



TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Física

Colapso gravitacional en teorías $f(R)$ de Palatini

Autor: Nicolás Duque Miguel

Tutor: Diego Sáez-Chillón Gómez

Índice

1. Introducción	2
2. Colapso gravitatorio en Relatividad General	3
3. Teorías de gravedad $f(R)$ de Palatini	8
4. Colapso gravitacional esférico en teorías $f(R)$	12
5. Resultados en diferentes modelos	14
5.1. Modelo 1: $f(R) = R + \varepsilon R^2$	14
5.2. Modelo 2: $f(R) = R + \varepsilon R^{-1}$	16
5.3. Modelo 3: $f(R) = R + \lambda R_0 \left[\left(1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-n} - 1 \right]$	17
6. Conclusiones	19
Bibliografía	21

1. Introducción

La Relatividad General es la teoría más precisa que tenemos para describir la gravedad. Describe este fenómeno en términos de un espacio-tiempo curvo, usando para ello las herramientas de la geometría (pseudo)-Riemanniana. Esto significa que hay una métrica en el espacio-tiempo que da las distancias y la curvatura. Esta métrica está determinada por el contenido de materia y energía que hay en el espacio-tiempo. La métrica además determina una conexión, que da el transporte paralelo de vectores a lo largo de una curva. Esta conexión es la conexión de Levi-Civita de la métrica, y es compatible con ésta en el sentido de que el transporte paralelo no cambia la longitud de los vectores.

En los últimos años, sin embargo, se han ido acumulando observaciones difíciles de explicar con la Relatividad General tal como la propuso Einstein. Algunas de estas observaciones son la expansión acelerada del universo, las curvas de rotación de galaxias, el movimiento de las galaxias en los cúmulos, algunos detalles del fondo cósmico de microondas, y los problemas del horizonte y de la planitud en el modelo cosmológico del Big Bang. Para explicar estas observaciones, las hipótesis más prominentes son la energía oscura, la materia oscura y la inflación. Pero no son las únicas hipótesis que se han barajado. En particular, existe la posibilidad de que la manera en la que la materia y energía determinan cómo es la métrica sea más complicada de lo que afirma la Relatividad General. Las teorías que proponen esto se llaman teorías de gravedad modificada.

En Relatividad General, la densidad lagrangiana que describe el campo gravitatorio es simplemente $\sqrt{-g}R$, donde g es el determinante de la métrica y R es el escalar de curvatura asociado a ésta. La forma más sencilla que se nos puede ocurrir de modificar la Relatividad General es cambiar esa R por una función más general del escalar de curvatura, $f(R)$. Estas son las llamadas teorías de gravedad $f(R)$, y en efecto varias de ellas se han propuesto como alternativas a la materia y energía oscuras, y como modelos de inflación.

Uno de los problemas clásicos que se suelen estudiar en gravitación es el de el colapso gravitacional de una estrella bajo su propia acción gravitatoria. En su artículo de 1939 [4], Oppenheimer y Snyder estudiaron el caso más sencillo de colapso gravitatorio, el de una estrella de polvo (un fluido de materia sin presión) homogénea y esféricamente simétrica. En el modelo que propusieron (que ahora se conoce como colapso de Oppenheimer-Snyder), la estrella tiene una frontera bien definida, y fuera de esta frontera solo hay

vacío. No obstante, se pueden sacar conclusiones relevantes considerando solo el espacio-tiempo en el interior de la estrella, sin considerar el exterior.

Teniendo en cuenta todo esto, es relevante estudiar las predicciones que las teorías de gravedad $f(R)$ hacen con respecto al colapso gravitatorio. Aunque estas teorías tradicionalmente no se han propuesto para explicar este fenómeno, es uno de los escenarios que podríamos usar para confirmarlas o descartarlas. En particular, es de vital importancia que los tiempos de colapso en estas teorías no resulten radicalmente diferentes de los tiempos dados por la Relatividad General, pues de lo contrario entrarían en conflicto con las observaciones experimentales.

Las teorías $f(R)$ se pueden clasificar en dos grupos: métricas y no métricas. En las teorías métricas, se respeta la asunción hecha en Relatividad General de que la conexión del espacio-tiempo es compatible con la métrica, es decir, que el transporte paralelo conserva la longitud de los vectores. Esta conexión, la de Levi-Civita, está presente siempre que haya una métrica, pero en las teorías no métricas se asume la existencia de una conexión adicional que es, en principio, independiente de la métrica. Por tanto en tales teorías el transporte paralelo no respetaría la longitud de los vectores. Esta conexión aparece en la acción para el campo gravitatorio, pero puede aparecer o no aparecer en la parte de la acción que describe la materia. Las teorías en las que la conexión independiente solo aparece en la acción gravitatoria, pero no en la de la materia, son las llamadas teorías de Palatini.

En este trabajo se analiza el colapso gravitatorio de una estrella de polvo en varias de estas teorías. Ha sido señalado en la literatura [7] que este tipo de colapso en teorías de Palatini no es compatible con el modelo de Oppenheimer-Snyder, en el que la estrella de polvo transiciona abruptamente a un exterior de vacío. Sin embargo, esto no quita la posibilidad de un colapso en el que el exterior sea más complicado (como una densidad que decaiga al alejarse de la estrella), por lo que el estudio de lo que ocurre en el interior de la estrella (que es el objetivo de este trabajo) sigue siendo relevante.

2. Colapso gravitatorio en Relatividad General

Empezaremos con una exposición básica de cómo se resuelve el problema en Relatividad General. En esta teoría, la acción que describe el campo

gravitatorio es la de Einstein-Hilbert:

$$S_G = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.1)$$

donde g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$ y R es su escalar de curvatura, es decir, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci de la métrica. Esto significa que viene dado por

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}, \quad (2.2)$$

siendo $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ el tensor de Riemann, que a su vez viene dado por

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha L^\mu{}_{\nu\beta} - \partial_\beta L^\mu{}_{\nu\alpha} + L^\mu{}_{\lambda\alpha} L^\lambda{}_{\nu\beta} - L^\mu{}_{\lambda\beta} L^\lambda{}_{\nu\alpha}. \quad (2.3)$$

Los coeficientes $L^\mu{}_{\alpha\beta}$ son los símbolos de Christoffel, que son los coeficientes de la conexión de Levi-Civita de la métrica. La conexión en un espacio da el transporte paralelo de vectores en ese espacio, y el hecho de que la conexión sea la de Levi-Civita de la métrica significa que el transporte paralelo conserva la longitud de los vectores. También significa que podemos obtener los coeficientes $L^\mu{}_{\alpha\beta}$ a partir de la métrica como

$$L^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}). \quad (2.4)$$

La acción describiendo tanto a la gravedad como a la materia se puede escribir como

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \psi] \right) \sqrt{-g}, \quad (2.5)$$

donde ψ representa de forma colectiva los campos de materia que pueda haber y que entran en el lagrangiano \mathcal{L}_m que los describe. Variando esta acción con respecto a la métrica (cosa que haremos con detalle en la siguiente sección) se obtienen las ecuaciones del movimiento:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

donde $T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}$ es el tensor de energía-momento. Este tensor cumple también la ecuación de conservación local $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, donde ∇_μ es la derivada covariante asociada a la conexión de Levi-Civita de la métrica.

Pasamos ahora a estudiar el problema del colapso gravitacional. Esto consiste en un sistema de materia que por su propia gravedad va aglomerándose, con la densidad aumentando hasta un punto donde la teoría predice densidad infinita. Se forma entonces una singularidad, que no es más que un punto (o más bien, un agujero) donde hay incompletitud geodésica, es decir, donde hay al menos una geodésica que termina después de un tiempo propio finito, y no se puede extender dicha geodésica. Las singularidades son una parte esencial de las teorías de gravitación, y el colapso gravitatorio es un ejemplo de cómo se forman.

En el caso de un colapso esféricamente simétrico de una estrella de polvo, el tensor de energía-momento viene dado (en coordenadas comóviles con el fluido) por

$$T_{tt} = \rho(t), \quad \text{demás } T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.7)$$

Proponemos como forma para la métrica una del tipo FLRW:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.8)$$

donde K es una constante que representa cómo es la curvatura del espacio-tiempo y $A(t)$ es una función del tiempo que llamaremos factor de escala, y que determina como las distancias se van agrandando o encogiendo. Este *ansatz* para la métrica es debido a la homogeneidad e isotropía del problema a tratar, y es bien conocido en la literatura que describe adecuadamente el problema. Nuestro objetivo por tanto es usar las ecuaciones del movimiento para obtener el factor de escala $A(t)$ y la constante K , y el tiempo para el cual $A(t)$ se anula será el tiempo de colapso.

Las componentes tt y $\theta\theta$ del tensor de Ricci de esta métrica son

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{A}}{A} \quad (2.9)$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{r^2}{2} [4K + 4\dot{A}^2 + 2A\ddot{A}]. \quad (2.10)$$

Las otras componentes no nulas son R_{rr} y $R_{\phi\phi}$, pero sus correspondientes ecuaciones resultan ser equivalentes a las obtenidas de $R_{\theta\theta}$. La ecuación para tt es

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{A}}{A} = 8\pi GT_{tt} + \frac{R}{2}g_{tt} = 8\pi G\rho + \frac{R}{2}. \quad (2.11)$$

La ecuación para $\theta\theta$ es

$$R_{\theta\theta} = 8\pi GT_{\theta\theta} + \frac{R}{2}g_{\theta\theta} = -R\frac{r^2}{2}A^2, \quad (2.12)$$

que lleva a

$$4K + 4\dot{A}^2 + 2A\ddot{A} = -RA^2. \quad (2.13)$$

Despejando \ddot{A} e insertando el resultado en la ecuación (2.11), se puede despejar \dot{A} como

$$\dot{A}^2 = -K + \frac{4}{3}\pi G\rho A^2 - \frac{A^2}{6}R. \quad (2.14)$$

Podemos simplificar esta ecuación. Si tomamos la traza en (2.6), obtenemos $R = -8\pi GT$, siendo T la traza del tensor energía-momento, que en nuestro caso es simplemente ρ . Por otra parte, la ecuación de conservación local $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ implica simplemente que $\rho(t) = \rho_0/A(t)^3$. Teniendo en cuenta todo esto, la ecuación (2.14) queda como

$$\dot{A}^2 = -K + \frac{8\pi G\rho_0}{3}A^{-1} \quad (2.15)$$

Ahora vamos a reescalar el factor de escala como $A \rightarrow A \left(\frac{8\pi G\rho_0}{3}\right)^{1/3}$. Esto convierte la ecuación anterior en

$$\dot{A}^2 = -k + \frac{1}{A}, \quad (2.16)$$

siendo $k = K/(\frac{8\pi G\rho_0}{3})^{2/3}$. Como condición inicial, podemos exigir que $A(0) = 1$, es decir, que el factor de escala esté normalizado a la unidad en el instante inicial. Además, si el fluido está en reposo en el instante inicial, $\dot{A}(0) = 0$.

Con estas condiciones, $k = 1$, y la ecuación para el factor de escala es simplemente

$$\dot{A}^2 = -1 + \frac{1}{A}. \quad (2.17)$$

Esta ecuación resulta ser separable y de solución

$$t = \arcsin(\sqrt{1-A}) + \sqrt{A(1-A)}, \quad (2.18)$$

con tiempo de colapso $t_c = \pi/2$, aunque las versiones modificadas que veremos más adelante no suelen tener solución analítica. Esta solución está representada en la figura 1. El cambio que hemos hecho equivale a usar unidades en las que $\frac{8\pi G\rho_0}{3} = 1$. Dado que las unidades de $G\rho_0$ son tiempo⁻², esto equivale a usar como unidad de tiempo $\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0}}$.

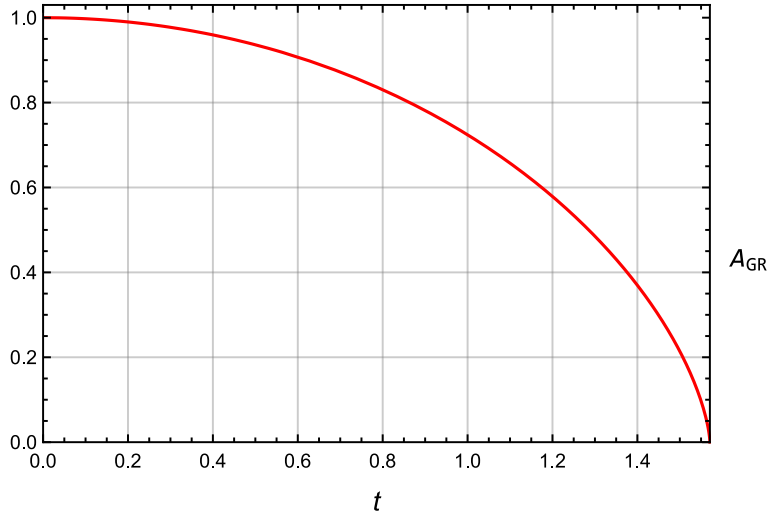


Figura 1: Gráfico del factor de escala en el caso de un colapso gravitatorio en Relatividad General. La densidad inicial está esencialmente asumida en la definición de A_{GR} y en la condición de normalización en el instante inicial. La clave es que diferentes densidades no alteran la forma de la solución, sino que corresponden simplemente a un reescalado del eje temporal.

3. Teorías de gravedad $f(R)$ de Palatini

Habiendo visto como es la acción en Relatividad General, un primer intento de modificar esta acción es simplemente sustituir el escalar de curvatura R por una función $f(R)$. Por ejemplo, $f(R) = R + \varepsilon R^2$, con un ε lo bastante pequeño para mantener el acuerdo con las observaciones experimentales. Así se obtienen las teorías $f(R)$ métricas.

Pero un segundo paso que podríamos tomar, es suponer que $R_{\mu\nu}$ no es el tensor de Ricci de la métrica (asociado a la conexión de Levi-Civita), sino el tensor de Ricci asociado a una conexión independiente $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$. Este tensor de Ricci se define igual que antes como la contracción del tensor de Riemann,

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad (3.1)$$

siendo este último

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\lambda\alpha} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha}. \quad (3.2)$$

La diferencia es que ahora los coeficientes $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ ya no están relacionados con la métrica (al menos, no en principio). Así pues, el escalar de curvatura que aparece en la acción, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, depende tanto de la métrica $g^{\mu\nu}$ como de la conexión independiente a través del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Escribimos por tanto la acción conjunta del campo gravitatorio y la materia como

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{16\pi G} f(R) + \mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \psi] \right) \sqrt{-g}, \quad (3.3)$$

donde recalamos que en las teorías de Palatini, el lagrangiano que describe la materia depende de la métrica, pero no de la conexión independiente. En Relatividad General, y en teorías $f(R)$ métricas, las ecuaciones del movimiento se obtenían variando la acción con respecto a la métrica. En las teorías de Palatini, sin embargo, la acción debe variarse con respecto a la métrica y con respecto a la conexión de forma separada. Empezamos variando con respecto a la métrica:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} f(R) + \sqrt{-g} \frac{\delta f(R)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] + \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Usando la conocida fórmula $\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}$ y aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[f_R \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} + \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}},$$

donde $f_R = \frac{\partial f}{\partial R}$. Como en esta teoría $R_{\mu\nu}$ es independiente de la métrica y $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, se sigue que $\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}$. Recordando la definición del tensor de energía-momento como $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}$ se obtiene:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x \left[\frac{1}{16\pi G} \left(f_R R_{\mu\nu} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g}.$$

Igualando a cero obtenemos la primera ecuación del movimiento:

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{f}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Variar la acción con respecto a la conexión es un poco más laborioso:

$$\frac{\delta S}{\delta \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\delta f}{\delta \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}}$$

La fórmula usual $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})$ sigue siendo válida, pero siendo ahora ∇_μ la derivada covariante dada por la conexión. No obstante, es válida con la condición de que la conexión sea simétrica, es decir, $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$ (esta condición se satisface automáticamente en teorías métricas cuando la conexión es la conexión de Levi-Civita de la métrica). Aunque en principio esta condición es una restricción innecesaria, en [5] muestran que permitir una conexión no simétrica no resulta en nuevas propiedades dinámicas, pues solo la parte simétrica de la conexión entra en las ecuaciones para la métrica. Por tanto, esta elección está justificada.

Estudiamos ahora el comportamiento del integrando en la acción:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu} \left[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \right] = \\ &= \sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu} \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \sqrt{-g} f_R g^{\mu\nu} \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \end{aligned}$$

Tenemos dos sumandos. La regla del producto nos permite escribir el primer sumando como:

$$\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu}\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) = \nabla_\lambda(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\lambda(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu})\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu},$$

y similarmente podemos reescribir el segundo sumando. Juntando esas expresiones el integrando queda como

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \\ - \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\nabla_\lambda(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu}) + \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\nabla_\nu(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Jugando con los índices es posible agrupar términos:

$$\nabla_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda) + \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} [-\nabla_\lambda(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu}) + \delta^\nu_\lambda\nabla_\rho(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\rho})],$$

donde $J^\lambda := f_R(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma})$ es un vector. Teneindo en cuenta que $\nabla_\lambda\sqrt{-g} = \partial_\lambda\sqrt{-g} - \Gamma^\sigma_{\mu\sigma}\sqrt{-g}$ [2] y que la conexión es simétrica, se comprueba por cálculo directo que

$$\nabla_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda) = \partial_\lambda(\sqrt{-g}J^\lambda).$$

Asumiendo que este término de superficie se anula en la frontera al integrar, la variación de la acción queda finalmente

$$\frac{\delta S}{\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [-\nabla_\lambda(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu}) + \delta^\nu_\lambda\nabla_\rho(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\rho})]. \quad (3.5)$$

Igualando a cero obtenemos la segunda ecuación del movimiento:

$$-\nabla_\lambda(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu}) + \delta^\nu_\lambda\nabla_\rho(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\rho}) = 0. \quad (3.6)$$

Es posible simplificar esta ecuación, sin embargo. Tomando $\lambda = \nu$ en la ecuación anterior obtenemos

$$\nabla_\nu(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu}) = 4\nabla_\rho(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\rho}),$$

lo que significa que $\nabla_\rho(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\rho}) = 0$. Insertando esto en la ecuación

(3.6), se tiene finalmente

$$\nabla_\lambda(\sqrt{-g}f_Rg^{\mu\nu}) = 0. \quad (3.7)$$

Por tanto, para estudiar la dinámica de un sistema, debemos resolver las ecuaciones del movimiento (3.4) y (3.7). Es posible simplificar el problema todavía más sin especificar detalles sobre la métrica o el tensor de energía-momento. Para ello, vamos a definir una métrica auxiliar $h_{\mu\nu} = f_R g_{\mu\nu}$. La inversa de esta métrica será $h^{\mu\nu} = \frac{1}{f_R} g^{\mu\nu}$, y el determinante $h = (f_R)^4 g$. La ecuación (3.7) se transforma entonces en

$$\nabla_\lambda(\sqrt{-h}h^{\mu\nu}) = 0. \quad (3.8)$$

Pero esta ecuación simplemente establece la compatibilidad de la métrica $h_{\mu\nu}$ con la conexión $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$. Es decir, esta ecuación nos dice que la conexión independiente que habíamos supuesto, resulta ser la conexión de Levi-Civita de la métrica $h_{\mu\nu}$. Así que esa conexión vendrá dada por la fórmula usual:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}h^{\mu\lambda}(\partial_\alpha h_{\lambda\beta} + \partial_\beta h_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda h_{\alpha\beta}). \quad (3.9)$$

Por tanto, el tensor de Ricci que aparece en la ecuación del movimiento (3.4) puede entenderse como el tensor de Ricci de esta métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$, al que denotaremos $R_{\mu\nu}(h)$.

Podemos además tomar la traza en la ecuación (3.4) para obtener

$$Rf_R - 2f = 8\pi GT. \quad (3.10)$$

Esta ecuación significa que, al igual que en Relatividad General, R y T están relacionados algebraicamente. Por consiguiente podemos tratar R como una función de T (despejando en la ecuación (3.10)), $R = R(T)$, y entonces también $f = f(R) = f(T)$ y $f_R = f_R(R) = f_R(T)$. Por lo que la ecuación del movimiento se puede entender como:

$$f_R(T)R_{\mu\nu}(h) - \frac{f(T)}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

A esta ecuación se le suma de nuevo la conservación local del tensor de energía-momento, $\nabla_\mu(g)T^{\mu\nu} = 0$, donde $\nabla_\mu(g)$ es la derivada covariante

asociada a la conexión de Levi-Civita de la métrica $g_{\mu\nu}$.

Es importante señalar que si $f(R) = R$, entonces $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, y se recupera completamente la Relatividad General. Es decir, si $f(R) = R$, no importa si consideramos la conexión como independiente, porque las ecuaciones establecen automáticamente la compatibilidad de la conexión con la métrica.

4. Colapso gravitacional esférico en teorías $f(R)$

Vamos a estudiar de nuevo el caso más sencillo de colapso gravitacional, una estrella de polvo, homogénea y con simetría esférica. Como dijimos en la sección 2, el tensor de energía-momento describiendo tal situación tiene como única componente no nula $T_{tt} = \rho(t)$. Por tanto $T = T(t) = \rho(t)$, y podemos tratar la $f(R)$ como una función del tiempo. Proponemos de nuevo como forma para la métrica una del tipo FLRW:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (4.1)$$

Esta forma para la métrica no solo es solución en Relatividad General, sino también en teorías $f(R)$ métricas.

La métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$ viene dada por

$$d\tilde{s}^2 = f_R dt^2 - f_R A^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (4.2)$$

Las componentes tt y $\theta\theta$ del tensor de Ricci de esta métrica son

$$R_{tt}(h) = -\frac{3}{2} \left[2\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{f}_R}{f_R} + \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{f}_R}{f_R} - \left(\frac{\dot{f}_R}{f_R} \right)^2 \right] \quad (4.3)$$

$$R_{\theta\theta}(h) = \frac{r^2}{2} \left[4K + 4\dot{A}^2 + 2A\ddot{A} + 5A\dot{A} \frac{\dot{f}_R}{f_R} + A^2 \frac{\ddot{f}_R}{f_R} \right]. \quad (4.4)$$

De nuevo, el resto de componentes no nulas no aportan más información.

La ecuación del movimiento para tt es

$$R_{tt}(h) = \frac{8\pi GT_{tt} + \frac{f}{2}g_{tt}}{f_R} = \frac{8\pi G\rho + \frac{f}{2}}{f_R}. \quad (4.5)$$

Insertando aquí el resultado (4.3), obtenemos la primera de las ecuaciones:

$$2\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{f}_R}{f_R} + \frac{\dot{A}\dot{f}_R}{A f_R} - \left(\frac{\dot{f}_R}{f_R}\right)^2 = -\frac{16\pi G\rho + f}{3f_R}. \quad (4.6)$$

Por otro lado, la ecuación para $\theta\theta$ será

$$R_{\theta\theta}(h) = \frac{8\pi GT_{\theta\theta} + \frac{f}{2}g_{\theta\theta}}{f_R} = -\frac{1}{2}\frac{f}{f_R}r^2A^2. \quad (4.7)$$

Juntando esto con (4.4) se tiene

$$4K + 4\dot{A}^2 + 2A\ddot{A} + 5A\dot{A}\frac{\dot{f}_R}{f_R} + A^2\frac{\ddot{f}_R}{f_R} = -\frac{f}{f_R}A^2. \quad (4.8)$$

Dividiendo a ambos lados de la ecuación por A^2 podemos despejar de la siguiente manera:

$$2\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{f}_R}{f_R} = -\frac{f}{f_R} - 4\frac{K}{A^2} - 4\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 - 5\frac{\dot{A}\dot{f}_R}{A f_R}. \quad (4.9)$$

Y sustituyendo este resultado en la ecuación (4.6) tenemos

$$-\frac{f}{f_R} - 4\frac{K}{A^2} - 4\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 - 4\frac{\dot{A}\dot{f}_R}{A f_R} - \left(\frac{\dot{f}_R}{f_R}\right)^2 = -\frac{16\pi G\rho + f}{3f_R}. \quad (4.10)$$

La ecuación de conservación local del tensor energía-momento establece de nuevo que $\rho(t) = \rho_0/A^3(t)$. Teniendo esto en cuenta, podemos despejar \dot{A}^2 en (4.10) como

$$\dot{A}^2 = -K + \frac{1}{f_R} \left[\frac{4}{3}\pi G\rho_0 A^{-1} - \frac{A^2}{6}f - A\dot{A}\dot{f}_R - \frac{A^2}{4}\frac{\dot{f}_R^2}{f_R} \right]. \quad (4.11)$$

Esta ecuación es similar a la obtenida en [6] para el caso de teorías $f(R)$ métricas (aunque bailan algunos signos porque nuestro convenio para el tensor de Riemann es diferente). Los dos primeros términos aparecían ya en Relatividad General, mientras que los dos últimos son nuevos.

Para el caso que estamos estudiando, la ecuación de la traza (3.10) nos dice que

$$Rf_R - 2f = \frac{8\pi G\rho_0}{A^3} \quad (4.12)$$

Haciendo el mismo cambio que en Relatividad General, $A \rightarrow A \left(\frac{8\pi G\rho_0}{3} \right)^{1/3}$, podemos eliminar la densidad inicial de esta ecuación, y por tanto R , $f(R)$ y $f_R(R)$ no dependerán de ella. Sustituyendo en (4.11), obtenemos

$$\dot{A}^2 = -k + \frac{1}{f_R} \left[\frac{1}{2A} - \frac{A^2}{6} f - A\dot{A}f_R - \frac{A^2}{4} \frac{\dot{f}_R^2}{f_R} \right], \quad (4.13)$$

donde de nuevo $k = K / \left(\frac{8\pi G\rho_0}{3} \right)^{2/3}$. Aplicando las condiciones iniciales se puede obtener k como

$$k = \frac{1}{f_{R_0}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} f_0 - \frac{1}{4} \frac{\dot{f}_{R_0}^2}{f_{R_0}} \right], \quad (4.14)$$

donde un subíndice 0 indica evaluación en $t = 0$.

5. Resultados en diferentes modelos

5.1. Modelo 1: $f(R) = R + \varepsilon R^2$

Este es el modelo más obvio que se nos puede ocurrir para la función $f(R)$. En efecto, siempre que $f(R)$ sea analítica en torno a $R = 0$, se podrá expandir como $f(R) = R + a_2 R^2/2 + \dots$. Este enfoque es explorado en [8] en teorías $f(R)$ métricas. El modelo con R^2 se ha propuesto como candidato viable de inflación [9] y como modelo de materia oscura [10], y en Palatini como candidato de inflación [11].

Para este modelo, de la ecuación de la traza (3.10) podemos obtener (tras el reescalado del factor de escala) el escalar de curvatura como $R = -3/A^3$

(que resulta ser igual que en Relatividad General). Por tanto

$$f = R + \varepsilon R^2 = -\frac{3}{A^3} + 9\varepsilon \frac{1}{A^6} \quad (5.1)$$

$$f_R = 1 - 6\varepsilon \frac{1}{A^3}, \quad \dot{f}_R = 18\varepsilon \frac{\dot{A}}{A^4}. \quad (5.2)$$

Insertando estos resultados en la ecuación (4.13) se tiene

$$\dot{A}^2 = -k + \frac{1}{A^3 - 6\varepsilon} \left[\frac{2A^3 - 3\varepsilon}{2A} - \frac{2A^3 - 3\varepsilon}{A^3 - 6\varepsilon} 9\varepsilon \dot{A}^2 \right]. \quad (5.3)$$

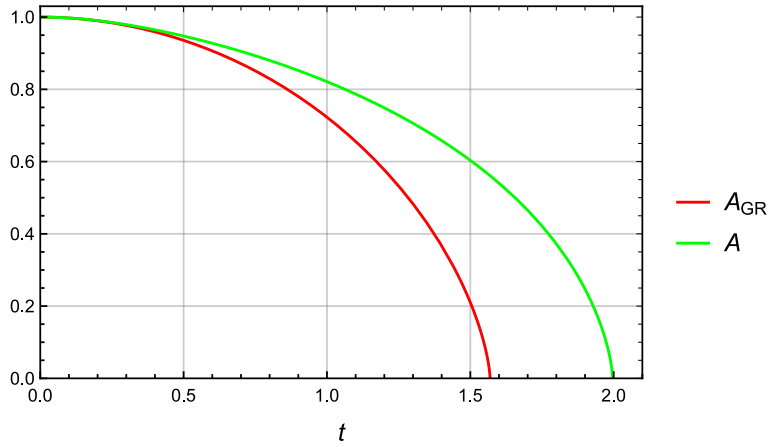


Figura 2: Comparación entre la solución para el factor de escala en Relatividad General y en Palatini R^2 con $\varepsilon = -0,4$.

Aplicando ahora las condiciones iniciales $A(0) = 1$ y $\dot{A}(0) = 0$, podemos despejar k como

$$k = \frac{2 - 3\varepsilon}{2 - 12\varepsilon}. \quad (5.4)$$

De la ecuación (5.3) deducimos que el valor de ε debe ser negativo para evitar denominadores que se hacen cero. Por claridad mencionamos que, bajo un convenio de signos diferente para el tensor de Riemann (como el usado en algunas de las referencias), llegaríamos a la conclusión opuesta

de que ε debe ser positivo. Las ecuaciones, por supuesto, acaban siendo las mismas (cambiando ε por $-\varepsilon$), pero esto puede ocasionar confusión al comparar resultados de diferentes autores. En la figura 2 se representa la solución para este modelo.

5.2. Modelo 2: $f(R) = R + \varepsilon R^{-1}$

Este modelo, en teorías métricas, ha sido propuesto en [12] como alternativa a la energía oscura. Aunque dicha posibilidad está actualmente descartada, la versión de Palatini de esta teoría parece seguir siendo viable [13] [14] [15]. En cualquier caso, estudiar las características de este modelo puede ser útil para entender otros modelos más sofisticados.

En esta ocasión la ecuación de la traza resulta ser cuadrática, y de solución

$$R = -\frac{3 + \sqrt{9 - 12\varepsilon A^6}}{2A^3}, \quad (5.5)$$

donde el signo de la raíz ha sido elegido para obtener el resultado correcto cuando $\varepsilon = 0$. Las funciones relevantes son

$$f = -\frac{6 + \sqrt{9 - 12\varepsilon A^6}}{3A^3} \quad (5.6)$$

$$f_R = 1 - \frac{4\varepsilon A^6}{\left(3 + \sqrt{9 - 12\varepsilon A^6}\right)^2} \quad (5.7)$$

$$\dot{f}_R = -\frac{72\varepsilon A^5 \dot{A}}{\sqrt{9 - 12\varepsilon A^6} \left(3 + \sqrt{9 - 12\varepsilon A^6}\right)^2} \quad (5.8)$$

Insertando estas expresiones en la ecuación (4.13) se obtiene entonces

$$\dot{A}^2 = -k + \frac{3}{4\xi - 6} \left[\frac{\xi(\xi + 12)}{18A} - \frac{6(\xi - 6)}{\xi - 3} \dot{A}^2 - \frac{27(\xi - 6)^2}{(4\xi - 6)(\xi - 3)^2} \dot{A}^2 \right], \quad (5.9)$$

donde $\xi = 3 + \sqrt{9 - 12\varepsilon A^6}$. Aplicando las condiciones iniciales la constante

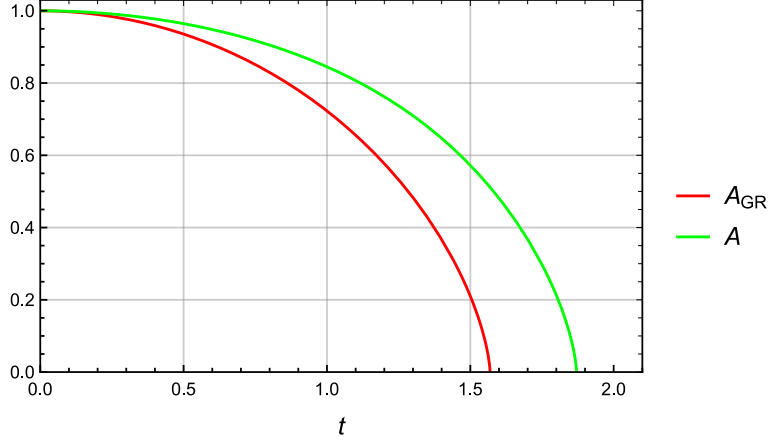


Figura 3: Comparación entre resultados en Relatividad General y en Palatini R^{-1} con $\varepsilon = -2$.

k queda como

$$k = \frac{27 - 66\varepsilon + (9 - 4\varepsilon)\sqrt{9 - 12\varepsilon}}{54 - 96\varepsilon}. \quad (5.10)$$

De nuevo, valores de ε negativos evitan la aparición de raíces complejas y denominadores que se anulan. Esta vez, un cambio de convenio en el tensor de Riemann no cambiaría el signo apropiado de ε , pues $1/R$ es una función impar de R , al contrario que R^2 . Los resultados en este modelo se muestran en la figura 3.

5.3. Modelo 3: $f(R) = R + \lambda R_0 \left[\left(1 + \frac{R^2}{R_0^2}\right)^{-n} - 1 \right]$

Este es el conocido modelo propuesto por Starobinsky en [16] como candidato de energía oscura. Para que el modelo sea viable, R_0 debe ser del orden de la constante cosmológica observada (aunque nosotros haremos las representaciones con otros valores por motivos didácticos). Aclaremos que este R_0 es un parámetro del modelo, no el valor inicial del escalar de curvatura. Por simplicidad consideraremos el modelo con $n = 1$.

La ecuación de la traza para este modelo lleva a

$$\left[\frac{R^2}{R^2 + R_0^2} \right]^2 = \frac{R + 3/A^3}{2\lambda R_0}. \quad (5.11)$$

Esta ecuación es de grado 5 en R y no se puede encontrar una fórmula explícita de R en términos de A . El tratamiento numérico es además muy intensivo en recursos. Por ello vamos a hacer la aproximación $(R^2 + R_0^2)^2 = R^4 + 2R_0^2R^2 + R_0^4 \approx R^4 + 2R_0^2R^2$. Esto convierte a (5.11) en una ecuación cúbica en R , con una solución real (y dos complejas) y exacta en términos de A . La expresión de esa solución es demasiado larga para escribir en un documento, por lo que expresaremos las ecuaciones en términos de R , entendiendo que debe sustituirse por esa expresión para el cálculo numérico de las soluciones.

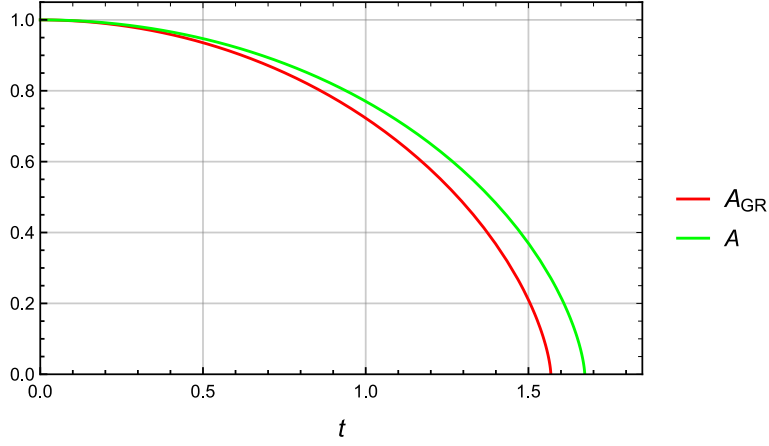


Figura 4: Comparación entre Relatividad General y Palatini con el modelo de Starobinsky, con $\lambda = -5$ y $R_0 = 0,1$.

Las funciones relevantes son por tanto

$$f = R - \lambda R_0 \frac{R^2}{R^2 + R_0^2} \quad (5.12)$$

$$f_R = 1 - 2\lambda R_0^3 \frac{R}{(R^2 + R_0^2)^2} \quad (5.13)$$

$$\dot{f}_R = 2\lambda R_0^3 \dot{R} \frac{3R^2 - R_0}{(R^2 + R_0^2)^3}, \quad (5.14)$$

y la ecuación (4.13) queda como

$$\begin{aligned} \dot{A}^2 = & -k + \frac{(R^2 + R_0^2)^2 - 2\lambda R_0^3 R}{(R^2 + R_0^2)^2} \left\{ \frac{3 - A^3 R}{6A} + \frac{\lambda A^2 R_0}{6} \frac{R^2}{R^2 + R_0^2} \right. \\ & \left. - 2\lambda A \dot{A} R_0^3 \dot{R} \frac{3R^2 - R_0^2}{(R^2 + R_0^2)^3} - \lambda A^2 R_0^6 \dot{R}^2 \frac{(3R^2 - R_0^2)^2}{(R^2 + R_0^2)^4 [(R^2 + R_0^2)^2 - 2\lambda R_0^3 R]} \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

El valor de k se obtiene como siempre aplicando las condiciones iniciales, pero no resulta particularmente esclarecedor escribir la expresión explícita. Los resultados de este modelo aparecen en la figura 4.

6. Conclusiones

Hemos visto como se desarrollan las teorías $f(R)$ de Palatini, y las hemos usado para resolver uno de los problemas clásicos en gravitación: el colapso gravitatorio. Aunque los modelos $f(R)$ se han propuesto para explicar otro tipo de observaciones, para que sean viables deben dar resultados similares para los tiempos de colapso. Comprobar que esto es así es indispensable, pues estas teorías, aun con valores pequeños para sus parámetros, pueden resultar en cambios muy significativos para el universo a gran escala.

El problema analizado ha sido el de una estrella de polvo esféricamente simétrica y homogénea. Obviamente las estrellas reales se desvían bastante de esta idealización, particularmente por el papel que juega la presión en la estabilidad de estos objetos. Aun así, el estudio del problema idealizado da una idea de cómo son las correcciones.

En ese sentido, los resultados encontrados son los esperados: los tiempos de colapso se desvían ligeramente de la Relatividad General, y cuanto más pequeños sean los parámetros, menos se desvían. No hay ningún cambio fundamental, como sí ocurre al considerar el universo a gran escala, donde estas teorías pueden predecir una expansión acelerada o un periodo inflacionario.

De los gráficos individuales cuesta apreciar las diferencias cualitativas entre los diversos modelos, por lo que es de ayuda recopilarlos en un solo gráfico, representado en la figura 5. Incluso ajustando los parámetros para que el tiempo de colapso sea el mismo, los modelos exhiben comportamientos

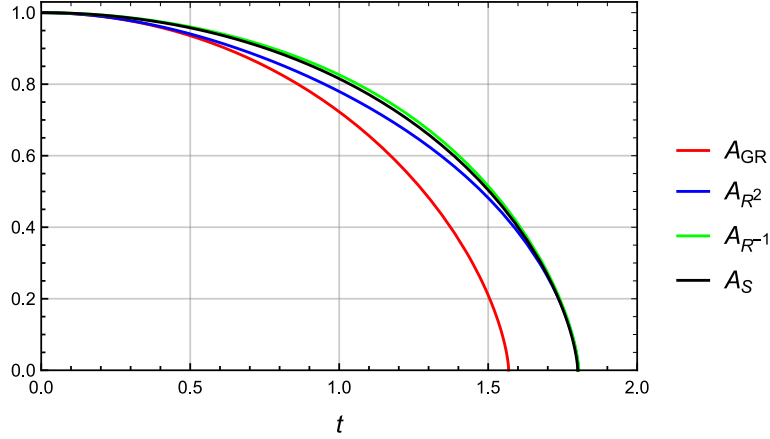


Figura 5: Comparación entre la Relatividad General y los diferentes modelos que hemos visto. Los parámetros en este caso son $\varepsilon = -0,582$ para el modelo con R^2 , $\varepsilon = -1,48$ para R^{-1} , y $\lambda = -10, R_0 = 0,1$ para el de Starobinsky.

diferentes, aunque todos predicen tiempos de colapso más grandes.

El modelo con R^{-1} es el que más rápido se separa de la Relatividad General, presentando menos contracción gravitatoria en los primeros instantes, y alcanzando a los otros modelos más tarde. El modelo con R^2 se comporta de manera opuesta, adhiriéndose a la curva de la Relatividad General durante casi un cuarto del tiempo de colapso, y luego disminuyendo la contracción más rápidamente que los otros modelos. El modelo de Starobinsky presenta un comportamiento intermedio. Se acerca mucho al de R^{-1} , aunque con una contracción ligeramente mayor en todos los instantes de tiempo.

La relevancia de estos resultados es limitada, pues nuestras observaciones no captan directamente el colapso de estrellas o nubes de polvo. No obstante, pueden tener relevancia en el tiempo de formación de estos objetos y de estructuras en general, ya que estos procesos de aglutinamiento pueden considerarse como parte de un colapso. Por tanto, podría haber consecuencias en la densidad de estrellas u otras estructuras que observamos. Además, estos resultados contribuyen a la comprensión de la formación de singularidades en gravitación, y por tanto al entendimiento de las propias singularidades.

Bibliografía

- [1] Luis J. Garay. *Notas de Relatividad General*. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Físicas. 2020.
- [2] Charles W. Misner, Kip S. Thorne y John Archibald Wheeler. *Gravitation*. 1973.
- [3] Pankaj S. Joshi. *Gravitational Collapse and Spacetime Singularities*. 2007.
- [4] J.R. Oppenheimer y H. Snyder. *On continued gravitational contraction*. 1939.
- [5] Gonzalo J. Olmo. *Palatini Approach to Modified Gravity: $f(R)$ Theories and Beyond*. 2011. URL: <https://arxiv.org/pdf/1101.3864.pdf>.
- [6] J.A.R. Cembranos, A. de la Cruz-Dombriz y B. Montes Núñez. *Gravitational collapse in $f(R)$ theories*. 2012. URL: <https://arxiv.org/pdf/1201.1289.pdf>.
- [7] Adrián Casado-Turrión, Antonio Dobado y Álvaro de la Cruz-Dombriz. *Is gravitational collapse possible in $f(R)$ gravity?* 2022. URL: <https://arxiv.org/pdf/2202.04439.pdf>.
- [8] Christopher P. L. Berry y Jonathan R. Gair. «Linearized $f(R)$ gravity: Gravitational radiation and Solar System tests». En: *Phys. Rev. D* 83.104022 (2011).
- [9] A.A. Starobinsky. «A new type of isotropic cosmological models without singularity». En: *Phys. Lett. B* 91 (1980), págs. 99-102.
- [10] J.A.R. Cembranos. *Dark matter from R^2 -gravity*. 2008. URL: <https://arxiv.org/pdf/0809.1653.pdf>.
- [11] K. Dimopoulos, A. Karam, S. Sánchez López y E. Tomberg. *Palatini R^2 Quintessential Inflation*. 2022. URL: <https://arxiv.org/pdf/2206.14117.pdf>.
- [12] S.M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden y M.S. Turner. «Is cosmic speed-up due to new gravitational physics?» En: *Phys. Rev. D* 70.043528 (2004).
- [13] Dan N. Vollick. « $1/R$ Curvature Corrections as the Source of the Cosmological Acceleration». En: *Phys. Rev. D* 68.063510 (2003).
- [14] Eanna E. Flanagan. «Palatini form of $1/R$ gravity». En: *Phys. Rev. Lett.* 92.071101 (2004).

- [15] Dan N. Vollick. «On the viability of the Palatini form of $1/R$ gravity». En: *Class. Quant. Grav.* 21.2813 (2004).
- [16] A.A. Starobinsky. «Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity». En: *JETP Lett.* 86 (2007), págs. 157-163.