TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Física

Sistemas superintegrables en bajas dimensiones: Estudio de Hamiltonianos simétricos bajo U (1, 1) mediante el método de la factorización

Autor:

Cindy Lorena Acevedo Soto

Tutor/es:

Mariano A. del Olmo Martínez

Javier Negro Vadillo

Abstract

This work presents a detailed study about some cases of a family of superintegrable systems associated with the pseudo-unitary group $U(1,1)$. The main interest is on a non-compact Cartan subalgebra of this group which allow us the reduction by symmetry of the initial $U(1,1)$ free Hamiltonian to obtain reduced classical and quantum Hamiltonians with potential terms. We will emphasize, in both versions, the implications of the compact and non-compact character of the group's generators. Subsequently, we carry out the explicit resolution by the factorization method in both frames, classical and quantum, mentioning some peculiarities about ladder and factorization operators in both formalisms.

Resumen

Esta memoria presenta un estudio detallado de algunos casos de una familia de sistemas superintegrables asociados al grupo pseudo-unitario U(1,1). El interés está puesto en la subálgebra de Cartan no compacta de dicho grupo que permite la reducción por simetría del Hamiltoniano libre tipo U(1,1) obteniendo el Hamiltoniano clásico como su versión cuántica. Haremos énfasis, en ambas versiones, sobre las implicaciones del carácter compacto y no compacto de los generadores del grupo. Posteriormente se lleva a cabo su resolución explícita mediante un proceso de factorización en ambos casos, clásico y cuántico, mencionando algunas particularidades de los operadores escalera y operadores factorización en ambos formalismos.

Contents

1 Introducción

Nuestro objetivo en este trabajo es obtener las simetrías del Hamiltoniano a partir del grupo pseudo-unitario $U(1,1)$ mostrando relevancia en el desarrollo matemático del carácter compacto y no compacto de los generadores de los cuales va a depender el álgebra de Lie asociada así como la relación entre los operadores factorización y los operadores subida y bajada del grupo.

Para familiarizarnos con los grupos pseudo-unitarios comenzaremos con una descripción de un grupo bien conocido a nivel físico, el grupo unitario $U(2)$, describiendo las características de sus generadores para luego definir el grupo especial unitario $SU(2)$ sobre el que haremos una descripción breve del álgebra de Lie asociada y los aspectos relevantes a tener en cuenta para el análisis subsiguiente del $U(1,1)$, que es el grupo de interés en este trabajo. Bajo cierta restricción determinaremos el grupo especial pseudo-unitario $SU(1,1)$ su álgebra de Lie y en especial, desarrollaremos el subálgebra de Cartan no compacta (NC) que será la base principal para los posteriores desarrollos. Deduciremos en la sección 5 el Hamiltoniano clásico y la representación en el espacio de fases clásico como preámbulo para construir el caso cuántico, considerando el álgebra matricial inherente a $U(1,1)$ con la cual deduciremos la representación diferencial y el Hamiltoniano cuántico.

Se hace énfasis que al tratar el caso NC, nuestro interés inicial es tratar el generador no compacto X_2 como operador diagonal; es decir, el objetivo es relacionar los operadores subida y bajada asociados a X_2 con los operadores factorización obtenidos al aplicar el método de la factorización [6], [19], [20], [17], sobre el Hamiltoniano reducido. Veremos las particularidades e implicaciones de tal desarrollo. Para cerrar, haremos un breve análisis de la factorización clásica como límite de la cuántica. Esta propuesta abre un camino para explorar las simetrías en dimensiones mayores [28], [12], por ello, en el apéndice C se hace una pequeña extensión al grupo $SU(2,1)$ como base para futuros desarrollos sobre el que se puede seguir haciendo una construcción análoga a la de este trabajo con el propósito de encontrar las simetrías heredadas por el Hamiltoniano cuántico [9], [10]. Antes de dar inicio al trabajo, se hará una contextualización dentro de la teoría de grupos y los sistemas superintegrables a tener en cuenta.

Los sistemas superintegrables clásicos tienen más de N integrales de movimiento independientes [4]. En el caso cuántico, exige la existencia de N operadores de simetría que conmutan y que además el Hamiltoniano conmute con los $N-1$ operadores diferenciales [1], [3]. Estos sistemas que pueden ser resueltos analíticamente, son de bastante interés desde el punto de vista físico y matemático [21], [22], por lo que la construcción de modelos en este campo han resultado en un extraordinario interés a nivel físico, ejemplo de esto son los potenciales en una dimensión como el Pösch-Teller, Morse o los potenciales Sutherland y Calogero [5], [27], [22], [11]. En los sistemas integrables hay N constantes de movimiento en involución siendo el Hamiltoniano uno de ellos, por otro lado los sistemas superintegrables requieren mas de N constantes de movimiento y más que un subconjunto de N constantes en involución [2], [21], [13]. Un conjunto de artículos [19], [23], [7], [30], [24], [25], [16], [20], [18], se han dedicado al estudio de sistemas superintegrables construidos en espacios homogéneos sobre los grupos pseudo-unitarios $SU(p,q)$ [27], [5].

Una de las estructuras matemáticas base en este trabajo son el álgebra de Lie de los grupos en consideración. Un grupo de Lie es el conjunto de todas la matrices (generadores) X, tales que los elementos del grupo se pueden escribir como $e^{\alpha X}$ con α un parámetro real [31], [29]. De esta manera es fácil deducir, desde las transformaciones infinitesimales, las características de los generadores. Por otro lado, otro concepto importante inherente a la del grupo es el de Suálgebra Maximal Abeliana que denotaremos como MASA [5]. Es una subálgebra del grupo con la mayor dimensión posible. En general a partir de un álgebra y de la MASA obtenemos un Hamiltoniano que herede las simetrías asociada a la MASA seleccionada.

En la referencia [5] se parte de un Hamiltoniano libre definido en el espacio hermítico hiperbólico, con coordenadas y^μ en $\mathbb{C}$ que satisface $g_{\overline{\mu\nu}}\ \overline{y^\mu} y^\nu = 1$; se expresa en coordenadas complejas, indicando la barra su complejo conjugado como

$$\mathcal{H} = 4cg^{\mu\overline{\nu}} p_\mu \overline{p_\nu}$$

Siendo p_μ los momentos conjugados con $\mu, \nu = 0, .., N = p+q-1$. La constante real c está relacionada con la curvatura seccional del espacio hermítico. El procedimiento que seguiremos difiere de [5] ya que partiremos directamente del invariante asociado al grupo $U(1,1)$. Los elementos de la MASA, en nuestro caso, no compacta, vienen asociadas al Hamiltoniano de tal forma que satisfacen en el caso clásico $\{\mathcal{H}, f\} = 0$ y en el caso cuántico $[\mathcal{H}, \hat{Y}] = 0$, así obtendremos las simetrías asociadas al sistema [15].

2 Grupo Unitario U(2)

Comencemos recordando algunas cosas bien conocidas del grupo $U(2)$ o grupo unitario de dimensión 2. Se trata de las matrices complejas 2×2 definido por

$$U(2) = \{U \mid U^\dagger U = I\}$$

Es decir, son matrices cuya inversa coincide con su adjunta. Toda matriz unitaria puede expresarse como una exponencial $U = e^{\alpha A}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ [31], tal como se muestra en el apéndice A. De la definición se deduce que $\det U^\dagger U = (\det U)^*. \det U = 1$, lo cual implica que el módulo del determinante de una matriz unitaria es la unidad, $|\det U|^2 = 1$.

Las matrices unitarias $U(2)$ se pueden asociar a la conservación del producto hermítico estándar en $\mathbb{C}^2$. Fijada la matriz métrica $G = I$, en $\mathbb{C}^2 = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = (z_1, z_2)\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ el producto hermítico se define como

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z^\dagger G w = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathbf{z}^{'} = U\mathbf{z}$, la imagen de un vector del plano complejo. El producto escalar es

$$\langle \mathbf{z}^{'}, \mathbf{z}^{'} \rangle = (Uz)^{\dagger} GUz = z^{\dagger} U^{\dagger} GUz = z^{\dagger} U^{\dagger} Uz = z^{\dagger} Gz = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$$

Deducimos que los elementos de $U(2)$ dejan invariante la norma de los elementos de $\mathbb{C}^2$. La condición de unitariedad es equivalente al de invarianza de la métrica [25] bajo la acción del grupo según la siguiente relación

$$U^{\dagger} GU = G \tag{1}$$

Los generadores de $U(2)$. Sean los elementos de $U(2)$ que se pueden expresar en forma exponencial como

$$U = e^{\epsilon A} \qquad \epsilon \in \mathbb{R}$$

siendo A un matriz. Este conjunto es un subgrupo uniparamétrico de $U(2)$ [14], cuyo generador es la matriz A. Veamos a continuación cómo son los generadores de $U(2)$. Podemos desarrollar en serie de Taylor $e^{\epsilon A}$ hasta primer orden en términos del parámetro infinitesimal ϵ, $U(\epsilon) \approx I + \epsilon A$, aplicando (1)

$$(I + \epsilon A)^{\dagger} G(I + \epsilon A) = G + \epsilon(GA + A^{\dagger} G) + O(\epsilon^2) = G$$

Conservando términos de primer orden, como $G = I \rightarrow A^{\dagger} + A = 0$

$$A^{\dagger} = -A \tag{2}$$

Esto significa que los generadores de este grupo son antihermíticos. Podemos hacer un pequeño cambio sin alterar ninguna de las definiciones anteriores escribiendo $U = e^{\epsilon A} = e^{-i\alpha\, iA}$ con $J = iA$. Se infiere de (2) que $J^{\dagger} = J$, así U queda expresada como la exponencial de una matriz hermítica

$$U = e^{-i\epsilon J}, \qquad J^{\dagger} = J$$

La forma de la matriz J debe ser, siguiendo a (2)

$$J = \begin{pmatrix} c + d & a - ib \\ a + ib & -c + d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Descomponiendo por cada parámetro independiente obtenemos los cuatro generadores de $U(2)$

$$J = d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

o también, utilizando las matrices σ_k de Pauli,

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

podemos utilizar la base para los generadores $\{J_k\}$ para cualquier J [29], [31]:

$$J_k = \frac{1}{2}\sigma_k, \qquad J = \sum_k b_k\, J_k\,, \qquad k = 0, \ldots 3$$

2.1 Grupo Especial Unitario SU(2)

Si consideramos las matrices de $U(2)$ tales que el determinante sea la unidad, obtenemos el grupo $SU(2)$ o grupo unitario especial:

$$SU(2) = \{U \ \mid U \in U(2) \text{ y } \det U = 1\}$$

Puesto que, $\det e^{-i\alpha J} = e^{-i\alpha(TrJ)} = 1$, los generadores de $SU(2)$ se caracterizan por que $TrJ = 0$. Por lo tanto, el grupo especial unitario también se define como

$$SU(2) = \{U \mid U = e^{-i\alpha\mathbf{J}},\ J^\dagger = J,\ Tr\ J = 0\}$$

La forma de la matriz J debe ser

$$J = \begin{pmatrix} a & c - ib \\ c + ib & -a \end{pmatrix}$$

Descomponiendo por cada parámetro independiente obtenemos los tres generadores de $U(2)$

$$J = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

o también, utilizando las matrices σ_k de Pauli, podemos utilizar la base para los generadores $\{J_k\}$ para cualquier J [31], [14]:

$$J_k = \frac{1}{2}\sigma_k, \qquad J = \sum_k b_k\, J_k\,, \qquad k = 0, \ldots 3$$

Como cualquier matriz de $SU(2)$ tiene determinante igual a la unidad, si multiplicamos por el factor $e^{-i\alpha}$ (por la matriz unidad σ_0) se añade una fase que origina el grupo $U(2)$ [1]. En general $U(N)$ tendrá N^2 generadores, $SU(N)$ tendrá $N^2 - 1$ generadores y $N - 1$ generadores 'diagonales' [2]. [14]

[1] El determinamte de cualquier elemento de $U(2)$ es un número complejo cuyo módulo al cuadrado es la unidad, es decir, pertenece a la circunferencia compleja unitaria, mientras que el determinante de un elemento de $SU(2)$ es uno, así al multiplicar cualquier elemento de $SU(2)$ por una fase se obtiene un elemento de $U(2)$

[2] Entiéndase como matrices diagonales

2.2 Álgebra de Lie su(2)

Los generadores introducidos antes de $U(2)$, son $\{J_0, J_1, J_2, J_3\}$, y de $SU(2)$: $\{J_1, J_2, J_3\}$ (que no incluye J_0). Estos sistemas de generadores son la base de un espacio vectorial (de dimensión 4 y 3, respectivamente). Además verifican unas reglas de conmutación bien conocidas que son las siguientes:

$$[J_0, J_k] = 0, \quad [J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl} J_l, \qquad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Esta estructura constituye el álgebra de Lie $su(2)$ o bien $u(2)$, si incluimos o no el generador J_0 que conmuta con todos. A veces es conveniente introducir la base de operadores escalera que se definen como combinación lineal de J_1 y J_2 [14]

$$J^{\pm} = J_1 \pm i J_2 \tag{3}$$

Que satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$[J_3, J^{\pm}] = \pm J^{\pm}, \qquad [J^+, J^-] = 2J_3 \tag{4}$$

Esta base es conveniente para estudiar las representaciones unitarias irreducibles (uir's). En las uir's de $SU(2)$ vamos a obtener un operador de bastante interés en este trabajo, el **Operador Casimir**, definido como

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_3(J_3 + 1) + J^+ J^-$$

Resulta que J^2 conmuta con todos los generadores de $su(2)$, y su valor en cada uir caracteriza dicha uir. Recordemos que la representación U_j de $su(2)$, siendo j entero o semiimpar, cumple la condición $J^2 = j(j+1)$ [25], [14].

3 Grupo Pseudo-Unitario U(1,1)

Cualquier grupo pseudo-unitario se define por medio de un producto pseudo-hermítico. En general los elementos de este grupo se definen de manera análoga como se hace en $U(n)$ con $G = I$, pero ahora se fija la métrica con los dos signos $G(p, q)$ [8] [3]

$$U(p, q) = \{U \mid U^{\dagger} G\, U = G\} \tag{5}$$

Fijando la métrica $G(1, 1)$ en $\mathbb{C}^2$ el producto pseudo-hermítico se define como

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z^{\dagger} G w = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = z_1^* w_1 - z_2^* w_2$$

[3] Es una matriz diagonal donde p indica el número de unos y q el número de menos uno

Sea $\mathbf{z}^{'} = U\mathbf{z}$, entonces

$$\langle \mathbf{z}^{'}, \mathbf{z}^{'} \rangle = (Uz)^{\dagger} G U z = z^{\dagger} U^{\dagger} G U z = z^{\dagger} G z = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$$

porque ha de cumplirse (5). De manera análoga a $U(2)$, el determinante de una matriz de este grupo es un número complejo tal que cumple nuevamente $\det U^{\dagger}. \det U = 1$ asi que es un número complejo sobre la circunferencia en el plano complejo de módulo 1.

Generadores de $U(1,1)$. Consideramos la expresión exponencial para los elementos de $U(1,1)$, $U = e^{\epsilon A}$. Tomemos, para transformaciones infinitesimales, la expansión en Taylor de la exponencial a primer orden en términos del parámetro infinitesimal ϵ: $U(\epsilon) \approx I + \epsilon A$; se deduce la siguiente propiedad de los generadores de este grupo

$$(I + \epsilon A)^{\dagger} G (I + \epsilon A) = G + \epsilon (GA + A^{\dagger} G) = G$$

$$G + \epsilon A G + \epsilon A^{\dagger} G + O(\epsilon^2)$$

$$GA + A^{\dagger} G = 0 \tag{6}$$

Por lo tanto, los generadores de $U(1,1)$ son G-anti hermíticos. De acuerdo a esto si parametrizamos la matriz A de la forma usual

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

se deducen las siguientes relaciones $a^* = -a, d^* = -d, c^* = b$. Luego los elementos de la diagonal son imaginarios puros y los de la antidiagonal son complejos conjugados

$$A = \begin{pmatrix} ia & c + ib \\ c - ib & id \end{pmatrix} \tag{7}$$

Equivalente a la siguiente combinación lineal

$$A = a \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Que forman una base para cualquier matriz A del álgebra de Lie $u(1,1)$. Los dos primeros generadores son antihermíticos y los dos últimos hermíticos. Denotemos cada generador con las siguiente nomenclatura

$$Y_{01} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Como tenemos cuatro grados de libertad si imponemos la condición adicional de traza nula para la matriz A en (7), $\mathrm{Tr} A = 0$, se deduce que $a = -d = d^*$ y por ende hallamos el generador X_3 que es antihermítico, por (6) los generadores de $SU(1,1)$ son respectivamente $X_1 = \sigma_1$, $X_2 = -\sigma_2$ y $X_3 = i\sigma_3$. Matricialmente tenemos

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{8}$$

Combinando Y_{01} y Y_{02} tenemos un elemento de $U(1,1)$ que de forma análoga con $SU(2)$ nos da una fase global

$$Y_0 = Y_{01} + Y_{02} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{9}$$

En definitiva tenemos la base de generadores para $u(1,1)$ muy semejante a $u(2)$, pero con importantes diferencias:

$$\{Y_0; X_1, X_2, X_3\}$$

El generador Y_0 del $U(1)$ [14] es el mismo. Igual pasa con X_1, es común. En cambio X_2, X_3 difieren.

3.1 El álgebra de Lie de u(1,1)

Por esta razón, comparando con el álgebra de $SU(2)$ hay algunas reglas de conmutación que se mantienen, así que para mantener la mayor similitud con el conmutador $[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l$ [31], [14] redefinimos los generadores X al multiplicar las matrices por $\frac{1}{2}$, por lo tanto en $SU(1,1)$ se cumplen las siguientes reglas de conmutación tal como en $SU(2)$ [4]

$$[X_3, X_1] = X_2, \qquad [X_2, X_3] = X_1$$

Con el resultado particular $[X_1, X_2] = -X_3$. Si incluimos el generador Y_0 obtendremos trivialmente el álgebra de Lie de $u(1,1)$:

$$[Y_0, X_k] = 0, \qquad k = 1, 2, 3$$

En el grupo $SU(1,1)$ el **elemento Casimir** lo definiremos como [5]

$$\mathfrak{C} = -X_1^2 - X_2^2 + X_3^2$$

El signo cambiado en X_1 y en X_2 procede del diferente carácter de estos generadores. Vemos que X_1, X_2 son generadores hermíticos y por lo tanto semejantes a una matriz diagonal D

$$X_i = PDP^{-1} \tag{10}$$

sus eigenvalores son números reales y puede verificarse que son $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. Luego un elemento de $U(1,1)$ es el

[4] Si las matrices no se multiplican por el factor $\frac{1}{2}$ los conmutadores quedan con un factor 2, por simplicidad y siguiendo la notación de los generadores según [5], en las siguientes secciones no serán multiplicadas por dicho factor

resultado de la exponencial de un parámetro [5] por el generador que bajo una transfomación de semejanza [6] (10) queda en términos de funciones hiperbólicas

$$e^{\alpha X_2} = exp\left[\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$e^{\alpha X_2} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{+\alpha/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$e^{2\alpha X_2} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & i\sinh\alpha \\ -i\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} = \cosh\alpha\; I + \sinh\alpha\; X_2 \tag{11}$$

Por quedar en términos de funciones hiperbólicas es un generador no compacto. De esta misma manera se puede calcular la exponencial de X_1 y se prueba que también es un generador no compacto

$$e^{\alpha X_1} = \cosh\alpha\; I + \sinh\alpha\; X_1 \tag{12}$$

El generador X_3 tiene autovalores imaginarios puros, luego la exponenciación queda en términos de funciones trigonométricas, por lo tanto es un generador compacto

$$e^{2\alpha X_3} = exp\left[\alpha\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$e^{2\alpha X_3} = \cos\alpha\; I + \sin\alpha\; X_3 \tag{13}$$

El álgebra no compacta de $SU(1,1)$ tiene tres clases no conjugadas de MASA's. Todas ellas incluye Y_0 y el segundo elemento de la subálgebra determina: la Subálgebra de Cartan Compacta, Subálgebra No Compacta de Cartan, y una clase de Subálgebra Abeliana Maximal Nilpotente. Nosotros nos centraremos en el subálgebra no compacta que incluye X_2 [5].

4 Subálgebra de Cartan No Compacta

El generador Y_0 es antihermítico compacto y X_2 es hermítico no Compacto.

$$Y_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Como $Y_0 = iI$, ambos operadores conmutan por lo que obtenemos una MASA de $U(1,1)$ [24], [18]. Consideremos el vector $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ genérico de $\mathbb{C}^2$ con el cual vamos a determinar las coordenadas asociadas a

[5]Para simplificar el resultado de la exponencial conviene que el parámetro α absorba el factor $\frac{1}{2}$ de los autovalores
[6]Los vectores columa de la matriz P son eigenvectores del generador X_i

los generadores $Y_0,\ X_2$. Notemos que cada componente z_i tiene dos grados de libertad, por lo que tenemos 4 parámetros libres a escoger, dos de ellos vendrán dados por lo generadores $Y_0,\ X_2$ denotados por α_i y escogeremos otros dos de tipo real que denotaremos con la letra s, de esta forma escribimos la transformación

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = e^{\alpha_0 Y_0}\ e^{\alpha_2 Y_2} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Siendo r^2 invariante bajo $U(1,1)$. Interpretamos $\mathbf{s}$ como un módulo y las exponenciales como rotaciones hiperbólicas, esto de manera análoga al caso compacto donde se obtienen coordenadas polares. De hecho, podemos comprobar que [26]

$$r^2 = |z_1|^2 - |z_2|^2 = (s_1)^2 - (s_2)^2 = 1 \tag{15}$$

Desarrollando (14) las nuevas y antiguas coordenadas están relacionadas por (16)

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\alpha_0}(s_1 \cosh \alpha_2 + i s_2 \sinh \alpha_2) \\ z_2 &= e^{i\alpha_0}(-i s_1 \sinh \alpha_2 + s_2 \cosh \alpha_2) \end{aligned} \tag{16}$$

Tenemos que α_0 y α_2 son coordenadas reales generadas por generadores que conmutan. Las componentes de $\mathbf{z}$ son funciones respectivamente de un vector $\bar{\alpha}$ y $\bar{s}$ [7]; así escribimos $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\bar{\alpha}, \bar{s})$. Transformando nuevamente $\mathbf{z}$ como en (14) con los parámetros $\beta_0,\ \beta_2$ tenemos el elemento en la pseudo-esfera $\mathbf{z}^{'} = (z_1(\bar{\alpha}+\bar{\beta}, s), z_2(\bar{\alpha}+\bar{\beta}, s))$ (17). Los parámetros asociados a los generadores se suman ya que los generadores conmutan y además serán coordenadas cíclicas como se demostrará más adelante.

$$\begin{pmatrix} z_1(\bar{\alpha}+\bar{\beta}, s) \\ z_2(\bar{\alpha}+\bar{\beta}, s) \end{pmatrix} = e^{\bar{\beta}.\bar{Y}} \begin{pmatrix} z_1(\bar{\alpha}, s) \\ z_2(\bar{\alpha}, s) \end{pmatrix} \tag{17}$$

En conclusión hemos construido coordenadas tales que dos de ellas vienen generadas por la aplicación de dos grupos uniparamétricos que conmutan, generados por Y_0 y X_2, de tipo compacto y no compacto, respectivamente.

A continuación, proponemos un Hamiltoniano en $\mathbb{C}^2$ tal que sea simétrico bajo $U(1,1)$. En particular bajo los subgrupos de Y_0 y X_2. Esto implica que las coordenadas $\bar{\alpha}$ serán cíclicas y el problema se puede reducir a las dos variables restantes s_1, s_2. Pero teniendo en cuenta la restricción (15), el problema quedará, de hecho, reducido a una variable, ϕ.

5 Hamiltoniano Clásico para el Caso No Compacto

Vamos a calcular la energía cinética invariante bajo $U(1,1)$ en $\mathbb{C}^2$ por medio de las coordenadas $(\bar{\alpha}, \bar{s})$. Para ello calculamos la velocidad $\dot{\bar{z}}$ y después su módulo al cuadrado, $|\dot{\bar{z}}|^2$ utilizando la métrica $G(1,1)$.

[7] A continuación utilizamos la notación $\bar{\alpha}$ y $\bar{s}$ en el sentido de vectores reales con componentes reales α_0, α_2, s_1 y s_2 respectivamente. No confundir esta notación con la de complejos conjugados

Los elementos de $U(1,1)$ actúan como rotaciones sobre 'vectores' en la pseudo-esfera [27] por lo que dejan invariante la métrica y por lo tanto la norma del vector. Para $\bar{z} \in \mathbb{C}^2$ su diferencial total

$$d\bar{z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{\partial \bar{z}}{\partial s_i} ds_i$$

Como $\bar{z} = e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}} \bar{s}$ (14) entonces la derivada temporal queda

$$\dot{\bar{z}} = Y_0 \bar{z}\ \dot{\alpha_0} + Y_2 \bar{z}\ \dot{\alpha_2} + e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}}\ \dot{\bar{s}}$$

Como $(\dot{\bar{z}})^\dagger G \dot{\bar{z}} =$ invariante entonces

$$(\dot{\bar{z}})^\dagger G \dot{\bar{z}} = (Y_0 \bar{z}\ \dot{\alpha_0} + Y_2 \bar{z}\ \dot{\alpha_2} + e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}}\ \dot{\bar{s}})^\dagger\ G\ (Y_0 \bar{z}\ \dot{\alpha_0} + Y_2 \bar{z}\ \dot{\alpha_2} + e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}}\ \dot{\bar{s}})$$

por propiedad del traspuesto conjugado $\bar{z}^\dagger = \bar{s}^\dagger (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}})^\dagger$ reemplazamos

$$(\bar{s}^\dagger (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}})^\dagger Y_0^\dagger\ \dot{\alpha_0} + \bar{s}^\dagger (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}})^\dagger Y_2^\dagger\ \dot{\alpha_2} + \dot{\bar{s}}^\dagger (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}})^\dagger\ G\ (Y_0 e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}} \bar{s}\ \dot{\alpha_0} + Y_2 e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}} \bar{s}\ \dot{\alpha_2} + e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}}\ \dot{\bar{s}})$$

Desarrollando el producto y teniendo en cuenta que $Y_0,\ X_2$ conmutan con $e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}} \in U(1,1)$ obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}(\dot{\bar{z}})^\dagger G \dot{\bar{z}} = {} & \bar{s}^\dagger G \bar{s}\ \dot{\alpha_0}^2 + \bar{s}^\dagger Y_0^\dagger G Y_2 \bar{s}\ \dot{\alpha_0}\dot{\alpha_2} + \bar{s}^\dagger Y_0^\dagger G \dot{\bar{s}}\ \dot{\alpha_0} + \bar{s}^\dagger Y_2^\dagger G Y_0 \bar{s}\ \dot{\alpha_0}\dot{\alpha_2} \\ & + \bar{s}^\dagger Y_2^\dagger G Y_2 \bar{s}\ \dot{\alpha_2}^2 + \bar{s}^\dagger Y_2^\dagger G \dot{\bar{s}}\ \dot{\alpha_2} + \dot{\bar{s}}^\dagger G Y_0 \bar{s}\ \dot{\alpha_0} \\ & + \dot{\bar{s}}^\dagger G Y_2 \bar{s}\ \dot{\alpha_2} + \dot{\bar{s}}^\dagger (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}})^\dagger G (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}}) \dot{\bar{s}}\end{aligned} \tag{18}$$

Haciendo los cálculos respectivos finalmente tenemos el invariante

$$\mathcal{L} := (\dot{\bar{z}})^\dagger G \dot{\bar{z}} = \dot{s_1}^2 - \dot{s_2}^2 + \dot{\alpha_0}^2 - \dot{\alpha_2}^2 + 4 s_1 s_2 \dot{\alpha_0} \dot{\alpha_2} \tag{19}$$

Asociando éste término con el lagrangiano (más concretamente, con la energía cinética) $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{\bar{\alpha}}, \bar{\alpha}, \dot{\bar{s}}, \bar{s})$ vemos que las $\dot{\alpha_i}$ son coordenadas cíclicas, luego sus momentos conjugados respectivamente son constantes las cuales llamaremos M_0, M_2 respectivamante. Por lo tanto

$$M_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha_i}}$$

Desarrollando estas derivada y expresando $\dot{\alpha_i}$ en términos de las M_i

$$\dot{\alpha_0} = \frac{M_0 + 2 s_1 s_2 M_2}{2(1 + 4 s_1^2 s_2^2)} \qquad ; \qquad \dot{\alpha_2} = \frac{-M_2 + 2 s_1 s_2 M_0}{2(1 + 4 s_1^2 s_2^2)}$$

Por otro lado las otras coordenadas s_i no son cíclicas y sus momentos conjugados son respectivamente

$$p_{s_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s_1}} = 2\dot{s_1} \qquad ; \qquad p_{s_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s_2}} = 2\dot{s_2}$$

Haciendo la transformada de Legendre obtenemos el mismo resultado de (19) y es propiamente el Hamiltoniano $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \frac{p_{s_1}^2}{4} - \frac{p_{s_2}^2}{4} + \frac{M_0^2 - M_2^2 + 4s_1 s_2 M_0 M_2}{4(1 + 4s_1^2 s_2^2)} \tag{20}$$

Para simplificar más la expresión y llegar al mismo resultado de [5] (pág. 193) [8] redefinimos las variables correspondiente solo a un cambio de escala de los momentos conjugados

$$p_{s_i} = \sqrt{2} p_{s_i} \qquad M_i = 2m_i$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_{s_1}^2 - p_{s_2}^2) + \frac{m_0^2 - m_2^2 + 4s_1 s_2 m_0 m_2}{1 + 4s_1^2 s_2^2} \tag{21}$$

El Hamiltoniano obtenido depende de las coordenadas $s_1,\ s_2$, por lo que el módulo al cuadrado del momento está expresado en esas coordenadas. Pero podemos obtener una expresión más reducida si escribimos $s_1 = \cosh\phi$, $s_2 = \sinh\phi$ en (19), ésto es coherente porque los movimientos están limitados sobre la pseudo-esfera unitaria así que sólo tenemos componente angular del momento p_ϕ. Calculamos el momento conjugado p_ϕ y desarrollamos los demás términos dependientes de $s_1,\ s_2$. Introduciendo la constante de curvatura $c = -1$ como un factor global en (21) [2] queda finalmente el Hamiltoniano para el caso NC

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p_\phi^2 - \frac{m_0^2 - m_2^2 + 2m_0 m_2 \sinh 2\phi}{\cosh^2 2\phi} \tag{22}$$

Con el potencial como función de ϕ

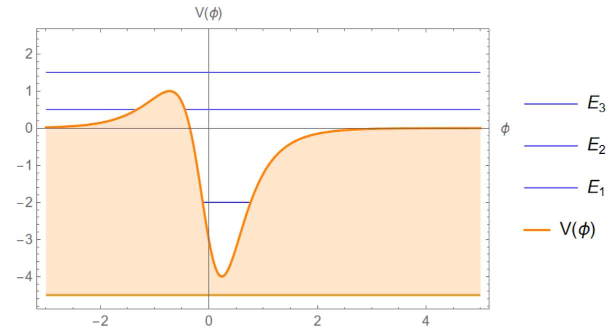
$$V(\phi) = \frac{m_2^2 - m_0^2 - 2m_0 m_2 \sinh 2\phi}{\cosh^2 2\phi} \tag{23}$$

Si $m_0^2 = 0$ tenemos estrictamente una barrera, si $m_2^2 = 0$ tenemos un pozo. Cuando $m_0^2 = m_2^2$ por un lado tenemos una barrera y por otro un pozo. Nos interesa mostrar el caso cuando $m_0^2 > m_2^2$, cuyo comportamiento del potencial se muestra en la figura 1.a en el que habrá estados ligados. Por último cuando $m_0^2 < m_2^2$, tenemos el potencial que se muestra en la figura 1b [5].

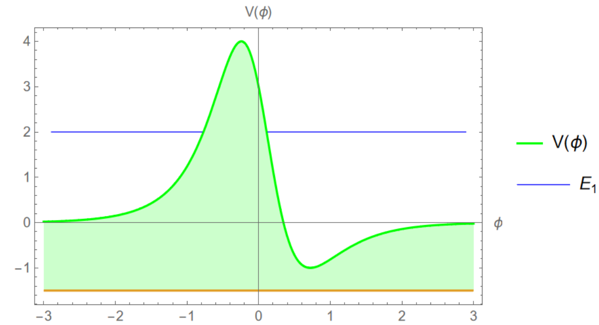
5.1 Álgebra matricial

Los generadores de $SU(1,1)$ que hemos denotado como X_i y el generador Y_0 de $U(1,1)$ vimos que se corresponden matricialmente con (8) y (9) respectivamente siendo X_2 el generador de la subálgebra no compacta el cual tomaremos como matriz diagonal, ya que sobre él hemos construido nuestras coordenadas

[8] La expresión general del Hamiltoniano $\mathcal{H} = c\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_{s^\mu}p_{s^\nu} + V(s)\right)$



(a) Pozo



(b) Barrera

Figure 1: Tipos de Potencial dependiendo de los valores m_0 y m_2

cíclicas. Vamos a construir los operadores escalera de tal forma que se cumpla

$$[X_2,\ X^{\pm}] = \pm\lambda\, X^{\pm} \tag{24}$$

Los operadores subida y bajada se obtienen como combinación lineal de los demás generadores de $SU(1,1)$ así que definimos $X^{\pm}$ como $X^{+} = aX_1 + bX_3$ y $X^{-} = cX_1 + dX_3$. Desarrollando encontramos que $a = b = 1$, $c = -d = 1$ y $\lambda = 2$, explícitamente se tiene

$$X^{\pm} = X_1 \pm X_3 \tag{25}$$

Que se corresponden con las siguientes matrices

$$X^{+} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \qquad X^{-} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \tag{26}$$

de tal forma que se verifica el siguiente álgebra matricial

$$[X_2,\ X^{\pm}] = \pm\, 2X^{\pm} \tag{27}$$

Como nos interesa estudiar las simetrías del Hamiltoniano a partir del grupo $U(1,1)$ a nivel clásico, determinaremos la representación en el espacio de fases. Posteriormente su análogo cuántico proponiendo identificar el Hamiltoniano con el operador Casimir $\mathfrak{C}$ del grupo definido como

$$\mathfrak{C} = X_3^2 - X_2^2 - X_1^2 \tag{28}$$

6 Representación en el espacio de fases clásico

En la sección anterior hemos construido el Hamiltoniano clásico con dos elementos básicos: i) las coordenadas que hemos determinado mediante el grupo $U(1,1)$ y ii) que dicho Hamiltoniano fuera libre, con un término cinético invariante bajo $U(1,1)$. Ahora comprobaremos las simetrías de dicho Hamiltoniano. Para ello construiremos los generadores de $U(1,1)$ en el marco clásico y comprobaremos que cierran el álgebra de Lie $u(1,1)$ mediante los corchetes de Poisson [28], [12].

En esta sección hallaremos la correspondiente representación de los generadores matriciales X_i en términos de las coordenadas α_0, α_2, s_1, s_2, a través de la respectiva representación en las coordenadas canónicas (x_1, y_1), y (x_2, y_2) tal como se indica en la siguiente transformación [15]

$$\chi_i = -\mathbf{q}^T X_i \; \mathbf{p} \tag{29}$$

Antes de aplicar (29), veamos que inicialmente hemos considerado las coordenadas $\bar{z}$ en $\mathbb{C}^2$ que siguen las ecuaciones transformación (16). Si cada coordenada de $\bar{z}$ la expresamos explícitamente con su parte real e imaginaria tenemos cuatro parámetros, es decir que podemos pasar de $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{R}^4$ escribiendo $z_i = x_i + iy_i$. Separando la parte real de la parte imaginaria y relacionándolas nuevamente con (16) deducimos las siguientes ecuaciones de transformación

$$\begin{aligned}
x_1 &= s_1 \cos\alpha_0 \cosh\alpha_2 - s_2 \sin\alpha_0 \sinh\alpha_2 \\
y_1 &= s_1 \sin\alpha_0 \cosh\alpha_2 + s_2 \cos\alpha_0 \sinh\alpha_2 \\
x_2 &= s_2 \cos\alpha_0 \cosh\alpha_2 + s_1 \sin\alpha_0 \sinh\alpha_2 \\
y_2 &= s_2 \sin\alpha_0 \cosh\alpha_2 - s_1 \cos\alpha_0 \sinh\alpha_2
\end{aligned} \tag{30}$$

Estas coordenadas $x_1, \ldots y_2$ de los puntos de $\mathbb{R}^4$ son coordenadas canónicas, que se corresponden con las componentes de $\mathbf{q}^T$ en (29), mientras que $\mathbf{p}$ son sus momentos canónicos respectivos $p_{x_1}, \ldots p_{y_2}$. Como nos interesa hallar los X_i en términos de las nuevas coordenadas utilizamos (30) para sustituir en las componente de $\mathbf{q}^T$. Para garantizar que los nuevos momentos P_{α_j}, P_{s_j} se correspondan con momentos canónicos de acuerdo a (30) realizamos las siguiente transformación según [15] (pág. 171-172)

$$Q_j = f_j(q)$$

Donde las Q_i se corresponden con las ecuaciones de transformación inversa de (30) y dada la siguiente expresión para los momentos canónicos

$$p^i = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} P^j \tag{31}$$

donde el término de las derivadas de las nuevas coordenadas en función de las antiguas se corresponde con los elementos de la matriz Jacobiana definida como

$$J_Q = \frac{\partial Q}{\partial q}$$

Sin embargo es conveniente escribirla como el inverso de J_q porque son precisamente los términos que podemos calcular

$$J_Q = J_q^{-1} = \left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^{-1}$$

En estos términos la expresión para los momentos canónicos en (31) de forma matricial es

$$\mathbf{p} = \left[\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^{-1}\right]^T \mathbf{P} \tag{32}$$

Donde los momentos P^j se corresponden respectivamente con P^{α_0}, P^{α_2}, P^{s_1}, P^{s_2}. Sustituyendo en (32) obtenemos las respectivas representaciones χ_j en el espacio de fases

$$\chi_1 = \frac{\sinh 2\alpha_2 \left(2m_2 s_1 s_2 + m_0\left(s_1^2 - s_2^2\right)\right)}{s_1^2 + s_2^2} - \cosh 2\alpha_2 \left(s_2 P^{s_1} + s_1 P^{s_2}\right)$$

$$\chi_3 = \frac{\cosh 2\alpha_2 \left(2m_2 s_1 s_2 + m_0\left(s_1^2 - s_2^2\right)\right)}{s_1^2 + s_2^2} - \sinh 2\alpha_2 \left(s_2 P^{s_1} + s_1 P^{s_2}\right)$$

$$\chi_2 = -m_2$$

asociados a los generadores X_i. Estas nuevas funciones χ_i deben corresponderse con el álgebra matricial asociada al grupo $U(1,1)$ por lo que calculando la función Casimir (28) obtenemos una función que identificamos con el Hamiltoniano clásico (salvo un factor constante global)

$$H = \left(s_1 P^{s_1} + s_2 P^{s_2}\right)^2 + \left(P^{s_1}\right)^2 - \left(P^{s_2}\right)^2 + \frac{m_0^2 - m_2^2 + 4m_2 m_0 s_1 s_2}{4s_1^2 s_2^2 + 1}$$

Debido a las ligaduras en el espacio hiperbólico $s_\mu P^\mu = 0$ [4] inferimos el Hamiltoniano clásico

$$H = \left(P_{s1}^2 - P_{s2}^2\right) + \frac{m_0^2 - m_2^2 + 4m_2 m_0 s_1 s_2}{4s_1^2 s_2^2 + 1}$$

Vemos que este resultado se corresponde con el invariante encontrado en (21) salvo un factor global $\frac{1}{2}$ que no tiene importancia. Si aplicamos las transformaciones $s_1 = r\cosh\alpha_0$ y $s_2 = r\sinh\alpha_0$ el Hamiltoniano quedará más reducido, recuperando nuevamente (22).

Como vemos, esta construcción clásica es más sistemática y permite construir los generadores del grupo como funciones de las coordenadas canónicas y el Hamiltoniano como la función Casimir. Aunque no lo hemos presentado aquí, la estructura de $u(2)$ se mantiene, por medio de los corchetes de Poisson en vez de conmutadores.

7 Representación diferencial y Hamiltoniano Cuántico

La representación diferencial de los generadores X_i la denotaremos como operadores $\hat{X}_i$ y los obtendremos aplicando nuevamente la transformación del mismo estilo que la clásica (29). Haciendo nuevamente la sustitución de las ecuaciones (30) escribiendo las coordenadas $s = s(r, \phi)$ y los momentos P^j como derivadas, por el principio de correspondecia, $P^{\alpha_j} \mapsto -i\,\partial_{\alpha_j}$ y $P^r \mapsto -i\,\partial_r$ y $P^\phi \mapsto -i\,\partial_\phi$ obtenemos los operadores

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= i\left(\cosh 2\alpha_2\,\partial_\phi - \sinh 2\alpha_2\,\mathrm{sech}\,2\phi\,(\partial_{\alpha_0} + \sinh 2\phi\,\partial_{\alpha_2})\right) \\ \hat{X}_3 &= i\left(\sinh 2\alpha_2\,\partial_\phi - \cosh 2\alpha_2\,\mathrm{sech}\,2\phi\,(\partial_{\alpha_0} + \sinh 2\phi\,\partial_{\alpha_2})\right) \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_2 &= i\,\partial_{\alpha_2} \\ \hat{Y}_0 &= -i\,\partial_{\alpha_0} \end{aligned} \tag{34}$$

El operador Casimir se corresponde de forma equivalente con (28) pero ahora, en nuestra notación de operadores, es

$$\hat{\mathfrak{C}} = \hat{X}_3^2 - \hat{X}_2^2 - \hat{X}_1^2 \tag{35}$$

Identificamos este operador Casimir con el Hamiltoniano cuántico (salvo un factor global) ya que es un operador de segundo orden que conmuta con las simetrías del grupo $U(1,1)$. Sustituyendo de (33) y (34) en (35) obtenemos la forma explícita del Hamiltoniano cuántico,

$$\hat{\mathbb{H}} = \partial_\phi^2 + 2\tanh 2\phi\,\partial_\phi + \frac{1}{\cosh^2 2\phi}\left(\partial_{\alpha_2}^2 - \partial_{\alpha_0}^2 - 2\sinh 2\phi\,\partial_{\alpha_2}\,\partial_{\alpha_0}\right) \tag{36}$$

7.1 Problema de valores propios

De las simetrías $\hat{X}_2$, $\hat{Y}_0$ que generan la MASA de $U(1,1)$ vamos a resolver el problema de valores propios asociados a estos dos operadores que se corresponde con resolver $\hat{Y}_0\Psi_{m_0} = m_0\Psi_{m_0}$, $\hat{X}_2\Psi_{m_2} = m_2\Psi_{m_2}$. Aplicando (34) se obtienen las autofunciones $\Psi_{m_0} = e^{im_0\alpha_0}$ y $\Psi_{m_2} = e^{-im_2\alpha_2}$. Los operadores de simetría conmutan entre sí tal como el Casimir conmuta con todos los generadores [7], [14], en consecuencia pueden actuar simultáneamente sobre este tipo de eigenfunciones separadas:

$$\Phi^k_{m_0,m_2}(\phi, \alpha_0, \alpha_2) = \psi^k_{m_0,m_2}(\phi)\,e^{im_0\alpha_0}e^{-im_2\alpha_2} \tag{37}$$

$$\hat{\mathbb{H}}\,\Phi^k_{m_0,m_2}(\phi, \alpha_0, \alpha_2) = E_k\,\psi^k_{m_0,m_2}(\phi)\,e^{im_0\alpha_0}e^{-im_2\alpha_2} \tag{38}$$

en donde E_k es el valor de la energía. Siendo la ecuación de valores propios asociada al Casimir reducido a la variable ϕ,

$$\hat{\mathcal{H}}\,\psi^k_{m_0,m_2}(\phi) = E_k\,\psi^k_{m_0,m_2}(\phi) \tag{39}$$

El subíndice m_0, m_2 está referido al los autovalores de $\hat{Y}_0$, $\hat{X}_2$ sobre los que actúan los operadores subida y bajada.

7.2 Operadores escalera asociados al operador no compacto $\hat{X}_2$

Como $\hat{Y}_0$ y $\hat{X}_2$ son simetrías para el Hamiltoniano, tomando $\hat{X}_2$ como operador diagonal definimos los operadores subida y bajada asociados a $\hat{X}_2$ mediante la siguiente combinación $\hat{X}^{\pm} = a\hat{X}_1 \pm b\hat{X}_3$ cuyos coeficientes deben satisfacer necesariamente la regla de conmutación $[\hat{X}_2, \hat{X}^{\pm}] = \pm\, \lambda \hat{X}^{\pm}$. Resolviendo hallamos

$$\hat{X}^{\pm} = \hat{X}_1 \pm \hat{X}_3 \tag{40}$$

Con ésta combinación encontramos que $\lambda = 2i$. por lo tanto la regla de conmutación queda

$$[\hat{X}_2, \hat{X}^{\pm}] = \pm\, 2i\hat{X}^{\pm} \qquad ; \qquad [\hat{X}^{+}, \hat{X}^{-}] = \pm\, 4i\hat{X}_2 \tag{41}$$

resultado análogo con el álgebra matricial como era de esperar. Aplicando (38) sobre (37) obtenemos respectivamente los operadores diferenciales $\hat{X}^{\pm}$

$$\begin{aligned} \hat{X}^{+} &= i\, e^{2\alpha_2} \left(\partial_\phi - \operatorname{sech} 2\phi\, \partial_{\alpha_0} - \tanh 2\phi\, \partial_{\alpha_2}\right) \\ \hat{X}^{-} &= i\, e^{-2\alpha_2} \left(\partial_\phi + \operatorname{sech} 2\phi\, \partial_{\alpha_0} + \tanh 2\phi\, \partial_{\alpha_2}\right) \end{aligned} \tag{42}$$

Veamos la acción de los operadores subida y bajada sobre la función separada (37). Por (42); se encuentra el siguiente resultado

$$\hat{X}^{\pm}\, \Phi^{k}_{m_0,m_2}(\phi, \alpha_0, \alpha_2) = \Phi^{k}_{m_0,m_2\pm 2i}(\phi, \alpha_0, \alpha_2) \tag{43}$$

Donde

$$\Phi^{k}_{m_0,m_2\pm 2i}(\phi, \alpha_0, \alpha_2) = \psi^{k}_{m_0,m_2\pm 2i}(\phi)\, e^{im_0\alpha_0} e^{-i(m_2\pm 2i)\alpha_2} \tag{44}$$

$$\psi^{k}_{m_0,m_2\pm 2i}(\phi) \propto \left(\mp\, m_2 \tanh 2\phi\ \pm\ m_0 \operatorname{sech} 2\phi\, \partial_{\alpha_0} + i\partial_\phi\right)\ \psi(\phi) \tag{45}$$

Si reescribimos de manera equivalente (43) con las exponenciales en el miembro izquierdo tenemos

$$\hat{X}^{\pm}\, \psi^{k}_{m_0,m_2}(\phi) = \left(\mp\, m_2 \tanh 2\phi\ \pm\ m_0 \operatorname{sech} 2\phi + i\partial_\phi\right)\ \psi^{k}_{m_0,m_2\pm 2i}(\phi) \propto \psi^{k}_{m_0,m_2\pm 2i}(\phi)$$

El miembro derecho es un operador que actúa sobre una función que sólo depende de la coordenada ϕ; éste operador se corresponde con el Hamiltoniano reducido (39). A este nuevo Hamiltoniano le podremos aplicar el método de la factorización con el objetivo de poder hallar sus autofunciones, pero se hace énfasis de que considerar $\hat{X}_2$ implica la siguiente relación

$$\hat{X}^{\pm}\, \psi^{k}_{m_0,m_2}(\phi) \propto \psi^{k}_{m_0,m_2\pm 2i}(\phi) \tag{46}$$

Es decir el valor propio m_2 sube y baja en cantidades imaginarias, lo cual carece de sentido físico, además que se obtendrían eigenfunciones de $\hat{\mathcal{H}}$ que no son de cuadrado integrable.

8 Método de la factorización

Veamos que aplicando (38) sobre las funciones separadas (37), considerando por el momento los subíndices $m_0,\ m_2$,

$$\hat{\mathbb{H}}\ \Phi^k_{m_0,m_2}(\phi,\alpha_0,\alpha_2) = e^{-i\ m_2\alpha_2} e^{i\ m_0\alpha_0} \left(\partial^2_\phi + 2\tanh 2\phi\ \partial_\phi + \frac{m_0^2 - m_2^2 - 2m_0m_2\sinh 2\phi}{\cosh^2 2\phi}\right)\psi^k_m(\phi) \tag{47}$$

Entonces, la ecuación en ϕ,

$$\hat{\mathcal{H}}\ \psi^k_{m_0,m_2}(\phi) = \left(\partial^2_\phi + 2\tanh 2\phi\ \partial_\phi + \frac{m_0^2 - m_2^2 - 2m_0m_2\sinh 2\phi}{\cosh^2 2\phi}\right)\psi^k_{m_0,m_2}(\phi) \tag{48}$$

se corresponde con el Hamiltoniano reducido y el objetivo siguiente es poder determinar las funciones propias asociadas a este Hamiltoniano. Un método estándar consiste en hallar los operadores factorización que deberían relacionarse de los operadores subida y bajada $\hat{X}^{\pm}$ [17], [19]. Sin embargo, debido a (46) no parece posible aplicar ésta simetría del grupo directamente para su deducción, así que usaremos la factorización directamente sobre (48). El método lo desarrollaremos a continuación y consiste en expresar $\hat{\mathcal{H}}$ como un producto de dos factores $A^{\pm}$ en la forma [6] (simplificando el subíndice)

$$\hat{\mathcal{H}}\ \psi^k_m(\phi) = (\hat{A}^+\hat{A}^- - \lambda)\ \psi^k_m(\phi) \tag{49}$$

siendos λ un escalar. Para facilitar la factorización vamos a eliminar el término dependiente de la primera derivada ∂_ϕ en (48), introduciendo una función gauge $\chi(\phi)$ en una función sobre la que va actuar el operador Hamiltoniano de tal forma que la expresamos como $\psi = \chi(\phi)\tilde{\psi}$ [20]. Aplicando $\hat{\mathcal{H}}$ sobre esta expresión y dividiendo el resultado por χ

$$\frac{\hat{\mathcal{H}}\ \ \chi(\phi)\tilde{\psi}}{\chi} = \partial^2_\phi\tilde{\psi} + 2\left(\frac{\partial_\phi\chi}{\chi} + \tanh 2\phi\right)\partial_\phi\tilde{\psi} + \left(\frac{\partial_{\phi\phi}\chi}{\chi} + 2\tanh 2\phi\ \frac{\partial_\phi\chi}{\chi}\right)\tilde{\psi} + V\tilde{\psi}$$

En el que hemos considerado V como el término fraccionario de (48); se puede verificar que $\left(\frac{\partial_\phi\chi}{\chi} + \tanh 2\phi\right)$ se anula si $\chi = (\cosh 2\phi)^{-\frac{1}{2}}$. Nuestro nuevo Hamiltoniano cuántico queda

$$\hat{\mathcal{H}}\ \tilde{\psi}^k_m = \left(\partial^2_\phi + \frac{m_0^2 - m_2^2 - 2m_0m_2\sinh 2\phi - 1}{\cosh^2 2\phi} - 1\right)\tilde{\psi}^k_m(\phi) \tag{50}$$

Nos interesa factorizar el término entre paréntesis que será el que vamos a expresar como en (49). Cada operador factorización puede escribirse de una forma simple $\hat{A}^+ = (-\partial_\phi + \omega)$ y $\hat{A}^- = (-\partial_\phi - \omega)$

$$\partial_\phi^2 + \frac{m_0^2 - m_2^2 - 2m_0 m_2 \sinh 2\phi - 1}{\cosh^2 2\phi} - 1 = (-\partial_\phi + \omega)(-\partial_\phi - \omega) - \lambda$$

Desarrollando el producto de la derecha tenemos los siguientes términos

$$\partial_\phi^2 - \omega^2 + \partial_\phi \omega - \lambda \tag{51}$$

proponemos la siguiente función $\omega(\phi)$

$$\omega = a \operatorname{sech} 2\phi + b \tanh 2\phi$$

Dada la definición de ω y desarrollando de acuerdo con la expresión (51) tenemos

$$\partial_\phi^2 + \frac{-a^2 + b(b+2) - 2a(b+1)\sinh 2\phi}{\cosh^2 2\phi} - b^2 - \lambda$$

Comparando con

$$\partial_\phi^2 + \frac{-m_2^2 + (m_0^2 - 1) - 2m_0 m_2 \sinh 2\phi}{\cosh^2 2\phi} - 1$$

en donde se ha asociado el uno al término m_0 ya que este indica la profundidad del pozo, así que en (49) $m = m_0$, además se infiere la siguiente correspondencia

$$m_0 = b + 1 \quad ; \quad m_2 = a; \quad \lambda = -b^2 + 1$$

Los operadores factorización quedan explícitamente

$$\begin{aligned} \hat{A}^+ &= -\partial_\phi + m_2 \operatorname{sech} 2\phi + (m_0 - 1)\tanh 2\phi \\ \hat{A}^- &= -\partial_\phi - m_2 \operatorname{sech} 2\phi - (m_0 - 1)\tanh 2\phi \end{aligned} \tag{52}$$

Aplicándola sobre la función

$$\begin{aligned} \hat{A}^+ \tilde{\psi}_{m_0}^k &= (m_2 \operatorname{sech} 2\phi + (m_0 - 1)\tanh 2\phi - \partial_\phi)\, \tilde{\psi}_{m_0}^k \\ \hat{A}^- \tilde{\psi}_{m_0}^k &= -(m_2 \operatorname{sech} 2\phi + (m_0 - 1)\tanh 2\phi + \partial_\phi)\, \tilde{\psi}_{m_0}^k \end{aligned} \tag{53}$$

Reescribiendo el Hamiltoniano quitando el $+1$

$$\hat{\mathcal{H}}_{m_0} = \hat{A}_{m_0}^+ \hat{A}_{m_0}^- - (m_0 - 1)^2$$

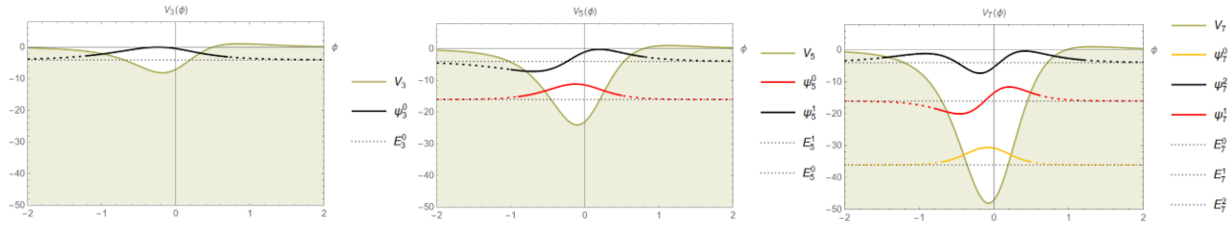


Figure 2: Eigenfunciones del Hamiltoniano Cuántico

Como los operadores factorización actúan directamente sobre la eigenfunciones del Hamiltoniano [19], [6] tenemos la expresión final

$$\hat{\mathcal{H}}_{m_0}\ \tilde{\psi}^k_{m_0}(\phi) = \left[\hat{A}^+_{m_0}\hat{A}^-_{m_0} - (m_0-1)^2\right]\tilde{\psi}^k_{m_0}(\phi) \tag{54}$$

La acción de $A^-_{m_0}$ sobre el estado fundamental $\tilde{\psi}^0_{m_0}(\phi)$ es de aniquilación así:

$$\hat{A}^-_{m_0}\tilde{\psi}^0_{m_0}(\phi) = 0 \tag{55}$$

Por lo que (54) queda de la forma

$$\hat{H}_{m_0}\ \tilde{\psi}^0_{m_0}(\phi) = -(m_0-1)^2\ \tilde{\psi}^0_{m_0}(\phi)$$

La cual es equivalente con (39), así que la energía del estado fundamental $E^0_{m_0} = -(m_0-1)^2$ es negativa ya que corresponde a estados ligados. La diferencia $m_0 - 1 > 0$ debe ser positiva ya que la energía va aumentando para los estados excitados como veremos después. Bajo la simetría de los autovalores m_0 se debe cumplir $m_0 = \pm 2k+1\ \forall\ k \ \epsilon\ \mathbb{N}$. Conforme m_0 aumenta, el pozo se va haciendo más profundo tal como se muestra en la figura 2. Con la relación (55) obtenemos la forma general de la eigenfunciones correspondientes a los estados fundamentales, así que solucionando ésta ecuación diferencial obtenemos de forma general

$$\psi^0_{m_0}(\phi) = c_1\sqrt{\cosh(2\phi)}\exp\left(-m_2\tan^{-1}(\tanh(\phi)) - \frac{1}{2}m_0\log(\cosh(2\phi))\right)$$

en donde c_1 es una constante de normalización. Veamos como ejemplo que fijando $m_2 = 1$ y para $m_0 = 3$, $m_0 = 5$, $m_0 = 7$ obtenemos los estados $\psi^0_3(\phi)$, $\psi^0_5(\phi)$ y $\psi^0_7(\phi)$. La figura 2. representa como cambia el pozo y la forma de cada estado fundamental cuyas energías se obtienen por la expresión $E^0_{m_0} = -(m_0-1)^2$. Resulta que al cambiar de orden la factorización anterior

$$\hat{\mathcal{H}}_{m_0} = \hat{A}^+_{m_0}\hat{A}^-_{m_0} - (m_0-1)^2$$

obtenemos

$$\hat{H}_{m_0-2} = \hat{A}^-_{m_0}\hat{A}^+_{m_0} - (m_0-1)^2 = \hat{A}^+_{m_0-2}\hat{A}^-_{m_0-2} - (m_0-3)^2$$

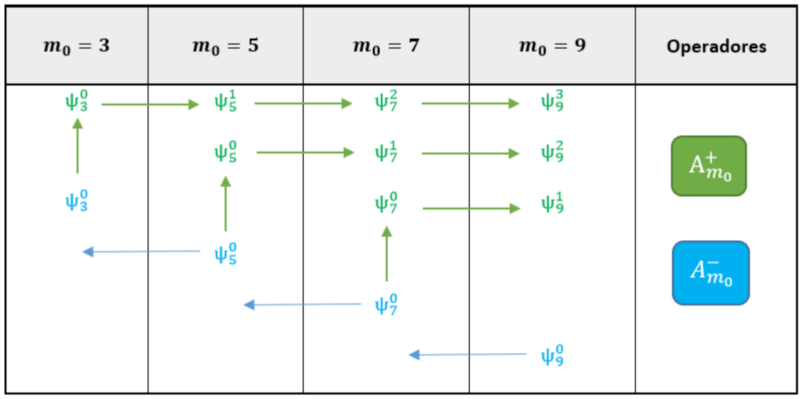


Figure 3: Acción de los Operadores Factorización

En otras palabras, se verifica la relación

$$\begin{aligned}\hat{H}_{m_0-2}\hat{A}_{m_0}^{-} &= \hat{A}_{m_0}^{-}\hat{H}_{m_0} \\ \hat{A}_{m_0}^{+}\hat{H}_{m_0-2} &= \hat{H}_{m_0}\hat{A}_{m_0}^{+}\end{aligned} \tag{56}$$

Como conocemos la forma general del estado fundamental para todo m_0 podemos hallar los estados excitados actuando el operador $A_{m_0}^{+}$ de la siguiente manera: el primer estado excitado desde el fundamental del Hamiltoniano anterior,

$$\hat{A}_{m_0}^{+}\psi_{m_0-2}^{0}(\phi) \propto \psi_{m_0}^{1}(\phi) \tag{57}$$

El segundo,

$$\hat{A}_{m_0-2}^{+}\psi_{m_0-4}^{0}(\phi) \propto \psi_{m_0-2}^{1}(\phi), \quad \hat{A}_{m_0}^{+}\psi_{m_0-2}^{1}(\phi) \propto \psi_{m_0}^{2}(\phi) \tag{58}$$

Es decir se aplica sobre el estado fundamental del pozo correspondiente al m_0 anterior. La siguiente tabla (Figura 3.) indica de una manera más gráfica la forma como actúan $A^{\pm}$. En ella se indica con flechas azules la acción de $\hat{A}_{m_0}^{-}$ sobre los estados fundamentales anulándola para el estado anterior, es decir, el correspondiente a $m_0 - 2$. La acción de $\hat{A}_{m_0-2}^{+}$, representada con las flechas verdes horizontales, pasa de $m_0 - 2$ a m_0 aplicando consecutivamente $\hat{A}^{+}$, m_0 aumenta de dos en dos, en consecuencia obtenemos $\psi_5^1(\phi)$, $\psi_7^1(\phi)$ y $\psi_7^2(\phi)$ cuya representación gráfica vemos en la figura 2 y además en el apéndice B se indican explícitamente esas soluciones. De forma general la acción de los operadores factorización esquemáticamente es

$$(\hat{A}_{m_0}^{+})^k\psi_{m_0-2k}^{0}(\phi) \;\propto\; \psi_{m_0}^{k}(\phi) \tag{59}$$

$$(\hat{A}_{m_0}^{-})^k\psi_{m_0}^{k}(\phi) \;\propto\; \psi_{m_0-2k}^{0}(\phi) \tag{60}$$

Es interesante ver que los operadores $A_{m_0}^{\pm}$, resultado de la factorización, suben y bajan una cantidad real sobre el invariante m_0 y no en m_2, pero veamos el efecto de cambiar éste último término. Recordemos que m_2 está asociado al X_2 que es no compacto, así que m_2 puede tomar cualquier valor real, a diferencia de m_0

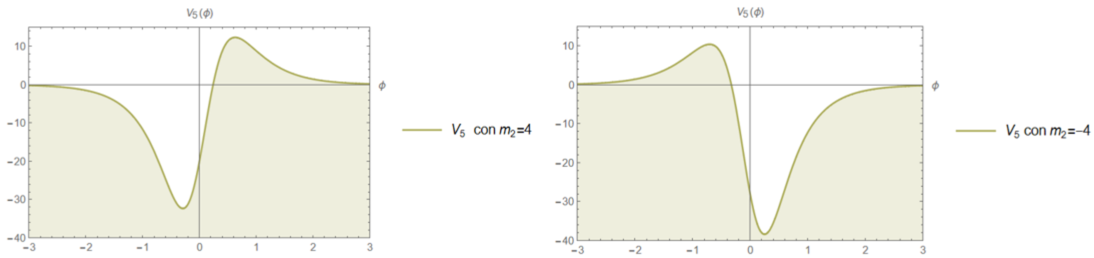


Figure 4: Inversión del pozo de potencial para $m_0 = 5$ por acción de m_2. Cuando $|m_2| \to \infty$ el trozo de gráfica por encima de $\phi = 0$ se realza.

que al estar asociado a un generador compacto toma valores entre $(0, 2\pi)$. En la figura 4. mostramos como varía el potencial al tomar los valores opuestos así como una breve descripción de cuando $|m_2| \to \infty$.

Vemos que los operadores factorización están asociados a subir y bajar 2 unidades a m_0, por lo que sugiere construir los operadores escalera sobre el generador de ésta simetría que también ha sido considerada en el $U(1,1)$. Sin embargo ¿Cómo podemos hallar una combinación lineal tal como 39 para obtener desde las simetrías del grupo unitario $U(1,1)$ unos $\hat{Y}^{\pm}$ de los que se deriven los $\hat{A}^{\pm}$ obtenidos en (52)?

9 Operadores factorización desde las simetrías del grupo U(1,1)

En el plano complejo $\mathbb{C}^2$ podemos construir un conjunto de transformaciones que se corresponden con reflexiones de los vectores complejos [31], [12]. Por ejemplo en $\mathbb{C}$ una conjugación compleja z^* se corresponde con la reflexión de z respecto al eje real, y por lo tanto $z = (z^*)^*$ por lo que éstas reflexiones forman una simetrías discretas de orden dos. Además la 2-pseudoesfera es invariante bajo este tipo de reflexiones. Nos fijaremos en particular en la trasformación $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2^*)$ que en $\mathbb{R}^4$ es equivalente a $(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1, y_1, x_2, -y_2)$. Denotemos tal reflexión como la matriz por bloques M

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{I}} \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

Aplicando ésta matriz en la transformación $Y_j = M X_j M$ para cada generador X_j de $su(1,1)$ obtenemos los generadores matriciales Y_j que actúan en $\mathbb{R}^4$ y que verifican el mismo álgebra matricial que denotamos por $\widetilde{su}(1,1)$,

$$[Y_1, Y_2] = -2Y_3 \qquad [Y_2, Y_3] = 2Y_1 \qquad [Y_3, Y_1] = 2Y_2$$

En particular se puede verificar que Y_3 se corresponde matricialmente con el generador Y_0 de $U(1,1)$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \iff Y_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{62}$$

Esta equivalencia es conveniente para obtener unos nuevos operadores subida y bajada tomando como operador diagonal a Y_3 ya que que se corresponde con la otra simetría del grupo $U(1,1)$ (recordemos que hicimos uso de X_2 y de Y_0). Imponemos que los $Y^{\pm}$ satisfagan $[Y_3,\ Y^{\pm}] = \pm\, \lambda Y^{\pm}$. Tras unas pruebas haciendo una combinación lineal de $Y_1,\ Y_2$ encontramos que $Y^{\pm} = iY_1 \mp Y_2$ lo que conlleva al álgebra $[Y_3,\ Y^{\pm}] = \mp\, 2iY^{\pm}$. Podemos solucionar fácilmente el intercambio de signos si definimos $\widetilde{Y_j} = i\ Y_j$, así los $Y^{\pm}$ quedan definidos como

$$Y^{\pm} = \widetilde{Y_1} \pm i\ \widetilde{Y_2} \tag{63}$$

que cumplen exactamente con el álgebra esperada

$$[\widetilde{Y_3}, Y^{\pm}] = \pm\, 2Y^{\pm} \qquad ; \qquad [Y^{+}, Y^{-}] = 4\widetilde{Y_3} \tag{64}$$

Además se verifica que ambos generadores $X_j,\ \widetilde{Y}_k$ conmutan

$$[X_j,\ \widetilde{Y}_k] = 0$$

Con las $\widetilde{Y}_j$ tenemos el álgebra matricial esperada. Hallamos las $\hat{Y}_i$ a partir de las Y_i multiplicadas por i tal como se hizo con los $\hat{X}_j$

$$\begin{aligned}
&\hat{Y}_1 = i\left(\cos 2\alpha_0\ \partial_\phi + \sin 2\alpha_0\ (\text{sech}\ 2\phi\ \partial_{\alpha_2} - \partial_{\alpha_0} \tanh 2\phi)\right) \\
&\hat{Y}_2 = i\left(\sin 2\alpha_0\ \partial_\phi + \cos 2\alpha_0\ \text{sech}\ 2\phi\ (\sinh 2\phi\ \partial_{\alpha_0} - \partial_{\alpha_2})\right) \\
&\hat{Y}_3 = -i\ \partial_{\alpha_0}
\end{aligned} \tag{65}$$

Los operadores diferenciales subida y bajada son $\hat{Y}^{\pm}$ se corresponde con la combinación lineal $\hat{Y}^{\pm} = \hat{Y}_1 \pm i\hat{Y}_2$ (63)

$$\begin{aligned}
\hat{Y}^{+} &= e^{2i\alpha_0}\left(-\tanh 2\phi\ \partial_{\alpha_0} + \text{sech}2\phi\ \partial_{\alpha_2} + i\ \partial_\phi\right) \\
\hat{Y}^{-} &= e^{-2i\alpha_0}\left(\ \tanh 2\phi\ \partial_{\alpha_0} - \text{sech}2\phi\ \partial_{\alpha_2} + i\ \partial_\phi\right)
\end{aligned} \tag{66}$$

Actuando sobre la función de (37) asociado al autovalor m_0

$$\begin{aligned}
\hat{Y}^{+}\ \Phi^{k}_{m_0} &= -i\ \left(m_2\ \text{sech}\ 2\phi\ + m_0 \tanh 2\phi -\ \partial_\phi\right) \psi(\phi) e^{i(m_0+2)\alpha_0} e^{-im_2\alpha_2} \\
\hat{Y}^{-}\ \Phi^{k}_{m_0} &= i\ \left(m_2\ \text{sech}\ 2\phi\ + m_0 \tanh 2\phi +\ \partial_\phi\right) \psi(\phi) e^{i(m_0-2)\alpha_0} e^{-im_2\alpha_2}
\end{aligned} \tag{67}$$

Las reglas de conmutación que satisfacen éstos operadores son

$$\begin{aligned}
&[\hat{Y}_1, \hat{Y}_2] = -\, 2i\hat{Y}_3 \qquad [\hat{Y}_2, \hat{Y}_3] = 2i\hat{Y}_1 \qquad [\hat{Y}_3, \hat{Y}_1] = 2i\hat{Y}_2 \\
&[\hat{Y}_3, \hat{Y}^{\pm}] = \pm\, 2\hat{Y}^{\pm} \qquad [\hat{Y}^{+}, \hat{Y}^{-}] = 4\hat{Y}_3
\end{aligned} \tag{68}$$

Retomando nuevamente (28) en términos de las Y_j

$$\mathfrak{C} = \hat{Y}_3^2 - \hat{Y}_2^2 - \hat{Y}_1^2 \tag{69}$$

Desarrollando cada operador tenemos el siguiente resultado

$$\mathfrak{C} = \mathrm{sech}^2 2\phi \, (\partial_{\alpha_2}^2 - \partial_{\alpha_0}^2 - 2\sinh 2\phi \, \partial_{\alpha_2}\partial_{\alpha_0} + \sinh 4\phi \, \partial_\phi) + \partial_\phi^2$$

El cual es equivalente a (36). El Casimir podemos reescribirlo en términos del producto de los operadores $\hat{Y}^\pm$, asi por la expresión (63) tenemos que $\hat{Y}^+\hat{Y}^- = (\hat{Y}_1 + i\,\hat{Y}_2)(\hat{Y}_1 - i\,\hat{Y}_2)$, desarrollando éste producto

$$\hat{Y}^+\hat{Y}^- = \hat{Y}_1^2 + \hat{Y}_2^2 - i[\hat{Y}_1, \hat{Y}_2] \tag{70}$$

que por la primera regla de conmutación en (68) queda

$$\hat{Y}^+\hat{Y}^- = \hat{Y}_1^2 + \hat{Y}_2^2 - 2\hat{Y}_3$$

Despejando los dos términos cuadráticos y reemplazando en (69)

$$\mathfrak{C} = \hat{Y}_3(\hat{Y}_3 - 2) - \hat{Y}^+\hat{Y}^-$$

Aplicando $\hat{Y}^\pm$ sobre (37)

$$\hat{Y}^+\hat{Y}^-\Phi_{m_0}^k = \left[\frac{m_2^2 - m_0(m_0+1) + 2m_2m_0\sinh 2\phi}{\cosh^2 2\phi} + (2 + \tanh^2 2\phi)m_0 - 2\tanh 2\phi\partial_\phi - \partial_\phi^2\right]\Phi_{m_0}^k(\phi)$$

Cada uno de estos factores se corresponde con los operadores factorización que actúan solamente sobre el hamiltoniano reducido

$$\begin{aligned}\hat{B}_{m_0}^+ \, \psi_{m_0}^k(\phi) &= -ie^{i(m_0+2)\alpha_0}e^{-im_2\alpha_2}(m_0 \, \tanh 2\phi + m_2 \, \mathrm{sech}2\phi - \partial_\phi) \, \psi_{m_0}^k(\phi)\\ \hat{B}_{m_0}^- \, \psi_{m_0}^k(\phi) &= ie^{i(m_0-2)\alpha_0}e^{-im_2\alpha_2}(m_0 \, \tanh 2\phi + m_2 \, \mathrm{sech}2\phi + \partial_\phi) \, \psi_{m_0}^k(\phi)\end{aligned} \tag{71}$$

Con el que verificamos la acción esperada de subir y bajar 2 unidades al autovalor m_0

$$\begin{aligned}\hat{B}_{m_0}^+ \, \psi_{m_0}^k(\phi) &= -ie^{2i\alpha_0}(m_0 \, \tanh 2\phi + m_2 \, \mathrm{sech}2\phi - \partial_\phi) \, \psi_{m_0}^k(\phi)\\ \hat{B}_{m_0}^- \, \psi_{m_0}^k(\phi) &= ie^{-2i\alpha_0}(m_0 \, \tanh 2\phi + m_2 \, \mathrm{sech}2\phi + \partial_\phi) \, \psi_{m_0}^k(\phi)\end{aligned} \tag{72}$$

Actuando

$$\begin{aligned}\hat{B}_{m_0}^+ \, \psi_{m_0}^k(\phi) &= -ie^{2i(m_0+1)\alpha_0}\psi_{m_0}^k \, (m_0 \, \tanh 2\phi + m_2 \, \mathrm{sech}2\phi - \partial_\phi) \, \psi_{m_0}^k(\phi)\\ \hat{B}_{m_0}^- \, \psi_{m_0}^k(\phi) &= ie^{2i(m_0-1)\alpha_0}\psi_{m_0}^k \, (m_0 \, \tanh 2\phi + m_2 \, \mathrm{sech}2\phi + \partial_\phi) \, \psi_{m_0}^k(\phi)\end{aligned} \tag{73}$$

10 Factorización clásica

Estudiaremos la factorización clásica [12] como límite del caso cuántico a través del principio de correspondencia que establece la siguiente relación entre momentos $-i\partial_\phi \to p_\phi$ y $-i\partial_{\alpha_0} \to p_{\alpha_0}$ [13], [19] [9] los cuales sustituyendo en (65) y (66) deducimos la relación entre los siguientes operadores en el caso cuántico $\hat{Y}_3$, $\hat{Y}^\pm$ respectivamente con las funciones clásicas a_3, $a^\pm$ y De los cuales obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{Y}^+ &\to a^+ = e^{2i\alpha_0}\big(-i\ \tanh 2\phi\, p_{\alpha_0} + i\ \mathrm{sech}\ 2\phi\ p_{\alpha_2} - \ p_\phi\big) \\ \hat{Y}^- &\to a^- = e^{-2i\alpha_0}\big(i\ \tanh 2\phi\, p_{\alpha_0} - i\ \mathrm{sech}\ 2\phi\ p_{\alpha_2} - p_\phi\big) \\ \hat{Y}_3 &\ \to\ a_3 = p_{\alpha_0} \end{aligned} \tag{74}$$

Se deducen los siguientes corchetes de Poisson

$$\{a^\pm, a_3\} = \pm\, 2ia^\pm \qquad \{a^+, a^-\} = 4ia_3 \tag{75}$$

Análogamente con (49) expresamos el Hamiltoniano clásico como

$$h = a^+a^- + \lambda_{m_0} \tag{76}$$

Desarrollamos $a^+a^- = h - \lambda_{m_0}$

$$a^+a^- = P_\phi^2 + \frac{P_{\alpha_2}^2 - P_{\alpha_0}^2 - 2P_{\alpha_2}P_{\alpha_0}\sinh(2\phi)}{\cosh^2(2\phi)} + P_{\alpha_0}^2 \tag{77}$$

con $\lambda_{m_0} = -P_{\alpha_0}^2$ tenemos el hamiltoniano clásico

$$h = P_\phi^2 + \frac{P_{\alpha_2}^2 - P_{\alpha_0}^2 - 2P_{\alpha_2}P_{\alpha_0}\sinh(2\phi)}{\cosh^2(2\phi)} \tag{78}$$

Resultado similar a (50) sin el -1 y equivalente a (22). En (22) teníamos un signo positivo precediendo el término cruzado, tal como se explicó en la sección 8, m_2 puede ser positivo o negativo; por lo tanto ese signo no es relevante y tenemos resultados equivalentes, lo cual es coherente. Con éste resultado probamos los corchetes

$$\{h, a^\pm\} = \{h, a_3\} = 0$$

Por lo que a^+, a^- y a_3 son simetrías clásicas. Si multiplicamos $a^\pm$ en (74) por $e^{\mp 2i\alpha_0}$ cada término equivale a dos números complejos conjugados

$$\begin{aligned} a^+ &\to (C_0 + iC_1)\, e^{-2i\alpha_0} = \mathfrak{z}\, e^{i\beta_0}e^{-2i\alpha_0} \\ a^- &\to (C_0 - iC_1)\, e^{2i\alpha_0} = \mathfrak{z}\, e^{-i\beta_0}e^{2i\alpha_0} \end{aligned} \tag{79}$$

[9] Se están considerando unidades naturales, es decir $\hbar = 1$

con β_0 constante deducimos la ecuación diferencial

$$
\begin{aligned}
& i\,(-\tanh 2\phi\; p_{\alpha_0} + \operatorname{sech}\, 2\phi\; p_{\alpha_2}) - p_\phi = \mathfrak{z}\; e^{i(\beta_0 - 2\alpha_0)} \\
& -i(-\tanh 2\phi\; p_{\alpha_0} + \operatorname{sech}\, 2\phi\; p_{\alpha_2}) - p_\phi = \mathfrak{z}\; e^{-i(\beta_0 - 2\alpha_0)}
\end{aligned}
\tag{80}
$$

Definiendo $\widetilde{\Psi}(\phi) = -\tanh 2\phi\; p_{\alpha_0} + \operatorname{sech}\, 2\phi\; p_{\alpha_2}$ Que se corresponden a unas ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son

$$
\begin{aligned}
& p_\phi = -\mathfrak{z} \cos 2\,(\beta_0 - \alpha_0) \\
& \widetilde{\Psi}(\phi) = \mathfrak{z} \sin 2\,(\beta_0 - \alpha_0)
\end{aligned}
\tag{81}
$$

encontramos una relación entre ϕ y α_0 con lo cual obtenemos la solución de la trayectorias ϕ en función de α_0.

De acuerdo con la factorización (76)

$$
a^+ a^- = h + p_{\alpha_0}^2 = E - p_{\alpha_0}^2
$$

que es una constante positiva. Luego el módulo de $a^\pm$ es

$$
|a^\pm| = \sqrt{E - p_{\alpha_0}^2}
$$

Por lo tanto, en (80) podemos sustituir

$$
\mathfrak{z} = \sqrt{E - p_{\alpha_0}^2}
$$

Identificando, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& p_\phi = -\sqrt{E - p_{\alpha_0}^2} \cos 2\,(\beta_0 - \alpha_0) \\
& (-\tanh 2\phi\; p_{\alpha_0} + \operatorname{sech}\, 2\phi\; p_{\alpha_2}) = \sqrt{E - p_{\alpha_0}^2} \sin 2\,(\beta_0 - \alpha_0)
\end{aligned}
\tag{82}
$$

De estas ecuaciones obtenemos las trayectorias en el espacio de fases. Por ejemplo, de la segunda ecuación, tomando valores particulares para las constantes $p_{\alpha_0}, p_{\alpha_2}, E$ podemos obtener el ángulo α_0 en función de ϕ.

11 Conclusiones

A continuación enumeramos una lista de conclusiones en donde indicamos los aspectos más originales de nuestro trabajo.

- Hemos reducido el Hamiltoniano libre en un espacio complejo mediante una subálgebra no compacta $u(1,1)$, obteniendo un Hamiltoniano en un espacio $\mathbb{R}$ que presenta un potencial

- El comportamiento del potencial depende de los valores de m_0 y m_2

- En el caso cuántico

  $\hat{X}^{\pm}$: asociados a $m_2 \ \rightarrow \ m_2 \pm 2i$

- Estudiamos el Hamiltoniano cuántico reducido mediante el método de factorización obteniendo sus autofunciones y autovalores

- La factorización nos permite interpretar m_0 como el autovalor asociado al espectro de energías

- Bajo la transformación

$$M : (z_1, z_2) \ \rightarrow \ (z_1, z_2^*)$$

  encontramos un álgebra conjugada de simetrías: $Y_k = M X_k M$, que es isomorfa a un álgebra de tipo $su(1,1)$

- El Hamiltoniano reducido, tiene un grupo de invariancia mayor, resultado del producto directo

$$SU(1,1) \otimes \widetilde{SU}(1,1)$$

12 Apéndice A. Matrices unitarias como exponenciales

Una transformación infinitesimal puede escribirse como $U = I + \epsilon A$. Si el parámetro infinitesimal es un ángulo partido en un número infinitamente grande

$$\epsilon = \lim_{N \to \infty} \frac{\alpha}{N}$$

entonces una transformación finita la entendemos como

$$U(\alpha) = \lim_{N \to \infty} \left[I + \frac{\alpha}{N} B \right]^N$$

Haciendo una expasión en serie de Taylor en torno a $\alpha = 0$

$$U(\alpha) = \lim_{N \to \infty} \left[I + B\alpha + \frac{1}{2!} \frac{N-1}{N} B^2 \alpha^2 + ... + \frac{1}{n!} \frac{(N-1)(N-2)...(N-(n-1))}{N^{n-1}} B^n \alpha^n + ... \right]$$

$$U(\alpha) = e^{\alpha B}$$

Las funciones trigonométricas están en función de exponenciales complejas luego si afectarse el m_0 con un número real pero los términos llevan signos opuestos y además hay un parte imaginaria.

13 Apéndice B. Funciones propias del Hamiltoniano

Soluciones para $m_2 = 1$ y $m_0 = 3$

$$\psi_3^0 = \left(\frac{1}{2}\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\cosh(2\phi)} \exp\left(\frac{3}{2}(-1)\log(\cosh(2\phi)) - \tan^{-1}(\tanh(\phi))\right) \tag{83}$$

Soluciones para $m_2 = 1$ y $m_0 = 5$

$$\psi_5^0 = \left(\frac{3}{10}\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\cosh(2\phi)} \exp\left(\frac{5}{2}(-1)\log(\cosh(2\phi)) - \tan^{-1}(\tanh(\phi))\right) \tag{84}$$

$$\begin{aligned}\psi_5^1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{7}} & \frac{\sqrt{2\mathrm{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{sech}(2\phi)\mathrm{sech}^2(\phi)e^{-\tan^{-1}(\tanh(\phi))}}}{\tanh^2(\phi)+1} \\ & + \sqrt{2\mathrm{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{sech}^2(2\phi)e^{-\tan^{-1}(\tanh(\phi))}} \\ & + 4\sqrt{2\mathrm{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\tanh(2\phi)\mathrm{sech}(2\phi)e^{-\tan^{-1}(\tanh(\phi))}\end{aligned} \tag{85}$$

Soluciones para $m_2 = 1$ y$m_0 = 7$

$$\psi_7^0 = \sqrt{\frac{13}{3}\mathrm{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{sech}^3(2\phi)e^{-\tan^{-1}(\tanh(\phi))} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}\psi_7^1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{42}} & \sqrt{\frac{10}{3}\mathrm{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{sech}^3(2\phi)e^{-\tan^{-1}(\tanh(\phi))} \\ - & \sqrt{\frac{10}{3}\mathrm{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{sech}^2(2\phi)e^{-\tan^{-1}(\tanh(\phi))}\left(-5\tanh(2\phi) - \frac{\mathrm{sech}^2(\phi)}{\tanh^2(\phi)+1}\right) \\ + & \sqrt{30\mathrm{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\tanh(2\phi)\mathrm{sech}^2(2\phi)e^{-\tan^{-1}(\tanh(\phi))}\end{aligned} \tag{87}$$

14 Apéndice C. U(2,1)

Toda matriz pseudo-unitaria puede expresarse como una exponencial. Fijando la métrica $G(2,1)$ en $\mathbb{C}^3$ el producto pseudo-hermítico se define como

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z^\dagger G w = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* & z_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z_1^* w_1 + z_2^* w_2 - z_3^* w_3$$

Los elementos de este grupo nuevamente tienen como determinante un numero complejo de modulo 1, es decir se encuentra sobre S^1. De acuerdo a esto si parametrizamos la matriz A se obtiene la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ -d^* & b & f \\ e^* & f^* & c \end{pmatrix} \tag{88}$$

Se deducen las siguientes relaciones $a^* = -a, b^* = -b, c^* = -c$. Luego los elementos de la diagonal son imaginarios puros y tenemos tres grados de libertad para estos elementos. Por otro lado d, e, f son complejos, luego suman seis grados de libertad. En total hay nueve generadores de $U(2,1)$ que vamos a denotar de la siguiente manera

$$\begin{gathered} X_{11} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{89}$$

Con X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_4 antihermíticos [2], [31] y los demás hermíticos. Imponiendo la condición de traza nula para definir $SU(2,1)$ vemos que los tres primeros son los únicos que no satisfacen ésta condición, luego combinando $X_1 = X_{11} - X_{12}$ y $X_2 = X_{12} - X_{13}$ tenemos dos generadores que si la cumplen. En total tenemos ocho generadores para $SU(2,1)$

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Combinando Y_{11}, Y_{12}, Y_{13} tenemos un elemento de $U(1,1)$ que de forma análoga con $SU(2)$ nos da una fase global

$$Y_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.1 Suálgebra de Cartan NC

Tal como en $SU(1,1)$ mantendremos dos generadores compactos Y_0, Y_1 y uno no compacto Y_{13}, luego tenemos la siguiente base para esta subálgebra

$$Y_0 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \tag{90}$$

La transformación de coordenadas para éste caso

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \left[e^{\alpha_0 Y_0} + \; e^{\alpha_1 X_1} \; e^{\alpha_2 X_2}\right] \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \tag{91}$$

$$e^{\alpha_2 X_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -i & i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\alpha_2 - \sinh\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\alpha_2 + \sinh\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{\alpha_2 X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\alpha_2 & i\sinh\alpha_2 \\ 0 & -i\sinh\alpha_2 & \cosh\alpha_2 \end{pmatrix}$$

La transformación

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \left[e^{i\alpha_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{i\alpha_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\alpha_2 & i\sinh\alpha_2 \\ 0 & -i\sinh\alpha_2 & \cosh\alpha_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

es tal cual como en $SU(1,1)$. El factor $e^{\alpha_0 Y_0}$ indica una fase solamente a la coordenada s_0. Las ecuaciones de transformación son

$$z_0 = e^{i\alpha_0} s_0 \tag{92}$$

$$z_1 = e^{i\alpha_1}(s_1 \cosh\alpha_2 + i s_2 \sinh\alpha_2) \tag{93}$$

$$z_2 = e^{i\alpha_1}(-i s_1 \sinh\alpha_2 + s_2 \cosh\alpha_2) \tag{94}$$

Para $\bar{z} \in \mathbb{C}^3$ su diferencial total

$$d\bar{z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{\partial \bar{z}}{\partial s_i} ds_i$$

la derivada temporal queda

$$\dot{\bar{z}} = Y_0 e^{\alpha_0 Y_0} \bar{s}\ \dot{\alpha_0} + Y_1 e^{\alpha_1 Y_1} e^{\alpha_2 Y_2} \bar{s}\ \dot{\alpha_1} + Y_2 e^{\alpha_1 Y_1} e^{\alpha_2 Y_2} \bar{s}\ \dot{\alpha_2} + (e^{\alpha_0 Y_0} + e^{\alpha_1 Y_1} e^{\alpha_2 Y_2})\ \dot{\bar{s}}$$

Como $(\dot{\bar{z}})^\dagger G \dot{\bar{z}} =$ invariante entonces

$$(\dot{\bar{z}})^\dagger G \dot{\bar{z}} = (Y_0 \bar{z}\ \dot{\alpha_0} + Y_2 \bar{z}\ \dot{\alpha_2} + e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}}\ \dot{\bar{s}})^\dagger\ G\ (Y_0 \bar{z}\ \dot{\alpha_0} + Y_2 \bar{z}\ \dot{\alpha_2} + e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}}\ \dot{\bar{s}})$$

por propiedad del traspuesto conjugado $\bar{z}^\dagger = \bar{s}^\dagger (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}})^\dagger$ reemplazamos

$$(\bar{s}^\dagger (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}})^\dagger Y_0^\dagger\ \dot{\alpha_0} + \bar{s}^\dagger (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}})^\dagger Y_2^\dagger\ \dot{\alpha_2} + \dot{\bar{s}}^\dagger (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}})^\dagger\ G\ (Y_0 e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}} \bar{s}\ \dot{\alpha_0} + Y_2 e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}} \bar{s}\ \dot{\alpha_2} + e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}}\ \dot{\bar{s}})$$

Desarrollando el producto y teniendo en cuenta que $Y_0,\ Y_2$ conmutan con $e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}} \in U(1,1)$ obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}(\dot{\bar{z}})^\dagger G \dot{\bar{z}} &= \bar{s}^\dagger G \bar{s}\ \dot{\alpha_0}^2 + \bar{s}^\dagger Y_0^\dagger G Y_2 \bar{s}\ \dot{\alpha_0}\dot{\alpha_2} + \bar{s}^\dagger Y_0^\dagger G \dot{\bar{s}}\ \dot{\alpha_0} + \bar{s}^\dagger Y_2^\dagger G Y_0 \bar{s}\ \dot{\alpha_0}\dot{\alpha_2} \\ &+ \bar{s}^\dagger Y_2^\dagger G Y_2 \bar{s}\ \dot{\alpha_2}^2 + \bar{s}^\dagger Y_2^\dagger G \dot{\bar{s}}\ \dot{\alpha_2} + \dot{\bar{s}}^\dagger G Y_0 \bar{s}\ \dot{\alpha_0} \\ &+ \dot{\bar{s}}^\dagger G Y_2 \bar{s}\ \dot{\alpha_2} + \dot{\bar{s}}^\dagger (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}})^\dagger G (e^{\bar{\alpha}.\bar{Y}}) \dot{\bar{s}}\end{aligned} \tag{95}$$

Haciendo los cálculos respectivos finalmente tenemos el invariante

$$(\dot{\bar{z}})^\dagger G \dot{\bar{z}} = \dot{s_0}^2 + \dot{s_1}^2 - \dot{s_2}^2 + s_0{}^2 \dot{\alpha_0}^2 + (s_1{}^2 - s_2{}^2)(\dot{\alpha_1}^2 - \dot{\alpha_2}^2) + 4 s_1 s_2 \dot{\alpha_1}\dot{\alpha_2} \tag{96}$$

Asociando éste término con el lagrangiano $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{\alpha}_0, \dot{\alpha}_2, \dot{s}_1, \dot{s}_2)$ vemos que las $\dot{\alpha_i}$ son coordenadas cíclicas, luego sus momentos conjugados respectivamente son constantes las cuales llamaremos $M_0,\ M_2$ respectivamante. Por lo tanto

$$M_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha_i}}$$

Desarrollando estas derivada y expresando $\dot{\alpha_i}$ en términos de las M_i

$$\dot{\alpha_1} = \frac{2 s_1 s_2 M_1 - (s_1^2 - s_2^2) M_2}{2(s_1^2 + s_2^2)^2} \qquad ; \qquad \dot{\alpha_2} = \frac{2 s_1 s_2 M_2 + (s_1^2 - s_2^2) M_1}{2(s_1^2 + s_2^2)^2}$$

$$\dot{\alpha_1} = \frac{M_0}{2 s_0^2}$$

Por otro lado las otras coordenadas s_i no son cíclicas y sus momentos conjugados son respectivamente

$$p_{s_0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s_1}} = 2\dot{s_0} \qquad ; \qquad p_{s_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s_1}} = 2\dot{s_1} \qquad ; \qquad p_{s_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s_2}} = -2\dot{s_2}$$

Haciendo la transformada de Legendre obtenemos

$$\mathcal{H} = \frac{p_{s_0}^2}{4} + \frac{p_{s_1}^2}{4} - \frac{p_{s_2}^2}{4} + \frac{M_0^2}{4s_0^2} + \frac{(M_1^2 - M_2^2)({s_1}^2 - {s_2}^2) + 4s_1 s_2 M_1 M_2}{4({s_1}^2 + {s_2}^2)^2} \tag{97}$$

Para simplificar más la expresión y llegar al mismo resultado de [5] [10] redefinimos $p_{s_i} = \sqrt{2} p_{s_i},\ M_i = 2m_i$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_{s_0}^2 + p_{s_1}^2 - p_{s_2}^2) + \frac{m_0^2}{s_0^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)({s_1}^2 - {s_2}^2) + 4s_1 s_2 m_1 m_2}{({s_1}^2 + {s_2}^2)^2} \tag{98}$$

Sustituyendo $s_0 = r\cosh\phi_2\ s_1 = r\sinh\phi_1\sinh\phi_2,\ s_2 = r\sinh\phi_2\cosh\phi_1$ sobre la pseudo-esfera unitaria, con $c = -1$ como un factor global en queda finalmente el Hamiltoniano para el caso NC

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(p_{\phi_2}^2 - \frac{p_{\phi_1}^2}{\sinh^2\phi_2}\right) - \frac{m_0^2}{\cosh^2\phi_2} + \frac{1}{\sinh^2\phi_2}\left(\frac{m_1^2 - m_2^2 - 2m_1 m_2 \sinh 2\phi_1}{\cosh^2 2\phi_1}\right) \tag{99}$$

Tenemos el potencial

$$V(\phi_1, \phi_2) = -\frac{m_0^2}{\cosh^2\phi_2} + \frac{1}{\sinh^2\phi_2}\left(\frac{m_1^2 - m_2^2 - 2m_1 m_2 \sinh 2\phi_1}{\cosh^2 2\phi_1}\right) \tag{100}$$

14.2 Operadores subida y bajada

De [5], la base para esta MASA es $\{2Y_1 + Y_2, Y_8\}$ definiendo los siguientes elementos $C_1 = (2Y_1 + Y_2)^2,\ C_2 = \{2Y_1 + Y_2, Y_8\},\ C_3 = {Y_8}^2$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1 &= Y_2^2 - Y_7^2 \\ \hat{Q}_2 &= Y_3^2 + Y_4^2 - Y_5^2 - Y_6^2 \\ \hat{Q}_3 &= \{Y_3, Y_5\} + \{Y_4, Y_6\} \end{aligned} \tag{101}$$

Dichos operadores cumplen las siguientes reglas de conmutación $[\hat{Q}_3, \hat{Q}_1] = [\hat{Q}_2, \hat{Q}_3] = [\hat{Q}_1, \hat{Q}_2] = 0$ El operador Casimir

$$C = C_1 - 3C_3 + 3\hat{Q}_1 + 3\hat{Q}_2$$

Asi que relacionándolo directamente con el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = Q_1 + Q_1 + cte$$

el cual corresponde al Hamiltoniano.

[10] La expresión general del Hamiltoniano $\mathcal{H} = c\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_{s^\mu}p_{s^\nu} + V(s)\right)$

References

[1] Olivier Babelon, Denis Bernard, and Michael Talon. *Introduction to Classical Integrable Systems.* Cambridge University Press, 2003.

[2] Aleksei Viktorovich Bolsinov, Sergei Vladimirovich Matveev, and Anatoly Timofeevich Fomenko. Topological classification of integrable hamiltonian systems with two degrees of freedom. list of systems of small complexity. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 45(2):49–77, 1990.

[3] Alekseui Viktorovich Bolsinov and Anatolij Timofeevivc Fomenko. *Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification.* CRC press, 2004.

[4] Juan A. Calzada, Mariano del Olmo, and Miguel A. Rodríguez. Classical superintegrable so(p,q) hamiltonian systems. *Journal of Geometry and Physics*, (23):14–30, 1997.

[5] Juan A. Calzada, Mariano del Olmo, and Miguel A. Rodríguez. Pseudo-orthogonal groups and integrable dynamical systems in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, 40(1):188–208, 1999.

[6] Juan A. Calzada, Javier Negro, and Mariano del Olmo. Superintegrable quantum u(3) systems and higuer rank factorizations. *Journal of Mathematical Physics*, 40(1):1–17, 1999.

[7] Leonardo Castellani. Symmetries in constrained hamiltonian systems. *Annals of Physics*, 143(2):357–371, 1982.

[8] Enrico A. Celeghini, Mariano del Olmo, and Manuel. Gadella. Symmetry groups, quantum mechanics and generalized hermite functions. *MDPI Journal Mathematics*, (23):1–21, 2022.

[9] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe. Quantum mechanics, volume 1. *Quantum Mechanics*, 1:898, 1986.

[10] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe. Quantum mechanics, volume 2. *Quantum Mechanics*, 2:626, 1986.

[11] Fred Cooper, Avinash Khare, and Uday Sukhatme. *Supersymmetry in Quantum Mechanics.* World Scientific, 2001.

[12] JP Elliott and PG Dawber. *Symmetry in Physics, Volume 1 and 2.* Macmillan, 1979.

[13] NW Evans. Superintegrability in classical mechanics. *Physical Review A*, 41(10):5666, 1990.

[14] Howard Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics.* CRC Press, 1999.

[15] Herbert Goldstein. *Mecánica clásica.* Editorial reverté, 2010.

[16] JN Huffaker and PH Dwivedi. Factorization- method treatment of the perturbed morse oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, 16(4):862–867, 1975.

[17] Leopold Infeld and TE Hull. The factorization method. *Reviews of modern Physics*, 23(1):21, 1951.

[18] Yusuke Isono. Examples of factors which have no cartan subalgebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 367(11):7917–7937, 2015.

[19] Şengül Kuru and Javier Negro. Factorizations of one-dimensional classical systems. *Annals of Physics*, 323(2):413–431, 2008.

[20] IF Márquez, J Negro, and LM Nieto. Factorization method and singular hamiltonians. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(17):4115, 1998.

[21] Willard Miller, Sarah Post, and Pavel Winternitz. Classical and quantum superintegrability with applications. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(42):423001, 2013.

[22] Jürgen Moser. Various aspects of integrable hamiltonian systems. In *Dynamical systems*, pages 137–195. Springer, 1980.

[23] Marcel Novaes. Some basics of su (1, 1). *Revista Brasileira de Ensino de Fisica*, 26:351–357, 2004.

[24] Narutaka Ozawa and Sorin Popa. On a class of ii factors with at most one cartan subalgebra. *Annals of Mathematics*, pages 713–749, 2010.

[25] Josef Paldus and Bogumil Jeziorski. Clifford algebra and unitary group formulations of the many-electron problem. *Theoretica chimica acta*, 73(2):81–103, 1988.

[26] Klaus Pohlmeyer. Integrable hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints. *Communications in Mathematical Physics*, 46(3):207–221, 1976.

[27] M. A. Rodríguez, Mariano del Olmo, and P. Winternitz. Integrable systems based on su(p,q) homogeneous manifolds. *Journal of Mathematical Physics*, 34(11):5118–5139, 1993.

[28] Jakob Schwichtenberg. *Physics from symmetry*. Springer, 2015.

[29] Jean-Pierre Serre. *Lie algebras and Lie groups: 1964 lectures given at Harvard University*. Springer, 2009.

[30] DS Shirokov. A classification of lie algebras of pseudo-unitary groups in the techniques of clifford algebras. *Advances in applied Clifford algebras*, 20(2):411–425, 2010.

[31] Wu-Ki Tung. *Group theory in physics*, volume 1. World Scientific, 1985.