} v(z) |f_n(z) - f_N(z)| < \epsilon \to \sup_{z\in G} v(z) |f(z) - f_N(z)| = \|f - f_N\|_v \leq \epsilon,$$

lo que prueba que $f_n \to f$ en $\|\cdot\|_v$. Por lo tanto, como $f_n \to f$ sobre compactos de G y también para $\|\cdot\|_v$, resulta que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$,

$$\|f - f_n\|_m = \sup_{z\in K_m} |f(z) - f_m(z)| + \|f - f_n\|_v < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Es decir, $f_n \to f$ para cada norma $\|\cdot\|_n$, lo que equivale a que $f_n \to f$ en el espacio $(H_v^\infty(G), \{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = (H_v^\infty(G), d)$, concluyendo que el espacio $(H_v^\infty(G), \tau)$ es un espacio de Fréchet.

Por otro lado, como

$$\sup_{z\in K_n} |f(z)| \leq \|f\|_n, \ \|f\|_v \leq \|f\|_n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

es claro que la topología τ sobre $H_v^\infty(G)$ es más fina que la topología τ_{co} y que la inducida por $\|\cdot\|_v$.

Si ahora, τ' es otra topología más fina que τ_{co} y la inducida por $\|\cdot\|_v$, para $g \in H_v^\infty(G)$ y $\epsilon > 0$ los conjuntos

$$B_{K_n}(g, \epsilon) = \left\{ f \in H_v^\infty(G) \mid \sup_{z\in K_n} |f(z) - g(z)| < \epsilon \right\},$$
$$B_v(g, \epsilon) = \{f \in H_v^\infty(G) \mid \|f - g\|_v < \epsilon\}$$

son abiertos en τ, por serlo en τ_{co} y τ_v respectivamente. Por otro lado, la familia

$$\mathcal{B} = \{B_n(g,\epsilon) \mid g \in H_v^\infty(G), \epsilon > 0, n \in \mathbb{N}\}\,,\ B_n(g,\epsilon) = \{f \in H_v^\infty(G) \mid \|f-g\|_n < \epsilon\}$$

forma una base de la topología τ, pero

$$B_n(g,\epsilon) = \bigcup_{0<\delta<\epsilon} (B_{K_n}(g,\delta) \cap B_v(g,\epsilon-\delta)),$$

por lo tanto $\mathcal{B} \subset \tau'$, es decir, la base $\mathcal{B}$ está formada por abiertos de la topología τ', lo que prueba que $\tau \subset \tau'$, concluyendo que cualquier topología más fina que τ_{co} y τ_v también será más fina que la topología τ, como queríamos ver. □

La siguiente Proposición muestra unas propiedades básicas de la topología τ.

Proposición 3.12. *Sea $v\colon G \to [0,\infty)$ un peso en un abierto conexo G.*

I. *La topología τ_v es más fina que τ si y solo si $(H_v^\infty(G), \|\cdot\|_v)$ es un espacio de Banach.*

II. *La topología τ viene inducida por una norma si y solo si existe un compacto K en G tal que el peso $w(z) = v(z) + \chi_K(z)$, $z \in G$, hace que $H_w^\infty(G)$ sea un espacio de Banach.*

III. *Si E_v está contenido en un subconjunto compacto de G y v es acotado, entonces τ coincide con la topología τ_{co} en $H_v^\infty(G)$.*

IV. *Si $H_v^\infty(G)$ contiene a los polinomios, G es simplemente conexo y $\tau = \tau_{co}$ en $H_v^\infty(G)$ entonces existe un compacto $K \subset G$ tal que $E_v \subset K$.*

V. *Si la topología τ viene inducida por una norma, entonces E_v no es discreto.*

Demostración. I. Si $\tau_v \subset \tau$, entonces las dos topología coinciden, y $(H_v^\infty(G), \|\cdot\|_v)$ es un espacio de Banach, ya que τ_v es Hausdorff y completa porque coincide con τ. Recíprocamente, si $(H_v^\infty(G), \|\cdot\|_v)$ es un espacio de Banach, entonces τ_v es más fina que τ_{co} por la Proposición 3.7. Lo que implica que τ_v es más fina que τ, ya que tenemos que τ_v es más fina que τ_{co} y τ_v, y por la minimalidad de τ respecto a esta propiedad, resulta que $\tau \subset \tau_v$.

II. La topología τ está inducida por una norma si y solo si existe m tal que para todo n existe $C_n > 0$ con $\|f\|_n \le C_n\|f\|_m$ para cada $f \in H_v^\infty(G)$. Sea $K = K_m$ y definimos $w(z) = v(z) + \chi_K(z)$. Claramente, $H_v^\infty(G) = H_w^\infty(G)$ y

$$\|f\|_w = \sup_{z\in G} w(z)\,|f(z)| \le \|f\|_m \le 2\|f\|_w$$

para cada $f \in H_v^\infty(G)$. Por lo tanto τ viene inducida por una norma si y solo si $\tau = \tau_w$ y la conclusión se sigue del apartado anterior.

III. La topología τ siempre es más fina que τ_{co} en $H_v^\infty(G)$. Supongamos que existe m con $E_v \subset K_m$ y que existe $M > 0$ tal que $v(z) \le M$ para todo $z \in G$. entonces $\|f\|_v \le M \sup_{z\in K_m} |f(z)|$ para cada $f \in H_v^\infty(G)$. Esto implica que

$$\|f\|_n \le (M+1) \sup_{z\in K_n} |f(z)|$$

para cada $f \in H_v^\infty(G)$ y cada $n \ge m$. Por lo tanto $\tau_{co} \subset \tau$ en $H_v^\infty(G)$.

IV. Si ahora $H_v^\infty(G)$ contiene a los polinomios, G es simplemente conexo y $\tau = \tau_{co}$ en $H_v^\infty(G)$. Entonces existe un compacto K en G y existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{z\in G} v(z)\,|f(z)| \leq C \sup_{z\in K} |f(z)|$$

para cada $f \in H_v^\infty(G)$. Podemos asumir que $\mathbb{C}\backslash K$ es conexo. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que existe $z \in E_v \setminus K$. Entonces

$$|f(z_0)| \leq (C/v(z_0)) \sup_{z\in K} |f(z)|\,,$$

para cada $f \in H_v^\infty(G)$. Por el Teorema de Runge K es polinomialmente convexo y existe un polinomio g tal que $|g(z_0)| > \alpha > \sup_{z\in K} |g(z)|$. Definimos $h_n = (g/\alpha)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Cada h_n es un polinomio, luego pertenece a $H_v^\infty(G)$. Tenemos que

$$|h_n(z_0)| \leq (C/v(z_0)) \sup_{z\in K} |h_n(z)| \leq C/v(z_0)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero $\lim_{n\to\infty} |h_n(z_0)| = \infty$, por lo que hemos llegado a contradicción.

V. Supongamos que E_v es discreto en G, definimos

$$X = \{f \in H_v^\infty(G) \mid f(z) = 0,\, \forall z \in E_v\}\,.$$

Razonando con otro subconjunto discreto F de G disjunto a E_v, podemos aplicar el Teorema de interpolación de Weierstrass para encontrar una sucesión linealmente independiente $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones analíticas en G que se anulan en E_v. En efecto, consideramos los conjuntos A_n de forma que $E_v \subset A_n$, $A_{n-1} \subset A_n$ y A_n contiene n de los elementos del conjunto F. Así, aplicando el Teorema de interpolación de Weierstrass podemos encontrar funciones holomorfas f_n que se anulan exactamente en los elementos de A_n. Además estas funciones son linealmente independientes, pues si consideramos una combinación lineal

$$\lambda_{j_1} f_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_k} f_{j_k} = 0,$$

tomemos $m = \min\{j_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, entonces ya que los conjuntos A_n están encajados $A_{n-1} \subset A_n$, quiere decir que todas las funciones se anulan en los elementos de A_m, pero existe un elemento $z_0 \in A_{m+1}$ de modo que $f_m(z_0) \neq 0$, entonces, evaluando esta combinación lineal en z_0 resulta $\lambda_m f_m(z_0) = 0$ de donde $\lambda_m = 0$, con este argumento, se puede ver inductivamente que $\lambda_{j_i} = 0$ para $1 \leq i \leq k$, probando que la familia $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ construida es linealmente independiente.

Por lo tanto X (y además $H_v^\infty(G)$) es de dimensión infinita. Por otro lado, la topología τ restringida a E coincide con τ_{co} restringida a X, ya que si $f \in X$, $\|f\|_n = \sup_{z\in K_n} |f(z)|$. Si $(H_v^\infty(G), \tau)$ viene inducida por una norma, entonces lo mismo ocurre con (X, τ). Pero (X, τ) es un subespacio cerrado de $(G_v^\infty(G), \tau_{co})$. Por el Teorema de Montel, los subconjuntos acotados de $(X, \tau_{co}) = (X, \tau)$ son relativamente compactos. Y por un Teorema de Riesz, el expacio (X, τ) debe ser de dimensión finita, una contradicción.

$\square$

Vamos ahora a ver una condición necesaria para que el espacio $H_v^\infty(G)$ sea de Banach. Para ello veamos primero el siguiente lema.

Lema 3.13. *Sea v un peso en un abierto conexo G tal que E_v es no discreto. Entonces el espacio normado $H_v^\infty(G)$ es secuencialmente completo si y solo si cada función $f\colon E_v \to \mathbb{C}$ para la cual existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $H_v^\infty(G)$ tal que $v(z)\,|f_n(z)-f(z)| \to 0$ uniformemente en E_v cuando $n\to\infty$, tiene una extensión holomorfa a G.*

Demostración. Si $H_v^\infty(G)$ es secuencialmente completo y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $H_v^\infty(G)$ tal que

$$v(z)\,|f_n(z)-f(z)| \to 0$$

uniformemente en E_v cuando $n\to\infty$ para alguna función $f\colon E_v\to\mathbb{C}$, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $H_v^\infty(G)$ (ya que $\|f_n - f_m\|_v \le \|f_n - f\|_v + \|f - f_m\|_v \to 0$, donde el valor de f en E_v^c es irrelevante) y entonces existe $g\in H_v^\infty(G)$ tal que $\|f_n - g\|_v \to 0$ cuando $n\to\infty$. La función g es una extensión holomorfa de f a G.

Recíprocamente, sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $H_v^\infty(G)$. Existe $f\colon E_v\to\mathbb{C}$ tal que $v(z)\,|f_n(z)-f(z)|\to 0$ uniformemente en E_v cuando $n\to\infty$. La suposición de que f tiene una extensión holomorfa nos dice que existe $g\in H(G)$ tal que $g(z)=f(z)$ para todo $z\in E_v$. Claramente $g\in H_v^\infty(G)$ ya que existe N tal que

$$v(z)\,|f_N(z)-f(z)| = v(z)\,|f_N(z)-g(z)| < 1$$

para todo $z\in E_v$, luego $\|f_N - g\|_v \le 1$, de donde $\|g\|_v \le 1 + \|f_N\|_v < \infty$, y la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en $H_v^\infty(G)$. □

Proposición 3.14. *Sea $v\colon G\to[0,\infty)$ un peso en un abierto conexo G. Si $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach, y $H_v^\infty(G)\neq\{0\}$, entonces la frontera ∂G está contenida en la clausura $\overline{E_v}$ de E_v en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Supongamos que no es así, es decir, que existe $z_0\in\partial G\setminus\overline{E_v}$. Sea $r>0$ tal que $|z-z_0|\ge r$ para todo $z\in E_v$. Elegimos una función $h\in H_v^\infty(G)$, $h\not\equiv 0$. Existe $z_1\in G$ con $|z_1-z_0|<r$ y tal que $h(z_1)\neq 0$. Tenemos que

$$f(z) := \frac{z_1-z_0}{z-z_1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

uniformemente en $|z-z_0|\ge|z_1-z_0|+\epsilon$ para todo $\epsilon>0$, y por lo tanto, también en E_v. Entonces las funciones

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)^k, \quad n\in\mathbb{N}$$

son holomorfas en G y convergen a f en E_v. Notemos que $hg_n\in H_v^\infty(G)$ ya que g_n es acotada en E_v. Tenemos que

$$\sup_{z\in E_v} v(z)\,|(hg_n)(z)-(hf)(z)| \le \|h\|_v \sup_{z\in E_v}|g_n(z)-f(z)| \to 0,$$

cuando $n\to\infty$. Por el Lema 3.13, la función $hf\colon E_v\to\mathbb{C}$ tiene una única extensión holomorfa a G. Sin embargo, hf tiene un polo en z_1, esto es una contradicción. □

Ejemplo 3.15. Como aplicación de la Proposición 3.14 tenemos el siguiente ejemplo: si consideramos el peso $v(z) = \text{máx}\{0, \text{Re}\,(z)\}$, es un peso continuo en el disco unidad $\mathbb{D}$, que se anula en la mitad izquierda del disco y es estrictamente positivo en el semidisco abierto derecho, es sencillo comprobar que no se cumple la condición necesaria de la Proposición 3.14 y por lo tanto $H_v^\infty(\mathbb{D})$ no es un espacio de Banach. ♣

Corolario 3.16. *Sea $v\colon G \to [0, \infty)$ un peso en un abierto conexo $G \neq \mathbb{C}$ tal que $H_v^\infty(G)$ es normado y no trivial. Si la frontera ∂G no está contenida en la clausura $\overline{E_v}$ de E_v en $\mathbb{C}$, entonces la topología τ de la Proposición 3.11 en el espacio $H_v^\infty(G)$ no viene inducida por una norma.*

Demostración. Supongamos lo contrario, que $(H_v^\infty(G), \tau)$ viene inducida por una norma. Por la Proposición 3.12 existe un compacto K de G tal que el peso $w(z) = v(z) + \chi_K(z)$ satisface que $H_w^\infty(G)$ es un espacio de Banach. La frontera ∂G no está contenida en la clausura $\overline{E_w} = \overline{E_v \cup K} = \overline{E_v} \cup K$ de E_w en $\mathbb{C}$, ya que no está contenida en la clausura $\overline{E_v}$ de E_v en $\mathbb{C}$ y $K \subset G$, es decir $\partial G \cap K = \emptyset$. La Proposición 3.14 implica entonces que $H_w^\infty(G)$ no es un espacio de Banach, una contradicción □

Sea A un subconjunto de un abierto conexo G de $\mathbb{C}$. La envolvente convexa de A en G es el conjunto

$$Hco(A) = \{z \in G \mid |f(z)| \leq \sup_{\zeta \in A} |f(\zeta)|\,,\ \forall f \in H(G)\} \subset G.$$

Cada abierto conexo G de $\mathbb{C}$ es holomórficamente convexo en el sentido que para cada compacto K de G, la envolvente convexa $Hco(K)$ es compacta.

Proposición 3.17. *Sea $v\colon G \to [0, \infty)$ un peso acotado en un abierto conexo G de $\mathbb{C}$. Si $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach, entonces G coincide con la envolvente convexa $Hco(E_v)$ de $E_v = \{z \in G \mid v(z) > 0\}$.*

Demostración. Lo vamos a demostrar por contradicción. Supongamos que existe un punto $z_0 \in G$ y una función $g_0 \in H(G)$ tal que

$$|g_0(z_0)| > \alpha > \sup_{\zeta \in E_v} |g_0(\zeta)|$$

para algún $\alpha > 0$. Sea $g = g_0/\alpha \in H(G)$. Entonces $g(z_0) > 1$ y $g(\zeta) \leq 1$ para cada $\zeta \in E_v$.

Veamos que la sucesión $(g^k)_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H_v^\infty(G)$. Como v está acotada, existe $M > 0$ tal que $v(z) \leq M$ para cada $z \in G$. Si $z \notin E_v$, entonces $v(z)\left|g^k(z)\right| = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si $z \in E_v$, entonces $v(z)\left|g^k(z)\right| \leq v(z) \leq M$. Por lo tanto $\sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{z\in G} v(z)\left|g^k(z)\right| \leq M$.

Por suposición, $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach, luego $(g^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $(H(G), \tau_{co})$ por la Proposición 3.7. Sin embargo $\left|g(z_0)^k\right| \to \infty$ cuando $k \to \infty$ lo cual es absurdo. □

Ejemplo 3.18. Si v es un peso acotado en $\mathbb{C}$ tal que E_v es relativamente compacto, entonces $H_v^\infty(\mathbb{C})$ no es un espacio de Banach, ya que $Hco(E_v) \subset Hco(\overline{E_v}) \subsetneq \mathbb{C}$ pues $Hco(\overline{E_v})$ es compacto, en concreto acotado, por serlo $\overline{E_v}$. ♣

Proposición 3.19. *Sea $v\colon G \to [0,\infty)$ un peso en un abierto conexo G. Supongamos que para cada $z \in G$ existe un abierto acotado $U \subset G$ tal que $z \in U$, $\partial U \subset E_v$, y v está separado de cero en ∂U, es decir $|v(z)| = v(z) > m$ si $z \in \partial U$ para cierto $m > 0$. Entonces $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $f\colon E_v \to \mathbb{C}$ una función y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $H_v^\infty(G)$ tal que $v(z)\,|f_n(z) - f(z)| \to 0$ uniformemente en E_v. Por el Lema 3.13 basta probar que f tiene una extensión holomorfa a G. Sea $U \subset G$ un subconjunto abierto, acotado, no vacío tal que $\partial U \subset E_v$ y v está separada de 0 en ∂U. Entonces $v(z)\,|f_n(z) - f(z)| \to 0$ uniformemente en ∂U y por lo tanto $|f_n(z) - f_m(z)| \to 0$ cuando $n, m \to 0$ uniformemente en ∂U. El principio del módulo máximo implica que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $\overline{U}$ a una función f_U que es holomorfa en U, continua en $\overline{U}$ y que coincide con f en $\overline{U} \cap E_v$.

Sean ahora U, V dos conjuntos abiertos acotados con $U \cap V \neq \emptyset$ tales que $\partial U \cup \partial V \subset E_v$ y v está separada de 0 en ∂U y ∂V. Entonces $\partial(U \cap V) \subset \partial U \cup \partial V \subset E_v$ y v está separada de 0 en $\partial(U \cap V)$. Así, las tres funciones holomorfas f_U, f_V y $f_{U\cap V}$ están definidas. Como f_U y f_V coinciden en $\partial(U \cap V)$, también coinciden en $U \cap V$. Esto muestra que si $U \subset G$ es un abierto acotado conteniendo a z tal que $\partial U \subset E_v$ y v está separada de 0 en ∂U, tomando $g(z) = f_U(z), z \in G$, definimos de forma única una función holomorfa g en G que coincide con f en E_v. □

Corolario 3.20. *Sea $v\colon G \to [0,\infty)$ un peso continuo en una abierto conexo G tal que $G \setminus E_v$ es discreto, es decir, los ceros de v son aislados. Entonces $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Aplicamos la Proposición 3.19, si $z \in E_v$, existe una bola suficientemente pequeña tal que $w \in B(z,\epsilon) \subset E_w$, entonces podemos tomar $U = B(z, \epsilon/2)$, ya que $\partial U \subset B(z,\epsilon) \subset E_v$. Y si $z \notin E_v$, existe una bola suficientemente pequeña tal que $B(z,\epsilon)\setminus\{z\} \subset E_v$, y de nuevo podemos tomar $U = B(z, \epsilon/2)$. □

Ejemplo 3.21. Si $F \in H(G)$ es una función holomorfa no nula en un abierto conexo G y $v(z) = |F(z)|, z \in G$, entonces, por el Corolario 3.20, $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach. ♣

Corolario 3.22. *Sea $v\colon G \to [0,\infty)$ un peso en un abierto conexo G tal que $\overline{G \setminus E_v}$ es un subconjunto compacto de G. Si $\inf_{z\in K} v(z) > 0$ para cada subconjunto compacto $K \subset G \setminus (\overline{G \setminus E_v})$, entonces $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Elegimos un abierto acotado V cuya clausura $\overline{V}$ es un subconjunto compacto de G y tal que el conjunto compacto $\overline{G \setminus E_v}$ de G está contenido en V. La frontera ∂V de V es también un subconjunto compacto de G y $\inf_{z\in\partial V} v(z) > 0$ por la suposición del enunciado. Si $z \in \overline{G \setminus E_v}$, tomamos el conjunto abierto V para tener que $z \in V$ y v separada fuera de 0 en ∂V. Si $z \notin \overline{G \setminus E_v}$, basta tomar un disco abierto U centrado en z cuya clausura no corte a $\overline{G \setminus E_v}$. Por suposición $\inf_{z\in\partial U} v(z) > 0$. La conclusión se sigue de la Proposición 3.19. □

Las condiciones del Corolario 3.22 se satisfacen si v es la función característica de un subconjunto A de G tal que $G \setminus A$ es un subconjunto compacto de G.

Corolario 3.23. *Sea $G = B(0, R)$ (respectivamente, $G = \mathbb{C}$). Sea v un peso radial acotado en G. El espacio $H_v^\infty(G)$ es de Banach si y solo si $\overline{E_v}$ no es un compacto en G, o equivalentemente existe una sucesión creciente $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $(0, R)$ que tiende a R (respectivamente, $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que tiende a ∞) tal que $v(r_k) > 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

En particular, si $v(z) = |F(|z|)|\,, z \in G$, para una función no nula $F \in H(G)$, entonces $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Supongamos primero que existe una sucesión como la del enunciado (tanto en el caso $G \neq \mathbb{C}$ como $G = \mathbb{C}$), entonces dado $z \in G$ existe un $k \in \mathbb{N}$ de modo que $|z| < r_k$, entonces consideramos en abierto y acotado $U = B(0, r_k)$. Sabemos que $z \in U$, y además si $z \in \partial U$, tenemos que $v(z) = v(|z|) = v(r_k) > 0$, pues el peso es radial, entonces podemos aplicar la Proposición 3.19 y concluir que el espacio $H_v^\infty(G)$.

Para la otra implicación, si $G = B(0, R) \neq \mathbb{C}$, supongamos ahora que no existe tal sucesión. Esto implicará que existe $r_0 < R$ de modo que si $r_0 < r < R$ entonces $v(r) = 0$, pues sino podríamos encontrar una sucesión verificando la condición del enunciado. Esto en particular quiere decir que $\overline{E_v} \subset \overline{B(0, r)}$, de modo que $\partial G \not\subset \overline{E_v}$, por lo tanto por la Proposición 3.14 concluimos que $H_v^\infty(G)$ no es de Banach. Para aplicar la Proposición hay que asegurarse que el espacio es no trivial, esto se debe a que el peso v es acotado, y por lo tanto, por ejemplo la función $f(z) = z \in H_v^\infty(G)$, pues si $v(z) \leq M$ para todo $z \in G$ entonces

$$\sup_{z\in G} v(z)\,|z| \leq M \sup_{|z|<R} |z| = MR < \infty.$$

Para el caso $G = \mathbb{C}$, de nuevo supongamos que no existe una sucesión como la del enunciado, y de nuevo esto implicará que exista $r_0 > 0$ de modo que si $r > r_0$, entonces $v(r) = 0$. Tomando de nuevo la función $f(z) = z$, tenemos que si $|z| > r$, entonces $|f(z)| = |z| > r \geq \sup_{w\in E_v} |w|$, de modo que $Hco(E_v) \subset \overline{B(0, r)}$, es decir $\mathbb{C} = G \neq Hco(E_v)$, de modo que aplicando la Proposición 3.17 vemos que el espacio $H_v^\infty(\mathbb{C})$ no es de Banach. □

Nota 3.24. Observar que para aplicar la Proposición 3.19 no es necesaria la hipótesis de la acotación de v, esto quiere decir que para un peso cualquiera v sobre una bola o $\mathbb{C}$, la existencia de una sucesión como la del enunciado implica que el espacio $H_v^\infty(G)$ es de Banach. $\diamondsuit$

Ejemplo 3.25. Sea v un peso en $\mathbb{D}$ definido por $v(z) = a_n > 0$ si $|z| = 1 - (1/n)$, y $v(z) = 0$ en otro caso. Entonces por el Corolario 3.23, $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach. Observemos que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ no tiene por qué estar acotada. Un ejemplo similar resulta si cambiamos $\mathbb{D}$ por $\mathbb{C}$ y $1 - (1/n)$ por n, $n \in \mathbb{N}$. ♣

Proposición 3.26. *Sea $F \in H(G)$ una función no nula en un abierto conexo G. Definimos $v(z) = 0$ si $F(z) = 0$ y $v(z) = 1/|F(z)|$ si $F(z) \neq 0$. Entonces $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach que coincide con el conjunto de todas las $f \in H(G)$ tales que existe $C = C(f) > 0$ con $|f(z)| \leq C\,|F(z)|$ para $z \in G$.*

Demostración. El peso v es en general no acotado y no continuo, pero tiene ceros aislados. Entonces $H_v^\infty(G)$ es un espacio normado por la Proposición 3.4 y un espacio de Banach por la Proposición 3.19.

Probamos ahora la otra parte del enunciado. Si $f \in H(G)$ verifica que $|f(z)| \leq C\,|F(z)|$ para cada $z \in G$, entonces $f(z) = 0$ cuando $F(z) = 0$. Además, $v(z)\,|f(z)| \leq Cv(z)\,|F(z)|$ para cada $z \in G$, por lo tanto $f \in H_v^\infty(G)$ y $\|f\|_v \leq C$. Por otro lado, si $f \in H_v^\infty(G)$ verifica que $\|f\|_v = D > 0$, entonces $|f(z)| \leq D\,|F(z)|$ si $F(z) \neq 0$. Como tanto f como F son continuas y los ceros de F son aislados, esta desigualdad implica que $f(z) = 0$ cuando $F(z) = 0$. Por lo tanto $f \in H_v^\infty(G)$ si y solo si existe $C > 0$ con $|f(z)| \leq C\,|F(z)|$ para cada $z \in G$. □

Nota 3.27. Observemos que para el peso v en G considerado en la Proposición 3.26, tenemos que $\|\delta_z\|_v' = 0$ si $F(z) = 0$ (ya que cada $f \in H_v^\infty(G)$ se anula en tal $z \in G$), y $\|\delta_z\|_v' = |F(z)|$ si $F(z) \neq 0$. Además si $f \in B_v^\infty$, entonces $|f(z)| \leq |F(z)|$, por lo tanto $\|\delta_z\|_v' \leq |F(z)|$. Y como $F \in B_v^\infty$ resulta $\|\delta_z\|_v' = |F(z)|$ para todo $z \in G$. Se sigue que el peso $\tilde{v}(z) = 1/\|\delta_z\|_v'$ asociado a este peso v y construido en la prueba del Teorema 3.9, no está definida en general en todo el conjunto G y es no acotado en el conjunto donde está definido. Esto muestra que la hipótesis que el peso v es acotado no se puede omitir del Teorema 3.9. ♢

El siguiente resultado complementa a la Proposición 3.19, y nos permite además generalizar el Ejemplo 3.25

Proposición 3.28. *Sea $v\colon G \to [0,\infty)$ un peso en un abierto conexo G. Supongamos que para cada conjunto compacto $K \subset G$ existe un conjunto compacto L tal que $K \subset L \subset G$ y un número $\alpha > 0$ tal que*

$$\partial L \subset \overline{\{z \in G \mid v(z) > \alpha\}}.$$

Entonces $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Primero probamos que la suposición implica que para cada conjunto compacto $K \subset G$ existe un conjunto compacto M tal que $K \subset M \subset G$, y existe una constante α tal que K está contenido en la envolvente convexa $Hco\left(\overline{\{z \in M \mid v(z) \geq \alpha\}}\right)$. Para ver esto, fijamos un conjunto compacto $K \subset G$. Aplicamos la hipótesis para encontrar un conjunto compacto L que contiene a K y α tal que $\partial L \subset \overline{\{z \in G \mid v(z) \geq \alpha\}}$. Si $G = \mathbb{C}$, tomamos $d = 1$, y si $G \neq \mathbb{C}$, tomamos $d = \mathrm{dist}(L, \mathbb{C} \setminus G)$. El conjunto $M = \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{dist}(x, L) \leq d/2\}$ es compacto, contenido en G y $L \subset M$. Definimos $S = \overline{\{z \in M \mid v(z) \geq \alpha\}} \subset M$. Veamos que $\partial L \subset S$. Si $z \in \partial L$, existe una sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset G$ tal que $v(x_j) \geq \alpha$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y $x_j \to z$ cuando $j \to \infty$. Existe $J \in \mathbb{N}$ tal que para $j \geq J$, $\mathrm{dist}(x_j, L) \leq |x_j - z| < d/2$. Si $j \geq J$, entonces $x_j \in M$ y $v(x_j) \geq \alpha$ lo que significa que $x_j \in S$. Esto implica que $z \in S$.

Ahora, si $z \in K \subset L$ y $f \in H(G)$, podemos aplicar el principio del módulo máximo para llegar a

$$|f(z)| \leq \sup_{\zeta \in L} |f(\zeta)| = \sup_{\zeta \in \partial L} |f(\zeta)| \leq \sup_{\zeta \in S} |f(\zeta)|\,.$$

Esto implica que $K \subset Hco(S)$.

Vamos a probar ahora que la bola unidad cerrada B_v^∞ de $H_v^\infty(G)$ está acotada en $(H(G), \tau_{co)}$ y la conclusión se seguirá de la Proposición 3.7.

Dado un conjunto compacto $K \subset G$ aplicamos la primera parte de la prueba para encontrar el conjunto compacto $M \subset G$ y $\alpha > 0$. Sea $R = \{z \in M \mid v(z) \geq \alpha\}$. Si $f \in B_v^\infty$ y $z \in K$, entonces $z \in Hco(\overline{R})$. Por lo tanto, como f es continua y $\overline{R} \subset M \subset G$, tenemos que

$$|f(z)| \leq \sup_{\zeta \in \overline{R}} |f(\zeta)| = \sup_{\zeta \in R} |f(\zeta)|\,,\ \forall z \in K.$$

Si $\zeta \in R$, entonces $v(\zeta) \geq \alpha$. Esto implica que $\alpha\,|f(\zeta)| \leq v(z)\,|f(z)| \leq 1$ para cada $\zeta \in R$. Por lo tanto $\sup_{\zeta\in R}|f(\zeta)| \leq 1/\alpha$. Entonces $|f(z)| \leq 1/\alpha$ para cada $z \in K$ y cada $f \in B_v^\infty$, lo que implica que B_v^∞ está acotada en $(H(G), \tau_{co})$. □

Ejemplo 3.29. Sea $G = \mathbb{D}$, si construimos un peso de modo que en cada círculo de radio $1-(1/n)$ valga $\alpha_n > 0$ en un subconjunto denso D_n del círculo, y 0 fuera de la unión de todos los D_n, $n \in \mathbb{N}$, entonces podremos aplicar la Proposición 3.28 para concluir que $H_v^\infty(\mathbb{D})$ es también un espacio de Banach. ♣

Para situaciones que no queden cubiertas por la Proposición 3.28, presentamos otro resultado que puede ser de ayuda.

Proposición 3.30. *Sea $v\colon G \to [0,\infty)$ un peso en un abierto conexo G que verifica que para cada punto z de G, existen números positivos p_z y R_z tales que $R_z <$ dist$(z, \partial G)$ y*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(v(z+R_z e^{i\theta}))^{p_z}}\frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

Entonces $H_v^\infty(G)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Basta probar que la bola unidad cerrada B_v^∞ de $H_v^\infty(G)$ es acotada en $(H(G), \tau_{co})$. La conclusión se seguirá de la Proposición 3.7. Para ello, fijamos un subconjunto compacto K de G. Obviamente, $K \subset \cup_{z\in K} B(z, \frac{1}{2}R_z)$ y por compacidad, podemos elegir una cantidad finita de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_J \in K$ tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{J} B(z_j, \frac{1}{2}R_z).$$

Sea $R_j = R_{z_j}$ y $r_j = \frac{1}{2}R_{z_j}$, $j = 1, 2, \ldots, J$. Entonces $0 < r_j < R_j$ para todo j y $K \subset \cup_{j=1}^{J} B(z_j, r_j)$. Como $dm(\theta) = d\theta/(2\pi)$ es una medida de probabilidad en $[0, 2\pi]$, una aplicación elemental de la desigualdad de Hölder muestra que para v, z y R fijo, las medias integrales

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{(v(z+Re^{i\theta}))^{p}}\frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/p}$$

crecen cuando $p \in (0,\infty)$ crece. Por lo tanto, para un conjunto compacto K dado, los puntos z_j correspondientes y los valores R_j, r_j y p_j de las hipótesis del enunciado, eligiendo $p = \text{mín}\, p_1, p_2, \ldots, p_J$ se sigue que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(v(z+Re^{i\theta}))^{p}}\frac{d\theta}{2\pi} = I_J(K) < \infty,\ j = 1, 2, \ldots, J.$$

Si $z \in \overline{B(z_j, r_j)}$ para algún $j = 1, 2, \ldots, J$, entonces, para cada $f \in B_v^\infty$, tenemos que

$$|f(z)|^p \leq \frac{R_j + r_j}{R_j - r_j}\int_0^{2\pi} \left|f(z_j + R_j e^{i\theta})\right|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{R_j + r_j}{R_j - r_j} I_j(K).$$

La segunda desigualdad es clara, ya que $v(\zeta)\,|f(\zeta)| \leq 1$ clara cada $\zeta \in G$. Para justificar la primera desigualdad, observemos que $u(\zeta) = |f(\zeta)|^p$, $\zeta \in G$, es una función continua, no negativa y subarmónica, ya que, como $f^p \in H(G)$, cuando $\overline{B(a,r)} \subset G$ se tiene que

$$\begin{aligned}(f(\zeta))^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(\zeta+re^{it}))^p dt \Rightarrow u(\zeta) = |f(\zeta)|^p &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(\zeta+re^{it}))^p dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(\zeta+re^{it})\right|^p dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta+re^{it})dt.\end{aligned}$$

Se puede entonces aplicar la desigualdad integral de Poisson del Teorema 2.58 a u: Para $0 < r \leq r_j$ y todo $t \in [0, 2\pi]$, tenemos que

$$u(z_j + re^{it}) \leq \frac{R_j + r}{R_j - r}\int_0^{2\pi} u(z_j + R_j e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Así,

$$\sup_{z\in\overline{B(z_j,r_j)}} |f(z)| \leq \left(\frac{R_j + r_j}{R_j - r_j} I_j(K)\right)^{1/p}.$$

Por lo tanto

$$\sup_{z\in K}|f(z)| \leq \max\left\{\left(\frac{R_j + r_j}{R_j - r_j} I_j(K)\right)^{1/p},\ j = 1, 2, \ldots, J\right\}$$

para cada $f \in B_v^\infty$, y B_v^∞ está acotada en $(H(G), \tau_{co})$. □

Ejemplo 3.31. Sea $q > 0$ y $v(z) = |\mathrm{Re}\,(z)|^q$, $z \in \mathbb{D}$. Entonces el espacio normado $H_v^\infty(\mathbb{D})$ es secuencialmente completo.

Para ver esto, comprobamos que la condición en la Proposición 3.30 se verifica. Elegimos $p > 0$ tal que $0 < pq < 1$, este p servirá para todos los puntos $z \in \mathbb{D}$. Vamos a elegir los valores R_z dependiendo de la localización del puntos z en $\mathbb{D}$ respecto al conjunto de ceros de v:

1. Si z no está en el eje imaginario, podemos elegir R suficientemente pequeño de forma que $\overline{B(z,R)}$ no corte dicho eje, y por tanto la función v^{-p} estará acotada tanto por encima como por debajo en este disco.

2. Si $z = yi$ es un punto en el eje imaginario ($0 \leq |y| < 1$), elegimos $R \in [0, 1)$ con $\left|yi + Re^{i\theta}\right| < 1$ para cada $\theta \in [0, 2\pi]$. Notemos que

$$v(z + Re^{i\theta}) = \left|\mathrm{Re}\left(yi + Re^{i\theta}\right)\right|^q = R^q\,|\cos\theta|^q.$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(v(yi + Re^{i\theta}))^p}d\theta = \frac{1}{R^{pq}}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|\cos\theta|^{pq}},$$

que es finito pues la función $\frac{1}{|\cos\theta|^\beta}$ es integrable en $[0, 2\pi]$ si $0 < \beta < 1$.

♣

Ejemplo 3.32. Sea v un peso en $\mathbb{D}$ tal que existe una sucesión estrictamente creciente $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números positivos que tienden a 1 tal que para cada n existe $a_n > 0$ tal que $v(r_n e^{i\theta}) \geq a_n$ en casi todo punto en $[0, 2\pi]$. Entonces el espacio normado $H_v^\infty(\mathbb{D})$ es secuencialmente completo. Definimos un peso radial w en $\mathbb{D}$ mediante $w(r_n) = \text{mín}\{a_n, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, y 0 en otro caso. Por el Corolario 3.23, $H_w^\infty(\mathbb{D})$ es secuencialmente completo, por lo tanto la bola unidad cerrada B_w^∞ de $H_w^\infty(\mathbb{D})$ está acotada en $(H(\mathbb{D}), \tau_{co})$. Ahora sea f perteneciente a la bola unidad cerrada B_v^∞ de $H_v^\infty(\mathbb{D})$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \left| f(r_n e^{i\theta}) \right| \leq v(r_n e^{i\theta}) \left| f(r_n e^{i\theta}) \right| \leq 1$$

en casi todo punto en $[0, 2\pi]$. Como f es continua, tenemos que $w(z) \left| f(z) \right| \leq 1$ para cada $z \in \mathbb{D}$, por lo tanto $f \in B_w^\infty$. Luego $B_v^\infty \subset B_w^\infty$, y B_v^∞ también está acotada en $(H(\mathbb{D}), \tau_{co})$. La conclusión se sigue de la Proposición 3.7. ♣

Nota 3.33. Sea w un peso continuo en G tal que $H_w^\infty(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach. Sea v un peso en G tal que $\{z \in G \mid v(z) = w(z)\}$ es denso en G (notar que esto implica que E_v no es discreto, por lo tanto $H_v^\infty(\mathbb{D})$ es normado). Entonces, $H_v^\infty(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach. Si $f \in B_v^\infty$, entonces $v(z) \left| f(z) \right| \leq 1$ para todo $z \in G$. La hipótesis de continuidad en f y w implica que $w(z) \left| f(z) \right| \leq 1$ para todo $z \in G$, luego $f \in B_w^\infty$. La conclusión se sigue de nuevo de la Proposición 3.7. El particular, si w es un peso continuo estrictamente positivo en $\mathbb{D}$ y v está definido por

$$v(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \operatorname{Re}(z) = 0, \\ w(z) & \text{si } \operatorname{Re}(z) \neq 0, \end{cases}$$

entonces $H_v^\infty(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach. ♢

Capítulo 4

Operadores de composición ponderados

En este capítulo estudiaremos la acotación y la compacidad de operadores de composición con pesos,

$$C_{\varphi,\psi}\colon f \mapsto \psi(f \circ \varphi)$$

donde $\varphi, \psi \in H(\mathbb{D})$, $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, y el peso $v\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}^+$ es un peso radial ($v(z) = v(|z|)$), positivo, no decreciente con respecto a $|z|$ y continuo. Con los resultados vistos ahora es inmediato concluir que $H_v^\infty(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach, por ejemplo empleando la Proposición 3.2 o la Proposición 3.28. Principalmente seguimos el artículo de Contreras y Hernández Díaz [8] pero también utilizamos los artículos de Bonet, Domański, Lindström y Taskinen [5], de Bonet, Domański y Lindström [4], y el texto de Shapiro [20, Capítulo 2].

Varios resultados que se van a mostrar no usan directamente en peso v sino un *peso asociado*, $\tilde{v}$, definido por

$$\tilde{v}(z) = \frac{1}{\sup\left\{|f(z)| \mid f \in H_v^\infty,\ \|f\|_v \leq 1\right\}} = \frac{1}{\|\delta_z\|_v'}.$$

Es rutinario comprobar que $\tilde{v}$ es también un peso si v lo es. Además por la Proposición 3.8, se da la igualdad $H_v^\infty(\mathbb{D}) = H_{\tilde{v}}^\infty(\mathbb{D})$ y que $\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{\tilde{v}}$. Diremos que un peso v es *esencial* si existe $C > 0$ tal que

$$v(z) \leq \tilde{v}(z) \leq Cv(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Por último, si $f \in H(\mathbb{D})$, usaremos la siguiente notación

$$M(f, r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|\,,\ 0 \leq z < 1.$$

Lema 4.1. *La función $h(z) = M(f, r)$ es continua para $f \in H(\mathbb{D})$.*

Demostración. Si $f \equiv 0$, entonces $h(z) \equiv 0$ y es claro que es continua. Si no es siempre 0, fijado $0 \leq R_1 < 1$ y $\epsilon > 0$, si $R_2 \geq R_1$, puesto que las funciones holomorfas no tienen máximos locales,

$$\begin{aligned}|M(f, R_1) - M(f, R_2)| &= M(f, R_2) - M(f, R_1) = \left|f(R_2e^{i\alpha})\right| - M(f, R_1)\\ &\leq \left|f(R_2e^{i\alpha})\right| - \left|f(R_1e^{i\alpha})\right| \leq \left|f(R_2e^{i\alpha}) - f(R_1e^{i\alpha})\right|,\end{aligned}$$

y como f es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|R_2e^{i\alpha} - R_1e^{i\alpha}| = |R_2 - R_1| < \delta_1$, entonces $|f(R_2e^{i\alpha}) - f(R_1e^{i\alpha})| < \epsilon$. De forma análoga, si $R_1 \geq R_2$, entonces

$$\begin{aligned} |M(f,R_1) - M(f,R_2)| &= M(f,R_1) - M(f,R_2) = \left|f(R_1e^{i\beta})\right| - M(f,R_2) \\ &\leq \left|f(R_1e^{i\beta})\right| - \left|f(R_2e^{i\beta})\right| \leq \left|f(R_1e^{i\beta}) - f(R_2e^{i\beta})\right|, \end{aligned}$$

y de nuevo, como f es continua, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\left|R_1e^{i\beta} - R_2e^{i\beta}\right| = |R_1 - R_2| < \delta_2$, entonces $\left|f(R_1e^{i\beta}) - f(R_2e^{i\beta})\right| < \epsilon$. Es decir, si $|R_2 - R_1| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $|M(f,R_1) - M(f,R_2)| < \epsilon$.

Sea ahora, $R_1 = |z_0|$, si $|z_0 - z| < \delta$ y llamamos $R_2 = |z|$, entonces $|R_2 - R_1| \leq |z_0 - z| < \delta$, por lo tanto

$$|h(z_0) - h(z)| = |M(f,|z_0|) - M(f,|z|)| = |M(f,R_2) - M(f,R_1)| < \epsilon,$$

luego h es continua en z_0. Como podemos tomar z_0 arbitrario se concluye que h es continua en $\mathbb{D}$. □

Corolario 4.2. *Si $f \in H(\mathbb{D})$, $f \not\equiv 0$, entonces* $v_{f,R}(z) = \begin{cases} M(f,R)^{-1}, & |z| \leq R \\ M(f,|z|)^{-1}, & |z| \geq R \end{cases}$ *es un peso para todo $1 \geq R > 0$. Si además $f(0) \neq 0$, $v_f(z) = M(f,|z|)^{-1}$ también será un peso.*

Demostración. Es claro que la función está bien definida y $v_R(z) = v_R(|z|)$. Como f es holomorfa y no es la función nula, en cada círculo $|z| = r > 0$, tenemos que existirá z_0 con $f(z_0) \neq 0$, pues si no, el conjunto de ceros tendría puntos de acumulación, y la función f sería la función nula. Por esto $M(f,r) \neq 0$ para todo $r > 0$, por lo tanto $M(f,r)^{-1}$ tiene sentido. Debido a que las funciones holomorfas no tienen máximos locales, $M(f,R) \geq M(f,r)$ si $R \geq r$, lo que prueba que $M(f,|z|)^{-1}$ es no creciente y por lo tanto es claro que $v_R(z)$ también es no creciente. El Lema 4.1 implica que $M(f,|z|)^{-1}$ es continua, y la definición de la función a trozos deja claro que $v_R(z)$ también lo es. Por lo tanto concluimos que $v_{f,R}(z)$ es un peso.

En el caso que $f(0) \neq 0$, tenemos que $M(f,|z|)^{-1}$ siempre tiene sentido y por el Lema 4.1 es continua, por lo tanto $v_f(z)$ será un peso. □

en lo que sigue, asumiremos que dado un operador de composición ponderado $C_{\varphi,\psi}$, existe z tal que $\psi(z) \neq 0$, pues en otro caso, estaríamos ante el operador nulo.

4.1. Acotación de los operadores

Vamos a caracterizar la acotación de los operadores de composición ponderados definidos en $H_v^\infty(\mathbb{D})$. Recordamos que un operador lineal entre nos espacios normados $T\colon E \to F$ es *acotado* si existen M tal que $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$, $x \in E$, y que esto equivale a la continuidad de dicho operador. Con los resultados vistos hasta ahora esto es consecuencia de la Proposición 1.16, ya que es sencillo ver que un espacio normado también es un espacio localmente convexo.

Proposición 4.3. *Sean v y w pesos. Entonces el operador $C_{\varphi,\psi}\colon H_v^\infty(\mathbb{D}) \to H_w^\infty(\mathbb{D})$ es acotado si y solo si*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|\, w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} < \infty.$$

Además se verifica que

$$\|C_{\varphi,\psi}\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|\, w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))}.$$

Si v es esencial, entonces $C_{\varphi,\psi}\colon H_v^\infty(\mathbb{D}) \to H_w^\infty(\mathbb{D})$ es acotado si y solo si

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|\, w(z)}{v(\varphi(z))} < \infty.$$

Demostración. Supongamos que $\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} = \infty$. Entonces podemos encontrar una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ tal que $|\psi(z_n)|\, w(z_n) > n\widetilde{v(\varphi(z_n))}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\sup\{|f(z)| \mid f \in H_v^\infty(\mathbb{D}),\ \|f\|_v \le 1\} = \frac{1}{\tilde{v}(z)} > \frac{1}{2\tilde{v}(z)},\ z \in \mathbb{D},$$

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in H_v^\infty(\mathbb{D})$ con $\|f_n\|_v \le 1$ tal que $|f_n(\varphi(z_n))| > \dfrac{1}{2\tilde{v}(\varphi(z_n))}$. Tenemos que

$$\|C_{\varphi,\psi}(f_n)\|_w \ge w(z_n)\, |\psi(z_n)|\, |f_n(\varphi(z_n))| > w(z_n)\, |\psi(z_n)|\, \frac{1}{2\tilde{v}(\varphi(z_n))} > \frac{n}{2}.$$

Por lo tanto el operador no es acotado.

Recíprocamente, si $M = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} < \infty$, tendremos que $|\psi(z)|\, w(z) \le M\tilde{v}(\varphi(z))$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces

$$w(z)\, |C_{\varphi,\psi}(f)(z)| = w(z)\, |\psi(z)|\, |f(\varphi(z))| = \frac{|\psi(z)|\, w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} \tilde{v}(\varphi(z))\, |f(\varphi(z))| \le M\|f\|_v.$$

Por lo que el operador es acotado. Nos falta calcular su norma. La línea anterior muestra que

$$\|C_{\varphi,\psi}\| \le M = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|\, w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))}.$$

Por otro lado, como

$$(C_{\varphi,\psi})^T(\delta_z)(f) = \delta_z(C_{\varphi,\psi}(f)) = \delta_z(\psi(f\circ\varphi)) = \psi(z)(f(\varphi(z))) = (\psi(z)\delta_{\varphi(z)})(f),$$

es decir, $(C_{\varphi,\psi})^T(\delta_z) = \psi(z)\delta_{\varphi(z)}$ para cada $z \in \mathbb{D}$, resulta

$$\|C_{\varphi,\psi}\| = \|(C_{\varphi,\psi})^T\| \ge \frac{\|(C_{\varphi,\psi})^T(\delta_z)\|_v}{\|\delta_z\|_w} = \frac{|\psi(z)|\, \tilde{w}(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} \ge \frac{|\psi(z)|\, w(z)}{\tilde{v}(z)}.$$

Cuando el peso es esencial, la caracterización es clara, pues $v(z) \le \tilde{v}(z) \le Cv(z)$. □

Lema 4.4. *Para cualquier par de sucesiones de números positivos con $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{R_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 1$ tales que $r_0 < R_0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < \cdots$ y para cualquier sucesión de números positivos $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe una función $f \in H(\mathbb{D})$ verificando*

$$M(f, R_n) \ge \alpha_n M(f, r_n).$$

Demostración. Tomamos $f_0 \equiv 1$. Asumamos que hemos encontrado polinomios $f_1, \dots, f_{n-1}$ tales que

1. $|f_k(z)| < 1/2^k$, para $|z| \le r_k$ y $k = 1, \dots, n-1$, y
2. $M(f_k, R_k) > M_k$ para $k = 1, \dots, n-1$, donde

$$M_k = \left(M\left(\sum_{i=1}^{k-1} f_i, r_k \right) + 1 \right) \alpha_k + 2\left(\sum_{i=1}^{k-1} \|f_i\|_\infty + 1 \right).$$

Tomamos la función $\tilde{f}_n(z) = A/((1+\epsilon)R_n - z)$, donde

$$A = \frac{2M_n(R_n - r_n)}{2^{2n+1}M_n + 1} \text{ y } \epsilon = \frac{R_n - r_n}{R_n(2^{2n+1}M_n + 1)}.$$

Si $|z| \le r_n$, entonces

$$\left|\tilde{f}_n(z)\right| \le \frac{A}{(1+\epsilon)R_n - |z|} \le \frac{A}{(1+\epsilon)R_n - r_n} = \frac{M_n}{2^{2n}M_n + 1} < \frac{1}{2^{2n}}.$$

Además, $\tilde{f}_n(R_n) = A/(\epsilon R_n) = 2M_n$. Ahora, por el Teorema de Runge, podemos aproximar $\tilde{f}_n$ en $\overline{R_n\mathbb{D}}$ por un polinomio f_n (puesto que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{R_n\mathbb{D}}$ es conexo, y el único polo de $\tilde{f}_n$ está en $(1+\epsilon)R_n \notin \overline{R_n\mathbb{D}}$) verificando las condiciones (1) y (2):

En efecto, si tomamos $\delta = \min\{\frac{2^n-1}{2^{2n}}, M_n\}$, podemos encontrar f_n polinomio tal que $\sup_{|z|\le R_n}\left|\tilde{f}_n(z) - f_n(z)\right| < \delta$ y por lo tanto si $|z| \le r_n$

$$|f_n(z)| \le \left|\tilde{f}_n(z)\right| + \left|f_n(z) - \tilde{f}_n(z)\right| < \frac{1}{2^{2n}} + \delta \le \frac{1}{2^{2n}} + \frac{2^n - 1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n},$$

cumpliendo la primera condición. Para la segunda, basta tener en cuenta que

$$M(f_n, R_n) \ge |f_n(R_n)| \ge \left|\tilde{f}_n(R_n)\right| + \left|\tilde{f}_n(R-n) - f_n(R_n)\right| > 2M_n - \delta \ge 2M_n - M_n = M_n.$$

Definimos ahora

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j,$$

por la condición (1), tenemos que f es una función analítica, ya que la serie converge uniformemente sobre cada disco $\overline{r_n\mathbb{D}}$, puesto que

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z) - \sum_{j=1}^{n-1} f_j(z)\right| = \left|\sum_{j=n}^{\infty} f_j(z)\right| \le \sum_{j=n}^{\infty} |f_j(z)| \le \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j},\ n \ge k,\ |z| \le r_k.$$

y dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \epsilon,$$

probando que la serie converge uniformemente sobre los compactos de $\mathbb{D}$, y por lo tanto el límite, $f(z)$ es una función holomorfa. Concluyamos viendo que $M(f, R_n) \geq \alpha_n M(f, r_n)$, fijamos $n \in \mathbb{N}$, entonces para $|z| = r_n$,

$$\begin{aligned} \alpha_n \left| \sum_{j=1}^{\infty} f(z) \right| &\leq \alpha_n \left(\left| \sum_{j=1}^{n-1} f_j(z) \right| + \sum_{j=n}^{\infty} |f_j(z)| \right) \leq \alpha_n \left(\left| \sum_{j=1}^{n-1} f_j(z) \right| + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} \right) \\ &\leq \alpha_n \left(M \left(\sum_{j=1}^{n-1} f_i, r_n \right) + 1 \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $R_n \leq r_k$ si $k \geq n+1$, resulta que

$$\begin{aligned} M(f, R_n) = \sup_{|z|=R_n} \left| \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z) \right| &\geq \sup_{|z|=R_n} \left(|f_n(z)| - \left| \sum_{j \neq n} f_j(z) \right| \right) \\ &\geq M(f_n, R_n) - \left(\sup_{|z|=R_n} \sum_{j=1}^{n-1} |f_j(z)| + \sup_{|z|=R_n} \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_j(z)| \right) \\ &\geq M(f_n, R_n) - \left(\| \sum_{j=1}^{n-1} f_j \|_\infty + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \right) \\ &\geq M(f_n, R_n) - \left(\sum_{j=1}^{n-1} \|f_j\|_\infty + 1 \right) \geq M(f_n, R_n) - 2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} \|f_j\|_\infty + 1 \right). \end{aligned}$$

Para concluir, si empleamos la propiedad (2) de los polinomios f_n resulta que para $|z| = r_n$ se tiene que

$$M(f, R_n) \geq M(f_n, R_n) - 2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} \|f_j\|_\infty + 1 \right) > \alpha_n \left(M \left(\sum_{j=1}^{n-1} f_i, r_n \right) + 1 \right) \geq \alpha_n \left| \sum_{j=1}^{\infty} f(z) \right|,$$

y tomando supremos obtenemos la desigualdad buscada,

$$M(f, R_n) \geq \alpha_n M(f, r_n).$$

$\square$

Teorema 4.5. *Sean $\varphi, \psi \in H(\mathbb{D})$ tales que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces son equivalentes*

1. *para cada peso v el operador $C_{\varphi,\psi}$ es acotado en H_v^∞;*
2. *la función ψ pertenece a $H^\infty(\mathbb{D})$ y existe $r \in (0,1)$ tal que $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ con $|z| \geq r$.*

Demostración. 1⇒2. Para cada peso v, tenemos que $C_{\varphi,\psi}(1) = \psi \in H_v^\infty(\mathbb{D})$. Si $\psi \notin H^\infty(\mathbb{D})$, entonces $v_{\psi,1/2}^{1/2}(z)$ del Corolario 4.2 es un peso satisfaciendo que para $|z| \geq 1/2$,

$$v_{\psi,1/2}^{1/2}(z) \, |\psi(z)| = \frac{|\psi(z)|}{M(\psi, |z|)^{1/2}} \leq \frac{|\psi(z)|}{|\psi(z)|^{1/2}} = |\psi(z)|^{1/2},$$

y como $\psi(z)$ es holomorfa y no acotada, tenemos que según $|z|$ tiende a 1, $\max_{|w|=|z|} |\psi(w)|^{1/2}$ tiende a ∞ y por lo tanto $\psi \notin H_v^\infty$, un absurdo. Por lo tanto $\psi \in H^\infty(\mathbb{D})$.

Supongamos que existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1$ y $|\varphi(z_n)| > |z_n|$ para todo n. Como $\psi \neq 0$, tomamos z_n tal que $|\psi(z_n)| \neq 0$ (podemos hacerlo, puesto que si $|\psi(z_n)| = 0$, podemos tomar z_n' con $|z_n'| = |z_n|$, suficientemente cercano a z_n para que $\varphi(z_n') > |z_n'| = |z_n|$, y alguno de esos z_n' no será cero de ψ, pues en otro caso, todo un arco estaría formado por ceros de ψ, lo que implicaría que $\psi \equiv 0$). Definimos $r_n = |z_n|$ y $R_n = |\varphi(z_n)|$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $r_0 < R_0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < \cdots$. Tomamos $\alpha_n = n/|\psi(z_n)|$. Por el Lema 4.4 existe $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $M(f, R_n) \geq \alpha_n M(f, r_n)$ para todo n. Tomamos $v_{f,r_0}(z) = M(f, |z|)^{-1}$ si $|z| \geq r_0$ y, para cada n, elegimos $\theta_n \in \mathbb{R}$ tal que $M(f, r_n) = \left|f(e^{i\theta_n}\varphi(z_n))\right|$. Si ahora denotamos por $\rho_{\theta_n}(z) = e^{i\theta_n} z$, tenemos que

$$\|C_{\rho_{\theta_n}\circ\varphi,\psi}\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|\, v(z)}{\tilde{v}(e^{i\theta_n}\varphi(z))} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|\, v(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} = \|C_{\varphi,\psi}\| < \infty.$$

Pero, por otro lado, como $\|f\|_{v_{f,r_0}} \leq 1$,

$$\|C_{\varphi,\psi}\| \geq \|C_{\rho_{\theta_n}\circ\varphi,\psi}(f)\|_{v_{f,r_0}} \geq |\psi(z_n)|\, |f(\rho_{\theta_n}(\varphi(z_n)))| \frac{1}{M(f,|z_n|)} = |\psi(z_n)| \frac{M(f,R_n)}{M(f,r_n)} \geq n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ contradiciendo que $\psi \in H^\infty(\mathbb{D})$.

2⇒1. Tenemos que

$$\|C_\varphi\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{v(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} = \max\left\{\max_{|z|\leq r} \frac{v(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))}, \sup_{r\leq|z|<1} \frac{v(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))}\right\},$$

el primer término es finito por la continuidad de los pesos, y ya que $\varphi \in H(\mathbb{D})$. Por el otro lado, en el segundo término puesto que $|z| \geq r$ tenemos que $|\varphi(z)| \leq |z|$ y por lo tanto, por la monotonía del peso, $\tilde{v}(\varphi(z)) \geq \tilde{v}(z)$ y usando que $v(z) \leq \tilde{v}(z)$ resulta

$$\sup_{r\leq|z|<1} \frac{v(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} \leq \sup_{r\leq|z|<1} \frac{v(z)}{\tilde{v}(z)} \leq 1.$$

Por lo tanto, C_φ es siempre acotado. Y como $\psi \in H^\infty(\mathbb{D})$, es claro que $\|C_{\varphi,\psi}\| \leq \|\psi\|_\infty \|C_\varphi\| < \infty$, concluyendo que $C_{\varphi,\psi}$ es acotado para cualquier peso v. □

4.2. Compacidad de los operadores

En esta última sección vamos a caracterizar la compacidad de los operadores de composición ponderados. Comenzamos con el siguiente Lema que caracteriza la compacidad de los operadores de composición, el cual que es una variación del Teorema de Convergencia Débil que aparece en el texto de Shapiro [20, Páginas 29, 30].

Antes de nada vamos a recordar que un *operador compacto* es una aplicación lineal $T\colon E \to F$ entre espacios normados tal que $T(A)$ es relativamente compacto de F para todo conjunto A acotado de E, o equivalentemente, que la imagen de la bola unidad de E es un conjunto relativamente compacto, lo cual se puede comprobar viendo que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in E$, con $\|x_n\|_E < 1$, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{T(x_n)\}_{x\in\mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión convergente en F. Se puede componer un operador compacto con operadores continuos (entre espacios normados adecuados) tanto a derecha como a izquierda para obtener otro operador compacto.

Lema 4.6. *Sea $C_\varphi\colon H_v^\infty(\mathbb{D}) \to H_w^\infty(\mathbb{D})$, el operador $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$, con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Si el operador es continuo, entonces es compacto si y solo si para toda sucesión acotada $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_v^\infty(\mathbb{D})$ que converge a 0 sobre los compactos de $\mathbb{D}$, también se tiene que la sucesión $\{C_\varphi(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $H_w^\infty(\mathbb{D})$.*

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que C_φ es compacto. Tomemos además una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|f_n\|_v \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que converge uniformemente a 0 sobre compactos. Queremos ver que $\|C_\varphi(f_n)\|_w \to 0$, por la compacidad de C_φ, basta ver que la función nula es el único punto de acumulación de la sucesión $\{C_\varphi(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ahora bien, por compacidad del operador, la sucesión $\{C_\varphi(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{C_\varphi(f_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$. Por otro lado, ya que φ es una función continua, tenemos que $C_\varphi(f_n) \to 0$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$, y lo mismo será cierto para cualquier subsucesión.

Supongamos que $g \in H_w^\infty(\mathbb{D})$ es un punto de acumulación de $\{C_\varphi(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces existirá una subsucesión convergente $\{C_\varphi(f_{n_m})\}_{m\in\mathbb{N}}$ a g, es decir, que

$$\|C_\varphi(f_{n_m}) - g\|_w = \sup_{z\in\mathbb{D}} w(z)\,|(C_\varphi(f_{n_m}) - g)(z)| \to 0,$$

es particular, tenemos que $C_\varphi(f_{n_m}) \to g$ uniformemente sobre compactos ya que $w(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{D}$. Pero como la topología τ_{co} es Hausdorff, este límite es único, y debe ser $g = 0$ por el comentario anterior.

Con esto hemos visto que la sucesión $\{C_\varphi(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene algún punto de acumulación y que este punto de acumulación es único e igual a la función nula, lo que prueba que $\|C_\varphi(f_n)\|_w \to 0$.

$\Leftarrow$. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\|f_n\|_v < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que su imagen $\{C_\varphi(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente. Puesto que v es un peso, es continua y no nula, por lo tanto, dado un compacto $K \subset \mathbb{D}$ tenemos que $0 < m = \text{mín}_{z\in K} v(z) \leq M = \text{máx}_{z\in K} v(z)$. Por lo tanto

$$m \sup_{z\in K} |f_n(z)| \leq \sup_{z\in K} v(z)\,|f_n(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\,|f_n(z)| = \|f_n\|_v \leq 1 \Rightarrow \sup_{z\in K} |f_n(z)| \leq \frac{1}{m},\ n \in \mathbb{N}.$$

Esto prueba que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada en compactos de $\mathbb{D}$, lo que nos permite aplicar el Teorema de Montel y encontrar una subsucesión $\{g_k = f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge unimormemente sobre compactos de $\mathbb{D}$ a una función $g \in H(\mathbb{D})$. Además $g \in H_v^\infty(\mathbb{D})$, ya que dado $z \in \mathbb{D}$

$$v(z)\,|g(z)| = \lim\sup_{n\to\infty} v(z)\,|g_n(z)| \leq \lim\sup_{n\to\infty} \|g_n\|_v \leq 1,$$

como es válido para todo $z \in \mathbb{D}$ se concluye que $\|g\| \leq 1$. Además la sucesión $\{g_k - g\}_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $H_v^\infty(\mathbb{D})$ (por ejemplo $\|g_k - g\|_v \leq \|g_k\|_v + \|g\|_v \leq 1$) y converge a 0 uniformemente sobre compactos, por lo que aplicando la hipótesis resulta que $\|g_k - g\|_w \to 0$, es decir, $g_k \to g$ en $H_w^\infty(\mathbb{D})$ como queríamos. $\square$

La norma esencial de un operador lineal continuo se define por

$$\|T\|_e = \text{ínf}\left\{\|T-K\| \mid K \text{ operador compacto}\right\}.$$

Como $\|T\|_e = 0$ si y solo si T es compacto (esto es cierto cuando el espacio de llegada de los operadores es de Banach, que en nuestro caso lo es), estas estimaciones nos dan condiciones para ver si T es compacto.

Teorema 4.7. *Sean v y w pesos. Son equivalentes*

1. *El operador $C_\varphi \colon H_v^\infty(\mathbb{D}) \to H_w^\infty(\mathbb{D})$ es compacto.*
2. $\text{lím}_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} w(z)/\tilde{v}(\varphi(z)) = 0$.

Demostración. (1)⇒(2). Supongamos que no se cumple (2). Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\lim_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} w(z)/\tilde{v}(\varphi(z)) > \epsilon > 0.$$

Como la función en r $\sup_{|\varphi(z)|>r} w(z)/\tilde{v}(\varphi(z))$ es no creciente (ya que los conjuntos donde se toman los supremos son cada vez menores) tendremos que para todo $r \in (0,1)$ $\sup_{|\varphi(z)|>r} w(z)/\tilde{v}(\varphi(z)) > \epsilon > 0$. Podemos encontrar una sucesión z_n con $|\varphi(z_n)| \to 1$ con $w(z_n) > \epsilon\tilde{v}(\varphi(z_n))$. En efecto, sea $r_0 = 0$ entonces por la condición del supremo, existe z_0 con $|\varphi(z_0)| > r_0$ y tal que $w(z_0) > \epsilon\tilde{v}(\varphi(z_0))$. Sea ahora $r_1 = \text{máx}\{|\varphi(z_0)|, 1-1/2\}$, por el mismo argumento existe z_1 con $|\varphi(z_1)| > r_1$ y con $w(z_1) > \epsilon\tilde{v}(\varphi(z_1))$. En general sea $r_n = \text{máx}\{|\varphi(z_{n-1})|, 1-1/2^n\}$, así existirá z_n con $|\varphi(z_n| > r_n$ y $w(z_n) > \epsilon\tilde{v}(\varphi(z_n))$, consiguiendo así la sucesión deseada. Para cada n elegimos una función $f_n \in H_v^\infty(\mathbb{D})$ con $\|f_n\|_v \leq 1$ tal que $|f_n(\varphi(z_n)|\,\tilde{v}(\varphi(z_n)) \geq 1/2$ y $\alpha(n) \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi(z_n)|^{\alpha(n)} \geq 1/2$ de forma que la sucesión $\{\alpha(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tienda a infinito. Definimos $g_n(z) = z^{\alpha(n)} f_n(z)$ para cada n. Además,

$$\|g_n\|_v = \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\,|f_n(z)|\,|z|^{\alpha(n)} \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\,|f_n(z)| = \|f_n\|_v \leq 1.$$

Por lo tanto es una sucesión acotada. Y dado K compacto con $K \subset B(0,r)$ sea $A_n = \sup_{z\in K} |f_n(z)|$, entonces tenemos que

$$\sup_{z\in K} |z|^{\alpha(n)}\,|f_n(z)| \leq A_n r^{\alpha(n)} \to 0,$$

es decir, converge a 0 uniformemente sobre los compactos de $\mathbb{D}$. Aplicando la compacidad de C_φ y el Lema 4.6 tenemos que $\|C_\varphi(g_n)\|_w \to 0$. Pero

$$\begin{aligned}\|C_\varphi(g_n)\|_w &\geq |g_n(\varphi(z_n))|\,w(z_n)\\ &\geq |\varphi(z_n)|^{\alpha(n)}\,|f_n(\varphi(z_n))|\,w(z_n) \geq \frac{1}{4}\frac{w(z_n)}{\tilde{v}(\varphi(z_n))} \geq \frac{\epsilon}{4},\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

(2)⇒(1). Por la Proposición 4.3 el operador es acotado ya que existe $R > 0$ tal que

$$\sup_{|\varphi(z)|>R} w(z)/\tilde{v}(\varphi(z)) < 1$$

y si denotamos por $M = \sup_{z\in\mathbb{D}} w(z) > 0$ y $M' = \text{máx}_{|z|\leq R} 1/\tilde{v}(z) < \infty$ resulta

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} \leq \sup_{|\varphi(z)\leq R|} \frac{M}{\tilde{v}(\varphi(z))} + \sup_{|\varphi(z)|>R} \frac{w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} < M \,\text{máx}_{|z|\geq R} \frac{1}{\tilde{v}(z)} + 1 = MM' + 1 < \infty$$

Vamos ahora a usar el Lema 4.6 para probar la compacidad del operador. Tomamos una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\|f_n\|_v \leq A$, $n \in \mathbb{N}$, que converge a 0 uniformemente sobre los compactos $\mathbb{D}$. Veamos que $C_\varphi(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $H^\infty_w(\mathbb{D})$. Dado $\epsilon > 0$ existe $R \in (0,1)$ tal que $\sup_{|\varphi(z)|>R} w(z)/\tilde{v}(\varphi(z)) < \epsilon/2$, es decir

$$w(z) < \epsilon\tilde{v}(\varphi(z))/2,\ |\varphi(z)| > R.$$

Y por la convergencia sobre compactos, si $M = \sup_{z\in\mathbb{D}} w(z) < \infty$, para n suficientemente grande tendremos que

$$\sup_{|z|\leq R} |f_n(z)|\, M < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\|C_\varphi(f_n)\|_w &\leq \sup_{|\varphi(z)|\leq R} |f_n(\varphi(z))|\, w(z) + \sup_{|\varphi(z)|>R} |f_n(\varphi(z))|\, w(z)\\ &\leq \sup_{|z|\leq R} |f_n(z)|\, M + \frac{\epsilon}{2} \sup_{|\varphi(z)|>R} |f_n(\varphi(z))|\, \tilde{v}(\varphi(z)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\|f_n\|_{\tilde{v}} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

De aquí se sigue (1) por la caracterización de los operadores compactos del Lema 4.6. □

Definimos

$$\begin{aligned}T_k \colon H^\infty_v(\mathbb{D}) &\to H^\infty_v(\mathbb{D})\\ f &\mapsto T_k(f)(z) = f\left(\frac{kz}{k+1}\right).\end{aligned}$$

Estos operadores son compactos por la Proposición 4.7, ya que como $\varphi(\mathbb{D}) \subset B(0, k/(k+1))$, tenemos que $\{z \in \mathbb{D} \mid |\varphi(z)| > k/(k+1)\} = \emptyset$, y por lo tanto $\sup_{|\varphi(z)|>r} w(z)/\tilde{v}(\varphi(z)) = 0$, y por lo tanto el límite cuando $r \to 1$ también. Además

$$\begin{aligned}\|T_k(f)\|_v &= \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\, |f(kz/(k+1))|\\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} v(kz/(k+1))\, |f(kz/(k+1))| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\, |f(z)| = \|f\|_z,\end{aligned}$$

es decir, $\|T_k\| \leq 1$.

Teorema 4.8. *Sean v y w pesos. Supongamos que el operador $C_{\varphi,\psi} \colon H^\infty_v(\mathbb{D}) \to H^\infty_w(\mathbb{D})$ es continuo. Entonces*

$$\|C_{\varphi,\psi}\|_e \leq 2 \lim_{r\to1} \sup_{|\varphi(z)|>r} \frac{|\psi(z)w(z)|}{\tilde{v}(\varphi(z))}.$$

Demostración. Fijamos $r \in (0,1)$, tenemos que

$$\|C_{\varphi,\psi}\|_e \leq \|C_{\varphi,\psi} - C_{\varphi,\psi}T_k\| = \sup_{\|f\|_v\leq 1} \sup_{z\in\mathbb{D}} w(z)\,|\psi(z)|\,|(Id-T_k)(f)(\varphi(z))| \leq I_{r,k} + J_{r,k},$$

donde

$$I_{r,k} = \sup_{\|f\|_v\leq 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} w(z)\,|\psi(z)|\,|(Id-T_k)(f)(\varphi(z))|\,,$$

y

$$J_{r,k} = \sup_{\|f\|_v\leq 1} \sup_{|\varphi(z)|\leq r} w(z)\,|\psi(z)|\,|(Id-T_k)(f)(\varphi(z))|\,.$$

Vamos a estimar ahora estos valores. Por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned} I_{r,k} &\leq \sup_{\|f\|_v\leq 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} \frac{w(z)\,|\psi(z)|}{\tilde{v}(\varphi(z))}\tilde{v}(\varphi(z))\,|(Id-T_k)(f)(\varphi(z))| \\ &\leq \sup_{|\varphi(z)|>r} \frac{w(z)\,|\psi(z)|}{\tilde{v}(\varphi(z))} \sup_{\|f\|_v\leq 1} \sup_{z\in\mathbb{D}} \tilde{v}(z)\,|(Id-T_k)(f)(z)| \\ &\leq \sup_{|\varphi(z)|\geq r} \frac{w(z)\,|\psi(z)|}{\tilde{v}(\varphi(z))}\|Id-T_k\| \leq 2 \sup_{|\varphi(z)|>r} \frac{w(z)\,|\psi(z)|}{\tilde{v}(\varphi(z))}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$J_{r,k} \leq \|\psi\|_w \sup_{\|f\|\leq 1} \sup_{|z|\leq r} |(Id-T_k)(f)(z)|\,.$$

Ahora bien, por la continuidad de f, tenemos que f es uniformemente continua en $\overline{B(0,r)}$, es decir, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|z-w| < \delta$, entonces $|f(z) - f(w)| < \epsilon$. En concreto existirá k_0 tal que si $k \geq k_0$ entonces $|z - kz(k+1)| = |z/(k+1)| \leq r/(k_0+1) < \delta$, y por lo tanto,

$$\sup_{\|f\|\leq 1} \sup_{|z|\leq r} |(Id-T_k)(f)(z)| < \epsilon,\ k \geq k_0.$$

En otras palabras,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\|f\|\leq 1} \sup_{|z|\leq r} |(Id-T_k)(f)(z)| = 0.$$

En consecuencia,

$$\|C_{\varphi,\psi}\|_e \leq \limsup_{k\to\infty} I_{r,k} + \limsup_{k\to\infty} J_{r,k} \leq 2 \sup_{|\varphi(z)|>r} \frac{w(z)\,|\psi(z)|}{\tilde{v}(\varphi(z))}.$$

Debido a que los supremos anteriores son decrecientes según crece r y acotados por 0, resulta que existe su límite y por lo tanto

$$\|C_{\varphi,\psi}\|_e \leq 2 \lim_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} \frac{w(z)\,|\psi(z)|}{\tilde{v}(\varphi(z))}.$$

□

Corolario 4.9. *Sean v y w pesos. Entonces el operador $C_{\varphi,\psi}\colon H_v^\infty(\mathbb{D}) \to H_w^\infty(\mathbb{D})$ es compacto si y solo si $\psi \in H_w^\infty(\mathbb{D})$ y*

$$\lim_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} \frac{w(z)\,|\psi(z)|}{\tilde{v}(\varphi(z))} = 0.$$

Cuando v es esencial, $\tilde{v}$ se puede sustituir por v.

Demostración. Supongamos que $C_{\varphi,\psi}$ es compacto. Entonces es continuo y $\psi = C_{\varphi,\psi}(1) \in H_w^\infty(\mathbb{D})$. Si suponemos que $\lim_{r\to 1}\sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)|\,w(z)/\tilde{(}\varphi(z)) > \epsilon > 0$, entonces existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{D}$ tal que $|\varphi(z_n)| \to 1$ y $|\psi(z_n)|\,w(z_n) \geq \epsilon\tilde{v}(\varphi(z_n))$ para todo n. Para cada n existe f_n con $\|f_n\|_v \leq 1$ y tal que $|f_n(\varphi(z_n))|\,\tilde{v}(\varphi(z_n)) \geq 1/2$ y $\alpha(n) \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi(z_n)|^{\alpha(n)} \geq 1/2$ con $\alpha(n) \to \infty$. Definimos $g_n(z) = z^{\alpha(n)} f_n(z)$ para cada n. Como en la demostración del Teorema 4.7, estas funciones verifican que $\|g_n\|_v \leq 1$ y que convergen a 0 uniformemente sobre los subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Se puede ver, de forma completamente análoga al Lema 4.6 que por la compacidad de $C_{\varphi,\psi}$ se verifica que $\|C_{\varphi,\psi}(g_n)\|_w \to 0$. Pero

$$\begin{aligned}
\|C_{\varphi,\psi}(g_n)\|_w &\geq |\psi(z_n)|\,|g_n(\varphi(z_n))|\,w(z_n) \\
&\geq |\psi(z_n)|\,|\varphi(z_n)|^{\alpha(n)}\,|f_n(\varphi(z_n))|\,w(z_n) \\
&\geq \frac{1}{4}\frac{|\psi(z_n)|\,w(z_n)}{\tilde{v}(\varphi(z_n))} \geq \frac{\epsilon}{4},
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, aplicando el Teorema 4.8 basta probar que $C_{\varphi,\psi}$ es continuo bajo las condiciones $\psi \in H_w^\infty(\mathbb{D})$ y $\lim_{r\to 1}\sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)|\,w(z)/\tilde{v}(\varphi(z)) = 0$. Sea $r < 1$ tal que

$$\sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)|\,w(z)/\tilde{v}(\varphi(z)) < 1.$$

Entonces,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|\,w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} \leq \sup_{|\varphi(z)|\leq r} \frac{|\psi(z)|\,w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} + \sup_{|\varphi(z)|>r} \frac{|\psi(z)|\,w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))} \leq \frac{\|\psi\|_w}{\tilde{v}(r)} + 1 < \infty,$$

lo que prueba la continuidad del operador. Y por el Teorema 4.8,

$$\|C_{\varphi,\psi}\|_e \leq \lim_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)|\,w(z)/\tilde{v}(\varphi(z)) = 0,$$

es decir, $\|C_{\varphi,\psi}\|_e = 0$, de donde se concluye la compacidad del operador. □

Apéndice A

Resultados de Análisis Complejo elemental

En este Apéndice se añaden los enunciados de resultados de Análisis Complejo que se suelen estudiar en un curso estándar del Grado en Matemáticas. Estos resultados aparecen en numerosos textos de Análisis Complejo, como pueden ser [2, 18].

Principio de Identidad. *Sea f una función holomorfa en un abierto conexo $G \subset \mathbb{C}$. Entonces son equivalentes*

1. *f es idénticamente cero, es decir, $f(z) = 0$ para todo $z \in G$,*
2. *f tiene un cero de orden infinito,*
3. *el conjunto de ceros de f*

$$Z(f) = \{z \in G \mid f(z) = 0\},$$

tiene algún punto de acumulación en G.

Fórmula Integral de Cauchy para circunferencias. *Sea f una función holomorfa en G y sea $B(z_0, r)$ una bola tal que $\overline{B(z_0, r)} \subset G$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in B(z_0, r).$$

Fórmula de Cauchy para las derivadas. *Sea $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ un abierto, y f holomorfa en G. Si $\overline{B(z_0, r)} \subset G$, entonces*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw, \quad z \in D(z_0, r).$$

Desigualdades de Cauchy. *Sea $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ un abierto, y f holomorfa en G. Si $\overline{B(z_0, r)} \subset G$ y si $M(r) = \sup_{|w-z_0|=r} |f(w)|$, entonces*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}.$$

Teorema de Liouville. *Sea f una función entera, es decir, $f \in H(\mathbb{C})$. Si f está acotada, entonces f es entera.*

Principio del Módulo Máximo. *Sea G un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y f holomorfa en G. Si $|f|$ tiene algún máximo local, entonces f es constante.*

Teorema de convergencia de Weierstrass. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H(G)$ una sucesión de funciones holomorfas sobre G que converge uniformemente a f sobre compactos de G. Entonces f también es holomorfa y además para todo $k \in \mathbb{N}$ $\left\{f_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f^{(k)}$ uniformemente sobre compactos de G.*

Bibliografía

[1] W. Arendt y N. Nikolski. «Vector-valued holomorphic functions revisited». En: *Math. Z.* 234.4 (2000), págs. 777-805.

[2] R. B. Ash y W. P. Novinger. *Complex Variables*. 2004. URL: https://people.math.sc.edu/girardi/m7034/book/AshComplexVariablesWithHyperlinks.pdf.

[3] C. A. Berenstein y R. Gay. *Complex variables*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] J. Bonet, P. Domański y M. Lindström. «Essential norm and weak compactness of composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions». En: *Canad. Math. Bull.* 42.2 (1999), págs. 139-148.

[5] J. Bonet, P. Domański, M. Lindström y J. Taskinen. «Composition operators between weighted Banach spaces of analytic functions». En: *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 64.1 (1998), págs. 101-118.

[6] J. Bonet y D. Vukotić. «A note on completeness of weighted normed spaces of analytic functions». En: *Results Math.* 72.1-2 (2017), págs. 263-279.

[7] K. Ciesielski y M. S. Moslehian. «Some remarks on the history of functional analysis». En: *Ann. Funct. Anal.* 1.1 (2010), págs. 1-12.

[8] M. D. Contreras y A. G. Hernández-Díaz. «Weighted composition operators in weighted Banach spaces of analytic functions». En: *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 69.1 (2000), págs. 41-60.

[9] J. B. Conway. *A course in functional analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1990.

[10] L. Hörmander. *An introduction to complex analysis in several variables*. North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[11] J. Horváth. *Topological vector spaces and distributions. Vol. I.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966.

[12] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[13] J. Matoušek. *Lectures on discrete geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002.

[14] R. Meise y D. Vogt. *Introduction to functional analysis*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[15] O. Merino. *A Short History of Complex Numbers*. URL: https://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf.

[16] T. Ransford. *Potential theory in the complex plane*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[17] R. Remmert. *Theory of complex functions*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.

[18] R. Remmert. *Classical topics in complex function theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998.

[19] W. Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[20] J. H. Shapiro. *Composition operators and classical function theory*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.