Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Compleción en Geometría

Autor:

Guillermo Marquínez García de Vicuña

Directora:

Ana José Reguera López

Junio de 2022

Contents

Una definición habitual en análisis real y complejo es la de espacios completos, decimos que un espacio $X \subseteq \mathbb{C}^k$ es completo si toda sucesión de Cauchy con elementos en X converge en X. Recordamos que una sucesión (x_i) de $\mathbb{C}^k$ es de Cauchy si para todo ϵ existe un n_ϵ mayor que 0, de manera que la distancia entre x_n y x_m es menor que ϵ para todo n y m mayores que n_ϵ. Dicho de manera informal, una sucesión es de Cauchy si los elementos de esta son cada vez más cercanos.

Esta definición tiene sentido para los espacios métricos, entre los que se encuentran los espacios de funciones habituales, por ejemplo, los espacios de Hilbert, pues en ellos tenemos una distancia. Claramente cualquier sucesión convergente es de Cauchy, pero el inverso no es necesariamente cierto. Por lo tanto, un espacio completo será aquel donde todas las sucesiones de Cauchy son convergentes. Por ejemplo, con la distancia usual, $(0, 1)$ no es un espacio completo, pues en él, la sucesión de Cauchy $(1/n)_{n=2}^{\infty}$ no es convergente. Como consecuencia, tiene sentido pensar en los espacios completos como los espacios a los que no les falta ningún elemento por "pegar". En el ejemlo anterior, $\{0, 1\}$ está pegado a $(0, 1)$ y no forman parte del espacio, por lo que no es un espacio completo.

Uno de los beneficios de los espacios completos es que las sucesiones convergentes son exactamente las de Cauchy, y dado que en estas segundas no necesitamos saber cuál es el límite de la sucesión, comprobar que una sucesión es de Cauchy es más sencillo que probar la convergencia. Por esta razón, en muchas situaciones conviene trabajar en espacios completos, incluso, en ocasiones, es necesario añadir todos aquellos puntos al espacio para que este sea completo, es decir, completar el espacio.

Todas estas nociones tienen una idea análoga en Álgebra conmutativa. Para poder definir las sucesiones de Cauchy tal y como están descritas en el primer párrafo deberíamos definir una distancia sobre los anillos y módulos. Sin embargo, vamos a redefinir las sucesiones de Cauchy, para que estas tengan sentido en anillos y módulos topológicos con topogías lineales, puesto que estas son compatibles con las operaciones de los anillos y módulos.

En este trabajo se estudian las compleciones algerbáicas. Para ello se ha dividido el texto en cuatro capítulos, donde cada uno de ellos se centra en un aspecto diferente. En el primer capítulo se estudian los límites y las topología lineales, pues son conceptos imprescindibles para entender las compleciones.

En el segundo capítulo del trabajo se definen las compleciones y se estudian sus propiedades, tanto algebráicas como topológicas. Además, definimos las sucesiones de Cauchy, y probamos que los anillos completos son aquellos donde todas las sucesiones de Cauchy connvergen.

Para hacer la compleción de un anillo, hay que definir la topología linear mediante la cuál se va a hacer. En este sentido, la topología más usada es la I-ádica. En el tercer capítulo, estudiamos esta topología. Probaremos el lema de Artin-Rees y el teorema de la intersección de Krull.

Por último, en el cuarto capítulo probamos el lema de Hensel. Definimos los anillos henselianos como aquellos que satisfacen resultado del lema y estudiamos cómo son estos anillos. Además, acabaremos el trabajo definiendo la henselización de anillos locales mediante propiedades universales, después veremos que para todo anillo local existe su henselización.

Chapter 1

Topologías lineales y límites

A lo largo de este trabajo A será un anillo conmutativo y unitario, I un ideal de A y M un A-módulo.

Para poder definir las compleciones de un anillo y de un módulo debemos definir los anillos y módulos topológicos, y en específico la topología lineal, a lo cual nos dedicaremos durante la primera sección del capítulo. En general, las topologías que tiene sentido considerar sobre estructuras algebraicas son aquellas compatibles con las operaciones dentro de la estructura, es decir, las que hacen que las operaciones sean funciones continuas. Veremos que para determinar una de estas topologías es suficiente con dar la base de entornos de algún elemento del anillo o módulo. Así que por simplicidad, daremos la base de entornos de 0. En esta sección se prueba que los anillos y módulos topológicos son separables cuando la intersección de todos los entornos de 0 es el propio 0. Todas estas nociones topológicas tiene su aplicación en el segundo tema, pues la compleción depende únicamente de la topología definida en el anillo (respectivamente para el módulo). Para esta sección se han utilizado los capítulos 10 de *Introduction to Commutative Algebra* de M.F. Atiyah y I.G.Macdonald y el 8 de *Commutative ring theory* de H. Mastumura, así como algunos resultados básicos de topología.

En la segunda parte del capítulo daremos la definición de límite proyectivo. Primero, vamos a dar la definición de límite a traves de propiedades universales, después veremos que el límite se puede expresar en función de productos y núcleos. Probaremos que el límite existe en las categorías de módulos y de anillos. También definiremos los sistemas inversos y los morfismos entre ellos, así podremos consiserar el límite como un functor de la categoría de sistemas inversos a la categoría de anillos o módulos. Veremos que el límite es exacto por la izquierda, y daremos una versión débil de la condición de Mittag-Leffler que nos asegurará la exactitud del límite. Las compleciones se pueden definir a través de estos límites, esto quiere decir que todas estas propiedades serán válidas para las compleciones, por ejemplo, la compleción I-ádica satisface la condición de Mittag-Leffler, por lo que es exacta. Este resumen se ha obtenido de los capítulos V y IX de *Categories for the Working Mathematician* de S. Mac Lane, del capítulo 2 de *Categories and Sheaves* de M. Kashiwara y P. Schapira y de los capítulos 1 y 3 de *An Introduction to Homological Algebra* de C.A. Weibel.

1.1 Topología lineal

Definición 1. *Decimos que A es un anillo topológico si existe una topología sobre el anillo A en la cual las funciones que definen las operaciones habituales de A son continuas. Es decir,*

$$\begin{array}{ccccccccc} A \times A & \longrightarrow & A, & A & \longrightarrow & A, & A \times A & \longrightarrow & A, \\ (a, a') & \longmapsto & a + a', & a & \longmapsto & -a, & (a, a') & \longmapsto & aa', \end{array}$$

son continuas (considerando la topología producto en $A \times A$).

De manera análoga, si A es un anillo topológico, el A-módulo M es topológico si existe una topología sobre M que hace las siguientes funciones continuas,

$$\begin{array}{ccccccccc} M \times M & \longrightarrow & M, & M & \longrightarrow & M, & A \times M & \longrightarrow & M. \\ (m, m') & \longmapsto & m + m', & m & \longmapsto & -m, & (a, m) & \longmapsto & am. \end{array}$$

En lo que resta de apartado hablaremos solamente de los A-módulos topológicos. Sin embargo, todos los resultados son válidos para los anillos topológicos.

Nótese que la traslación T_m, que envia a cada $m' \in M$ a $m + m'$ es un homeomorfismo (es continua y su inversa es T_{-m}). Por lo tanto, los entornos de m están determinados por los entornos de 0, pues N_m es un entorno de m si y solo si $N_m - m$ es un entorno de 0. En particular, la topología sobre M está determinada por los entornos de 0, así que basta con dar la base de entornos de 0 para definir la topología. Vamos a dar dos lemas topológicos que van a ayudarnos con las siguientes propiedades.

Lema 1. *Sea X un espacio topológico, entonces X es Hausdorff si y solo si la diagonal $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ es un cerrado en la topología producto.*

Proof. Si X es Hausdorff, entones para todo par x, y de puntos distintos de X existen abiertos $x \in U$, $y \in V$, tales que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, $U \times V$ es un abierto básico de $X \times X$ con $U \times V \cap \Delta_X = \emptyset$. Esto quiere decir que $X \times X \setminus \Delta_X$ es entorno de todos sus puntos, es decir, un abierto.

Si Δ_X es cerrado, entonces por ser $X \times X \setminus \Delta_X$ abierto, para cada par (x, y) con x e y diferentes, existe un abierto básico que contiene a (x, y) y contenido en $X \times X \setminus \Delta_X$. Por la definición de la topología producto, este abierto básico es de la forma $U \times V$, con $x \in U$, $y \in V$. Se tiene que $(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset$, por tanto X es Hausdorff. □

Lema 2. *Sea X un espacio topológico, sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos e Y un subespacio de X. Entonces, x está en la clausura topológica de Y (que denotaremos como $\overline{Y}$) si y solo si para todo entorno B de x, $B \cap Y$ es distinto del conjunto vacío.*

Proof. ($\Rightarrow$) Sea $x \in \overline{Y}$, y supongamos por reducción al absurdo que existe un entorno B de x (sin perdida de generalidad podemos asumir que es abierto) tal que $Y \cap B = \emptyset$. Entonces, Y está contenido en $X \setminus B$, que es cerrado. Por lo que $\overline{Y} \subseteq X \setminus B$, y como $x \in B$, x no está en $\overline{Y}$, lo cual contradice la hipótesis.

($\Leftarrow$) Por hipótesis, para todo $B \in \mathcal{B}_x$, la intersección $B \cap Y$ es distinta del vacío. Supongamos por reducción al absurdo que x no es un elemento de $\overline{Y}$, por tanto x está en $X \setminus \overline{Y}$, que es abierto. Entonces, existe un entorno básico de $B \subseteq X \setminus \overline{Y}$ que contradice la hipótesis. □

Propiedades 1 (Lema 10.10 de [1]). *Sea M un A-módulo topologíco y sea H la intersección de todos los entornos de* 0*. Entonces,*

(i) H es un submódulo de M,

(ii) H es la clausura de 0*,*

(iii) M es Hausdorff si y solo si $H = \{0\}$,

(iv) M/H es Hausdorff.

Proof. (i) Sean $m, m' \in H$, entonces $m, m' \in N$, para todo entorno N de 0, es decir, los entornos de 0 de m y de m' son los mismos. Análogamente, los entornos de $m + m'$, vienen dados por $m + m' + N$. Por lo tanto, $m + m' + N = m + (m' + N) = m + N = N$, es decir que para todo entorno N de 0, $m + m' \in N$. La demostración de que H es cerrado tomando opuestos y bajo la acción de A es análoga a la anterior.

(ii) Por el lema 2, x está en la clausura topológica de 0 si y solo si para todo entorno N_x de x, 0 está en N_x. Como $N_x = x + N$ donde N es un entorno de 0, tenemos que $x \in \overline{\{0\}}$ si y solo si para todo entorno N de 0, $x \in 0 - N$, es decir, $x \in N$ (La aplicación $x \mapsto -x$ es un homeomorfismo que deja 0 fijo, entonces N es un entorno de 0 si y solo si $-N$ es un entorno de 0).

(iii) Si $H = \{0\}$, entonces Δ_M es la imagen inversa de H de la función resta, por lo tanto es cerrado y por el lema 1, M es Hausdorff. Si M es Hausdorff, entonces $H = \{0\}$. En caso contrario, si $x \in H$ diferente de 0, no existiría ningún abierto que contenga a 0 y no a x.

(iv) Consecuencia directa de (*iii*).

□

Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de submódulos de M, entonces considerando $\mathcal{F}$ como la base de entornos de 0, se define una topología en M. A esta topología la llamamos la topología lineal definida por $\mathcal{F}$. Nótese que para que $\mathcal{F}$ sea una base de entornos de 0 bien definida, necesitamos que para cada par de entornos básicos M_i, M_j exista un entorno básico M_k contenido en $M_i \cap M_j$. Es decir, si dotamos al conjunto de índices Λ con un orden $\leq$ dado por $i \leq j \iff M_i \supseteq M_j$, estamos pidiendo que $(\Lambda, \leq)$ sea un conjunto dirigido. Así, cuando decimos que M es un A-módulo topológico con la topología lineal definida por el conjunto $\mathcal{F}$, nos referiremos a que M es la única topología sobre M donde $\mathcal{F}$ es la base de entornos de 0. En el caso de anillos $\mathcal{F}$ será un conjunto de ideales.

Esta topología es compatible con la estructura de A-módulo de M, donde la base de entornos de x son las clases laterales $x + M_i$ de los submódulos M_i de $\mathcal{F}$. Sea M_i un elemento de $\mathcal{F}$, entonces M_i es abierto, pues es entorno de todos sus puntos. Además, sus clases laterales $x + M_i$ también serán abiertas, por lo que M/M_i es un espacio topológico discreto.

Sea N un subconjunto cualquiera de M (no necesariamente un submódulo). Consideramos la topología lineal de M definida por $\{M_i\}_{i \in \Lambda}$ como base de entornos de 0. Entonces, por el lema 2, x está en la clausura de N si y solo si $(x + M_i) \cap N$ es distinto del vacío para todo i de Λ, es decir, existe algún n en N tal que $x + m_i = n$ para algún m_i de M_i, y esto ocurre si y solo si $x = n - m_i$, es decir, $x \in N + M_i$, para todo índice i de Λ. Acabamos de probar que:

$$\overline{N} = \bigcap_{i \in \Lambda} (N + M_i)$$

Proposición 1. *Sea M un A-módulo topológico con la topología lineal definida por $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ y N un submódulo de M. Entonces,*

(i) La topología inducida en N es una topología lineal donde $\{M_i \cap N\}_{i\in I}$ es la base de entornos de 0.

(ii) La topología cociente en M/N es una topología lineal donde $\mathcal{F}' = \{M_i' = (M_i + N)/N\}_{i\in I}$ es la base de entornos de 0.

Proof. (i) Trivial.

(ii) Rercordamos que la topología cociente es la más fina que hace que $\pi : M \to M/N$ sea continua. Claramente la topología lineal hace continua $\pi : M \to M/N$, pues para cada entorno básico M_i' de 0, $\pi^{-1}(M_i') = M_i + N$ es un entorno de 0 en M, por contener al entorno básico M_i. Para la otra inclusión, si U es un entorno de 0 en la topología cociente, entonces $\pi^{-1}(U)$ es un entorno de 0 en M, por lo que existe un $M_i \subseteq U$, como π es sobreyectiva, $\pi \circ \pi^{-1}(U) = U$, por lo tanto $\pi(M_i) = M_i' \subseteq U$, es decir, U es un entorno de 0 en la topología lineal.

□

1.2 Límites

En esta sección daremos la definición de límite en teoría de categorías, para ello, vamos a utilizar la notación habitual en esta teoría. Si $\mathcal{C}$ es una categoría, hacemos un abuso de notación y escribimos que $C \in \mathcal{C}$ para referirnos a que C es un objeto de $\mathcal{C}$. Para denotar un morfismo α entre los objetos C y C', escribimos $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ o $\alpha : C \to C'$ indistintamente. La categoría $\mathcal{C}^{op}$ denota la categoría opuesta a C. Para referirnos a un functor entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, escribimos $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, donde a la imagen de un objeto $C \in \mathcal{C}$ por el functor F la denotamos como $F(C)$, análogamente a la imagen de un morfismo $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ la denotamos como $F(\alpha) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(C), F(C'))$. Si el functor F es cotravariante, escribimos $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.

La definición de límites (también llamados límtes inversos o poyectivos) en teoría de categorías es una de las nociones fundamentales de esta teoría. Junto con los colímites (también llamados límites directos o inyectivos) generalizan las nociones de núcleo, conúcleo, producto y coprodructo.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría, Λ una categoría pequeña y $F : \Lambda \to \mathcal{C}$ un functor. Dado un objeto C de $\mathcal{C}$, decimos que una familia de morfismos $\{\alpha_i : X \to F(i)\}_{i\in\Lambda}$ es compatible respecto al functor F si para todo morfismo

$\lambda : i \to j$ en Λ, se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "\alpha_j"] & F(i) \arrow[dl, "F(\lambda)"] \\ F(j) & \end{tikzcd}$$

Definición 2. *Dado un functor $F : \Lambda \to \mathcal{C}$, decimos que un objeto de $\mathcal{C}$ es el límite inverso de F y lo denotamos por $\varprojlim F$ si existen morfismos $\rho_i : \varprojlim F \to F(i)$ (que llamaremos proyecciones) de manera que se cumplen los dos siguientes puntos:*

- *La familia $\{\rho_i : \varprojlim F \to F(i)\}_{i\in\Lambda}$ es compatible respecto a F.*
- ***La propiedad universal para** F. Si $\{\alpha_i : X \to F(i)\}_{i\in\Lambda}$ es otra familia compatible respecto a F, existe un único morfismo $\alpha : C \to \varprojlim F$ cumpliendo que $\rho_i \circ \alpha = \alpha_i$ para todo $i \in \Lambda$.*

De manera más gráfica, se suele representar el límite inverso de F con el siguiente diagrama commutativo, donde $\lambda : i \to j$ es un morfismo en Λ,

$$\begin{tikzcd} & & F(i) \arrow[dd, "F(\lambda)"] \\ X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[urr, bend left, "\alpha_i"] \arrow[drr, bend right, "\alpha_j"'] & \varprojlim F \arrow[ur, "\rho_i"] \arrow[dr, "\rho_j"'] & \\ & & F(j) \end{tikzcd}$$

Nótese que el límite de F no tiene porqué existir.

Este trabajo estudia las compleciones del Álgebra conmutativa. Por lo tanto, no es necesario que pensemos en categorías tan generales, pues solamente trabajaremos con las categorías abelianas de A-módulos y de anillos conmutativos y unitarios, que las denotamos por $Mod(A)$ y $Ring$ respectivamente. De esta manera, tienen sentido las definiciones de núcleo y conúcleo, las sucesiones exactas, los productos (producto usual) y coproductos (sumas directas) y como veremos al final del apartado, también las de límites. A partir de ahora $\mathcal{C}$ se refiere a una de estas dos categorías.

Lema 3 (Lema de la serpiente, lema 1.3.2 de [9])**.** *Consideramos el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{C}$, donde las secuencias horizontales son exactas,*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B \arrow[r, "g'"] & C' & \end{tikzcd}$$

Entonces, existe la siguiente sequencia exacta,

$$Ker\alpha \xrightarrow{\overline{f}} Ker\beta \xrightarrow{\overline{g}} Ker\gamma \xrightarrow{\partial} Coker\alpha \xrightarrow{\underline{f'}} Coker\beta \xrightarrow{\underline{g'}} Coker\gamma.$$

Donde ∂ está definido como $f'^{-1} \circ \beta \circ g^{-1}$; $\overline{f}, \overline{g}$ son las restricciones de f y g respectivamente y $\underline{f'}, \underline{g'}$ son inducidos por f' y g'.

Proof. Si $x \in Ker\alpha$, entonces $0 = f' \circ \alpha(x) = \beta \circ f(x)$, por lo que $f(x) \in Ker\beta$, es decir, el morfismo f induce $\overline{f} : Ker\alpha \to Ker\beta$. El morfismo $\underline{f'} : Coker\alpha \simeq A'/Im(\alpha) \to Coker\beta \simeq B'/Im(\beta)$ está dado por $x + Im\alpha \mapsto f'(x) + Im\beta$, para todo $x \in A'$. Sean $x, y \in A'$ representantes del mismo elemento en $Coker\alpha$, es decir $x - y \in Im\alpha$. Como $x - y \in Im\alpha$ existe $a \in A$ con $\alpha(a) = x - y$, por lo que $\beta \circ f(a) = f' \circ \alpha(a) = f'(x) - f'(y) \in Im\beta$. Por lo tanto, $\underline{f'}$ está bien definido. Análogamente, se demuestra que están bien definidos los morfismos inducidos por g y g'.

De la definición de $\overline{f}$ y $\overline{g}$ se deduce que $Im\overline{f} \subseteq Ker\overline{g}$. Si $x \in Ker\overline{g}$, entonces existe $y \in A$ con $f(y) = x$, por lo que $0 = \beta \circ f(y) = f' \circ \alpha(y)$. Como f' es injectiva, $y \in Ker\alpha$. Es decir $Im\overline{f} = Ker\overline{g}$. Además, $Im\underline{f} \subseteq Ker\underline{g'}$. Si $x + Im\beta \in Ker\underline{g'}$, $0 = g'(x) + Im\gamma$ implica que $g'(x) \in Im\gamma$, es decir, existe un $y \in C$ tal que $\gamma(y) = g'(x)$. Como g es sobreyectiva, existe un $z \in B$ tal que $g(z) = y$, y por lo tanto $g' \circ \beta(z) = \gamma \circ g(z) = \gamma(y) = g'(x)$. Así, $g'(x - \beta(z)) = 0$, es decir, $x - \beta(z) \in Kerg' = Imf'$. Entonces, existe un $u \in A'$ tal que $f'(u) = x - \beta(z)$. Consideramos $u + Im\alpha \in Coker\alpha$ y hacemos su imagen por $\underline{f'}$, $\underline{f'}(u) = x - \beta(z) + Im\beta = x + Im\beta$. Por lo que $Im\underline{f'} = Ker\underline{g'}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & Ker\alpha \arrow[r] \arrow[d] & Ker\beta \arrow[r] \arrow[d] & Ker\gamma \arrow[d] \arrow[dddll, red, "\partial"] & \\
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & Coker\alpha \arrow[r] & Coker\beta \arrow[r] & Coker\gamma &
\end{tikzcd}
$$

El último paso es comprobar que ∂ está bien definida y que $Im\overline{g} = Ker\partial$, $Im\partial = Ker\underline{f'}$. Veamos que para todo $x \in Ker\gamma$, existe $f'^{-1} \circ \beta \circ g^{-1}(x)$ en $Coker\alpha$ y que además es único.

$x \in Ker\gamma \subseteq C$, como g es sobreyectiva, existe algún $y \in B$ con $g(y) = x$. Por la conmutatividad del diagrama $g' \circ \beta(y) = \gamma \circ g(y) = \gamma(x) = 0$, que implica que $\beta(y) \in Kerg' = Imf'$. Entonces, existe un $z \in A'$ con $f'(z) = \beta(y)$. Definimos $\partial(x) = z + Im\alpha$, está definición es única, pues si x tiene dos preimagenes de g, es decir, si existen $y_1, y_2 \in B$ con $g(y_1) = g(y_2) = x$, $g(y_1 - y_2) \in Kerg = Imf$, por lo que existe un único $z \in A$ con $f(z) = y_1 - y_2$. Por lo tanto, $f'^{-1} \circ \beta(y_1) - f'^{-1} \circ \beta(y_2) = \alpha(z) \in Im\alpha$, lo que implica que módulo $Im\alpha$ las preimagenes son la misma.

El resto de la demostración se hace de manera similar. La idea de esta demostración es coger un elemento en algún objeto e ir transportándolo a través del diagrama. Esté método de prueba se llama "cazando o persiguiendo el diagrama" (en inglés *chasing diagram*) y es bastante usual para demostraciones en teoría de categorías y Álgebra homológica. □

1.2.1 Sistemas inversos

Un sistema inverso en $\mathcal{C}$ es una familia de objetos y morfismos $\{C_i, \mu_{ij} : C_j \to C_i, i \leq j\}_{i,j \in \Lambda}$ que cumple lo siguiente:

- si $i \leq j \leq k$ entonces $\mu_{ik} = \mu_{ij} \circ \mu_{jk} = \mu_{ik}$,

- $\mu_{ii} = id_{C_i}$ para todo $i \in \Lambda$.

Sea $(\Lambda, \leq)$ un conjunto con un orden parcial. Definimos la categoría parcialmente ordenada Λ donde los objetos son los elementos de Λ y para cada par i, j de elementos den Λ, el conjunto de morfismos es el siguiente.

$$Hom_\Lambda(i,j) = \begin{cases} \{pt\} & \text{si } i \leq j \\ \emptyset & \text{si } i \not\leq j \end{cases}$$

Como consecuencia, un sistema inverso no es más que un functor contravariante $F : \Lambda^{op} \to \mathcal{C}$, por tanto definimos su límite como $\varprojlim_{i\in\Lambda} C_i$, o $\varprojlim C_i$ si no existe riesgo de confusión. En nuestro caso, dado que Λ va a ser la categoría correspondiente al conjunto dirigido de índices, solamente estamos interesados en los casos donde Λ es una categoría dirigida.

El siguiente ejemplo de límite demuestra que todo anillo y módulo es el límite de algún sistema inverso.

Ejemplo 1. *Sea $\{C_i, \mu_{ij} : C_j \to C_i, i \leq j\}_{i,j\in\Lambda}$ un sistema inverso en la cateogría $\mathcal{C}$. Entonces, si Λ tiene un elemento maximal k, C_k es el límite inverso $\varprojlim_{i\in\Lambda} C_i$.*

Proof. Sean $i \leq j \in \Lambda$, entonces el siguiente triángulo es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & C_j \arrow[dd, "\mu_{ij}"] \\ C_k \arrow[ur, "\mu_{jk}"] \arrow[dr, "\mu_{ik}"'] & \\ & C_i \end{tikzcd}$$

Además dada cualquier familia compatible $\alpha_i : X \to C_i$, $\alpha_k : X \to C_k$ hace que se cumpla la propiedad universal. Por lo tanto $\varprojlim C_i = C_k$. □

La primera pregunta que hay que resolver es si el límite existe y en qué categorías existe. Empezaremos con la categoría más sencilla, la categoría de conjuntos pequeños que la denotamos por Set.

Teorema 1. *Sea $\{X_i, \mu_{ij} : X_j \to X_i, i \leq j\}_{i,j\in\Lambda}$ un sistema inverso en la categoría de conjuntos Set. Entonces*[1]*,*

$$\varprojlim F = \{(x_k)_{k\in\Lambda} \in \prod_{k\in\Lambda} X_k : \mu_{ij}(x_j) = x_i \textit{ para todo } i \leq j;\ i,j \in \Lambda\}.$$

Proof. Por ser $A = \{(x_k)_{k\in\Lambda} \in \prod_{k\in\Lambda} X_k : \mu_{ij}(x_j) = x_i$ para todo $i \leq j;\ i,j \in \Lambda\}$ un subconjunto de $\prod_{i\in\Lambda} X_i$ podemos considerar, para cada $i \in \Lambda$, la proyección dada por

$$\rho_i : A \hookrightarrow \prod_{j\in\Lambda} X_j \to X_i.$$

Esta familia de morfismos es compatible, además si $\{\alpha_i : C \to X_i\}_{i\in\Lambda}$ es otra familia compatible, definimos:

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & C & \longrightarrow & A \\ & c & \longmapsto & (\alpha_i((c))_{i\in\Lambda} \end{array}$$

[1] El producto en Set es el producto cartesiano habitual.

que cumple la propiedad universal.

Para terminar con la demostración hay que demostrar que A es un conjunto pequeño (es decir, es un objeto de Set). Al ser un subconjunto de $\prod_{i\in\Lambda} X_i$ que es pequeño, entonces A es un conjunto pequeño.

□

Como en la categoría de conjuntos existen los límites tiene sentido considerar $\varprojlim Hom_{Set}(C, X_i)$ para cualquier conjunto C. Es decir, tiene sentido considerar el functor $\varprojlim Hom_{Set}(-, X_i)$. Nótese que

$$\varprojlim Hom_{Set}(C, X_i) = \{(\alpha_k)_{k\in\Lambda} \in \prod_{k\in\Lambda} Hom(C, X_k) : Hom_{Set}(C, \mu_{ij})(\alpha_j) = \alpha_i \text{ para todo } i \leq j;\ i, j \in \Lambda\} =$$

$$= \{(\alpha_k)_{k\in\Lambda} \in \prod_{k\in\Lambda} Hom(C, X_k) : \mu_{ij} \circ \alpha_j = \alpha_i \text{ para todo } i \leq j;\ i, j \in \Lambda\}.$$

Esto quiere decir que $\varprojlim Hom_{Set}(C, X_i)$ está compuesto por las familias de morfismos $\alpha_i : C \to X_i$ que son compatibles respecto a los μ_{ij}. Por lo tanto, por la propiedad universal para cada una de estas familia podemos asignar una única aplicación $\alpha : C \to \varprojlim X_i$ de modo que $\alpha_i = \rho_i \circ \alpha$. Es decir, las siguientes aplicaciones son inversas:

$$\begin{array}{ccc}
\varprojlim Hom_{Set}(C, X_i) & \longrightarrow & Hom_{Set}(X, \varprojlim X_i) \\
(\alpha_i)_{i\in\Lambda} & \longmapsto & \alpha, \\
Hom_{Set}(C, \varprojlim X_i) & \longrightarrow & \varprojlim Hom_{Set}(C, X_i) \\
\alpha & \longmapsto & (\rho_i \circ \alpha)_{i\in\Lambda}.
\end{array}$$

De esta manera, tenemos el siguiente isomorfismo de conjuntos $\varprojlim Hom_{Set}(C, X_i) \simeq Hom_{Set}(C, \varprojlim X_i)$. Más aún, este isomorfismo es functorial, por lo que $\varprojlim Hom_{Set}(-, X_i) \simeq Hom_{Set}(-, \varprojlim X_i)$ es un isomorfismo de functores. Por lo tanto, el functor $\varprojlim Hom_{Set}(-, X_i)$ es reprensentable y $\varprojlim X_i$ es su representante (por el lema de Yoneda sabemos que el representate de un functor es único).

Una vez definido el límite en la categoría de conjuntos y dada esta propiedad podemos definir el límite en la categoría $\mathcal{C}$ (que será la categoría de anillos o de módulos) como el representate del functor $\varprojlim Hom_{\mathcal{C}}(X, F(i))$. Esta definición es compatible con la dada anteriormente, además se cumple el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea el sistema inverso $\{C_i, \mu_{ij} : C_j \to C_i, i \leq j\}_{i,j\in\Lambda}$. Entonces,*

- *El límite $\varprojlim C_i$ existe en $\mathcal{C}$ si y solo si el functor $\varprojlim Hom_{\mathcal{C}}(-, C_i)$ es representable. En este caso, denotamos al representante del functor como $\varprojlim_{i\in\Lambda} C_i$, y queda caracterizado por el siguiente isomorfismo $Hom_{\mathcal{C}}(-, \varprojlim C_i) \simeq \varprojlim Hom_{\mathcal{C}}(-, C_i)$.*
- *Si el límite existe entonces,*

$$\varprojlim C_i = \{(x_k)_{k\in\Lambda} \in \prod_{k\in\Lambda} C_k : \mu_{ij}(x_j) = x_i \text{ para todo } i \leq j\}.$$

Proof. • Si el límite existe entonces de la propiedad universal tenemos el isomorfismo $Hom_{\mathcal{C}}(-, \varprojlim C_i) \simeq \varprojlim Hom_{\mathcal{C}}(-, C_i)$. En el caso contrario, si el functor $\varprojlim Hom_{\mathcal{C}}(-, C_i)$ es representable, tenemos que su representate es un elemento X tal que $Hom_{\mathcal{C}}(-,X) \simeq \varprojlim Hom_{\mathcal{C}}(-,C_i)$. Este elemento X cumple las propiedades del límite, por lo que $X = \varprojlim C_i$.

- La prueba es igual que en la categoría Set.

□

Hemos visto que un sistema inverso de objetos de la categoría $\mathcal{C}$ es esencialmente los mismo que un functor contravariante de la categoría de índices a $\mathcal{C}$. Así, tiene sentido considerar que un morfismo entre dos sistemas inversos es una transformación natural entre los functores asociados, es decir, si $\{C_i, \mu_{ij}\}_{i,j\in\Lambda}$ y $\{C'_i, \mu'_{ij}\}_{i,j\in\Lambda}$ son dos sistemas inversos, un morfismo $\alpha : \{C_i, \mu_{ij}\}_{i,j\in\Lambda} \to \{C'_i, \mu'_{ij}\}_{i,j\in\Lambda}$ es una familia de morfismos $\alpha_i : C_i \to C'_j$ en $\mathcal{C}$ donde los siguientes cuadrados conmutan para todo $i \leq j$:

$$\begin{array}{ccc} C_j & \xrightarrow{\alpha_j} & C'_j \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{ij}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu'_{ij}} \\ C_i & \xrightarrow{\alpha_i} & C'_i \end{array}$$

Gracias a la propiedad universal de los límites, es sencillo comprobar que para todo morfismo de sistemas inversos $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in\Lambda}$, existe un morfismo $\varprojlim \alpha_i : \varprojlim C_i \to \varprojlim C'_i$, que cumple que si $\beta = \{\beta_i\}_{i\in\Lambda}$ es otro morfismo de sistemas inversos componible con α, entonces $\varprojlim(\beta_i \circ \alpha_i) = \varprojlim \beta_i \circ \varprojlim \alpha_i$. Dicho en lenguaje de categorías, si para el conjunto de índices Λ existen los límites en $\mathcal{C}$, entonces $\varprojlim_{i\in\Lambda}(-)$ es un functor de la categoría de sistemas inversos indexados por Λ (que es equivalente a la categoría de functores $\Lambda^{op} \to \mathcal{C}$) a la categoría $\mathcal{C}$.

Una de las particularidades de los límites es que generalizan la definición de núcleos y de productos. Por ejemplo, si la categoría Λ es discreta, es decir, los únicos morfismos de la categoría son las identidades, entonces $\varprojlim_{i\in\Lambda} F(i) \simeq \prod_{i\in\Lambda} F(i)$. De manera inversa, podemos escribir el límite como el núcleo de una aplicación entre productos. Si consideramos la categoría pequeña Λ, podemos definir el conjunto $Mor(\Lambda)$ de todos los morfismos de Λ. Ahora podemos considerar las siguientes aplicaciones σ y τ, donde la imagen de cada morfismo, es decir, de cada elemento de $Mor(\Lambda)$ es su conjunto de salida y de llegada, respectivamente. Es decir,

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & Mor(\Lambda) & \longrightarrow & \Lambda \\ & (i \to j) & \longmapsto & i \\ \tau : & Mor(\Lambda) & \longrightarrow & \Lambda \\ & (i \to j) & \longmapsto & j \end{array}$$

Supongamos que tenemos un functor $F : \Lambda^{op} \to \mathcal{C}$ donde $\mathcal{C}$ es la categoría de A-módulos o anillos. Para cada morfismo $\lambda : i \to j$ en Λ tenemos el siguiente diagrama. Los π_i son las proyecciones del producto, por lo que no es necesariamente un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \prod_{k\in\Lambda} F(k) \arrow[r, "\pi_j=\pi_{\tau(\lambda)}"] \arrow[d, "\pi_i=\pi_{\sigma(\lambda)}"'] & F(\tau(\lambda)=j) \arrow[dl, "F(\lambda)"] \\ F(\sigma(\lambda)=i) & \end{tikzcd}$$

Definimos el morfismo $\alpha_\lambda : \prod_{k\in\Lambda} F(k) \to F(\sigma(\lambda))$ dado por $F(\lambda)\circ\pi_{\tau(\lambda)} - \pi_{\sigma(\lambda)}$, es decir, el morfismo envía $(x_k)_{k\in\Lambda} \mapsto F(\lambda)(x_{\tau(\lambda)}) - x_{\sigma(\lambda)}$. Por la propiedad universal del producto, existe un único morfismo $\alpha : \prod_{k\in\Lambda} F(k) \to \prod_{\lambda\in Mor(\Lambda)} F(\sigma(\lambda))$, dado por $(x_k)_{k\in\Lambda} \mapsto (F(\lambda)(x_{\tau(\lambda)}) - x_{\sigma(\lambda)})_{\lambda\in Mor(\Lambda)}$. Claramente, el núcleo de esta aplicación es $\{(x_k)_{k\in\Lambda} \in \prod_{k\in\Lambda} F(k) : F(\lambda)(x_{\tau(\lambda)}) = x_{\sigma(\lambda)}) \ \forall\ \lambda \in Mor(\Lambda)\} = \varprojlim_{i\in\Lambda} F(i)$.

Al ser el límite el núcleo de una aplicación entre productos, que existan los productos y los núcleos es una condición suficiente para que existan los límites, como además los núcleos y productos pueden ser definidos a través de límites es también necesaria. Por tanto, en las categorías de anillos y módulos existen los límites.

Teorema 3 (Lema 3.2.5 de [9]). *Sea*

$$0 \longrightarrow \{C_i'\}_{i\in\Lambda} \xrightarrow{(\alpha_i)_{i\in\Lambda}} \{C_i\}_{i\in\Lambda} \xrightarrow{(\beta)_{i\in\Lambda}} \{C_i''\}_{i\in\Lambda} \longrightarrow 0$$

una sucesión corta exacta de sistemas inversos en la cateogría $\mathcal{C}$, (que al ser la categoría de anillos o de módulos es abeliana). Entonces, la siguiente secuencia es exacta:

$$0 \longrightarrow \varprojlim C_i' \xrightarrow{\ \alpha\ } \varprojlim C_i \xrightarrow{\ \beta\ } \varprojlim C_i''.$$

Es decir, el functor $\varprojlim(-)$ es exacto por la izquierda.

Proof. Por la propiedad anterior, teniendo en cuenta que ahora los morfismos de Λ están dados por el orden $\leq$, podemos escribir el siguiente diagrama commutativo, donde los morfismos verticales están dados por $(x_k)_{k\in\Lambda} \mapsto (\mu_{ij}(x_j) - x_i)_{i\leq j\in Mor(\Lambda)}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \prod_{k\in\Lambda} C_k' & \longrightarrow & \prod_{k\in\Lambda} C_k & \longrightarrow & \prod_{k\in\Lambda} C_k'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha''} & & \\
0 & \longrightarrow & \prod_{i\leq j\in Mor(\Lambda)} C_i' & \longrightarrow & \prod_{i\leq j\in Mor(\Lambda)} C_i & \longrightarrow & \prod_{i\leq j\in Mor(\Lambda)} C_i'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Ahora, aplicando el lema de la serpiente y la propiedad vista anteriormente, tenemos la siguiente secuencia larga exacta, por lo que basta con quedarnos con la parte que queremos:

$$0 \longrightarrow \varprojlim C_i' \longrightarrow \varprojlim C_i \longrightarrow \varprojlim C_i'' \longrightarrow Coker\alpha' \longrightarrow Coker\alpha \longrightarrow Coker\alpha'' \longrightarrow 0$$

□

De la prueba anterior se deduce que la sucesión $0 \to \varprojlim C_i' \to \varprojlim C_i \to \varprojlim C_i'' \to 0$ es exacta si y solo si $Coker\alpha' = 0$. En general esto no es cierto, y es conveniente saber en qué situaciones y bajo qué hipótesis se da la sucesión corta exacta. Una de las más comunes es cuando $\Lambda = \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $\{C_n, \mu_{nm}\}_{0\leq n\leq m}$ es un sistema inverso sobreyectivo, es decir, cada aplicación μ_{nm} es sobreyectiva. Esta situación un caso particular de la condición de Mittag-Leffler (definición 3.5.6 de [9]).

Corolario 1 (Proposición 3.5.7 de [9]). *Sea*

$$0 \longrightarrow \{C_n'\}_{n\geq 0} \xrightarrow{(\alpha_n)_{n\in\geq 0}} \{C_n\}_{n\geq 0} \xrightarrow{(\beta)_{n\geq 0}} \{C_n''\}_{n\geq 0} \longrightarrow 0$$

una sucesión corta exacta de sistemas inversos en $\mathcal{C}$, donde $\{C'_n, \mu'_{nm}\}_{0\leq n\leq m}$ es un sistema inverso sobreyectivo. Entonces, la siguiente secuencia es exacta:

$$0 \longrightarrow \varprojlim C'_n \xrightarrow{\alpha} \varprojlim C_n \xrightarrow{\beta} \varprojlim C''_n \longrightarrow 0.$$

Proof. Siguiendo la mismo notación que en el teorema anterior, queremos ver que $Coker\alpha' = 0$, es decir, α' es sobreyectiva. En este caso, $\prod_{i\leq j\in Mor(\Lambda)} C'_i = \prod_{n=0}^{\infty} C'_n$, así que, para todo $(a_n)_{n\geq 0}$ de $\prod_{n=0}^{\infty} C'_n$ tenemos que encontrar un $(x_n)_{n\geq 0} \in \prod_{n=0}^{\infty} C'_n$ tal que $\mu_{nm}(x_m) - x_n = a_n$. Como los morfismos μ_{nm} son sobreyectivos y cumplen que $\mu_{nm}\circ\mu_{ml} = \mu_{nl}$ para todo $n \leq m \leq l$, podemos construir la solución por inducción. $\square$

Tal y como hemos visto, los límites generalizan la noción de productos. Además, es sencillo comprobar que los límites conmutan entre sí, por lo tanto, los límites conmutan con los productos. Más aún, sabemos que la suma directa y los productos finitos coinciden, por lo que los límites conmutan con las sumas directas. En leguaje de categorías, a todos los functores que envían el objeto 0 al 0 y que conmutan con las sumas directas se llaman functores aditivos y en la práctica estos son la mayor parte de los functores entre categorías abelianas.

Chapter 2

Completiones

Después de estudiar los anillos y módulos topológicos, las topologías lineales y los límites estamos en condiciones para introducir las compleciones. En la primera parte de este capítulo definiremos las compleciones como un caso específico de los límites inversos. Por tanto, las compleciones heredan de los límites todas sus propiedades, por ejemplo, las compleciones (habrá que definir bien el sistema inverso respecto del cual hacemos el límite) son exactas por la izquierda y aquellas que satisfagan la condición de Mittag-Leffler son exactas. Además, el sistema inverso sobre el que haremos el límite va a definir una topología lineal sobre el módulo o el anillo. A su vez, esta topología induce una topología en la compleción del módulo, que como probaremos, también es una topología lineal. Vamos a probar que la compleción es una propiedad topológica, pues solamente depende de la topología que define el sistema inverso y no del sistema inverso en sí. También vamos a definir un morfismo canónico del módulo o anillo a su compleción, veremos que este es inyectivo si y solo si la topología lineal dada por el sistema inverso es separable. Así, en estos casos, podremos considerar la compleción como un módulo que contiene al original y que es completo. Para esta sección se ha utilizado, principalmente, el capítulo 8 de *Commutative ring theory* de H. Matsumura.

En la segunda parte del capítulo definiremos las sucesions de Cauchy en anillos y módulos. Después vamos a establecer una relación de equivalencia entre las sucesiones de Cauchy, diremos que dos sucesiones están relacionadas si la diferencia converge a cero, es decir, si las sucesiones son cada vez más cercanas. En caso de que las sucesiones convergan, significa que dos sucesiones están relacionadas si tienen el mismo límite. Después de definir este espacio de relaciones de equivalencia de sucesiones de Cauchy veremos que es isomorfo a la compleción del anillo. Por último, haremos una breve discusión donde veremos que el significado de la compleción se corresponde con la idea proveniente de Análisis, a saber, que un espacio completo es aquel donde todas las sucesiones de Cauchy convergen. Para esta sección se ha utilizado el capítulo 10 de *Introduction to Commutative Algebra* de M.F. Atiyah e I.G. Macdonald.

2.1 Compleciones como límites

Las compleciones son un caso particular de los límites inversos. Sea M un A-módulo y $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de submódulos de M. En el conjunto de índices Λ definimos el siguiente orden parcial, $i \le j$ si $M_i \supseteq M_j$ y consideramos el sistema inverso:

$$\{M/M_i, \mu_{ij} : M/M_j \to M/M_i |\ M_i \supseteq M_j\ (i \le j)\},$$

donde $\mu_{ij} : M/M_j \to M/M_i$ envía a cada calse de equivalencia $m + M_j$ a $\mu_{ij}(m + M_j) = m + M_i$. La compleción de M respecto de $\mathcal{F}$, denotada con $\hat{M}$, es el límite del sistema inverso. Es decir,

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \{(m_k + M_k)_{k\in\Lambda} \in \textstyle\prod_{k\in\Lambda} M/M_k : \mu_{ij}(m_j + M_j) = m_i + M_i \text{ para todo } i \le j\}\\ &= \{(m_k + M_k)_{k\in\Lambda} \in \textstyle\prod_{k\in\Lambda} M/M_k : m_j + M_i = m_i + M_i \text{ para todo } i \le j\}.\end{aligned}$$

Nótese que las compleciones de los anillos son un caso particular del de módulos (basta con considerar el anillo A como un A-módulo y los ideales de A como submódulos). Así, que la compleción $\hat{A}$ de A, es un anillo, considerando el límite en la categoría de anillos y también un A-módulo si consideramos el límite en la categoría de A-módulos. Un aspecto importante a destacar es que la compleción depende, a priori, de la familia $\mathcal{F}$. Más tarde veremos como, en realidad, solamente depende de la topología lineal que esta familia define sobre M. Por esta razón es importante, cuando de habla de compleciones, especificar respecto a qué familia $\mathcal{F}$ estamos haciendo el límite.

Ejemplo 2. *Sea $A[X]$ el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en el anillo A y sea $\mathcal{F} = \{(X^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. La compleción de $A[X]$ respecto de la familia $\{(X^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el anillo*

$$\widehat{A[X]} = \{(f_n(X) + (X^n))_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A[X]/(X^n) : f_{n+1}(X) + (X^n) = f_n + (X^n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Es decir, si $(f_n(X) + (X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de $\hat{A}$, entonces:

$$\begin{array}{lll} f_1(X) + (X) = a_1 + (X) & a_1 \in A & \\ f_2(X) + (X^2) = a_2X + b_2 + (X^2) & a_2, b_2 \in A & f_2(X) + (X) = b_2 + (X) = a_1 + (X) \Rightarrow f_2(X) = a_1 + a_2X \\ f_2(X) + (X^3) = a_3X^2 + b_3X + c_3 + (X^3) & a_3, b_3, c_3 \in A & f_3(X) + (X^2) = a_1 + a_2X + (X^2) \\ & & \Rightarrow f_3(X) = a_1 + a_2X + a_3X^2 \end{array}$$

y así sucesivamente. Por lo tanto, acabamos de ver que $\widehat{A[X]} = A[[X]]$, el anillo de series formales de A.

Las siguientes proposiciones están sacadas del capítulo 8 de [7] y son también válidas para la compleción del anillo A.

Como hemos visto en el primer tema, dada una familia $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ de submódulos de M podemos considerar la topología lineal que define en M, recordamos que para que $\mathcal{F}$ sea una base de entornos de 0 bien definida se necesita que el conjunto de índices Λ sea dirigido. Hemos visto tambíen que para todo $M_i \in \mathcal{F}$, la topología cociente M/M_i es la discreta, por lo que podemos dotar a $\hat{M}$ de una topología considerando la inducida por la topología producto $\prod_{i\in\Lambda} M/M_i$.

Proposición 2. *Sea M un A-módulo, $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de submódulos de M indexada por un conjunto dirigido y sea $\hat{M}$ la compleción de M respecto a $\mathcal{F}$. Entonces, la topología sobre $\hat{M}$ inducida por $\prod_{i\in\Lambda} M/M_i$, donde la topología en M/M_i es la discreta para todo índice i, convierte a $\hat{M}$ en un A-módulo topológico.*

Proof. La suma en $\hat{M}$ define una aplicación $\hat{M} \to \hat{M} \times \hat{M}$ que esta dada por la siguiente composición:

$$\hat{M} \times \hat{M} \xrightarrow{(\iota,\iota)} \prod_{i\in\Lambda} M/M_i \times \prod_{i\in\Lambda} M/M_i \xrightarrow{\text{suma}} \prod_{i\in\Lambda} M/M_i.$$

Donde, (ι, ι) es el producto de inclusiones, que por lo tanto es continua. La función *suma* denota la función suma en el espacio producto, que es claramente continua. Por lo tanto, la función que define la suma en $\hat{M}$ es continua. El mismo planteamiento sirve para demostrar que las demás operaciones que definen el módulo son continuas. $\square$

Ahora, vamos a demostrar que esta topología inducida por el producto no solamente convierte a $\hat{M}$ en un A-módulo topológico, sino que además la topología es lineal. Para ello necesitamos probar que la base de entornos de 0 es un conjunto de submódulos de $\hat{M}$. Consideramos las proyecciones $\rho_i : \hat{M} \to M/M_i$, entonces, la familia de submódulos de $\hat{M}$ dada por $\{Ker(\rho_i)\}_{i\in\Lambda}$, define una topología lineal sobre $\hat{M}$.

Proposición 3. *Sea M un A-módulo, $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de submódulos de M indexada por un conjunto dirigido y sea $\hat{M}$ la compleción de M respecto a $\mathcal{F}$. Entonces, la topología lineal sobre $\hat{M}$ definida por la familia $\{Ker(\rho_i)\}_{i\in\Lambda}$ es equivalente a la topología inducida por $\prod_{i\in\Lambda} M/M_i$ en $\hat{M}$.*

Proof. Un abierto básico U de la topología inducida por $\prod_{i\in\Lambda} M/M_i$ en $\hat{M}$ es de la forma:

$$U = \hat{M} \cap \left(\prod_{i_0\in\Lambda_0} U_{i_0} \times \prod_{i\notin\Lambda_0} M/M_i \right),$$

donde Λ_0 es un subconjunto finito de Λ y los U_i son subconjuntos cualesquiera de M/M_i (pues son espacios topológicos discretos).

Queremos demostrar que U es abierto en la topología lineal definida por los núcleos de las proyecciones. Para ello, podemos demostrar que U es un entorno de todos sus puntos. Sea $x \in U$, tenemos que encontrar un entorno de x, que será de la forma $x + Ker(\rho_i)$ tal que $x + Ker(\rho_i) \subseteq U$. Por ser Λ un conjunto dirigido, podemos encontrar un $i \in \Lambda$ con $i_0 < i$ para todo $i_0 \in \Lambda_0$. Esto significa que $\rho_{i_0}(x + Ker(\rho_i)) = x$ para todo índice i_0 de Λ_0, pues $\rho_{i_0}(Ker(\rho_i)) = \mu_{i_0 i} \circ \rho_i(Ker(\rho_i)) = 0$. Entonces, la imagen de $x + Ker(\rho_i)$ en M/M_{i_0} es la misma que la de x. Es decir, la proyección de $x + Ker(\rho_i)$ en M/M_{i_0} es la proyección de x, por lo que está en U_{i_0} para todo $i_0 \in \Lambda_0$. Es decir, $x + Ker(\rho_i) \in \left(\prod_{i\in\Lambda_0} U_i \times \prod_{i\notin\Lambda_0} M/M_i\right)$.

Para la otra implicación, nótese que la topología producto es la menos fina que hace que las proyecciones sean continuas. Como para la topología lineal generada por $\{ker\rho_i\}_{i\in\Lambda}$ las proyecciones son continuas, tenemos que cualquier abierto de la topología lineal es abierto en la otra topología.

$\square$

Una vez definida la compleción, consideramos el siguiente morfismo canónico:

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & M & \longrightarrow & \hat{M} \\ & m & \longmapsto & (m+M_i)_{i\in\Lambda}, \end{array}$$

Como la familia de morfismos continuos $M \to M/M_i$ es compatible, por la propiedad universal, tenemos que Ψ es un morfismo de A-módulos bien definido. El núcleo del morfismo es $\bigcap_{i\in\Lambda} M_i$, por lo que Ψ es inyectiva si y solo si M es Hausdorff. Cuando Ψ es un isomorfismo decimos que M es un A-módulo completo para la compleción dada por la familia $\mathcal{F}$.

Proposición 4. *Sea M un A-módulo, $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de submódulos de M indexada por un conjunto dirigido y sea $\hat{M}$ la compleción de M respecto a $\mathcal{F}$. Entonces, el morfismo canónico $\Psi : M \to \hat{M}$ es una función continua y $\Psi(M)$ es denso.*

Proof. Sea $Ker(\rho_i)$ un entorno de 0 en $\hat{M}$, claramente $\Psi^{-1}(Ker\rho_i) = M_i$. Es decir, para cada entorno de 0 en $\hat{M}$, su preimagen es entorno de 0 en M. Al ser las dos topologías lineales, esto es equivalente a decir que la función Ψ es continua.

Como la topología en $\hat{M}$ es lineal, tal y como hemos visto en el tema 1, $\overline{\Psi(M)} = \bigcap_{i\in\Lambda}(\Psi(M) + Ker\rho_i) = \hat{M}$. □

Dada la familia de submódulos $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ de M, si $\mathcal{F}' = \{M'_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ es otra familia de submódulos, entonces las ambas familias definen la misma topología en M si para cada abierto de una existe un abierto de la otra topología que está contenido en este y vice versa. En nuestro caso, por tratarse de topologías lineales definidas por entornos de 0, basta con demostrar que para cada submódulo $M_i \in \mathcal{F}$ existe $M'_\lambda \in \mathcal{F}'$ tal que $M'_\lambda \subseteq M_i$ y que para cada $M'_\lambda \in \mathcal{F}'$ existe un submódulo $M_i \in \mathcal{F}$ tal que $M_i \subseteq M'_\lambda$.

Proposición 5. *Sean dos familias de submódulos del A-módulo M, $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ y $\mathcal{F}' = \{M'_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ indexadas por conjuntos dirigidos. Si ambas definen la misma topología sobre M, entonces las compleciones de M respecto a las dos familias son la misma.*

Proof. Sea $M_i \in \mathcal{F}$. Entonces, podemos encontrar un $M'_{\lambda(i)} \in \mathcal{F}'$ que esté contenido en M_i. Por lo tanto, tenemos el morfismo $\alpha_i : M/M'_{\lambda(i)} \to M/M_i$ donde $m + M'_{\lambda(i)} \mapsto m + M_i$. Si $\rho'_\lambda : \hat{M}' \to M/M'_\lambda$ es la proyección del límite inverso para cada $\lambda \in \Gamma$, tenemos que la familia $\{\alpha_i \circ \rho'_{\lambda(i)} : \hat{M}' \to M/M_i\}_{i\in\Lambda}$ forma un sistema compatible (nótese que como los conjuntos de índices son dirigidos los $\alpha_i \circ \rho'_{\lambda(i)}$ no dependen de la elección de $M'_{\lambda(i)}$). Por la propiedad universal, existe un morfismo $\hat{M}' \to \hat{M}$. Análogamente, existe un morfismo $\hat{M} \to \hat{M}'$ dado por la propiedad universal de $\hat{M}'$. Estos dos morfismos son inversos uno del otro. □

Esta última proposición implica que la compleción solamente depende de la topología lineal definida en M. Por ejemplo, si la topología en M es la discreta, significa que 0 es uno de los submódulos de $\mathcal{F}$. Entonces, existe un índice $k \in \Lambda$ donde $M_k = 0$, es decir, k es el elemento maximal de Λ, (recordamos que $i \leq j \iff M_i \supseteq M_j$). Por lo visto en el ejemplo 1 del capítulo anterior, $\hat{M} \simeq M/0 \simeq M$, por lo tanto, M es completo para la familia $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$.

Proposición 6. *Sea M un A-módulo, $\mathcal{F} = \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de submódulos de M indexada por un conjunto dirigido y sea $\hat{M}$ la compleción de M respecto a $\mathcal{F}$. Entonces, la compleción de $\hat{M}$ por la familia $\{Ker\rho_i\}_{i\in\Lambda}$ es isomorfa a $\hat{M}$, es decir, $\hat{\hat{M}} \simeq \hat{M}$. Dicho de otra manera, $\hat{M}$ es un A-módulo completo para la topología definida por $\{Ker\rho_i\}_{i\in\Lambda}$.*

Proof. Como la composición $\rho_i \circ \Psi$ es el morfismo cociente $M \to M/M_i$, ρ_i es sobreyectiva. Por el primer teorema de isomorfía, $\hat{M}/Ker\rho_i \simeq M/M_i$. Entonces, $\varprojlim_{i\in\Lambda} \hat{M}/Ker\rho_i \simeq \varprojlim_{i\in\Lambda} M/M_i$. □

Como las compleciones son un caso particular de los límites inversos, si tenemos una sucesión corta exacta de sistemas inversos, es decir, si para cada $i \leq j$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M'/M'_j \arrow[r, "\alpha_j"] \arrow[d, "\mu'_{ij}"] & M/M_j \arrow[r, "\beta_j"] \arrow[d, "\mu_{ij}"] & M''/M''_j \arrow[r] \arrow[d, "\mu''_{ij}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M'/M'_i \arrow[r, "\alpha_i"] & M/M_i \arrow[r, "\beta_i"] & M''/M''_i \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

entonces, por el teorema 3 del primer capítulo, la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow \hat{M'} \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow \hat{M''}$$

Un caso particular de gran interés es el siguiente.

Proposición 7 (Teorema 8.1 de [7])**.** *Sea N un submódulo del A-módulo M, sea $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de submódulos de M. Si consideramos las familias de submódulos de N y M/N dadas por $\{M_i \cap N\}_{i\in\Lambda}$ y $\{(M_i + N)/N\}_{i\in\Lambda}$ respectivamente y denotamos a las compleciones de N y M/N respecto de las anteoriores familias como $\hat{N}$, $\widehat{M/N}$, entonces la siguiente sucesión es exacta:*

$$0 \longrightarrow \hat{N} \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow \widehat{M/N}$$

Además, si la familia $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ de submódulos de M es una cadena decreciente[1] $M_0 \supseteq M_i \supseteq \cdots M_n \supseteq \cdots$*, entonces la siguiente sucesión es exacta:*

$$0 \longrightarrow \hat{N} \longrightarrow \hat{M} \longrightarrow \widehat{M/N} \longrightarrow 0$$

Por tanto, en esta situación $\widehat{M/N} \simeq \hat{M}/\hat{N}$.

Proof. Basta con coger el límite de la siguiente sucesión exacta de sistemas inversos:

$$0 \to \{N/(M_i \cap N)\}_{i\in\Lambda} \to \{M/M_i\}_{i\in\Lambda} \to \{M/(N + M_i)\}_{i\in\Lambda} \to 0$$

Si además $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ es una cadena decreciente, entonces los morfismos $N/(M_j \cap N) \to N/(M_i \cap N)$ son sobreyectivos, y por lo tanto se satisface el corolario 1 del primer capítulo. □

[1] Como veremos en el subapartado del lema de Artin-Rees, a las cadenas de submódulos decrecientes las llamaremos filtraciones.

Proposición 8. *Sean M y M' A-módulos con topologías lineales definidas por $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ y $\{M'_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ respectivamente y sea $f : M \to M'$ un morfismo continuo. Entonces, existe un morfismo continuo $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{M}'$, de manera que el siguiente cuadrado es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi_M"] & M' \arrow[d, "\Psi_{M'}"] \\ \hat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{M}' \end{tikzcd}$$

Además, el morfismo $\hat{f}$ está determinado unívocamente por el diagrama y por la continudad.

Proof. Consideramos las proyecciones $\rho_i : \hat{M} \to M/M_i$ de la compleción de M a través de $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$. Por ser f una función continua, para cada $M'_\lambda \in \{M'_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ existe $M_i \in \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ con $M_i \subseteq f^{-1}(M'_\lambda)$. Esto implica que f induce un morfismo $g^i_\lambda : M/M_i \to M'/M'_\lambda$ bien definido, pues si $x, y \in M$ con $x - y \in M_i$, $f(x) - f(y) = f(x - y) \in f(M_i) \subseteq ff^{-1}(M'_\lambda) \subseteq M'_\lambda$.

Podemos considerar entonces para cada M'_λ el morfismo $\hat{M} \to M'/M'_\lambda$ dado por $g^i_\lambda \circ \rho_i$. Este morfismo no depende de la elección de M_i, pues si existen M_i y M_j contenidos en $f^{-1}(M'_\lambda)$, por ser $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ un conjunto directo, existe un $M_k \in \{M_i\}_{i\in\Lambda}$ con $M_k \subseteq M_i \cap M_j \subseteq f^{-1}(M'_\lambda)$. De manera que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \hat{M} \arrow[rr, "\rho_i"] \arrow[dr, "\rho_k"] \arrow[dd, "\rho_j"'] & & M/M_i \arrow[dd, "g^i_\lambda"] \\ & M/M_k \arrow[ur, "\mu_{ik}"] \arrow[dl, "\mu_{jk}"] \arrow[dr, "g^k_\lambda"] & \\ M/M_j \arrow[rr, "g^j_\lambda"] & & M'/M'_\lambda \end{tikzcd}$$

Los dos triángulos superiores de la izquierda son conmutativos. Además si $x + M_k$ es un elemento de M/M_k, $g^i_\lambda \circ \mu_{ki}(x + M_k) = g^i_\lambda(x + M_i) = f(x) + M'_\lambda = g^k_\lambda(x + M_k)$. Por lo que los dos triángulos restantes son también conmutativos. Esto obliga al cuadrado a ser conmutativo también, por lo tanto, el morfismo $g^i_\lambda \circ \rho_i$ no depende de i.

Hemos creado por lo tanto una familia de morfismos continuos $\{g_\lambda \circ \rho_i : \hat{M} \to M'/M'_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$. Esta familia es compatible, pues si $\gamma \le \lambda$, entonces existe un $M_k \subseteq M_i$ tal que $M_k \subseteq f^{-1}(M_\lambda)$, de manera que $\mu'_{\lambda\gamma} \circ g^k_\gamma(x + M_k) = \mu'_{\lambda\gamma}(f(x) + M'_\gamma) = f(x) + M'_\lambda = g^i_\lambda(x + M_i) = g^i_\lambda \circ \mu_{ik}(x + M_k)$. Es decir, el cuadrado del siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \hat{M} \arrow[dl, "\rho_k"] \arrow[dr, "\rho_i"] & \\ M/M_k \arrow[rr, "\mu_{ik}"] \arrow[d, "g^k_\gamma"] & & M/M_i \arrow[d, "g^i_\gamma"] \\ M'/M_\gamma \arrow[rr, "\mu'_{\lambda\gamma}"] & & M'/M_\lambda \end{tikzcd}$$

Obviamente el triángulo superior también conmuta, así que todo el diagrama lo hace. Por lo que $\{g_\lambda \circ \rho_i : \hat{M} \to M'/M'_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ es una familia compatible y por la propiedad universal del límite existe un único morfismo continuo $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{M}'$.

Más aún, por la construcción que hemos hecho podemos considerar la familia, también compatible, de morfismos continuos

$$M \xrightarrow{\Psi} \hat{M} \xrightarrow{\rho_i} M/M_i \xrightarrow{g^i_\lambda} M'/M'_\lambda,$$

para todo $\lambda \in \Lambda$. Este morfismo es el mismo que $M \xrightarrow{f} M' \to M'/M'_\lambda$. Por lo que por la propiedad universal del límite el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi_M"] & M' \arrow[d, "\Psi_{M'}"] \\ \hat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{M}' \end{tikzcd}$$

□

2.2 Sucesiones de Cauchy

Ya hemos definido las compleciones como límites inversos. Ahora queremos ver que esta definición se corresponde con la idea original de que un espacio completo es aquel donde todas las sucesiones de Cauchy convergen. Para ello, daremos una definición alternativa de las series de Cauchy, dado que en los anillos y módulos con topologías lineales no hay una distancia. Vamos a restringirnos al caso donde la familia de submódulos $\mathcal{F} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ es una filtración, es decir, el conjunto de índices es numerable, tiene orden total y M es un elemento de la filtración. En otras palabras, una filtración es una sucesión decreciente de submódulos.

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

En el caso de los anillos, la filtración será de ideales de A. Durante este apartado, haremos las demostraciones para el caso de los módulos, sin embargo las mismas demostraciones son válidas para probar los resultados homólogos en el caso de los anillos.

Definición 3. *Dada la familia de submódulos $\mathcal{F} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ del A-módulo M, una sucesión de Cauchy en M es una sucesión de elementos $(x_n)_{n\geq 0}$ (para hacer más sencilla la notación escribiremos solamente (x_n)) tal que para todo $M_k \in \mathcal{F}$ existe un entero $n(k)$ y para el cual se cumple la siguiente propiedad,*

$$x_i - x_j \in M_k \text{ para todo } i, j \geq n(k).$$

Una sucesión (x_n) de un espacio topológico X converge al punto x si para todo entorno U de x existe un entero k, de manera que para todo $n \geq k$, x_n está en U.

Vamos a definir una relación de equivalencia entre las sucesiones de Cauchy de M. Decimos que dos sucesiones de Cauchy $(x_n), (y_n)$ están relacionadas y lo denotamos por $(x_n) \sim (y_n)$, si la resta de sucesiones dada por $(x_n - y_n)$ converge a 0 en M. Esta relación se puede definir para sucesiones más arbitrarias, no necesariamente de Cauchy. Claramente, si las dos sucesiones convergen, entonces están relacionadas si y solo si convergen al mismo elemento de M. En los dos próximos resultados no utilizamos la condición de que las sucesiones sean de Cauchy.

Proposición 9. *Sea M un A-módulo y $\mathcal{F} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ una filtración en M. Si dotamos a M de la topología lineal generada por $\mathcal{F} = \{M_n\}_{n\geq 0}$, entonces la relación anterior sobre el conjunto de sucesiones en M es de equivalencia.*

Proof.

- **Propiedad reflexiva:** Trivial.
- **Propiedad simétrica:** Si $(x_n) \sim (y_n)$, entonces, para todo $M_i \in \mathcal{F}$ existe un entero k, de manera que $x_n - y_n \in M_i$ para todo $n \geq k$. Como M_i es un submódulo, $y_n - x_n \in M_i$ para todo n. Por lo que $(y_n) \sim (x_n)$.
- **Propiedad transitiva:** Sean $(x_n), (y_n)$ y (z_n) tres sucesiones con $(x_n) \sim (y_n)$ e $(y_n) \sim (z_n)$. Entonces, para todo $M_k \in \mathcal{F}$, existen dos enteros i, j tales que $x_n - y_n \in M_k$ e $y_m - z_m \in M_i$ para todo $n \geq i$ y $m \geq j$. Sea N el máximo entre i y j, entonces, para todo $n \geq N$, $x_n - z_n = x_n - y_n + y_n - z_n \in M_k$, pues $x_n - y_n$ e $y_n - z_n$ son elementos del submódulo M_k.

□

Queremos definir el A-módulo dado por la relación anterior de sucesiones de Cauchy de M. Para ello, necesitamos probar que las operaciones usuales están bien definidas y no dependen del representante de la clase.

Lema 4. *Sea M un A-módulo, sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones en M y sea $a \in A$. Entonces, las clases de equivalencia de $(x_n - y_n)$ y de (ax_n) solamente dependen de las de (x_n) e (y_n) y la de (x_n) respectivamente.*

Proof. Sean $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$ sucesiones en M. Queremos ver que $(x_n - y_n) \sim (x'_n - y'_n)$. Es decir, que $(x_n - y_n - (x'_n - y'_n))$ converge a 0. Sea $M_k \in \mathcal{F}$, entonces existen dos enteros n y m tales que $x_i - x'_i$ e $y'_j - y'_j$ son elementos de M_k para todo $i \geq n$, $j \geq m$. Sea N el máximo entre n y m, entonces $x_i - y_i - (x'_i - y'_i) = (x_i - x'_i) - (y_i - y'_i)$ que es un elemento de M_k para todo $i \geq N$.

Sean $(x_n) \sim (x'_n)$. Entonces, para cada $M_k \in \mathcal{F}$ existe un entero n tal que $x_i - x'_i \in M_k$ para todo $i \geq n$. Por ser M_k un submódulo de M, $a(x_i - x'_i) \in M_k$ para todo $i \geq n$ y para todo $a \in A$. Es decir, $(ax_n) \sim (ax'_n)$. □

Proposición 10. *El conjunto de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en M es la compleción de M por la familia de submódulos $\{M_n\}_{n\geq 0}$.*

Proof. Vamos a dividir la prueba en dos partes, en la primera probaremos que el conjunto de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy es un A-módulo, y en la segunda parte probaremos que es $\hat{M}$. Para agilizar la notación, denotaremos a este conjunto como C.

- **C es un A-módulo:** Primero, nótese que la sucesión (0) es claramente de Cauchy. Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones de Cauchy en M. Dado $M_k \in \mathcal{F}$ existen enteros $n(k), m(k)$ tales que $x_i - x_j \in M_k$ y $y_l - y_r \in M_k$ para todo $i, j \geq n(k)$ y $l, r \geq m(k)$. Sea N el máximo entre $n(k)$ y $m(k)$, entonces $(x_i - y_i) - (x_j - y_j) = (x_i - x_j) + (y_j - y_i) \in M_k$ para todo $i, j \geq N$, pues $x_i - x_j, y_j - y_i$ son elementos del submódulo M_k, además, por ser M_k un submódulo, para todo $i, j \geq n(k)$, $ax_i - ax_j \in M_k$. Acabamos de probar que las sucesiones dadas por $(x_n - y_n)$, (ax_n) para todo $a \in A$ son sucesiones de Cauchy. Por el lema anterior, sabemos que la resta y la multiplicación escalar son compatibles con la relación de equivalencia.

- $C \simeq \hat{M}$**:** Sea (x_n) una sucesión de Cauchy. Si la consideramos en M/M_k, como para M_k existe un $n(k)$ tal que para todo $i, j \geq n(k)$, $x_i - x_j \in M_k$, podemos asegurar que a partir de $n(k)$ la sucesión es constante en M/M_k, por lo tanto tiene sentido la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \alpha_k : & \hat{M} & \longrightarrow & M/M_k \\ & (x_n) & \longmapsto & x_{n(k)} + M_k \end{array}$$

  Estos $\{\alpha_k\}_{k \in \Lambda}$ forman un sistema de morfismos compatible con los morfismos $\mu_{ik} : M/M_k \to M/M_i$, pues si $i \leq k$, entonces $n(i) \leq n(k)$ y $x_{n(k)} - x_{n(i)} \in M_i$. Por lo que $\mu_{ik} \circ \alpha_k = \alpha_i$. Además cumple la propiedad universal, pues por ser $\mathcal{F}$ una familia de submódulos con orden total, por el lema de Zorn, existe un submódulo maximal M_λ. Si tenemos una familia de morfismos $\beta_i : C \to M/M_i$ compatible, para cada $c \in C$ creamos la sucesión de Cauchy de la siguiente manera: el primer término x_1 es $\beta_\lambda(c)$, el segundo término $\beta_\gamma(c)$, donde M_γ es el elemento maximal de $\mathcal{F} \setminus M_\lambda$. Así sucesivamente estamos creando una sucesión de Cauchy para cada $c \in C$. Es decir estamos dando una aplicación $C \to \hat{M}$. Esta aplicación cumple la propiedad universal, por lo que tenemos que $\hat{M} \simeq \varprojlim M/M_i$.

□

Según la discusión hecha al principio del tabajo, estabamos buscando "completar" el anillo, en el sentido de que todas las sucesiones de Cauchy sean convergentes. En general no podemos asegurar que el morfismo $\Psi : M \to \hat{M}$ sea inyectivo, y por lo tanto no podemos pensar en $\hat{M}$ como un A-módulo que surge de añadir los límites de las sucesiones de Cauchy. No obstante, cuando la intersección de todos los submódulos de la filtración es el conjunto $\{0\}$, $\Psi : M \to \hat{M}$ es un monomorfismo continuo, así que podemos considerar a $\hat{M}$ como un A-módulo topológico que contiene a M. En este caso, sí estamos completando M en el sentido habitual de sucesiones de Cauchy, pues si (x_n) es una sucesión de Cauchy de M y consideramos $(\Psi(x_n))$ como una sucesión de Cauchy de elementos de $\hat{M}$, su límite es la clase de equivalencia de (x_n). La misma discusión es válida para el anillo A.

Chapter 3

Topología I-ádica y lema de Artin-Rees

En este capítulo, trabajaremos con una filtración en particular, la filtración I-ádica. Esta filtración define una topología lineal sobre el A-módulo M, que se llamará la topología I-ádica. Tal y como se ha visto en el segundo capítulo, la compleción no depende de la filtración sino de la topología que esta define sobre M, así que es importante estudiar las propiedades de esta topología.

En la primera parte del capítulo, probaremos el lema de Artin-Rees. Este fue probado en 1950 por Emil Artin y David Rees de manera independiente. La idea detrás de este teorema es ver si dado un submódulo N de M, la topología inducida en N por la topología I-ádica de M es igual a la topología I-ádica en N. En general, daremos un sencillo ejemplo para ver que es falso, así que el lema de Artin Rees introduce varias condiciones para que se de la afirmación. Como corolario del lema de Artin-Rees, seremos capaces de demostrar el teorema de intersección de Krull y la exactitud de la compleción I-ádica. En esta sección, se trabajará con anillos noetherianos y módulos finitamente generados, por ende, para el desarrollo de la misma se han utilizado los capítulos $6, 7$ y 10 de *Introduction to Commutative Algebra* de M.F. Atiyah e I.G. Macdonald y el capítulo 8 de *Commutative ring theory* de H. Matsumura.

En la segunda parte del capítulo nos centraremos en la topología I-ádica del A-módulo $\hat{M}$. La pregunta que cabe hacerse es si la compleción I-ádica de M es I-ádicamente completa. Para resolver esta questión comenzaremos dando un caso donde la resuesta es positiva. El objetivo después será deducir qué ocurre en el caso general, por lo que daremos una situación donde la compleción I-ádica $\hat{M}$ de M no sea I-ádicamente completa. Para este apartado se han utilizado los artículos *Non-complete Completions* de M. Haiech, *On Flatness and Completion for Infinitely Generated Modules over Noetherian Rings* de A. Yekutieli.

3.1 Lema de Artin-Rees

Definición 4. *Recordamos que una filtración $\mathcal{F} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ del A-módulo M es una cadena de submódulos M_n de la siguiente manera:*

$$M_0 = M \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

Si I es un ideal de A, una I-filtración es una filtración con la porpiedad de que $IM_n \subseteq M_{n+1}$ para todo n. Decimos que la I-filtración es estable si además se da la igualdad $IM_n = M_{n+1}$ para todos los n suficientemente grandes.

El ejemplo típico de una filtración es la I-ádica que mostraremos a continuación.

Ejemplo 3. *Sea I un ideal de A, entonces definimos M_n como I^nM para todo $n \geq 0$. Esto define una filtración:*

$$I^0M = M \supseteq I^1M \supseteq \cdots \supseteq I^nM \supseteq \cdots$$

Esta filtración es, trivialmente, una I-filtración estable y se llama filtración I-ádica.

Una vez que tenemos definida una filtración, podemos considerar la topología lineal que esta genera sobre M. En el caso de la filtración I-ádica, la llamaremos topología I-ádica. Así, tiene sentido preguntarse qué filtraciones generan la misma topología.

Lema 5. *Sea $\{M_n\}_{n\geq 0}$ una I-filtración estable sobre el A-módulo M. Entonces, existe un entero n_0 de manera que $M_{n+n_0} \subseteq I^nM$ y $I^{n+n_0}M \subseteq M_n$ para todo $n \geq 0$.*

Proof. Por ser $\{M_n\}$ una I-filtración estable, tenemos que $IM_n \subseteq M_{n+1}$ para todo n. Entonces, $I^nM = I^{n-1}IM \subseteq I^{n-1}M_1 \subseteq I^{n-2}M_2 = I^{n-3}IM_2 \subseteq I^{n-3}M_3 \subseteq \cdots \subseteq M_n$.

Para la otra inclusión, tenemo que para todo $n > n_0$, $IM_n = M_{n+1}$, entonces, $M_{n+n_0} = IM_{n+n_0-1} = IIM_{n+n_0-2} = I^nM_{n_0} \subseteq I^nM$. $\square$

Dadas dos filtraciones $\{M_n\}$ y $\{M'_n\}$, decimos que son de variación acotada si cumplen que existe un entero n_0, tal que $M_{n+n_0} \subseteq M'_n$ y $M'_{n+n_0} \subseteq M_n$ para todo n. Ser de variación es una relación de equivalencia entre las filtraciones. Es claramente reflexiva y reciproca, y además es transitiva, pues si $\{M_n\}$, $\{M'_n\}$ y $\{M'_n\}$, $\{M''_n\}$ son de variación acotada, existen dos enteros n_0 y n_1, tales que $M_{n+n_0} \subseteq M'_n$, $M'_{n+n_0} \subseteq M_n$ y $M'_{n+n_1} \subseteq M''_n$, $M''_{n+n_1} \subseteq M'_n$. Basta con escoger $N = n_0 + n_1$ para ver que $\{M_n\}, \{M''_n\}$ son de variación acotada. Por el lema anterior, como todas las I-filtraciones estables pertenecen a la misma clase de equivalencia que la filtración I-ádica, tenemos que todas las I-filtraciones estables están relacionadas. Además, si dos filtraciones son de variación acotada, para cada entorno de 0, existe un entorno de 0 de la topología definida por la otra filtración que lo contiene, y viceversa. Es decir, inducen la misma topología lineal sobre M. Acabamos de probar por lo tanto el siguiente teorema.

Teorema 4. *Todas las I-filtraciones estables sobre el A-modulo M inducen la misma topología lineal sobre M, a saber, la topología I-ádica.*

Gracias a este teorema, cada vez que pensemos en una I-filtración estable, podemos pensar directamente en la filtración I-ádica. Si tenemos dos módulos $N \subseteq M$ y un ideal I de A, tiene sentido preguntarnos si la topología I-ádica en N es igual a la topología inducida por la I-ádica en M. Sin embargo, en general, no se da esta afirmación.

Ejemplo 4. *Consideramos $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}$-módulos. Sea $I = (2)$ en $\mathbb{Z}$. Entonces, $(2^n)\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, por lo que la topología generada por la filtración I-ádica en $\mathbb{Q}$ es la trivial. Su restricción a $\mathbb{Z}$ será también la topología trivial. Sin embargo, la topología (2)-ádica en $\mathbb{Z}$ es Hausdorff, pues $\bigcap_{n\geq 0}(2)^n = 0$.*

Visto el contraejemplo anterior, el siguiente paso natural es ver si existen restricciones bajo las cuales podamos asegurar que estas dos topologías coinciden. Esta pregunta la resuelve el lema de Artin-Rees, para cuya demostración vamos a utilizar algunas definiciones y resultados sobre anillos y módulos noetherianos y graduados, así como la definición de una A-álgebra. Estos resultados han sido vistos en las asignaturas de *Álgebra Conmutativa* y *Seminario de Álgebra*, por tanto, los daremos por válidos. Para más información sobre estos se recomienda revisar los temas 6 y 7 de [1].

Recordamos que una A-álgebra B es un anillo $(B, +, \cdot)$ junto a un morfismo de anillos $f : A \to B$. Utilizamos la misma notación que en [1] y decimos que B es una A-álgebra finitamente generada si existe un morfismo sobreyectivo de $A[X_1, \ldots, X_n] \to B$. Por tanto, existen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ elementos de B tal que todo elemento b de B se puede escribir como un polinomio con coeficientes en A.

Si A es un anillo graduado, es decir, si existe una familia de subgrupos $\{A_n\}_{n\geq 0}$ del grupo aditivo A, de manera que $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ y $A_n A_m \subseteq A_{n+m}$ para todo $n, m \geq 0$, entonces A_0 es un subanillo de A y cada A_n es un A_0-módulo. Además, si $M \simeq \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ es un A-módulo graduado, cada M_n es un A_0-módulo.

Para cualquier anillo A y cualquier ideal I de A, podemos definir el anillo graduado $\bigoplus_{n\geq 0} I^n$. Si M es un A-módulo y $\{M_n\}_{n\geq 0}$ una I-filtración, entonces $I^n M_m \subseteq M_{n+m}$, por lo que tiene sentido considerar $\bigoplus_{n\geq 0} M_n$ como un $\bigoplus_{n\geq 0} I^n$-módulo graduado.

Nótese que A es una A_0-álgebra, pues basta con considerar $A_0 \hookrightarrow A$.

Lema 6 (Proposición 10.7 de [1]). *Si $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ es un anillo graduado con A_0 noetheriano y A es una A_0-álgebra finitamente generada, entonces A es un anillo noetheriano.*

Proof. Por el teorema de la base de Hilbert (teorema 7.5 de [1]), sabemos que $A_0[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano, y por ser A una A_0-álgebra finitamente generada $A \simeq A_0[x_1, \ldots, n_n]/I$ para alǵun ideal I. Por tanto, como el cociente de un anillo noetheriano es noetheriano, A es un anillo noetheriano. $\square$

Lema 7 (Lema 10.8 de [1]). *Sea A un anillo noetheriano, I un ideal de A y sea M un A-módulo finitamente generado. La I-filtración $\{M_n\}_{n\geq 0}$ es estable si y solo si $\bigoplus_{n\geq 0} M_n$ es un módulo graduado finitamente generado sobre el anillo $\bigoplus_{n\geq 0} I^n$.*

Proof. Por ser M un A-módulo finitamente generado también lo será M_n para todo n. Podemos considerar $Q_r = \bigoplus_{n=0}^{r} M_n \subseteq \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ (en general no es un submódulo de $\bigoplus_{n\geq 0} M_n$, solamente un subgrupo aditivo).

Cada Q_r genera el siguiente $\bigoplus_{n\geq 0} I^n$-módulo:

$$M_r^* = M_0 \oplus \cdots M_r \oplus IM_r \oplus \cdots I^n M_r \oplus \cdots$$

Q_r es un A-módulo finitamente generado, por lo tanto M_r^* es un $\bigoplus_{n\geq 0} I^n$-módulo finitamente generado.

Nótese que $M_0^* = M_0 \oplus IM_0 \oplus \cdots$ con $M_0 = M$, como $\{M_n\}_{n\geq 0}$ es una I-filtración, $IM_0 \subseteq M_1$ y $M_0^* \subseteq M_1^*$. En general $M_n^* \subseteq M_{n+1}^*$, por lo tanto podemos formar la siguiente cadena:

$$M_0^* \subseteq M_1^* \subseteq \cdots \subseteq M_n^* \subseteq \cdots$$

Además esta cadena cumple que $\bigcup_{n\geq 0} M_n^* = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$.

Como A es noetheriano, I es un ideal finitamente generado, supongamos que está generado por $\{x_1, \dots, x_n\}$. Entonces, el morfismo $A[X_1, \dots, X_n] \to \bigoplus_{n\geq 0} I^n$ que envía $\sum a_i \underline{X}^{\alpha_i}$ (donde $\underline{X}^{\alpha_i} = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$) a $\sum a_i \underline{x}^{\alpha_i}$ (donde $\underline{x}^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$) es sobreyectivo, por lo que $\bigoplus_{n\geq 0} I^n$ es una A-álgebra finitamente generada. Aplicando el lema 6, $\bigoplus_{n\geq 0} I^n$ es noetheriano. Si $\bigoplus_{n\geq 0} M_n$ es un $\bigoplus_{n\geq 0} I^n$-módulo finitamente generado, es un módulo noetheriano (ver proposición 6.5 de [1]), por tanto, la cadena anterior es estacionaria. En la otra dirección, si la cadena es estacionaria, entonces $\bigoplus_{n\geq 0} M_n$ es generado por $Q_r = \bigoplus_{n=0}^{r} M_n$ para algún r suficientemente grande de manera que es finitamente generado.

Como consecuecia, $\bigoplus_{n\geq 0} M_n$ es un $\bigoplus_{n\geq 0} I^n$-módulo finitamente generado si y solo si $M^* = M_{n_0}^*$ para algún n_0. A su vez, esto ocurre si y solo si $M_{n_0+n} = I^n M_{n_0}$ para todo $n \geq 0$ que ocurre si y solo si existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $IM_n = M_{n+1}$ para todo $n > n_0$, es decir, si la filtración es estable.

□

Teorema 5 (Lema de Artin-Rees, proposición 10.9 de [1])**.** *Sean $N \subseteq M$ dos módulos finitamente generados sobre el anillo noetheriano A y sea I un ideal de A. Entonces cada I-filtración estable de M se restinge a una I-filtración estable de N.*

Proof. Consideramos $\{M_n\}_{n\geq 0}$ una I-filtración estable de M, queremos probar que bajo las hipótesis del teorema, $\{M_n \cap N\}_{n\geq 0}$ es una I-filtración estable de N.

Tenemos que $I(M_n \cap N) \subseteq IM_n \cap IN \subseteq M_{n+1} \cap N$. Por lo tanto, es una I-filtración. Podemos considerar el $\bigoplus_{n\geq 0} I^n$-módulo graduado $\bigoplus_{n\geq 0}(M_n \cap N)$ que es un submódulo de $\bigoplus_{n\geq 0} M_n$ y por lo tanto es finitamente generado (pues por el lema anterior $\bigoplus_{n\geq 0} M_n$ es finitamente generado). Ahora, basta con aplicar el lema anterior para $\bigoplus_{n\geq 0}(M_n \cap N)$. □

Las siguientes dos versiones del lema de Artin-Rees se deducen fácilmente de la anterior.

Corolario 2 (Teorema 8.5 de [7])**.** *Sea M un A-módulo finitamente generado sobre el anillo noetheriano A, y sea I un ideal de A. Entonces existe un $n_0 \geq 0$, tal que para todo $n \geq 0$:*

$$I^n M \cap N = I^{n-n_0}(I^{n_0} M \cap N)$$

Proof. De la versión anterior sabemos que $I^n M \cap N$ es una I-filtración estable de N. Entonces, existe un n_0 tal que $I(I^n M \cap N) = I^{n+1} M \cap N$ para todo $n \geq n_0$. El resultado se deduce reescribiendo n como $n_0 + n$ y argumentando por inducción. □

Corolario 3 (Teorema 8.6 de [7], otra versión del lema de Artin-Rees)**.** *Sean $N \subseteq M$ dos módulos finitamente generados sobre el anillo noetheriano A y sea I un ideal de A. La topología I-ádica en N coincide con la topología inducida por la I-ádica en M.*

Proof. La topología I-ádica está generada por las filtraciones I-estables. Como la restricción a N de una filtración I-estable de M también es I-estable, el resultado es obvio. □

Vamos a probar el teorema de la intersección de Krull. Para ello, recordamos que el radical de Jacobson del anillo A, que lo denotamos por $rad(A)$ es la intersección de todos los ideales maximales de A. Claramente es un ideal de A. El radical de Jacobson se caracteriza por la siguiente propiedad (es la proposición 1.9 de [1]):

$$a \in rad(A) \iff 1 - ax \text{ es una unidad para todo } x \in A.$$

Recordamos que cuando tenemos una topología lineal, esta es Hausdorff si la intersección de los entornos básicos de 0 es $\{0\}$.

Teorema 6 (Teorema 8.9 de [7], teorema de Krull)**.** *Sea A un anillo noetheriano, I un ideal de A y M un A-módulo finitamente generado. Sea $N = \bigcap_{n\geq 0} I^n M$. Entonces, existe un elemento $a \in A$ tal que $a \equiv 1 \ (mod\ I)$ y $aN = 0$.*

Proof. Por el lema de Artin-Rees, $I^n M \cap N$ es una I-filtración estable de N. Esto quiere decir que es de variación acotada con la filtración I-ádica. Por lo que para un n suficientemente grande, $I^n M \cap N \subseteq IN$. Como $N = \bigcap_{n\geq 0} I^n M = N$, $I^n M \cap N = N$, por lo que $N \subseteq IN$. Esto implica que $N = IN$. Ahora, basta con aplicar el lema de Nakayama, pues N también es finitamente generado.

□

Teorema 7 (Teorema 8.10 de [7], teorema de la intersección de Krull)**.** *Sea A un anillo noetheriano e I un ideal de A.*

(i) Si el ideal I está contenido en el radical de Jacobson. Entonces para cada A-módulo finitamente generado la topología I-ádica es Hausdorff y todos los submódulos son cerrados.

(ii) Si A es dominio íntegro e I es un ideal propio, entonces la topología I-ádica en A es Hausdorff.

Proof. (i) Sea M un A-módulo finitamente generado. Por el teorema de Krull, existe un $a \in A$ tal que $a \equiv 1 \ (mod\ I)$ y $aN = 0$, donde $N = \bigcap_{n\geq 0} I^n M$. En este caso, como $I \subseteq rad(A)$, $1 - a \in I \subseteq rad(A)$. Por la caracterización anterior, para todo $x \in A$, $1-(1-a)x$ es una unidad. En particular, para $x = 1$, a es una unidad. Por lo tanto, $aN = 0$ implica que $N = 0$, es decir, $\bigcap_{n\geq 0} I^n M = 0$. Por lo tanto, la topología I-ádica en M es Hausdorff. Si $M' \subseteq M$ es un submódulo, M/M' también es finitamente generado, de manera que la topología I-ádica en M/M' también es Hausdorff. Esto implica que la clausura de $0 + M'$ es $0 + M'$ en M/M', por lo que M' es cerrado en M.

(ii) A es generado por el 1 como A-módulo, por lo que es finitamente generado. Podemos aplicar el teorema de Krull con $M = A$, y como I es ideal propio, $1 \notin I$, por lo tanto, $a \neq 0$. Como A es un domineo íntegro, $N = \bigcap_{n\geq 0} I^n = 0$.

□

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente corolario para anillos locales noetherianos.

Corolario 4. *Si A es un anillo local noetheriano y $\mathfrak{m}$ su ideal maximal, entonces, la topología $\mathfrak{m}$-ádica en A es Hausdorff, es decir, $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n = 0$.*

Proof. Como A es local, $\mathfrak{m} = rad(A)$. Ahora, basta con aplicar el teorema de intersección de Krull (i) para $M = A$. □

3.2 Compleción I-ádica

Una vez definida la filtración y la topología I-ádica podemos considerar la compleción I-ádica. Esta es el límite del sistema inverso $\{A/(I^n), \mu_{nm} : A/(I^m) \to A/(I^n)\}_{0\leq n\leq m}$ para el anillo A y de $\{M/(I^nM), \mu_{nm} : M/(I^mM) \to M/(I^nM)\}_{0\leq n\leq m}$ para el A-módulo M. Recordamos que las compleciones solo dependen de la topología, tal y como vimos en la proposición 5. De esta manera todas las I-filtraciones estables generán la misma compleción.

Teorema 8 (Teorema 8.7 de [7] y proposición 10.13 de [1])**.** *Sea A un anillo noetheriano, I un ideal de A y M un A-módulo finitamente generado. Sean $\hat{A}$ y $\hat{M}$ las compleciones I-ádicas de A y M respectivamente. Entonces, $M \bigotimes_A \hat{A} \simeq \hat{M}$.*

Proof. Como M es un A-módulo finitamente generado, existe una sucesión exacta $A^p \xrightarrow{\varphi} M \to 0$. Como la suma directa de anillos noetherianos es también noetheriana, A^p es noetheriano. Además, los ideales de anillos noetherianos son A-módulos noetherianos, por lo que $ker\varphi$ es noetheriano. Entonces existe una secuencia exacta $A^q \xrightarrow{\varsigma} ker\varphi \to 0$. Juntando las dos secuencias, tenemos la siguiente secuencia exacta:

$$A^q \to A^p \to M \to 0.$$

En el primer tema vimos que los límites son functores aditivos. Como consecuencia, la compleción I-ádica conmuta con las sumas directas. También sabemos que la compleción de filtraciones es exacta, por lo que tenemos la siguiente secuencia exacta de A-módulos:

$$\hat{A}^q \to \hat{A}^p \to \hat{M} \to 0.$$

Tal y como aparece en el apéndice A de [7], el functor definido como $- \otimes_A \hat{A}$ es exacto por la derecha, por lo que la siguiente secuencia tambíen es exacta.

$$A^q \otimes_A \hat{A} \to A^p \otimes_A \hat{A} \to M \otimes_A \hat{A} \to 0.$$

Los morfismos naturales $\Psi_A : A \to \hat{A}$ y $\Psi_M : M \to \hat{M}$ inducen $(\Psi_A)^q \otimes id_{\hat{A}}$, $(\Psi_A)^p \otimes id_{\hat{A}}$ y $\Psi_M \otimes \hat{A}$ que hacen el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
\hat{A}^q & \longrightarrow & \hat{A}^p & \longrightarrow & \hat{M} & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
A^q \otimes_A \hat{A} & \longrightarrow & A^p \otimes_A \hat{A} & \longrightarrow & M \otimes_A \hat{A} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Nótese que, por las propiedades del producto tensorial, $A^q \otimes_A \hat{A} \simeq \left(A \otimes_A \hat{A}\right)^q \simeq \hat{A}^q$. Por lo tanto, los dos morfismos verticales de la izquierda son isomorfismos. Como consecuencia del lema de las 5 flechas (5-*lemma* en inglés), tenemos que $\hat{M} \simeq M \otimes_A \hat{A}$. □

Corolario 5 (Teorema 8.8 de [7] y proposición 10.14 de [1])**.** *Sea A un anillo noetheriano, I un ideal de A y $\hat{A}$ su compleción I-ádica. Entonces, el A-módulo $\hat{A}$ es plano.*

Proof. Recordamos que el A-módulo $\hat{A}$ es plano si el functor $- \otimes_A \hat{A}$ es exacto.

Sea J un ideal de A, entonces es un A-módulo finitamente generado, por tanto $J \otimes_A \hat{A} \simeq \hat{J}$. El teorema 7.7 de [7] dice que el A-módulo $\hat{A}$ es plano si y solo si, para todo ideal J de A finitamente generado, se tiene que $J \otimes_A \hat{A} \to A \otimes_A \hat{A} \simeq \hat{A}$ es un morfismo inyectivo, es decir si $J \otimes_A \hat{A} \simeq J\hat{A}$. Como la compleción I-ádica es exacta, $\hat{J} \simeq J\hat{A}$. □

Ya hemos visto varias topologías en el A-módulo M y en su completado. En particular, si I es un ideal de A, podemos considerar la topología inducida por la I-ádica de M en $\hat{M}$ y la topología I-ádica en $\hat{M}$ (recordemos que $\hat{M}$ es un A-módulo). Esto quiere decir que tenemos dos filtraciones que definen dos bases de entornos de 0 y por lo tanto, definen dos topologías lineales sobre $\hat{M}$. Estas dos filtraciones son:

$$\hat{M} = I^0\hat{M} \supseteq I^1\hat{M} \supseteq \cdots \supseteq I^n\hat{M} \supseteq \cdots \tag{3.1}$$

$$\hat{M} = Ker\rho_0 \supseteq Ker\rho_1 \supseteq \cdots \supseteq Ker\rho_n \supseteq \cdots \tag{3.2}$$

Donde, siguiendo la notación del capítulo anterior, $\rho_n : \hat{M} \to M/I^nM$ es la proyección del límite.

Queremos ver si las dos topologías que definen (3.1) y (3.2) son la misma, dicho de otra manera, si la compleción I-ádica $\hat{M}$ es I-ádicamente completa. Para responder a esta pregunta, basta con preguntar si son de variación acotada, y como (3.1) es la filtración I-ádica en $\hat{M}$, la pregunta que nos debemos hacer es si (3.2) es una I-filtración estable de $\hat{M}$, es decir, si se cumple que:

- $I(Ker\rho_n) \subseteq Ker\rho_{n+1}$, y
- existe un entero n_0, tal que para todo $n \geq n_0$, $I(Ker\rho_n) = Ker\rho_{n+1}$.

Ejemplo 5. *Vamos al ejemplo habitual, donde $A = k[X]$, $I = (X)$ y k es un cuerpo. Entonces, $\hat{A} = k[[X]]$ es A-módulo donde la multiplicación y por elementos de A, está dada por:*

$$(\sum_{i=0}^{t} a_iX^i)(\sum_{i=0}^{\infty} b_iX^i) = \sum_{i=0}^{\infty} c_iX^i \text{ donde } c_i = \sum_{j+k=i} a_jb_k.$$

Las proyecciones $\rho_n : k[[X]] \to k[X]/(X)^n$ *envían* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$*. Entonces,* $Ker\rho_n = (X)^n \subseteq k[[X]]$*, y por lo tanto, la filtración* (3.2) *es:*

$$k[[X]] = (X)^0 \supseteq (X)^1 \supseteq \cdots \supseteq (X)^n \supseteq \cdots$$

que es la filtración I*-ádica en* $\hat{A}$*, pues* $I^n\hat{A} = (X)^n k[[X]] = (X)^n$*. Así que, en este primer caso sí se da que las dos topologías lineales, definidas por las filtraciones* (3.1) *y* (3.2) *respectivamente, son la misma.*

En general, podemos garantizar que, si A es noetheriano y M es un A-módulo finitamente generado, las topologías lineales definidas por (3.1) y (3.2) respectivamente, son la misma.

Teorema 9 (Teorema 8.13 de [7])**.** *Sea* M *un* A*-módulo finitamente generado sobre el anillo noetheriano* A *y sea* I *un ideal de* A*. Consideramos* $\hat{M}$ *la compleción* I*-ádica de* M*. Entonces, la topología* I*-ádica en* $\hat{M}$ *coincide con la topología lineal generada por la familia* $\{Ker\rho_n\}_{n\geq 0}$*.*

Proof. Consideremos la siguiente sucesión exacta para cualquier $n \geq 0$:

$$0 \to I^n M \to M \to M/(I^n M) \to 0$$

Las compleciones solo dependen de la topología lineal que define la filtración y por el lema de Artin-Rees, la restricción de la topología I-ádica de M en $I^n M$ es también la topología I-ádica. Por lo tanto, como la familia es una filtración la compleción es exacta y tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \to \widehat{I^n M} \to \hat{M} \to \widehat{M/I^n M} \to 0$$

donde todas las compleciones se refieren a la I-ádica. De aquí obtenemos que $\widehat{M/I^n M} \simeq \hat{M}/\widehat{I^n M}$.

En la compleción I-ádica de $M/I^n M$, el 0 es abierto (basta con coger el entorno abierto de 0 dado por $I^n(M/I^n M)$). Por lo tanto, la topología I-ádica en $M/I^n M$ es la discreta. Como se ha visto en la página 16, esto implica que $M/I^n M$ es I-ádicamente completo. Como consecuencia, tenemos los siguientes isomorfismos:

$$\widehat{M/I^n M} \simeq \hat{M}/\widehat{I^n M} \simeq M/I^n M.$$

Entonces, tenemos que $\widehat{I^n M}$ es el núcleo de $\hat{M} \to M/I^n M \to 0$, que es la proyección ρ_n. Ahora, basta con probar que $\widehat{I^n M} \simeq I^n \hat{M}$, para ver que $I^n \hat{M} \simeq Ker\rho_n$.

Sea el siguiente morfismo:

$$\begin{array}{ccc} I^n\hat{M} & \longrightarrow & \widehat{I^n M} \\ i(x_j)_{j\geq 0} & \longmapsto & (ix_j)_{j\geq 0} \end{array}$$

Es decir, a la clase de equivalencia de la sucesión de Cauchy $(x_j)_{j\geq 0}$ la multiplicamos por $i \in I^n$ y a esa nueva sucesión la enviamos a la clase de equivalencia de la sucesión de Cauchy en $I^n M$ dada por $(ix_j)_{j\geq 0}$. Este morfismo es un isomorfismo. Por lo tanto, $I^n\hat{M} \simeq \widehat{I^n M}$.

Como consecuencia, tenemos que $I^n\hat{M} \simeq Ker\rho_n$, por lo que las filtraciones son la misma y la topología I-ádica en $\hat{M}$ es la misma que la topología inducida por la I-ádica de M.

□

Hagamos ahora un breve paréntesis para, utilizando la demostración anterior, probar varios resultados que son de gran interés para la compleción de anillos locales y noetherianos. En la demostración del teorema anterior se ha probado que $\widehat{M/I^nM} \simeq \hat{M}/I^n\hat{M}$ y que $\widehat{I^nM} \simeq I^n\hat{M}$. Además la elección de I^n no influye en la prueba de estos dos isomorfismos, es decir, podemos substituir I^n por cualquier otro ideal arbitrario de A. De manera que se ha probado el siguiente corolario.

Corolario 6. *Sea M un A-módulo finitamente generado sobre el anillo noetheriano A y sean I y J dos ideales de A. Denotamos $\hat{(-)}$ a la compleción I-ádica de los A-módulos. Entonces, $\widehat{JM} \simeq J\hat{M}$ y $\widehat{M/JM} \simeq \hat{M}/J\hat{M}$.*

En el segundo capítulo hemos visto que la compleción de $k[X]$ respecto al ideal (X) es el anillo de series formales $k[[X]]$. Argumentando de manera análoga se puede probar que, para cualquier anillo de polinomios $A[X_1, \ldots, X_n]$ en finitas (y también en infinitas) variables sobre el anillo A, si $I = (X_1, \ldots, X_n)$, la compleción I-ádica de $A[X_1, \ldots, X_n]$ es $A[[X_1, \ldots, X_n]]$.

Teorema 10 (Teorema 8.2 de [7])**.** *Sea A un anillo noetheriano e $I = (a_1, \ldots, a_n)$ un ideal de A. Entonces, la compleción I-ádica de A es isomorfa a $A[[X_1, \ldots, X_n]]/(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$. Por tanto, $\hat{A}$ es notheriano.*

Proof. Sea $B = A[X_1, \ldots, X_n]$ y definimos los ideales $I' = (X_1, \ldots, X_n)$ y $J = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ de B. Entonces, es claro que $B/J \simeq A$ y que si consideramos A como un B-módulo dado por $(F(X_1, \ldots, X_n), a) \mapsto F(a_1, \ldots, a_n)a$, entonces la compleción I'-ádica de A es la misma que la compleción I.ádica del anillo A. Si escribimos $\widehat{(-)}$ para la compleción I'-ádica del B-módulo A, tenemos que:

$$\hat{A} \simeq \widehat{B/J} \simeq \hat{B}/\hat{J} \simeq \hat{B}/J\hat{B} \simeq A[[X_1, \ldots, X_n]]/(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$$

donde los isomorfismos están dados por el corolario anterior. □

Corolario 7. *Sea A un anillo noetheriano local con ideal maximal $\mathfrak{m}$. Entonces, la compleción $\mathfrak{m}$-ádica de A es un anillo local noetheriano con ideal maximal $\hat{\mathfrak{m}}$.*

Proof. Claramente, tenemos que si k es el anillo residual de A, entonces por el corolario 6, $\hat{A}/\hat{m} \simeq \hat{k} \simeq k$, pues los cuerpos son completos (la compleción $\mathfrak{m}$-ádica en k es la discreta). Así que $\hat{\mathfrak{m}}$ es maximal.

Por el teorema anterior, supongamos que $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces $\hat{A} \simeq A[[X_1, \ldots, X_n]]/(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$. Por lo tanto, el $\hat{\mathfrak{m}}$ tiene que ser el ideal $\mathfrak{m} + (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ y claramente es el único ideal maximal de $\hat{A}$. Por el teorema 10, $\hat{A}$ es noetheriano. □

Volvamos al problema principal de esta sección, en el que queriamos ver si en general la compleción I-ádica es I-ádicamente completa. En la prueba del teorema 9 no solo hemos probado que la filtración (3.2) es una I-filtración estable, sino que hemos probado que es, salvo isomorfismos, la misma filtración que la I-ádica. En el siguiente teorema veremos como la filtración (3.2) es una I-filtración estable si y solo si es isomorfa a la filtración I-ádica.

Definimos, para todo $n \geq 0$, el siguiente morfismo α_n:

$$\begin{array}{rccc} \alpha_n : & M/I^nM & \longrightarrow & \hat{M}/I^n\hat{M} \\ & x + I^nM & \longmapsto & \Psi(x) + I^n\hat{M} \end{array}$$

Vamos a utilizar el producto tensorial para probar que esta aplicación está bien dada. Nótese que $M/I^nM \simeq A/I^n \otimes_A M$ para cualquier A-módulo M, por lo tanto, el morfismo $\Psi : M \to \hat{M}$ se puede extender a $id \otimes \Psi : A/I^n \otimes_A M \to A/I^n \otimes \hat{M}$. Además, como $A \otimes_A M \simeq M$ para todo A-módulo M, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo (donde θ_n es el morfismo canónico $A \to A/I^n$):

$$\begin{tikzcd} A \otimes_A M \arrow[r, "id_A \otimes \Psi"] \arrow[d, "\theta_n \otimes id_M"] & A \otimes_A \hat{M} \arrow[d, "\theta_n \otimes id_{\hat{M}}"] \\ A/I^n \otimes_A M \arrow[r, "id_{A/I^n} \otimes \Psi"] & A/I^n \otimes_A \hat{M} \end{tikzcd}$$

Definimos α_n como $id_{A/I^n} \otimes \Psi$, y por ser el único morfismo que hace conmutativo el diagrama, $\alpha_n(x) = \Psi(x) + I^n\hat{M}$.

Teorema 11 (Teorema 1.5 de [10]). *Sea I un ideal de A y $\hat{M}$ la compleción I-ádica del A-módulo M. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) El A-módulo $\hat{M}$ es I-ádicamente completo.

(ii) Todos los morfismos α_n son sobreyectivos.

(iii) Para todo $n \geq 0$, $Ker\rho_n \simeq I^n\hat{M}$.

Proof. Por lo visto en el párrafo anterior, el cuadrado de la izquierda (donde los morfismos verticales que llamaremos f_n y g_n son los morfismos sobreyectivos canónicos) del siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "f_n"] & \hat{M} \arrow[d, "g_n"] \arrow[dr, "\rho_n"] & \\ & & M/I^nM \\ M/I^nM \arrow[r, "\alpha_n"] & \hat{M}/I^n\hat{M} \arrow[ur, "\beta_n"] & \end{tikzcd}$$

Para el triángulo de la derecha, definimos $\beta_n : \hat{M}/I^n\hat{M} \to M/I^nM$ como el único morfismo que hace conmutativo el triángulo. Es decir, $\beta(x + I^n\hat{M}) = \rho_n(x) + I^nM$. Este morfismo está bien definido, pues si $x - y \in I^n\hat{M}$, entonces $x - y = im$ donde $i \in I^n$ y $m \in \hat{M}$, de aquí se obtiene que $\rho_n(x) - \rho_n(y) = \rho_n(im) = i\rho_n(m) \in I^nM$, pues $i \in I^n$ y $\rho_n(m) \in M$. Hemos probado que el diagrama es conmutativo.

Sabemos que $\rho_n \circ \Psi = f_n$, por lo que, siguiendo el diagrama, $f_n = \beta_n \circ \alpha_n \circ f_n$ y como f_n es sobreyectiva $id_{M/I^nM} = \beta_n \circ \alpha_n$. Por lo tanto α_n es inyectiva y β_n sobreyectiva (en álgebra homológica se dice que α_n es una sección de β_n o que β_n es una retracción de α_n). Sea $K_m = Ker\beta_n$, entonces tenemos la siguiente sucesión corta exacta que escinde:

$$0 \to K_n \to \hat{M}/I^n\hat{M} \to M/I^nM \to 0$$

Es decir, $\hat{M}/I^n\hat{M} \simeq K_n \oplus M/I^nM$. Así, α_n es sobreyectiva si y solo si $K_n = 0$, es decir, si y solo si β_n es inyectiva.

Claramente, $Kerg_n = I^n\hat{M}$ y es igual al $Ker\rho_n$ si y solo si β_n es inyectiva. Juntandolo con el párrafo anterior, tenemos que $I^n\hat{M} \simeq Ker\rho_n$ si y solo si α_n es sobreyectiva. Por lo tanto, las proposiciones (ii) y (iii) son equivalentes.

Las familias de morfismos $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ son morfismos de sistemas inversos, de manera que tenemos:

$$\hat{M} \xrightarrow{\alpha} \hat{\hat{M}} \xrightarrow{\beta} \hat{M},$$

donde $\hat{\hat{M}}$ es la compleción I-ádica de $\hat{M}$. Además, como para todo n, $\beta_n \circ \alpha_n = id_{M/I^nM}$, tenemos que $\beta \circ \alpha = id_{\hat{M}}$. Y por lo tanto, si definimos $K = Ker\beta$, la siguiente secuencia corta escinde:

$$0 \to K \to \hat{\hat{M}} \xrightarrow{\beta} \hat{M} \to 0,$$

es decir, podemos escribir $\hat{\hat{M}} \simeq K \oplus \hat{M}$. Por lo tanto, $\hat{M}$ es I-ádicamente completo si y solo si α_n es un isomorfismo, esto a su vez se cumple solo cuando $K = 0$.

Como el límite conmuta con las sumas directas, $\hat{\hat{M}} \simeq \varprojlim (K_n \oplus M/I^nM) \simeq \varprojlim K_n \oplus \hat{M}$, lo que implica que $\varprojlim K_n \simeq K$.

Nótese que $\{K_n, K_{n+1} \to K_n\}_{n\geq 0}$ es una sistema inverso sobreyectivo, por lo que las proyecciones también serán sobreyectivas. Así, $K = 0$ si y solo si $K_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Es decir, $\hat{M}$ es I-ádicamente completo si y solo si, α_n es sobreyectiva para todo $n \geq 0$. Acabamos de probar la equivalencia de (i) y (ii). $\square$

Por lo visto en este teorema, la I-filtración $\{Ker\rho_m\}_{n\geq 0}$ es estable si y solo si $Ker\rho_n \simeq I^n\hat{M}$ para todo n. Ahora vamos a dar un contraejemplo donde la compleción no es I-ádicamente completa. Para ello, siguiendo la notación del teorema anterior, probaremos que α_0 no es sobreyectiva, y por tanto, no se cumple la segunda condición del teorema.

Ejemplo 6. *Sea $A = k[X_1, X_2, \ldots]$ el anillo de polinomios en infinitas variables sobre el cuerpo k y sea el ideal I generado por todas las variables, es decir, $I = \langle X_1, X_2, \ldots\rangle$. De manera análoga a $k[X]$, se deduce que la compleción I-ádica del anillo de polinomios en infinitas variables es el anillo de series en infinitas variables. Para utilizar la notación del teorema anterior vamos a considerar $M = A$ como A-módulo, queremos probar que $\alpha_1 : M/IM \to \hat{M}/I\hat{M}$ no es sobreyectiva. En este caso, para $n = 1$, tenemos:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dd, "f_1"] & \hat{M} \arrow[dd, "g_1"] \arrow[dr, "\rho_1"] & \\
 & & M/IM \\
M/IM \arrow[r, "\alpha_1"] & \hat{M}/I\hat{M} \arrow[ur, "\beta_1"] &
\end{tikzcd}$$

Sea $a \in \hat{M}$, consideramos su imagen $a + I\hat{M}$ en $\hat{M}/I\hat{M}$. Entonces, $a + I\hat{M}$ está en la imagen de α_1 si y solo si $a \in I\hat{M} \oplus Im\Psi$. Los elementos de $I\hat{M}$ son de la forma $\sum_{j=1}^{t} X_j a_j$, con $a_j \in \hat{M}$, y los de $Im\Psi$ son un polinomio (nótese que la topología I-ádica en M es separable, por lo que Ψ es un monomorfismo), así que son un elemento de $k \oplus I\hat{M}$. Por lo tanto, si a es un elemento de $I\hat{M} \oplus Im\Psi$, a es de la forma $\lambda + \sum_{j=1}^{t} X_j a_j$, donde $\lambda \in k$ y $a_j \in \hat{M}$.

Consideramos el elemento $a = \sum_{j=1}^{\infty} X_j^j$ *de* $\hat{M}$. *Este elemento no está en* $I\hat{M} + Im\Psi$, *pues no se puede escribir como* $\lambda + \sum_{j=1}^{t} X_j a_j$. *Por lo tanto,* $a \notin I\hat{M} + Im\Psi$. *Acabamos de probar que no existe ningún elemento de* M/IM *que sea preimagen de* $a + I\hat{M}$. *Es decir, que* α_1 *no es sobreyectivo y por lo tanto no se satisface la segunda de las condiciones equivalentes del teorema* 11.

Chapter 4

Anillos henselianos

El lema de Hensel tiene su origen en la teoría de números y fue probado por el matemático alemán Kurt Hensel. En su versión inicial, el lema prueba que dado un polinomio $F(X)$ con coeficientes enteros y un número primo p, si al reducir los coeficentes módulo p el polinomio resultante factoriza en $\mathbb{F}_p[X]$, entonces esa factorización se puede elevar de manera única al anillo de los enteros p-ádicos.

En la primera sección del capítulo se prueba el lema, siguiendo la demostración de [7]. Como consecuencia del lema probaremos que también somos capaces de levantar raíces de polinomios. Por último, daremos un ejemplo de un anillo afín asociado a una curva irreducible. En este ejemplo, pasaremos al anillo completado y veremos que este no es un anillo íntegro. Para esta sección se ha utilizado el capítulo 8 de *Commutative ring theory* de H. Matsumura y el capítulo 7 de *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* de D. Eisenbud.

En la segunda parte del capítulo vamos a definir los anillos henselianos. En esta sección trabajaremos solamente con anillos locales $(A, \mathfrak{m}, k)$. Definiremos los anillos locales henselianos y probaremos que son exactamente aquellos que satisfacen el lema de Hensel. Una de las particularidades de los anillos henselianos será el levantamiento de elementos idempotentes que estudiaremos en esta sección. Los libros de referencia de esta sección son el capítulo 7 de *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* de D. Eisenbud, el capítulo 2 de *Algèbre commutative* de N. Bourbaki y el primer capítulo de *Anneaux locaux Henséliens* de M.Raynaud.

Por último, para terminar el tema definiremos la henselización de anillos locales. Lo haremos a partir de propiedades universales y veremos que la henselización de un anillo local es un límite directo filtrante de anillos locales henselianos. Por último haremos una breve discusión para el caso de los anillos locales notherianos y veremos que la heselización de este anillo está contenido en la compleción $\mathfrak{m}-$ádica. En este capítulo se ha utilizado el tema 8 de *Anneaux locaux Henséliens* de M.Raynaud y también se ha hecho un breve resumen de los límites directos, para el cual se han utilizado los capítulos V y IX de *Categories for the Working Mathematician* de S. Mac Lane, del capítulo 2 de *Categories and Sheaves* de M. Kashiwara y P. Schapira.

4.1 Lema de Hensel

Tal y como se ha escrito en la introducción del capítulo, la versión original del lema de Hensel está dada para el anillo de los enteros y los p-ádicos. Si consideramos cualquier anillo A, la generalización de un número primo es un ideal maximal y la generalización del anillo de los enteros p-ádicos es la compleción del anillo A sobre ese ideal maximal. Así, tenemos el lema de Hensel en la versión de Álgebra conmutativa.

Teorema 12 (Teorema 8.3 de [7]). *Sea A un anillo $\mathfrak{m}$-ádicamente completo (es decir, completo para la filtración $\mathfrak{m}$-ádica), donde $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal y $k \simeq A/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual. Sea $F(X) \in A[X]$ un polinomio mónico, denotamos $\overline{F}(X)$ al polinomio obtenido al reducir los coeficiente módulo $\mathfrak{m}$.*

Si existen dos polinomios mónicos y coprimos $g(X), h(X)$ en $k[X]$ tales que $\overline{F}(X) = g(X)h(X)$, entonces existen $G(X), H(X)$ en $A[X]$ tales que $F(X) = G(X)H(X)$ con $\overline{G}(X) = g(X)$ y $\overline{H}(X) = h(X)$.

Proof. Vamos a probar por inducción sobre n que existen $G_n(X), H_n(X) \in A[X]$ mónicos y coprimos, de manera que:

$$F(X) \equiv G_n(X)H_n(X) \pmod{\mathfrak{m}^n[X]} \tag{4.1}$$

y además, $G_n \equiv g, H_n \equiv h$ (mod $\mathfrak{m}$). Una vez conseguido probar estas congruencias para todo $n > 0$, basta con coger los límites, es decir $G = \varprojlim G_n$ y $H = \varprojlim H_n$ que serán elementos de $\hat{A} \simeq A$ con $F = GH$.

- Si $n = 1$, $A/\mathfrak{m} \simeq k$. Entonces, escogemos $G_1(X) = g(X)$ y $H_1(X) = h(X)$.

- Por la hipótesis de inducción, suponemos que existen polinomios mónicos y coprimos G_n y H_n, de manera que se cumple (2.1) y $G_n \equiv g, H_n \equiv h$ (mod $\mathfrak{m}$).

  Por lo tanto, tenemos que $F - G_nH_n \in \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}[X]$, es decir $F - G_nH_n = \sum \alpha_i U_i(X)$ donde $\alpha_i \in \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ y $deg(U_i) < deg(F)$ (deg es el grado del polinomio). Como g y h son coprimos, podemos aplicar la identidad de Bezout, es decir, existen $v, w \in k[X]$ tal que $1 = gv + hw$, por lo que para todo U_i existen $v_i, w_i \in k[X]$ con $U_i \equiv gv_i + hw_i \pmod{\mathfrak{m}[X]}$. Podemos asumir que $deg(v_i) < deg(h)$. En caso contrario, escribimos la división con resto $v_i = h\theta_i + r_i$, $deg(r_i) < deg(h)$ y por lo tanto, $\overline{U_i} = gv_i + hw_i = gr_i + h(\theta_i + w_i)$. Así que reescribimos la identidad de Bezout con estos nuevos coeficientes.

  De la asunción de que $deg(v_i) < deg(h)$, tenemos que $deg(hw_i) = deg(\overline{U_i} - gv_i) < deg(F)$, por lo que $deg(w_i) < deg(g)$.

  Escogemos $V_i, W_i \in A[X]$, con $\overline{V_i} = v_i$ y $\overline{W_i} = w_i$ en $k[X]$ y con $deg(V_i) = deg(v_i)$, $deg(W_i) = deg(w_i)$. Definimos $G_{n+1} = G_n + \sum \alpha_i W_i$ y $H_{n+1} = H_n + \sum \alpha_i V_i$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} F - G_{n+1}H_{n+1} = & \quad F - G_nH_n - G_n\left(\sum \alpha_i V_i\right) - H_n\left(\sum \alpha_i W_i\right) - \left(\sum \alpha_i W_i\right)\left(\sum \alpha_i V_i\right) \\ = & \quad \sum \alpha_i U_i - G_n\left(\sum \alpha_i V_i\right) - H_n\left(\sum \alpha_i W_i\right) - \left(\sum \alpha_i W_i\right)\left(\sum \alpha_i V_i\right). \end{aligned}$$

  En módulo $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+1}$ tenemos que $G_n\left(\sum \alpha_i V_i\right) + H_n\left(\sum \alpha_i W_i\right) \equiv \sum \alpha_i g w_i + \sum \alpha_i h v_i \equiv \sum \alpha_i U_i$ y $\left(\sum \alpha_i W_i\right)\left(\sum \alpha_i V_i\right) \equiv 0$. Por lo tanto se cumple la congruencia (2.1) para $n + 1$. Además, como $\alpha_i \in \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \subseteq \mathfrak{m}$, $\overline{G_{n+1}} = g$ y

$\overline{H_{n+1}} = h$ en $k[X]$. Nótese que $G_{n+1} \equiv G_n \pmod{\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}}$ y $H_{n+1} \equiv H_n \pmod{\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}}$, esto implica que las sucesiones $\{G_n\}$ y $\{H_n\}$ se corresponden con elementos de $\hat{A}$.

□

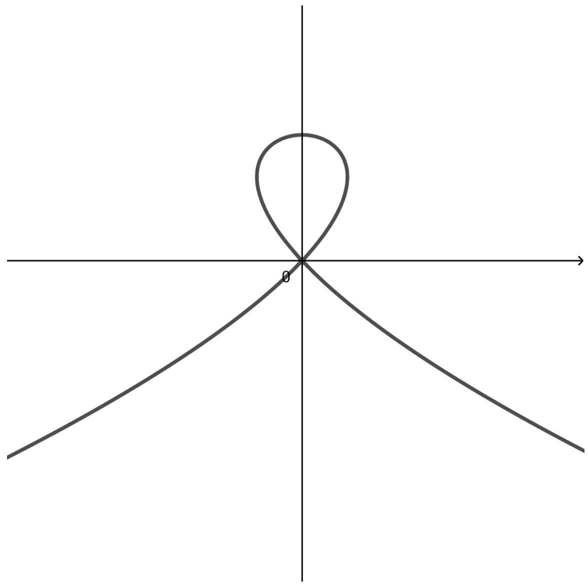
Corolario 8. *Sea A un anillo $\mathfrak{m}$-ádicamente completo, donde $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal y $k \simeq A/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual. Sea $F(X)$ un polinomio mónico de $A[X]$, denotamos $\overline{F}(X)$ al polinomio obtenido al reducir los coeficientes módulo $\mathfrak{m}$.*

Si $a \in k$ es una raíz simple de $\overline{F}(X)$, es decir, si $\overline{F}(a) = 0$ y $\overline{F}'(a) \neq 0$, entonces existe una raíz $b \in A$ de $F(X)$ tal que $F(b) = 0$ y $b \equiv a$ (mod $\mathfrak{m}$).

Proof. Si a es una raíz simple de $\overline{F}(X)$, tenemos que $\overline{F}(X) = (X - a)g(X)$ para algún polinomio mónico $g(X)$ coprimo a $X - a$. Por el lema de Hensel, existen dos polinomios $G(X)$ y $H(X)$ mónicos y corpimos tal que $F(X) = G(X)H(X)$ con $\overline{G}(X) = g(X)$ y $\overline{H}(X) = X - a$. Por lo tanto, tenemso que $H(X)$ es un polinomio de primer grado, es decir, $H(X) = X - b$. Así que $F(b) = 0$. Además, $\overline{H}(X) = X - \overline{b} = X - a$, por tanto, $b \equiv a$ (*mod* $\mathfrak{m}$). □

El corolario 7 no es más que el caso particuar del lema de Hensel en el que uno de los polinomios de la factorización de $\overline{F}$ es lineal. Una versión más general de este corolario está dada en [3], en el teorema 7.3. Veamos ahora una aplicación geométrica del lema de Hensel.

Ejemplo 7. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Consideramos la curva afín definida por $X^2 - Y^2 + Y^3$ en $k[X, Y]$ y el anillo afín coordinado de la curva, es decir, $A = k[X, Y]/(X^2 - Y^2 + Y^3)$.*



Consideramos el anillo $k[Y]$, su ideal maximal (Y) y el polinomio mónico $F(X) = X^2 - (1 - Y)$ con coeficientes en $k[Y]$. Denotamos $\overline{F}(X)$ al polinomio obtenido al reducir los coeficientes de $F(X)$ módulo (Y), entonces $\overline{F}(X) = X^2 - 1$ y 1 es una raíz simple de $\overline{F}(X)$. Como $k[Y]$ no es (Y)-ádicamente completo *no podemos aplicar el lema de Hensel. Sin embargo, por lo visto en el ejemplo* 5 *del capítulo anterior, podemos considerar la compleción de* $k[Y]$ *respecto del ideal* (Y)*, pues es un anillo* (Y)*-ádicamente completo.*

Así que, consideramos el nuevo anillo $k[[Y]]$ *que contiene a* $k[Y]$*, aquí podemos afirmar que existe un elemento* b *de manera que* $F(b) = 0$ *y* $b \equiv 1 \pmod{(Y)}$*. Dicho de otra manera, existe una serie en* $k[[Y]]$ *que es raíz del polinomio* $F(X) = X^2 - (1 - Y)$*; además, esta serie es congruente con* 1 *módulo* (Y)*, es decir, tiene de término independiente el* 1*. Este elemento es la serie de Taylor de* $\sqrt{1-Y}$*, que es:*

$$1 - \frac{Y}{2} - \frac{Y^2}{8} - \frac{Y^3}{16} - \frac{5Y^4}{128} - \cdots$$

Ahora, partimos de la serie anterior de $k[[Y]]$ *y la multiplicamos por* Y^2*, que es un elemento de* $k[[Y]]$*. Tenemos entonces que esta nueva serie es una raíz de* $X^2 - Y^2 + Y^3$ *en* $k[[Y]]$*. Es decir, aún cuando la curva afín sea irreducible, podemos factorizarla en el espacio completado.*

Podemos aplicar el corolario 6 *del segundo capítulo, pues se dan las hipótesis necesarias para garantizar que la compleción del anillo afín* $A = k[X,Y]/(X^2 - Y^2 + Y^3)$ *es* $\hat{A} = k[[X,Y]]/(X^2 - Y^2 + Y^3)$*. Por tanto, en este ejemplo encontramos la compleción de un anillo íntegro que no es íntegra.*

4.2 Anillos henselianos

Recordemos que una A-álgebra B es finita si B es finitamente generado como un A-módulo. Siguiendo la notación de [1] decimos que la A-álgebra B es entera y que $f : A \to B$ es una un morfismo entero si B es entero sobre $f(A)$. Por lo tanto, tal y como aparece en la página 60 de [1], se tiene que la A-álgebra B es finita si y solo si es entera y finitamente generada.

Definición 5. *Un anillo es descompuesto si se puede escribir como producto de anillos locales. Un anillo local* $(A, \mathfrak{m}, k)$ *es henseliano si toda* A*-álgebra finita es descompuesta (como anillo).*

El objetivo de esta sección es probar que los anillos henselianos definidos por la definición anterior son exactamente los anillos locales que satisfacen el lema de Hensel.

Definición 6. *Sea* $f : A \to B$ *un morfismo de anillos, y sean dos ideales* I *y* J *de* A *y* B *respectivamente. Decimos que* J *es un ideal encima de* I *si* $f^{-1}(J) = I$*.*

Para la prueba de la siguiente proposición vamos a citar un resultado de [1] que ha sido probado en las asignaturas de Álgebra conmutativa, por lo que prescindiremos de la demostración.

Lema 8 (Corolario 5.8 de [1])**.** *Sean* $f : A \to B$ *un morfismo de anillos entero,* $\mathfrak{q}$ *un ideal primo de* B *y* $\mathfrak{p}$ *el ideal primo* $f^{-1}(\mathfrak{p})$*. Entonces,* $\mathfrak{p}$ *es maximal si y solo si* $\mathfrak{q}$ *es maximal.*

Lema 9 (Proposición 3, del capítulo 5, $\oint$ 2 de [2])**.** *Sea* B *una* A*-álgebra finita. Entonces, para todo ideal primo* $\mathfrak{p}$ *de* A*, el conjunto de ideales primos de* B *encima de* A *es finito.*

Proof. Cosiderando la localización en $\mathfrak{p}$ tenemos el siguiente morfismo de $A_{\mathfrak{p}}$-módulos $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{p}}$. Este morfismo respeta la multiplicación en los anillos, por lo que podemos considerarlo como un morfismo de anillos, y además hace que $B_{\mathfrak{p}}$ sea un $A_{\mathfrak{p}}$-álgebra finita. Como todos los ideales primos de B encima de $\mathfrak{p}$ "sobreviven" a la localización, tenemos que basta con probar el problema cuando A es un anillo local.

Así que supongamos que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local y el ideal $\mathfrak{m}$ es maximal. Por la correspondencia entre los ideales de B encima de $\mathfrak{m}$ al pasar al cociente, podemos centrarnos en el morfismo $f : A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m}B$, que tambíen hace que $B/\mathfrak{m}B$ sea un $A/\mathfrak{m}$-álgebra finita. Es decir, basta con considerar el caso en el que B sea una k-álgebra finita, donde k es un cuerpo. Entonces, queremos probar que el número de ideales primos de B encima de 0 es finito, es decir, el número de ideales primos de una k-álgebra finita es finito.

B es de la forma k^n, por lo tanto, B es un k-espacio vectorial, y los subespacios son productos de k. De manera que satisface la condición descendente y es artiniano. Como todos los ideales primos de un anillo artiniano son maximales (proposición 8.1 de [1]) y además el número de ideales maximales es finito (proposición 8.3 de [1]), B tiene un número finito de ideales primos. □

Proposición 11 (Proposición 1 del capítulo 1 de [8]). *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo local y B una A-álgebra finita. Entonces B es un anillo semilocal, es decir, tiene un número finito de ideales maximales. Además, estos ideales maximales son los ideales primos de B encima de $\mathfrak{m}$.*

Proof. Como B es una A-álgebra finita, $f : A \to B$ es un morfismo entero. Entonces, dado un ideal primo $\mathfrak{q}$ de B, consideramos el ideal primo $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$. Por el lema 8, $\mathfrak{q}$ es un ideal maximal de B si y solo si está encima de $\mathfrak{m}$, pues es el único ideal maximal de A. Ahora, aplicando el lema 9, el número de ideales primos encima de $\mathfrak{m}$ es finito. □

A partir de ahora, denotamos por $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ al conjunto finito de ideales maximales de la A-álgebra finita B, y denotamos por $\overline{B}$ al anillo A-módulo $B/\mathfrak{m}B$.

Proposición 12 (Proposición 2 del capítulo 1 de [8]). *Sea B una A-álgebra finita, donde $(A, \mathfrak{m}, k)$ es un anillo local. Entonces, el morfismo canónico dado por $\overline{B} \longrightarrow \prod_{i=1}^n \overline{B}_{\eta_i}$ es un isomorfismo, donde $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ es el conjunto de finito de ideales maximales de B, $\overline{B} = B/\mathfrak{m}B$ y B_{η_i} denota la localización de B en η_i, por lo que $\overline{B}_{\eta_i} = (B/\mathfrak{m}B)_{\eta_i}$.*

Proof. Nótese que para todo ideal maximal η_i de B, $\overline{B}_{\eta_i} = (B/\mathfrak{m}B)_{\eta_i} \simeq B_{\eta_i}/\mathfrak{m}B_{\eta_i}$, pues todos los η_i están encima de $\mathfrak{m}$. Consideramos el morfismo estructural $f : A \to B$ y pasamos el morfismo al cociente $\overline{f} : k \to \overline{B}$, entonces $\overline{B}$ es una k-álgebra finita. Por la proposición 6.5 de [1], $\overline{B}$ es artiniano, y como consecuencia es isomorfo a un producto finito de anillos locales (teorema 8.7 de [1]). Más aún, los anillos locales son $\overline{B}_{\eta_i}$ (ver el corolario 1 del capítulo 4, $\oint 2$ de [2]). □

Proposición 13 (Proposición 3 del capítulo 1 de [8]). *Sea B una A-álgebra finita, donde $(A, \mathfrak{m}, k)$ es un anillo local. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) B es descompuesto.

(ii) El morfismo canónico $B \longrightarrow \prod_{i=1}^n B_{\eta_i}$ es un isomorfismo.

(iii) La descomposición de $\overline{B}$ se levanta a una descomposición de B.

Proof. Supongamos que B es descompuesto, entonces podemos escribirlo como producto de anillos locales $B \simeq \prod_{i\in\Lambda} B_i$. Sea $\mathfrak{m}_i$ el ideal maximal de B_i, definimos el ideal maximal de B dado por $\eta_i = \mathfrak{m}_i \times \prod_{i\in\Lambda: i\neq j} B_i$. Nótese que estos son todos los ideales maximales que hay en B. Por la proposición 11 sabemos que el número de ideales maximales de B es finito, así que $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$. Es sencillo comprobar que $B_i \simeq B_{\eta_i}$, por ejemplo, probando que se cumplen las condiciones del corolario 3.2 de [1] para $S = B \setminus \eta_i$ y $B \simeq \prod_{i=1}^n B_i \to B_i$. Por lo tanto, hemos probado que (i) implica (ii).

Las implicaciones $(ii) \Rightarrow (iii)$ y $(iii) \Rightarrow (i)$ son triviales. □

Una consecuencia de los anillos locales henselianos es el levantamiento de elementos idempotentes, una idea originada por Azumaya en 1950. Un elemento b de la A-álgebra B es idempotente si $b^2 = b$. Denotamos $Idem(B)$ al conjunto de elementos idempotentes de B. Claramente un morfismo de anillos preserva los elementos idempotentes.

Proposición 14 (Proposición 4 del capítulo 1 de [8])**.** *Sea B una A-álgebra finita, donde $(A, \mathfrak{m}, k)$ es un anillo local. Entonces, la aplicación $Idem(B) \longrightarrow Idem(\overline{B})$ inducida por $B \longrightarrow \overline{B}$ es inyectiva. Además es biyectiva si y solo si B es descompuesto.*

Proof. Sean b, c dos elementos idempotentes de B congruentes módulo $\mathfrak{m}B$, es decir su imagen a través de $Idem(B) \longrightarrow Idem(\overline{B})$ es la misma. Sea $x = b - c$, como $x^3 = (b-c)^3 = b^3 - c^3 - 3b^2c + 3bc^2 = b - c = x$, se tiene que $x(1 - x^2) = 0$. Por otro lado, x está en $\mathfrak{m}B$, y como todos los ideales maximales η_i de B están encima de $\mathfrak{m}$, tenemos que x está en el radical de Jacobson. Por la caracterización de este ideal (proposición 1.9 de [1]), $1 - x^2$ es una unidad, por lo que $x = 0$, es decir $b = c$.

Recordemos que, por la proposición 12, $\overline{B} \simeq \prod_{i=1}^n \overline{B}_{\eta_i}$. Para todo $i = 1, \ldots, n$, definimos δ_i como el elemento idempotente de $\overline{B}$ que vale 1 en la componenete $\overline{B}_{\eta_i}$ y 0 en el resto de componentes. Entonces, todo elemento idempotente de $\overline{B}$ es una combinación lineal de $\{\delta_i\}_{i=1}^n$. Si la aplicación $Idem(B) \longrightarrow Idem(\overline{B})$ es biyectiva, todo elemento idempotente de B es combinación lineal de las preimagenes de δ_i. Además B es descompuesto si y solo si la descomposición de $\overline{B}$ se levanta a B, es decir, si cada δ_i se levanta a B. Por lo tanto, B es descompuesto si y solo si $Idem(B) \longrightarrow Idem(\overline{B})$ es biyectiva. □

Ya estamos en condiciones de demostrar que los anillos que satisfacen el lema de Hensel son, exactamente, los anillos henselianos. Recordamos que una A-álgebra B es libre si es libre como A-módulo, es decir si $B \simeq \bigoplus_{i\in\Lambda} A$.

Lema 10. *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo local y sea C una A-álgebra finita tal que $\overline{C} = C/\mathfrak{m}C$ es isomorfo a $k[X]/(h(X))$ donde $h(X)$ es un polinomio mónico de grado n de $k[X]$. Sea el elemento $X + (h(X)) \in k[X]/(h(X))$, haciendo un abuso de notación, lo consideramos como un elemento de $\overline{C}$, sea x un elemento de C tal que $\overline{x} = X + (h(X))$. Entonces, x genera la A-álgebra C y es raíz de un polinomio mónico $H(X)$ de grado n de $A[X]$ que cumple que $H(X) + \mathfrak{m}[X] = h(X)$.*

Proof. Haciendo un abuso de notación, identificamos $1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}$ de $k[X]/(h(X))$ como elementos de $C/\mathfrak{m}C$. Sean $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ elementos de C de manera que $\overline{x^i} = X^i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Aumentamos el conjunto de elementos hasta obtener un conjunto de generadores del A-módulo finitamente generado C, es decir, C es generado por $1, x, \ldots, x^{n-1}, y_1, \ldots, y_m$, donde $y_1, \ldots, y_m$ generan $\mathfrak{m}C$. Por lo tanto $C = \mathfrak{m}C + \langle 1, x, \ldots, x^{n-1} \rangle$, entonces por el lema de Nakayama, $1, x, \ldots, x^{n-1}$ generan C. Por tanto, $x^n = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$, donde $a_i \in A$. Definimos $H(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$, por lo tanto, x es una raíz de $H(X)$ y $H(X) + \mathfrak{m}[X] = h(X)$. □

Teorema 13 (Proposición 5 del capítulo 1 de [8]). *Sea B una A-álgebra finita, donde $(A, \mathfrak{m}, k)$ es un anillo local. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) El anillo local $(A, \mathfrak{m}, k)$ es henseliano.

(ii) Toda A-álgebra finita y libre es descompuesta.

(iii) Para todo polinomio mónico $F(X)$ de $A[X]$, $A[X]/(F(X))$ es descompuesto.

iv) Dado un polinomio mónico $F(X)$ de $A[X]$, si existen dos polinomios mónicos y coprimos $g(X), h(X)$ en $k[X]$ tales que $\overline{F}(X) = g(X)h(X)$, entonces existen $G(X), H(X)$ en $A[X]$ tales que $F(X) = G(X)H(X)$ con $\overline{G}(X) = g(X)$ y $\overline{H}(X) = h(X)$.

Proof. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ es trivial.

Veamos que $(iii) \Rightarrow (iv)$. Sea $F(X) \in A[X]$ de grado n tal que $\overline{F}(X) = g(X)h(X)$ con h y g coprimos en $k[X]$. Entonces $B = A[X]/(F(X))$ es una A-álgebra finita y $\overline{B} = k[X]/(\overline{F}(X))$. Por el teorema chino de los restos, $k[X]/(\overline{F}(X)) \simeq k[X]/(g(X)) \times k[X]/(h(X))$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que g y h son polinomios irreducibles; entonces, por la proposición 13, la descomposición anterior de $\overline{B}$ se levanta a una de $B \simeq B_1 \times B_2$. Aplicando el lema anterior con $C = B_1$ y $C = B_2$ respectivamente, x es el elemento de B_1 que es igual a X en $k[X]/(h(X))$ $(K[X]/(g(X))$ y es raíz de un polinomio mónico $H(X) \in A[X]$ de grado igual que $h(X)$ que eleva a $h(X)$. Análogamente, para $G(X)$. Por lo tanto, tenemos que x es raíz de $G(X)H(X)$ en $A[X]$, por lo que es un múltiplo de $F(X)$ de grado n, y por lo tanto es $F(X)$.

Probamos ahora que $(iv) \Rightarrow (iii)$. Sea $F(X)$ un polinomio mónico de $F[X]$, y sea $f(X)$ su restricción módulo $\mathfrak{m}$. Descomponemos $f(X)$ en potencias de factores irreducibles, $f = f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}$. Por inducción sobre n, utilizando (iv) tenemos que la factorización se eleva a una factorización de factores $F_i(X)$ coprimos dos a dos en $A[X]$. Consideramos el morfismo canónico:

$$\alpha : A[X]/(F(X)) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A[X]/(F_i(X))$$

El morfismo inducido $\overline{\alpha}$ es sobreyectivo, luego $Im(\alpha) + \mathfrak{m}\left(\prod_{i=1}^{n} A[X]/(F_i(X))\right) = \prod_{i=1}^{n} A[X]/(F_i(X))$, por el lema de Nakayama, α tambiém es sobreyectiva. Además, como el grado de $F(X)$ es igual a la suma de los grados de todos los $F_i(X)$, tenemos que los dos anillos son A-módulos libres de mismo rango, por tanto α también es inyectiva.

$(iii) \Rightarrow (i)$. sea B una A-ágebra finita. Vamos a demostrar que para el elemento idempotente de δ_i de $\overline{B} = B/\mathfrak{m}B \simeq \prod_{i=1}^{n} \overline{B}_{\eta_i}$ isomorfo al dado por 1 en la posición correspondiente a $\overline{B}_{\eta_i}$ y 0 en el resto, existe un elemento nilpotente χ_i de B con $\overline{\chi_i} = \delta_i$. Sea b un elemento cualquiera de B con $\overline{b} = \delta_i$ y sea $F(X)$ un polinomio de $A[X]$ que tiene a b como raíz. Definimos el siguiente morfismo $\alpha : A[X]/(F(X)) \to B$ que envía $X + (F(X))$ a b. Sea $\mathfrak{p}$ la preimagen del ideal η_i en $A[X]/(F(X))$. Dada la elección de δ_i, η_i es el único ideal primo de B encima de $\mathfrak{p}$. Por hipótesis, $A[X]/(F)$ es descompuesto, y como α es un morfismo entero, $\mathfrak{p}$ es maximal. Consideramos el elemento idepontente de $A/(F(X))$ identificado en la descomposición como aquel que es uno en el factor correspondiente a $\mathfrak{p}$ y cero en el resto. Claramente la imagen de este elemento idempotente es b, por lo que es idempotente, es decir, b es ese elemento χ_i que buscábamos. Por lo tanto, aplicando la propisición 14, B es descompuesta. □

Corolario 9. *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo henseliano y sea I un ideal de A, entonces A/I es henseliano.*

Proof. $(A/I, \mathfrak{m}/I, k)$ es un anillo local. Es trivial probar que se cumple la propiedad (iv) del teorema anterior. □

El ejemplo más sencillo de anillo henselianos son los cuerpos, pues satisfacen la propiedad (ii) del teorema 12. El siguiente lema nos va a dar más ejemplos de anillos henselianos.

Un ideal I del anillo A es nilpotente si $I^n = 0$ para algún $n \geq 0$. Decimos que I es localmente nilpotente (en la literatura es también habitual llamarlos ideales nil) si todo elemento de I es nilpotente, es decir, para todo x de I, existe un entero n tal que $x^n = 0$.

Lema 11. *Sea A un anillo (no necesariamente local) e I un ideal localmente nilpotente. Entonces, la siguiente aplicación canónica es biyectiva.*

$$Idem(A) \to Idem(A/I)$$

Proof. Sea $a + I$ con $a \in A$ un elemento de $Idem(A/I)$, Por ser idempotente, $a^2 - a \in I$, y por ser I un ideal localmente nilpotente, $(a^2 - a)^n = 0$ para algún entero n. Definimos $b = a - 1$, por lo que $ab = a^2 - a$, entonces $a^n b^n = 0$. Tenemos que $1 = a + b$, por lo que:

$$1 = (a+b)^{2n-1} = \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} a^i b^{2n-1-i} = c + d,$$

donde:

$$c = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^i b^{2n-1-i}, \; d = \sum_{i=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} a^i b^{2n-1-i}.$$

Como $a^n b^n = 0$, tenemos que $cd = 0$. Como $1 = c + d$, $c = c(c+d) = c^2$, análogamente $d = d^2$. Además, $d - a^{2n-1} = \sum_{i=n}^{2n-2} \binom{2n-1}{i} a^i b^{2n-1-i}$. Como $ab = a^2 - a$ es un elemento del ideal I, $d - a^{2n-1}$ está también en I, es decir, $d + I = a^{2n-1} + I$ en A/I. Por ser $a + I$ en elemento idempotente de A/I, $a^{2n-1} + I = a + I$. Por tanto, $Idem(A) \to Idem(A/I)$ es sobreyectiva, pues el elemento d de A es idempotente y $d + I = a + I$.

Para probar que también es inyectiva, vamos a considerar dos elementos idempotentes a y b del anillo A congruentes módulo I. Por lo tanto $a = b+i$ para algún i de I. Entonces $a^2 = (b+i)^2 = b+i^2+2bi = b+i = a$, de donde se obtiene que $(1-2b)i = i^2$. De manera que $i^3 = (1-2b)i^2 = (1-2b)^2 i$, e inductivamente $i^n = (1-2b)^{n-1}i$ para todo $n \geq 1$. Además $(1-2b)^2 = 1+4b-4b = 1$. Por lo tanto, como i es nilpotente $i^m = 0$ para algún entero m. Sin pérdida de generalidad, suponemos que m es impar; así, se cumple que $(1-2b)^{m-1} = \left((1-2b)^2\right)^{(m-1)/2} = 1$, (en caso de que m sea par, escogemos $m = m+1$). Por tanto, $0 = i^m = (1-2b)^{m-1}i = i$ por lo que $a = b$ y la función es inyectiva.

□

Recordamos que un anillo es reducido si el nilradical de A es 0, es decir, si no tiene elementos nilpotentes. Para todo anillo A, denotamos el nilradical de A como $nil(A)$ y definimos el anillo reducido asociado a A como $A_{red} = A/nil(A)$.

Corolario 10. *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo local. Entonces, A es henseliano si y solo si A_{red} es henseliano.*

Proof. Si A es henseliano, por el corolario 9, A_{red} es henseliano. Supongamos que A_{red} es henseliano, entonces dada una A-álgebra finita B, B es descompuesta si y solo si $Idem(B) \to Idem(\overline{B})$ es biyectiva, donde $\overline{B} = B/\mathfrak{m}B$. Consideramos el morfismo inducido $A_{red} \to B/\left(nil(A)B\right)$, que convierte a $B/\left(nil(A)B\right)$ en una A_{red}-álgebra finita. Por lo tanto, $B/\left(nil(A)B\right)$ es descompuesta y como el ideal maximal de A_{red} es $\mathfrak{m} + nil(A)$, $Idem\left(B/\left(nil(A)B\right)\right) \to Idem(\overline{B})$ es una aplicación biyectiva. Claramente $nil(A)B$ es un ideal localmente nilpotente de B, por lo que aplicando el lema anterior, $Idem(B) \to Idem\left(B/\left(nil(A)B\right)\right)$ es una biyección y también lo será $Idem(B) \to Idem(\overline{B})$. □

Como en los anillos artinianos los ideales primos son maximales (proposición 8.1 de [1]), el único ideal primo de un anillo local artiniano $(A, \mathfrak{m}, k)$ es el ideal maximal $\mathfrak{m}$. Por lo tanto, el ideal $\mathfrak{m}$ es $nil(A)$ y $k \simeq A_{red}$. Aplicando el corolario anterior, todos los anillos locales artinianos son henselianos.

Otro ejemplo de anillos locales henselianos son los anillos completos para la topología $\mathfrak{m}$-ádica, pues tal y como hemos visto satisfacen el lema de Hensel. Vamos a dar una prueba alternativa utilizando el teorema 12.

Corolario 11. *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo local y completo para la topología $\mathfrak{m}$-ádica. Entonces, A es henseliano.*

Proof. Sea B una A-álgebra finita y libre. Entonces, $B \simeq \oplus_{i=0}^{k} A$ y como el límite conmuta con las sumas directas, B es $\mathfrak{m}$-ádicamente completo. Por otro lado, $A/\mathfrak{m}^n$ es un anillo local con un único ideal primo, que es el correspondiente a $\mathfrak{m}$ en A, (un ideal primo de $A/\mathfrak{m}^n$ se corresponde con un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A que contiene a $\mathfrak{m}^n$, por lo tanto $\mathfrak{p}$ contiene a $\mathfrak{m}$, así que $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$). Aplicamos el corolario 10, y por lo visto anteriormente, $(A/\mathfrak{m}^n)_{red} \simeq k$, por lo que $A/\mathfrak{m}^n$ es henseliano . Para todo $n \geq 0$, $B/\mathfrak{m}^n B$ es una $A/\mathfrak{m}^n$-álgebra finita, por lo tanto es descompuesta, es decir, $B/\mathfrak{m}^n B \simeq \prod_{i=1}^{m} \left(B/\mathfrak{m}^n B\right)_{\eta_i} \simeq \prod_{i=1}^{m} (B_{\eta_i}/\mathfrak{m}^n B_{\eta_i})$. Como el límite conmuta con los productos, tenemos que:

$$B \simeq \varprojlim_{n \geq 0} B/\mathfrak{m}B \simeq \varprojlim_{n \geq 0} \prod_{i=1}^{m} (B_{\eta_i}/\mathfrak{m}^n B_{\eta_i}) \simeq \prod_{i=1}^{m} \varprojlim_{n \geq 0} (B_{\eta_i}/\mathfrak{m}^n B_{\eta_i})$$

que es la descomposición en anillos locales de B. Por lo tanto, por el teorema 13 (ii), A es henseliano. □

4.3 Henselización

En esta sección vamos a definir la henselización de un anillo local $(A, \mathfrak{m}, k)$. Lo haremos a través de propiedades universales.

Decimos que un morfismo entre anillos locales es local si el ideal maximal del anillo de llegada está encima del ideal maximal del anillo fuente.

Definición 7. *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo local, una henselización de A es una dupla $(\tilde{A}, \iota)$ donde $\tilde{A}$ es un anillo local henseliano e $\iota : A \to \tilde{A}$ es un morfismo local tal que para todo anillo local henseliano B y para todo morfismo local $u : A \to B$, existe un único morfismo local $\tilde{u} : \tilde{A} \to B$ con $u = \tilde{u} \circ i$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "u"'] & \tilde{A} \arrow[d, "\tilde{u}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Está definición de anillo local henseliano no nos garantiza la existencia. Sin embargo, en caso de que exista, la henselización de A es única salvo isomorfismos, pues la definición está dada por una propiedad universal.

Definición 8. *Sea A un anillo, una A-álgebra B es étale si se cumple que:*

- *B es una A-álgebra de presentación finta, es decir, $B \simeq A[X_1, \dots, X_n]/I$, donde I es un ideal finitamente generado.*
- *Para toda A-álgebra C y para todo ideal J con $J^2 = 0$, la aplicación canónica:*

$$Hom_{A-\acute{a}lg}(B, C) \longrightarrow Hom_{A-\acute{a}lg}(B, C/J)$$

es biyectiva ($Hom_{A-\acute{a}lg}(C, B)$ denota el conjunto de morfismos de A-álgebras de A a B).

En lo que queda de sección vamos a probar que existe la henselización de todo anillo local A. Para ello, vamos a probar que es un límite directo (también se denota como colímite o límite inductivo) filtrante.

Dado un functor $F : \Lambda \to \mathcal{C}$, donde Λ es una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria, definimos el límite directo $\varinjlim_{i \in \Lambda} F(i)$ (si no hay riesgo de confusión escribimos solamente $\varinjlim F(i)$) como el representante del functor que envía a todo objeto C de $\mathcal{C}$ al conjunto $\varprojlim Hom_{\mathcal{C}}(F(i), C)$. Este functor no tiene porque ser representable, así que el límite directo, de forma análoga al inverso, no tiene porqué existir.

Podemos escribir el límite directo en función de las propiedades universales. Entonces, el límite de $F : \Lambda \to \mathcal{C}$ es la dupla $(\varinjlim F(i), \{\iota_i\}_{i \in \Lambda})$ tal que los morfismos $\iota_i : F(i) \to \varinjlim F(i)$, que llamaremos inclusiones, forman una familia compatible, es decir, si $\lambda : i \to j$ es un morfismo en Λ entonces el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "F(\lambda)"'] & \varinjlim F(i) \\ F(j) \arrow[ur, "\iota_j"'] & \end{tikzcd}$$

y además si $\{\alpha_i : F(i) \to X\}_{i\in\Lambda}$ es otra familia compatible, existe un único morfismo $\alpha : \varinjlim F(i) \to X$ de manera que, $\alpha_i = \alpha \circ \iota_j$. Gráficamente lo expresamos con el siguiente diagrama conmutativo para todo $\lambda : i \to j$:

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[dd, "F(\lambda)"'] \arrow[dr, "\iota_i"] \arrow[drr, bend left, "\alpha_i"] & & \\
 & \varinjlim F(i) \arrow[r, "\alpha"] & X \\
F(j) \arrow[ur, "\iota_j"] \arrow[urr, bend right, "\alpha_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Los límites directos son la noción dual de los límites inversos, por lo tanto, estos pueden ser escritos en función de conúcleos y coproductos y existen si y solo si existen los conúcleos y los coproductos. Un caso de especial interés es cuando la categoría Λ es filtrante. Esto es, para todo $i, j \in \Lambda$, existe un objeto k y dos morfismos $i \to k$, $j \to k$, y dados dos morfismos paralelos $f, g : i \to j$, entonces existe $h : j \to k$ para algún objeto k de Λ con $h \circ i = h \circ j$. Las categorías filtrantes son una generalización de la categoría parcialmente ordenada y los límites directos de una categoría filtrante a $\mathcal{C}$ se llaman límites directos filtrantes. De manera dual a las familias inversas, podemos considerar los sistemas inductivos o directos $\mathcal{G} = \{C_i, \sigma_{ij} : C_i \to C_j\}_{i,j\in\Lambda}$, por tanto tiene sentido pensar en el límite directo filtrante $\varinjlim C_i$ del sistema inductivo $\mathcal{G}$.

Los límites directos son exactos por la derecha; y, cuando son filtrantes, son exactos. En caso de que existan los límites directos filtrantes, se satisface el siguiente isomorfismo:

$$\varinjlim_{i\in\Lambda} F(i) \simeq \left(\coprod_{i\in\Lambda} F(i)\right) / \sim$$

donde $F(i) \ni x \sim y \in F(j)$ si existe un objeto $k \in \Lambda$ y dos morfismos $f : i \to k$, $g : j \to k$ tal que $F(i)(x) = F(j)(y)$. Nótese que la relación es de equivalencia precisamente porque Λ es filtrante, pues en general, no es transitiva.

Definición 9. *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo local.*

- *Una A-álgebra es localmente étale si es isomorfa a $B_{\mathfrak{p}}$ para alguna A-álgebra étale B con $\mathfrak{p}$ un ideal primo de B encima de $\mathfrak{m}$.*
- *Una A-álgebra es localmente ind-étale si es el límite directo filtrante de A-álgebras localmente étales, donde las inclusiones ι son morfismos locales.*

En general, una A-álgebra localmente étale B no es étale, pues $B_{\mathfrak{p}}$ no tiene porque ser de presentación finita.

Sea A un anillo y $F(X)$ un polinomio mónico con coeficientes en A. Sean $B = A[X]/(F(X))$ y $G(X)$ un polinomio de $A[X]$. Consideramos la imagen de $F'(X)$ en B_G, y si esta es invertible, decimos que B_G es una A-álgebra estándar. En el capítulo V de [8] se demuestra el teorema de estructura local, que expone que toda A-águebra étale es localmente isomorfa a una A-álgebra étale estándar.

Proposición 15. *Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo local. Entonces,* *(i) Existe un conjunto Λ y una familia $\{A_i\}_{i\in\Lambda}$ de A-álgebras localmente étales tal que toda A-álgebra localmente étale B es isomorfa como A-álgebra a un único elemento de la familia $\{A_i\}_{i\in\Lambda}$.*

(ii) Sea $\{A_i\}_{i\in\Lambda}$ la familia del apartado (i), definimos $\Lambda' = \{i \in \Lambda | A_i/\mathfrak{m}_i \simeq A/\mathfrak{m}\}$. Entonces, la relación definida por $i \leq j$ si y solo si existe un morfismo local $\phi_{ij} : A_i \to A_j$, es una relación de orden sobre Λ' que convierte a la categoría asociada a la relación en Λ' filtrante.

Proof. (i) Sea Λ_0 el subconjunto de $A[X] \times Spec(A[X])$ formado por las duplas $(F(X), \mathfrak{p})$, donde $F(X) \in A[X]$ es un polinomio unitario y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de $A[X]$ encima de $\mathfrak{m}$ tal que la derivada $F'(X)$ no pertenece a $\mathfrak{p}$. Si $u = (F(X), \mathfrak{p}) \in \Lambda_0$, definimos $B_u = A[X]/F(X)$ y su localización $A_u = (B_u)_{\mathfrak{p}}$.

Por el teorema de estructura local de [8], toda A-álgebra localmente étale es isomorfa a algúna A-álgebra de la forma $(A[X](G(X)))_{\mathfrak{q}}$, es decir, que el par $v = (G(X), \mathfrak{q})$ es un elemento de Λ_0, así que la A-álgebra localmente étale es igual a A_v para $u = (G(X), \mathfrak{q})$.

Consideramos la relación de equivalencia en Λ_0 dada por: $u \sim v$ si y solo si A_u es una A-álgebra isomorfa a A_v. Consideramos el conjunto $\Delta = \Lambda_0/\sim$. Entoces, para cada clase de equivalencia de Λ_0 existe una única (salvo isomorfismos) A-álgebra localmente étale A_u. Este conjunto Δ satisface las condiciones del apartado (i).

(ii) La relación es claramente reflexiva y transitiva. Vamos a probar que si $i \leq j$ y $j \leq i$ entonces $i = j$. Si tenemos dos morfismos locales $\phi_{ij} : A_i \to A_i$ y $\phi_{ji} : A_j \to A_i$, entonces la composición de los morfismos es local por lo que tenemos los morfismos locales $\phi_{ij} \circ \phi_{ji} : A_i \to A_i$ y $\phi_{ji} \circ \phi_{ij} : A_j \to A_j$. Si reducimos los morfismos módulo los ideales maximales (hay que tener en cuenta que la composición de los morfismos reducidos a los cuerpos residuales es el mismo morfismo que la reducción de la composición de los morfismos locales), entonces tenemos que $\phi_{ij} \circ \phi_{ji}$ induce la identidad en $A_i/\mathfrak{m}_\mathfrak{i}$. Por tanto, se deduce que los cuerpos residuales de A_i y A_j son isomorfos, y por lo tanto, $i = j$.

Por tanto, nos queda por mostrar que Λ' es filtrante. Sean $i, j \in \Lambda'$ y A_i, A_j sus correspondientes localmente étales A-álgebras, por lo tanto por la definicón de las A-álgebras localmente étales, $A_i \simeq (B_i)_{\mathfrak{p}}$ y $A_j \simeq (B_j)_{\mathfrak{q}}$ para A-álgebras étales B_i, B_j e ideales primos $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ encima de $\mathfrak{m}$. Por la definición de Λ', el cuerpo residual de A_i y de A_j es el mismo que el de A, lo denotamos por k. Como consecuencia, tenemos que:

$$(A_i \otimes_A A_j) \otimes_A k \simeq (A_i \otimes_A k) \otimes_k (A_j \otimes_A k) \simeq k \otimes_k k \simeq k$$

Es decir, existe un único ideal primo de $A_i \otimes_A A_j$ encima de $\mathfrak{m}$. Sea A' la localización de $A_i \otimes_A$ en ese mismo ideal primo. Entonces, tenemos dos morfismos locales $A_i \to A'$ y $A_j \to A'$. Como A_i y A_j son las localizaciones de las A-álgebras étales B_i y B_j respectivamente, A' es la localización de la A-álgebra étale $B_i \otimes_A B_j$. Finalmente, por la definición de Λ, $A' \simeq A_k$ para algún $k \in \Lambda$ y $k \in \Lambda'$, así que $i, j \leq k$. Es decir, el conjunto Λ' define una categoría filtrante.

□

Por último, en el teorema 1 del capítulo VII, $\oint 1$ de [8] se prueba que para todo anillo local $(A, \mathfrak{m}, k)$, el límite inductivo filtrante del conjunto Λ' definido en la proposición anterior es la henselización de A. Por tanto, para todo anillo local existe su henselización.

Para finalizar el trabajo, vamos a discutir qué ocurre en el caso donde $(A, \mathfrak{m}, k)$ es noetheriano y local. Consideramos $\hat{A}$ su compleción $\mathfrak{m}-$ádica. Primero, por el lema de Krull, en particular el corolario 4, $\bigcap_{n\geq 0} \mathfrak{m} = 0$, es decir, la topología $\mathfrak{m}$-ádica es separable en A. Por tanto, el morfismo natural $\Psi : A \to \hat{A}$ es inyectivo. Más aún, por el corolario 6, $\widehat{\mathfrak{m}} \simeq \mathfrak{m}\hat{A}$ y $\hat{A}/\widehat{\mathfrak{m}} \simeq A/\mathfrak{m} = k$. Además, en el corolario 7 vimos que la compleción de un anillo noetheriano local es local y noetheriano, por lo que $\widehat{\mathfrak{m}}$ es el ideal maximal de $\hat{A}$ y está encima de $\mathfrak{m}$ para el morfismo canónico $A \to \hat{A}$. Por otra pate, $\hat{A}$ es $\widehat{\mathfrak{m}}-$ádicamente completo, pues $\varprojlim \hat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}^n \simeq \varprojlim A/\mathfrak{m}^n = \hat{A}$. Entonces, por el lema de Hensel, $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}}, k)$ es un anillo local henseliano. De modo que, para satisfacer la propiedad universal, la henselianización de A será un anillo $\tilde{A}$ que contenga a A y esté contenido en $\hat{A}$. Por tanto, tenemos que, la henselianización de un anillo local noetheriano es un anillo $\tilde{A}$ con $A \subseteq \tilde{A} \subseteq \hat{A}$.

Referencias

[1] M. F. Atiyah. *Introduction to commutative algebra / M.F. Atiyah, I.G. MacDonald.* eng. Addison-Wesley series in mathematics ; 361. Reading, Massachusetts [etc: Addison-Wesley, 1969. ISBN: 0201003619.

[2] N. Bourbaki. *Algèbre commutative Chapitres 1 à 7 / by N. Bourbaki.* fre. 2nd ed. 2006. Éléments de mathématique. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 1-281-11540-1.

[3] David Eisenbud. *Commutative algebra : with a view toward algebraic geometry / David Eisenbud.* eng. 1st ed. 1995. Graduate texts in mathematics ; 150. New York, New York: Springer-Verlag, 1995. ISBN: 1-4612-5350-0.

[4] Mercedes Haiech. "Non-complete Completions". In: Mar. 2020, pp. 57–68. ISBN: 978-1-78634-719-0. DOI: `10.1142/9781786347206_0004`.

[5] Masaki. Kashiwara. *Categories and Sheaves by Masaki Kashiwara, Pierre Schapira.* eng. 1st ed. 2006. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, 332. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 3-540-27950-4.

[6] Saunders. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician by Saunders Mac Lane.* eng. 2nd ed. 1978. Graduate Texts in Mathematics, 5. New York, NY: Springer New York, 1978. ISBN: 1-4757-4721-7.

[7] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory / Hideyuki Matsumura ; translated by M. Reid.* eng. Cambridge studies in advanced mathematics ; 8. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. ISBN: 9781139171762.

[8] Michel. Raynaud. *Anneaux Locaux Henseliens by Michel Raynaud.* fre. 1st ed. 1970. Lecture Notes in Mathematics, 169. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1970. ISBN: 3-540-36406-4.

[9] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra / Charles A. Weibel.* eng. Cambridge studies in advanced mathematics ; 38. Cambridge [etc: Cambridge University Press, 1997. ISBN: 0521559871.

[10] Amnon Yekutieli. "On Flatness and Completion for Infinitely Generated Modules over Noetherian Rings". In: *Communications in Algebra* 39 (Feb. 2009).