



TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

MÁSTER EN FÍSICA

TEORÍAS EXTENDIDAS DE GRAVEDAD (TEG) EN OBJETOS COMPACTOS

Autor:

Juan Carlos Benito Núñez

Tutor:

Diego Sáez-Chillón Gómez

Resumen

Teorías Extendidas de Gravedad (TEG) en Objetos Compactos

por Juan Carlos Benito Núñez

El presente trabajo trata sobre la aplicación de Teorías Extendidas de Gravedad o *TEG* al estudio de los *objetos compactos*. Como primer paso, aplicaremos la *Relatividad General* a dichos objetos, obteniendo de esta manera las leyes que los gobiernan conocidas con el sobrenombre de *ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* o *TOV* para abreviar. Seguidamente, resolveremos dichas ecuaciones teniendo en cuenta una ecuación de estado en particular, todo ello dentro del marco de la relatividad general. A continuación, introduciremos diversos modelos basados en teorías diferentes, considerando en cada caso unas *ecuaciones de campo* y *ecuaciones de estado* diferentes, que darán lugar a distintas expresiones semejantes a las ecuaciones *TOV*. Por último, destacaremos las conclusiones y consecuencias que se deducen del análisis anterior, así como, el parecido y las diferencias respecto a las predicciones resultantes de la relatividad general sobre el comportamiento de estos objetos.

Abstract

Extended Theories of Gravity (ETG) on Compact Objects

by Juan Carlos Benito Núñez

This study talks about the application on Extended Theories of Gravity or *ETG* to compact objects. First of all, we apply the theory of *General Relativity* to these objects, obtaining by this way, the laws they satisfy known as *Tolman-Oppenheimer-Volkoff* equations or simply *TOV*. Then, we solve such equations by considering an equation of state (*EoS*) in particular, all of that on general relativity frame. Moreover, we will introduce different models based on diverse theories, by focusing in varied equations of state and field equations in each case, which will yield to different expressions similar to *TOV* equations. Next, we will conclude the study by treating the consequences of each result, which we deduce from previous test, and finally, we will compare the differences and similarities, which appear in the behaviour of compact objects, between *General Relativity* and *ETG* theories.

Índice general

1. Introducción	1
2. Relatividad General aplicada a Objetos Compactos	3
2.1. Métrica en Espacio-Tiempo estático e isótropo	3
2.2. Solución de Schwarzschild	4
2.3. Tensor Energía-Momento	5
2.4. Ecuaciones Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)	5
2.5. Colapso gravitatorio y límite de masa	7
3. Clasificación de Objetos Compactos atendiendo a su masa	9
3.1. Enanas Blancas	9
3.2. Estrellas de Neutrones	10
3.3. Agujeros Negros	11
4. Resolución de Ecuaciones TOV con una Ecuación de Estado específica	13
5. Teorías Extendidas de Gravedad (TEG)	15
5.1. Configuración estelar y Ecuaciones TOV	15
5.2. Teorías Extendidas de Gravedad (TEG) de Clase k-esencia	17
6. Teoría de Brans-Dicke	21
6.1. Modificación con un potencial	22
7. Conclusiones	23

Capítulo 1

Introducción

Los *objetos compactos* son remanentes estelares en cuyo seno ya no se producen reacciones nucleares, por ello, la presión que sostiene a estos objetos no tiene un origen nuclear, sino que proviene de efectos cuánticos que se producen en su interior, dada la gran densidad que pueden alcanzar, de ahí su nombre. El estudio de estos objetos comenzó a principios del siglo XX, una vez que *A. Einstein* formuló la teoría de la *Relatividad General* (RG) entre 1915 y 1916, y a raíz de ello, varios científicos comenzaron a estudiar en profundidad sus *ecuaciones de campo*.

La primera solución que se encontró para dichas ecuaciones fue hallada por *K. Schwarzschild* en el año 1916, desembocando en la conocida *métrica de Schwarzschild*. Todo ello asentó las bases para la futura concepción de *agujero negro* que tenemos hoy en día, término que acuñó *J. A. Wheeler* en la segunda mitad del siglo XX. Más tarde, el científico indio *S. Chandrasekhar* calculó el límite, conocido desde entonces como *límite de Chandrasekhar*, a partir del cual una enana blanca con una masa determinada pasa a convertirse en una estrella de neutrones, las cuales fueron teorizadas ya en los años 30, por los astrónomos *W. Baade* y *F. Zwicky*; y finalmente descubiertas en 1967 por *J. Bell* y *A. Hewish* cuando encontraron los *púlsares*, asociándolos rápidamente a estrellas de neutrones. Por otra parte, las enanas blancas eran conocidas desde finales del siglo XVIII, pero no fue hasta el siglo XX cuando se comenzaron a concebir como objetos compactos, estudiándose junto a las estrellas de neutrones y a los agujeros negros.

También en la misma década de los años 30, *J. R. Oppenheimer* y *G. M. Volkoff* analizaron en profundidad estos objetos y basándose en un artículo anterior de *R. C. Tolman* publicado en 1939, hallaron las expresiones que determinan la estructura y el comportamiento de los mismos, conocidas más tarde como *ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* que resultarán vitales a lo largo del presente trabajo. Además, también calcularon el conocido como *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*, el cual indica la masa a partir de la cual una estrella de neutrones colapsa en un agujero negro.

Lo primero que haremos será aplicar la Relatividad General (RG) a los objetos compactos en el Capítulo 2. Comenzaremos por analizar las ecuaciones de campo de Einstein suponiendo una métrica general a partir de la cual obtendremos la métrica de Schwarzschild, que describe el espacio-tiempo en la zona externa del objeto. A continuación, introduciremos el tensor energía-momento que se referirá a la materia existente en la región que estamos considerando. Después, deduciremos de lo anterior las *ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (TOV), que rigen cómo varía la presión interna con el radio del objeto hasta hacerse nula en el radio total, determinando así su tamaño. Por último, introduciremos el concepto de *masa límite* y su relación con el fenómeno denominado colapso gravitatorio.

En el Capítulo 3, veremos con más detenimiento los diferentes tipos de objetos compactos (enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros), analizando sus características principales y el origen de la presión que aparece en cada uno, oponiéndose a la atracción gravitatoria. Seguidamente analizaremos el origen de los límites máxicos mencionados anteriormente a partir de los cuales obtendremos diferentes objetos en función de la masa inicial que posea la estrella de la cual se originan. Finalmente, también veremos brevemente la estructura que presentan todos ellos.

Siguiendo con el Capítulo 4, en el que escogeremos una ecuación de estado específica sobre la cual estudiar las ecuaciones TOV obtenidas en el Capítulo 2 y resolverlas para dicha ecuación de estado, obteniendo la estructura para ese objeto compacto en particular, además, obtendremos la expresión explícita de la presión en función del radio y veremos su variación en el interior del objeto, todo ello dentro del marco de la Relatividad General.

En el Capítulo 5 introduciremos las *Teorías Extendidas de Gravedad (TEG)* siguiendo el mismo procedimiento que con la Relatividad General en el Capítulo 2, a partir de unas ecuaciones de campo modificadas y una métrica general, hallaremos las nuevas expresiones que jugarán el papel de las ecuaciones TOV dentro de estas teorías. Más tarde, trataremos una teoría de este tipo en específico del tipo k-esencia, en la cual nuestro objetivo será también obtener las ecuaciones que rigen la estructura del objeto (ecuaciones *TOV*).

En el Capítulo 6, haremos lo mismo que en el Capítulo 5 pero dentro de una nueva teoría también del tipo TEG, conocida como *teoría de Brans-Dicke*, utilizando una acción distinta y , por tanto, unas ecuaciones de campo diferentes, que darán lugar a nuevas ecuaciones del tipo *TOV*. Finalmente, en el Capítulo 7 abordaremos las conclusiones pertinentes que se deducen del estudio completo, así como las consecuencias de los resultados obtenidos y las similitudes y diferencias que presentan estas nuevas teorías con la Relatividad General.

Capítulo 2

Relatividad General aplicada a Objetos Compactos

El objetivo de este capítulo es la obtención de las *Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)*, que describen la variación que sufre la presión interna del objeto con su radio. Esta presión hidrostática surge del modelo de estructura estelar que estamos considerando. En dicho modelo, suponemos que el objeto posee una simetría esférica, que está compuesto por plasma comportándose como un fluido y que el objeto se encuentra en una situación cuasiestática en la que despreciamos los movimientos verticales que pudieran aparecer, desde el interior de la estrella hacia afuera o viceversa. El procedimiento que seguimos aquí es el que sigue el libro de *Norman K. Glendenning, 2000 [1]*.

Bajo estas consideraciones, el equilibrio estelar se produce cuando la fuerza gravitatoria y la presión hidrostática se igualan. La fuerza gravitatoria tiende a comprimir el objeto, y por otro lado, la presión se opone a esa compresión tendiendo a expandir el objeto. Partiremos de las *Ecuaciones de campo de Einstein*, para llegar a la *solución de Schwarzschild*. Las ecuaciones de campo de Einstein surgen como consecuencia de la aplicación del *principio de acción* a la *acción de Hilbert-Einstein*:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int R\sqrt{-g} d^4x + S_m \quad (2.1)$$

Donde R es el escalar de *Ricci*, g es el determinante del tensor métrico y κ es la constante $8\pi G$ (S_m se refiere a la acción de la parte material). En otros casos podríamos llegar a la *solución de Kerr*, para dar cuenta de objetos rotantes, pero en este caso, nos basta con la solución de Schwarzschild que constituye la solución más sencilla de entre las que se pueden deducir de las ecuaciones de Einstein, suponiendo un espacio-tiempo vacío fuera del objeto.

2.1. Métrica en Espacio-Tiempo estático e isótropo

Hallamos soluciones para las ecuaciones de campo de Einstein en regiones isotrópicas y estáticas como lo son el interior y el exterior de estrellas estáticas. En estas condiciones y utilizando coordenadas espaciales esféricas (r, θ, ϕ) , la métrica, con signatura $(+ - - -)$, toma la forma siguiente, teniendo en cuenta que trabajamos con $c = 1$ de aquí en adelante y que τ denota el tiempo propio:

$$d\tau^2 = U(r)dt^2 - V(r)dr^2 - W(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.2)$$

Ahora es posible reemplazar r por cualquier función de r y lo hacemos de manera que $W(r) = 1$, sin perturbar la simetría esférica, con lo cual obtenemos lo siguiente:

$$d\tau^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (2.3)$$

A continuación, para encontrar la solución de Schwarzschild, necesitamos las componentes diagonales del *tensor de Ricci*, que se define como sigue, teniendo en cuenta que este tensor aparece como una contracción del *tensor de curvatura de Riemann*¹ ($R^\mu_{\nu\alpha\beta}$) en el primer índice contravariante y el segundo índice covariante:

¹Resulta obvio que si el espacio-tiempo es plano, las componentes de este tensor son nulas todas ellas.

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \quad (2.4)$$

Los *símbolos de Christoffell* se deducen a partir de la métrica (2.3). Los que no son nulos son los siguientes:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \nu' e^{2(\nu-\lambda)}, & \Gamma_{10}^0 &= \nu', \\ \Gamma_{11}^1 &= \lambda', & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = 1/r, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-2\lambda}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta, \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Las primas denotan derivación respecto a la coordenada espacial r . Por consiguiente, las componentes diagonales del tensor de Ricci serán las siguientes:

$$\begin{aligned} R_{00} &= (-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r})e^{2(\nu-\lambda)}, \\ R_{11} &= \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}, \\ R_{22} &= (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1, \\ R_{33} &= R_{22}\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A continuación, procedemos a obtener la solución de Schwarzschild.

2.2. Solución de Schwarzschild

En el exterior de la estrella que se encuentra vacío, las ecuaciones de campo de Einstein se reducen a $G_{\mu\nu} = 0$, o de manera equivalente según la definición del tensor de Einstein ($G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$):

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.7)$$

Donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y R es el escalar de Ricci. Ahora, multiplicando ambos términos por $g^{\alpha\mu}$, sumando en el índice mudo y contrayendo, finalmente llegamos a:

$$R = 2R \quad (2.8)$$

Lo que implica que R debe ser igual a 0 y, por tanto, deducimos que tanto R como $R_{\mu\nu}$ son idénticamente nulos. Así de las ecuaciones (2.6), llegamos a:

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad (2.9)$$

Que teniendo en cuenta que cuando nos alejamos del objeto ($r \gg 0$), el espacio debe ser plano y por ello:

$$\lambda + \nu = 0 \quad (2.10)$$

También de las ecuaciones (2.6), deducimos lo siguiente:

$$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1 \quad (2.11)$$

Integrando esta última ecuación y considerando la ecuación (2.3), obtenemos que:

$$g_{00} = e^{2\nu} = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad (r > R) \quad (2.12)$$

Donde M es la constante de integración que identificamos con la masa total del objeto; R es el radio total del objeto (no confundirlo con el escalar de Ricci, que también lo hemos denotado con R) y G es la constante de gravitación universal. Deducimos también:

$$g_{11} = -e^{2\lambda} = -e^{-2\nu} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad (r > R) \quad (2.13)$$

Esto constituye la derivación de la solución de Schwarzschild (1916) que fue la primera solución encontrada para las ecuaciones campo de Einstein.

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (r > R) \quad (2.14)$$

Notar que esta métrica es singular para $r = r_S = 2GM$. Esto no indica que exista una singularidad, entendiendo el término como un punto límite en el cual el propio espacio-tiempo es singular, con el mismo significado que el *Big Bang* por ejemplo. En este caso, la presencia de esta singularidad se debe a la elección de coordenadas que hemos hecho. Un estudio más profundo revela que si r_S es mayor que el radio r del objeto, donde la solución de Schwarzschild es válida, entonces el objeto es un *agujero negro*.

Este radio es conocido entonces como *radio de Schwarzschild*, *singularidad* u *horizonte de sucesos*. Podríamos preguntarnos qué ocurre si $r_S < r$, en este otro caso la solución de Schwarzschild no es válida, porque estamos centrando nuestra atención en el interior de la estrella (donde existirá una métrica diferente a (2.14)) y dicha solución solo es válida en el exterior de la misma como ya hemos mencionado anteriormente.

2.3. Tensor Energía-Momento

Una característica vital en el tensor de Einstein ($G_{\mu\nu}$) es que su divergencia es nula, al igual que el tensor energía-momento según se deduce de las ecuaciones de campo de Einstein ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$):

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

Donde κ es igual a $8\pi G$. El hecho de que la divergencia sea nula para el tensor $T^{\mu\nu}$ conlleva una conservación de la energía y del momento del objeto bajo estudio. Nos preguntamos ahora qué forma tendrá este tensor, de forma general podemos considerar la estrella, a la cual el tensor se refiere, como un fluido perfecto gobernado por una ecuación de estado que relaciona la densidad de energía (ρ) y la presión que ejerce este fluido (p). Teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos escribir el tensor energía-momento como sigue:

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p + \rho)u^\mu u^\nu \quad (2.16)$$

Donde u^μ es la cuadrivelocidad del fluido que estemos considerando:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.17)$$

que suponemos normalizada por definición, esto es $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$, que no es mas que el producto escalar del vector cuadrivelocidad consigo mismo. La ecuación de estado liga la densidad de energía (donde incluimos la densidad de masa) y la presión del fluido en el marco de referencia en que el fluido se encuentra en reposo y puede escribirse de dos formas diferentes:

$$p = p(\rho) \quad \text{o} \quad \rho = \rho(p) \quad (2.18)$$

2.4. Ecuaciones Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

Hasta el momento hemos analizado lo que sucede en el exterior del objeto. En esta sección veremos lo que ocurre en el interior del mismo, para ello necesitaremos las expresiones del tensor de Ricci y del escalar de Ricci para obtener el tensor de Einstein según vimos en la ecuación (2.7). Utilizando los resultados que encontramos en la ecuación (2.6), llegamos a lo siguiente:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-2\nu} R_{00} - e^{-2\lambda} R_{11} - \frac{2}{r^2} R_{22} = e^{-2\lambda} \left(-2\nu'' + 2\lambda'\nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + 4\frac{\lambda'}{r} - 4\frac{\nu'}{r} \right) + \frac{2}{r^2} \quad (2.19)$$

Haciendo uso de estos resultados, encontramos las componentes diagonales del tensor de Einstein ($G_{\mu\nu}$):

$$\begin{aligned} G_0^0 &= \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} (1 - 2r\nu') - 1 = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\lambda})] \\ G_1^1 &= \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} (1 + 2r\nu') - 1 \\ G_2^2 &= e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \\ G_3^3 &= G_2^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por comodidad estamos trabajando con el tensor de Einstein una vez contravariante y una vez covariante, se relaciona con el tensor dos veces covariante así: $G_\nu^\mu = g^{\mu\alpha} G_{\alpha\nu}$. Como estamos asumiendo que la estrella es estática, cada elemento del fluido perfecto tendrá una trivelocity nula, esto es:

$$u^i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.21)$$

$$u^0 = 1/\sqrt{g_{00}} \quad (2.22)$$

El tensor energía-momento expresado como un tensor una vez contravariante y una vez covariante, se relaciona con la densidad de energía (ρ) y la presión (p) de la siguiente manera:

$$T_0^0 = \rho, \quad T_i^i = -p \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.23)$$

Sabiendo esto, la componente (00) del tensor de Einstein se expresa como sigue:

$$G_0^0 = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\lambda})] = kr^2 T_0^0 = kr^2 \rho(r) \quad (2.24)$$

Donde k es una constante de proporcionalidad con el valor $k = -8\pi G$, para estar de acuerdo con el límite Newtoniano (límite no relativista, $c \rightarrow \infty$). Integrando la ecuación (2.24), obtenemos:

$$e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{8\pi G}{r} \int_0^r \rho(r) r^2 dr \quad (2.25)$$

Definiendo ahora $M(r)$ a la que llamaremos *masa incluida*, que es la masa que subyace dentro de la esfera con radio r , siendo r la coordenada esférica espacial del punto interior al objeto en el que nos encontremos. La definimos de la siguiente forma:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr \quad (2.26)$$

Con todo lo anterior, las ecuaciones de campo de Einstein tendrán la forma siguiente:

$$G^{\mu\nu} = -8\pi G T^{\mu\nu} \quad (2.27)$$

Y ahora ya podemos conocer las componentes de la métrica en el interior del objeto, lo que nos permitirá encontrar las *ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)*. Por ejemplo para la componente $g_{11}(r)$ de la métrica tenemos que:

$$g_{11}(r) = -e^{2\lambda(r)} = -\left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1} \quad (2.28)$$

Vemos que adopta la misma forma que en el caso exterior, donde aplicábamos la solución de Schwarzschild, sin embargo, en este caso la masa $M(r)$ cobra un nuevo significado. $M(r)$ ya no se refiere a la masa total de la estrella, sino que se refiere a la masa incluida tal y como la hemos definido en la ecuación (2.26). Finalmente, hallando las demás componentes diagonales del tensor de Einstein y junto con las ecuaciones de campo llegamos a una expresión que relaciona la variación de la presión (p) con el radio del objeto, con la densidad de energía (ρ) y la masa incluida ($M(r)$) :

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{[p(r) + \rho(r)][M(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r[r - 2M(r)]} \quad (2.29)$$

Donde hemos considerado, por simplicidad, unidades naturales ($c = G = 1$). Esta última ecuación junto con la ecuación (2.26) son las *ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)* que describen el comportamiento interno de la estrella, siempre que sea esférica y estática.

Una cuestión destacable surge cuando nos preguntamos sobre la verdadera naturaleza de la masa de la estrella. Lo cierto es que no tiene sentido considerar ya la masa y la energía como magnitudes diferentes, desde el momento en que escogemos las unidades adecuadas, dicho esto, la pregunta anterior carece de sentido si no consideramos dentro del término "masa" la energía propia del campo gravitatorio. No solo debemos considerar la masa bariónica propiamente dicha (lo que primero viene a nuestra cabeza cuando pensamos en la masa del objeto), sino también esta energía del campo, que podemos interpretar como la energía de ligadura de los nucleones en el interior de la estrella, alrededor de 100 MeV por nucleón.

Prestando atención a la ecuación (2.29), observamos como la presión es una función monótona decreciente, ya que todos los factores implicados son positivos, desde el interior de la estrella hasta el borde exterior, lo cual tiene sentido. Cada región soporta el peso de todo el material que yace encima de ella, al igual que sucede en las profundidades marinas, donde la presión se incrementa según nos aproximamos al fondo marino.

2.5. Colapso gravitatorio y límite de masa

Como ya hemos visto, la gravedad comprime la estrella, lo que produce un aumento de la presión a medida que nos acercamos al centro. Según la ecuación (2.29), al producir un aumento de la presión aumenta a su vez, el gradiente radial de presiones (que es negativo). Para estrellas que posean una masa lo suficientemente grande, la presión será mayor y tendrán un radio total más pequeño por este efecto de compresión, ya que el límite o borde de la estrella aparecerá cuando $p \approx 0$. Como consecuencia existe una masa máxima para la cual el colapso gravitatorio se hace crítico formando entonces un objeto diferente.

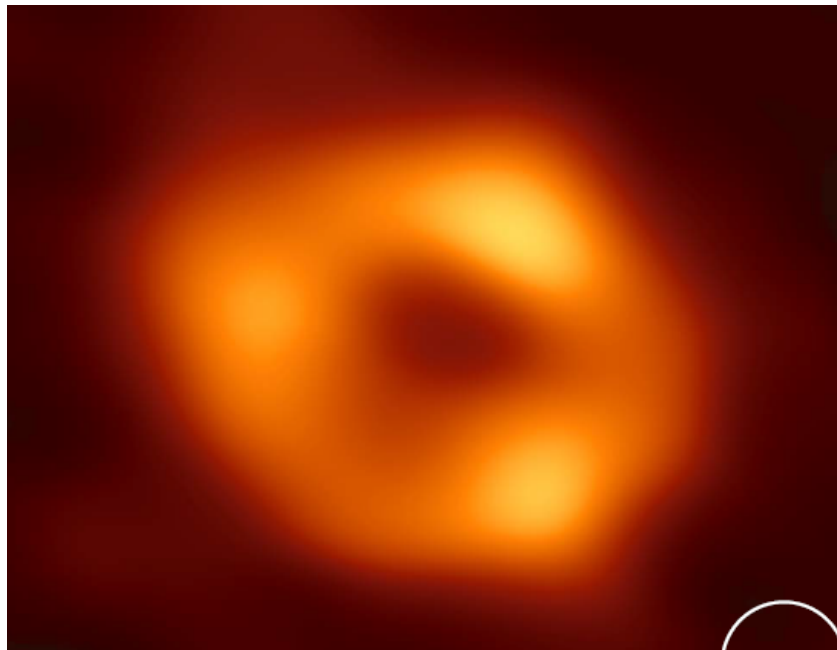


Figura 2.1: Agujero negro Sagitario A*, imagen que se hizo pública el 12 de mayo de 2022.

Esta masa recibe entonces el nombre de *masa limitante o límite de masa*. En el próximo capítulo, veremos cuál es exactamente este límite, dependiendo de la naturaleza del objeto que estamos analizando. Si nuestro objeto es una enana blanca, este límite recibirá el nombre de *límite de Chandrasekhar*, que dará paso a la formación de una *estrella de neutrones*. Por otro lado, si consideramos una estrella de neutrones este límite pasará a llamarse *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*, que dará pie a la formación de un agujero negro. Además, también veremos el origen de la presión que sustenta a estos objetos, contrarrestando a la fuerza gravitatoria que busca comprimir dichos objetos tanto cuanto más masivos sean.

Capítulo 3

Clasificación de Objetos Compactos atendiendo a su masa

Como ya hemos mencionado anteriormente, en este capítulo hablaremos más a fondo sobre los diferentes tipos de objetos compactos que existen. Nos centraremos principalmente en tres tipos: enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros. Si bien es cierto que existen hipótesis referentes a la existencia de más tipos de objetos, no hay una evidencia observacional clara de los mismos, por tanto, estas hipótesis aún no han podido ser verificadas completamente. Estos tipos de objetos más exóticos, por llamarlos de alguna manera, serían las *estrellas de quarks*, las *estrellas-Q* y las *estrellas de preones*.

3.1. Enanas Blancas

Las *enanas blancas* son remanentes estelares que aparecen cuando finalizan las reacciones nucleares que se dan en el interior de las estrellas que poseen una masa menor a un cierto límite. Estas reacciones son exotérmicas, es decir, liberan energía hasta que llegamos a un momento en el cual las reacciones pasan a ser endotérmicas, o dicho de otro modo, requieren energía externa para que se produzcan, además, este momento coincide con la síntesis del elemento *hierro*. En el proceso de formación de la enana blanca, se liberan grandes cantidades de gas al exterior formando las conocidas nebulosas. El límite máximo por debajo del cual las estrellas sufren este destino, es el anteriormente mencionado *límite de Chandrasekhar* (*S. Chandrasekhar, 1935 [6]*), situado en $1.44 M_{\odot}$ (1.44 masas solares). Entonces, si ya no hay reacciones nucleares que generen la presión necesaria para que la estrella no colapse, ¿de dónde surge esta nueva presión y por qué?. La razón son los efectos cuánticos como el *Principio de indeterminación de Heisenberg* o el *Principio de exclusión de Pauli*, el cual postula que si dos partículas son *fermiones* (partículas con espín semientero), dichas partículas no podrán ocupar el mismo nivel de energía.

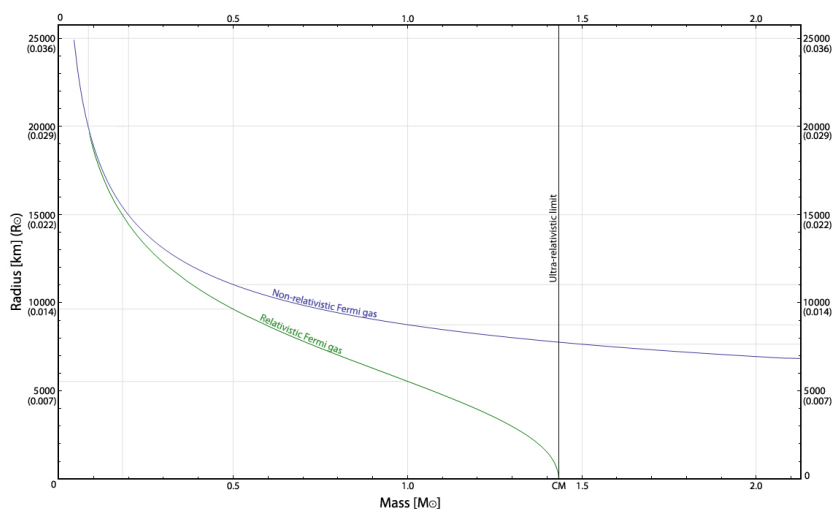


Figura 3.1: Relación entre el radio estelar y la masa del objeto para un gas de Fermi relativista (línea verde) y no relativista (línea azul).

Lo que ocurre es que los átomos que componen la estrella, están desligados en protones y electrones debido al estado de plasma en el que se encuentran. Los electrones sufren la repulsión generada por el principio de exclusión al ser fermiones y, además, estos electrones se ven obligados a aumentar su velocidad de forma considerable al estar más concentrados en una región del espacio más pequeña, fruto del principio de indeterminación. Ambos fenómenos aparecen como consecuencia de la enorme densidad que se alcanza en el interior estelar, de alrededor de 10^3 kg/cm^3 , es decir, de una tonelada por centímetro cúbico o lo que es lo mismo 10^9 kg/m^3 .

Conociendo todo lo anterior, podemos considerar que los electrones son los que producen la presión que evita que el objeto colapse gravitacionalmente, llamada *presión de degeneración*. Los electrones conforman lo que se ha dado en llamar *gas de Fermi*, un modelo cuántico en el que se desprecia la interacción de los electrones entre sí, rellenando los niveles más bajos de energía hasta el más alto, conocido como *nivel de Fermi*.

En la Figura 3.1, aparece reflejada la relación entre la masa del objeto y el radio total que presentará. La línea azul corresponde al caso en el que estamos considerando un gas de Fermi no relativista, donde no aparece un límite másico para la estrella. Sin embargo, si centramos nuestra atención en la línea verde (gas de Fermi relativista), vemos que en este caso sí que existe una masa máxima para la cual es estable. A partir de este *límite de Chandrasekhar*, la intensidad de la gravedad es tal que la presión de degeneración proveniente de los electrones ya no es suficiente para sostener al objeto.

3.2. Estrellas de Neutrones

Las estrellas de neutrones son otro tipo de remanente estelar que se originan cuando una estrella con una masa superior a $1.44 M_{\odot}$ colapsa gravitacionalmente. En este caso, la densidad alcanzada en el interior de la estrella es mucho mayor que la que se alcanza en el seno de las enanas blancas, alrededor de unos $3.7 - 5.9 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$, por ello, el diámetro de estas estrellas es del orden de una decena de kilómetros. Al superarse el *límite de Chandrasekhar*, la presión de degeneración debida a la repulsión de los electrones, no basta para mantener el equilibrio entre la fuerza gravitatoria y la presión que se da en este tipo de objetos. Entonces, ¿de dónde proviene ahora la presión de degeneración?, pues bien, debido a la gran densidad que existe en el interior, los protones se unen a los electrones en un proceso denominado *captura electrónica*, formando neutrones y neutrinos electrónicos que para lo que nos ocupa podemos obviar (*J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff, 1939 [7]*)



Teniendo esto en cuenta, ahora ya sabemos el motivo del nombre estrellas de neutrones, porque están compuestas de ellos y son precisamente los que generan ahora la presión de degeneración, ya que también son partículas fermiónicas. No obstante, como ocurría con las enanas blancas, esta presión tiene un límite llamado *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*, el cual se sitúa en torno a $2.1 - 2.25 M_{\odot}$, a partir del cual la estrella inicial colapsará irremediamente hacia un agujero negro. Aún no se conoce a ciencia cierta cómo es la estructura interna de las estrellas de neutrones, aunque se suelen estudiar modelos que predicen diversas capas con propiedades diferentes, como vemos en la Figura 3.2.

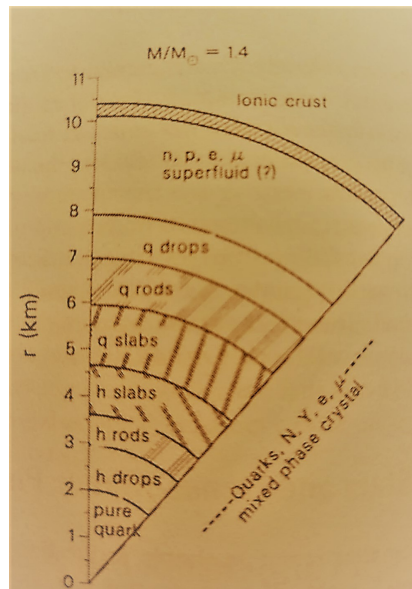


Figura 3.2: Modelo estructural para una estrella de neutrones (*Norman K. Glendenning, 2000 [1]*).

Los conocidos *púlsares* son estrellas de neutrones que rotan a una gran velocidad (70.000 km/s) y que se encuentran con un grado de magnetización muy alto. Esto produce un campo magnético muy potente producto de los electrones y protones que se encuentran en la superficie. Finalmente, esto genera que el polvo y el gas externo también se aceleren a dichas velocidades y se ionicen, formando los dos chorros polares tan característicos, fruto del intenso campo magnético (ver Figura 3.3).

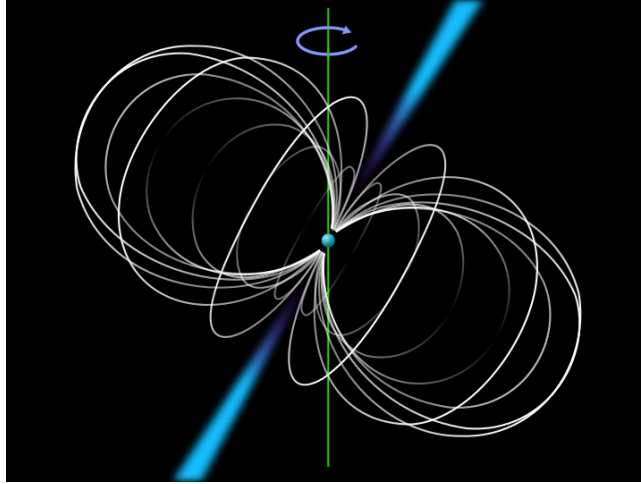


Figura 3.3: Representación esquemática de un púlsar.

3.3. Agujeros Negros

Los agujeros negros son objetos compactos que se sitúan en una zona concreta del espacio, originados a partir del colapso gravitatorio de una estrella masiva (de más de $2.25 M_{\odot}$), superando así el *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*. Debido a la gran masa que poseen y a la densidad tan alta que presentan, los agujeros negros son la fuente de campos gravitatorios muy intensos, tan intensos que ni siquiera los fotones pueden escapar. Estos objetos se caracterizan por presentar una *singularidad*, un punto en el cual no tiene sentido preguntarse por ninguna magnitud física, envuelta por lo que se conoce como *horizonte de sucesos*, que marca el límite a partir del cual ni siquiera los fotones pueden escapar a la atracción. Por tanto, no tiene sentido preguntarse por la estructura interna que presentan estos objetos, ya que no es posible obtener información de lo que ocurre más allá del horizonte de sucesos.

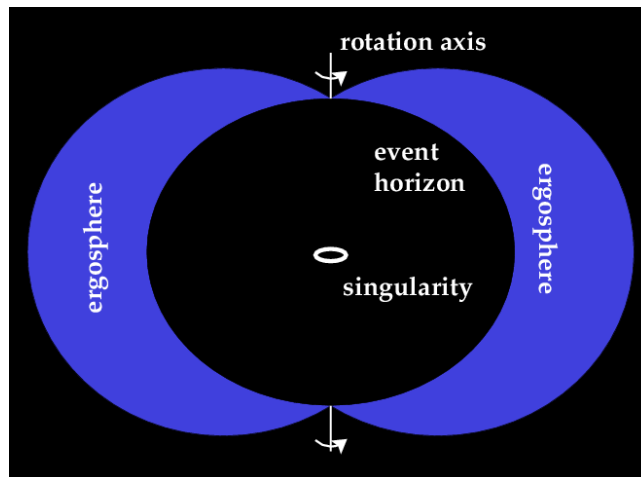


Figura 3.4: Representación de un agujero negro de Kerr.

Además, se utilizan solo tres parámetros para modelizarlos, a saber, su masa (M), el momento angular (L) y su carga eléctrica (Q) que son las magnitudes que se conservan durante el periodo de formación, es decir, estas magnitudes son las mismas que las de la estrella a partir de la cual se formó el agujero negro. Los objetos que se encuentren cerca de ellos serán absorbidos, provocando un aumento en la masa de estos objetos. En función de los parámetros que posean, se utilizan distintas métricas para describirlos: si solo tienen masa, se aplica la ya conocida métrica de Schwarzschild, si además se encuentran rotando, se utiliza la métrica de Kerr y si además

presentan carga eléctrica, se aplica la métrica de Kerr-Newman (si presentan carga eléctrica y masa, pero no rotan, se aplica la métrica de Reissner-Nordström). Los agujeros negros de Kerr se caracterizan por la presencia de una región conocida como *ergosfera* fruto de su naturaleza rotante, en la cual, los cuerpos dentro de ella sí pueden escapar de la atracción gravitatoria (ver Figura 3.4).

Finalmente, existe un fenómeno conocido con el nombre de *radiación de Hawking*, mediante el cual se explica la razón por la que los agujeros negros no existen eternamente. Antes de la década de los años 70, se pensaba que el destino final de los agujeros negros era crecer indefinidamente absorbiendo todo aquello que se cruzara en su camino, pero un análisis más detallado de los efectos cuánticos que tienen lugar en el horizonte de sucesos, llevó a *S. Hawking* a postular la existencia de este proceso, consistente en la emisión de partículas, lo que reduce la masa del objeto y la rotación en caso de que estuviera rotando. Se supone que en el interior de las galaxias se encuentra un agujero negro supermasivo del orden de millones de masas solares.

Capítulo 4

Resolución de Ecuaciones TOV con una Ecuación de Estado específica

En este capítulo nos preocuparemos de resolver las ecuaciones TOV aplicadas al caso de una estrella de neutrones con una masa cercana al *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*, con ayuda de una ecuación de estado en particular que dará lugar a ecuaciones TOV con soluciones escalables, es decir, que las ecuaciones TOV tendrán la misma forma en las correspondientes variables reescaladas. Consideraremos la siguiente que poseerá la siguiente forma (*Norman K. Glendenning, 2000 [1]*):

$$p = s(\rho - a) \quad (4.1)$$

Donde p es la presión, ρ es la densidad de energía y s y a son unas constantes determinadas previamente. En el límite de la estrella se cumple como ya sabemos que $p = 0$, lo que se traduce, según nuestra ecuación de estado, en que $\rho = a$ cuando nos encontremos en el límite de la estrella. Las ecuaciones TOV tomarán la misma forma que (2.26) y (2.29) en las siguientes variables reescaladas respecto a la constante a :

$$p^* = p/a, \quad \rho^* = \rho/a, \quad r^* = \sqrt{a}r, \quad M^* = \sqrt{a}M \quad (4.2)$$

Si conocemos las expresiones para un cierto valor de a , podemos encontrar las magnitudes para otro valor de a , que denotaremos como a' :

$$R(a') = \sqrt{\frac{a}{a'}}R(a), \quad M(a') = \sqrt{\frac{a}{a'}}M(a) \quad (4.3)$$

Siempre y cuando establezcamos el mismo valor de s en ambos casos. Conociendo esta nueva ecuación de estado, la aplicamos a un ejemplo concreto como es el cálculo del *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* para las estrellas de neutrones. En nuestro caso, establecemos suposiciones muy generales en favor de la simplicidad de los cálculos. Como ya dijimos en el Capítulo 3, estos objetos se estudian suponiendo que su estructura está compuesta por capas con propiedades diferentes, cosa que no vamos a tratar aquí.

Para una estrella de neutrones que posea una masa máxima, el perfil de la densidad de energía (ρ) decae muy rápido a cero según nos acercamos más y más al borde, por ello, consideraremos que una pequeña porción de la estrella se encuentra en una región que denominaremos de *baja densidad* o de *bajas presiones*, cercana al borde estelar. Como ya sabemos, la presión de la estrella es mayor cuanto más cerca nos encontremos del centro estelar, debido a que en puntos cada vez más internos, el peso de la parte material que quedan en la región externa a dichos puntos es cada vez mayor, porque cada vez más masa yace encima de tales puntos¹. Análogamente, a la región que se encuentra cerca del centro, la llamaremos región de *altas presiones* y solo tendremos en cuenta ecuaciones de estado en que la presión sea una función monótona creciente con la densidad de energía, según nos acercamos al centro estelar.

¹Lo cual es debido al modelo de fluido perfecto que consideramos a lo largo de todo el trabajo

En la región de *bajas presiones* podemos considerar las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\rho(n) &= \frac{1}{2} \left[\rho_f - p_f + (\rho_f + p_f) \left(\frac{n}{n_f} \right)^2 \right] \\ p(n) &= \rho(n) - \rho_f + p_f, \quad n \geq n_f\end{aligned}\tag{4.4}$$

Donde n se refiere a la densidad de partículas, y el subíndice f se refiere al punto de unión entre ambas regiones (de *altas y bajas presiones*). Volviendo ahora a la forma general de la ecuación de estado (4.1), vemos que:

$$p = \rho - a, \quad a \equiv \rho_f - p_f\tag{4.5}$$

Con $s = 1$. Si la relación anterior es válida para todas las densidades, entonces al resolver las ecuaciones TOV para un a determinado, encontrando la masa y el radio totales, podremos determinar esos mismos valores para otro valor de a (a'), usando las ecuaciones (4.3).

Integrando numéricamente las ecuaciones TOV, y suponiendo que los parámetros presentes en (4.4) toman los siguientes valores: $n_f = 0.2715 \text{ fm}^{-3}$ lo que es equivalente a decir que $\rho_f = 4.636 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$ y $p_f = 6.103 \cdot 10^{32} \text{ Pa}$ ($6.103 \cdot 10^{27} \text{ bar}$). Por tanto, resolviendo la ecuación *TOV* junto con la ecuación de estado, encontramos cómo varía la presión en función del radio del objeto. A continuación, hallamos el radio total utilizando el hecho de que el borde estelar aparece cuando $p \approx 0$ como ya sabemos. Finalmente, encontramos la masa correspondiente utilizando la relación entre la masa y el radio totales del objeto, obteniendo los siguientes valores:

$$M = 3.14 M_{\odot}, \quad R = 13.4 \text{ km}\tag{4.6}$$

Donde M y R son la masa total y el radio total, respectivamente, y a será equivalente a la densidad de energía en el punto de unión ($a = \rho_f = 4.569 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$). Concluimos que el valor del radio total (R) se ajusta bien al valor que dimos anteriormente en el Capítulo 3, sin embargo, en el caso de la masa total (M) dimos un valor de aproximadamente $2.2 M_{\odot}$, debido a que aquí hemos tenido en cuenta aproximaciones y condiciones muy generales, que en un modelo de capas pueden ser bastante diferentes. Además, también ahí queda reflejada la complicación que supone la resolución de las ecuaciones TOV, haciendo que en la mayoría de los casos sea imposible resolverlas de una manera analítica y únicamente puedan resolverse numéricamente.

Capítulo 5

Teorías Extendidas de Gravedad (TEG)

La teoría de la Relatividad General (RG) es descrita en base a las *ecuaciones de campo* de Einstein, que como ya hemos visto, muestran la relación existente entre la curvatura del espacio-tiempo y la cantidad de energía que está presente en el mismo. Esta teoría ha sido validada por las numerosas observaciones astronómicas, como por ejemplo la detección de ondas gravitacionales o también en el ámbito cosmológico a la hora de explicar de una manera precisa el origen del Universo y su evolución.

Aunque a primera vista pueda parecer que la RG es suficiente para explicar todos y cada uno de los fenómenos que ocurren, esto no es así. Aún quedan muchas incógnitas que despejar y que la RG no es capaz de tratar, como por ejemplo el concepto de *energía oscura* y la problemática de la *constante cosmológica* (Λ) o el estudio de las estrellas de neutrones, su formación, estructura y comportamiento (la masa máxima de estos objetos es desconocida, pero las observaciones parecen indicar un límite de alrededor de $2M_{\odot}$), de hecho, la RG parece fallar cuando nos encontramos ante campos gravitatorios muy intensos que producen una curvatura espacio-temporal muy pronunciada. Por todo ello, es necesario encontrar teorías que vayan más allá del límite de la RG, estas teorías son conocidas entonces como *Teorías Extendidas de Gravedad* o *TEG* en su forma abreviada.

Las estrellas de neutrones son objetos compactos con características muy peculiares, por tanto, podemos utilizarlos para ir en busca de dichas teorías. Siguiendo este razonamiento, partimos de un modelo de materia densa en el que la estrella de neutrones pasa a ser descrita con una ecuación de estado en particular, para después obtener las propiedades de estos objetos en una *TEG* dada. Procederemos de una manera análoga a lo hecho en el Capítulo 2 y según el estudio de *A. Wojnar, 2016 [2]*, considerando la signatura de la métrica ahora como $(-+++)$ y con $c = 1$.

5.1. Configuración estelar y Ecuaciones TOV

En las teorías extendidas de gravedad se utilizan unas ecuaciones de campo ligeramente diferentes a las que aparecen en la RG, son las siguientes:

$$\sigma(\Psi^i)(G_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

Donde $G_{\mu\nu}$ es el ya conocido tensor de Einstein; $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento de la estrella de neutrones; $\sigma(\Psi^i)$ representa el acoplamiento a la gravedad (si es fuerte o débil), mientras que Ψ^i puede representar los invariantes de curvatura o bien campos escalares; κ es igual ahora a la constante $-8\pi G$ (el signo se debe al cambio de signatura de la métrica respecto al Capítulo 2, en la Sección 2.3) y $W_{\mu\nu}$ es un tensor dos veces covariante donde se incluyen todos los términos adicionales que puedan aparecer en la teoría *TEG*.

Como es natural consideramos que la estrella de neutrones se comporta como un fluido perfecto (situándonos nuevamente en el marco de referencia en que el fluido está en reposo), esto es $T_{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)u_{\mu}u_{\nu}$, donde p y ρ son la presión y la densidad de energía respectivamente, y con la cuadrivelocidad (u_{μ}) normalizada, es decir, $u^{\mu}u_{\nu} = -1$. Considerando $W_{\mu\nu} = 0$ y $\sigma = 1$ recuperamos las ecuaciones de campo tal y como aparecen en la RG.

En las teorías *TEG* existe una diferencia importante con la RG, y es que en estas teorías la conservación del tensor energía-momento no tiene por qué darse. Como consecuencia, en lugar de este tensor, definimos uno nuevo llamado tensor energía-momento **efectivo** definido a partir de la ecuación (5.1):

$$T_{\mu\nu}^{eff} = \frac{1}{\sigma} T_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} W_{\mu\nu} \quad (5.2)$$

Con esta definición y según la *identidad de Bianchi* que postula la conservación del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, este tensor sí que se conservará ($\nabla_{\mu} T_{eff}^{\mu\nu} = 0$). El tensor energía-momento usual no se conservará debido a la presencia de los términos adicionales que aparecen en el tensor $W_{\mu\nu}$. Añ igual que hicimos en el capítulo anterior, definimos una nueva métrica teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y en coordenadas espaciales esféricas de nuevo (r, θ, ϕ) :

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (5.3)$$

Ya que la métrica es independiente del tiempo (t) y simétrica esféricamente teniendo en cuenta la geometría del objeto que rige, podemos considerar que la densidad de energía (ρ) y la presión (p) son funciones dependientes únicamente de la coordenada radial r . Obtenemos ahora las componentes diagonales del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{B} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} = \frac{\kappa}{2\sigma} (\rho + 3p)B + W_{tt} + \frac{BW}{2} \\ R_{rr} &= \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{B} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} = \frac{\kappa}{2\sigma} (p - \rho)A + W_{rr} - \frac{AW}{2} \\ R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{B} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} = \frac{\kappa}{2\sigma} (p - \rho)r^2 + W_{\theta\theta} - \frac{r^2W}{2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Donde la prima ($'$) denota derivada con respecto a r y W es la traza del tensor $W_{\mu\nu}$ ($W = -B^{-1}W_{tt} + A^{-1}W_{rr} + 2r^{-2}W_{\theta\theta}$). De las relaciones anteriores conseguimos la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{r}{A} \right)' = 1 + \kappa r^2 \frac{\rho(r)}{\sigma(r)} + r^2 B^{-1}(r) W_{tt}(r) \quad (5.5)$$

Gracias a esta ecuación podemos encontrar la función $A(r)$ que aparece en la ecuación (5.3):

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1} \quad (5.6)$$

Presenta la misma forma que obtuvimos en la ecuación (2.14) en la Sección 2.2, pero en este caso, $M(r)$ no denota la masa física total de la estrella, sino que representa la distribución de la masa del sistema acoplado total, es decir incluyendo la energía del campo gravitatorio (ver el final de la Sección 2.4 del Capítulo 2). La función de masa $M(r)$ será:

$$M(r) = \int_0^r \left(4\pi\tilde{r} \frac{\rho(\tilde{r})}{\sigma(\tilde{r})} - \frac{\tilde{r}^2 W_{tt}(\tilde{r})}{2GB(\tilde{r})} \right) d\tilde{r} \quad (5.7)$$

Otra expresión que necesitamos surge de la relación $\nabla_{\mu} T_{eff}^{\mu\nu} = 0$ que da cuenta del equilibrio hidrostático que aparece en el interior de la estrella de neutrones:

$$(\sigma^{-1} \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} - \sigma^{-2} T^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \sigma) + \frac{1}{\kappa} \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.8)$$

O de manera más explícita:

$$\kappa\sigma^{-1} \left(p' + (p + \rho) \frac{B'}{2B} \right) - \kappa p \frac{\sigma'}{\sigma^2} - \frac{A'}{A^2} W_{rr} + A^{-1} W'_{rr} + \frac{2W_{rr}}{Ar} + \frac{B'}{2B} \left(\frac{W_{rr}}{A} + \frac{W_{tt}}{B} \right) - \frac{2W_{\theta\theta}}{r^2} = 0 \quad (5.9)$$

Definiendo ahora dos nuevas cantidades y dos nuevas expresiones, podemos encontrar una forma más reducida de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
Q(r) &:= \rho(r) + \frac{\sigma(r)W_{tt}(r)}{\kappa B(r)} \\
\Pi(r) &:= p(r) + \frac{\sigma(r)W_{rr}(r)}{\kappa A(r)}
\end{aligned}
\tag{5.10}$$

Estas cantidades se corresponden con la densidad de energía efectiva ($Q(r)$) y la presión efectiva ($\Pi(r)$), relacionándose con la densidad de energía y la presión usuales en el marco de estas teorías. Notar que considerando $\sigma = 1$ y las componentes $W_{tt} = W_{rr} = 0$ recuperamos la densidad de energía y la presión usuales ($\rho(r)$ y $p(r)$). También necesitamos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\frac{A'}{A} &= \frac{1-A}{r} - \frac{\kappa Ar}{\sigma} Q \\
\frac{B'}{B} &= \frac{A-1}{r} - \frac{\kappa Ar}{\sigma} \Pi
\end{aligned}
\tag{5.11}$$

Junto con las ecuaciones (5.10) y (5.11), ponemos la ecuación (5.9) en la siguiente forma:

$$\left(\frac{\Pi}{\sigma}\right)' = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{Q}{\sigma} + \frac{\Pi}{\sigma}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 \Pi}{M\sigma}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1} + \frac{2\sigma}{\kappa r} \left(\frac{W_{\theta\theta}}{r^2} - \frac{W_{rr}}{A}\right)
\tag{5.12}$$

Vemos que es una expresión casi análoga a la expresión (2.29) excepto por el último término en el que aparecen las componentes W_{rr} y $W_{\theta\theta}$, que denotan los términos complementarios según la teoría *TEG* que consideremos. La ecuación (5.7) queda de la siguiente manera al introducir las nuevas variables que hemos introducido en (5.10):

$$M(r) = \int_0^r 4\pi \tilde{r}^2 \frac{Q(\tilde{r})}{\sigma(\tilde{r})} d\tilde{r}
\tag{5.13}$$

La ecuación anterior y la ecuación (5.12) son la forma que adoptan las ecuaciones *TOV* dentro de estas teorías. Estas expresiones determinan por completo el equilibrio estelar siempre que consideremos que la presión es únicamente función de la densidad, es decir, la composición química y la entropía por nucleón debe de ser homogénea en el seno de la estrella. Hasta este punto todo lo que hemos hecho ha sido de una manera general, sin tener en cuenta la naturaleza de las componentes que aparecen en el tensor $W_{\mu\nu}$. Estas componentes pueden incluir otros campos escalares en función de la teoría *TEG* específica con la que estemos trabajando, por ello las ecuaciones (5.12) y (5.13) pueden simplificarse aún más considerando las ecuaciones del movimiento para dichos campos extra. Todo esto lo desarrollaremos en la siguiente sección considerando una *TEG* específica.

5.2. Teorías Extendidas de Gravedad (TEG) de Clase k-esencia

En las teorías en las que aparecen campos escalares, la interacción gravitatoria es regida no solo por el campo métrico (como sucedía en la RG), sino también por el campo escalar ϕ que únicamente dependerá de la coordenada radial ($\phi = \phi(r)$). La finalidad de esta sección es encontrar las ecuaciones tipo *TOV*, además de estudiar las condiciones de estabilidad de los objetos compactos en esta teoría. Partiendo de la siguiente expresión para la acción (A. Wojnar, 2016 [2]):

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R - \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - 2V(\phi)) + S_m[g_{\mu\nu}, \psi]
\tag{5.14}$$

Donde g es de nuevo el determinante del tensor métrico, R es el escalar de Ricci, $V(\phi)$ es el potencial referido al campo escalar y S_m se refiere a la acción correspondiente al campo de materia que pueda aparecer en esta teoría. De la acción anterior deducimos las ecuaciones de campo, que serán las siguientes:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} V(\phi) &= \kappa T_{\mu\nu} \\
V'(\phi) - \square \phi &= 0
\end{aligned}
\tag{5.15}$$

Con el símbolo \square denotando al operador *D'Alembertiano* en la ecuación del tipo *Klein-Gordon*. Identificando la primera ecuación con la ecuación general (5.1), vemos que en este caso particular de *k-esencia*, con acoplamiento $\sigma = 1$ y para el tensor $W_{\mu\nu}$ obtendremos lo siguiente:

$$W_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi + \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}V(\phi) \quad (5.16)$$

De esta definición podemos conocer las componentes diagonales del tensor (según la métrica general que aparece en (5.3)):

$$\begin{aligned} W_{tt} &= \frac{1}{2}B\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi + BV(\phi) = B(C + 2V) \\ W_{rr} &= AC \\ W_{\theta\theta} &= -r^2(C + 2V) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Donde hemos definido V como $V(\phi)$ y C es igual a $\frac{1}{2}A^{-1}\phi'^2 - V$, donde la prima denota derivada con respecto a la coordenada r . Además, las funciones Q y Π que definimos en (5.10) toman ahora una nueva forma:

$$\begin{aligned} Q_k(r) &:= \rho(r) + \kappa^{-1}(C + 2V) \\ \Pi_k(r) &:= p(r) + \kappa^{-1}C \end{aligned} \quad (5.18)$$

Conociendo todo lo anterior, procedemos ahora a estudiar la estabilidad del objeto bajo estudio. Si definimos el número de partículas como $N^\alpha = nu^\alpha$ y sabemos que se conserva, es decir, $\nabla_\alpha(nu^\alpha) = u^\alpha\nabla_\alpha n + n\nabla_\alpha u^\alpha = 0$. Notar que estamos trabajando con el **tensor energía-momento efectivo** como ya definimos en (5.2), por tanto, de la *identidad de Bianchi* $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ y de la ecuación (5.8), deducimos lo siguiente:

$$u^\mu \left(\frac{\sigma}{\kappa} W_{\mu;\nu}^\nu - np\nabla_\mu \left(\frac{1}{n} \right) - n\nabla_\mu \left(\frac{\rho}{n} \right) + \frac{\rho}{\sigma} \nabla_\mu \sigma \right) = 0 \quad (5.19)$$

En esta expresión el término $\nabla_\mu \sigma$ desaparece, ya que hemos considerado que $\sigma = 1$, recordar que σ da cuenta del acoplamiento al campo gravitatorio. Los únicos términos que sufren un cambio cuando introducimos unas variaciones infinitesimales en la densidad de energía (ρ) son $-np\nabla_\mu \left(\frac{1}{n} \right)$ y $-n\nabla_\mu \left(\frac{\rho}{n} \right)$. El tensor $W_{\mu\nu}$ no depende de la densidad de energía y por tanto, tampoco cambia si la densidad de energía sufre variaciones infinitesimales. Entonces, relacionando la variación infinitesimal del número de partículas (δn) con la variación de la densidad de energía ($\delta\rho$), tenemos que:

$$\delta n(r) = \frac{n(r)}{\rho(r) + p(r)} \delta\rho(r) \quad (5.20)$$

Así, hallando la componente $\mu = r$ en la expresión (5.19), encontramos que:

$$n'(r) = n \frac{\rho'}{\rho + p} \quad (5.21)$$

Obtenemos cómo cambia el número de partículas ($n(r)$) con la coordenada radial r . Introduciendo ahora el número de nucleones (que denotaremos por N):

$$N = \int_0^R 4\pi r^2 [1 - 2GM(r)/r]^{-1/2} n(r) dr \quad (5.22)$$

Con R el radio total de la estrella. Nuestro objetivo es encontrar las ecuaciones tipo *TOV* dentro de esta teoría, para ello, mostraremos que la situación de equilibrio es estable frente a oscilaciones radiales (variaciones de r) si $M(r)$ es mínima con respecto a todas las variaciones posibles (*A. Wojnar, 2016 [2]*). Utilizaremos el *método de los multiplicadores de Lagrange* para tal fin, escribiendo entonces:

$$\delta M - \lambda \delta N = 0 = \int_0^\infty 4\pi r^2 \delta Q dr - \lambda \int_0^\infty 4\pi r^2 \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \delta n(r) dr - \lambda G \int_0^\infty 4\pi r \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-\frac{3}{2}} n(r) \delta M(r) dr \quad (5.23)$$

Donde λ es el multiplicador de Lagrange. Desarrollando más la expresión y haciendo uso de las relaciones (5.21) y (5.6):

$$\begin{aligned} \delta M - \lambda \delta N &= \int_0^\infty 4\pi r^2 \left[1 - \frac{\lambda n(r)}{p(r) + \rho(r)} A^{\frac{1}{2}} - \lambda G \int_r^\infty 4\pi \tilde{r} n(\tilde{r}) A^{\frac{3}{2}} d\tilde{r} - \lambda G \kappa^{-1} \int_r^\infty 4\pi \tilde{r} A^{\frac{1}{2}} \frac{n}{p + \rho} \phi'^2 d\tilde{r} \right] \delta Q(r) dr \\ &\quad - \lambda \kappa^{-1} \int_0^\infty \partial^\nu \phi \left[4\pi r^2 A^{\frac{1}{2}} \Gamma_{\mu\nu}^\mu \frac{n(r)}{p(r) + \rho(r)} - \partial_\nu \left(4\pi r^2 A^{\frac{1}{2}} \frac{n(r)}{p(r) + \rho(r)} \right) \right] \delta \phi dr = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Es importante recalcar que el siguiente término de ligadura desaparece (*A. Wojnar, 2016 [2]*):

$$\int_0^\infty \partial^\mu \left(4\pi r^2 \frac{n(r)}{\rho(r) + p(r)} \delta \phi \partial_\mu \phi \right) dr \quad (5.25)$$

como consecuencia de los límites de integración establecidos. La estabilidad de la estrella en esta teoría de k-esencia en concreto está basada crucialmente en el hecho de que este término sea nulo y dependiendo de la teoría que estemos considerando puede o no ser nulo, por tanto es importante tenerlo en cuenta si trabajamos con otras teorías en las que el acople de la gravedad no sea mínimo ($\sigma = 1$).

Para asegurar que la igualdad se mantiene, tenemos que demostrar que todos los términos integrales son nulos. Así, el primer término que es proporcional a δQ en la ecuación (5.24) desaparece si consideramos que:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{n(r)}{\rho(r) + p(r)} A^{\frac{1}{2}} + G \int_r^\infty 4\pi \tilde{r} n(\tilde{r}) A^{\frac{3}{2}} d\tilde{r} + G \kappa^{-1} \int_r^\infty 4\pi \tilde{r} A^{\frac{1}{2}} \frac{n(\tilde{r})}{\rho(\tilde{r}) + p(\tilde{r})} \phi'^2 d\tilde{r} \quad (5.26)$$

Mientras que el otro término requiere que se cumpla:

$$4\pi r^2 A^{\frac{1}{2}} \Gamma_{\mu\nu}^\mu \frac{n(r)}{p(r) + \rho(r)} = \partial_r \left(4\pi r^2 A^{\frac{1}{2}} \frac{n(r)}{p(r) + \rho(r)} \right) \quad (5.27)$$

Centrándonos en la expresión (5.26), derivándola con respecto a r y teniendo en cuenta de nuevo la relación (5.21), obtenemos:

$$-4\pi G r A - \frac{p'}{(p + \rho)^2} \frac{GA}{p + \rho} \left(4\pi r Q_k - \frac{M}{r^2} \right) - \frac{4\pi r G}{\kappa} \frac{\phi'^2}{p + \rho} = 0 \quad (5.28)$$

A continuación, hacemos uso de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{A - 1}{r} &= A \frac{2GM}{r^2} \\ p + \rho &= \Pi_k + Q_k - 2\kappa^{-1}(C + V) \\ A^{-1} \phi'^2 &= 2(C + V) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Junto con:

$$\begin{aligned} \Pi'_k &= p' + \kappa^{-1} C' \\ &= p' + \kappa^{-1}(C + V) \left(\frac{A - 1}{r} - \kappa A r \Pi_k + \frac{4}{r} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Para finalmente obtener la siguiente ecuación:

$$\Pi'_k = -\frac{AGM}{r^2}(\Pi_k + Q_k) \left(1 + 4\pi r \frac{\Pi_k}{M}\right) - 4\frac{C+V}{\kappa r} \quad (5.31)$$

Que es la ecuación *TOV* para el modelo de k-esencia. Notar su parecido con la ecuación (2.29), teniendo en cuenta que Π y Q juegan aquí el papel de la presión (p) y la densidad de energía (ρ), respectivamente. También es importante destacar el término adicional $-4\frac{C+V}{\kappa r}$, que es específico para el modelo k-esencia que estamos considerando, además comparando con la expresión (5.12), vemos que surge de las componentes W_{rr} y $W_{\theta\theta}$ del tensor $W_{\mu\nu}$.

La ecuación *TOV* (5.31) también aparece como consecuencia de la expresión (5.27), si suponemos que $\Gamma_{\mu r}^\mu$ toma el siguiente valor:

$$\Gamma_{\mu r}^\mu = \frac{2}{r} - \frac{1}{2}(\kappa Ar(Q_k + \Pi_k)) \quad (5.32)$$

Y considerando la ecuación (5.21), volvemos a obtener la ecuación tipo *TOV* (5.31).

En resumen, lo que acabamos de hacer es demostrar que el sistema es estable empezando por ver que se cumple $\delta M - \lambda \delta N = 0$, con ello vemos que cualquier perturbación radial en la masa del objeto será del mismo orden que la perturbación radial en el número de partículas. Forzando a que los términos integrales vayan siendo nulos llegamos irremediabilmente a las ecuaciones tipo *TOV*, con lo cual, obtenemos que las ecuaciones *TOV* surgen de forma natural al suponer que el equilibrio en el objeto es *estable*.

Capítulo 6

Teoría de Brans-Dicke

La *teoría de Brans-Dicke* es otro ejemplo de teoría extendida de gravedad, en la que la interacción gravitatoria está descrita por un campo escalar (ϕ) que puede variar en el tiempo y en el espacio, además de por un campo tensorial, tal y como la describe la teoría de la *Relatividad General* (C. H. Brans, 2005 [9]). Esta teoría fue desarrollada por Robert H. Dicke y Carl H. Brans en el año 1961 basándose en un trabajo anterior de Pascual Jordan del año 1959. Al igual que hemos ido haciendo en los capítulos anteriores, partiremos de una acción de la cual deduciremos las ecuaciones de campo via el principio de mínima acción. La acción será la siguiente:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R\phi - \frac{\omega}{\phi} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right) + S_m \quad (6.1)$$

Donde g es el determinante del tensor métrico como ya sabemos, R es de nuevo el escalar de Ricci, S_m la parte de la acción asociada al término material y w es la *constante de Brans-Dicke*, que es adimensional y da cuenta del acoplamiento existente entre el campo escalar ϕ y la gravedad. En esta teoría se considera que la constante de gravitación G no posee un valor constante, sino que es reemplazada por el término $1/\phi$. A continuación aplicamos el principio de mínima acción a la expresión (6.1) para obtener las siguientes ecuaciones de campo:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) \\ \square \phi &= \frac{8\pi}{3 + 2\omega} T \end{aligned} \quad (6.2)$$

Donde el símbolo \square denota de nuevo al operador *D'Alembertiano* y T es la traza del tensor energía-momento. La primera ecuación describe como el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ junto con el campo escalar ϕ afectan a la curvatura del espacio-tiempo. A partir de la segunda ecuación se puede deducir que la traza del tensor energía-momento actúa como fuente del campo escalar ϕ .

A partir de la primera ecuación deducimos la expresión del tensor $W_{\mu\nu}$:

$$W_{\mu\nu} = \frac{\omega}{\phi^2} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) \quad (6.3)$$

Ahora ya podemos identificar, de la expresión anterior, las ecuaciones para las componentes $W_{\theta\theta}$ y W_{rr} del tensor $W_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} W_{\theta\theta} &= \frac{\omega}{\phi^2} (\partial_\theta \phi \partial_\theta \phi - \frac{1}{2} g_{\theta\theta} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\theta \nabla_\theta \phi - g_{\theta\theta} \square \phi) \\ W_{rr} &= \frac{\omega}{\phi^2} (\partial_r \phi \partial_r \phi - \frac{1}{2} g_{rr} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) + \frac{1}{\phi} (\nabla_r \nabla_r \phi - g_{rr} \square \phi) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Por último, para obtener las ecuaciones tipo *TOV*, sustituimos estas expresiones en la ecuación 5.12 perteneciente al Capítulo 5 como ya vimos. Notar que en las expresiones que dimos de Π y Q aparecen también componentes de dicho tensor (5.10). Es necesario notar que si hacemos $\phi = 1$ y $\omega = 0$ recuperamos la misma acción de la cual surge la RG.

6.1. Modificación con un potencial

También podemos incorporar un término de potencial dependiente del campo escalar ($V(\phi)$). Así pues, podemos partir también de la acción siguiente:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(1 + \alpha\phi)R - \frac{\omega}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right] + S_m \quad (6.5)$$

Donde α ahora es un nuevo parámetro que podemos ajustar con total libertad. De lo anterior surgen las siguientes ecuaciones de campo:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \alpha\phi L_{\mu\nu} \quad (6.6)$$

Donde $L_{\mu\nu}$ será entonces:

$$L_{\mu\nu} = \frac{\omega}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right) + \frac{\alpha}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\phi) \quad (6.7)$$

Recuperaremos la RG si $\omega = \alpha = V(\phi) = 0$ y $\phi = 1$. Lo que hemos hecho es una derivación de la propia *teoría de Brans-Dicke* suponiendo la existencia de un potencial que depende del campo escalar. De la misma forma que hemos hecho anteriormente, para obtener las ecuaciones tipo *TOV* únicamente es necesario identificar el tensor $W_{\mu\nu}$ de las ecuaciones de campo y encontrar las componentes $W_{\theta\theta}$ y W_{rr} y sustituir en la expresión (5.12).

$$\begin{aligned} W_{\theta\theta} &= \alpha\phi \left(\frac{1}{2} g_{\theta\theta} V(\phi) - \frac{\omega}{2} \left(\partial_\theta \phi \partial_\theta \phi - \frac{1}{2} g_{\theta\theta} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right) - \frac{\alpha}{\phi} (\nabla_\theta \nabla_\theta \phi - g_{\theta\theta} \square \phi) \right) \\ W_{rr} &= \alpha\phi \left(\frac{1}{2} g_{rr} V(\phi) - \frac{\omega}{2} \left(\partial_r \phi \partial_r \phi - \frac{1}{2} g_{rr} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right) - \frac{\alpha}{\phi} (\nabla_r \nabla_r \phi - g_{rr} \square \phi) \right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Junto con la componente W_{tt} y considerando que de nuevo $\sigma = 1$, utilizamos la definición de Q y Π que aparece en la expresión (5.10), siendo W_{tt} :

$$W_{tt} = \alpha\phi \left(\frac{1}{2} g_{tt} V(\phi) - \frac{\omega}{2} \left(\partial_t \phi \partial_t \phi - \frac{1}{2} g_{tt} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right) - \frac{\alpha}{\phi} (\nabla_t \nabla_t \phi - g_{tt} \square \phi) \right) \quad (6.9)$$

La ecuación tipo *TOV* será:

$$\begin{aligned} \Pi' &= -\frac{GM}{r^2} (Q + \Pi) \left(1 + \frac{4\pi r^3 \Pi}{M} \right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1} \\ &+ \frac{2\alpha\phi}{8\pi G r} \left[\frac{(\frac{1}{2} g_{\theta\theta} V(\phi) - \frac{\omega}{2} (\partial_\theta \phi \partial_\theta \phi - \frac{1}{2} g_{\theta\theta} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) - \frac{\alpha}{\phi} (\nabla_\theta \nabla_\theta \phi - g_{\theta\theta} \square \phi))}{r^2} \right. \\ &\left. - \frac{(\frac{1}{2} g_{rr} V(\phi) - \frac{\omega}{2} (\partial_r \phi \partial_r \phi - \frac{1}{2} g_{rr} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) - \frac{\alpha}{\phi} (\nabla_r \nabla_r \phi - g_{rr} \square \phi))}{A} \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

Para analizar la estabilidad del objeto que estamos tratando, podemos estudiar si el gradiente entre la presión efectiva (p_{eff}) y la densidad de energía efectiva (ρ_{eff}) es positivo ($dp_{eff}/d\rho_{eff} > 0$), en cuyo caso el objeto podría ser *estable*. Decimos podría porque aún no se ha ahondado lo suficiente en el tema, ya que, además de la influencia del tensor energía-momento del objeto ($T_{\mu\nu}$), hay que estudiar el tensor energía-momento del campo escalar ($T_{\mu\nu}(\phi)$) con detenimiento. En las ecuaciones de campo correspondientes aparecería el tensor energía-momento efectivo ($T_{\mu\nu}^{eff}$), del que surgen las densidad de energía y presión efectivas, que no es más que la suma de los dos tensores anteriores.

$$G_{\mu\nu} = (1 + \alpha\phi)(T_{\mu\nu}^{eff}) \quad (6.11)$$

En cualquier caso, esta es una cuestión que aún queda abierta a estudios futuros.

Capítulo 7

Conclusiones

En este último capítulo recabaremos los resultados y la información esencial que se deduce de los capítulos anteriores. En primer lugar hay que tener en cuenta el objetivo principal de este trabajo que es la comparación entre la teoría de la *Relatividad General* (RG) y las teorías extendidas de gravedad o *TEG*, así como de los resultados y consecuencias que surgen de cada una de ellas. A lo largo del presente trabajo, el método de trabajo ha sido siempre el mismo: primero comenzamos con una acción que describe nuestro sistema (el objeto compacto en cuestión), después obtenemos las ecuaciones de campo a partir de ella, para finalmente encontrar las ecuaciones *TOV*, suponiendo una ecuación de estado en particular.

La primera conclusión que extraemos del estudio es que ambas teorías, tanto la *RG* como las *TEG*, concuerdan perfectamente, sin embargo las teorías *TEG* tratan de explicar fenómenos a los que la *RG* no llega, como por ejemplo la masa máxima de las estrellas de neutrones, conocida también, como ya sabemos, *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff*. A primera vista podríamos pensar que la *RG* se queda atrás en este aspecto, pero esto no es cierto, ya que a partir de ella se extraen las ecuaciones *TOV* que ya conocemos, que explican con un gran grado de acierto cómo se comporta la presión interna en función del radio en los objetos compactos y en ningún caso chocan con la física que conocemos según deducimos de las observaciones. Aunque es cierto que ambas teorías son potentes en este campo, todavía no proporcionan un modelo exacto de todo lo que ocurre en las enanas blancas, las estrellas de neutrones o los agujeros negros, también debido a la imposibilidad de observación directa sobre estos cuerpos. Así pues, aún quedan muchos temas que esclarecer en este campo y de momento solo nos podemos mover en el terreno de la especulación de lo que ocurre en ellos realmente.

Otra conclusión interesante recae en la imposibilidad de resolver las ecuaciones *TOV* de una manera analítica, únicamente es posible obtener una solución de forma numérica (al igual que ocurre en otras áreas de la física como las ecuaciones de *Navier-Stokes* en la mecánica de fluidos), utilizando siempre una ecuación de estado que nos relacione la presión con la densidad de energía. Como ya vimos en el Capítulo 4, en el cual suponíamos ciertas algunas aproximaciones, por ejemplo cuando asumíamos que el interior estelar se encontraba dividido en una zona de *bajas presiones* y otra de *altas presiones* o el hecho de considerar que la presión es una función monótona creciente del radio según nos acercamos al centro, o dicho de otro modo cuando $r \rightarrow 0$.

En el Capítulo 3 hemos hecho referencia a los efectos cuánticos que producen la presión que sostiene a los diferentes tipos de objetos compactos. Otra idea interesante es la necesaria comprensión de la física de partículas que subyace en estos objetos, no solo para entender completamente su estructura interna, sino también para conocer el comportamiento y las interacciones de las partículas a nivel cuántico y su relación con la gravedad. Las teorías que se encargan de analizar en conjunto la *teoría cuántica de campos* (*TCC*), o *QFT* por sus siglas en inglés, y la *Relatividad General* se conocen con el nombre de *teorías de gravedad cuántica*, que pretenden unificar las tres interacciones fundamentales, a saber, interacción nuclear fuerte, nuclear débil y electromagnética, con la gravedad. Por ello, los objetos compactos constituyen muy buenos campos de pruebas para testar la validez de estas teorías.

Del Capítulo 5 también podemos extraer varias conclusiones sobre el método utilizado para obtener las ecuaciones tipo *TOV* (5.12) y (5.13). Al igual que sucede con la *Relatividad General*, en dicho capítulo hemos partido de unas ecuaciones de campo modificadas, que a su vez provienen de una acción concreta al aplicar el *Principio de mínima acción*. En el caso de que deseemos recuperar las ecuaciones *TOV* en la misma forma con la que aparece en (2.29), únicamente es necesario considerar que $W_{\theta\theta} = W_{rr}r^2/A$ y $\sigma = 1$, considerando que Π y Q se corresponden con la presión efectiva y la densidad de energía efectiva, respectivamente, como ya mencionamos anteriormente. También es importante destacar que siempre que queramos hallar resultados generales, necesitamos especificar el valor de σ y las componentes del tensor $W_{\mu\nu}$. Por último, todas aquellas teorías que no se

basen en ecuaciones de campo de la forma (5.1) deben ser investigadas más a fondo para que sea posible derivar de ellas la mismas consecuencias físicas que hemos tratado.

En el Capítulo 6, hemos analizado brevemente la *teoría de Brans-Dicke*, estudiando la acción de la que parte la teoría y las ecuaciones de campo que surgen como resultado de la aplicación del *principio de mínima acción*. Tanto en la RG, como en la *teoría de Brans-Dicke*, la fuente del campo gravitatorio se encuentra en el tensor energía-momento ($T_{\mu\nu}$), no obstante, la forma en la que el espacio-tiempo curvado afecta al movimiento de la materia difiere de una teoría a la otra. En Brans-Dicke, además del tensor métrico, aparece un campo escalar ϕ que podemos interpretar como si tuviera el efecto de cambiar el valor de la constante de gravitación G de un lugar a otro. Como la RG, la *teoría de Brans-Dicke* también logra explicar los fenómenos de desviación de la luz en campos gravitatorios intensos, así como la precesión de la órbita de los planetas, por lo que también se aplica al estudio de los objetos compactos con la intención de arrojar más luz sobre el tema.

Bibliografía

- [1] NORMAN K. GLENDENNING, '*Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity*', 2000.
- [2] A. WOJNAR y H. VELTEN, '*Equilibrium and stability of relativistic stars in extended theories of gravity*', 2016. <https://arxiv.org/abs/1604.04257>
- [3] DAVID J. OLMO, D. RUBIERA-GARCÍA y A. WOJNAR, '*Stellar structure models in modified theories of gravity: lessons and challenges*', 2020. <https://arxiv.org/abs/1912.05202>
- [4] S. WEINBERG, '*Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*', 1972.
- [5] STUART L. SAPHIRO y SAUL TEUKOLSKY, '*Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*', 1983.
- [6] S. CHANDRASEKHAR, '*The highly collapsed configurations of a stellar mass*', 1935. <https://academic.oup.com/mnras/article/95/3/207/991812>
- [7] J. R. OPPENHEIMER y G. M. VOLKOFF, '*On Massive Neutron Cores*', 1939. <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.55.374>
- [8] R. C. TOLMAN, '*Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*', 1939. <https://www.semanticscholar.org/paper/Static-Solutions-of-Einstein's-Field-Equations-for-Tolman/83347b0862addfe0e8de027805ec795d9f253453>
- [9] C. H. BRANS, '*The roots of scalar-tensor theory: an approximate history*', 2005. <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0506063.pdf>