El teorema del complementario de Wilkie para la función exponencial

Autoria: Caio Henrique Leonel Laurenti

Tutor: Prof. Fernando Sanz Sánchez

Índice

1. Introdución

El objetivo deste trabajo es estudiar en detalles la demostración de un resultado conocido por Teorema de Wilkie, publicado en [Wil96]. Para explicar cual es este resultado, empezamos con explicando el Teorema de Tarski-Seidenberg. Un conjunto semialgebraico es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que puede ser expreso como combinación booleana finita de conjuntos de la forma $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : p(\overline{x}) > 0\}$ o de la fórma $\{\overline{x} \in \mathbb{R} : q(\overline{x}) = 0\}$, donde $p, q \in \mathbb{R}[T_1, \ldots, T_n]$. El teorema de Tarski-Seidenberg es el resultado de que si consideramos el image de un conjunto por la proyección $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ en las primeras $n-1$ coordenadas, este image es también un conjunto semialgebraico. Una formulación equivalente es que la teoría $\overline{T}$ de los reales como cuerpo ordenado, i.e., la coleción de todos los enunciados verdaderos en $\mathbb{R}$ que pueden ser expresos por los símbolos $\forall, \exists, +, -, =, <, \cdot$ (en su interpretación usual), tiene una propiedad conocida por eliminación de cuantificadores. Basicamente, una teoría tiene eliminación de cuantificadores cuando las propiedades que pueden ser describidas con el lenguaje desta teoría pueden ser expresadas con expresiones sin cuantificadores. Como las propiedades que pueden ser expresas con los símbolos de los cuales hablamos sin utilizar cuantificadores son relaciones polinomiales entre las variables (con coeficientes enteros), vemos que la totalidad de los subconjuntos del $\mathbb{R}^n$ definibles por tales propiedades son los conjuntos semialgebraicos. El Teorema de Wilkie es una respuesta a la pregunta: que ocurre se añadimos el símbolo exp (también en su interpretación usual)? Cuales son los subconjuntos del $\mathbb{R}^n$ que puede ser expresado por una propiedad describida en tal lenguaje?

En resumen, el resultado es que tales subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son los conjuntos de la forma $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \exists y_1, \ldots, y_n p(\overline{x}, \overline{y}) = 0\}$, donde p es un polinomio exponencial - i.e., un elemento de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, \exp(X_1), \ldots, \exp(X_n), Y_1, \ldots, Y_m, \exp(Y_1), \ldots \exp(Y_m)]$. Una medida de lo cuanto una expresión es compleja en la lógica es la cantidad de veces en que, en una expresión lógica, se intercambian los cuantificadores $\forall\exists$. Por ejemplo, una expresión de la forma $\forall\overline{x}\exists y\phi$ es más compleja que una expresión de la forma $\exists\overline{y}\psi$. El teorema de Wilkie nos dice que se añadimos el símbolo exp, todas las propiedades pueden ser describidas por una expresión existencial, lo es el mejor que se puede obtener después de un resultado de eliminiación de cuantificadores.

teorías en que las propiedades son equivalentes a expresiones que tienen solamente cuantificadores existenciales son llamadas de modelo completas, y es un resultado más débil que la eliminación de cuantificadores. Si llamamos de $T_{\exp}$ la teoría de los reales como cuerpo ordenado y añadido el símbolo exp, podemos formular el resultado de modelo completud de la siguiente forma:

Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es semi-EA ("semi-exponential-algebraic") si es combinación booleana finita de conjuntos de la forma $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : p(\overline{x}) > 0\}$ o de la forma $\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : q(\overline{x}) = 0\}$, donde p, q son polinómios exponenciales. Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es llamado de sub-EA si es image de un sobconjunto semi-EA por una proyección $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en las m-primeras coordinadas. El teorema de modelo completud de $T_{\exp}$ puede ser expreso como el resultado de que el complementario de un conjunto sub-EA es también sub-EA.

En el artículo [Wil96], Wilkie empeza con un resultado de la modelo completud de la teoría de los reales con símbolos de funciones para una cadena de funciones Pfaffianas restringidas. algúns resultados desta parte son utilizados para demonstrar el teorema que aqui llamamos de Teorema de Wilkie (o sea, el resultado que hablamos arriba). Utilizamos algúns resultados de la primera parte del artículo, pero cuya demostración esta fuera del alcance deste trabajo.

La idea para este trabajo viene de la asignatura de Lógica y Geometria, donde el Teorema de Wilkie fue mencionado. Creo que la demostración del Teorema es demasiado complicada para presentación en una asignatura, por exigir herramientas avanzadas de la teoría de modelos (algunas de las cuales son utilizadas como "cajas negras" en este trabajo.

Agradezco a la Facultad de Ciencias de la Universidade de Valladolid, al coordinador del masters Javier Sanz, a mi tutor de masters Fernando Sanz y al programa IBEROAMERICA+ASIA por toda ayuda que me han facilitado al curso deste trabajo.

2. Un poco de teoría de modelos

Empezamos con una pequeña introducción a la teoria de modelos. La teoria de modelos es el campo de la lógica matemática que en que se estúdia la semántica de los lenguajes de la lógica. La idea es que, utilizando teoría de conjuntos, definimos el significado de los símbolos de un lenguaje formal. Con teoría de modelos, podemos probar resultados sobre lo que se puede expresar con un lenguaje matemático específico.

2.1. El lenguaje de la lógica clásica de primer orden

Sea S un conjunto no vacío (que llamaremos de alfabeto), una S-expresión es una n-upla $(s_1, \ldots, s_n)$ - por conveniencia, denotaremos expresiones sobre un alfabeto S por $s_1 \ldots s_n$.

Un lenguaje de primer orden tiene como alfabeto la union de dos conjuntos. El primer llamamos de símbolos lógicos, y es compuesto por símbolos comunes a todos lenguajes de primer orden - estos son

$$(,), \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \forall, \exists, =$$

y también un conjunto infinito numerable $\mathrm{Var} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, cuyos elemento llamamos de variables.

El segundo conjunto L, llamado conjunto de símbolos no lógicos, es el que especifica el lenguaje de primer orden que queremos utilizar. Es compuesto por:

- símbolos de constante. El subconjunto de L de los símbolos de constante denotase por C_L;
- símbolos de predicado. De manera similar, el conjunto de los símbolos de predicado es P_L;
- símbolos de función. El conjunto de símbolos de función es F_L.

Cada símbolo de predicado $R \in L$ viene acompañado de un número entero $n_R \geq 0$ llamado aridad de R. Lo mismo ocurre para los símbolos de función: a cada símbolo de función $f \in L$ es asociado un entero $n_f \geq 0$, también llamado de aridad.

Como cada lenguaje de primer orden está caracterizado por su conjunto de símbolos no lógicos, por simplicidad, identificaremos el primero por el segundo.

Ejemplo 2.1.1. El lenguaje de los cuerpos ordenados es $\overline{L} = \{0, 1, +, \cdot, <\}$, donde $0, 1$ son símbolos de constante, $+, \cdot$ son símbolos de función binários y $<$ es símbolo de predicado binário.

Ejemplo 2.1.2. El lengaje de la teoría de conjuntos tiene es $L_{\mathrm{Set}} = \{\in\}$, donde $\in$ es un símbolo de predicado binário.

Definición 2.1.1. Sea L un lenguaje de primer orden, con alfabeto A_L conforme discutido arriba. Los L-términos (ó términos, por brevidad) son A_L-expresiones definidas recursivamente por:

- Variables y símbolos de constantes son L-términos;
- Si f es símbolo de función n-ário, y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.

En el caso del lenguaje $\overline{L}$ en el Ejemplo 2.1.1, suele denotarse $+(t_1, t_2)$ por $t_1 + t_2$, y lo mismo para $\cdot$.

Una manera de visualizar este conjunto es imaginar que empezamos con $T_0 = \mathrm{Var} \cup C_L$, y definimos

$$T_{n+1} = T_n \cup \{f(t_1, \ldots, t_{n_f}) : f \in F_L, t_i \in T_n, i = 1, \ldots, n_f\}$$

Sea t un L-término, lo denotaremos por $t(x_1, \ldots, x_n)$ si las variables que ocurren en t están en $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Así, los L-términos son los elementos de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$

Un resultado esencial y bien conocido es

Teorema 2.1.1 (Legibilibad única de términos)**.** *Sean $f(t_1, \ldots, t_{n_f})$, $g(t'_1, \ldots, t'_{n_g})$ L-términos, con $f, g \in F_L$ y $f(t_1, \ldots, t_{n_f}) = g(t'_1, \ldots, t'_{n_g})$, entonces $n_f = n_g$, $f = g$ y $t_i = t'_i$ para cada $i = 1, \ldots, n_f$.*

Demostración. Antes, vamos probar la siguiente afirmación: ningún segmento inicial própio de un término es un término. Vamos utilizar indución en la complejidad del término. Si t es una constante o variable, el único segmento inicial propio de t es la expresión vacía, que no es un término. Ahora asuma que t tiene la forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, y que para todo término de longitud menor que la de t, es verdad que no hay segmento inicial própio que sea un término (hipotesis de indución). Suponga que existe segmento inicial própio de t que sea un término t'. Entonces t' tiene la forma $f(t'_1, \ldots, t'_n)$. Como t'_1 no puede ser un segmento inicial de t_1, ni reciprocamente, por la hipotesis de indución tenemos que $t_1 = t'_1$. Aplicamos el mismo argumento de forma recursiva y concluimos que $t_i = t'_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Ahora asuma que $f(t_1, \ldots, t_{n_f}) = g(t'_1, \ldots, t'_{n_g})$. Evidentemente, $f = g$, donde $n_f = n_g$ y, por lo tanto, $t_1, \ldots, t_{n_f} = t'_1, \ldots, t'_{n_f}$. Por la afirmación en la primera parte desta demostración, tenemos que t_1 debe ter la misma longitud de t'_1, donde sigue que estos son los mismos términos. Continuando recursivamente, concluimos que $t_2 = t'_2, \ldots, t_{n_f} = t'_{n_f}$ □

Ahora definimos las fórmulas de un lenguaje de primer orden.

Definición 2.1.2. Sea L un lenguaje de primer orden, con alfabeto A_L. Las L-fórmulas (ó fórmulas) son las A_L-expresiones defninidas por:

- Si t_1, t_2 son términos, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula;
- Si R es un símbolo de predicado n-ário y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $Rt_1 \cdots t_n$ es una fórmula. Las fórmulas deste tipo, juntamente con las fórmulas del item anterior, son llamadas de fórmulas atómicas;
- Si ϕ es una fórmula, entonces $(\neg\phi)$ también lo es;
- Si ϕ, ψ son fórmulas, entonces $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$ y $(\phi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas;
- Si ϕ es una fórmula y x es una variable, entonces $(\forall x\phi)$ y $(\exists x\phi)$ son fórmulas.

Siempre que no haya problemas, omitiremos los parentesis para facilitar el entendimiento de las fórmulas, de acuerdo con el significado implicito de los símbolos utilizados. Además, si consideramos las siguiente equivalencias entre fórmulas, válidas en la lógica clásica (solo podemos probar efectivamente su validez después de definir la noción de consecuencia lógica usando estructuras):

- $(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\phi \rightarrow \neg\psi)$
- $(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi)$
- $(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$
- $\forall x\phi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\phi$

podemos asumir que nuestro lenguaje tiene solamente un conectivo lógico binario (por ejemplo, $\rightarrow$) y uno cuantificador (por ejemplo, $\exists$), además del símbolo de negación, y asumimos que los otros se definen a partir de las abreviaturas arriba. Esa práica torna las demostraciones por indución en la complejidad de las fórmulas más sencillas. Ahora vamos probar el teorema de legibilidad única para fórmulas.

Teorema 2.1.2. *Para cada fórmula ϕ, vale exactamente una de las opciones siguientes:*

I) *Existen términos únicos t_1, t_2 tales que ϕ es $t_1 = t_2$;*

II) *Existe un único símbolo de predicado P, con aridad n, y únicos términos $t_1, \ldots, t_n$ tales que ϕ es $Pt_1 \cdots t_n$;*

III) *Existe una única fórmula ψ tal que ϕ es $(\neg\psi)$;*

IV) *Existe un único conectivo binario $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, y únicas fórmulas ψ, θ tal que ϕ es $(\psi * \theta)$;*

V) *Existe un único cuantificador $Q \in \{\forall, \exists\}$, una única variable x y una única fórmula ψ tal que ϕ es $(Qx\psi)$*

Demostración. Empezamos por probar la siguiente afirmación: ningún segmento inicial propio de una fórmula es una fórmula. El caso para fórmulas atómicas sigue directamente del Teorema 2.1.1. Ahora sea ϕ una fórmula y suponga que el resultado es verdadero para cada fórmula de longitud menor que la longitud de ϕ. Si ϕ es $(\neg\psi)$, un segmento inicial que es una fórmula de ϕ debe tener la forma $(\neg\theta)$, donde por la hipotesis de indución sigue que θ debe igual a ψ, y el segmento no es proprio, por tanto. El caso en que ϕ es $(Qx\psi)$, con $Q \in \{\exists, \forall\}$ es análogo. Ahora asuma que ϕ es $(\psi * \theta)$, con $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, y suponga que un segmento inicial de ϕ es una fórmula χ. Entonces χ debe ter forma $(\psi' *' \theta')$, con $*' \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Así, la hipotesis de indución implica que $\psi = \psi'$, $* = *'$ y $\theta = \theta'$, donde sigue que χ no es segmento inicial proprio.

Probamos ahorael teorema. Para mostrar que ϕ solo puede escribirse de manerae única en alguna de las formas del enunciado, nos fijamos en el primer símbolo despues de (en cada situación. La única forma de ϕ cuya unicidad no es inmediata es el caso en que ϕ tiene la forma $(\psi * \theta)$ con $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Evidentemente, ϕ no puede también tener forma $(Qx\psi')$, Q cuantificador, o $(\neg\psi')$, pues despues del primero (debe aparecer otro (, salvo si ψ es atómica. Así, asuma que ϕ también es $(\psi' *' \theta')$, con $*' \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Entonces la primera afirmación en esta demostración implica que $\psi = \psi'$, $* = *'$ y $\theta = \theta'$, donde sigue el teorema. $\square$

Si un cuantificador y una variable $\forall x, \exists x$ ocurren en una fórmula ϕ, el escopo del cuantificador es la fórmula ψ encerrada por el primero parentesis que ocurre después del cuantificador. Si x ocurre en ψ, y también inmediatamente desupés del cuantificador, se dice que x es acotada por tal cuantificador. Una variable es libre se no ocurre en el alcance de ningún quantificador. Denotaremos ϕ por $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ si las variables libres de ϕ están en el conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Una fórmula sin variables libres es llamada de L-enunciado (ó solamente enunciado).

2.2. Estructuras

Vamos a definir ahora las estructuras para un lenguaje de primer orden L. La idea es que una estructura es un "universo" donde interpretamos el significado de los componentes de un lenguaje - una semántica formal para el lenguaje que estamos considerando.

En una estructura, los símbolos de constante son interpretados como nombres de elementos del "universo" considerado. símbolos de predicado denotan relaciones en este universo, y símbolos de función, funciones. Eso se puede hacer más preciso conforme la siguiente definición.

Definición 2.2.1. Sea L un lenguaje de primer orden. Una L-estructura $\mathcal{A}$ es definida por:

- Un conjunto no vacío A, llamado dominio de $\mathcal{A}$;
- Para cada símbolo de constante $c \in C_L$, un elemento $c^{\mathcal{A}} \in A$;
- Para cada símbolo de predicado $R \in P_L$ con aridad n, una subconjunto $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$;
- Para cada símbolo de función $f \in F_L$ con aridad n, una función $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$.

Observación 2.2.1. Cuando la interpretación de los símblos no lógicos queda implicita, denotaremos una estructura por su dominio.

Ejemplo 2.2.1. Considere en lenguaje $\overline{L}$ de los cuerpos ordenados. Denotamos por $\overline{\mathbb{R}}$ la estructura donde $+^{\overline{\mathbb{R}}} = +_{\mathbb{R}}$, $\cdot^{\overline{\mathbb{R}}} = \cdot_{\mathbb{R}}$, $0^{\overline{\mathbb{R}}} = 0_{\mathbb{R}}$, $1^{\overline{\mathbb{R}}} = 1_{\mathbb{R}}$ y $<^{\overline{\mathbb{R}}}=<_{\mathbb{R}}$ - ó sea, la interpretación usual de estos símbolos.

Ejemplo 2.2.2. No es necesário que la interpretación de los símbolos de un lenguaje tenga relación con el uso que se hace de tales símbolos en las matemáticas. Por ejemplo, si tomamos la L_{Set}-estructura $\mathcal{A}$ con dominio $\{1\}$ y $\in^{\mathcal{A}} -\{(1,1)\}$, tenemos una estructura en que la interpretación de $\in$ no corresponde a noción de pertenecimiento de la teoría de conjuntos.

Así, ya sabemos como interpretar símbolos no logicos del legaje para una estructura. Ahora vamos definir la interpretación de L-términos, de forma recursiva.

Definición 2.2.2. Una evaluación es una función $\nu : \mathrm{Var} \to A$.

Definición 2.2.3. Sea L un lenguaje de primer orden, $\mathcal{A}$ una L-estructura, t un L-término y ν una evaluación, definimos la interpretación de $t^{\mathcal{A}}[\nu]$ de t en $\mathcal{A}$ con respecto a ν por recurrencia como:

- Si t es un símbolo de constante c, entonces $t^{\mathcal{A}}[\nu]$ es $c^{\mathcal{A}}$;
- Si t es la variable x_i, entonces $t^{\mathcal{A}}[\nu]$ es $\nu(x_i)$;
- Si t es de la forma $g(t_1, \ldots, t_n)$, donde $g \in F_L$ tiene aridad n y t_i, $i = 1, \ldots, n$, son términos, entonces $t^{\mathcal{A}}[\nu]$ es $g^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[\nu], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[\nu])$.

Note que, por la definición arriba, si $t(x_1, \ldots, x_n)$ es un término y ν, μ son evaluaciones tales que $a_i := \nu(x_i) = \mu(x_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces $t^{\mathcal{A}}[\nu] = t^{\mathcal{A}}[\mu]$.

Así que la interpretación de un término depende solo de como interpretamos sus variables. Por lo tanto, dados $a_1, \ldots, a_n \in A$ y un término $t(x_1, \ldots, x_n)$, definimos $t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n]$ como la interpretación de t con respecto a cualquier evaluación f tal que $\nu(x_i) = a_i$.

Observación 2.2.2. A partir de ahora, cuando no hay ambiguedad, denotaremos $(x_1, \ldots, x_n)$, para cualquier n, por $\overline{x}$, de forma que utilizaremos notaciones como $t(\overline{x})$ ó $t^{\mathcal{A}}[\overline{a}]$. En esta convención, $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ denota (a no ser que el contexto deje claro que vale cosa diferente) $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$.

Ahora vamos definir la noción de verdad en una estructura.

Definición 2.2.4. Sea $\mathcal{A}$ una L-estructura, ν una evaluación y $\phi(\overline{x})$ una L-fórmula. Vamos definir por recurrencia $\mathcal{A} \vDash \phi[\nu]$ (leer como ϕ es verdadera en $\mathcal{A}$ con respeto a ν). Una observación importante es que, abajo, ψ, θ denotan fórmulas y $x, x_i (i \in \mathbb{N}), y$ denotan metavariables (variables en lengua natural con valores en Var).

- Si ϕ es $t_1 = t_2$, entonces $\mathcal{A} \vDash \phi[\nu]$ si, y solo si, $t_1^{\mathcal{A}}[\nu] = t_2^{\mathcal{A}}[\nu]$;
- Si ϕ es $Rt_1 \cdots t_n$, $\mathcal{A} \vDash \phi[\nu]$ si, y solo si, $(t_1^{\mathcal{A}}[\nu], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[\nu]) \in R^{\mathcal{A}}$;
- Si ϕ es $(\neg\psi)$, $\mathcal{A} \vDash \phi[\nu]$ si, y solo si, $\mathcal{A} \nvDash \psi[\nu]$;
- Si ϕ es $(\theta \wedge \psi)$, $\mathcal{A} \vDash \phi[\nu]$ si, y solo si, $\mathcal{A} \vDash \theta[\nu]$ y $\mathcal{A} \vDash \psi[\nu]$;
- Si ϕ es $(\theta \vee \psi)$, $\mathcal{A} \vDash \phi[\nu]$ si, y solo si, $\mathcal{A} \vDash \theta[\nu]$ ó $\mathcal{A} \vDash \psi[\nu]$;
- Si ϕ es $(\theta \to \psi)$, $\mathcal{A} \vDash \phi[\nu]$ si, y solo si, $\mathcal{A} \nvDash \theta[\nu]$ ó $\mathcal{A} \vDash \psi[\nu]$;
- Si ϕ es $(\theta \leftrightarrow \psi)$, $\mathcal{A} \vDash \phi[\nu]$ si, y solo si, vale que $\mathcal{A} \vDash \theta[\nu]$ y $\mathcal{A} \vDash \psi[\nu]$ ó vale que $\mathcal{A} \nvDash \theta[\nu]$ y $\mathcal{A} \nvDash \psi[\nu]$;
- Si ϕ es $\exists y \psi(y, \overline{x})$, entonces $\mathcal{A} \vDash \phi[\nu]$ si, y solo si, existe evaluación μ con $\nu(x_i) = \mu(x_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$, tal que $\mathcal{A} \vDash \psi[\mu]$;
- Si ϕ es $\forall y \psi(y, \overline{x})$, $\mathcal{A} \vDash \phi[\nu]$ si, y solo si, en toda evaluación μ con $\nu(x_i) = \mu(x_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene $\mathcal{A} \vDash \psi[\mu]$.

Una observación importante es que, abajo, ψ, θ denotan fórmulas y $x, x_i (i \in \mathbb{N}), y$

denotan elementos de Var.

Observación 2.2.3. A partir de ahora, al hacer una definición ó una prueba utilizando la forma recursiva para las L-fórmulas, haremos solamente la parte del operador lógico binário $\wedge$, dada la interdefinibilidad de los otros en la semántica de la lógica clásica.

Así como en el caso de los términos, si tenemos una fórmula $\phi(\overline{x})$ y dos evaluaciones f, g, con $a_i := f(x_i) = g(x_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces $\mathcal{A} \vDash \phi[f]$ si, y solo si, $\mathcal{A} \vDash \phi[f]$ - y en este caso se escribe $\mathcal{A} \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n]$ (ó $\mathcal{A} \vDash \phi[\overline{a}]$). En particular, si ϕ es un enunciado, su valor de verdad en $\mathcal{A}$ no depende de evaluaciones, y en este caso escribimos $\mathcal{A} \vDash \phi$ si $\mathcal{A} \vDash \phi[f]$ para alguna (y, así, para todas) evaluación f.

Dada una L-estructura $\mathcal{A}$, otra manera posible de definir el valor verdad de fórmulas es añadir al lenguaje L un conjunto de símbolos de constante $\{c_a : a \in A\}$, formando un nuevo lenguaje $L_{\mathcal{A}}$, y definir una estructura $(\mathcal{A}, \{c_a\}_{a \in A})$, donde $c_a^{(\mathcal{A}, \{c_a\}_{a \in A})} = a$. Así, definimos $\mathcal{A} \vDash \phi[\overline{a}]$ si, y solo si, $(\mathcal{A}, \{c_a\}_{a \in A}) \vDash \phi(\overline{c_a})$, donde la última es el $L_{\mathcal{A}}$-enunciado obtenido por substituir cada ocurrencia de x_i por c_{a_i}. Además, se tiene que $\mathcal{A} \vDash \forall y \phi(y, \overline{x})[\overline{a}]$ si, y solo si, para cada $a \in A$, $(\mathcal{A}, \{c_a\}_{a \in A}) \vDash \phi(c, \overline{x})[\overline{a}]$ - y analogamente para el cuantificador $\exists$.

2.3. Propiedades de estructuras

Primero definimos lo que es una subestructura de una dada estructura.

Definición 2.3.1. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ L-estructuras, con dominios A, B respectivamente. Decimos que $\mathcal{B}$ es subestructura de $\mathcal{A}$ (se escribe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$) si cumple:

- $B \subseteq A$;
- Para cada $c \in C_L$, $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}}$;
- Para cada $R \in P_L$ con aridad n, $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^n$;
- Para cada $f \in F_L$ con aridad n, B es cerrado por $f^{\mathcal{A}}$ y $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}}|_{B^n}$.

Ahora definimos lo que son isomorfismos entre L-estructuras.

Definición 2.3.2. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ L-estructuras, con dominios A, B respectivamente. Un isomorfismo entre $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ es una aplicación biyectiva $i : A \to B$ que satisface:

- Para cada símbolo de constante c, $i(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$;
- Para cada símbolo de predicado R con aridade n,

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (i(a_1), \ldots, i(a_n)) \in R^{\mathcal{B}}$$

- Para cada símbolo de función f con aridad n, la función i çonmutaçon la interpretación de f, i.e., $i(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(i(a_1), \ldots, i(a_n))$.

Si tenemos dos L-estructuras $\mathcal{A}.\mathcal{B}$, un isomorfismo $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y una evaluación ν en $\mathcal{A}$, entonces para cada fórmula ϕ, $\mathcal{A} \vDash \phi[\nu]$ si, y solo si, $\mathcal{B} \vDash \phi[i \circ \nu]$. En particular, los mismos enunciados que son válidos en $\mathcal{A}$ son válidos en $\mathcal{B}$, y reciprocamente.

Si tenemos una función inyectiva tal que se cumplen las condiciones arriba, esta función es llamada de imersión de estructuras.

Dadas dos estructuras $\mathcal{A}.\mathcal{B}$ con dominios $A \subseteq B$, respectivamente, si la inclusión $i : A \to B$ es una imersión, entonces $\mathcal{A}$ es subestructura de $\mathcal{B}$. Equivalentemente, es decir que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ tienen las mismas interpretaciones de las constantes, A es cerrado por los símbolos de función, cuyas interpretaciones son las restriciones a $\mathcal{A}$ y que las interpretaciones de los predicados son la restrición de las relaciones correspondente a A.

2.4. Subestructuras Elementales

Ahora definimos lo que son subestructuras elementales.

Definición 2.4.1. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ L-estructuras, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{A}$ es subestructura elemental de $\mathcal{B}$ (notación: $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$) si, y solo si, para cada fórmula $\phi(\overline{x})$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\mathcal{A} \vDash \phi[\overline{a}]$ si, y solo si, $\mathcal{B} \vDash \phi[\overline{a}]$.

Sean $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ estructuras. Decimos que una fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es absoluta (entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$) si para cada $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\mathcal{A} \vDash \phi[\overline{a}]$ si, y solo si, $\mathcal{B} \vDash \phi[\overline{a}]$. Claramente, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ si, y solo si, toda fórmula es absoluta. Abajo tenemos un test para saber si una dada subestructura es elemental.

Lema 2.4.1 (Test de Tarski-Vaught)**.** *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ L-estructuras (dominios A, B, respectivamente), con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ si, y solo si, para cada fórmula $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ y $a_1, \ldots, a_n$, vale que: $(*)$ si existe $b \in B$ tal que $\mathcal{B} \vDash \phi[b, a_1, \ldots, a_n]$, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathcal{B} \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$.*

Demostración. Si $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ entonces $\mathcal{B} \vDash \exists x \phi[a_1, \ldots, a_n]$ implica que $\mathcal{A} \vDash \exists x \phi[a_1, \ldots, a_n]$, o sea, para algún $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$, donde $\mathcal{B} \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$.

Ahora asuma $(*)$. Como todas las fórmulas atómicas son absolutas, y la clase de fórmulas absolutas es cerrada por disyunción, conjunción y negación, es suficiente (utilizando indución en la complejidad de las fórmulas) probar que: dada una fórmula absoluta $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$, entonces $\exists x \phi(y_1, \ldots, y_n)$ es absoluta. Sean $a_1, \ldots, a_n$. Si $\mathcal{A} \vDash \exists x \phi[\overline{a}]$, entonces existe $a \in A$ con $\mathcal{A} \vDash \phi[a, \overline{a}]$ y así $\mathcal{B} \vDash \phi[a, \overline{a}]$ (pues ϕ es absoluta), donde $\mathcal{B} \vDash \exists x \phi[\overline{a}]$. Por otro lado, si $\mathcal{B} \vDash \exists x \phi[\overline{a}]$, entonces, por $(*)$, existe $a \in A$ con $\mathcal{B} \vDash \phi[a, \overline{a}]$, y sigue que $\mathcal{A} \vDash \phi[a, \overline{a}]$ y, por lo tanto, $\mathcal{A} \vDash \exists x \phi[\overline{a}]$. $\square$

Abajo hay una generalización de subestructura elemental.

Definición 2.4.2. Dadas L-estructuras $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Entonces $j : A \to B$ es una imersión elemental si es un isomorphismo sobre una substructura elemental de $\mathcal{B}$. En otras palabras, si para cada L-fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, vale que

$$\mathcal{A} \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \vDash \phi[j(a_1), \ldots, j(a_n)]$$

Evidentemente, $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ si, y solo si, la inclusión $A \hookrightarrow B$ es una imersión elemental.

Definición 2.4.3. Sea $(I, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces $(I, \leq)$ es dirigido si para cada $i, j \in I$ existe $k \in I$ con $i, j \leq k$.

Una familia $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ juntamente con una familia $(e_{ij})_{i,j \in I, i \leq j}$ es un sistema dirigido elemental si para cada $i, j \in I, i \leq j$, e_{ij} es una imersión elemental de $\mathcal{A}_i$ en $\mathcal{A}_j$ tal que, siempre que $i \leq j \leq k$, $e_{jk} \circ e_{ij} = e_{ik}$.

Si $\mathcal{E} = ((\mathcal{A}_{i\in I}), (e_{ij})_{i,j\in I, i\leq j})$ es un sistema dirigido elemental, una L-estructura $\mathcal{A}$ juntamente con una familia de imersiones elementales $(e_i : A_i \to A)_{i\in I}$ es un limite para $\mathcal{E}$ si para cada $i \leq j$, $e_i = e_j \circ e_{ij}$ y además $A = \{e_i(a) : i \in I, a \in A_i\}$.

El próximo teorema essencialmente caracteriza los limites de sistemas dirigidos elementales como la "unión" de los A_i, modulo los e_{ij}, que pueden ser interpretados como inclusiones de subestructuras elementales.

Teorema 2.4.2. *Todo sistema elemental dirigido $\mathcal{E} = ((\mathcal{A})_{i\in I}, (e_{ij})_{i,j\in I, i\leq j})$ tiene un limite $\mathcal{A}$.*

Demostración. Defina $A = \bigsqcup_i A_i / \sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia $(a, i) \sim (b, j)$ si, y solo si, existe $k \geq i, j$ con $e_{ik}(a) = e_{jk}(b)$. Es inmediato que $\sim$ es reflexiva y simétrica, entonces vamos probar ahora que $\sim$ es transitiva.

Suponga $(a, i) \sim (b, j)$ y $(b, j) \sim (c, k)$. Entonces existen l, m con $i, j \leq l$, $j, k \leq m$ tales que $e_{il}(a) = e_{jl}(b)$ Y $e_{jm}(b) = e_{km}(c)$. Sea $n \geq l, m$. Entonces

$$e_{in}(a) = e_{ln}(e_{il}(a)) = e_{ln}(e_{jl}(b)) = e_{jn}(b) = e_{mn}(e_{jm}(b)) = e_{mn}(e_{km}(c)) = e_{kn}(c)$$

donde sigue la transitividad de $\sim$. Ahora defina para cada $i \in I$, $a \in A_i$, $e_i(a)$ como la clase de equivalencia de (a, i) en A - que denotamos por $[a, i]$. Es claro que $e_i = e_j \circ e_{ij}$ y que $A = \{e_i(a) : i \in I, a \in A_i\}$.

Ahora vamos definir la interpretación de los símbolos de L en A, así que vamos definir una estructura $\mathcal{A}$ con dominio A. Para símbolos de constante, note que se $k \geq i, j$, entonces $e_{ik}(c^{\mathcal{A}_i}) = c^{\mathcal{A}_k} = e_{jk}(c^{\mathcal{A}_j})$. Así, podemos definir $c^{\mathcal{A}}$ como la clase de equivalencia de $c^{\mathcal{A}_i}$ para algún i arbitrario, y es bien definido pues tenemos que para cualesquiera $i, j \in I$, $c^{\mathcal{A}_i} \sim c^{\mathcal{A}_j}$.

Ahora sea R un símbolo de predicado n-ario y $[a_1, i_1], \ldots, [a_n, i_n] \in A$. Tome $j \geq i_1, \ldots, i_n$. Definimos $R^{\mathcal{A}}$ por

$$([a_1, i_1], \ldots, [a_n, i_n]) \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (e_{i_1 j}(a_1), \ldots, e_{i_n j}(a_n)) \in R^{\mathcal{A}_j}$$

Es fácil, todavia un poco tedioso, verificar que esta relación está bien definida.

Por fín, sea f un símbolo de función n-ario y $[a_1, i_1], \ldots, [a_n, i_n] \in A$. Sea $j \geq i_1, \ldots, i_n$. Definimos

$$f^{\mathcal{A}}([a_1, i_1], \ldots, [a_n, i_n]) = [f^{\mathcal{A}_j}(e_{i_1 j}(a_1), \ldots, e_{i_n j}(a_n)), j]$$

una vez más, dejamos a la lectora que verifique que está bien definido.

Queda ahora por probar que los morfismos e_j son imersiones elementales de $\mathcal{A}_i$ en $\mathcal{A}$. Vamos demostrar por indución en la complejidad de las fórmulas el siguiente hecho: sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula, entonces ϕ tiene la siguiente propiedad $(**)$:

para cada $i \in I$, $a_1, \ldots, a_n \in A_i$, vale

$$\mathcal{A} \vDash \phi[[a_1, i], \ldots, [a_n, i]] \Leftrightarrow \mathcal{A}_i \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n]$$

- Vamos empezar observando el siguiente hecho: si $t(x_1, \ldots, x_n)$ es un L-término, $a_1, \ldots, a_n \in A_i$, entonces $t^{\mathcal{A}}[[a_1, i], \ldots, [a_n, i]] = [t^{\mathcal{A}_i}[a_1, \ldots, a_n], i]$. Eso sigue directamente de la definición de la interpretación de los símbolos de función en $\mathcal{A}$. Así, note que para cada fórmula ϕ de forma $t_1 = t_2(x_1, \ldots, x_n)$, $t_1^{\mathcal{A}_i}[a_1, \ldots, a_n] = t_2^{\mathcal{A}_i}[a_1, \ldots, a_n]$ si, y solo si, vale que $t_1^{\mathcal{A}}[[a_1, i], \ldots, [a_n, i]] = t_2^{\mathcal{A}}[[a_1, i], \ldots, [a_n, i]]$. El caso para fórmulas de la forma $Rt_1 \cdots t_n$ es análogo. Eso prueba el caso para fórmulas atómicas;

- Asuma que el resultado $(**)$ vale para ϕ, ψ. Entonces es inmediato verificar que vale para $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi)$ y $(\phi \rightarrow \psi)$. Así, queda por probar apenas el caso existencial;

- Asuma que el resultado $(**)$ vale para $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$. Vamos probar que también es verdad para $\exists x \phi(y_1, \ldots, y_n)$. Sean $a_1, \ldots, a_n \in A_i$. Entonces si $\mathcal{A}_i \vDash \exists x[a_1, \ldots, a_n]$, existe $b \in A_i$ con $\mathcal{A}_i \vDash \phi[b, a_1, \ldots, a_n]$, lo que implica, por la hipótese de indución, que $\mathcal{A} \vDash \phi[[b, i], [a_1, i], \ldots, [a_n, i]]$ - y así tenemos que$\mathcal{A} \vDash \exists x \phi[[a_1, i], \ldots, [a_n, i]]$. Por otro lado, asuma que es verdad que $\mathcal{A} \vDash \exists x \phi[[a_1, i], \ldots, [a_n, i]]$. Entonces existe $j \in I$, $b \in A_j$ tal que vale el hecho $\mathcal{A} \vDash \phi[[b, j], [a_1, i], \ldots, [a_n, i]]$. Sea $k \geq i, j$. Por la hipóteses de indución sigue que
$$\mathcal{A}_k \vDash \phi[e_{jk}(b), e_{ik}(a_1), \ldots, e_{ik}(a_n)]$$

y, por lo tanto,

$$\mathcal{A}_k \models \exists x\phi[e_{ik}(a_1), \ldots, e_{ik}(a_n)]$$

como e_{ik} es una imersión elemental, sigue que

$$\mathcal{A}_i \models \exists x\phi[a_1, \ldots, a_n]$$

y así el resultado sigue.

Eso concluye la demostración. $\square$

Corolário 2.4.3 (Teorema de la Cadena Elemental de Tarski)**.** *Sea* $(I, \leq)$ *un conjunto linealmente ordenado y* $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ *una familia de* L*-estructuras que satisface* $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$ *siempre que* $i \leq j$*. Sea* $A = \bigcup_i A_i$ *y defina una* L*-estructura* $\mathcal{A}$ *con dominio* A *de la manera natural (para cada* $f \in F_L$*,* $f^{\mathcal{A}} = \bigcup_i f^{\mathcal{A}_i}$ *y lo mismo para los símbolos de predicado). Entonces* $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}$*.*

Demostración. Basta considerar el límite del sistema dirigido elemental que definimos por $\mathcal{E} = ((\mathcal{A}_{i \in I}, (e_{ij})_{i \leq j})$ donde los e_{ij} son las inclusiones de $A_i \hookrightarrow A_j$. $\square$

2.5. Teorías en Lenguajes de Primer Orden y Modelos

Definición 2.5.1. Una teoría en un lenguaje L es un conjunto T de L-enunciados. Una L-estructura $\mathcal{M}$ es un modelo para la teoría T si, y solo si, $\mathcal{M} \models \phi$ para cada $\phi \in T$. Sea ϕ un enunciado. Sea $\mathcal{A}$ una L-estructura, la teoría de $\mathcal{A}$ es $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\phi : \phi \text{ es un enunciado y } \mathcal{A} \models \phi\}$.

Definición 2.5.2. Un conjunto $X \subseteq A^n$ es definible con parámetros en $\mathcal{A}$ si existe $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ y $b_1, \ldots, b_m \in A$ con $X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n : \mathcal{A} \models \phi[\overline{a}, \overline{b}]$. Si $m = 0$, decimos que A es simplemente definible. Una función $f : A^n \to A^m$ es definible (con parámetros) si su grafo $\Gamma(f) \subseteq A^{n+m}$ es definible (con parámetros).

Sea L un lenguaje de primer orden, $\mathcal{A}$ una estructura con teoría $T = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$. Si f es una función definible en $\mathcal{A}$, sigue que existe una fórmula $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ tal que, para cada $\mathcal{M} \models T$, $\{(\overline{a}, \overline{b}) \in M^{n+m} : \mathcal{M} \models \phi[\overline{a}, \overline{b}]\}$ es grafo de una función $f_M : M^n \to M^m$.

En general, los conjuntos definibles son bastante diversos. Hay propiedades de teorías que veremos adelante, todavía, que pueden clasificar estos conjuntos de una manera más completa (a decir, modelo completud y eliminación de cuantificadores).

Podemos extender la definición arriba para teorías: sea T una teoría en un lenguaje de primer orden L, Sea $\mathcal{M} \vDash T$ un modelo, una aplicación $f : M^n \to M^m$ es definible si su grafo es definible en $\mathcal{M}$ por una fórmula $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ y $T \vDash \forall \overline{x} \exists ! \overline{y} \phi(\overline{x}, \overline{y})$ - i.e., T prueba que ϕ es una función.

Vamos ahora definir expansiones de una estructura.

Definición 2.5.3. Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura, $L \subseteq \widetilde{L}$. Podemos definir la expansion de $\mathcal{M}$ como una estructura $(\mathcal{M}, \widetilde{L} \setminus L) =: \widetilde{\mathcal{M}}$ con mismo dominio que $\mathcal{M}$ y que tiene la misma interpretación de los símbolos de L.

Observación 2.5.1. Se puede demostrar que si tenemos dos expansiones $(\mathcal{M}, f)$, $(\mathcal{M}, g)$, entonces si g es definible en $(\mathcal{M}, f)$, todos los conjuntos definibles en $(\mathcal{M}, g)$ son definibles en $(\mathcal{M}, f)$.

La noción de modelo es importante para definir la noción de consecuencia lógica, bajo un punto de vista semántico. Sea T una teoría y ϕ un enunciado, entonces decimos que T implica (semánticamente) ϕ si para cada $\mathcal{M} \vDash T$, se tiene $\mathcal{M} \vDash \phi$.

2.6. Elimininación de cuantificadores y modelo completud

Vamos definir dos conceptos importantes para la teoría de modelos, que dicen sobre cuán sencillos son los conjuntos definibles sobre los modelos de tal teoría, bajo el punto de vista del sintaxis de las fórmulas que los definen.

La primera noción es la eliminación de cuantificadores:

Definición 2.6.1. Sea T una teoría de un lenguaje L. Decimos que T tiene eliminación de cuantificadores si para cada fórmula $\phi(\overline{x})$, existe una fórmula $\psi(\overline{x})$ sin cuantificadores tal que $T \vDash \forall \overline{x}(\phi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$. Decimos que una L-estructura $\mathcal{A}$ tiene eliminación de cuantificadores si su teoría $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ tiene eliminación de cuantificadores.

Este concepto es importante para este trabajo pues podemos fórmular el Teorema de Tarski-Seidenberg como la afirmación de que $\overline{\mathbb{R}}$, estructura de $\{0, 1, +, \cdot, <\}$ con dominio $\mathbb{R}$ y la interpretación usual de los símbolos, tiene eliminación de cuantificadores. Decimos que una función $f : A \to \mathbb{R}^n$, con $A \subseteq \mathbb{R}^m$ es semialgebraica si su grafo es un conjunto semialgebraico. Una otra manera de formular el Teorema de Tarski-Seidenberg es decir que el image de un conjunto semialgebraico por una función semialgebraica es un conjunto semialgebraico.

El resultado que vamos estudiar en este trabajo puede ser visto como una espécie de versión débil del Teorema de Tarski-Seidenberg para la $\{0, 1, +, \cdot, <, \exp\}$-estructura $(\overline{\mathbb{R}}; \exp)$ - más precisamente que esta estructura es modelo completa, un concepto que definimos seguidamente.

Como hay muchas maneras diferentes de definir modelo completud, vamos introducir este concepto de varias maneras diferentes, siguiendo [Col]. También podemos encontrar una caracterización similar en [Hod93], Teorema 8.3.1.

Definición 2.6.2. Una teoría T de un lenguaje L es modelo completa si satisface las condiciones equivalentes:

i) Si tenemos dos modelos $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, entonces $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$;

ii) Para cada $\mathcal{M} \vDash T$, $\phi(\overline{x})$ fórmula existencial, $\overline{a} \in M$, donde M es el dominio de $\mathcal{M}$, y $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$, con $\mathcal{N} \vDash T$, tenemos que $\mathcal{M} \vDash \phi[\overline{a}]$ si, y solo si, $\mathcal{N} \vDash \phi[\overline{a}]$ (en este caso, decimos que $\mathcal{M}$ es existencialmente cerrado);

iii) Para cada fórmula $\phi(\overline{x})$, existe una fórmula $\psi(\overline{x})$ del tipo $\forall \overline{y} \theta(\overline{y}, \overline{x})$, donde θ no tiene cuantificadores (fórmulas como ψ se llaman universales), tal que $T \vDash \forall \overline{x}(\phi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$;

iv) Para cada fórmula $\phi(\overline{x})$, existe una fórmula $\psi(\overline{x})$ del tipo $\exists \overline{y} \theta(\overline{y}, \overline{x})$, donde θ no tiene cuantificadores (fórmulas como ψ se llaman existenciales), tal que $T \vDash \forall \overline{x}(\phi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$;

v) Toda fórmula universal es equivalente, en T, a una fórmula existencial;

vi) Toda fórmula existencial es equivalente, en T, a una fórmula universal;

Demostración. Las equivalencias $iii) - iv)$ y $iv) - vi)$ siguen de las leyes de De

Morgan, que prueban que la negación de una fórmula existencial es equivalente a una fórmula universal y la negación de una fórmula universal es equivalente a una fórmula existencial.

Las condiciones $iii) - iv)$ obviamente implican en $v) - vi)$. Para probar que $(v - vi)$ implica en $(iii - iv)$, utilizamos el hecho de que cada fórmula es equivalente a una fórmula prenex normal (la demostración esta fuera del alcance deste trabajo), ó sea, una fórmula que tiene la fórma

$$\forall \overline{y}_1 \exists \overline{y_2} \forall \overline{y}_3 \ldots Q\overline{y}_n \phi(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$$

ó la forma

$$\exists \overline{y}_1 \forall \overline{y}_2 \exists \overline{y}_3 \ldots Q\overline{y}_n \phi(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$$

donde los $\overline{y}_i$ y $\overline{x}$ son tuplas de variables, Q es el cuantificador adecuado y la fórmula $\phi(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$ no tiene cuantificadores. Ahora hacemos indución en n. El caso $n = 1$ sigue directamente de $(v - vi)$. Ahora suponga $n > 1$ y que la fórmula sea de la forma

$$\forall \overline{y}_1 \exists \overline{y_2} \forall \overline{y}_3 \ldots Q\overline{y}_n \phi(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$$

como hablamos antes. La hipótesis de indución implica que la fórmula

$$\neg \exists \overline{y}_2 \forall \overline{y}_3 \ldots Q\overline{y}_n \phi(\overline{x}, \overline{y_1}, \ldots, \overline{y}_n)$$

es equivalente a una fórmula universal - eso sigue pues esta es equivalente a

$$\forall \overline{y_2} \exists \overline{y}_3 \ldots Q\overline{y}_n \neg \phi$$

. Como consecuencia,

$$\exists \overline{y}_2 \forall \overline{y}_3 \ldots Q\overline{y}_n \phi$$

es equivalente a una fórmula existencial que, por $vi)$, es equivalente a una fórmula universal θ. Por lo tanto,

$$\forall \overline{y_1} \exists \overline{y}_2 \ldots Q\overline{y}_n \phi$$

es equivalente a $\forall \overline{y}_1 \theta$, que es una fórmula universal. El caso

$$\exists \overline{y}_1 \forall \overline{y}_2 \exists \overline{y}_3 \ldots Q \overline{y}_n \phi(\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$$

se hace de manera análoga.

Es inmediato verificar que $i)$ implica en $ii)$. Que $ii)$ implica en $(iii - vi)$ sigue directamente de un hecho que esta fuera del alcance deste trabajo: el hecho que si tenemos una fórmula $\phi(\overline{x})$ tal que, dados modelos de T $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ y $\overline{a} \in N^n$, $\mathcal{N} \vDash \phi[\overline{a}]$ implica en $\mathcal{M} \vDash \phi[\overline{a}]$, entonces ϕ es equivalente, en T, a una fórmula existencial. Así es claro que si todo modelo de T es existencialmente cerrado, cada fórmula existencial es equivalente a una fórmula universal.

Por fín, probamos que $(iii - vi)$ implica en $i)$. Dados modelos $\mathcal{M}, \mathcal{N} \vDash T$, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, $\phi(\overline{x})$ una fórmula y $\overline{a} \in N^n$, sean ψ y θ las fórmulas existencial y universal equivalentes a ϕ, respectivamente, tenemos

$$\mathcal{N} \vDash \psi[\overline{a}] \Rightarrow \mathcal{M} \vDash \psi[\overline{a}]$$

y

$$\mathcal{M} \vDash \theta[\overline{a}] \Rightarrow \mathcal{N} \vDash \theta[\overline{a}]$$

Siendo ϕ, ψ, θ equivalentes, el resultado sigue. $\square$

Encuanto la condicion $ii)$, podemos precisar el siguiente: sean $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ L-estructuras. Entonces $\mathcal{M}$ es existencialmente cerrado en $\mathcal{N}$ si, y solo si, para cada fórmula existencial $\phi(\overline{x})$, $\overline{a} \in M$, $\mathcal{N} \vDash \phi[\overline{a}]$ implica $\mathcal{M} \vDash \phi[\overline{a}]$. Es fácil ver que $\mathcal{M}$ es existencialmente cerrado si, y solo, para cada extensión $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ es existencialmente cerrado en $\mathcal{M}$.

Decimos que una L-estructura es modelo completa si su teoría lo es.

Note que si una teoría T tiene eliminación de quantificadores, entonces también es modelo completa - pues toda fórmula libre de quantificadores $\phi(\overline{x})$ es equivalente a $\exists y \phi(\overline{x})$.

Vamos ahora a dar una interpretación geométrica para estos conceptos. Fijamos una estructura $\mathcal{A}$, de dominio A, sobre un lenguaje L. Sea $\phi(\overline{x}, y)$ una L fórmula, considere el conjunto definido por ϕ en A^{n+1}: $X = \{(\overline{a}, b) \in A^{n+1} : \mathcal{A} \vDash \phi[\overline{a}, b]\}$. Sea $\pi : A^{n+1} \to A^n$ la proyección en las n primeras coordinadas, note que $\pi[X] = \{\overline{a} \in A^n : \text{para algún } b \in A, (\overline{a}, b) \in X\}$ es la misma cosa que el conjunto $\{\overline{a} \in A^n : \mathcal{A} \vDash \exists y \phi[\overline{a}]\}$. Por lo tanto, podemos interpretar la introdución de un cuantificador existencial en una fórmula como tomar la proyección del conjunto de puntos que tal fórmula define (teniendo en cuenta el orden de las variables).

Con eso en mente, teniendo en cuenta también el hecho de que $\forall x \phi$ es equivalente a $\neg \exists x \neg \phi$, la definición *iv*) de modelo completud se traduce en la seguinte noción geométrica: el complementario de la proyección de un conjunto definible es la proyección de algún otro conjunto definible.

Ahora suponga que $\mathcal{A} = \overline{\mathbb{R}}$, en el lenguaje de anillos ordenados. Los conjuntos semialgebraicos son las combinaciones booleanas finitas de conjuntos que tienen la forma $\{\overline{a} \in \mathbb{R}^n : p(\overline{a}) =\}$ o $\{\overline{a} \in \mathbb{R}^n : q(\overline{a}) > 0\}$, donde p, q son polinomios en n variables. Estos corresponden a los conjuntos definibles con parametros por fórmulas sin cuantificadores. Podemos formular el teorema de Tarski-Seidenberg como la aserción de que la proyección de un conjunto definible es un conjunto semialgebraico.

2.7. Estructuras o-minimales

Ahora definimos lo que son estructuras o-minimales. La idea es que son estructural linealmente ordenadas donde los conjuntos definibles son lo más sencillos posible. El principal ejemplo de estructura o-minimal es $\overline{\mathbb{R}}$. Las principales referencias son [PS86], [KPS86], bien como el apendice de [Bes16].

Definición 2.7.1. Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura tal que $< \in L$ y $<^{\mathcal{M}}$ es un orden total (decimos en este caso que $\mathcal{M}$ es una estructura linealmente ordenada). $\mathcal{M}$ es o-minimal si cada $B \subseteq M$ parametricamente definible es unión finita de intervalos (pueden ser intervalos abiertos, cerrados, acotados o no).

Ejemplo 2.7.1. La estructura $\overline{\mathbb{R}}$ es o-minimal, por consecuencia del teorema de Tarski-Seidenber (pues subconjuntos semialgebraico de $\mathbb{R}$ son unión de puntos y intervalos).

Ahora vamos enunciar un teorema, cuya demostración está en [PS86], Teorema 4.2, que es importante para resultados que veremos adelante en este trabajo (a saber, en el Teorema 3.5.3).

Teorema 2.7.1. *Sea $\mathcal{M}$ una estructura o-minimal, $X = (a, b)$ un intervalo (es permitido $a = -\infty$ o $b = +\infty$) y $f : X \to M$ una función definible. Entonces existen $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ en M tales que f es monotona o constante en (a_i, a_{i+1}) para cada $i = 0, \ldots, n-1$.*

Un otro resultado importante es el teorema de descomposición celular. Antes vamos definir k-celulas.

Definición 2.7.2. Sea $\mathcal{M}$ una estructura o-minimal. Definimos las k-celular, $k \in \mathbb{N}$, por recursión:

i) Puntos $a \in M$ son 0-celulas. Intervalos $(a, b) \subseteq M$, con $a \in M \cup \{-\infty\}$, $b \in M \cup \{\infty\}$, $a < b$, son 1-celulas;

ii) Si $C \subseteq M^n$ (n entero positivo) es una k-celula y $f : C \to M$ es una función definible y continua, entonces su grafo $\Gamma(f) \subseteq M^{n+1}$ es una k-celula;

iii) Si $C \subseteq M^n$ es una k-celula, $f_1, f_2 : C \to M$ son funciones definibles y continuas tales que $f_1 < f_2$ en C, entonces

$$C_2 = \{(\overline{x}, y) \in M^{n+1} : \overline{x} \in C, f_1(\overline{x}) < y < f_2(\overline{x}\}$$

es una $k + 1$-celula.

Definición 2.7.3. Sea $\mathcal{M}$ una estructura o-minimal, n un entero positivo. Definimos una descomposición celular de M^n por recursión:

i) Si $n = 1$, una descimposición celular de M es una partición finita de M en puntos o intervalos - a saber, un conjunto con la forma:

$$\{(-\infty, a_1), (a_2, a_3), \ldots, (a_{m-2}, a_{m-1}), (a_m, \infty), \{a_1\}, \ldots, \{a_m\}\}$$

ii) Una descomposición de M^{n+1} es una partición $\mathcal{C}$ de M^{n+1} en un número finito de celulas tal que $\pi[\mathcal{C}]$ es una partición de M^n. Aqui, $\pi[\mathcal{C}]$ es una partición de M^n obtenida por la imagen de cada elemento de $\mathcal{C}$ por la proyección $\pi : M^{n+1} \to M^n$ en las n primeras coordinadas.

El teorema de descomposición celular es un importante resultado sobre estructuras o-minimales. Con él, probamos, por ejenplo, que conjuntos semialgebraicos tienen finitas componentes conexas. Su enunciado es:

Proposición 2.7.2. *Sea $\mathcal{M}$ una estructura o-minimal, y n un entero positivo. Entonces:*

- I) *Sean $A_1, \ldots, A_l \subseteq M^n$ definibles. Entonces existe una descomposición celular $\mathcal{C}$ de M^n tal que cada A_i, $i = 1, \ldots, l$, es una unión de celulas;*
- II) *Sea $f : A \to M$ una función definible, con $A \subseteq M^n$. Existe una descomposición celular de M^n tal que, para cada celula $C \subseteq A$ de la descomposición, la restrición de f a C es contínua.*

La teoría de una estructura o-minimal tiene la siguiente propiedad muy agradable, que utilizaremos adelante:

Teorema 2.7.3. *Sea $\mathcal{M}$ una estructura o-minimal, y $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Entonces $\mathcal{N}$ es una estructura o-minimal.*

La demostración del teorema arriba está en [KPS86].

Por fín, vamos definir lo que son funciones de Skolem y enunciar un resultado conocido por elección definible, que dice que ciertas estructuras tienen funciones de Skolem definibles, en particulas expansiones o-minimales de $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 2.7.4. Sea $\mathcal{M}$ una L-estrucura y $\phi(\overline{x}, y)$ una L-fórmula. Una función $f : M^n \to M$ es una función de Skolem para ϕ si siempre que $\mathcal{M} \models \exists y \phi[\overline{a}]$, $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}, f(\overline{a})]$.

Decimos que $\mathcal{M}$ tiene funciones de Skolem definibles si, para cada fórmula $\phi(\overline{x}, y)$, existe una función de Skolem definible para ϕ.

Decimos que una teoría T tiene funciones definibles si para cada $\phi(\overline{z}, y)$, existe una función (T prueba que es función) $f(\overline{x})$ tal que, para cada modelo $\mathcal{M} \models T$, $\overline{a} \in M^n$, si $\mathcal{M} \models \exists y \phi[\overline{a}]$, entonces $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}, f(\overline{a})]$.

Vamos enunciar el teorema de elección definible de forma geométrica. La lectora puede deducir a partir de la discusión en la parte 2.7 deste trabajo que las expansiones o-minimales de $\overline{\mathbb{R}}$ tienen funciones de Skolem definibles.

Teorema 2.7.4 (Elección Definible)**.** *Sea L un lenguaje con $\{0, -, +\} \subseteq L$ y $\mathcal{M}$ una L-estructura que es un grupo ordenado con respeto a $+^{\mathcal{M}}$. Si $A \subseteq M^{m+n}$ es un conjunto definible y $\pi : M^{m+n} \to M^m$ es la proyección en las m primeras coordinadas, entonces existe $f : \pi[A] \to M^n$ tal que su grafo $\Gamma(f)$ está contenido en A.*

2.8. Tipos y modelos saturados

Ahora vamos definir lo que es un n-tipo para un lenguaje de primer orden, con parametros en un subconjunto de una estrutura de tal lenguaje. Las principales referencias aqui son [Ges16] y el apendice de [Bes16].

Definición 2.8.1. Sea L un lenguaje y $\mathcal{M}$ una L-estructura con dominio M, y $B \subseteq M$. Un n-tipo sobre B es un conjunto $P(x_1, \ldots, x_n)$ de fórmulas $\phi(x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_m)$, donde los b_i son parametros en B.

Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura, $P(x_1, \ldots, x_n)$ un tipo sobre $B \subseteq M$. Decimos que $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ realiza $P(x_1, \ldots, x_n)$ si $\mathcal{M} \vDash \phi[\overline{a}, \overline{b}]$ para cada $\phi(\overline{x}, \overline{y}) \in P(\overline{x})$. Si existe tal a, decimos que $P(\overline{x})$ es realizable en M.

Decimos que $P(x_1, \ldots, x_n)$ es finitamente satisfacible en $\mathcal{M}$ si cada subconjunto finito de P es realizable en $\mathcal{M}$.

Ahora vamos definir lo que son modelos saturados para un dado cardinal.

Definición 2.8.2. Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura y κ un número cardinal. Decimos que M es κ-saturado si para cada subconjunto $A \subseteq M$, con $|A| < \kappa$, cada 1-tipo con parametros en A que es finitamente satisfacible es realizable en $\mathcal{M}$.

Por fín, enunciamos un resultado importante de la teoría de modelos que vamos utilizar en este trabajo:

Teorema 2.8.1. *Sea $\mathcal{M}$ una L-estructura y κ un cardinal. Entonces existe una extensión elemental $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N}$ es κ-saturado.*

Una prueba del teorema arriba puede ser encontrada en [Poi00], de acuerdo con [Bes16].

2.9. Transfer y resultados en $\overline{T}$

Considere ahora el lenguaje de $\overline{L}$ de los cuerpos ordenados y sea $\overline{\mathbb{R}}$ la estructura de $\mathbb{R}$ como cuerpo ordenado, de acuerdo con la interpetación usual de los símbolos de $\overline{L}$. Sea $\overline{T} = \mathrm{Th}(\overline{\mathbb{R}})$. Note que una función definible en $\overline{\mathbb{R}}$ es también definible en $\overline{T}$, por definición.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función definible, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Podemos hablar del límite de f en el lenguaje $\overline{L}$ de la siguiente forma:

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = B$$

puede ser expresada por el $\overline{L}$-enunciado:

$$\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists\overline{b}, \overline{c}\forall\overline{x}(\overline{b} < \overline{x} < \overline{c} \to |f(\overline{x}) - B| < \varepsilon))$$

donde $\overline{b} < \overline{x} < \overline{c}$ denota la fórmula $\bigwedge_{i=1}^{n} b_i < x_i < c_i$.

Así, si tenemos un modelo $K \models \overline{T}$, tiene sentido hablar de funciones C^∞de K^n, para todo $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Además, resultados sobre límites de funciones reales que pueden ser expresados con enunciados de $\overline{L}$ son verdaderos en K.

Esa técnica es conocida por "transfer principle", y la utilizaremos más adelante, por ejemplo, para probar una versión del teorema de la función implícita para expansiones de $\overline{\mathbb{R}}$, en la parte 3.3.

3. Los resultados de Wilkie

3.1. Enunciados de los resultados

Empezamos por explicar el contenido del artículo de Wilkie ([Wil96]). Son dos resultados principales, y este trabajo se centra sobre todo el segundo. Cada uno de los resultados muestran la modelo completud de una expansión del cuerpo ordenado de los reales. Concretamente, la primera expansión $\widetilde{\mathbb{R}}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ por las cadenas pfafianas restringidas (es decir definidas en un poliintervalo compacto) y la segunda expansión $\mathbb{R}_{\text{exp}}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ por la función exponencial global de R en R (que forma una cadena pfaffiana, pero no restringida, con lo que esta última no es una subexpansión de la primera). Denotamos por $\overline{L}$ el lenguaje de los cuerpos ordenados, y $\overline{\mathbb{R}}$ la estructura usual de cuerpo ordenado en $\mathbb{R}$. Más generalmente, se estuda modelos $K \models \text{Th}(\widetilde{\mathbb{R}})$, donde $\widetilde{\mathbb{R}}$ es una expansión de $\overline{\mathbb{R}}$. Así, verificaremos la modelo completud de la teoría de las expansiones consideradas.

Primer Teorema Princial de Wilkie:

Iniciamos con la definición de cadenas pfaffianas y cadenas pfaffianas restringidas.

Definición 3.1.1. Sean m, l enteros positivos, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto que contiene $[0,1]^m$. Una cadena Pfaffiana de funciones es una sucesión $G_1, \ldots, G_l : U \to \mathbb{R}$ tal que existen polinomios $p_{i,j} \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_{m+i}]$ con

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = p_{i,j}(x_1, \ldots, x_m, G_1, \ldots G_i).$$

Ahora, dada una cadena Pfiaffiana $G_1, \ldots, G_l$, definimos las funciones $F_1, \ldots, F_l$ restringendo a $[0,1]^m$ y ampliando fuera de este conjunto por cero, i.e., por $F_i = G_i \cdot I_{[0,1]^m}$, donde I_A es la función indicadora del conjunto A. A la sucesión $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_l)$ llamaremos cadena pfaffiana restringida.

Ahora, dada una cadena pfaffiana restringida y dado $C \subseteq \mathbb{R}$ tal que cada coeficiente de cada $p_{i,j}$ es definible en la estructura

$$\widetilde{\mathbb{R}} := (\overline{\mathbb{R}}; F_1, \ldots, F_l, \{r\}_{r \in C}))$$

- es decir, añadimos un símbolo de función para cada F_i, y los interpretamos como F_i, así como hacemos para los elementos de C, denotamos la teoría de tal estructura $\widetilde{T}$, y su lenguaje por $\widetilde{L} = \overline{L} \cup \{F_i\} \cup \{r\}_{r \in C}$.

Entonces el primer teorema del artículo es:

Teorema 3.1.1 (Primer Teorema Principal). *Cada conjunto definible en $\mathbb{R}^n$ definible por una fórmula de $\widetilde{L}$ puede ser definido por una $\widetilde{L}$ existencial. En otras palabras, $\widetilde{T}$ es modelo completa.*

Ahora, vamos probar un lema que sera importante adelante. Sea $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $x \mapsto \exp((1 + x^2)^{-1})$ y considere la estructura $(\overline{\mathbb{R}}, e)$. Denotamos su lenguaje y teoría por L_e, T_e, respectivamente. Similarmente, denotamos la teoría y lenguaje de $(\overline{\mathbb{R}}, \exp \cdot I_{[0,1]})$ por $\widetilde{T}_{\exp}$ y $\widetilde{L}_{\exp}$. Note que esta estructura viene de una cadena Pfaffiana restringida, y del primer teorema principal sigue que $\widetilde{T}'_{\exp}$ es modelo completa. Además, dado un modelo $K \vDash T_e$, podemos definir un modelo de $\widetilde{T}_{\exp}$ definiendo $\exp \cdot I_{[0,1]}$ por la fórmula

$$(x = 0 \to y = 1) \wedge ((x < 0 \vee x > 1) \to y = 0) \wedge (0 < x \leq 1 \to y = e(\sqrt{x^{-1} - 1}))$$

Similarmente, es posible definir e en un modelo de $\widetilde{T}_{\exp}$ a partir de $\exp \cdot I_{[0,1]}$, pues $(1 + x^2)^{-1} \in (0, 1]$. Así, como consecuencia de la Observacvión 2.5.1, tenemos que $(\overline{\mathbb{R}}, e)$ y $(\overline{\mathbb{R}}, \exp \cdot I_{[0,1]})$ tienen los mismos conjuntos definibles. Como en estos casos, las fórmulas que interdefinen las funciones especificadas son existenciales, estos conjuntos tienen los mismos conjuntos existenciales y, por lo tanto, sigue el siguiente lema:

Lema 3.1.2. *Sea $K \vDash T_e$. Entonces las estructuras (K, e), $(K, \exp \cdot I_{[0,1]})$ tienen los mismo conjuntos existenciales.*

Así, sigue del Primer Teorema Principal del artículo de Wilkie que T_e es modelo completa. El segundo teorema principal es el tema deste trabajo, así que nuestro enfoque sera en los capítulos 9, 10 y 11 del artículo. El segundo teorema es

Teorema 3.1.3. *(Segundo Teorema Principal) La teoría de la estructura $(\overline{\mathbb{R}}, \exp)$ es modelo completa.*

Arriba, exp denota la función usual $x \mapsto e^x$.

Si decimos que un conjunto es semi-EA ("semi-exponential-algebraic") quando es unión booleana de conjuntos con la forma $\{\overline{\alpha} : p(\overline{\alpha}) = 0\}$ y $\{\overline{\alpha} : q(\overline{\alpha}) > 0\}$, donde $p, q \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}]$ (llamamos polinómios deste tipo de polinómios exponenciales), y una función es semi-EA si su grafo lo es y, finalmente, que un conjunto es sub-EA si es imagen de un conjunto semi-EA por un mapa semi-EA, entonces este teorema es equivalente a decir que el complementario de un conjunto sub-EA es sub-EA. Podemos también reformular el resultado como siendo lo de que los conjuntos definibles en la estructura $(\overline{\mathbb{R}}, \exp)$ tienen la forma $\{\overline{\alpha} : \exists \overline{y} p(\overline{x}, \overline{y}) = 0\}$, donde p es un polinómio exponencial con coeficientes enteros.

3.2. La demostración del Primer Teorema de Wilkie

La demostración de la modelo completitud de la expansión que nos interesa más en este trabajo, $\mathbb{R}_{\exp}$ (la expansión de $\overline{\mathbb{R}}$ por la función exponencial), utiliza algunos resultados que Wilkie establece para probar la modelo completitud de la primera expansión $\widetilde{\mathbb{R}}$ por cadenas Pfaffianas. Esto quiere decir que presentar pruebas completas, incluso para la modelo completitud de $\mathbb{R}_{\exp}$, requeriría hacer las pruebas completas de prácticamente la totalidad del artículo. Esto sobrepasaría la extensión razonable de este trabajo. En su lugar, hemos recogido en esta parte enunciados e ideas principales de aquellos resultados sobre los pfaffianos que son esenciales para comprender la prueba de la modelo completitud de $\mathbb{R}_{\exp}$.

Empezamos con un analisis de la sintaxis de fórmulas para expansiones generales de $\overline{\mathbb{R}}$.

Lema 3.2.1. *Sea $\widetilde{L}$ un lenguaje en que añadimos un conjunto de símbolos de funcion $\mathcal{F}$ y constantes $\mathcal{C}$ a $\overline{L}$, denotamos entonces una expansión de $\overline{\mathbb{R}}$ en este lenguaje por $\widetilde{\mathbb{R}}$ y su teoría por $\widetilde{T}$. Si χ es un $\widetilde{L}$-enunciado existencial, entonces este enunciado es equivalente, en $\widetilde{T}$, a un enunciado con la forma*

$$\exists x_1, \ldots, x_r \bigwedge_{s=1}^{n} \tau_s = 0$$

donde cada τ_s es un $\overline{L} \cup \mathcal{C}$ término o tiene la forma $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}) - x_{i_{l+1}} = 0$ para *algún* $f \in \mathcal{F}$.

Para la demostración, la idea es que utilizamos las equivalencias logicas en $\widetilde{T}$ dadas por:

$$x \neq y \leftrightarrow \exists z((y-x)z - 1) = 0,$$

$$x < y \leftrightarrow \exists z((y-x)z^2 - 1) = 0.$$

Para los detalles, ver [Bes16], Lema 2.1.5.

A partir de ahora, $\widetilde{\mathbb{R}}$ denota la expansión de los reales por una cadena de funciones Pfaffianas restringidas $(F_1, \ldots, F_l)$, como en la parte 3.1, con lenguaje $\widetilde{L}$ y teoría $\widetilde{T}$. Similarmente, denotamos por $\widetilde{\mathbb{R}}'$ la expansión de $\overline{\mathbb{R}}$ por una cadena de funciones Pfaffianas sin restringir $H_1, \ldots, H_l$, ó sea, $\widetilde{\mathbb{R}}' = (\overline{\mathbb{R}}; H_1, \ldots, H_l, \{r\}_{r \in C})$, donde C es un conjunto sobre el cual los coeficientes de los polinomios $p_{i,j}$ son definibles, y la teoría y lenguaje de $\widetilde{\mathbb{R}}'$ se denotan por $\widetilde{T}'$ y $\widetilde{L}'$, respectivamente.

Lema 3.2.2. *Sean* $k, K \vDash \widetilde{T}$, *con* $k \subseteq K$. *Entonces* k *es existencialmente cerrado en* K *si, y solo si,*

$$K \vDash \exists x_1, \ldots, x_r \chi \Rightarrow k \vDash \exists x_1, \ldots, x_r \chi$$

para cada $\widetilde{L}_k$ *enunciado* $\exists x_1, \ldots x_r \chi$ *con la forma*

$$\exists x_1, \ldots, x_r \bigwedge_{s=1}^{n} \chi_s(x_1, \ldots, x_r)$$

donde cada $\chi_s(x_1, \ldots, x_r)$ *tiene la forma* $\tau(x_1, \ldots, x_r) = 0$ *para algún* $\overline{L}_k$*-término (ó sea, un polinomio sobre* k*) o tiene la forma*

$$\bigwedge_{j \notin S} 0 < x_{i_j} < 1 \wedge F_i(x'_{i_1}, \ldots, x'_{i_m}) - x_{i_{m+1}} = 0$$

para algún $S \subseteq \{1, \ldots, m\}$, *y algún* $1 \leq i \leq l$, *donde* $1 \leq i_1, \ldots, i_{m+1} \leq r$ *y*

$$x'_{i_j} = \begin{cases} x_{i_j} & \textit{si } j \notin S \\ 0 \textit{ o } 1 & \textit{si } j \in S \end{cases}$$

La demostración se hace sustituyendo. la fórmula

$$F_i(y_1, \ldots, y_m) - y_{m+1} = 0 \wedge y_j \geq 1$$

por la fórmula

$$(y_j > 1 \wedge y_{m+1} = 0) \vee (F_i(y_1, \ldots, y_m)(y_j/1) - y_{m+1} = 0 \wedge y_j = 0)$$

donde "$y_j/1$"denota la sustituición de y_j por 1 en la expresión $F_i(y_1, \ldots, y_m)$. Hacemos un truco analogo para $y_j \leq 0$. Para detalles, ver [Bes16], Lema 2.1.6.

La prueba del primer teorema principal se hace esencialmente con una indución en el número de fórmulas χ_s con la segunda forma que ocurren en χ como en el lema arriba.

Los dos últimos Lemas (3.2.1, 3.2.2) sugieren que podemos probar la modelo copletud de $\widetilde{T}$ apenas considerando ceros de sucesiones específicas de términos. Eso motiva la siguiente definición:

Definición 3.2.1. Sean $n, r \in \mathbb{N}$.

I) Una sucesión $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ de $\widetilde{L}$-términos en las variables $x_1, \ldots, x_r$ es una (n, r)-sucesión si cumple:

- para $s = 1, \ldots, n$, σ_s tiene la forma $F_i(y_1, \ldots, y_m)$ para algún $i = 1, \ldots, l$ y algúns $y_1, \ldots, y_m \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_r\}$;
- Si $s \in \{1, \ldots, n\}$, $i \in \{2, \ldots, l\}$ y σ_s es $F_i(y_1, \ldots, y_m)$, entonces $s > 1$ y, para algún $t \in \{1, \ldots, s-1\}$, σ_t es $F_{i-1}(y_1, \ldots, y_m)$.

II) Las variables que ocurren en algun término de una (n, r)-sucesión $\overline{\sigma}$ se llaman $\overline{\sigma}$-acotadas

Observación 3.2.1. Cada (n, r)-sucesión $\overline{\sigma}$ es también una (n, r')-sucesión para cada $r' \geq r$, con el mismo conjunto de variables $\overline{\sigma}$-acotadas, y cualquier segmento inicial de una (n, r)-sucesión es una (n', r)-sucesión para algún $n' \leq n$. Además, cualquier sucesión de $\widetilde{L}$-términos satisfaciendo la primera condicíon en $i)$ puede ser reordenada y rellenada en una (n, r)-sucesión.

Definición 3.2.2. Sea $K \models \widetilde{T}$, y $\overline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ una (n,r)-sucesión. El dominio natural de $\overline{\sigma}$ en K, denotado por $D^r(\overline{\sigma}, K)$ es definido como $\prod_{i=1}^{r} I_i$, donde

$$I_i = \begin{cases} \{x \in K : K \models 0 < x < 1\} & \text{si } x_i \text{ es } \overline{\sigma}\text{-acotada} \\ K & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Definición 3.2.3. Sean $k, K \models \widetilde{T}$, $k \subseteq K$. Denotamos por $M^r(k, K, \overline{\sigma})$, para una (n,r)-sucesión $\overline{\sigma}$, el anillo de todas las funciones $f : D^r(\overline{\sigma}, K) \to K$ para las cuales existe un polinomio $p \in k[X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_n]$ tal que

$$f(\overline{\alpha}) = p(\overline{\alpha}, \sigma_1(\overline{\alpha}), \ldots, \sigma_n(\overline{\alpha}))$$

para cada $\overline{\alpha} \in D^r(\overline{\sigma}, K)$, donde $\overline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Es importante notar que $M^r(k, K, \overline{\sigma})$ es un anillo diferencial, pues las F_i son pfaffiana restringidas. Además, es un dominio de integridad por consecuencia del princípio de identidad para funciones analiticas reales (ver apendice de [Bes16], Proposición A.1.5). Podemos reducir la demostración de modelo completud de $\widetilde{T}$ con al siguiente lema:

Lema 3.2.3. *Sean $k, K \models \widetilde{T}$, $k \subseteq K$. Suponga que para todas las (n,r)-sucesiones $\overline{\sigma}$ y cada $g_1, \ldots, g_l \in M^r(k, K, \overline{\sigma})$ es verdad que si $g_1, \ldots, g_l$ tienen un cero comun en $D^r(\overline{\sigma}, K)$, entonces hay un cero comun en $D^r(\overline{\sigma}, k)$. En estas condiciones, k es existencialmente cerrado en K.*

Demostración. Suponga que $K \models \exists x_1, \ldots, x_r \chi$, donde χ tiene la forma del Lema 3.2.2. Entonces podemos agrupar los términos que ocurren las fórmulas χ_s con la segunda forma en una (n,r)-sucesión $\overline{\sigma}$, para algúns $n, r \in \mathbb{N}$ (sin introcir nuevas variables acotadas en χ). Entonces cada χ_s dice simplemente que alguna función $g_s \in M^r(k, K, \overline{\sigma})$ tiene un cero en $D^r(\overline{\sigma}, K)$. Utilizando este hecho, existen $g_1, \ldots, g_l \in M^r(k, K, \overline{\sigma})$ tales que hay un cero común a todas en $D^r(\overline{\sigma}, K)$ si, y solo si, $K \models \exists x_1, \ldots, x_r \chi$. Eso también es verdad para k y $D^r(\overline{\sigma}, k)$. Así, el resultado sigue de la definición *iii)* de modelo completud. $\square$

Ahora fijamos la siguiente notación, para $k, K \vDash \widetilde{T}$, $k \subseteq K$, $\overline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ una (n, r)-sucesión y $g_1, \ldots, g_l \in M^r(k, K, \overline{\sigma})$:

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_l)}{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{i_t}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_l}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial x_{i_t}} \end{pmatrix}$$

Note que si $l = t$, entonces $\det\left(\frac{\partial(g_1,\ldots,g_l)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_t}}\right) \in M^r(k, K, \overline{\sigma})$, por consecuencia del "transfer principle". Denotamos, en el caso de $l = r$, $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}) = (x_1, \ldots, x_r)$, el determinante arriba por $J(g_1, \ldots, g_r)$.

Definición 3.2.4. Suponga $k, K \vDash \widetilde{T}$, $k \subseteq K$, y sea $\overline{\sigma}$ una (n, r)-sucesión. Entonces un punto $P \in K^r$ se llama $(k, \overline{\sigma})$-definible si existen $g_1, \ldots, g_l \in M^r(k, K, \overline{\sigma})$ tales que

I) $P \in D^r(K, \overline{\sigma})$;

II) $g_1(P) = \cdots = g_r(P) = 0$;

III) $J(g_1, \ldots, g_r)(P) \neq 0$;

La demostración del Teorema 3.1.1, a partir del Lema 3.2.3 divide en dos lemas, cuyas pruebas están fuera del alcance deste trabajo.

Lema 3.2.4. *Sean $k, K \vDash \widetilde{T}$ (o $\widetilde{T}'$), $k \subseteq K$ y $\overline{\sigma}$ una (n, r)-sucesión. Suponga $g \in M^r(k, K, \overline{\sigma})$ y $g(P) = 0$ para algún $P \in D^r(\overline{\sigma}, K)$. Entonces para algún $s \in \mathbb{N}$, existe $Q_0 \in D^r(\overline{\sigma}, K)$ y $Q_1 \in K^s$ tal que (Q_0, Q_1) es $(k, \overline{\sigma})$-definible (mirando $\overline{\sigma}$ como $(n, r + s)$-sucesión).*

Lema 3.2.5. *Sean $k, K \vDash \widetilde{T}$, y $\overline{\sigma}$ una (n, r)-sucesión. Entonces cada punto $(k, \overline{\sigma})$-definible de K^r está en k^r.*

Ahora, vamos utilizar los Lemas 3.2.3, 3.2.4, 3.2.6 para probar el Teorema 3.1.1.
Demostración del Teorema 3.1.1:

Demostración. Vamos ahora a demostrar el Teorema 3.1.1. Sean k, K modelos arbitrarios de $\widetilde{T}$ (una estructura generada a partir de una cadena pfaffianas restringidas), con $k \subseteq K$. Vamos aplicar el Lema 3.2.3. Como consecuencia de tal Lema, basta considerar ceros de funciones definibles a partir de (n, r)-sucesiones. Así, sean $n, r \in \mathbb{N}$ y $\overline{\sigma}$ una (n, r)-sucesión, y suponga $g_1, \ldots, g_l \in M^r(k, K\overline{\sigma})$ con un cero común a todas $P \in D^r(\overline{\sigma}, K)$. Note que P es un cero común a cada g_i, $i = 1, \ldots, l$ si, y solo si, $g(P) = 0$, donde $g = \sum_{i=1}^{l} g_i^2$, y que $g \in M^r(k, K, \overline{\sigma})$. Así, por el Lema 3.2.4, existe $s \in \mathbb{N}$, $Q_0 \in D^r(\overline{\sigma}, K)$, $Q_1 \in K^s$ tal que $g(Q_0) = 0$ y (Q_0, Q_1) es $(k, \overline{\sigma})$-definible. Así, por el Lema 3.2.5, $(Q_0, Q_1) \in k^{r+s}$, donde $Q_0 \in k^r$. Por lo tanto, k es existencialmente cerrado en K, lo que concluye la demostración. $\square$

Comentemos brevemente como se demuestra el Lema 3.2.5, sin entrar en detalles. Utilizamos dos lemas. Esta demostración utiliza técnicas del algebra conmutativa (para probar el caso para puntos $(k, \emptyset)$-definibles), y se hace por indución en n para probar el Lema 3.2.5(ver [Bes16]). Los lemas son:

Lema 3.2.6. *Sean $k, K \models \widetilde{T}$ (o $\widetilde{T}'$), $k \subseteq K$, y $\overline{\sigma}$ una (n, r)-sucesión. Además, suponga que para cada $s \geq r$ y cada punto $(k, \overline{\sigma})$-definible $(p_1, \ldots, p_s) \in K^s$ existe $B \in k$ con $K \models \bigwedge_{i=1}^{s} -B < p_i < B$. Entonces cada punto $(k, \overline{\sigma})$-definible de K^r está en k^r.*

Lema 3.2.7. *Sean $k, K \models \widetilde{T}$, $k \subseteq K$, y $\overline{\sigma}' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_{n+1})$ una $(n+1, r)$-sucesión. Denote por $\overline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Suponga que para cada $s \geq r$, todo punto $(k, \overline{\sigma})$-definible de K^s está en k^s. Entonces para cada $s \geq r$ y cada punto $(k, \overline{\sigma}')$-definible $(p_1, \ldots, p_s)$, existe $B \in k$ con $K \models \bigwedge_{i=1}^{s} -B < p_i < B$.*

Los capítulos 3-8 del artículo de Wilkie son dedicados a demostrar los Lemas 3.2.4, 3.2.6 y 3.2.7. Si combinamos los Lemas 3.2.3, 3.2.4, 3.2.6, 3.2.7, tenemos el siguiente teroema:

Teorema 3.2.8. *Sean $k, K \models \widetilde{T}'$, $k \subseteq K$ y suponga que para cada $n, r \in \mathbb{N}$ y cada (n, r)-sucesión, todo punto $(k, \overline{\sigma})$-definible $(p_1, \ldots, p_r) \in K^r$ satisface $-B < p_i < B$ para algún $B \in k$ $(i = 1, \ldots, r)$. Entonces k es existencialmente cerrado en K.*

Adelante, en la parte 3.4, vamos a utilizar el Teorema 3.2.8 para demostrar la modelo completud de $T_{\exp}$, la teoría de $(\overline{\mathbb{R}}, \exp)$ - donde $\exp : x \mapsto e^x$ es la función exponencial. Note que $T_{\exp}$ tiene la forma de una expansión por una cadena (de longitud 1) Pfaffiana, así que podemos aplicar el Teorema anterior.

3.3. Algunos resultados de la primera parte del artículo de Wilkie

En esta parte del trabajo vamos a enunciar, sin probar, resultados que utilizaremos adelante. El primer teorema es de Khovanskii, y es sobre la cantidad de ceros regulares de un sistema de equaciones formado por funciones que son expresiones polinomiales formadas a partir de una cadena Pfaffiana. El enunciado contiene el caso real, pero es verdad, como consecuencia del "transfer principle" para cualquier modelo de $\widetilde{T}'$ (pues puede ser escrito como um enunciado de primer orden). Para la prueba, ver [Kho80].

Teorema 3.3.1. *Sea $h_1, \dots, h_l$ una cadena Pfaffiana de funciones en $\mathbb{R}^{m+n}$. Suponga que $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_{m+n}, h_1, \dots, h_l]$ (aqui, $x_i : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ denota la i-esima proyección). Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $Q \in \mathbb{R}^n$ el conjunto*

$$\{P \in \mathbb{R}^m : g_1(P, Q) = \cdots = g_m(P, Q) = 0, \det\left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}\right)(P, Q) \neq 0\}$$

tiene como máximo N elementos.

Para enunciar el próximo resultado, necesitamos de algunas definiciones. A partir de ahora, $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ denota una expansión cualquier de $\overline{\mathbb{R}}$, con teoría $\overline{\overline{T}}$ y lenguaje $\overline{\overline{L}}$.

Definición 3.3.1. Sea $K \vDash \overline{\overline{T}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

I) Un sistema de entornos en K^n es una colección de abiertos no vacios y definibles que es cerrada por intersecciones finitas;

II) Dado un sistema de entornos $\mathfrak{O}$, $\mathcal{D}^{(n)}(\mathfrak{O})^-$ denota el conjunto de todos os pares (f, U) donde $U \in \mathfrak{O}$ y $f : U \to K$ es una función definible y C^∞ (con respeto a K);

III) Dados $(f_1, U_1), (f_2, U_2) \in \mathcal{D}^{(n)}(\mathfrak{O})^-$, definimos la relación de equicalencia $(f_1, U_1) \sim (f_2, U_2)$ por existe $U \in \mathfrak{O}$ con $U \subseteq U_1 \cap U_2$ y $f_1(\overline{x}) = f_2(\overline{x})$ para cada $\overline{x} \in U$. Denotamos la clase de equivalencia de (f, U) por $[f, U]$.

IV) El conjunto de clases de equivalencia por esta relacion, o germenes, es denotado por $\mathcal{D}^{(n)}(\mathfrak{O})$.

El conjunto $\mathcal{D}^{(n)}(\mathfrak{O})$ es un anillo (con unidad) diferenciable, donde los operadores $\frac{\partial}{\partial x_i}$ son definidos de forma que conmuten con la operación de tomar el cociente por $\sim$.

Notación: Para n entero positivo , $P \in K^n$ ($K \models \overline{\overline{T}}$), sea $\mathfrak{O}_P$ el conjunto de todos los entornos definibles de P. Es claramente un sistema de entornos. Escribimos $\mathcal{D}^{(n)}(P)^-$ y $\mathcal{D}^{(n)}(P)$ en lugar de $\mathcal{D}^{(n)}(\mathfrak{O}_P)^-$ y $\mathcal{D}^{(n)}(\mathfrak{O}_P)$, respectivamente. Si $g \in \mathcal{D}^{(n)}(P)$, $g = [f, U]$, entonces $g(P)$ denota $f(P)$. Finalmente, denotamos por $d_P g$ (ó $d_P f$) el vector $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)) \in K^n$.

Ahora vamos a probar una versión del teorema de la función implícita para modelos de $\overline{\overline{T}}$. Proseguimos como en el início del capítulo 4 del artículo de Wilkie. El resultado va seguir de una aplicación del “transfer principle“.

Suponga $r, m \in \mathbb{N}$, $r, m \geq 1$ y $(P, Q) = (p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_m) \in K^{r+m}$. Sea U un entorno abierto definible con parametros de (P, Q) y suponga $f_1, \ldots, f_m : U \to K$ funciones definibles y C^∞. Suponga también que (P, Q) es cero no singular de $f_1, \ldots, f_m$ con respeto a $x_{r+1}, \ldots, x_{r+m}$. Eso significa que $f_i(P, Q) = 0$ para $i = 1, \ldots, m$ y el determinante de la matriz

$$\Delta = \Delta(x_1, \ldots, x_{r+m}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{r+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{r+m}} \end{pmatrix}$$

no se anula en (P, Q). Ahora, en $\overline{\overline{R}}$ podemos aplicar el teorema de la función implicita para obtener entornos abiertos V_1 de P, V_2 de Q tales que

- $V_1 \times V_2 \subseteq U$;
- Para cada $\overline{x} \in V_1$ existe un único punto $(y_1, \ldots, y_m) = (y_1(\overline{x}, \ldots, y_m(\overline{x})) \in V_2$ tal que, para cada $i = 1, \ldots, m$, $f_i(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ y este punto satisface $\det(\Delta(\overline{x}, \overline{y})) \neq 0$;

- Las funciones $y_i : V_i \to K$ son C^∞ y para cada $l = 1, \ldots, r$, $\overline{x} \in V_1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_l} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_l} \end{pmatrix} = -\Delta^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_l} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_l} \end{pmatrix}$$

  donde el lado derecho de la ecuación arriba es evaluado en $(\overline{x}, y_1(\overline{x}), \ldots, y_m(\overline{x})$.

Para que eso sea verdad para cualquier $K \vDash \overline{\overline{T}}$, tomamos V_1, V_2 como entornos de cajas (producto de intervalos abiertos), y la unicidad es garantizada pues es un enunciado en $\overline{\overline{T}}$. Así, queda probado el siguiente resultado:

Proposición 3.3.2. *Sea $K \vDash \overline{\overline{T}}$. Para U entorno abierto de K^{r+m} y $f_1, \ldots, f_m : U \to K$ funciones C^∞, si $(P.Q) = (p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_m) \in U$ es tal que P, Q es un cero para todas las f_i, $i = 1, \ldots, m$, i.e., $(f_1, \ldots, f_m)(P, Q) = 0$ y el determinante de*

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{r+1}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{r+m}} \end{pmatrix}$$

no se anula en (P, Q). Entonces existen entornos definibles con parametros V_1 de P, V_2 de Q tales que:

- *$V_1 \times V_2 \subseteq U$;*
- *Para cada $\overline{x} \in V_1$ existe un único punto $(y_1, \ldots, y_m) = (y_1(\overline{x}), \ldots, y_m(\overline{x})) \in V_2$ tal que $(f_1, \ldots, f_m)(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ y $\det(\Delta(\overline{x}, \overline{y})) \neq 0$;*
- *Las funciones K-definibles $y_i : V_1 \to K$ son C^∞ y, para cada $l = 1, \ldots, r$ y $\overline{x} \in V_1$:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_l} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_l} \end{pmatrix} = -\Delta^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_l} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_l} \end{pmatrix}$$

  donde el lado derecho es evaluado en $(\overline{x}, y_1(\overline{x}), \ldots, y_m(\overline{x}))$.

Ahora vamos hacer la siguiente definición:

Definición 3.3.2. Sea $K \vDash \overline{\overline{T}}$, $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Suponga que $g_1, \ldots g_s$ son funciones

C^∞ con valor en K y definidas en abiertos de K^n. Entonces definimos

$$\mathcal{V}(g_1, \ldots, g_s) := \{Q \in \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{dom}(Q_i) : g_1(Q) = \cdots = g_s(Q) = 0\}$$

y

$$\mathcal{V}^{ns}(g_1, \ldots, g_s) := \{Q \in \mathcal{V}(g_1, \ldots, g_s) : (d_Q g_i : i = 1, \ldots, s) \text{ es lin. indep. sobre } K\}$$

El siguiente teorema es el Teorema 4.9 en el artículo de Wilkie.

Teorema 3.3.3. *Sea $K \vDash \overline{\overline{T}}$, n un entero positivo, $P_0 \in K^n$ y suponga que M es un subanillo (con unidad) Noetheriano de $\mathcal{D}^{(n)}(P_0)$ que es cerrado por derivadas. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $[f_i, U_i] \in M$, $i = 1, \ldots, m$. Suponga además que $P_0 \in \mathcal{V}^{ns}(f_1, \ldots, f_m)$. Entonces alguna destas opciones es verdad:*

- *$n = m$;*
- *$m < n$ y para cada $[h, W] \in M$ con $h(P_0) = 0$, h es cero en $U \cap \mathcal{V}^{ns}(f_1, \ldots, f_m)$ para algún $U \in \mathfrak{O}_{P_0}$ (con $U \subseteq W$);*
- *$m < n$ y para algún $[h, W] \in M$, $P_0 \in \mathcal{V}^{ns}(f_1, \ldots, f_m, h)$.*

Ahora, sea n un entero positivo, y $U \subseteq K^n$ un abierto definible. Entonces $\{U\}$ es un sistema de entornos, y podemos identificar $\mathcal{D}^{(n)}(\{U\})^-$ y $\mathcal{D}^{(n)}(\{U\})$ con el anillo de funciones definibles, C^∞, de U en K. Denotamos este anillo por $\mathcal{D}^{(n)}(U)$. Si $P \in U$, existe un homomorphismo de anillos $R_P : \mathcal{D}^{(n)}(U) \to \mathcal{D}^{(n)}(P)$ dado por $f \mapsto [f, U]$ - R_P no es, en general, ni inyectivo ni sobreyectivo. Todavia, la restrición de R_P al anillo generado por las proyeciones, denotado por $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, es inyectiva (pues si un polinomio es cero en un abierto de K^n, debe ser el polinomio nulo). Denotamos también el imagen de $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ en $\mathcal{D}^{(n)}(P)$ por $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. El último resultado que vamos necesitar, y que no vamos demostrar es el Teorema 5.1 del artículo de Wilkie:

Teorema 3.3.4. *Sea $K \vDash \overline{\overline{T}}$, M un subanillo noetheriano de $\mathcal{D}^{(n)}(U)$ que contiene $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ y que es cerrado por derivadas. Sea $f \in M$ y suponga que S es un* *subconjunto no vacio de $\mathcal{V}(f)$ que es abierto en $\mathcal{V}(f)$ y cerrado en K^n. Entonces existen $f_1, \ldots, f_n \in M$ tal que $S \cap \mathcal{V}^{ns}(f_1, \ldots, f_n) \neq \emptyset$.*

3.4. Una (casi) demostración del Teorema de Modelo completud de $T_{\exp}$

Queremos demostrar que la teoría de $(\overline{\mathbb{R}}, \exp)$ es modelo completa - o sea, el segundo teorema principal del artículo. Denotamos el lenguaje y la teoría de tal estructura por $T_{\exp}$ y $L_{\exp}$, respectivamente. Sean $k, K \vDash T_{\exp}$, con $k \subseteq K$. Necesitamos mostrar que cada L_k-formula existencial que es válida en K también lo es en k (eso es, que k es subestructura elementar de K). Para eso, utilizaremos el Teorema 3.2.8, con $m = l = 1, C = \emptyset, H_1 = \exp, \widetilde{K}' = K, \widetilde{k}' = k$. Asi, es suficiente probar el siguiente:

Proposición 3.4.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f_1, \ldots, f_n \in k[x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}]$, existe $b \in k$ tal que, si $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ es tal que $f_1(\overline{\alpha}) = \cdots = f_n(\overline{\alpha}) = 0$ y el determinante jacobiano $J(f_1, \ldots, f_n)(\overline{\alpha}) \neq 0$, entonces $|\alpha_i| \leq b$ para cada $i = 1, \ldots, n$.*

Para hacer eso, vamos necesitar de una definición:

Definición 3.4.1. Sea $n \in \mathbb{N}$, $s \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Entonces M_n^s denota el anillo de funciones de K^n en K generado por k y por las funciones $x_i, (1 + x_i^2)^{-1}, e(x_i)$ (donde la función e es como en el Lema 3.1.2, ó sea, $x \mapsto \exp((1 + x^2)^{-1})$), para $i = 1, \ldots, n$, y $\exp(x_i)$, para $i \in s$.

Es importante notar que el anillo definido arriba es isomorfo a un quociente de anillos de polinómios, y por lo tanto, es noetheriano. Además, sus elementos son funciones definibles en K y C^∞. Es también cerrado por derivadas - en particular, si $f_1, \ldots, f_n \in M_n^s$, entonces $J(f_1, \ldots, f_n) \in M_n^s$.

Proposición 3.4.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $s \subseteq \{1, \ldots, n\}$.*

I) *Suponga $f \in M_n^s$, $\overline{\alpha} \in K^n$, $f(\alpha) = 0$. Entonces existen $f_1, \ldots, f_n \in M_n^s$, $\overline{\beta} \in K^n$ con $f(\overline{\beta}) = f_1(\overline{\beta}) = \cdots = f_n(\overline{\beta}) = 0$ y $J(f_1, \ldots, f_n)(\overline{\beta}) \neq 0$.*

II) *En i), si $\overline{\alpha}$ es un cero aislado de f, podemos tomar $\overline{\beta} = \overline{\alpha}$.*

III) *Sean* $f_1, \dots, f_n \in M_n^s$. *Entonces el conjunto*

$$\{\overline{\gamma} \in K^n : f_1(\overline{\gamma}) = \cdots = f_n(\overline{\gamma}) = 0, J(f_1, \dots, f_n)(\overline{\gamma}) \neq 0\}$$

es finito.

Demostración. Para $i)$, basta aplicar el Teorema 3.3.4 con $\overline{\overline{T}} = T_{\exp}$, $K = K$, $M = M_n^s$, $U = K^n$ y $S = V(f)$.

Para $ii)$, utilizamos el Teorema 3.3.3 con $\overline{\overline{T}} = T_{\exp}$, $K = K$, $P_0 = \overline{\alpha}$ y definimos el subanillo de $\mathcal{D}^{(n)}(\overline{\alpha})$ por $M = \{[g|_U, U]$:U entorno abierto de $\overline{\alpha}, g \in M_n^s\}$. Aplicamos la tercera opción del Teorema 3.3.3, repetidas veces para $m = 0, \dots, n-1$. Para eso, necesitamos probar que la segunda opción del Teorema 3.3.3 nunca ocurre para ningún paso de $m = 0, \dots, n-1$. Suponga que la opción $ii)$ ocurre para algún $m < n$, $r = n - m$. Entonces existe, tomando $[h, W] = [f, K^n]$, un entorno abierto U de $\overline{\alpha}$ tal que f es cero en $U \cap \mathcal{V}^{ns}(f_1, \dots, f_m)$. Como $\overline{\alpha} \in \mathcal{V}^{ns}(f_1, \dots, f_m)$, los vectores $d_{\overline{\alpha}} f_1, \dots, d_{\overline{\alpha}} f_m$ son linealmente independientes. Así, existe un subconjunto $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ de cardinalidad m tal que la matriz

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, j \in S}$$

tiene determinante no nulo. Renombrando las variable, podemos asumir que $S = \{x_{r+1}, \dots, x_{r+m}\}$. La Proposición 3.3.2 implica entonces que $\overline{\alpha}$ no es cero aislado de $U \cap \mathcal{V}^{ns}(f_1, \dots, f_m)$, lo que es una contradicción.

Para $iii)$, sea $s = \{i_1, \dots, i_m\}$ y note que la sucesión $(1 + x^2)^{-1}, e(x), \exp(x)$ es una cadena Pfaffiana. Así, el resultado sigue del Teorema 3.3.1. $\square$

Vamos demostrar la Proposición 3.4.1 por contradicción. Si es falsa, entonces existen polinómios exponenciales $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n, e^{x_1}, \dots, e^{x_n}]$ tales que, para cada $b \in k$, existe $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $f_1(\overline{\alpha}) = \cdots = f_n(\overline{\alpha}) = 0$, $J(f_1, \dots, f_n)(\overline{\alpha}) \neq 0$ con $|\alpha_l| > b$ para algún $l \in \{1, \dots, n\}$. Por la proposición anterior, sabemos que $(f_1, \dots, f_n)$ tiene finitos ceros regulares en K^n - por lo tanto, como k es infinito, debe haber un cero regular $\overline{\alpha}$ de $(f_1, \dots, f_n)$ con alguna componente α_l tal que, para cada $b \in k$, $|\alpha_l| > b$. Si definimos

$$s = \{i \in \{1, \dots, n\} : \exp(x_i) \text{ ocurre en algún } f_j, j = 1, \dots, n\} \cup \{l\}$$

y tomamos m como la cardinalidad de s, tenemos que m satisface la condición:

> $(*)_m$ para algún $n \geq m$ natural, existe $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$, $l \in \{1, \dots, n\}, s \subseteq \{1, \dots, n\}$ con cardinalidad m tales que, para algúns $f_1, \dots, f_n \in M_n^s$, $f_1(\overline{\alpha}) = \cdots = f_n(\overline{\alpha}) = 0 \neq J(f_1, \dots, f_n)(\alpha)$. Además, $|\alpha_l| > b$ para cada $b \in k$ y, si $m > 0$, entonces vale que $l \in s$.

Por la discusión que hemos hecho, probar el siguiente lema completa la demostración de la modelo completud de $T_{\exp}$.

Lema 3.4.3. *No es verdad que existe m tal que $(*)_m$.*

Demostración. Suponga que no y sea m mínimo tal que $(*)_m$ es verdadero. Vamos probar que $m > 0$. Si $m = 0$, podemos considerar L_e-estructuras K', k' con dominios K, k, respectivamente, donde e es interpretada com en el Lema 3.1.2. Entonces $K', k' \models T_e$, la teoría de $(\overline{\mathbb{R}}; e)$ - eso sigue pues e es definible en K, k. Así, tenemos que $k' \preceq K$, pues T_e es modelo completa. Sean $f_1, \dots, f_n$ las funciones que satisfacen $(*)_0$. Sabemos que, por la proposiciona anterior, el conjunto de los $\overline{\alpha}$ que son ceros regulares es finito, digamos con N elementos. Hay una L_e-formula ($L_e = \overline{L} \cup \{e\}$) que estabelece que hay exactamente N ceros de $(f_1, \dots, f_n)$, pues, como $m = 0$, estas funciones son definibles en k'. Pero eso implica que hay un elemento en k que es mayor que cualquier otro elemento de k - una contradicción. Así, $m > 0$.

Ahora, considere el m mínimo, y $n, \overline{\alpha}, l, s$ y $f_1, \dots, f_n$ que satisfacen $(*)_m$. Una propiedad que vamos probar más adelante es la siguiente:

Proposición 3.4.4. *Existen enteros n_i, para $i \in s$, no todos nulos, y $c \in k$ tales que $0 < c + \sum_{i \in s} n_i \alpha_i < 1$*

Asumindo la proposición arriba, vemos que debe haber $n_i \neq 0$ para algún $i \in s \backslash \{l\}$ - pues si no $-\frac{c}{n_l} < \alpha_l < \frac{1-c}{n_l}$, lo que contradice $|\alpha_l| < b$ para cada $b \in k$. Suponga, sin pérdida de generalidad, que $1 \in s$, $n_1 \neq 0$, $l \neq 1$. Podemos también asumir que $n_1 > 0$ - do contrário, poderíamos sustituir n_i por $-n_i$ y c por $1-c$ para garantizar esta condición. Ahora, defina $\alpha_{n+1} = \exp(\alpha_1)$ y eligimos α_{n+2} tal que $\alpha_{n+2} > 0$ y $(1+\alpha_{n+2}^2)^{-1} = c + \sum_{i\in s} n_i\alpha_i$. Defina $g_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ sustituyendo cada ocurrencia de $\exp(x_1)$ por x_{n+1}, i.e., $f_i(x_1, \ldots, x_n) = g_i(x_1, \ldots, x_n, \exp(x_1))$. Entonces $g_i \in M_{n+1}^{s\setminus\{1\}}$, y obviamente $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2})$ es solución para el sistema de ecuaciones $\Lambda(x_1, \ldots, x_{n+2})$ abajo:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0 \\ \vdots \\ g_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0 \\ (1+x_{n+2}^2)^{-1} - c - \sum_{i\in s} n_i x_i = 0 \\ x_{n+1}^{n_1} \cdot \exp(c) \prod_{j\in s^+} \exp(x_j)^{n_j} - e(x_{n+2}) \prod_{j \in s^-} \exp(x_j)^{-n_j} = 0 \end{cases}$$

donde $s^{\pm} = \{j \in s : j > 1, \pm n_j > 0\}$. Vale notar también que la última ecuación se produce tomando la exponencial de la anterior, y sustituyendo $\exp(x_1)$ por x_{n+1}.

Ahora, como consecuencia de Proposición 3.4.2 *iii*), tenemos que $\overline{\alpha}$ es un cero regular aislado de $(f_1, \ldots, f_n)$, y podemos tomar un entorno U K-definible tal que $\overline{\alpha}$ es el único cero regular de tal sistema en U. Como $J(f_1, \ldots, f_n)(\overline{\alpha}) \neq 0$, por transferencia del teorema de la función inversa (pues $K \vDash \overline{T}$), podemos suponer que $\overline{\alpha}$ es el único cero de $(f_1, \ldots, f_n)$ en U. Vamos probar que. por eso, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2})$ es la única solución de $\Lambda(x_1, \ldots, x_{n+2})$ en el abierto $U \times K^+ \times K^+ \subseteq K^{n+2}$ (K^+ son los positivos de K). si $(\beta_1, \ldots, \beta_{n+2})$ es otra solución. Entonces Las últimas dos ecuaciones de Λ implican que $\beta_{n+1} = \exp(\beta_1)$. Así, $g_i(\beta_1, \ldots, \beta_n, \exp(\beta_1) = f_i(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$. Por eso, $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in U$ - lo que implica $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Por fín, $\alpha_{n+2} = \beta_{n+2}$ por la penúltima ecuación y el hecho de que $\alpha_{n+2} > 0$.

Ahora, sea f la suma de los cuadrados de las ecuaciones de Λ, tenemos que $f \in M_{n+2}^{s\setminus\{1\}}$ y $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2})$ es cero aislado de f - entonces, por la Proposición 3.4.2, existen $h_1, \ldots, h_{n+2} \in M_{n+2}^{s\setminus\{1\}}$ tales que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+2})$ es cero regular de $(h_1, \ldots, h_{n+2})$ y, como $l \in s \setminus \{1\}$, tenemos que $(*)_{m-1}$ es verdadera - contradiciendo la minimalidad de m.

Con eso, finalizamos la demostración del Teorema del Complementário de Wilkie, con excepción a la Proposición 3.4.4, con la cual tenemos una deuda. $\square$

3.5. Teorías o-minimales Suaves

Aqui, proseguimos como en [Bes16]. Sea $\widetilde{\mathbb{R}}$ una expansión o-minimal de $\overline{\mathbb{R}}$ (utilizaremos esta notación excepcionalmente en esta parte del trabajo, por razones que quedarán claras en la próxima parte). Por resultados de la parte 2.7, sabemos que la teoría $\widetilde{T}$ de $\widetilde{\mathbb{R}}$ admite funciones de Skolem definibles. Note que, dado $K \vDash \widetilde{T}$, cada función definible $f : K^m \to K^n$ puede ser considerada una función de Skolem para la fórmula $\phi \wedge \neg\phi(\overline{x}, \overline{y})$. Así, podemos hacer la siguiente definición:

Definición 3.5.1. Sea $K \vDash \widetilde{T}$. Dado $A \subseteq K$, definimos el cierre definible de A, $\mathrm{Cl}(A)$, como el cierre de A por las funciones de Skolem de $\widetilde{T}$.

Proposición 3.5.1. *Sea $K \vDash \widetilde{T}, A \subseteq K$. Entonces*

$$\mathrm{Cl}(A) = \{f(a_1, \ldots, a_n) : n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in A, f \textit{función definible con image en } K\}$$

Demostración. Sea X el conjunto en el lado derecho de la proposición arriba, es claro que tenemos que $X \subseteq \mathrm{Cl}(A)$, pues este es cerrado por las funciones definibles de $\widetilde{T}$. Para probar que $\mathrm{Cl}(A) \subseteq X$, basta probar que X es cerrado por funciones de Skolem definibles - pero esto sigue del hecho de que la composición de funciones definibles es definible. $\square$

Dado $A \subseteq K \vDash \widetilde{T}$, podemos definir $R^{\mathrm{Cl}(A)} = R|_{\mathrm{Cl}(A)^n}$, lo que hace que $\mathrm{Cl}(A)$ sea una $\widetilde{L}$-estructura ($\widetilde{L}$ es el lenguaje de $\widetilde{\mathbb{R}}$). De hecho, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.5.2. *Para $K \vDash \widetilde{T}$, $A \subseteq K$,* $\mathrm{Cl}(A)$ *es una subestructura elemental de K.*

Demostración. Vamos verificar que $\mathrm{Cl}(A)$ satisface el test de Tarski-Vaught. Sea $\phi(\overline{x}, y)$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Cl}(A)$. Suponga que $K \vDash \exists y\phi(\overline{x}, y)[\overline{a}]$, y sea f la función de Skolem asociada a ϕ - entonces $K \vDash \phi[\overline{a}, f(\overline{a})]$ - y el resultado sigue pues $f(\overline{a}) \in \mathrm{Cl}(A)$. $\square$

Además, note que $\mathrm{Cl}(\{0\})$ es una subestructura ordenada arquimediana - vemos eso considerando la imersión de anillos ordenados $\mathrm{Cl}(A) \to \mathbb{R}$ dada por $f^{\mathrm{Cl}(A)}(0) \mapsto f^{\mathbb{R}}(0)$.

Ahora, fijamos $K \vDash \widetilde{T}$, $k \preceq K$, $n \in \mathbb{N}$.

Decimos que una función de K^n en K, o un subconjunto de K^n es k-definible si es definible por una fórmula de $\widetilde{L}$ posiblemente con parametros en k.

Decimos que $\widetilde{T}$ satisface la condición S1 si para cada $K \vDash \widetilde{T}$ y cada función $f : K \to K$ K-definible, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \leq x^N$ para x suficientemente grande.

Un subconjunto $A \subseteq K$ es dicho convexo si $a \in A$ siempre que $x \leq a \leq y$ para algúns $x, y \in A$.

Note que, se $R \subseteq K$ es un subanillo convexo, entonces $I = \{a \in R : a^{-1} \notin R\}$ es un ideal convexo - de hecho, es el único ideal maximal de R. Primero vamos probar que I es ideal: suponga $a \in I, r \in R, a, r \neq 0$ entonces, si $ra \notin I$, $(ra)^{-1} \in R$ - lo que implica que $a^{-1} = rs$ para algún $s \in R$, contrario a la hipotesis de que $a \in I$. Ahora suponga $a, b \in I$. Sin pérdida de generalidad, asuma $|a| \geq |b|$. Si $a + b \notin I$, entonces $|a + b| \notin I$, donde $|a + b|^{-1} = r$ para algún $r \in R$. Eso implica que $|b| \geq (2r)^{-1}$, o sea que $|b|^{-1} \leq 2r$ - pero eso implica $b^{-1} \in R$. Ahora vamos demostrar que I es convexo: suponga que $a < b < c, a, c \in I, b \in K$. Como R es convexo, $b \in R$. Suponga que $b \notin I$ - entonces $b^{-1} \in R$, y también $|b|^{-1}$. Sea $x = \max(|a|, |c|)$, tenemos $x \in I$ y $0 < |b| < x$. Pero eso implica $0 < |x|^{-1} < |b|^{-1}$, donde $x^{-1} \in R$ - contradicción. Note también que se $a \in I$ es tal que $|a| \geq 1/n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $0 \leq |a|^{-1} \leq 1/n$ - lo que es absurdo, pues sigue entonces que $a^{-1} \in R$. Así, $I \subseteq \{a \in R : |a| < 1/n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$.

Ahora, vamos probar el siguiente teorema:

Teorema 3.5.3. *Suponga que $\widetilde{T}$ cumple S1, $K \vDash \widetilde{T}$ y que R es un subanillo convexo de K. Sea $I = \{x \in R : x^{-1} \notin R\}$ el único ideal (convexo) de R. Entonces* *existe $k_0 \preceq K$ tal que $k_0 \subseteq R$ y para cada $a \in R$, $k_0 \cap (a+I)$ tiene exactamente uno elemento - decimos que k_0 divide R.*

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \{k : k \preceq K, k \subseteq R\}$, ordenado por $\preceq$. Entonces $\mathcal{S} \neq \emptyset$, pues $\mathrm{Cl}(\{0\}) \in \mathcal{S}$ - de hecho, $\mathrm{Cl}(\{0\}) \subseteq R$ pues el primero es arquimediano y el segundo contiene $\mathbb{Z}$. Sea k_j un conjunto linealmente ordenado por $\preceq$ - entonces, por el teorema de cadenas elementales de Tarski (ver Corolário 1.44 de [Ges16]), $k_j \preceq \bigcup_j k_j$ - así, $\mathcal{S}$ satisface la hipotesis del Lema de Zorn. Sea $k_0 \in \mathcal{S}$ maximal. Si $b, c \in k_0 \cap (a+I)$ son distinctos, entonces $(b-c)^{-1} \notin R$, lo que contradice $k_0 \subseteq R$. Por lo tanto, $k_0 \cap (a+I)$ tiene, no máximo, uno elemento.

Primero, vamos probar que para cada $a \in R$, existe $\alpha \in k_0$ con $\alpha > a$. Suponga que a es un contraejemplo. Considere $\mathrm{Cl}(k_0 \cup \{a\})$. Entonces $k_0 \preceq \mathrm{Cl}(k_0 \cup \{a\}) \preceq K$. Como k_0 es maximal, existe un elemento en $\mathrm{Cl}(k_0 \cup \{a\})$ que es mayor que cada elemento de R. Podemos escribir tal elemento como $f(a)$, donde f es una función k_0-definible. Por S1, existe $b \in k_0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \models \forall x > b(|f(x)| < x^N)$. Como $a > b$ y $k_0 \preceq K$, $|f(a)| < a^N$ en K - lo que implica que $f(a) \in R$, una contradicción.

Ahora sea $a \in R$ tal que $k_0 \cap (a+I) = \emptyset$. Entonces por cierto $a \notin k_0$, donde sigue que $\mathrm{Cl}(k_0 \cap \{a\})$ tiene un elemento $f(a)$ que no está en R. Así, se probarmos que $f(a) \in R$ para cada función k_0-definible $f : K \to K$, tenemos una contradicción. Sea f una tal función. Como $\widetilde{\mathbb{R}}$ es o-minimal, cada modelo de $\widetilde{T}$ es o-minimal, incluso k_0, y por lo tanto hay $a_1 < \ldots < a_n$ en k_0 (ponga $a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = +\infty$) tal que f es monótona, para k_0, en cada intervalo (a_i, a_{i+1}), para $i = 0, \ldots, n$. Así, por lo que hemos probado en el paragrafo anterior, existen $b, c \in k_0$ con $b < a < c$ tal que f es monótona, para K (pues $k_0 \preceq K$), en (b, c). Como $k_0 \cap (a+I) = \emptyset$, $a-b, c-a > \beta$ para cada $\beta \in I$ (pues I es convexo), donde $(a-b)^{-1}, (c-a)^{-1} \in R$. Por lo que hemos probado en el segundo paragrafo desta demonstación, existe $d \in k_0$ tal que $d > (c-a)^{-1}, (b-a)^{-1}$. Así, $d^{-1} \in k_0$ y $b < b+d^{-1} < a < c-d^{-1} < c$. Por lo tanto, $f(a)$ esta entre $f(b+d^{-1}), f(c-d^{-1})$. Como R es convexo, sigue que $f(a) \in R$. $\square$

Ahora vamos mirar algunas propiedades de Cl, y definir una noción de dimensión a partir de dichas propiedades.

La siguiente proposición mustra que, de hecho, Cl es un cierre.

Proposición 3.5.4. *Sea $K \models \widetilde{T}$, entonces:*

I) *Siempre que $A \subseteq B$, tenemos $A \subseteq \mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(B)$;*

II) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))$*;*

III) *Si $a \in \mathrm{Cl}(A)$, entonces existe $B \subseteq A$ finito con $a \in \mathrm{Cl}(B)$;*

IV) Cl *tiene la propiedad de tranferencia, i.e., si $a \in \mathrm{Cl}(A\cup\{b\})\backslash\mathrm{Cl}(A)$, entonces $b \in \mathrm{Cl}(A \cup \{a\})$.*

Demostración. $i), ii)$ siguen del hecho de que $\mathrm{Cl}(A)$ es el cierre por funciones de Skolem. Para probar $iii)$, es suficiente notar que se $a = f(a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in A$, donde f es una función definible en un $C \subseteq A^n$, entonces $a \in \mathrm{Cl}(\{a_1, \ldots, a_n\})$.

Para probar $iv)$, sea $a \in \mathrm{Cl}(A \cup \{b\})$. Vamos demostrar que $a \in \mathrm{Cl}(A)$ o $b \in \mathrm{Cl}(A \cup \{a\})$. La hipotesis implica que existe una función definible $f : C \to K$, $C \subseteq K$, con parametros en A tal que $f(b) = a$. Defina $B = \{x \in K : f(x) = a\}$. Como K es o-minimal, B es union finita de intervalos. Si b es un punto fronterizo, entonces b es la extremidad de algún de los intervalos que definen B - así, podemos tomar una fórmula $\phi(x)$, con parámetros en $A \cup \{a\}$ tal que b es el único elemento que satisface ϕ, y hacemos eso eligiendo un entorno (en $A \cup \{a\}$) definible de b tal que b es el mayor o el menor elemento tal que $f(x) = a$ en este entorno. Por lo tanto, $\phi(x)$ puede ser entendida la función constante de aridad 0 y image b, donde $b \in \mathrm{Cl}(A \cup \{a\})$.

Por otro lado, suponga que b es punto interior de B. Entonces existen $c_1, c_2 \in B$ con $b \in (c_1, c_2) \subseteq B$. Podemos definir el conjunto de las extremidades izquierdas de los intervalos donde f es constante por la fórmula $\phi(x)$ dada por

$$\exists y > x(\forall z_1, z_2((x < z_1 < y \land x < z_2 < y) \to f(z_1) = f(z_2))\land$$
$$\land\neg\exists w < x(\forall z_1, z_2((w < z_1 < y \land w < z_2 < y) \to f(z_1) = f(z_2))$$

- de manera similar, podemos definir C_d el conjunto de los puntos que son extremidades a derecha de intervalos donde f es constante. Ahora, eligimos $d_1 \in C_i \cup \{-\infty\}$, $d_2 \in C_d \cup \{\infty\}$ tal que $f(x) = a$ para cada $x \in [d_1, d_2]$. Como el interior de C_i, C_d es vació, por o-minimalidad de K sigue que ambos son conjuntos finitos, y por lo tanto todos sus puntos son definibles con parametros en A. Así, podemos definir a como la fórmula $\phi(x)$ que dice "x es el valor de f en $[d_1, d_2]$", y así $a \in \mathrm{Cl}(A)$. $\square$

Definición 3.5.2. Un conjunto $A \subseteq K$ es dicho independiente si $a \notin \mathrm{Cl}(A \setminus \{a\})$ para cada $a \in A$. A genera K si $\mathrm{Cl}(A) = K$. Si A es independiente y genera K, entonces decimos que A es una base.

Lema 3.5.5. *Sea $K \vDash \widetilde{T}$. Entonces todas las bases de K tienen la misma cadinalidad.*

Demostración. Sea B una base con cardinalidad mínima. Suponga $|B| = n \in \mathbb{N}$. Sea m máximo tal que para alguna base B' de K, $|B'| \neq n$ y $|B \cap B'| = m$. Si $m = n$, entonces $B \subsetneq B'$ t existe $a \in B' \setminus B$. Pero entonces $a \in \mathrm{Cl}(B' \setminus \{a\}) \supseteq \mathrm{Cl}(B) = K$, lo que contradice el hecho de que B es independiente. Por lo tanto, $m < n$, y $n < |B'| \neq m$, por minimalidad de la cardinalidad de B. Por lo tanto, existe $b' \in B' \setminus B$. Como B' es independiente, $B' \setminus \{b'\}$ no genera K - así, existe $b \in B \setminus \mathrm{Cl}(B' \setminus \{b'\})$ - caso contrario, tendríamos $\mathrm{Cl}(B) = K \subseteq \mathrm{Cl}(B' \setminus \{b'\})$. Defina $B'' = (B' \setminus \{b'\}) \cup \{b\}$. Note que $|B'' \cap B| = m+1, |B''| = |B|$. Vamos demostrar que B'' es base, contradiciendo la maximalidad de m. Note que $b \in \mathrm{Cl}(B') \setminus \mathrm{Cl}(B' \setminus \{b'\})$, donde, por la propiedad de transferencia, $b' \in \mathrm{Cl}(B'')$. Por lo tanto, $B' \subseteq \mathrm{Cl}(B'')$, donde B'' genera K. Ahora necesitamos muestrar que B'' es independiente. Sea $a \in B''$, suponga que $\mathrm{Cl}(B'' \setminus \{a\}) = K$. Si $a = b$, entonces $b \notin \mathrm{Cl}(B')$, donde podemos suponer que $a \neq b$, y así $a \in B'$. Como B' es independiente, $a \notin \mathrm{Cl}(B' \setminus A)$, donde $a \notin \mathrm{Cl}(B' \setminus \{b', a\})$, donde $a \in \mathrm{Cl}((B' \setminus \{b', a\}) \cup \{b\}) \setminus \mathrm{Cl}(B' \setminus \{b', a\}$. Por lo tanto, $b \in \mathrm{Cl}(B' \setminus \{b'\})$ - una contradicción.

Ahora suponga que $|B|$ es infinita. Sea B' otra base de K. Por supuesto, $|B| \leq |B'|$. Para cada $b \in B$, existe $B_b \subseteq B'$ finito tal que $b \in \mathrm{Cl}(B_b)$. Como $K = \mathrm{Cl}(B') = \mathrm{Cl}(\bigcup_{b \in B} B_b)$, tenemos que $B' = \bigcup_{b \in B} B_b$, pues B' es independiente. Así, es necesário que $|B'| \leq |B|$. $\square$

Ahora podemos, sin ambiguidad, definir la dimensión de K:

Definición 3.5.3. Sea $K \vDash \widetilde{T}$. La dimensión de K es la cardinalidad de sus bases, y es denotada por $\dim(K)$.

A seguir, probramos que siempre es posible hacer una base a partir de un conjunto independiente.

Lema 3.5.6. *Sea $K \vDash \widetilde{T}$. Entonces cualquier conjunto independiente puede ser extendido a una base que lo contiene.*

Demostración. Sea $A \subseteq K$ independiente. Defina el conjunto, ordenado por inclusión, $\mathcal{S} = \{X \subseteq K : X \text{ es independiente y } A \subseteq X\}$. $\mathcal{S} \neq \emptyset$, pues $A \in \mathcal{S}$. Vamos demostrar que $\mathcal{S}$ cumple la condición del Lema de Zorn. Sea $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cadena en $\mathcal{S}$. Defina $C = \bigcup_\alpha C_\alpha$. Sea $a \in C$, si $a \in \mathrm{Cl}(C \backslash \{a\})$, entonces existe $C_a \subseteq C \backslash \{a\}$ finito con $a \in \mathrm{C_a}$. Podemos eligir C_α tal que $C_a \subseteq C_\alpha$ y $a \in C_\alpha$ - por lo tanto, $a \in \mathrm{Cl}(C_\alpha \setminus \{a\})$, una contradicción. Concluimos que hay un elemento A' maximal en $\mathcal{S}$. Entonces A' genera K. Suponga que no: entonces hay $a \in K \setminus \mathrm{Cl}(A')$. Vemos que $A' \cup \{a\}$ es independiente, pues si $b \in \mathrm{Cl}((A' \cup \{a\}) \setminus \{b\}), b \neq a$, entonces $b \in \mathrm{Cl}((A \setminus \{b\}) \cup \{a\}) \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus \{b\})$, donde $a \in \mathrm{Cl}(A)$ - una contradición. $\square$

Sea $k \subseteq K$. Podemos definir el cierre de $A \subseteq K$ sobre k como $\mathrm{Cl}_k(A) := \mathrm{Cl}(k \cup A)$. Las propiedades de la Proposición 3.5.4 también son verdaderas (la prueba es practicamente la misma) para el operador Cl_k - donde los lemas anteriores también son válidos y, así, podemos definir la dimensión de K sobre k, $\dim_k(K)$.

Ahora, una propiedad de $\dim_k$ que es similar al caso de cuerpos.

Lema 3.5.7. *Sean $k_0, k_1, K \vDash \widetilde{T}$, $k_0 \subseteq k_1 \subseteq K$. Entonces* $\dim_{k_0}(K) = \dim_{k_0}(k_1) + \dim_{k_1}(K)$

Demostración. Sea A base de k_1 sobre k_0. Entonces A es independente independiente con respecto a Cl_{k_0}, y, por el lema anterior, puede ser extendida a una base B de K sobre k_0. Escribimos entonces $B = A \cup C$, donde $C = B \setminus A$. Entonces C

genera K sobre k_1, pues

$$K = \mathrm{Cl}_{k_0}(A \cup C) = \mathrm{Cl}_{k_0}(k_1 \cup C) = \mathrm{Cl}_{k_1}(C)$$

Ahora demostremos que C es independiente con respecto a Cl_{k_1}. Si $a \in C$ y $a \in \mathrm{Cl}_{k_1}(C)$, entonces $a \in \mathrm{Cl}_{k_0} A \cup C$, lo que prueba lo deseado. $\square$

Definamos ahora una otra noción de dimensión. Sea $K \vDash \widetilde{T}$, entonces K es un cuerpo real cerrado. Decimos que $a \in K$ es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|a| < n$. Decimos que a es infinitesimal si $|a| < 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. El conjunto $\mathrm{Fin}(K)$ de todos los elementos finitos de K es un subanillo convexo de K, con único ideal maximal convexo $\mu(K)$ - los elementos infinitesimales de K (para ver eso, basta notar que se a es infinitesimal, entonces $|a|^{-1}$ es mayor que cada numero natural). El conjunto $\mathrm{Fin}(K) \setminus \mu(K)$ es un subgrupo multiplicativo de $K \setminus \{0\}$. Así, definimos:

Definición 3.5.4. El grupo de valores de $K \vDash \widetilde{T}$ es

$$V(K) = K \setminus \{0\}/(\mathrm{Fin}(K) \setminus \mu(K))$$

Denotaremos la operación del grupo $V(K)$ por $+$. Es un grupo ordenado si definimos $a/(\mathrm{Fin}(K) \setminus \mu(K)) > 0$ si $a \in \mu(K)$. Esta definición funciona pues el producto $\mu(K)$ es un ideal. Como $V(K)$ es divisible, pues K tiene todas las n-esimas raíces, $V(K)$ es un espacio vectorial ordenado sobre $\mathbb{Q}$. Denotamos su dimensión por valdim(K).

Definimos el mapa de evaluación $\nu_K : K \to V(K) \cup \{\infty\}$ como la extensión del mapa natural $K \setminus \{0\} \to V(K)$, poniendo $\nu_K(0) = \infty$.

Observación 3.5.1. Un espacio vectorial V sobre un cuerpo ordenado K es ordenado si existe un subconjunto $P \subseteq V$, llamado de conjunto de positivos, tal que la suma de positivos es positiva, y el producto de un vector positivo por un escalar positivo es positivo. Eso define un orden en V poniendo $v > u \leftrightarrow v - u \in P$.

Si definimos $\infty + a = a + \infty = \infty$, se verifican las siguientes propiedades:

I) $\nu_K(x \cdot y) = \nu_K(x) + \nu_K(y)$. Esto sigue pues ν_k es una extensión del mapa quociente;

II) $\nu_K(x+y) \geq \min(\nu_K(x), \nu_K(y))$, con igualdad si $\nu_K(x) \neq \nu_K(y)$.

III) Para cada $x \in K$, $\nu_K(x) \leq 0$ si, y solo si, $x \in \mathrm{Fin}(K)$, con $\nu_K(x) > 0$ si, y solo si, $x \in \mu(K)$. Eso es inmediato de la definición del orden en $V(K)$.

Observación 3.5.2. Note que, si $\widetilde{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}}$, entonces las funciones definibles pueden ser escritas como relaciones polinomiales entre las variables, donde $\dim(K)$ es el grado de transcendencia sobre $\mathbb{Q}$. Además, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ y $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ para algún polinomio p con coeficientes racionales, entonces $\nu_K(\alpha_1), \ldots, \nu_K(\alpha_n)$ son linealmente dependentes sobre $\mathbb{Q}$. De hecho, si $p = \sum_{\sigma \in S} b_\sigma x^\sigma$, donde $S \subseteq \{1, \ldots, n\}^n$ es un conjunto de multi-indices tal que $b_\sigma \neq 0$ y $x^{(i_1, \ldots, i_n)} = x^{i_1} \ldots x^{i_n}$, con $p(\overline{\alpha}) = 0$, considere τ tal que $\nu_K(b_\tau \overline{\alpha}^\tau)$ es minimo. Si $\nu_K(b_\sigma \overline{\alpha}^\sigma) \neq \nu_K(b_\tau \overline{\alpha}^\tau)$ para cada otro $\sigma \in S$, Sea $S' \subseteq S$ conteniendo τ tal que

$$\nu_K \left(\sum_{\sigma \in S'} b_\sigma \overline{\alpha}^\sigma \right) = \nu_K(b_\tau \overline{\alpha}^\tau)$$

y sea $\eta \in S \setminus S'$ - entonces

$$\nu_K \left(a_\eta \overline{\alpha}^\eta + \sum_{\sigma \in S'} b_\sigma \overline{\alpha}^\sigma \right) = \text{mín} \left(\nu_K(a_\eta \overline{\alpha}^\eta), \nu_K \left(\sum_{\sigma \in S'} b_\sigma \overline{\alpha}^\sigma \right) \right) = \nu_K(b_\tau \overline{\alpha}^\tau)$$

Por lo tanto, si proseguimos de $S' = \{\tau\}$ añadindo elementos hasta obtener S, tenemos que $\nu_K(p(\overline{\alpha}) = \nu_K(b_\tau \overline{\alpha}^\tau) < \infty$ - lo que es absurdo. Así, existe $\eta \neq \tau$ con $\nu_K(b_\eta \overline{\alpha}^\eta) = \nu_K(b_\tau \overline{\alpha}^\tau)$. Si denotamos $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in S$, tenemos entonces que

$$\sum_{i=1}^{n} (\eta_i - \tau_i) \nu_K(\alpha_i) = 0$$

- donde $\nu_K(a_1), \ldots, \nu_K(a_n)$ son linealmente dependentes.

Decimos que $\widetilde{T}$ cumple la condición S2 si para cada $\widetilde{L}$-formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, existen $m, p \in \mathbb{N}$ y funciones C^∞ $F_i : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$ que son definibles sin parametros y tales que

$$\widetilde{\mathbb{R}} \models \forall \overline{x} \left(\phi(\overline{x}) \leftrightarrow \exists \overline{y} \left(||\overline{y}|| \leq 1 \wedge \bigvee_{i=1}^{p} (N_i(\overline{y}) \wedge F_i(\overline{x}, \overline{y}) = 0) \right) \right)$$

donde, si $\overline{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $||\overline{y}|| = \text{máx}\{|y_i| : i = 1, \dots, m\}$, y $N_i(y)$ es una fórmula de forma $\bigwedge_{j \in s_i} y_j \neq 0$ para algún $s_i \subseteq \{1, \dots, m\}$.

Definición 3.5.5. Sea $\widetilde{T}$ la teoría de una expansión o-minimal de $\overline{\mathbb{R}}$, decimos que $\widetilde{T}$ es suave si satisface las condiciones S1 y S2.

Teorema 3.5.8. *Sea $\widetilde{T}$ suave y $K \models \widetilde{T}$. Si* $\dim(K)$ *es finito, entonces* $\text{valdim}(K) \leq \dim(K)$.

Demostración. Primeramente, note que si K es arquimediano, $\text{valdim}(K) = 0$, entonces el resultado sigue. Así, si $\dim(K) = 0$, entonces como $\text{Cl}(\emptyset) = \text{Cl}(\{0\}) = K$ - pues en este caso tenemos que este conjunto es el conjunto de elementos definibles - K es arquimediano y por lo tanto, el resultado del teorema es verdadero para K. Ahora proseguimos por indución: suponga que $\dim(K) = n > 0$ y $\mu(K) \neq \emptyset$.

Ahora vamos probar la siguiente afirmación: existe $a_0 \in K$, $a_0 > 0$, tal que para cada $b \in K$, $b > 0$, tenemos $a_0^m < b$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Sean $c_1, \dots, c_n \in K$ tales que $\{c_1, \dots, c_n\}$ es una base de K (en el sentido de Cl)). Defina $K_i = \text{Cl}(\{c_0, \dots, c_i\})$, para $i = 0, \dots, n$. Vamos utilizar indución en i hasta n. Note que $K_0 = \text{Cl}(\emptyset)$ es arquimediano, así el resultado es verdadero tomando $a_0 = 1/2$. Ahora suponga que el resultado es verdadero para $i \in \{0, \dots, n-1\}$ - vamos probar que es verdad para $i+1$. Sea a_i que verifica la afirmación para K_i. Suponga que existe $b \in K_{i+1}$ positivo tal que $a_i^m > b$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Claramente $b \notin K_i$, así $\{c_1, \dots, c_i, b^{-1}\}$ es un conjunto independiente de K_{i+1}, y por lo tanto una base. Eso significa que cada elemento de K_{i+1} tiene la forma $f(b^{-1})$ para alguna función K_i-definible f. Sea f una función K_i-definible que no se anula en b^{-1}. Como $K_i \preceq K_{i+1} \preceq K$, existe $c \in K_i$ tal que $K_i \models \forall x > c(|f(x)|^{-1}] \leq x^m)$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Como $c > a_i^{m_0} > b$ para algún $m_0 \in \mathbb{N}$, tenemos que $b^{-1} > c$ y, por lo tanto, $K_{i+1} \models |f(b^{-1})|^{-1} \leq b^{-m}$ (pues $K_i \preceq K_{i+1}$) y así $b^m \leq |f(b^-1)|$, donde $a_{i+1} = b$ tiene la propiedad deseada.

Ahora sea $a \in K$ como en la afimación anterior. Note que $a \in \mu(K)$, pues $\mu(K) \neq 0$. Sea $R = \{b \in K : |b| < a^{-1/m}$ para cada $m \in \mathbb{N} \setminus 0\}$. Entonces R es un subanillo convexo de K, y su ideal maximal (único) I es *arquimediano* en el sentido de que dados $x, y \in I \setminus \{0\}$, existe m tal que $|y|^m < |x|$.

Ahora, como consecuencia del Teorema 3.5.3, existe $k \preceq K$ tal que k divide I. Como $a^{-1} \notin R$, tenemos que $k \neq K$, y que $\dim(k) < \dim(K) = n$. Digamos $\dim(k) = n - r$, donde r es la diferencia entre las dimensiones de K y k. Elija $c_1, \ldots, c_r$ tales que $\{c_1, \ldots, c_r\}$ es una base de K sobre k. Además, podemos suponer que $c_1, \ldots, c_r \in I$, pues si $c_i \notin R$, $c_i^{-1} \in I$, y si $c_i \in R \setminus I$, podemos sustituir c_i por el único $\eta \in I$ tal que $c_i + \eta \in k$ (utilizando la propiedad de que k divide R).

Ahora sea k^* el cierre algebraico de $k(c_1, \ldots, c_r)$ en K. Entonces $\nu_K[k^* \setminus \{0\}]$ y $\nu_K[k \setminus \{0\}]$ son subespacios (como $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales) de $V(K)$.

Vamos demostrar la afirmación: $\dim_{\mathbb{Q}} \nu_K[k^* \setminus \{0\}] \leq \dim_{\mathbb{Q}} \nu_K[k \setminus \{0\}] + r$. Suponga que vale $\dim_{\mathbb{Q}} \nu_K[k^* \setminus \{0\}] > \dim_{\mathbb{Q}} \nu_K[k \setminus \{0\}] + r$. Como $\nu_K[k \setminus \{0\}]$ es subespacio de $\nu_K[k^* \setminus \{0\}]$, podemos encontrar $a_1, \ldots, a_{r+1} \in k^* \setminus \{0\}$ tales que $\nu_K(a_1), \ldots, \nu_K(a_{r+1})$ son linealmente independientes (sobre $\mathbb{Q}$) y que el subespacio generado por estos esta contenido en el subespacio complementário de $\nu_K[k \setminus \{0\}]$. Entonces, por un argumento similar al de la Observación 3.5.2, $a_1, \ldots, a_{r+1}$ son algebraicamente independientes sobre k, lo que contradice el hecho de que $\dim_k(K) = r$.

Note que el mapa $\nu_K[k \setminus \{0\}] \to V(k)$, $x/(\mathrm{Fin}(K) \setminus \mu(K)) \mapsto x/(\mathrm{Fin}(k) \setminus \mu(k))$ es un isomorfirmo de Q-espacios vectoriales. donde del paragrafo anterior concluimos que $\dim_{\mathbb{Q}} \nu_K[k^* \setminus \{0\}] \leq \mathrm{valdim}(k) + r$ y, por nuestra hipotesis de inducción, $\dim_{\mathbb{Q}} \nu_K[k^* \setminus 0] \leq \dim(k) + r = n$. Así, es suficiente probar que $\nu_K[k^* \setminus \{0\}] = V(K)$.

Sea $d \in K \setminus \{0\}$. Necesitamos probar que existe $\alpha \in k^*$ tal que $\nu_K(\alpha) = \nu_K(d)$. Como $\nu_K(-\beta) = \nu_K(\beta)$ y $\nu_K(\beta^{-1}) = -\nu_K(\beta)$ para cada $\beta \in K \setminus \{0\}$, y $\nu_K(\beta) \in \nu_K(k \setminus \{0\})$ para cada $\beta \in R \setminus I$ (pues k divide R), podemos asumir que $d > 0$ y $d \in I$. Sea $f : K^r \to K$ k-definible tal que $f(c_1, \ldots, c_r) = d$, con grafo definido por $\phi(\overline{\gamma}, x_1, \ldots, x_r, x)$, donde $\overline{\gamma}$ es una tupla de elementos de k, para alguna $\widetilde{L}$-fórmula $\phi(\overline{z}, x_1, \ldots, x_r, x)$. Por S2, existen $m, p \in \mathbb{N}$, $F_i : K^{r+1+m} \to K$, $i = 1, \ldots, p$

funciones C^∞ (en el sentido de K) k-definibles, y tales que

$$K \models \phi(\overline{\gamma}, c_1, \ldots, c_r, d) \leftrightarrow \exists \overline{y} \left(||\overline{y}|| \leq 1 \wedge \bigvee_{i=1}^{p} (N_i(\overline{y}) \wedge F_i(\overline{\gamma}, c_1, \ldots, c_r, d, \overline{y}) = 0) \right)$$

donde $y = y_1, \ldots, y_m$ y $||y||$, N_i, son como la defición de S2. Sea $i \in \{1, \ldots, p\}$ tal que la disyunción es verdadera, $s = s_i \subseteq \{1, \ldots, m\}$, , $F = F_i$, tenemos entonces que F cumple: para cada $x \in K$, $f(c_1, \ldots, c_r) = x$ si, y solo si, existen $b_1, \ldots, b_m \in K$ con $b_i \neq 0$ para $i \in s$, $|b_i| \leq 1$ para cada $i = 1, \ldots, m$, tal que $F(c_1, \ldots, c_r, x, b_1, \ldots, b_m) = 0$.

Ahora fijemos $\beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ con $\beta_i \neq 0$ para $i \in s$, $|\beta_i| \leq 1$ para $i = 1, \ldots, m$, y, como en el paragrafo anterior, $F(c_1, \ldots, c_r, d, \beta_!, \ldots, \beta_m) = 0$. Como $\beta_1, \ldots, \beta_m \in R$ (pues R es convexo), podemos eligir, de manera única, $\beta_1^0, \ldots, \beta_m^0 \in k$ tales que $\beta_i - \beta_i^0 \in I$ - pues k divide R. Como c_1 es no nulo, pues es parte de una base de K sobre k, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|c_1|^N < |\beta_i$ - como consecuencia de I tener la propiedad arquimediana.

Sea $A - \{(x_1, \ldots, x_m) \in K^m : |c_1|^N \leq |x_i| \text{ para } i \in s, |x_i| \leq 1 \text{ para } i = 1, \ldots, m\}$.

Considere la función

$$h : K^{1+m} \to K : (x, x_1, \ldots, x_m) \mapsto |F(c_1, \ldots, c_r, x, x_1, \ldots, x_m)|$$

Como h es contínua (en el sentido de K), debe alcanzar un mínimo en cada subconjunto cerrado, acotado y K-definible de K. Sea γ el mínimo de h en $([0,1] \backslash (\frac{d}{2}, \frac{3d}{2})) \times A$. Entonces $\gamma > 0$, pues $\gamma = 0$ implicaria $f(c_1, \ldots, c_r) = d'$ para algún $d' \neq d$. Elije $N' \in \mathbb{N}$ tal que $|c_1|^{N'} < \gamma$. Entonces para cada $\alpha \in [0, 1]$ y $(\beta_1', \ldots, \beta_m') \in A$, si $|F(c_1, \ldots, c_r, \alpha, \beta_1', \ldots, \beta_m')| \leq |c_1|^{N'}$, tenemos que $\frac{d}{2} < \alpha < \frac{3d}{2}$. Multiplicando por d^{-1} la desigualdad arriba, vemos que eso implica que $\nu_K(\alpha) = \nu_K(d)$.

Ahora sea $\lambda \in \mathbb{N}$ y considere la expansión de Taylor de grado λ de $F : K^{r+1+m} \to K$ con resto de forma de Lagrange sobre el punto

$$\overline{\omega} = (0, \ldots, 0, \beta_1^0, \ldots, \beta_m^0) \in k^{r+1+m}$$

(son $r+1$ ceros antes de b_1^0). Como $K \models \widetilde{T}$, podemos transferir el teorema de Taylor de $\mathbb{R}$ para K, obteniendo así un polinomio $p(y_1, \ldots, y_r, x, x_1, \ldots, x_m)$ con coeficientes en k (pues F es k-definible) y un elemento $B_\lambda \in k$ positivo tal que:

$$\text{para cada } t \in K \text{ con } 0 < t < 1, \text{ y cada } \overline{z} \in K^{r+1+m} \text{ con } ||\overline{z} - \overline{\omega}|| < t,$$
$$||F(\overline{z} - p_\lambda(\overline{z})|| < B_\lambda t^{\lambda+1}$$

Ahora, sea $t_0 = 2(r+1+m)\,\text{máx}(|c_1|, \ldots, |c_r|, d, |\beta_1 - \beta_1^0|, \ldots, |\beta_m - \beta_m^0|)$. Entonces $t_0 \in I$ y $t_0 > 0$ - así podemos eligir λ_0 suficientemente grande para que

$$t^{\lambda_0+1} < (2B_{\lambda_0})^{-1}|c_1|^{N'}$$

Ahora poniendo $\lambda = \lambda_0$, $t = t_0$, $\overline{z} = (c_1, \ldots, c_r, d, \beta_1, \ldots, \beta_m)$, tenemos quue $||\overline{z} - \overline{\omega}|| < t_0$, y así

$$|p(c_1, \ldots, c_r, d, \beta_1, \ldots, \beta_m)| < \frac{1}{2}|c_1|^{N'}$$

Por definición de A, tenemos $(d, \beta_1, \ldots, b_m) \in A$ y también tenemos

$$||\overline{z} - \overline{\omega}|| < ((2B_{\lambda_9=0})^{-1}|c_1|^{N'})^{(\lambda_0+1)^{-1}}$$

Ahora, las condiciones arriba pueden ser expresas en $\overline{L}_{k^*}$, y pueden ser vistas como condiciones en el punto $(d, \beta_1, \ldots, \beta_m)$. Como $k^* \preceq_{\overline{L}} K$ (pues es un cuerpo real cerrado), existen $\alpha, \beta_1', \ldots, \beta_m' \in k^*$ tal que

$$|p(c_1, \ldots, c_r, \alpha, \beta_1', \ldots, \beta_m')| < \frac{1}{2}|c_1^{N'}|$$

$$(\alpha, \beta_1', \ldots, \beta_m') \in [0,1] \times A$$

$$||(c_1, \ldots, c_r, \alpha, \beta_1', \ldots, \beta_m') - \overline{\omega}|| < ((2B_{\lambda_0})^{-1}|c_1|^{N'})^{(\lambda_0+1)^{-1}}$$

Así, utilizando la el teorema de Taylor con resto de Lagrange (en K), tenemos

$$|F(c_1, \ldots, c_r, \alpha, \beta_1', \ldots, \beta_m') - p(c_1, \ldots, c_r, \alpha, \beta_1', \ldots, \beta_m')| < \frac{1}{2}|c_1|^{N'}$$

donde, por la desigualdad triangular, obtenemos

$$|F(c_1, \ldots, c_r, \alpha, \beta'_1, \ldots, \beta'_m)| < |c_1|^{N'}$$

- lo que concluie la demostración. $\square$

Ahora note que, si $K \vDash \widetilde{T}$ y $k \preceq K$, entonces $\nu_K[k \backslash 0]$ es un $\mathbb{Q}$=subespacio vectorial de $V(K)$ (isomorfo a $V(k)$). Eso motiva la siguiente definición:

Definición 3.5.6. Sea $K \vDash \widetilde{T}$, $k \preceq K$, entonces $\mathrm{valdim}_k(K)$ es la codimensión de $\nu_K[k \setminus \{0\}]$.

Proposición 3.5.9. *Sea $K \vDash \widetilde{T}$, $k_0 \preceq k_1 \preceq K$, entonces es verdad la siguiente propiedad de* valdim*:* $\mathrm{valdim}_{k_0}(K) = \mathrm{valdim}_{k_0}(k_1) + \mathrm{valdim}_{k_1}(K)$.

Demostración. Basta notar que la aplicación $x/(\mathrm{Fin}(k_1) \setminus \mu(k)) \mapsto x/(\mathrm{Fin}(K) \setminus \mu(K))$ for $x \in k_0 \setminus \{0\}$ es un isomorfismo entre $\nu_{k_1}[k_0 \setminus \{0\}]$ y $\nu_K[k_0 \setminus \{0\}]$. $\square$

Teorema 3.5.10. *Suponga que $\widetilde{T}$ es suave, $K \vDash \widetilde{T}$, $k \preceq K$ y $\mathrm{dim}_k(K)$ es finito. Entonces $\mathrm{valdim}_k(K) \leq \mathrm{dim}_k(K)$.*

Demostración. Si $\mathrm{dim}_k(K) = n$, existen $k = k_0 \preceq k_1 \cdots \preceq k_n = K$ tales que $\mathrm{dim}_{k_i}(K_{i+1} = 1$ para $i = 0, \ldots, n$. Basta considerar una base $\{c_1, \ldots, c_n\}$ y definir $k_0 = \mathrm{Cl}_k(\emptyset)$, $k_i = \mathrm{Cl}_k(\{c_1, \ldots, c_i\}$ para $i = 1, \ldots, n$. Así, como valen

$$\mathrm{dim}_k(K) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{dim}_{k_i}(k_{i+1}), \mathrm{valdim}_k(K) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{valdim}_{k_i}(k_{i+1})$$

vemos que es suficiente demostrar el caso $n = 1$. Entonces vamos asumir este caso. Sea a un generador de K sobre k. Suponga, para una contradicción, que $\mathrm{valdim}_k(K) \geq 2$. Entonces existen funciones k-definibles $f, g : K \to K$ tales que $\nu_K(f(a)), \nu_K(g(a))$ generan un subespacio V de $V(K)$ con $V \oplus \nu_K[k \setminus \{0\}]$.

Ahora considere una expansion (K, P) de K, donde P es un predicado unario a ser interpretado como (el dominio de) k. Sea $({}^*K, {}^*P)$ una extensión elemental

$\aleph_0$-saturada de (K,P). Entonces ${}^*k = P^{({}^*K,{}^*P)}$ es una subestructura elemental de ${}^*K$, y es $\aleph_0$-saturada. Sea $K' = \mathrm{Cl}_{{}^*k}(a)$.

Vamos demostrar que $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\nu_{K'}(f(a)), \nu_{K'}(g(a)) \cap \nu_{K'}[{}^*k \setminus \{0\}] = \{0\}$. Entonces existen, $p, q \in \mathbb{Q}$, $b \in^* k$ tales que $p\nu_{K'}(f(a)) + q\nu_{K'}(g(a)) + \nu_{K'}(b) = 0$. En otras palabras, existe un entero positivo i tal que

$$i^{-1} < |f(a)|^p |g(a)|^q |b| < i$$

pero como eso es verdad en ${}^*K$, y $(K,P) \preceq ({}^*K, {}^*P)$, existe $b' \in k \setminus \{0\}$ tal que

$$i^{-1} < |f(a)|^p |g(a)|^q |b'| < i$$

- lo que contradice el hecho de que $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\nu_K(f(a)), \nu_K(g(a))) \cap \nu_K(k \setminus \{0\}) = \{0\}$. Así, podemos suponer que k es $\aleph_0$-saturado (tomando $k =^* k$ y $K = K'$).

Ahora sea k_0 una subestructura elemental de k tal que $\dim(k_0)$ es finito y f, g son k_0-definibles (podemos tomar $k_0 = \mathrm{Cl}(A)$, donde A es el conjunto de parametros en k de f, g). considere el seguinte conjunto $\Theta(x)$:

$$\{|f(x)|^p |g(x)|^q |b| \leq i^{-1} \vee |f(x)|^p |g(x)|^q |b| \geq i : i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p, q \in \mathbb{Q}, b \in k_0 \setminus \{0\}\}$$

Entonces, por supuesto, a realiza $\Theta(x)$, lo que significa que $\Theta(x)$ es finitamente satisfacible en k - pues $k \preceq K$. Como $\dim(k_0)$ es finita, podemos reescribir $\Theta(x)$ de forma a contener apenas finitos parametros de k_0. Así, como k es $\aleph_0$-saturada, $\Theta(x)$ es realizable para algun $a_1 \in k$. Sea $k_0 = \mathrm{Cl}(a_1)$. Note que a_1 no puede pertenecer a k_0, pues si no, tomando $b = f(a_1)^{-1}$, tendríamos $1/2 < |f(a_1)||b| < 2$, lo que contradice el hecho de que a_1 realiza Θ. Así, $\dim(k_1) = \dim(k_0)+1$, y $\mathrm{valdim}(k_1) \geq \mathrm{valdim}(k_0) + 2$, pues por definición de $\Theta(x)$ $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\nu_{k_1}(f(a)), \nu_{k_1}(g(a))) \cap \nu_{k_1}[k_0 \setminus \{0\}] = \{0\}$. Pero podemos repetir este argumento con k_1 en lugar de k_0 y obtener, para cada $l \in \mathbb{N}$, una estructura elemental $k_l \preceq k$ tal que $\dim(k_l) = \dim(k_0) + l$ y con $\mathrm{valdim}(k_l) \leq \mathrm{valdim}(k_0) + 2l$, lo que contradice el Teorema 3.5.8 si tomamos $l = \dim(k_0) + 1$ - pues en este caso

$$\mathrm{valdim}(k_l) \geq \mathrm{valdim}(k_0) + 2\dim(k_0) + 2 = \mathrm{valdim}(k_0) + \dim(k_l) + 1$$

. $\square$

Por fín, vamos probar un resultado necesário sobre espacios vectoriales ordenados.

Lema 3.5.11. *Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial ordenado y U un subespacio de V tal que la codimensión de U en V es n. Entonces existe una base $0 < v_1 < \cdots < v_n$ del subespacio complementário a U tal que, si $v \in V$ es tal que $v > u$ para cada $u \in U$ y $v = \sum_{i=1}^{n} q_i v_i + u_0$ (donde $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$, $u_0 \in U$), entonces $|v| > qv_j$ para algún $q \in \mathbb{Q}$ positivo, donde $j = \text{máx}\{i : q_i \neq 0\}$.*

Demostración. Empezamos por demostrar que los subespacios convexos (en el sentido de orden) de V son linealmente ordenados por inclusión. Sean W_1, W_2 subespacios convexos y suponga, sin perdida de generalidad, que $W_1 \setminus W_2 \neq \emptyset$. Sea $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ positivo, $w_2 \in W_2$ arbitrario. Como w_1 no es elemento de W_2, $|w_2| < w_1$, donde $w_2 \in W_1$, pues W_1 es convexo.

Podemos entonces considerar una cadena

$$U = W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_l = V$$

donde W_{i+1} es el menor subespacio convexo que contiene estrictamente W_i, para cada $i = 1, \ldots, l-1$. La cadena tiene que ser finita, pues la codimensión de U en V es finita. Para cada $i = 1, \ldots, l-1$, sea $0 < w_1^i < \cdots < w_{m_i}^i$ una base de un subespacio complementario de W_i sobre W_{i+1}. Entonces

$$0 < w_1^1 < \ldots < w_{m_1}^1 < w_1^2 < \cdots < w_{m_2}^2 < \cdots < w_1^{l-1} < \cdots < w_{m_{l-1}}^{l-1}$$

es una base del subespacio complementario de U sobre V. Vamos escribir la base como $0 < v_1 < \cdots < v_n$. Ahora, sea $v \in V$ y suponga que tenemos $v = \sum_{i=1}^{n} q_i v_i + u_0$ ($q_i \in \mathbb{Q}$, $u_0 \in U$), y $v > u$ para cada $u \in U$. Así, $\{i : q_i \neq 0\} \neq \emptyset$. Ahora tome $j = \text{máx}\{i : q_i \neq 0\}$. Por definición, $v_j = w_{j_0}^{i_0}$ para algúns i_0, j_0. Podemos entonces escribir $v = x + y$, donde $x \in W_{i_0}$, $y \in W_{i_0+1} \setminus W_{i_0}$, con $y \neq 0$. Debemos encontrar $q \in \mathbb{Q}$ positivo tal que $|v| > qv_j$. Suponga, por contrário, que $|x + y| \leq qv_j$ para cada $q \in \mathbb{Q}$ positivo. Note que $|x| < \frac{1}{2}|y|$ - en caso contrario tendriamos $y \in W_{i_0}$, pues W_{i_0} es convexo. Así,

$$\frac{1}{2}|y| \leq |y| - |x| \leq |x+y| \leq qv_j$$

para cada racional positivo $q \in \mathbb{Q}$. Pero entonces el cierre convexo del subespacio generado por y está estrictamente contenido entre W_{i_0} y W_{i_0+1}, lo que es absurdo - así, está probado el lema. □

3.6. Prueba de la Proposición 3.4.4

En esta parte del trabajo $T_{\text{exp}}, L_{\text{exp}}$ denotan la teoría y el lenguaje de $(\overline{\mathbb{R}}, \exp)$, respectivamente. De manera similar, T_e, L_e denotan la teoría y lenguaje de $(\overline{\mathbb{R}}, e)$, donde e es la función $x \mapsto \exp((1+x^2)^{-1})$. Empezamos con un resultado de van den Dries ([Dri86]) que utilizaremos para demostrar que T_e es suave, pero cuya demostración esta fuera del alcance deste trabajo.

Definición 3.6.1. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y $f : U \to \mathbb{R}$ función analitica, donde U es un entorno abierto de $[0,1]^m$, defina $\overline{f} = f \cdots I_{[0,1]^m}$. Definimos entonces un lenguaje $L_{an} \supseteq \overline{L}$ añadindo un símbolo de función para cada $\overline{f}$, y definimos $\mathbb{R}_{an}$ como la L_{an}-estructura obtenida interpretando cada símbolo de función como la función $\overline{f}$ correspondiente. La teoría de $\mathbb{R}_{an}$ denotamos por T_{an}.

Proposición 3.6.1. *Las siguientes proposiciones son verdaderas para $\mathbb{R}_{an}$:*

I) *La estructura $\mathbb{R}_{an}$ es o-minimal.*

II) *Si $a \in \mathbb{R}$ y $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función definible con parametros en $\mathbb{R}_{an}$, entonces existe $d \geq a$ tal que en (d, ∞) f puede ser representada por una série de Puiseux convergente*

$$f(x) = \sum_{i=p}^{\infty} a_i x^{-i/q}$$

donde q es un entero positivo, $p \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{R}$ (para $i \geq p, i \in \mathbb{Z}$) y $a_p \neq 0$ si f no es eventualmente identicamente nula.

Si denotamos por $\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{T}, \widetilde{L}$ la estructura, teoría y lenguaje, respectivamente, de las funciones Pfaffianas restringidas (como en la parte 3.1 deste trabajo), vemos que como $\widetilde{L} \subseteq L_{an}$, el resultado anterior también es valido para esta estructura. Por consecuencia, como $(\overline{\mathbb{R}}, e)$ tiene los mismos conjuntos definibles que $(\overline{\mathbb{R}}, \exp \cdot I_{[0,1]})$, tenemos el siguiente corolário

Corolário 3.6.2. *La teoría T_e es o-minimal.*

Otro resultado importante es:

Corolário 3.6.3. *Suponga $k \vDash \widetilde{T}$, $a \in K$ y $g : (a, \infty) \to K$ una función K-definible (con parametros) que no es eventualmente identicamente nula. Entonces existe $s \in \mathbb{Q}$ y $b \in K$ no nulo tal que $K \vDash \lim_{x\to\infty} g(x)x^s = b$.*

Demostración. Sea $\phi(\overline{z}, x, y)$ y tal que $\phi(\overline{c}, x, y)$ define el grafo de g en K, donde $\overline{c}$ son los parametros en K. Defina la $\widetilde{L}$-formula $\psi(\overline{z})$ por

$$\exists u(\forall x > u \exists! y \phi(\overline{z}, x, y) \wedge \forall x > u \exists w > x \neg\phi(\overline{z}, w, 0))$$

y note que $K \vDash \psi[\overline{c}]$.

Suponga ahora que $\overline{\alpha}$ es una tupla de numeros reales tal que $\widetilde{R} \vDash \psi(\overline{\alpha})$ y sea $f_{\overline{\alpha}} : (\beta, \infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $\phi(\overline{\alpha}, x, y)$ en $\mathbb{R}$ (para algún $\beta \in \mathbb{R}$). Utilizando la Proposición 3.6.1 *ii*), existe $d \geq \beta$ tal que, si $x \geq d$, entonces

$$f_{\overline{\alpha}}(x) = \sum_{i=p}^{\infty} a_i x^{-i/q}$$

, con q entero positivo, $p \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{R}$ para $i \geq p, i \in \mathbb{Z}$ y $a_p \neq 0$. Entonces claramente

$$\lim_{x\to\infty} f_{\overline{\alpha}}(x)x^{p/q} = a_p$$

Además, podemos derivar la série de Puiseux término a término para obtener

$$f'_{\overline{\alpha}} = \sum_{i=p}^{\infty} \frac{-ia_i}{q} x^{-i/q-1}$$

y así

$$\lim_{x\to\infty} f'_{\overline{\alpha}}(x)x^{p/q+1} = \frac{-pa_p}{q}$$

Combinando los dos limites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-f'_{\overline{\alpha}(x)}x}{f_{\overline{\alpha}}} = \frac{p}{q}$$

Ahora sea $\chi(\overline{z}, y)$ la $\widetilde{L}$-fórmula formalizando (la expresión con ϵ, δ)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-f'_{\overline{z}}(x)x}{f_{\overline{z}}(x)} = y$$

Entonces, como probamos, la fórmula $\exists\overline{z}(\psi(\overline{z}) \wedge \chi(\overline{z}, y))$ define un conjunto de numeros racionales $S \subseteq \mathbb{Q}$. Como $\widetilde{\mathbb{R}}$ es o-minimal, $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Así, tenemos que

$$\widetilde{\mathbb{R}} \vDash \forall\overline{x}\left(\psi(\overline{z}) \to \exists y\left(y \neq 0 \wedge \bigvee_{i=1}^{n} \lim_{x\to\infty} f_{\overline{z}}(x)x^{s_i} = y\right)\right)$$

Como este es un $\widetilde{L}$-enunciado, también es verdad en K. Como $K \vDash \psi[\overline{c}]$ y $f_{\overline{c}}(x) = g(x)$, el resultado sigue. $\square$

Teorema 3.6.4. *La teoría T_e es suave y modelo completa.*

Demostración. Ya sabemos que T_e es modelo completa, pues tiene sus modelos tienen los mismos conjuntos definibles que modelos de la teoría de $(\overline{\mathbb{R}}, \exp \cdot I_{[0,1]})$. También ya sabemos que es o-minimal. Hace falta entonces probar que cumple S1 y S2.

Sea $K \vDash T_e$ y $f : K \to K$ una función definible. Entonces f también es definible en $(\overline{\mathbb{R}}, \exp \cdot I_{[0,1]})$. Ahora, si $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, la podemos verificar S1. Si no, entonces por el Corolário 3.6.3, existe $s \in \mathbb{Q}$, $a \in K$ no nulo tales que $\lim_{x\to\infty} f(x)x^s = a$. Entonces claramente si tomamos $N \in \mathbb{N}$ mayor que s, tenemos $|f(x)| \leq x^N$ para x suficientemente grande. Así, T_e cumple S1.

Para probar S2, considere primero la función $e^* : x \mapsto \exp(x^2/(1 + x^2))$. Note que $e^*(x) = e(x^{-1})$ para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $e^*(0) = 1$, sigue que e^* es L_e-definible.

Además, e, e^* son funciones C^∞. Ahora sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una L_e-fórmula. Como T_e es modelo completa, existe una fórmula existencial $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ equivalente a ϕ (modulo T_e). Como consecuencia del Lema 3.2.1, ψ es equivalente a una fórmula de forma

$$\exists y_1, \ldots, y_m \bigwedge_{i=1}^{l} \tau_i = 0$$

donde cada τ_i es un $\overline{L}$-término o tiene la forma $e(z_1) - z_2$, con z_1, z_2 variables del conjunto $\{y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n\}$. Es claro que esa fórmula es equivalente a $\exists y_1, \ldots, y_m (\sum_{i=1}^{l} \tau_i^2) = 0$. Así, existe un polinomio $\rho \in \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_{2m+2n}]$ tal que en $\mathbb{R}$, ϕ es equivalente a

$$\exists y_1, \ldots, y_m \rho(y_1, \ldots, y_m, e(y_1), \ldots, e(y_m), x_1, \ldots, x_n, e(x_1), \ldots, e(x_n)) = 0$$

Para cada $s \subseteq \{1, \ldots, m\}$, sea $G_s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ la función obtenida sustituyendo y_j por y_j^{-1} y $e(y_j)$ por $e^*(y_j)$ en

$$\rho(y_1, \ldots, y_m, e(y_1), \ldots, e(y_m), x_1, \ldots, x_n, e(x_1), \ldots, e(x_n)) = 0$$

Para r suficientetemente grande, la función

$$\left(\prod_{j \in s} y_j\right)^r G_s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

es suave, y la denotamos por F_s. Poniendo $p = 2^m$ y sea $\{s_i : 1 \leq i \leq 2^m\}$ una enumeración de $\{s : s \subseteq \{1, \ldots, m\}\}$ y, para $i = 1, \ldots, p$, sea $N_i(\overline{y}) = \bigwedge_{j \in s_i} y_j \neq 0$, y ponemos tambiém $F_i := F_{s_i}$. Afirmamos entonces que

$$\mathbb{R} \models \forall \overline{x} \left(\phi(\overline{x}) \leftrightarrow \exists \overline{y} \left(||\overline{y}|| \leq 1 \wedge \bigvee_{i=1}^{p} (N_i(\overline{y}) \wedge F_i(\overline{x}, \overline{y}) = 0) \right) \right)$$

donde $||\overline{y}|| = \text{máx}\{|y_i| : y = 1, \ldots, m\}$. Una vez probada la última afirmación, podemos concluir que T_e satisface S2. Para probar la afirmación, suponga que

$$\mathbb{R} \models \exists y_1, \ldots, y_m \rho(y_1, \ldots, y_m, e(y_1), \ldots, e_(y_m), a_1, \ldots, a_n, e(a_1), \ldots, e(a_n)) = 0$$

para algúns $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces existen $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbb{R} \models \rho(b_1, \ldots, b_m, e(b_1), \ldots, e(b_m), a_1, \ldots, a_n, e(a_1), \ldots, e(a_n))$$

y sea i_0 tal que $s_{i_0} = \{j : |b_j| > 1\}$. Defina $\beta_j = b_j^{-1}$ para $j \in s_{i_0}$ y $\beta_j == b_j$ para $j \notin s_{i_0}$. Entonces $||\beta_j|| \leq 1$ y $F_{i_0}(a_1, \ldots, a_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) = 0$, y $\mathbb{R} \models N_{i_0}[\overline{\beta}]$. Así,

$$\mathbb{R} \models \exists \overline{y} \left(||\overline{y}|| \leq 1 \wedge \bigvee_{i=1}^{p} (N_i(\overline{y}) \wedge F_i(\overline{a}, \overline{y}) = 0) \right)$$

y la reciproca sigue por definición de las F_i, N_i, de modo similar. $\square$

Suponga ahora que $k, K \models T_{\exp}$, $k \subseteq K$. Entonces podemos definir modelos con dominios de T_e con dominios k, K, respectivamente, poniendo $e : k(K) \to k(K)$ como $x \mapsto \exp((1 + x^2)^{-1})$. Llamemos estes modelos de k', K'. Entonces $k' \subseteq K'$, y concluimos que $k' \preceq K'$, pues T_e es modelo completa.

Ahora, si k^* es un modelo de T_e con $k' \subseteq k^* \subseteq K'$, entonces para cada $a \in k^*$, $\exp(a)$ es un elemento de K que puede o no estar en k^*. Defina $E(k^*) = \{a \in k^* : \exp(a) \in k^*\}$. Entonces $E(k^*)$ es un $\mathbb{Q}$ subespacio vectorial del grupo aditivo de k^* - pues potencias racionales de elementos de k^* están en k^*, por tratarse de un cuerpo real cerrado. Además, $E(k^*)$ contiene $\mathrm{Fin}(k^*)$ como un $\mathbb{Q}$-subespacio vectorial. De hecho, sea $a \in \mathrm{Fin}(k^*)$. Entonces podemos eligir un elemento $m \in \mathbb{Z}$ positivo si a es positivo, negativo si a es negativo y con $|a| \leq |m|$. Así, la ecuación $b^2 = m/a - 1$ tiene solución en k^*, pues k^* es real cerrado, donde $\exp(a) = e(b)^m \in k^*$.

Lema 3.6.5. *En la situación que justo especificamos, suponga que* $\dim_{k'}(k^*) = n$ *(como modelos de* T_e*). Supoonga también que existen al menos* n *elementos de* $E(k^*)$ *tal que el* $\mathbb{Q}$*-subespacio generado por tales elementos tenga intersección trivial con el* $\mathbb{Q}$*-subespacio de* $E(k^*)$ $k + \mathrm{Fin}(k^*) = \{x + y : x \in k, y \in \mathrm{Fin}(k^*)\}$*. Entonces para cada* $a \in E(k^*)$ *existe* $b \in k$ *tal que* $|a| < b$*.*

Demostración. Suponga que sea falso. Denote $U = k + \mathrm{Fin}(k^*)$ y elija un subespacio V de $E(k^*)$ tal que $U \subseteq V$ y tal que el subespacio complementario de U en V tenga dimension exactamente n, y tal que V contenga $\alpha \in V$ con $\alpha > b$ para cada

$b \in k$.

Sea $0 < v_1 < \cdots < v_n$ una base del subespacio complementario de U en V como en el Lema 3.5.11. Como $\alpha > b$ para cada $b \in k$, α por cierto es mayor que cada elemento de U. Así, debe existir v_j tal que $v_j > b$ para cada $b \in U$ (por consecuencia de la desigualdad triangular) - y sea j mínimo con tal propiedad.

Ahora considere los elementos $\nu_K(\exp(v_1)), \ldots, \nu_K(\exp(v_n))$ en el grupode de valores $V(K)$ de K. Afirmamos que el subespacio generado por estos elementos tiene intersección trivial con $\nu_K[k \setminus \{0\}]$. Asuma que no: entonces existen $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ y $c \in k \setminus \{0\}$ tal que $c \exp(\sum_{i=1}^n q_i v_i) \in \mathrm{Fin}(K) \setminus \mu(K)$. Podemos entonces suponer $c > 0$ y $c = \exp(d)$ para algún $d \in k$ (pues $k \vDash T_{\exp}$). Por lo tanto, $\exp(d + \sum_{i=1}^n q_i v_i) \in \mathrm{Fin}(K) \setminus \mu(K)$, donde, por propiedades de la exponencial (pues $\exp(x) > x$ para x suficientemente grande en $\mathbb{R}$), tenemos que $d + \sum_{i=1}^n q_i v_i \in \mathrm{Fin}(K) \cap k^* = \mathrm{Fin}(k^*)$. Pero eso es una contradicción con el hecho de que $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(v_1, \ldots, v_n)$ tiene intersección trivial con $k + \mathrm{Fin}(k^*)$.

Por consecuencia de los Teoremas 3.5.10 y 3.6.4, con la hipotesis de que $\dim_{k'}(k^*) = n$, concluimos que $\mathrm{valdim}_{k'}(k^*) \leq n$ y por lo tanto $\nu_K(\exp(v_1)), \ldots, \nu_K(\exp(v_n))$ generan el subespacio complementario de $\nu_K[k \setminus \{0\}]$ sobre $\nu_K[k^* \setminus \{0\}]$ (note que $\exp(v_i) \in k^*$ para $i = 1, \ldots, n$). En particular,

$$\nu_K(v_j) = \nu_K(c) + \sum_{i=1}^n p_i v_i$$

para algún $c \in k \setminus \{0\}$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Q}$. De nuevo, podemos suponer $c = \exp(d)$ para algún $d \in k$ y así $\nu_K(v_j) = \nu_K(\exp(d + \sum_{i=1}^n p_i v_i))$. Por lo tanto existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\frac{v_j}{N} < \exp(d + \sum_{i=1}^n p_i v_i) < N v_j$. El lado izquierdo de la última inecuación implica que $d + \sum_{i=1}^n p_i v_i > 0$, pues $\frac{v_j}{N} > 1$. Si $p_j = p_{j+1} = \cdots = p_n = 0$, entonces $0 < d + \sum_{i=1}^n p_i v_i < b$ para algún $b \in k$, donde $\frac{v_j}{N} < b$, lo que es absurdo pues $N \exp(b) \in k$. Así, $p_i \neq 0$ para algún $i = j, \ldots, n$. Eso implica que $j' = \max\{i : v_i \neq 0, i \in \{1, \ldots, n\}\} \geq j$. Como consecuencia del Lema 3.5.11, existe $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$ tal que $d + \sum_{i=1}^n p_i > q v_j$. Concluimos entonces que $N v_j > \exp(q v_j)$. Pero eso es absurdo, pues $\exp(qx) > Nx$ para x suficientemente grande en $\mathbb{R}$, y $v_j > r$ para cada $r \in \mathbb{N}$. $\square$

Ahora volvemos al contexto del inicio de la parte 3.4 deste trabajo. Así, son dados $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m > 0$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$, $l \in \{1, \ldots, n\}$, $s \subseteq \{1, \ldots, n\}$ con $|s| = m$, $l \in s$ y $f_1, \ldots, f_n \in M_n^s$ tales que $(f_1, \ldots, f_n)(\overline{\alpha}) = 0$, $J(f_1, \ldots, f_n)(\overline{\alpha}) \neq 0$ y $|\alpha_l| > b$ para cada $b \in k$. En esta situación, vamos probar el siguiente resultado:

Proposición 3.6.6. *El subespacio* $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\{\alpha_i : i \in s\})$ *de* K *tiene intersección no trivial con* $k + \mathrm{Fin}(K)$.

Demostración. Defina el modelo $k^* \subseteq K'$ de T_e por

$$k^* = \mathrm{Cl}_{k'}(\{\alpha_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{\exp(\alpha_i) : i \in s\})$$

Así $k' \subseteq k^* \subseteq K'$. También tenemos que $\dim_{k'}(k^*) \leq n + m$. Vamos probar la siguiente afirmación: $\dim_{k'}(k^*) \leq m$. Una vez que asumimos esta afirmación, tenemos, por consecuencia del Lema 3.6.5, que un subespacio complementario de $k + \mathrm{Fin}(k^*)$ en $E(k^*)$ tiene dimensión en máximo $m - 1$ (pues $\alpha_l \in E(k^*)$), donde sigue que $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\{\alpha_i : i \in s\})$ tiene interseción no trivial con $k + \mathrm{Fin}(k^*)$. Como $k + \mathrm{Fin}(k^*) \subseteq k + \mathrm{Fin}(K)$, la proposición sigue.

Para probar la afirmación, vamos asumir que $s = \{1, \ldots, m\}$, por simplicidad (para hacerlo, podemos simplemente renombrar las variables). Defina $\alpha_{n+i} = \exp(\alpha_i)$, para $i = 1, \ldots, m$. Vamos probar que $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq n+m\}$ contiene un subconjunto de m elementos que genera k^* sobre k' (como modelos de T_e). Para eso, tome $g_i \in M_n^{\emptyset}[x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}]$ tal que $g_i(x_1, \ldots, x_n, \exp(x_1), \ldots, \exp(x_m)) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ (o sea, sustituimos las ocurrencias de exponenciales en f por nuevas variables en la expresión polinomial que define f), para $i = 1, \ldots, n$, y tome $g_{n+i}(x_1, \ldots, x_{n+m}) = x_{n+i} - \exp(x_i)$ para $i = 1, \ldots, m$. Entonces claramente $g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m}) = 0$ para cada $i = 1, \ldots, n+m$. Vamos probar ahora que $\det\left(\frac{\partial(g_1, \ldots, g_{n+m})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n+m})}\right)(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m}) \neq 0$. Vamos dividir la matriz jacobiana $\frac{\partial(g_1, \ldots, g_{n+m})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n+m})}$ en cuatro blocos A, B, C, D, de forma que

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_{n+m})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n+m})} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

- para eso, ponemos $A = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_{n+j}}\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$, $C = \left(\frac{\partial g_{n+i}}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$,

$D = \left(\frac{\partial g_{n+i}}{\partial x_{n+j}}\right)_{1\le i,j\le m}$. Note que D es la matriz identidad I_m $m \times m$. Ahora, sea B' la matriz $n \times n$ obtenida por añadir $n-m$ columnas de ceros a derecha. Hacemos lo mismo con C obteniendo C' en que añadimos por bajo $n-m$ filas nulas para obtener una matriz $n \times n$. Si tomamos $D' = I_n$, tenemos que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

□

Ahora note que

$$\det \begin{pmatrix} A & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} D' & 0 \\ -C' & I_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, utilizando las propiedades de la multiplicación de matrices:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \left[\begin{pmatrix} A & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D' & 0 \\ C' & I_n \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} AD' + B'C' & B' \\ D'C' - C'D' & D' \end{pmatrix}$$

Como $D' = I_n$, concluímos que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A - B'C')$$

Ahora note que, por cuenta de la regla de la cadena, para $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m}) + \exp(\alpha_j)\frac{\partial g_i}{\partial x_{n+j}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m})$$

y, para $i = 1, \ldots, n, j = m+1, \ldots, n$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m})$$

Ahora, como C' es la matriz diagonal $-\exp(x_1), \ldots, -\exp(x_n), 0, \ldots, 0$, tenemos que

$$\det(A - B'C') = J(f_1, \ldots, f_n)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$$

Por lo tanto, los vectores fila $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m})\right)_{1 \leq j \leq n+m}$, para $i = 1, \ldots, n$ son linealmente independientes como elementos de K^{n+m}. Así, existe un subconjunto $u \subseteq \{1, \ldots, n+m\}$ con $|u| = n$ tal que la matriz:

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right)_{1 \leq i \leq n, j \in u}$$

es no singular. Como las $g_1, \ldots, g_n$ son k'-definibles, sigue como consecuencia de la Proposición 3.4.2 *iii*) que para cada $j \in u$, α_j es k'-definble con parametros de $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq n+m, i \notin u\}$. Para visualizar como eso ocurre, asuma por simplicidad que $u = \{1, \ldots, n\}$. Si definimos $h_i(x_1, \ldots, x_n) = g_i(x_1, \ldots, x_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+m})$, entonces los ceros regulares de $(h_1, \ldots, h_n)$ son finitos, por consecuencia de la Proposición 3.4.2 - y como los α_i, $i = 1, \ldots, n$ son coordinadas destos ceros, sigue que son definibles a partir de $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+m}$. Eso concluye la demostración.

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos que existen $a \in k, b \in \text{Fin}(K)$, $n_i \in \mathbb{Z}$ $(i \in s)$ tales que $\sum_{i \in s} n_i \alpha_i + b + a = 0$. Como $b \in \text{Fin}(K)$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < q - b < 1$. Entonces si tomamos $c = q + a \in k$, tenemos que $c + \sum_{i \in s} n_i \alpha_i = q - b \in (0, 1)$, lo que prueba la Proposición 3.4.4, y con eso concluimos el trabajo.

Referencias

[Kho80] A. G. Khovanskii. *On a class of systems of transcendental equations.* Soviet Math Doklady, 1980.

[Dri86] L. van den Dries. *A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem, and some nondefinability results.* Bulletin of the American Mathematical Society, 1986.

[KPS86] J. F. Knight, A. Pillay y C. Steinhorn. *Definable Sets in Ordered Structures II.* Transactions of the American Mathematical Society, 1986.

[PS86] A. Pillay y C. Steinhorn. *Definable Sets in Ordered Structures I.* Transactions of the American Mathematical Society, 1986.

[Hod93] Wilfrid Hodges. *Model Theory.* Cambridge Academic Press, 1993.

[Wil96] A. J. Wilkie. *Model Completeness Results for Expansions of the Ordered Field of Real Numbers by Restricted Pfaffians and the Exponenetial Function.* Journal of the American Mathematical Society, 1996.

[Poi00] Bruno Poizat. *A Course in Model Theory.* Springer, 2000.

[Bes16] Martijn den Besten. *Wilkie's Theorem and the Uniform Real Schanuel Conjecture.* Tese de masters, 2016.

[Ges16] Stefan Geschke. *Model Theory.* Apuntes de clase, 2016.

[Col] Escrito en Colaboración. *https://modeltheory.fandom.com/.*