



## **TRABAJO FIN DE MÁSTER**

Máster en Física

**Kinks vibrantes en una teoría de campos escalares de dos componentes:  
Interacción entre modos de vibración**

**Autor:**

*David Miguélez Caballero*

**Tutor/es:**

*Dr. Alberto Alonso Izquierdo*

*Dr. Luis Miguel Nieto Calzada*

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El modelo MSTB: kinks y estabilidad lineal</b>	<b>3</b>
2.1. Estabilidad lineal del kink . . . . .	6
2.1.1. Modos vibracionales longitudinales . . . . .	6
2.1.2. Modos vibracionales ortogonales . . . . .	7
2.1.3. Estructura del espectro vibracional . . . . .	7
<b>3. Análisis perturbativo</b>	<b>8</b>
3.1. Método de Manton y Merabet . . . . .	9
3.1.1. Radiación del canal longitudinal . . . . .	10
3.1.2. Radiación del canal ortogonal . . . . .	11
3.1.3. Ley de decaimiento para la amplitud del modo discreto ortogonal . . . . .	13
3.2. Método de Oxtoby y Barashenkov . . . . .	14
3.2.1. Aproximación de orden cero . . . . .	14
3.2.2. Aproximación de primer orden . . . . .	15
3.2.3. Aproximación de segundo orden . . . . .	15
3.2.4. Aproximación de tercer orden . . . . .	17
3.2.5. Aproximación de cuarto orden . . . . .	19
3.3. Comparación entre ambas teorías de perturbaciones . . . . .	20
<b>4. Comparación con simulaciones numéricas</b>	<b>21</b>
4.1. Configuración inicial del sistema . . . . .	21
4.2. Espectro de frecuencias para distintos puntos de la recta real . . . . .	22
4.3. Comparación de la dependencia de las amplitudes de radiación con $\sigma$ . . . . .	25
<b>5. Conclusiones</b>	<b>26</b>
<b>A. Anexo: Resolución general a una ecuación diferencial homogénea con coeficientes que incluyen funciones hiperbólicas</b>	<b>27</b>
<b>Referencias</b>	<b>28</b>

# Kinks vibrantes en una teoría de campos escalares de dos componentes: Interacción entre modos de vibración

## Abstract

Throughout the present work we will study how a kink, which has been initially excited in one of its vibration modes, evolves. The kink under study will be the simplest one that arises in the two component MSTB scalar field theory. In order to carry out this analysis, two different perturbation theories will be used, which will allow us to find out that the system emits radiation at three different frequencies. In addition, we will be able to verify these results comparing them with the radiation spectra obtained by means of numerical simulations.

## Resumen

A lo largo del presente trabajo estudiaremos la evolución de un kink que inicialmente se encuentra excitado mediante uno de sus modos de vibración. El kink en cuestión se trata del que posee una estructura más simple de todos los que surgen de la familia uniparamétrica de teorías de campos escalares de dos componentes MSTB. Para llevar a cabo este análisis, se hará uso de dos teorías de perturbaciones diferentes, las cuales nos permitirán concluir que el sistema emite radiación a tres frecuencias distintas. Además, verificaremos la validez de los resultados analíticos comparándolos con los espectros de radiación obtenidos mediante simulaciones numéricas.

## 1. Introducción

Los defectos topológicos han jugado un papel fundamental en diversas disciplinas en los últimos años [1, 2]. Como ejemplo, podemos citar su uso en la descripción de transiciones de fase en cosmología [3, 4], superconductividad en materia condensada [5], plegamiento de proteínas [6, 7] o sistemas moleculares [8, 9]. De todos los tipos de defectos topológicos existentes, vamos a centrar nuestra atención en los kinks, un tipo de soluciones estáticas de las ecuaciones de campo, cuya particularidad reside en que conectan soluciones de vacío de la teoría bajo estudio<sup>1</sup>. Para su existencia, es fundamental la presencia de dos o más vacíos en el potencial en cuestión. El método de Bogomolny nos permite identificar las ecuaciones diferenciales de primer orden que caracterizan este tipo de soluciones [1, 10, 11].

Dos modelos que se encuentran de forma frecuente en la literatura y que podemos mencionar son el modelo seno-Gordon y el modelo  $\phi^4$ . En el caso del modelo seno-Gordon, éste presenta un conjunto infinito de vacíos en su potencial y tiene la particularidad de ser un sistema integrable. Como curiosidad, podemos mencionar que los procesos de scattering de estas soluciones solitónicas son elásticos y son ampliamente usados para describir señales que viajan por fibra óptica [12–14]. Por contra, el modelo  $\phi^4$  está regido por un potencial  $U(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2$ , el cual posee únicamente dos vacíos y presenta soluciones de tipo defecto topológico como kinks que pueden ser expresados como  $\phi_K(x) = \pm \tanh(x - x_0)$ . Esta última teoría constituye un sistema no integrable, en la cual, cabe destacar que los procesos de scattering entre kinks no son elásticos. De hecho, presentan una estructura fractal en el diagrama que representa la velocidad final frente a la velocidad de choque

---

<sup>1</sup>A partir de ahora denotaremos al conjunto de soluciones de vacío como  $\mathcal{V}$ .

en la cual, además, se pueden apreciar procesos en los que los kinks *rebotan*  $n$  veces antes de alejarse [15–17].

Centrándonos más en el modelo  $\phi^4$ , en los citados procesos de scattering se han observado mecanismos de transferencia de energía por los cuales, parte de la energía del sistema se transformaba en radiación o iba destinada a excitar modos discretos de vibración. En particular, en las Referencias [18–20] se encontró, mediante uso de dos teorías de perturbaciones distintas, que un kink que inicialmente se encuentra excitado en su modo discreto de vibración emite radiación a una frecuencia que resulta ser exactamente el doble de su frecuencia natural de vibración. Estos análisis resultan de gran importancia, pues en los procesos de scattering es muy habitual la aparición de estas configuraciones, usualmente llamadas *wobblers*.

A lo largo del presente trabajo, analizaremos uno de los kinks que surge en la familia uniparamétrica de modelos Montonen-Sarker-Trullinger-Bishop (MSTB). Esta teoría constituye una generalización del modelo  $\phi^4$ , pues, como veremos más tarde, si anulamos la segunda componente del campo, obtenemos exactamente las mismas magnitudes que surgían en el mencionado modelo. La familia de modelos MSTB ha sido objeto de estudio por parte de muchos autores en las últimas décadas [21–34] y su hallazgo puede ser situado en 1976 cuando Montonen la descubre al buscar solitones cargados en teorías de campos escalares complejos con simetría  $U(1)$ . Más tarde, a finales de ese mismo año, Sarker, Trullinger y Bishop realizan un primer análisis de la estabilidad de los kinks que proporciona el modelo en base a argumentos energéticos. En 1979, Rajaraman encontró un kink no topológico para un valor concreto del parámetro de acople entre campos del que depende la teoría, aunque dos años más tarde, Subbaswamy y Trullinger encontraron numéricamente que este kink era miembro de una familia uniparamétrica de kinks no topológicos. A partir de 1998, se encontraron generalizaciones y extensiones de esta teoría las cuales consisten en deformaciones de modelos  $O(N)$  sigma lineales [21].

Una particularidad del modelo MSTB consiste en que los kinks del modelo  $\phi^4$  se encuentran embebidos dentro de la primera componente de uno de los kinks que surgen en la ya citada familia de teorías de campos. Es más, esta solución de las ecuaciones de campo en particular será la que analizaremos en el presente trabajo. Para ser más precisos, el estudio que llevaremos a cabo en las siguientes secciones consistirá en usar los métodos introducidos por Manton y Merabet en [18] y por Oxtoby y Barashenkov en [19, 20] para tratar de analizar como se comporta el ya mencionado kink cuando uno de sus modos de vibración se encuentra inicialmente excitado. Todo el análisis previamente mencionado ha dado lugar al desarrollo del artículo que puede encontrarse en la Referencia [35] y en el cual se explora de forma más extensa todo lo relativo a resultados y simulaciones numéricas que en este trabajo discutiremos de forma más breve.

La organización que seguirá el presente trabajo es la siguiente: en la Sección 2 presentaremos las ecuaciones de campo correspondientes al modelo MSTB y hablaremos de la estabilidad de las soluciones estáticas a dichas ecuaciones. Además, a través de un análisis perturbativo en primer orden, analizaremos la estabilidad del kink más sencillo de la teoría, obteniendo también las autofunciones correspondientes a todos los modos de vibración. En la Sección 3, usaremos dos teorías de perturbaciones distintas para analizar como se comporta el kink cuando es excitado en uno de sus modos de vibración. Encontraremos la existencia de términos radiativos y que éstos dependen del parámetro  $\sigma$ , el cual hace su aparición en el potencial de la teoría. Más tarde, en esta misma Sección, haremos una comparación de ambas teorías de perturbaciones analizando las similitudes y diferencias encontradas. Posteriormente, en la Sección 4, analizaremos como las simulaciones numéricas realizadas en base a las ecuaciones de campo se corresponden con las predicciones teóricas llevadas a cabo en Secciones anteriores. El trabajo finaliza con unas conclusiones y un Anexo en el cual se dan algunos detalles técnicos relacionados con los desarrollos analíticos.

## 2. El modelo MSTB: kinks y estabilidad lineal

A lo largo de esta sección, presentaremos y analizaremos el kink más sencillo de todos los que surgen del modelo MSTB, pues es el único con el que podemos hacer un tratamiento analítico de forma exitosa. La obtención de esta solución además de toda la familia de kinks que este modelo presenta se puede ver con detenimiento en la Referencia [21].

Esta familia de modelos de campos escalares reales de dos componentes está gobernada por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_\ell \partial^\mu \phi_\ell - U(\phi_1, \phi_2), \quad (2.1)$$

donde

$$U(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} \left( \phi_1^2 + \phi_2^2 - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 \phi_2^2, \quad (2.2)$$

siendo  $\sigma$  un parámetro real positivo y donde hemos usado el convenio de sumación de Einstein para los índices griegos del espacio-tiempo y también para el espacio interno. La métrica de Minkowski en este contexto es tomada como  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ .

Como ya hemos mencionado en la Introducción del presente documento, las soluciones tipo kink en teorías de campos tienen la particularidad de que en los límites  $x \rightarrow \pm\infty$ , éstas toman el valor de las soluciones de vacío de la teoría con la que se esté trabajando. Es por ello, que vamos primero a analizar los puntos críticos que presenta el potencial asociado al modelo MSTB, a partir de lo cual obtendremos el conjunto  $\mathcal{V}$  de soluciones de vacío.

Primero, vamos a calcular las derivadas del potencial (2.2) respecto de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , tras lo cual, igualando estas cantidades a cero llegamos al sistema

$$\begin{cases} 2\phi_1 (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) & = 0, \\ \phi_2 (2(\phi_1^2 + \phi_2^2 - 1) + \sigma^2) & = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

cuyas soluciones son

$$(\phi_1, \phi_2) = \begin{cases} (0, 0), \\ (1, 0), \\ (-1, 0), \\ (0, \sqrt{\frac{2-\sigma^2}{2}}), \\ (0, -\sqrt{\frac{2-\sigma^2}{2}}). \end{cases} \quad (2.4)$$

Para este potencial, la matriz hessiana va a tomar la forma

$$H_U = \begin{pmatrix} 2(-1 + 3\phi_1^2 + \phi_2^2) & 4\phi_1\phi_2 \\ 4\phi_1\phi_2 & 2(-1 + 3\phi_2^2 + \phi_1^2) + \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

y su determinante

$$\det(H_U) = 2 \left( 6\phi_1^4 + (-1 + \phi_2^2)(-2 + 6\phi_2^2 + \sigma^2) + \phi_1^2(-8 + 12\phi_2^2 + 3\sigma^2) \right). \quad (2.6)$$

Con estas cantidades podemos hacer la clasificación mostrada en la Tabla 1.

Punto	$\det(H_U)$	$U_{\phi_1\phi_1}$	Tipo de punto
$(0, 0)$	$2(2 - \sigma^2)$	$-2$	$\sigma > \sqrt{2}$ : Punto de silla; $\sigma < \sqrt{2}$ : Máximo
$(1, 0)$	$4\sigma^2$	$4$	Mínimo
$(-1, 0)$	$4\sigma^2$	$4$	Mínimo
$(0, \sqrt{\frac{2-\sigma^2}{2}})$	$2\sigma^2(-2 + \sigma^2)$	$-\sigma^2$	$\sigma < \sqrt{2}$ : Punto de silla
$(0, -\sqrt{\frac{2-\sigma^2}{2}})$	$2\sigma^2(-2 + \sigma^2)$	$-\sigma^2$	$\sigma < \sqrt{2}$ : Punto de silla

Tabla 1: Carácter de los puntos críticos del potencial  $U(\phi_1, \phi_2)$ .

Según podemos apreciar, el valor de  $\sigma$  dicta el carácter de los puntos, pues para  $\sigma > \sqrt{2}$  los últimos dos puntos críticos dejan de existir y el primero pasa de ser un máximo a ser un punto de silla. Esta es una de las razones por las que a partir de ahora, la constante  $\sigma$  jugará un papel fundamental a lo largo de todos los desarrollos que realicemos. En la Figura 1 podemos apreciar una representación gráfica para este potencial y sus puntos críticos correspondientes.

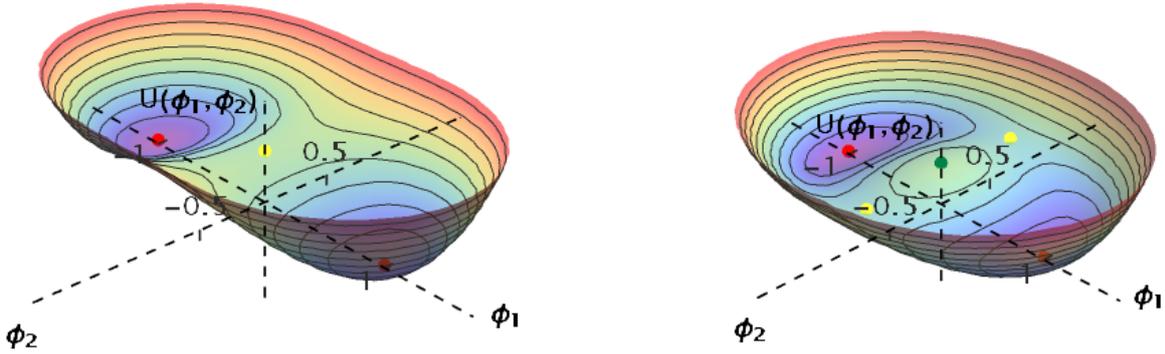


Figura 1: Representación gráfica del potencial  $U(\phi_1, \phi_2)$  para  $\sigma = 1,5$  (izquierda) y  $\sigma = 1$  (derecha). Los máximos, mínimos y puntos de silla están representados en verde, rojo y amarillo, respectivamente.

De todos los puntos críticos existentes, solo  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  cumplen  $U(\phi_1, \phi_2) = 0$ , es decir, forman el conjunto  $\mathcal{V}$  de las soluciones de vacío para este modelo.

Ahora, haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange y teniendo en cuenta la densidad lagrangiana obtenemos que las ecuaciones de campo asociadas a nuestro modelo son

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = 2\phi_1(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = 2\phi_2\left(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \frac{1}{2}\sigma^2\right). \quad (2.8)$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) determinan el conjunto de todas las soluciones de la teoría, en particular, las de tipo defecto topológico. Como ya hemos mencionado anteriormente, este modelo presenta una

rica variedad de soluciones tipo kink. En el régimen  $\sigma > 1$  (al cual nos restringiremos en la presente Sección) toda esta variedad se reduce a un único kink dado por la siguiente expresión:

$$K_{\pm}(x) = (\pm \tanh(x - x_0), 0)^{\top} = (\pm \phi_K(x - x_0), 0)^{\top}. \quad (2.9)$$

donde  $\top$  se usa para identificar la trasposición.

Según podemos ver en (2.9), este kink presenta invariancia traslacional, es decir, es posible trasladar su centro a un punto  $x_0$  y que éste siga siendo una solución válida de las ecuaciones de campo (2.7) y (2.8). Por otro lado, podemos apreciar en la Figura 2 la forma gráfica que toma cada componente del kink estudiado en este trabajo (centrado en  $x_0 = 0$ ), así como la densidad de energía correspondiente, la cual, al ser la segunda componente del campo nula, será igual a la que se obtiene de los kinks del modelo  $\phi^4$ . La energía se encuentra localizada en torno a un único punto, lo cual permite la interpretación de estas soluciones como partículas extensas.

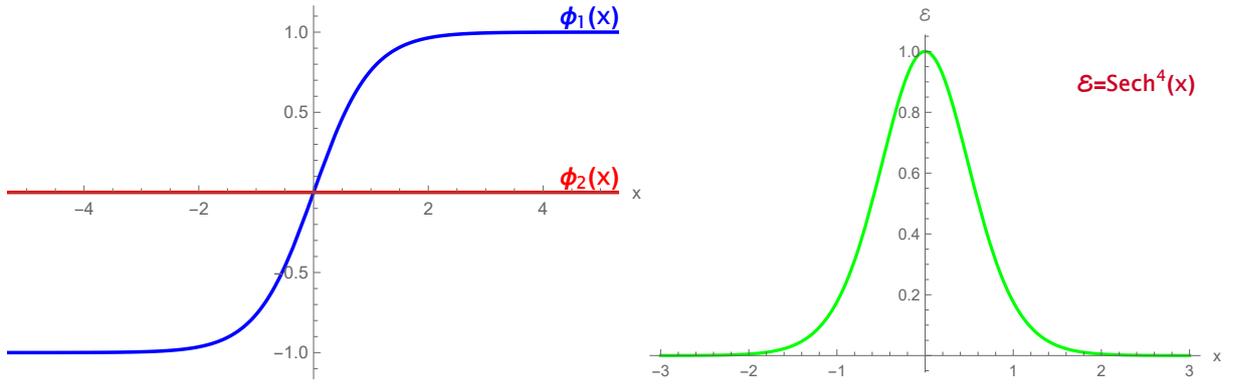


Figura 2: A la izquierda representación gráfica de ambas componentes del kink y a la derecha representación de su densidad de energía correspondiente.

Ahora, si tenemos en cuenta la expresión dada en la fórmula (2.9), entonces

$$K_{\pm}(\pm\infty) = (\pm 1, 0),$$

es decir, el kink conecta los dos vacíos del potencial. Es posible ver este hecho reflejado en la representación gráfica de la Figura 3, en la que se dibuja la órbita del kink en el plano interno formado por las componentes del campo escalar  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Puede verse que se trata de un segmento rectilíneo que une los puntos  $(\pm 1, 0)$ .

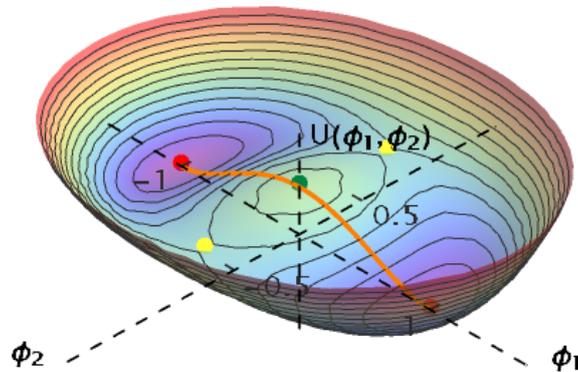


Figura 3: Representación gráfica del kink (línea naranja) sobre el potencial  $U(\phi_1, \phi_2)$ .

## 2.1. Estabilidad lineal del kink

Antes de realizar un análisis de la estabilidad lineal del kink en cuestión, es importante mencionar que la razón fundamental por la que trabajamos en  $(1 + 1)$  dimensiones se debe a que el teorema de Derrick nos garantiza que todas las soluciones estáticas de las ecuaciones de campo en teoría de campos escalares (a excepción de las soluciones de vacío) son inestables en más de una dimensión espacial [1]. Como veremos de este análisis, en una única dimensión espacial podemos tener kinks estables, aunque el teorema de Derrick no implica que esto se tenga que cumplir siempre. Ahora pasemos a estudiar la estabilidad de (2.9), para ello, vamos a introducir en las ecuaciones de campo la solución

$$\tilde{K}(x, t; \omega, a) = K_{\pm}(x) + ae^{i\omega t} F_{\omega}(x), \quad (2.10)$$

donde  $a$  es una constante real cuyo valor consideramos muy pequeño.

Si sustituimos (2.10) en las ecuaciones de campo (2.7) y (2.8) y despreciamos los términos de segundo orden llegamos al problema espectral

$$\mathcal{H}F_{\omega}(x) = \omega^2 F_{\omega}(x), \quad (2.11)$$

donde  $\mathcal{H}$  es el operador dado por

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + 4 - 6 \operatorname{sech}^2(x) & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + \sigma^2 - 2 \operatorname{sech}^2(x) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

De este problema espectral, es fácil ver que para que el kink sea estable es completamente necesario que  $\omega^2$  sea una cantidad positiva, pues si no la exponencial compleja que aparece en (2.10) se convertiría en una exponencial real que, o bien diverge, o bien se anula a medida que aumenta el tiempo. La resolución de las ecuaciones (2.11) y (2.12) se corresponde con la búsqueda de autovalores y autofunciones para dos problemas tipo Schrödinger con un potencial tipo Pöschl-Teller.<sup>2</sup> Como estas dos ecuaciones diferenciales en (2.11) están desacopladas, podemos analizar cada problema por separado. Cabe destacar que, a partir de ahora, llamaremos a los modos de vibración del primer campo, modos longitudinales, y a los del segundo campo, modos ortogonales, como parece natural teniendo presente que la órbita del kink está asentada en el eje  $\phi_1$ .

### 2.1.1. Modos vibratoriales longitudinales

Para resolver este problema espectral, hemos de obtener soluciones para la primera componente de las ecuaciones en (2.11) y (2.12). La primera de las soluciones encontradas viene asociada a una frecuencia de vibración  $\omega = 0$  y su autofunción es

$$\bar{F}_0(x) = (\operatorname{sech}^2(x), 0)^{\top}. \quad (2.13)$$

Al tener este modo vibracional una frecuencia nula, se corresponde con un modo de traslación, de hecho es fácil comprobar que  $\frac{d\phi_K(x)}{dx} = \bar{F}_0(x)$ . Este modo se conoce con el nombre de modo cero.

Por otro lado, existe también un modo vibracional discreto con  $\bar{\omega} = \sqrt{3}$ , cuya autofunción viene dada por

$$\bar{F}_{\sqrt{3}}(x) = (\bar{\eta}_D, 0)^{\top} = (\operatorname{sech}(x) \tanh(x), 0)^{\top}, \quad (2.14)$$

---

<sup>2</sup>Este tipo de ecuaciones diferenciales será muy recurrentes de ahora en adelante, es por ello que dejamos en el Apéndice A su resolución de forma general.

cuya máxima vibración ocurre en

$$x = \pm \operatorname{arcosh}(\sqrt{2}).$$

Finalmente, es importante destacar que este problema presenta un espectro continuo de frecuencias, cuyo valor viene dado por  $\bar{\omega}_q = \sqrt{4 + q^2}$  y cuyas autofunciones correspondientes son

$$\bar{F}_{\sqrt{4+q^2}}(x) = \left( \bar{\eta}_q(x), 0 \right)^\top = \left( (-1 - q^2 + 3 \tanh^2(x) - 3iq \tanh x) e^{iqx}, 0 \right)^\top, \quad (2.15)$$

siendo  $q$  una cantidad real cualquiera. De (2.15) notamos que el comportamiento asintótico de esta función se corresponderá con el de un término radiativo, pues en  $x \rightarrow \pm\infty$  su comportamiento es el de una onda plana que viaja en la primera componente del campo  $\phi$ .

Hemos de resaltar que estas mismas autofunciones y frecuencias aparecían ya en el modelo  $\phi^4$ , lo cual es de esperar, pues nuestro modelo lo generaliza.

### 2.1.2. Modos vibratoriales ortogonales

En este caso, tendremos que resolver la segunda de las ecuaciones en (2.11)-(2.12). El primero de los modos vibratoriales se corresponde con una frecuencia discreta de valor  $\hat{\omega} = \sqrt{\sigma^2 - 1}$ , cuya autofunción es

$$\hat{F}_{\sqrt{\sigma^2-1}}(x) = \left( 0, \hat{\eta}_D(x) \right)^\top = \left( 0, \operatorname{sech} x \right)^\top, \quad (2.16)$$

y cuya máxima amplitud de vibración ocurre en  $x = 0$ .

Un detalle fundamental que ha de ser notado en esta frecuencia es que, si  $0 < \sigma < 1$ , entonces  $\hat{\omega}^2 < 0$ . Esto provoca que la frecuencia de vibración se vuelva imaginaria, haciendo que el kink sea inestable en este régimen. Es por ello que, tal y como hemos mencionado anteriormente, trabajaremos siempre suponiendo  $\sigma > 1$ .

Al igual que con el campo longitudinal, aquí también podemos encontrar un espectro continuo de frecuencias cuya expresión concreta es  $\hat{\omega}_q = \sqrt{q^2 + \sigma^2}$ . En cuanto a las autofunciones correspondientes, éstas toman la forma

$$\hat{F}_{\sqrt{q^2+\sigma^2}}(x) = \left( 0, \hat{\eta}_q(x) \right)^\top = \left( 0, (q + i \tanh(x)) e^{iqx} \right)^\top. \quad (2.17)$$

En este rango de frecuencias, de forma similar a lo que ocurría en la Sección 2.1.1, se emitiría radiación.

### 2.1.3. Estructura del espectro vibracional

En la Figura 4 podemos apreciar el espectro para ambas componentes del campo en el cual se encuentra el valor de las distintas frecuencias obtenidas en las Secciones 2.1.1 y 2.1.2 como función de la constante de acople  $\sigma$ . También se han incluido algunas combinaciones de estas frecuencias (marcadas con líneas discontinuas) ya que en las siguientes Secciones van a cobrar especial importancia. La inclusión de estas últimas frecuencias nos permite distinguir dos valores de importancia para  $\sigma$ :

- $\sigma_1 = \sqrt{2}$ : Para rangos  $\sigma > \sigma_1$  vemos que en el primer campo ocurre que  $2\hat{\omega} > \bar{\omega}_c$ , es decir, el doble de la frecuencia  $\hat{\omega}$  se encuentra incluido dentro del espectro continuo. En el caso en el que  $\sigma < \sigma_1$ ,  $2\hat{\omega}$  ya no se encontraría dentro del espectro continuo y, por tanto, no podremos encontrar radiación con esta frecuencia. A lo largo de las próximas secciones trabajaremos únicamente en el rango  $\sigma > \sigma_1$ .

- $\sigma_2 = \frac{\sqrt{7}}{2}$ : Justo para este valor de  $\sigma$  se verifica que  $2\hat{\omega} = \bar{\omega}$ . También se satisfacen las relaciones  $3\hat{\omega} = \bar{\omega} + \hat{\omega}$  y  $\hat{\omega} = \bar{\omega} - \hat{\omega}$ . Como veremos más adelante,  $\sigma_2$  será particularmente importante debido a que algunas de las amplitudes de la radiación que surgen al llevar el análisis perturbativo a segundo y tercer orden presentan divergencias justo en este valor en concreto para  $\sigma$ .

Aunque  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  resultarán de importancia a lo largo de todo el presente documento, cabe destacar también que, para  $\sigma > \frac{3}{2\sqrt{2}}$ , la frecuencia  $3\hat{\omega}$  está también incluida dentro del espectro continuo de radiación del segundo campo, por tanto, se comportará también como radiación en este régimen. Por estos mismos argumentos, es posible también ver que para  $\bar{\omega} + \hat{\omega}$  la solución se comportará como radiación para todo valor de  $\sigma$ , por contra, para  $|\bar{\omega} - \hat{\omega}|$  se corresponderá con un término radiativo solo cuando  $\frac{2}{\sqrt{3}} > \sigma > 1$ .

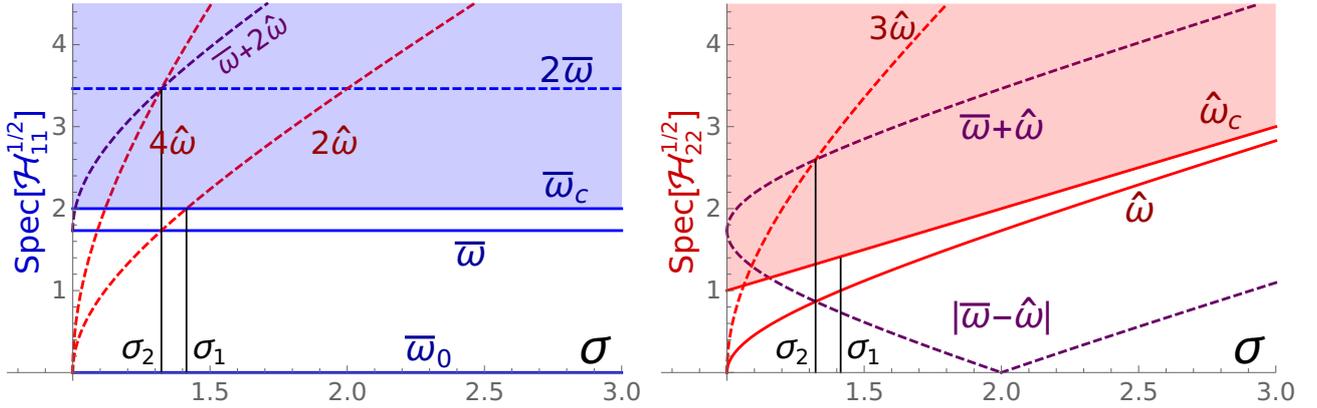


Figura 4: Autofrecuencias asociadas a (2.11)-(2.12) para fluctuaciones longitudinales (izquierda) y ortogonales (derecha) como función de  $\sigma$ . También se incluyen combinaciones de estas frecuencias (líneas discontinuas). Las partes sombreadas de ambas Figuras se corresponden con las zonas en las que se encuentra el espectro continuo de ambos campos.

### 3. Análisis perturbativo

A lo largo de la presente Sección haremos un análisis perturbativo de la solución (2.9) más allá de primer orden. Los desarrollos llevados a cabo a partir de ahora constituyen la parte más novedosa del presente trabajo, siendo todos los resultados obtenidos completamente originales. Como ya hemos mencionado anteriormente, para llevar a cabo el tratamiento perturbativo del kink bajo estudio primeramente usaremos los métodos introducidos por Manton y Merabet en [18]. En este artículo, se analiza el modelo  $\phi^4$ , los autores son capaces de estimar las frecuencias de la radiación emitida por el *wobbler* en esta teoría, obteniendo también por argumentos energéticos la ley de decaimiento para la amplitud del modo de vibración discreto del modelo. Aunque este procedimiento se introduce para el análisis de campos escalares de una única componente, a lo largo de la Sección 3.1 extenderemos su uso en modelos de varias componentes para calcular tanto las frecuencias de radiación en el modelo MSTB, así como las amplitudes correspondientes cuando excitamos el modo de vibración dado por la expresión (2.16). Seguidamente, realizaremos un segundo análisis, esta vez siguiendo el método introducido por Barashenkov y Oxtoby en [19, 20], el cual nos permite acercarnos al problema de manera más formal que con el método anteriormente mencionado. En ambos casos, encontraremos la aparición de radiación a frecuencias  $2\hat{\omega}$ ,  $\hat{\omega} + \bar{\omega}$  y  $3\hat{\omega}$ . La presencia de estas frecuencias contrasta con las que surgían en el modelo  $\phi^4$ , pues en esta última teoría aparecía un único término radiativo con frecuencia  $2\bar{\omega}$ , la cual va a ser sustituida en el presente análisis por  $2\hat{\omega}$ .

### 3.1. Método de Manton y Merabet

En este caso, vamos a escribir los campos como

$$\begin{aligned}\phi_1(x, t) &= \phi_K(x) + \bar{a}(t) \bar{\eta}_D(x) + \bar{\eta}(x, t), \\ \phi_2(x, t) &= \hat{a}(t) \hat{\eta}_D(x) + \hat{\eta}(x, t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $\phi_K(x)$ ,  $\bar{\eta}_D(x)$  y  $\hat{\eta}_D(x)$  son funciones descritas por las fórmulas (2.9), (2.14) y (2.16), respectivamente. En cuanto a las funciones  $\bar{\eta}(x, t)$  y  $\hat{\eta}(x, t)$ , vamos a considerar que nos proporcionan la forma de los términos radiativos del primer y segundo campo respectivamente.

Si introducimos (3.1) en las ecuaciones de campo (2.7) y (2.8) obtenemos para la primera componente

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_D(3\bar{a} + \bar{a}_{tt}) + \bar{\eta}_{tt} - \bar{\eta}_{xx} + \bar{\eta}(6\phi_K^2(x) - 2) + 6\bar{a}^2 \bar{\eta}_D^2 (\bar{\eta} + \Phi_K(x)) \\ + 6\bar{a} \bar{\eta} \bar{\eta}_D (\bar{\eta} + 2\phi_K(x)) + 2\bar{a}^3 \bar{\eta}_D^3 + 6\bar{\eta}^2 \phi_K(x) + 2\bar{\eta}^3 + 2\bar{\eta} \hat{\eta}^2 \\ + 2\bar{a} \hat{\eta}^2 \eta_D + 4\hat{a} \bar{\eta} \hat{\eta} \hat{\eta}_D + 4\bar{a} \hat{a} \hat{\eta} \bar{\eta}_D \hat{\eta}_D + 2\hat{a}^2 \bar{\eta} \hat{\eta}_D^2 \\ + 2\bar{a} \hat{a}^2 \bar{\eta}_D \hat{\eta}^2 + 2\hat{\eta}^2 \phi_K(x) + 4\hat{a} \hat{\eta} \hat{\eta}_D \phi_K(x) + 2\hat{a}^2 \hat{\eta}_D^2 \phi_K(x) = 0\end{aligned}\tag{3.2}$$

y para la segunda

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_D(\hat{a}_{tt} + (\sigma^2 - 1)\hat{a}) + (\sigma^2 - 2)\hat{\eta} + 2\bar{\eta}^2 \hat{\eta} + 2\hat{\eta}^3 + 4\bar{a} \bar{\eta} \hat{\eta} \bar{\eta}_D \\ + 2\hat{a}^2 \hat{\eta} \bar{\eta}_D^2 + 2\hat{a} \bar{\eta}^2 \hat{\eta}_D + 6\hat{a} \hat{\eta}^2 \hat{\eta}_D + 4\bar{a} \hat{a} \bar{\eta} \bar{\eta}_D \hat{\eta}_D \\ + 2\hat{a}^2 \hat{a} \bar{\eta}_D^2 \hat{\eta}_D + 6\hat{a}^2 \hat{\eta} \hat{\eta}_D^2 + 2\hat{a}^3 \hat{\eta}_D^3 + 4\bar{\eta} \hat{\eta} \phi_K(x) \\ + 4\bar{a} \hat{\eta} \bar{\eta}_D \phi_K(x) + 4\hat{a} \bar{\eta} \hat{\eta}_D \phi_K(x) + 4\bar{a} \hat{a} \bar{\eta}_D \hat{\eta}_D \phi_K(x) + 2\hat{\eta} \phi_K^2(x) + \hat{\eta}_{tt} - \hat{\eta}_{xx} = 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Como suponemos que las amplitudes  $\bar{a}$ ,  $\hat{a}$  son pequeñas y que los términos  $\bar{\eta}$ ,  $\hat{\eta}$  son aún más pequeños que las citadas amplitudes, vamos a considerar en (3.2) y (3.3) que los términos  $\bar{a}^3$ ,  $\eta a$ ,  $\eta^2 \dots$  son despreciables. Este razonamiento nos conduce a las siguientes ecuaciones aproximadas:

$$\bar{\eta}_D(3\bar{a} + \bar{a}_{tt}) + \bar{\eta}_{tt} - \eta_{xx} + \bar{\eta}(6\phi_K^2(x) - 2) + 6\bar{a}^2 \bar{\eta}_D^2 \phi_K(x) + 2\hat{a}^2 \bar{\eta}_D^2 \phi_K(x) \approx 0,\tag{3.4}$$

$$\hat{\eta}_D(\hat{a}_{tt} + (\sigma^2 - 1)\hat{a}) + \hat{\eta}_{tt} - \hat{\eta}_{xx} + (-2 + \sigma^2 + 2\phi_K^2(x)) \hat{\eta} + 4\bar{a} \hat{a} \bar{\eta}_D \hat{\eta}_D \phi_K(x) \approx 0.\tag{3.5}$$

Las proyecciones de (3.4) y (3.5) sobre  $\bar{\eta}_D$  y  $\hat{\eta}_D$  respectivamente nos conducen a su vez al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{cases} \bar{a}_{tt} + 3\bar{a} + \frac{9}{16} \pi \bar{a}^2 + \frac{3}{8} \pi \hat{a}^2 = 0, \\ \hat{a}_{tt} + (\sigma^2 - 1)\hat{a} + \frac{1}{4} \pi \bar{a} \hat{a} = 0. \end{cases}\tag{3.6}$$

El problema que queremos analizar consiste en averiguar qué ocurre cuando, inicialmente, excitamos únicamente el modo ortogonal, y saber cuál es el mecanismo de transferencia de energía entre los modos discretos y los términos de radiación. Bajo estas condiciones, y teniendo en cuenta el sistema (3.6), es lógico asumir que

$$\hat{a}(t) = \hat{a}_0 \sin(\hat{\omega} t) = \hat{a}_0 \sin(\sqrt{\sigma^2 - 1} t).\tag{3.7}$$

Por otro lado, está claro que  $\hat{a}$  es el causante de la excitación de  $\bar{a}$ . Si ahora resolvemos la primera de las ecuaciones (3.6) teniendo en cuenta (3.7), bajo las condiciones iniciales  $\bar{a}(0) = \bar{a}_t(0) = 0$ , se recupera como resultado

$$\bar{a}(t) = \frac{\pi \hat{a}_0^2}{16} \left[ -1 + \frac{4(\sigma^2 - 1)}{4\sigma^2 - 7} \cos(\sqrt{3}t) - \frac{3}{4\sigma^2 - 7} \cos(2\sqrt{\sigma^2 - 1} t) \right].\tag{3.8}$$

En lo que queda de desarrollo, vamos a separar los cálculos correspondientes a los dos campos en dos secciones distintas para así facilitar la lectura y comprensión del procedimiento utilizado.

### 3.1.1. Radiación del canal longitudinal

Si sustituimos la primera de las ecuaciones (3.6) en (3.4) obtenemos como resultado:

$$\bar{\eta}_{tt} - \eta_{xx} + (6\phi_K^2(x) - 2)\bar{\eta} + \left[6\bar{\eta}_D^2 \phi_K(x) - \frac{9}{16} \pi \bar{\eta}_D\right]\bar{a}^2 + \left[2\hat{\eta}_D^2 \phi_K(x) - \frac{3}{8} \pi \bar{\eta}_D\right]\hat{a}^2 = 0. \quad (3.9)$$

En esta última ecuación diferencial despreciaremos  $\bar{a}^2$ , ya que  $\bar{a}^2 \sim O(\hat{a}^4)$ . Por otro lado, en base a la fórmula (3.7), es fácil comprobar que

$$(\hat{a}(t))^2 = \frac{1}{2} \hat{a}_0^2 (1 - \cos(2\hat{\omega} t)) = \frac{1}{2} \hat{a}_0^2 \left(1 - \cos(2\sqrt{\sigma^2 - 1} t)\right). \quad (3.10)$$

La respuesta de  $\bar{\eta}$  al término fuente independiente del tiempo es en sí mismo independiente del tiempo, por lo que no llevará asociada energía vibracional. Esto nos lleva a concluir que la ecuación que gobierna la radiación en el canal longitudinal ha de ser

$$\bar{\eta}_{tt} - \bar{\eta}_{xx} + (6\phi_K^2(x) - 2)\bar{\eta} = f(x) e^{i2\hat{\omega}t}, \quad (3.11)$$

donde

$$f(x) = \frac{1}{2} \hat{a}_0^2 \left(2\hat{\eta}_D^2 \phi_K(x) - \frac{3}{8} \pi \bar{\eta}_D\right) = -\frac{1}{2} \hat{a}_0^2 \left(\frac{3}{8} \pi \operatorname{sech} x \tanh x - 2 \operatorname{sech}^2 x \tanh x\right). \quad (3.12)$$

Como podemos apreciar, hemos tomado exponenciales complejas en (3.11) para simplificar en la medida de lo posible las siguientes operaciones. En verdad, para ser precisos y consistentes con el procedimiento, tendremos que tomar la parte real de las soluciones al final del cálculo, lo cual no afecta en absoluto al resultado.

Bajo estas circunstancias, es lógico asumir que

$$\bar{\eta}(x, t) = \bar{\eta}(x) e^{i2\hat{\omega}t}, \quad (3.13)$$

Si ahora sustituimos (3.13) en (3.11) obtenemos como resultado:

$$-\bar{\eta}''(x) + [-2 + 6\phi_K^2(x) - 4\hat{\omega}^2]\bar{\eta}(x) = f(x). \quad (3.14)$$

Las soluciones de la ecuación homogénea asociada a (3.14) ya han sido dadas en la Sección 2.1.1, y éstas son

$$\begin{cases} \bar{\eta}_{q_1}(x) = e^{iq_1x} (-1 - q_1^2 + 3\phi_K^2(x) - 3iq_1 \phi_K(x)), \\ \bar{\eta}_{-q_1}(x) = e^{-iq_1x} (-1 - q_1^2 + 3\phi_K^2(x) + 3iq_1 \phi_K(x)), \end{cases} \quad (3.15)$$

donde  $q_1 = \sqrt{(2\hat{\omega}^2 - 4)} = 2\sqrt{\sigma^2 - 2}$ . Como ya hemos mencionado anteriormente, nos vamos a restringir al rango  $\sigma > \sigma_1$ , en el cual la radiación asociada a  $2\hat{\omega}$  está incluida dentro del espectro continuo de radiación del primer campo, y en cual también nos aseguramos de que  $q_1$  sea siempre una cantidad real.

Teniendo ahora en cuenta que el wronskiano asociado a las soluciones (3.15) es

$$\bar{W}_{q_1} = W[\bar{\eta}_{q_1}(x), \bar{\eta}_{-q_1}(x)] = -2iq_1(q_1^2 + 1)(q_1^2 + 4), \quad (3.16)$$

el método de variación de constantes nos permite dar como solución a (3.14) la siguiente función:

$$\bar{\eta}(x) = -\frac{\bar{\eta}_{-q_1}(x)}{\bar{W}_{q_1}} \int_{-\infty}^x \bar{\eta}_{q_1}(\xi) f(\xi) d\xi - \frac{\bar{\eta}_{q_1}(x)}{\bar{W}_{q_1}} \int_x^{\infty} \bar{\eta}_{-q_1}(\xi) f(\xi) d\xi. \quad (3.17)$$

El comportamiento asintótico de (3.17) puede ser identificado analíticamente y puede ser escrito como

$$\bar{\eta}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-iq_1 x} \hat{a}_0^2 \frac{\pi}{16} \frac{q_1(2 + 3iq_1 - q_1^2)}{(q_1^2 + 1) \sinh \frac{\pi q_1}{2}}.$$

Finalmente, tomando la parte real de la anterior función, obtenemos como resultado

$$\bar{\eta}(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\pi \sqrt{\sigma^2 - 2}}{4 \sinh(\pi \sqrt{\sigma^2 - 2})} \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{4\sigma^2 - 7}} \hat{a}_0^2 \cos(2\hat{\omega}t - q_1 x + \delta_1), \quad \delta_1 = \arctan\left(\frac{3q_1}{2 - q_1^2}\right). \quad (3.18)$$

Por consiguiente, la amplitud de radiación asociada a la frecuencia  $2\hat{\omega}$  es

$$a_{2\hat{\omega}} = \frac{\pi \sqrt{\sigma^2 - 2}}{4 \sinh(\pi \sqrt{\sigma^2 - 2})} \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{4\sigma^2 - 7}} \hat{a}_0^2. \quad (3.19)$$

Como podemos apreciar, esta amplitud depende del parámetro  $\sigma$ , es más, cuanto mayor sea esta constante de acople, menor será el valor de la amplitud. Además, es posible apreciar que existen divergencias para ciertos valores de  $\sigma$ . Discutiremos con más detalle estos resultados en la Sección 4, en la cual compararemos la dependencia de esta amplitud con las obtenida a través de cálculo numérico.

### 3.1.2. Radiación del canal ortogonal

Substituyendo la segunda de las ecuaciones (3.6) en (3.5) obtenemos

$$\hat{\eta}_{tt} - \hat{\eta}_{xx} + (\sigma^2 - 2 + 2\phi_K^2(x)) \hat{\eta} + \left[4\bar{\eta}_D \phi_K(x) - \frac{\pi}{4}\right] \hat{\eta}_D \bar{a} \hat{a} = 0. \quad (3.20)$$

La ecuación (3.20) incluye el producto de las amplitudes de los dos modos de vibración, el cual toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{a}(t) \hat{a}(t) &= \frac{\pi \hat{a}_0^3 (17 - 8\sigma^2)}{32 (4\sigma^2 - 7)} \sin(\hat{\omega}t) + \frac{\pi \hat{a}_0^3 (\sigma^2 - 1)}{8 (4\sigma^2 - 7)} \sin[(\bar{\omega} + \hat{\omega})t] \\ &\quad - \frac{\pi \hat{a}_0^3 (\sigma^2 - 1)}{8 (4\sigma^2 - 7)} \sin[(\bar{\omega} - \hat{\omega})t] - \frac{3\pi \hat{a}_0^3}{32 (4\sigma^2 - 7)} \sin(3\hat{\omega}t), \end{aligned} \quad (3.21)$$

que como vemos, a su vez, contiene las frecuencias

$$\omega_1 = \hat{\omega}, \quad \omega_2 = 3\hat{\omega}, \quad \omega_3 = \bar{\omega} + \hat{\omega}, \quad \text{y} \quad \omega_4 = \bar{\omega} - \hat{\omega}. \quad (3.22)$$

Debido a la linealidad que presenta (3.20), la radiación emitida por cada una de las frecuencias  $\omega_\ell$  puede ser estudiada analizando las ecuaciones<sup>3</sup>

$$\hat{\eta}_{tt} - \hat{\eta}_{xx} + (\sigma^2 - 2 + 2\phi_K^2(x)) \hat{\eta} = g_\ell(x) e^{i\omega_\ell t}, \quad (3.23)$$

<sup>3</sup>Esta vez la aparición de senos en vez de cosenos en (3.21) nos forzará a tomar la parte imaginaria del resultado final en vez de la parte real.

donde

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -\frac{\widehat{a}_0^3 \pi (8\sigma^2 - 17) (\pi - 16 \operatorname{sech} x \tanh^2 x) \operatorname{sech} x}{128(4\sigma^2 - 7)}, \\ g_2(x) &= -\frac{\widehat{a}_0^3 3 \pi (\pi - 16 \operatorname{sech} x \tanh^2 x) \operatorname{sech} x}{128(4\sigma^2 - 7)}, \\ g_3(x) = -g_4(x) &= \frac{\widehat{a}_0^3 \pi (\sigma^2 - 1) (\pi - 16 \operatorname{sech} x \tanh^2 x) \operatorname{sech} x}{32(4\sigma^2 - 7)}. \end{aligned}$$

Asimismo, si asumimos que la solución para cada frecuencia  $\omega_l$  puede ser escrita como

$$\widehat{\eta}(x, t) = \widehat{\eta}(x) e^{i\omega_\ell t},$$

entonces, esto nos conducirá a las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$-\widehat{\eta}''(x) + (\sigma^2 - 2 + 2\phi_K^2(x) - \omega_\ell^2) \widehat{\eta}(x) = g_\ell(x), \quad \ell = 1, 2, 3, 4. \quad (3.24)$$

Por añadidura, las soluciones de cada una de las ecuaciones diferenciales homogéneas asociadas a (3.24) son

$$\begin{cases} \widehat{\eta}_{q_\ell}(x) = e^{iq_\ell x} (q_\ell + i\phi_K(x)), \\ \widehat{\eta}_{-q_\ell}(x) = e^{-iq_\ell x} (-q_\ell + i\phi_K(x)), \end{cases} \quad (3.25)$$

donde,  $q_\ell = \sqrt{\omega_\ell^2 - \sigma^2}$ . En este caso, el Wronskiano asociado a las soluciones (3.25) tomará la forma

$$\widehat{W}_{q_\ell} = W[\widehat{\eta}_{q_\ell}(x), \widehat{\eta}_{-q_\ell}(x)] = 2iq_\ell(q_\ell^2 + 1). \quad (3.26)$$

Todo esto, nos permite escribir la solución a (3.24) para cada frecuencia de la siguiente manera:

$$\widehat{\eta}_{\omega_\ell}(x) = -\frac{\widehat{\eta}_{-q_\ell}(x)}{\widehat{W}_{q_\ell}} \int_{-\infty}^x \widehat{\eta}_{q_\ell}(\xi) g_\ell(\xi) d\xi - \frac{\widehat{\eta}_{q_\ell}(x)}{\widehat{W}_{q_\ell}} \int_x^{\infty} \widehat{\eta}_{-q_\ell}(\xi) g_\ell(\xi) d\xi, \quad (3.27)$$

lo cual, a su vez, nos conduce a que el comportamiento asintótico de  $\widehat{\eta}_{\omega_\ell}(x)$  es

$$\widehat{\eta}_{3\widehat{\omega}}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -e^{-iq_2 x} \frac{3\pi^2 \widehat{a}_0^3}{128(4\sigma^2 - 7)} \frac{q_2^3 (q_2 - i)}{i(q_2^2 + 1) \sinh \frac{\pi q_2}{2}}, \quad q_2 = \sqrt{8\sigma^2 - 9}, \quad (3.28)$$

$$\widehat{\eta}_{\widehat{\omega} + \widehat{\omega}}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-iq_3 x} \frac{\pi^2 \widehat{a}_0^3 (\sigma^2 - 1)}{32(4\sigma^2 - 7)} \frac{q_3^3 (q_3 - i)}{i(q_3^2 + 1) \sinh \frac{\pi q_3}{2}}, \quad q_3 = \sqrt{2 + 2\sqrt{3}\sqrt{\sigma^2 - 1}}. \quad (3.29)$$

Es importante destacar que, en el régimen de  $\sigma$  en el que estamos trabajando, la frecuencia  $\omega_4 = \bar{\omega} - \widehat{\omega}$  no se ha considerado por no estar incluida dentro del espectro continuo de radiación del campo ortogonal. Tampoco hemos considerado  $\omega_1 = \widehat{\omega}$  por ser  $q_1$  imaginaria, lo que nos podría conducir a posibles divergencias, es por ello que vamos a excluir esta frecuencia de nuestro estudio perturbativo.

Ahora, procediendo de manera similar que en la Sección 3.1.1, tomaremos la parte imaginaria de las expresiones anteriores, lo cual nos lleva a las siguientes funciones para el comportamiento asintótico:

$$\widehat{\eta}_{3\widehat{\omega}}(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{3\pi^2 \widehat{a}_0^3}{128(4\sigma^2 - 7)} \frac{q_2^3}{\sqrt{q_2^2 + 1} \sinh \frac{\pi q_2}{2}} \sin(\omega_2 t - q_2 x + \delta_2), \quad \delta_2 = \arctan(q_2), \quad (3.30)$$

$$\widehat{\eta}_{\widehat{\omega} + \widehat{\omega}}(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\frac{\pi^2 \widehat{a}_0^3 (\sigma^2 - 1)}{32(4\sigma^2 - 7)} \frac{q_3^3}{\sqrt{q_3^2 + 1} \sinh \frac{\pi q_3}{2}} \sin(\omega_3 t - q_3 x + \delta_3), \quad \delta_3 = \arctan(q_3). \quad (3.31)$$

Finalmente, las amplitudes de las radiaciones emitidas en el canal ortogonal serán:

$$a_{3\hat{\omega}} = \frac{3\pi^2 \hat{a}_0^3}{128(4\sigma^2 - 7)} \frac{q_2^3}{\sqrt{q_2^2 + 1} \sinh \frac{\pi q_2}{2}}, \quad (3.32)$$

$$a_{\bar{\omega} + \hat{\omega}} = \frac{\pi^2 \hat{a}_0^3 (\sigma^2 - 1)}{32(4\sigma^2 - 7)} \frac{q_3^3}{\sqrt{q_3^2 + 1} \sinh \frac{\pi q_3}{2}}. \quad (3.33)$$

Al igual que en la Sección 3.1.1 estas amplitudes disminuyen su valor a medida que  $\sigma$  se vuelve más grande. Además es posible también apreciar divergencias para ciertos valores de  $\sigma$ .

### 3.1.3. Ley de decaimiento para la amplitud del modo discreto ortogonal

Como veremos más adelante, la simulaciones numéricas realizadas independientemente a este TFM demuestran que  $\hat{a}_0$  decae con el tiempo, lo cual es de esperar, pues la energía asociada a esta amplitud va a ir destinada a alimentar a la radiación emitida por el sistema y al modo discreto longitudinal. En esta Sección, trataremos de obtener la ley de decaimiento asociada a este proceso en base a argumentos energéticos.

Es bien sabido que la potencia media irradiada en un periodo por una onda cuya forma viene dada por  $\eta = A \cos(\omega t - qx + \delta)$  es  $\langle P \rangle = -\frac{1}{2} A^2 \omega q$ . Si esta radiación se emite tanto en la parte derecha como en la izquierda de la recta real, entonces, la potencia emitida será el doble, es decir  $\langle P_{total} \rangle = -A^2 \omega q$ . Ahora bien, en el apartado anterior hemos visto que a distancias lejanas del origen de coordenadas, en el primer campo se emite radiación con frecuencia  $2\hat{\omega}$  mientras que en el segundo campo las frecuencias son  $3\hat{\omega}$  y  $\bar{\omega} + \hat{\omega}$ . Reescribiendo las amplitudes descritas por las fórmulas (3.19), (3.32) y (3.33) como

$$a_{2\hat{\omega}} = \hat{a}_0^2 A_{2\hat{\omega}}, \quad a_{3\hat{\omega}} = \hat{a}_0^3 A_{3\hat{\omega}}, \quad a_{\bar{\omega} + \hat{\omega}} = \hat{a}_0^3 A_{\bar{\omega} + \hat{\omega}},$$

y teniendo en cuenta que se emite radiación tanto como por la derecha como por la izquierda, obtenemos que la potencia media radiada por el sistema es

$$\langle P \rangle = \frac{dE}{dt} = - \left( \hat{a}_0^4 A_{2\hat{\omega}}^2 (2\hat{\omega}) q_1 + \hat{a}_0^6 A_{3\hat{\omega}}^2 (3\hat{\omega}) q_2 + \hat{a}_0^6 A_{\bar{\omega} + \hat{\omega}}^2 (\bar{\omega} + \hat{\omega}) q_3 \right). \quad (3.34)$$

Por otro lado, en el sistema de ecuaciones (3.6) hemos considerado que la ecuación diferencial que describe la dinámica de  $\hat{a}$  es aproximadamente

$$\hat{a}_{tt} + \hat{\omega}^2 \hat{a} \approx 0. \quad (3.35)$$

Es decir, consideramos que el modo vibracional discreto ortogonal se comporta como un oscilador armónico en cada punto del espacio, por tanto, vamos a asumir que la densidad de energía de esta vibración viene dada por la expresión

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \hat{\omega}^2 (\hat{a}_0 \hat{\eta}_D)^2. \quad (3.36)$$

Integrando esta última fórmula en todo el espacio, obtenemos que la energía total correspondiente será  $E = \hat{\omega}^2 \hat{a}_0^2$ . En cuanto al modo discreto del primer campo, no va a ser considerado debido a que vamos a suponer que estamos trabajando a tiempos largos, en los cuales esta vibración ya ha sido excitada y, por tanto, la energía del modo discreto ortogonal va a ser invertida únicamente en excitar los términos de radiación. Si tenemos ahora en cuenta la fórmula (3.34) y despreciamos los términos de sexto orden llegamos a la ecuación diferencial

$$-\hat{\omega}^2 \frac{d\hat{a}_0^2}{dt} \approx \hat{a}_0^4 A_{2\hat{\omega}}^2 2\hat{\omega} q_1, \quad (3.37)$$

cuya solución es

$$\widehat{a}_0^2(t) \approx \frac{\widehat{a}_0^2(0)}{1 + \frac{2q_1 A_{2\widehat{\omega}}^2 \widehat{a}_0^2(0)t}{\widehat{\omega}}}. \quad (3.38)$$

En la siguiente Sección, encontraremos usando un procedimiento diferente otra ley de decaimiento para esta amplitud, la cual, a pesar de no ser exactamente igual, tendrá una forma muy similar a la calculada en este apartado. Esta discrepancia en el decaimiento de la amplitud de los modos discretos de vibración ocurría también en el estudio del modelo  $\phi^4$  en las Referencias [18–20], es más, la ley obtenida en la presente Sección tiene una forma muy similar a las calculadas en los citados documentos. Por último, podemos destacar que, aunque no hemos considerado los términos de sexto orden en (3.34), estos ponen de manifiesto que la radiación del canal ortogonal influye en la evolución temporal de  $\widehat{a}_0$ , aunque en menor medida que la radiación emitida en el canal paralelo.

### 3.2. Método de Oxtoby y Barashenkov

En esta Sección, seguiremos el método descrito en [19, 20]. Para tener en cuenta que inicialmente excitamos únicamente el modo discreto ortogonal vamos a proponer la siguiente expansión de los campos:

$$\phi_1 = \varphi_0 + \epsilon^2 \varphi_2 + \epsilon^4 \varphi_4 + \dots, \quad (3.39)$$

$$\phi_2 = \epsilon \psi_1 + \epsilon^3 \psi_3 + \dots, \quad (3.40)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro cuyo valor es considerado pequeño. Por otro lado, introduciremos una serie de coordenadas con las cuales estudiaremos las coordenadas espaciales y temporales a distintas escalas. Este juego de coordenadas “*estiradas*” viene dado por

$$X_n \equiv \epsilon^n x, \quad T_n \equiv \epsilon^n t, \quad (3.41)$$

las cuales, se volverán independientes en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . El cambio dado por (3.41) nos permite también expresar las derivadas temporales y espaciales del siguiente modo:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_{X_0} + \epsilon \partial_{X_1} + \epsilon^2 \partial_{X_2} + \dots, \quad \text{con} \quad \partial_{X_n} \equiv \frac{\partial}{\partial X_n}, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \partial_{T_0} + \epsilon \partial_{T_1} + \epsilon^2 \partial_{T_2} + \dots, \quad \text{con} \quad \partial_{T_n} \equiv \frac{\partial}{\partial T_n}. \quad (3.43)$$

Si tenemos en cuenta todas estas suposiciones, e introducimos (3.39)-(3.43) en las ecuaciones de campo (2.7) y (2.8), entonces obtenemos una jerarquía de ecuaciones diferenciales agrupadas por potencias de  $\epsilon$ . En las siguientes Secciones, nos dedicaremos a resolver estas ecuaciones llegando hasta cuarto orden en  $\epsilon$  para hallar las amplitudes de radiación, así como las leyes de evolución asociadas a cada una de las amplitudes de ambos modos discretos de vibración.

#### 3.2.1. Aproximación de orden cero

Agrupando los términos de orden cero en  $\epsilon$  y anulando su suma nos encontramos con que la ecuación diferencial que ha de cumplirse en este orden es

$$\partial_{T_0, T_0} \varphi_0 - \partial_{X_0, X_0} \varphi_0 - 2 \varphi_0 (1 - \varphi_0)^2 = 0, \quad (3.44)$$

la cual se corresponde con la ecuación de campo del modelo  $\phi^4$ . Como es bien sabido, esta ecuación es satisfecha por la solución kink/antikink

$$\varphi_0(X_0) = \pm \phi_K(X_0) = \pm \tanh X_0. \quad (3.45)$$

### 3.2.2. Aproximación de primer orden

Si ahora agrupamos los términos en primer orden en  $\epsilon$  en la ecuación de campo (2.7) obtenemos la siguiente condición sobre  $\varphi_0$ :

$$\partial_{T_0, T_1} \varphi_0 - \partial_{X_0, X_1} \varphi_0 = 0. \quad (3.46)$$

Esta relación se satisface automáticamente para  $\varphi_0$ , pues esta función no depende ni de  $T_1$ , ni de  $X_1$ .

Al mismo tiempo, agrupando los términos proporcionales a  $\epsilon$  en la ecuación de campo (2.8) encontramos que la siguiente ecuación diferencial ha de ser satisfecha:

$$\left( \partial_{T_0, T_0} - \partial_{X_0, X_0} - 2 + \sigma^2 + 2\varphi_0^2 \right) \psi_1 = 0. \quad (3.47)$$

La ecuación (3.47) ya ha aparecido de forma indirecta al tratar de resolver el problema espectral (2.11), y su solución completa viene dada por

$$\psi_1 = \widehat{A}(X_1, \dots; T_1, \dots) e^{i\widehat{\omega}T_0} \widehat{\eta}_D(X_0) + \text{c.c.} + \widehat{\eta}(X_0, T_0), \quad (3.48)$$

donde, recordamos que  $\widehat{\eta}_D(X_0) = \text{sech}(X_0)$  y  $\widehat{\omega} = \sqrt{\sigma^2 - 1}$ . En (3.48), c.c. indica el complejo conjugado de la parte anterior de la función y

$$\widehat{\eta}(X_0, T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \widehat{R}(q) e^{i\widehat{\omega}_q T_0} \widehat{\eta}_q(X_0) + \text{c.c.},$$

donde  $\widehat{\eta}_q(X_0)$  está definido por (2.17) y  $\widehat{\omega}_q = \sqrt{\sigma^2 + q^2}$ . Como inicialmente solo excitamos el modo discreto ortogonal, usaremos como solución

$$\psi_1 = \widehat{A}(X_1, \dots; T_1, \dots) e^{i\widehat{\omega}T_0} \text{sech } X_0 + \text{c.c.} \quad (3.49)$$

### 3.2.3. Aproximación de segundo orden

Ahora, agrupando y anulando los términos proporcionales a  $\epsilon^2$  en la ecuación de campo (2.8) obtenemos la condición

$$\partial_{T_0, T_1} \psi_1 - \partial_{X_0, X_1} \psi_1 = 0, \quad (3.50)$$

la cual nos indica que

$$\partial_{T_1} \widehat{A} = 0, \quad \partial_{X_1} \widehat{A} = 0. \quad (3.51)$$

Es decir, lo que nos dice (3.51) es que la amplitud del modo discreto ortogonal no depende ni de  $X_1$  ni de  $T_1$ .

Adicionalmente, de la agrupación de los términos de segundo orden en (2.7) se obtiene que la ecuación que dicta el comportamiento de  $\varphi_2$  se puede escribir como

$$[\partial_{T_0, T_0} - \partial_{X_0, X_0} - 2 + 6\varphi_0^2] \varphi_2 = -2\varphi_0 \psi_1^2 = \overline{F}_2, \quad (3.52)$$

donde

$$\overline{F}_2 = -4|\widehat{A}|^2 \text{sech}^2 X_0 \tanh X_0 - 2\widehat{A}^2 \text{sech}^2 x_0 \tanh X_0 e^{i2\widehat{\omega}T_0} + \text{c.c.} = \overline{F}_2^{(0)} + \overline{F}_2^{(1)} e^{i2\widehat{\omega}T_0} + \text{c.c.}$$

Empecemos primero con las soluciones de la ecuación homogénea asociada a (3.52). Si tenemos en cuenta todo lo expuesto en la Sección 2.1.1, entonces

$$\varphi_{2H} = C \overline{\eta}_0(X_0) + \overline{A} e^{i\overline{\omega}T_0} \overline{\eta}_D(X_0) + \text{c.c.} + \overline{\eta}(X_0, T_0), \quad (3.53)$$

donde recordamos que  $\bar{\eta}_0(X_0) = \text{sech}^2 X_0$ ,  $\bar{\eta}_D(X_0) = \text{sech} X_0 \tanh X_0$ ,  $\bar{\omega} = \sqrt{3}$  y

$$\bar{\eta}(X_0, T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \bar{R}(q) e^{i\bar{\omega}_q T_0} \bar{\eta}_q(X_0) + \text{c.c.},$$

con  $\bar{\omega}_q = \sqrt{q^2 + 4}$ .

Como  $\bar{\eta}_0(X_0)$  es una función asociada al modo de traslación del kink, y suponemos que éste no se mueve del origen de coordenadas, consideraremos la constante arbitraria  $C = 0$ . Por otro lado y como ya hemos mencionado anteriormente, no vamos a considerar la radiación del continuo de frecuencias, esto nos obliga a anular el coeficiente  $\bar{R}(q)$ . Con estos argumentos, la solución (3.53) se transforma en

$$\varphi_{2H} = \bar{A} e^{i\bar{\omega} T_0} \text{sech} X_0 \tanh X_0 + \text{c.c.} \quad (3.54)$$

Es bien sabido que, para dar la solución completa a una ecuación diferencial inhomogénea, es necesario también buscar soluciones particulares. Debido a la linealidad de (3.52), vamos a proponer una solución con la forma que podemos ver a continuación

$$\varphi_{2P} = \varphi_2^{(0)} + \varphi_2^{(1)} e^{i2\hat{\omega} T_0} + \text{c.c.}, \quad (3.55)$$

lo cual, a su vez, nos conduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias dadas por las expresiones

$$[-\partial_{X_0, X_0} - 2 + 6\varphi_0^2] \varphi_2^{(0)} = -4|\hat{A}|^2 \text{sech}^2 X_0 \tanh X_0, \quad (3.56)$$

$$[-\partial_{X_0, X_0} - 2 + 6\varphi_0^2 - (2\hat{\omega})^2] \varphi_2^{(1)} = -2\hat{A}^2 \text{sech}^2 X_0 \tanh X_0. \quad (3.57)$$

Vamos a empezar primero analizado (3.56). Según la alternativa de Fredholm, si queremos obtener soluciones acotadas en una ecuación diferencial inhomogénea, la solución de la ecuación homogénea asociada ha de ser ortogonal al término inhomogéneo. En este caso esto se cumple, pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} dX_0 \varphi_{2H}^{(0)} \left( -4 \text{sech}^2 X_0 \tanh X_0 |\hat{A}|^2 \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dX_0 \left( -4 \text{sech}^4 X_0 \tanh X_0 |\hat{A}|^2 \right) = 0. \quad (3.58)$$

Finalmente, la solución a (3.56) puede hallarse usando el método de variación de constantes y vendrá dada por

$$\varphi_2^{(0)}(X_0) = -|\hat{A}|^2 X_0 \text{sech}^2 X_0. \quad (3.59)$$

Es importante destacar que este nuevo término es menor que  $\varphi_0$ , aunque, por otro lado,  $\varphi_2^{(0)}$  es mayor que  $\varphi_0 \pm 1$  cuando  $X_0 \rightarrow \pm\infty$ . Esto, puede causar una irregularidad en el método perturbativo, pues un término de segundo orden sería mayor que uno de orden cero. La solución a este problema viene dada por el hecho de que  $\varphi_2^{(0)}$  da cuenta de la variación del tamaño del kink, ya que si  $k = 1 - |\hat{A}|^2$  entonces

$$\tanh[kX_0] = \tanh[(1 - |\hat{A}|^2)X_0] \approx \tanh X_0 - |\hat{A}|^2 X_0 \text{sech}^2 X_0 + o(|\hat{A}|^3).$$

Centrémonos ahora en hallar una solución para (3.57). Si imponemos condiciones de antisimetría en la variable espacial, tenemos que la solución a esta ecuación diferencial viene dada por

$$\varphi_2^{(1)}(X_0, X_2, \dots; T_2, \dots) = \hat{A}^2 h(X_0; q_1), \quad q_1 = 2\sqrt{\sigma^2 - 2}, \quad (3.60)$$

donde

$$h(X_0; q_1) = -\frac{q_1^2 - 2}{4(q_1^2 + 1)} \tanh X_0 + e^{iq_1 X_0} \frac{\pi q_1}{8(q_1^2 + 1)} \text{cosech} \frac{\pi q_1}{2} \left( q_1^2 - 2 + 3iq_1 \tanh X_0 + 3 \text{sech}^2 X_0 \right) + h_1(X_0, q_1) + h_1(X_0, -q_1),$$

con

$$h_1(X_0, q_1) = \frac{-1}{8(q_1^2 + 1)} \left( q_1^2 - 2 - 3iq_1 \tanh X_0 + 3 \operatorname{sech}^2 X_0 \right) \\ \times \left( {}_2F_1\left[1, \frac{iq_1}{2}, 1 + \frac{iq_1}{2}, -e^{2X_0}\right] - \frac{q_1}{q_1 - 2i} e^{2X_0} {}_2F_1\left[1, 1 + \frac{iq_1}{2}, 2 + \frac{iq_1}{2}, -e^{2X_0}\right] \right),$$

donde  ${}_2F_1$  es la función hipergeométrica.

Todo los argumentos expuestos nos permiten escribir la solución para  $\varphi_2$  de la siguiente forma

$$\varphi_2 = \bar{A} e^{i\bar{\omega}T_0} \operatorname{sech} X_0 \tanh X_0 - |\hat{A}|^2 X_0 \operatorname{sech}^2 X_0 + \hat{A}^2 e^{i2\hat{\omega}T_0} h(X_0; q_1) + \text{c.c.} \quad (3.61)$$

Usando diversas propiedades de las funciones hipergeométricas, se puede demostrar que el comportamiento asintótico de  $\varphi_2$  viene dado por

$$\varphi_2 \xrightarrow{X_0 \rightarrow \infty} \frac{\pi \hat{A}^2}{2} \frac{\sqrt{\sigma^2 - 2}}{\sinh(\pi\sqrt{\sigma^2 - 2})} \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{\sqrt{4\sigma^2 - 7}} e^{i(2\hat{\omega}T_0 - q_1X_0 + \delta_1)} + \text{c.c.} \quad (3.62)$$

Es inmediato ver de (3.62) que, al igual que ocurría en la Sección 3.1, se emite radiación en el primer campo con frecuencia  $2\hat{\omega}$ . En la Sección 3.3 hablaremos con más detenimiento de las diferencias y similitudes de este término radiativo con el encontrado para esta misma frecuencia con el procedimiento de Manton y Merabet.

### 3.2.4. Aproximación de tercer orden

Los términos de tercer orden en  $\epsilon$  proporcionan en la ecuación (2.7) la condición

$$-\partial_{X_0, X_1} \varphi_2 + \partial_{T_0, T_1} \varphi_2 = 0. \quad (3.63)$$

La ecuación (3.63) se traduce en

$$\partial_{X_1} \bar{A}(X_1, T_1) = \partial_{T_1} \bar{A}(X_1, T_1) = 0, \quad (3.64)$$

lo cual implica a su vez que  $\bar{A}$  no depende ni de  $X_1$  ni de  $T_1$ .

Adicionalmente, la condición extraída de la ecuación de campo (2.8) se puede escribir como

$$[\partial_{T_0, T_0} - \partial_{X_0, X_0} - 2 + \sigma^2 + 2\varphi_0^2] \psi_3 = \hat{F}_3, \quad (3.65)$$

donde

$$\hat{F}_3 = e^{i\hat{\omega}T_0} [-2\hat{A} |\hat{A}|^2 \operatorname{sech} X_0 (3 \operatorname{sech}^2 X_0 + 2h(X_0) \tanh X_0) \\ - 2i \operatorname{sech} X_0 (\hat{\omega} \partial_{T_2} \hat{A} - i \tanh X_0 \partial_{X_2} \hat{A}) + 4|\hat{A}|^2 \hat{A} X_0 \operatorname{sech}^3 X_0 \tanh X_0] + \text{c.c.} \\ + e^{3i\hat{\omega}T_0} [-2\hat{A}^3 \operatorname{sech} X_0 (\operatorname{sech}^2 X_0 + 2h(X_0) \tanh X_0)] + \text{c.c.} \\ + e^{i(\bar{\omega} + \hat{\omega})T_0} [-4\bar{A} \hat{A} \operatorname{sech}^2 X_0 \tanh^2 X_0] + \text{c.c.} \\ + e^{i(\bar{\omega} - \hat{\omega})T_0} [-4\bar{A} \hat{A}^* \operatorname{sech}^2 X_0 \tanh^2 X_0] + \text{c.c.} \\ = \hat{F}_3^{(0)} e^{i\hat{\omega}T_0} + \hat{F}_3^{(1)} e^{3i\hat{\omega}T_0} + \hat{F}_3^{(2)} e^{i(\bar{\omega} + \hat{\omega})T_0} + \hat{F}_3^{(3)} e^{i(\bar{\omega} - \hat{\omega})T_0} + \text{c.c.}$$

De nuevo, la linealidad del problema nos permite escribir la solución para (3.65) del siguiente modo:

$$\psi_3 = \hat{\psi}_3^{(0)} e^{i\hat{\omega}T_0} + \hat{\psi}_3^{(1)} e^{3i\hat{\omega}T_0} + \hat{\psi}_3^{(2)} e^{i(\bar{\omega} + \hat{\omega})T_0} + \hat{\psi}_3^{(3)} e^{i(\bar{\omega} - \hat{\omega})T_0} + \text{c.c.} \quad (3.66)$$

Todo esto nos conduce a tener que llevar a cabo un análisis de cuatro ecuaciones diferenciales con la forma

$$-\partial_{X_0, X_0} \psi_3^{(0)} + (-2 + \sigma^2 + 2\varphi_0^2 - \widehat{\omega}^2) \psi_3^{(0)} = \widehat{F}_3^{(0)}, \quad (3.67)$$

$$-\partial_{X_0, X_0} \psi_3^{(1)} + [-2 + \sigma^2 + 2\varphi_0^2 - 9\widehat{\omega}^2] \psi_3^{(1)} = \widehat{F}_3^{(1)}, \quad (3.68)$$

$$-\partial_{X_0, X_0} \psi_3^{(2)} + [-2 + \sigma^2 + 2\varphi_0^2 - (\overline{\omega} + \widehat{\omega})^2] \psi_3^{(2)} = \widehat{F}_3^{(2)}, \quad (3.69)$$

$$-\partial_{X_0, X_0} \psi_3^{(3)} + [-2 + \sigma^2 + 2\varphi_0^2 - (\overline{\omega} - \widehat{\omega})^2] \psi_3^{(3)} = \widehat{F}_3^{(3)}. \quad (3.70)$$

Al igual que en el método de Manton y Merabet, no consideraremos la frecuencia  $\overline{\omega} - \widehat{\omega}$  por no estar incluida en el espectro continuo de radiación del segundo campo, es decir, no vamos a tratar la ecuación (3.70).

Empecemos con  $\psi_3^{(0)}$ . De nuevo, podemos recurrir a la alternativa de Fredholm e imponer la ortogonalidad de  $\psi_{3H}^{(0)} = \text{sech } X_0$  y  $\widehat{F}_3^{(0)}$ , lo que se traduce en que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dX_0 \text{sech } X_0 \left[ -2\widehat{A} |\widehat{A}|^2 \text{sech } X_0 \left( 3 \text{sech}^2 X_0 + 2h(X_0) \tanh X_0 \right) - \right. \quad (3.71)$$

$$\left. -2i \text{sech } X_0 \left( \widehat{\omega} \partial_{T_2} \widehat{A} - i \tanh X_0 \partial_{X_2} \widehat{A} \right) + 4|\widehat{A}|^2 \widehat{A} X_0 \text{sech}^3 X_0 \tanh X_0 \right] = 0.$$

Asimismo, la ecuación (3.71) nos lleva a la condición

$$i\widehat{\omega} \partial_{T_2} \widehat{A} + \left( \frac{5}{3} + \xi(\sigma) \right) \widehat{A} |\widehat{A}|^2 = 0, \quad (3.72)$$

donde

$$\xi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} dX_0 h(X_0) \text{sech}^2 X_0 \tanh X_0.$$

Volviendo a la amplitud sin escalar  $\widehat{a} = \epsilon \widehat{A}$ , es fácil demostrar que (3.72) toma la forma

$$i\widehat{\omega} \frac{\partial \widehat{a}}{\partial t} + \left[ \frac{5}{3} + \xi(\sigma) \right] \widehat{a} |\widehat{a}|^2 = 0.$$

Esta última fórmula nos conduce a

$$\frac{\partial |\widehat{a}|^2}{\partial t} = -\frac{2 \text{Im } \xi(\sigma)}{\widehat{\omega}} |\widehat{a}|^4,$$

cuya solución es

$$|\widehat{a}(t)|^2 = \frac{|\widehat{a}(0)|^2}{1 + \frac{2 \text{Im } \xi(\sigma)}{\widehat{\omega}} |\widehat{a}(0)|^2 t}. \quad (3.73)$$

Por otro lado, recordamos que las soluciones de la ecuación homogénea asociada a (3.68) vienen dadas por las funciones  $\widehat{\eta}_{q_2}$  y  $\widehat{\eta}_{-q_2}$  definidas en (2.17) con  $q_2 = \sqrt{8\sigma^2 - 9}$ . Como el Wronskiano asociado a las ya mencionadas soluciones es  $\widehat{W}_{q_2} = W[\widehat{\eta}_{q_2}(x), \widehat{\eta}_{-q_2}(x)] = 2iq_2(q_2^2 + 1)$ , entonces el método de variación de constantes nos permite dar como solución

$$\psi_3^{(1)}(X_0) = \frac{1}{\widehat{W}_{q_2}} \left\{ \widehat{\eta}_{q_2}(X_0) \int \widehat{\eta}_{-q_2}(X_0) \widehat{F}_3^{(1)}(X_0) dX_0 - \widehat{\eta}_{-q_2}(X_0) \int \widehat{\eta}_{q_2}(X_0) \widehat{F}_3^{(1)}(X_0) dX_0 \right\}.$$

Las integraciones presentes en la fórmula anterior no se pueden hacer de forma explícita, pues  $\widehat{F}_3^{(1)}(X_0)$  depende de funciones hipergeométricas e incluso haciendo uso de programas de cálculo simbólico no podríamos llegar a una expresión más completa.

Por añadidura, la solución para  $\psi_3^{(2)}$  viene dada por

$$\psi_3^{(2)}(X_0, X_2, \dots; T_2, \dots) = \bar{A} \hat{A} g(X_0; q_3), \quad q_3 = \sqrt{2 + 2\sqrt{3}\sqrt{\sigma^2 - 1}}, \quad (3.74)$$

donde

$$g(X_0; q_3) = -\frac{q_3^2}{2(q_3^2 + 1)} + \operatorname{sech}^2 X_0 + \sum_{a=0,1} g_1((-1)^a X_0; q_3) + \sum_{a,b=0,1} g_2((-1)^a X_0; (-1)^b q_3),$$

con

$$g_1(X_0; q_3) = \frac{\pi q_3^3 e^{iq_3 X_0}}{8(q_3^2 + 1) \sinh \frac{\pi q_3}{2}} \left( -iq_3 + \tanh X_0 \right),$$

$$g_2(X_0; q_3) = \frac{q_3^2}{8(q_3^2 + 1)} (-iq_3 + \tanh X_0) \times \left( {}_2F_1\left[1, \frac{iq_3}{2}, 1 + \frac{iq_3}{2}, -e^{-2X_0}\right] - \frac{q_3}{q_3 - 2i} e^{-2X_0} {}_2F_1\left[1, 1 + \frac{iq_3}{2}, 2 + \frac{iq_3}{2}, -e^{-2X_0}\right] \right).$$

En este caso, el comportamiento asintótico de  $\psi_3^{(2)}$  viene dado por

$$\psi_3^{(2)} \xrightarrow{X_0 \rightarrow \infty} \bar{A} \hat{A} \frac{\pi q_3^3}{4(-1 + iq_3) \sinh \frac{\pi q_3}{2}} e^{i((\bar{\omega} + \hat{\omega}) T_0 - q_3 X_0)} + \text{c.c.} \quad (3.75)$$

Como podemos apreciar, este término se corresponde con un término radiativo, al igual que ocurría en la Sección 3.2. En este caso, la amplitud obtenida es distinta, aunque el comportamiento cualitativo que se obtiene de (3.75) es igual al que se puede extraer de (3.32).

### 3.2.5. Aproximación de cuarto orden

Ahora, si agrupamos los términos proporcionales a  $\epsilon^4$  en la ecuación de campo (2.7) obtenemos que la ecuación que ha de cumplir el sistema es

$$\partial_{T_0, T_0} \varphi_4 + [-\partial_{X_0, X_0} - 2 + 6\phi_K^2] \varphi_4 = -(6\varphi_0 \varphi_2^2 + 2\varphi_2 \psi_1^2 + 4\varphi_0 \psi_1 \psi_3 - 2\partial_{X_0, X_2} \varphi_2 - \partial_{X_1, X_1} \varphi_2 + 2\partial_{T_0, T_2} \varphi_2 + \partial_{T_1, T_1} \varphi_2) = \bar{F}_4 \quad (3.76)$$

Al igual que ocurría en apartados anteriores, el término inhomogéneo de la ecuación diferencial anterior va a presentar términos con distintas frecuencias, de modo que

$$\bar{F}_4 = \bar{F}_4^{(0)} + \bar{F}_4^{(1)} e^{i\bar{\omega} T_0} + \bar{F}_4^{(2)} e^{2i\hat{\omega} T_0} + \bar{F}_4^{(3)} e^{2i\bar{\omega} T_0} + \bar{F}_4^{(4)} e^{4i\hat{\omega} T_0} + \bar{F}_4^{(5)} e^{2i\hat{\omega} T_0 + i\bar{\omega} T_0} + \bar{F}_4^{(6)} e^{2i\hat{\omega} T_0 - i\bar{\omega} T_0} + \text{c.c.} \quad (3.77)$$

En esta aproximación, nos vamos a centrar únicamente en el término con frecuencia  $\bar{\omega}$ , ya que va a ser usado para hallar la ley de evolución temporal para  $\bar{A}$ . Para esta frecuencia, la ecuación diferencial correspondiente quedaría de la siguiente forma:

$$-\bar{\omega}^2 \phi_4^{(1)} + [-\partial_{X_0, X_0} - 2 + 6\phi_0^2] \phi_4^{(1)} = -4|\hat{A}|^2 \bar{A} \operatorname{sech}^3 X_0 \tanh X_0 + 12X_0 |\hat{A}|^2 \bar{A} \operatorname{sech}^3 X_0 \tanh^2 X_0 - 4|\hat{A}|^2 \bar{A} \operatorname{sech} X_0 \tanh X_0 g(X_0) - 2i\bar{\omega} \operatorname{sech} X_0 \tanh X_0 \partial_{T_2} \bar{A} + 2 \operatorname{sech}^3 X_0 \partial_{X_2} \bar{A} - 2 \operatorname{sech} X_0 \tanh^2(X_0) \partial_{X_2} \bar{A} = \bar{F}_4^{(1)}(X_0).$$

De nuevo, la alternativa de Fredholm nos dice que, para obtener soluciones acotadas, en la ecuación anterior la solución de la parte homogénea ha de ser ortogonal al término inhomogéneo. Esto se traduce en la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dX_0 \operatorname{sech} X_0 \tanh X_0 \overline{F}_4^{(1)}(X_0) = 0, \quad (3.78)$$

la cual nos conduce a la ecuación diferencial

$$-5i\bar{\omega} \partial_{T_2} \overline{A} + (3 - 15\mu(\sigma)) \overline{A} |\widehat{A}|^2 = 0, \quad (3.79)$$

donde

$$\mu(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} dX_0 g(X_0) \operatorname{sech}^2 X_0 \tanh^2 X_0. \quad (3.80)$$

Si  $\widehat{a} = \epsilon \widehat{A}$  y  $\bar{a} = \epsilon \overline{A}$  entonces

$$\frac{\partial |\bar{a}|^2}{\partial t} = |\bar{a}|^2 |\widehat{a}|^2 \left( \frac{-6 \operatorname{Im} \mu(\sigma)}{\bar{\omega}} \right). \quad (3.81)$$

Finalmente, la resolución de (3.81), nos lleva a que la ley de evolución temporal para  $\bar{a}$  es

$$|\bar{a}(t)|^2 = |\bar{a}(0)|^2 (\bar{\omega} \widehat{\omega})^{\frac{3 \operatorname{Im} \mu(\sigma) \widehat{\omega}}{\operatorname{Im} \xi(\sigma) \bar{\omega}}} \left( (2|\widehat{a}(0)|^2 \operatorname{Im} \xi(\sigma) t + \widehat{\omega}) \bar{\omega} \right)^{-\frac{3 \operatorname{Im} \mu(\sigma) \widehat{\omega}}{\operatorname{Im} \xi(\sigma) \bar{\omega}}}. \quad (3.82)$$

Este procedimiento tiene algunas similitudes con el llevado a cabo en el apartado anterior, pues, por ejemplo las ecuaciones diferenciales (3.72) y (3.79) presentan una forma muy parecida entre si. Sin embargo, existen también diferencias muy importantes. En este caso podemos ver como  $\overline{A}$  se ve afectada por  $\widehat{A}$  mientras que no ocurre algo similar en el cálculo de  $\widehat{A}$ , lo cual era de esperar, pues inicialmente solo excitamos el modo discreto del segundo campo, por lo que tiene sentido que  $\widehat{A}$  dicte el comportamiento de  $\overline{A}$ .

### 3.3. Comparación entre ambas teorías de perturbaciones

A lo largo de la Sección 3 hemos hecho uso de dos teorías de perturbaciones distintas para explicar los posibles fenómenos que ocurren cuando inicialmente excitamos  $\widehat{\eta}_D$ . En ambos métodos hemos podido obtener términos radiativos que en el caso del primer campo llevaban asociados una frecuencia  $2\widehat{\omega}$ , mientras que en el segundo campo, estas frecuencias eran  $\bar{\omega} + \widehat{\omega}$  y  $3\widehat{\omega}$ .

A pesar de estas similitudes, también nos encontramos múltiples diferencias entre los cálculos realizados en las Secciones 3.1 y 3.2, muchas de las cuales aparecían ya entre los desarrollos llevados a cabo por Manton y Merabet y los realizados por Oxtoby y Barashenkov a la hora de tratar los kinks del modelo  $\phi^4$ . Una de las más notorias, es la aparición de términos de traslación y variación de forma del kink en el método de Oxtoby y Barashenkov. Cabe destacar la diferencia en la dificultad de los cálculos entre un método y otro. Es más, esta diferencia es la causante de que no podamos llegar a calcular la amplitud de radiación asociada a  $3\widehat{\omega}$  en el segundo método, pues la propia naturaleza del procedimiento nos lleva a tener que resolver una ecuación diferencial con un término inhomogéneo dependiente de funciones hipergeométricas (véase en la fórmula (3.68)). Pese a este tipo de dificultades, hemos podido extender el uso del método hasta llegar a cuarto orden, lo cual nos ha permitido calcular una ley de evolución para la amplitud asociada a  $\bar{\eta}_D$ .

Un hecho sorprendente que hemos encontrado, es la similitud entre la amplitud de radiación de frecuencia  $2\widehat{\omega}$  en ambos métodos, pues de las ecuaciones (3.18) y (3.62) podemos apreciar que las amplitudes son prácticamente iguales salvo por un factor 2. Otra similitud importante subyace en

las leyes de decaimiento obtenidas para la amplitud asociada al modo discreto ortogonal, pues las fórmulas (3.38) y (3.73) presentan una forma casi idéntica. La única diferencia entre las citadas expresiones radica en que para la primera el término  $q_1 A_{2\hat{\omega}}^2$  es sustituido en el segundo cálculo por  $\text{Im} \xi(\sigma)$ . A pesar de que estos dos términos sean distintos, es de esperar que al menos se encuentren en el mismo orden de magnitud. Sin embargo, las ecuaciones diferenciales que nos conducen a las ya citadas leyes de decaimiento presentan una diferencia importante, ya que en el método de Manton y Merabet se podía apreciar el hecho de que las frecuencias del canal ortogonal rigurosamente influyen también en el cálculo, aunque estos términos hallan sido despreciados (ver (3.34)), al contrario de lo que sucede en el segundo método, en el cual la única frecuencia influyente es  $\hat{\omega}$ .

Finalmente, cabe destacar que todo lo anteriormente expuesto justifica la completitud de ambos métodos, pues las magnitudes que no han podido ser determinadas por el método de Manton y Merabet han podido ser calculadas con éxito haciendo uso para ello del procedimiento de Oxtoby y Barashenkov.

## 4. Comparación con simulaciones numéricas

A lo largo de la presente Sección, haremos una comparación detallada de algunos resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas de forma independiente al presente TFM con las expresiones y predicciones realizadas en la Sección 3. Como adelanto, podemos mencionar que existirá un excelente acuerdo con las expresiones analíticas encontradas, lo cual reafirmará la validez de los métodos expuestos. La totalidad de simulaciones y resultados numéricos que se encuentran en esta Sección ya habían sido realizados antes del comienzo del desarrollo del presente trabajo por otro autor. Es más, la motivación principal de este trabajo se ha basado en buscar un formalismo que explicase de manera exitosa todos los resultados que se habían encontrado haciendo uso del cálculo numérico.

La organización de esta Sección tendrá la siguiente estructura: en la Subsección 4.1 hablaremos acerca de la configuración inicial usada para llevar a cabo las simulaciones numéricas. Más tarde, en la Subsección 4.2 hablaremos del espectro de frecuencias encontrado para cada componente del campo en tres puntos distintos de la recta real. Finalmente, llevaremos a cabo en la Subsección 4.3 una comparación de la dependencia con el parámetro  $\sigma$  de las amplitudes de radiación encontradas de forma numérica con las encontradas con el método de Manton y Merabet en la Sección 3.1

### 4.1. Configuración inicial del sistema

Como ya hemos mencionado en múltiples ocasiones, en este trabajo consideramos que la configuración de partida en la que se encuentra nuestro sistema viene dada por la expresión

$$K_0(x, t) = K_+(x) + \hat{a}_0 \sin(\hat{\omega}t) \hat{F}_{\sqrt{\sigma^2-1}}(x) = (\tanh(x - x_0), \hat{a}_0 \sin(\hat{\omega}t) \text{sech}(x))^\top. \quad (4.1)$$

Es decir, inicialmente únicamente excitamos el modo discreto perpendicular encontrado en la Sección 2.1.2, que posteriormente evolucionará de tal modo que se provoque también la excitación de  $\bar{\eta}_D$ , así como de los posibles términos radiativos. La razón fundamental que subyace detrás de esta consideración es que, si inicialmente  $\bar{\eta}_D$  fuese el modo excitado, entonces el problema se reduciría al estudio de la perturbación en torno a las soluciones kink del modelo  $\phi^4$ .

En la Figura 5 podemos encontrar una simulación numérica de la evolución temporal de ambas componentes del campo cuando se excita inicialmente el modo ortogonal discreto con  $\hat{a}_0 = 0,6$ . Si nos fijamos bien en la imagen derecha de la Figura 5 veremos que  $\hat{a}(t)$  disminuye su valor a medida que el tiempo aumenta. Este primer resultado numérico encaja con lo desarrollado en el presente trabajo, pues la leyes de decaimiento calculadas en las Secciones 3.1.3 y 3.2.4 predecían

que la amplitud de este modo ha de decaer con el tiempo. Este comportamiento puede ser explicado por el hecho de que la radiación del sistema y la excitación del modo discreto longitudinal requieren energía vibracional, la cual se encuentra inicialmente invertida en excitar el modo ortogonal, por lo que es de esperar que  $\hat{a}(t)$  disminuya con el tiempo para ceder energía tanto a modos vibracionales como términos radiativos.

Este hecho se podrá encontrar también en la siguiente Subsección, en la cual analizaremos los espectros de frecuencias obtenidos mediante cálculo numérico en varios puntos de la recta real para ambas componentes del campo.

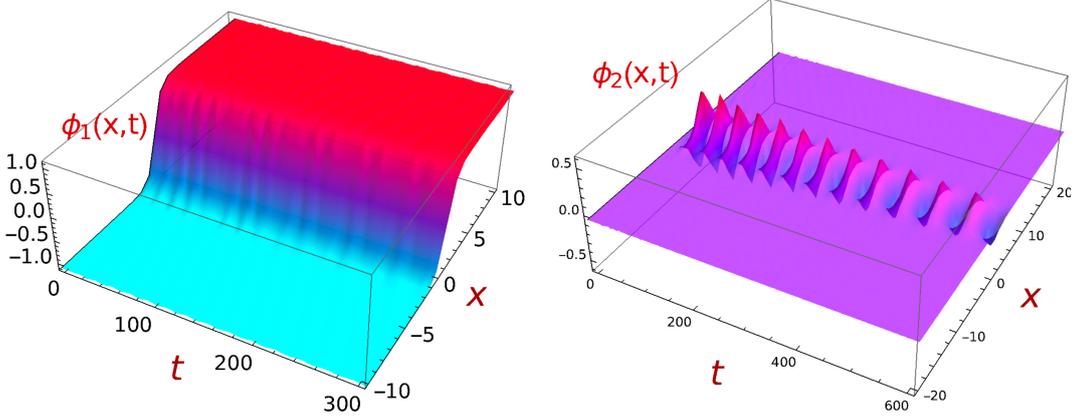


Figura 5: Evolución temporal de las dos componentes del campo, habiendo partido de la configuración inicial dada por (4.1) con  $\hat{a}_0 = 0,6$ .

## 4.2. Espectro de frecuencias para distintos puntos de la recta real

Ahora nos centraremos en analizar el espectro de frecuencias encontrado en distintos puntos de la recta real a tiempos  $t \gg 1$  para ambas componentes del campo bajo estudio. En concreto, vamos a centrarnos en tres puntos:  $x_0 = 0$ , donde el valor de  $\hat{\eta}_D$  es máximo,  $x_M = \text{arcosh}(\sqrt{2})$ , en el cual,  $\bar{\eta}_D$  vibra con la máxima amplitud, y  $x_B$ , punto que consideramos muy alejado del origen de coordenadas y por tanto del centro del kink.

### ■ Espectro de frecuencias para la segunda componente del campo en $x_0$ :

En la Figura 6 podemos apreciar la aparición de una única frecuencia, correspondiente a la vibración del modo discreto ortogonal. Es posible apreciar que la amplitud correspondiente a esta frecuencia varía en función del valor del parámetro  $\sigma$ , tendencia que fue predicha tanto en el método de Manton y Merabet como en el de Oxtoby y Barashenkov. El hecho de que esta frecuencia no se desvanezca del todo con el tiempo se debe principalmente a que es la fuente que alimenta toda la radiación emitida por el sistema.

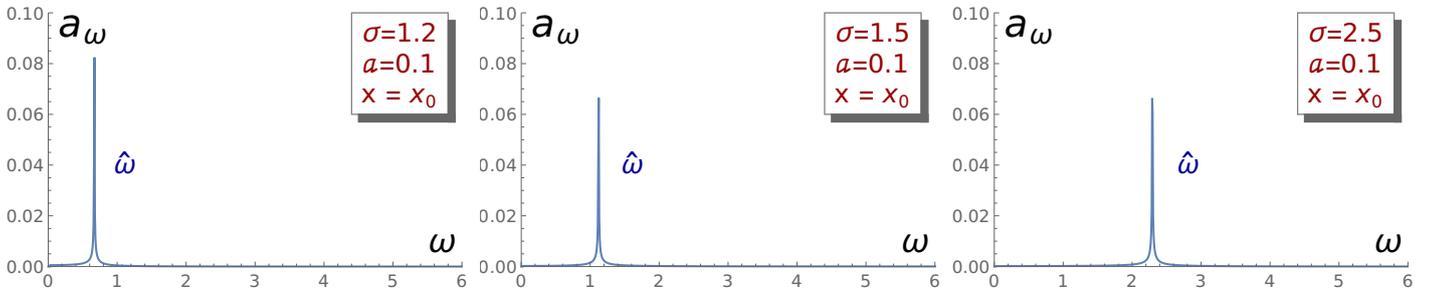


Figura 6: Espectro de frecuencias encontrado para la segunda componente del campo en el punto  $x_0$  para distintos valores de  $\sigma$ .

- **Espectro de frecuencias para la primera componente del campo en  $x_M$ :**

Como podemos apreciar en la Figura 7, en este caso, aparecen dos frecuencias distintas. La frecuencia  $\bar{\omega}$  se corresponde con la vibración del modo discreto longitudinal. En el caso de  $2\hat{\omega}$ , como ya hemos visto en la Sección 3, este término solo se comporta como una onda plana lejos del origen, por lo que todavía no es un término puramente radiativo. Esto explica también el hecho de que esta frecuencia siga apareciendo en  $\sigma < \sqrt{2}$ , pues en este rango, este término en cuestión se comportará como  $f(x) \sin 2\hat{\omega}t$ , donde  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

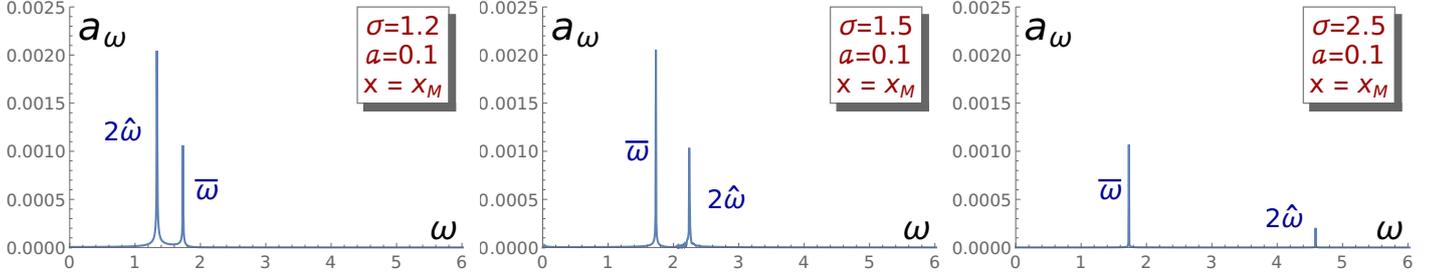


Figura 7: Espectro de frecuencias encontrado para la primera componente del campo en el punto  $x_M$  para distintos valores de  $\sigma$ .

- **Espectro de frecuencias del campo en  $x_B$ :**

- **Espectro de frecuencias para la primera componente:**

Tal y como hemos predicho en la Sección 3, en la primera componente del campo aparece un término radiativo con frecuencia  $2\hat{\omega}$ . Esto está en concordancia con los resultados numéricos obtenidos, además, de (3.19) y (3.62) es fácil darse cuenta de que la amplitud asociada a  $2\hat{\omega}$  disminuye según aumenta  $\sigma$ , tendencia que se observa en la Figura 8. Otro detalle importante es que  $2\hat{\omega}$  no aparece en  $\sigma = 1,2 < \sqrt{2}$ , hecho que también habíamos predicho con anterioridad.

Por otro lado, también entra en juego  $4\hat{\omega}$ , pero, al tener tan poco peso en el espectro puede ser asociado a efectos de cuarto orden. A parte de esto, se puede notar la presencia del espectro continuo de radiación, el cual disminuye a medida que aumenta la frecuencia.

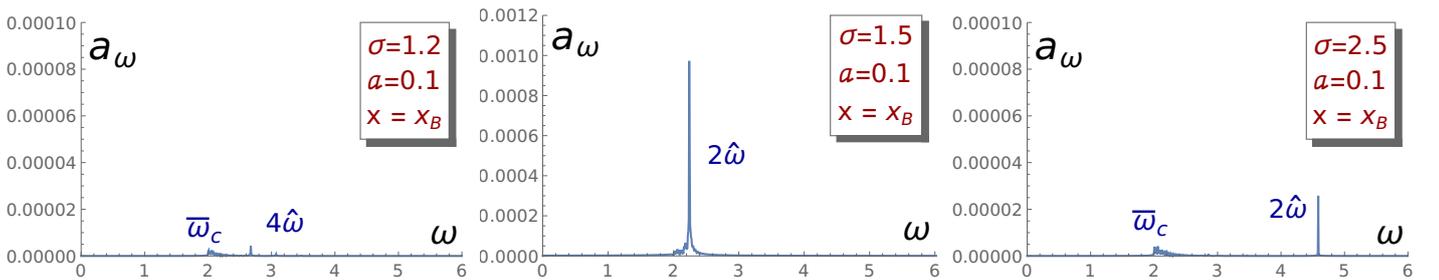


Figura 8: Espectro de frecuencias encontrado para la primera componente del campo en el punto  $x_B$  para distintos valores de  $\sigma$ .

- **Espectro de frecuencias para la segunda componente:**

Tal y como habíamos visto haciendo uso de teoría de perturbaciones, en la Figura 9, nos encontramos con que el sistema emite radiación a frecuencias  $3\hat{\omega}$  y  $\bar{\omega} + \hat{\omega}$ . Al contrario de lo que ocurriría con  $2\hat{\omega}$ , estos términos se siguen conservando en  $\sigma = 1,2$ . La causa de este fenómeno se debe a que, si nos fijamos en las fórmulas para  $q_2$  y  $q_3$  halladas en la Sección 3.1.2, estas cantidades son reales para  $\sigma > \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1,061$ , lo cual provoca que se

sigan comportando como ondas planas en  $x \rightarrow \infty$ . Es importante destacar que, aunque tenga un peso muy pequeño, también aparece en el espectro el continuo de frecuencias correspondiente al segundo campo.

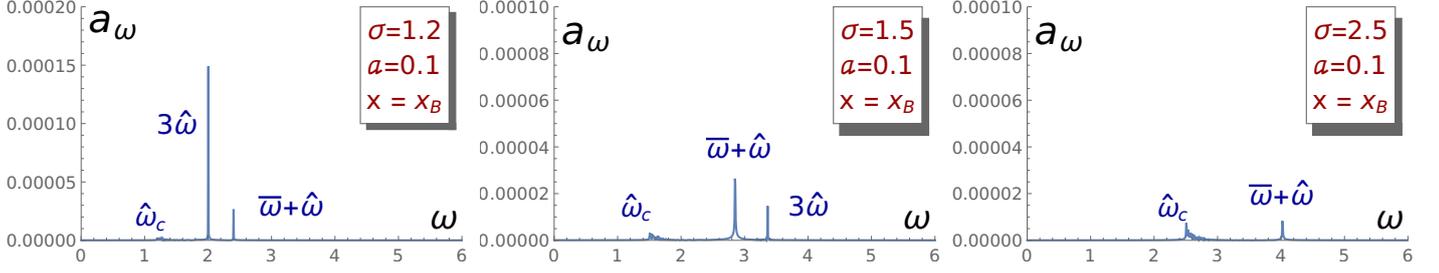


Figura 9: Espectro de frecuencias encontrado para la segunda componente del campo en el punto  $x_B$  para distintos valores de  $\sigma$ .

Finalmente, en las Figuras 10 y 11 podemos apreciar de forma más simple todas las frecuencias que nos hemos encontrados para cada uno de los tres puntos analizados para ambas componentes del campo bajo estudio y para todos los valores de  $\sigma$  en el rango  $\sigma \in [1, 5]$ .

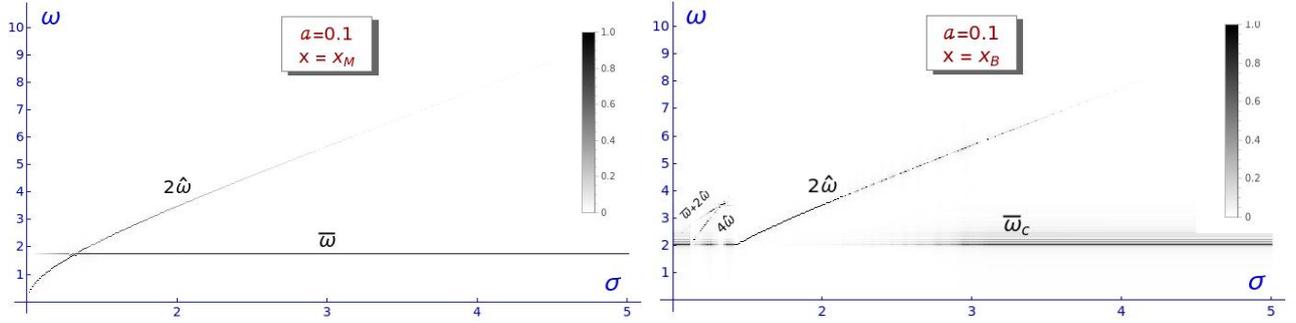


Figura 10: Frecuencias de vibración para el primer campo como función de  $\sigma$  cuando el kink es excitado mediante el modo ortogonal discreto de vibración con  $\hat{a}_0 = 0,1$  en  $x_M$  y  $x_B$ .

De las imágenes de la parte derecha de las Figuras 10 y 11 podemos apreciar que, a medida que las frecuencias  $2\hat{\omega}$ ,  $3\hat{\omega}$  y  $\bar{\omega} + \hat{\omega}$  van disminuyendo su amplitud, los continuos de radiación de ambos campos la ganan. Esto es de esperar, pues la energía invertida en excitar las citadas frecuencias, a valores grandes de  $\sigma$ , irá destinada a aumentar la radiación emitida en el continuo de frecuencias.

Por otro lado, en la Figura 10, también se puede notar la presencia de  $4\hat{\omega}$  y de  $\bar{\omega} + 2\hat{\omega}$ . Su peso en los gráficos es muy pequeño, y como ya hemos argumentado anteriormente, su aparición es debida a términos de orden superior a los analizados. De hecho, estas mismas frecuencias surgieron en los cálculos relativos a los desarrollos a cuarto orden del método de Oxtoby y Barashenkov (en concreto, en la fórmula (3.77)).

En lo referente al segundo campo, en la Figura 11 vemos que, para valores de  $\sigma$  cercanos a la unidad  $3\hat{\omega}$  tiene un mayor peso que  $\bar{\omega} + \hat{\omega}$ , mientras que ocurre lo contrario para  $\sigma \gg 1$ . Si nos fijamos en (3.33) podremos ver que  $\hat{a}_{\bar{\omega} + \hat{\omega}}$  es proporcional a  $\sigma^2 - 1$ , factor que provoca que, cuando  $\sigma \approx 1$ , esta amplitud sea muy pequeña. Este mismo factor es también la razón del crecimiento de  $\hat{a}_{\bar{\omega} + \hat{\omega}}$  frente a  $\hat{a}_{3\hat{\omega}}$  para valores grandes de  $\sigma$ .

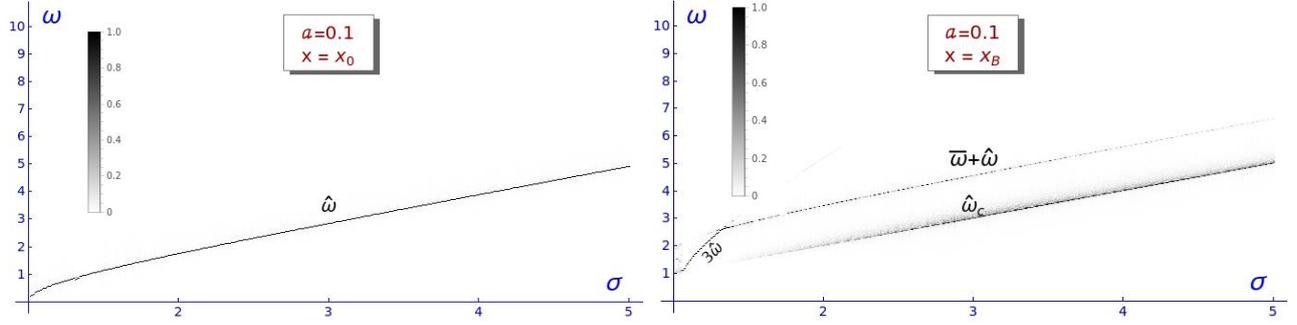


Figura 11: Frecuencias de vibración para el segundo campo como función de  $\sigma$  cuando el kink es excitado mediante el modo ortogonal discreto de vibración con  $\hat{a}_0 = 0,1$  en  $x_0$  y  $x_B$ .

### 4.3. Comparación de la dependencia de las amplitudes de radiación con $\sigma$

Para concluir la presente Sección, se ha realizado una comparación entre los resultados numéricos y los analíticos de la dependencia de las amplitudes de cada radiación con el parámetro  $\sigma$  (Figura 12). Analizando estas gráficas en detalle, podemos concluir que las predicciones teóricas encajan a la perfección con los resultados numéricos. Además, los órdenes de magnitud en los que se encuentra cada amplitud concuerdan también con los cálculos analíticos, pues tenemos que  $a_{3\hat{\omega}}$  y  $a_{\bar{\omega}+\hat{\omega}}$  son del orden de  $\hat{a}_0^3$  y que  $a_{2\hat{\omega}}$  es del orden de  $\hat{a}_0^2$ , tal y como predijimos con ambos métodos perturbativos en la Sección 3. Es más, se aprecian a la perfección las divergencias en  $\sigma_1 = \sqrt{2}$  y  $\sigma_2 = \frac{\sqrt{7}}{2}$  predichas en las Secciones 3.1.1 y 3.1.2.

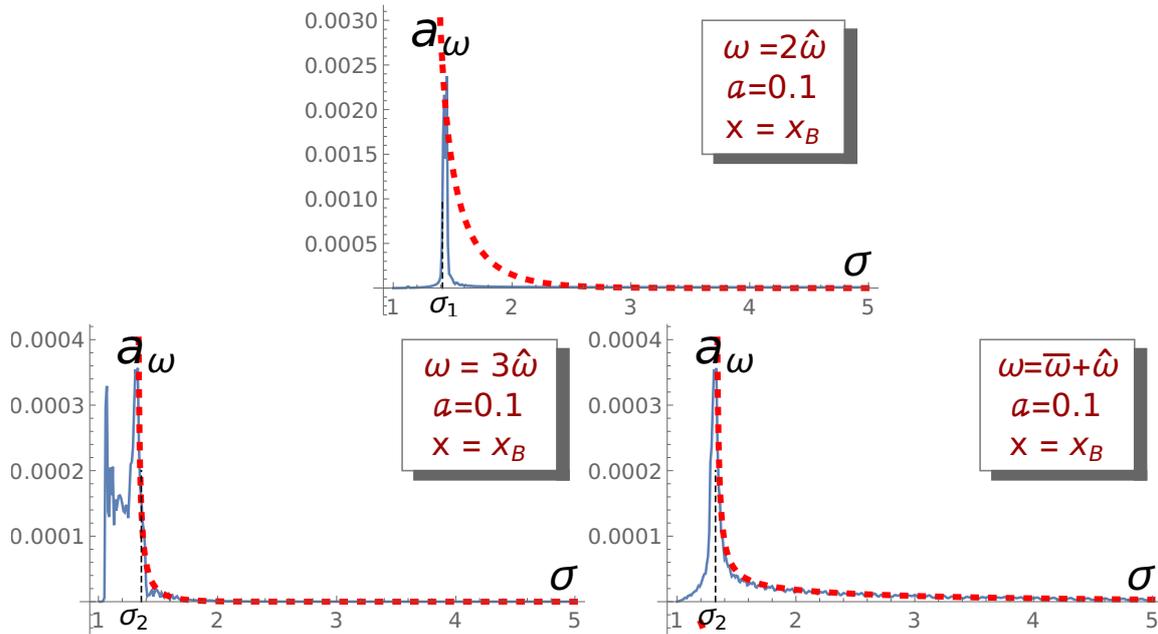


Figura 12: Comparación entre los resultados numéricos y analíticos para la dependencia de las amplitudes de radiación asociadas a  $2\hat{\omega}$ ,  $3\hat{\omega}$  y  $\bar{\omega} + \hat{\omega}$  con el parámetro  $\sigma$ . Las líneas rojas discontinuas se corresponde con las predicciones teóricas (3.19), (3.32) y (3.33), mientras que las líneas azules se corresponden con los resultados numéricos.

## 5. Conclusiones

A lo largo del presente trabajo hemos analizado con detalle cómo los modos discretos de vibración longitudinales y ortogonales asociados al kink en el modelo MSTB para  $\sigma > 1$  se relacionan entre sí. Durante este estudio, hemos conseguido obtener que esta interacción entre modos provoca, en segundo y tercer orden de teoría de perturbaciones, radiación cuando nos encontramos lo suficientemente alejados del origen de coordenadas.

Usualmente, en la literatura, se analizan procesos de scattering entre kinks para intentar desentrañar el funcionamiento físico de este tipo de procesos de transferencia de energía, siendo, por lo tanto, poco habituales los desarrollos en los que se parte de un kink excitado mediante uno de sus modos de vibración. Es por ello que el trabajo realizado y todos los desarrollos presentados constituyen un nuevo punto de vista en relación al estudio del comportamiento de los defectos topológicos en teoría de campos. Es más, las teorías de perturbaciones aquí usadas pueden ser adaptadas para estudio y entendimiento de sistemas más complejos que los estudiados, por ejemplo en teorías de campos escalares con otros tipos de potencial o con de tres o más componentes.

A la hora de realizar tanto los cálculos analíticos como las simulaciones numéricas, hemos visto que prácticamente la totalidad de los resultados obtenidos dependían directamente del valor del parámetro  $\sigma$ . Esta dependencia provoca la aparición y desaparición de frecuencias en los espectros de los campos. Por ejemplo, en el régimen  $\sigma < \sqrt{2}$ , pudimos ver que el término radiativo de la primera componente del campo desaparecía completamente cuando nos encontrábamos lejos del origen de coordenadas. Además, hemos podido ver que estas mismas cantidades se mantienen prácticamente independientes del valor inicial con el que excitamos la amplitud de los modos de vibración correspondientes al kink analizado.

Todo este trabajo nos ha permitido obtener una excelente aproximación de la descripción de la evolución del kink perturbado y la forma que toma la radiación emitida a frecuencias  $2\hat{\omega}$ ,  $3\hat{\omega}$ ,  $\bar{\omega} + \hat{\omega}$ , así como la dependencia de las respectivas amplitudes con el parámetro  $\sigma$ . Una extensión de los razonamientos y resultados desarrollados en el presente trabajo puede consultarse en la Referencia [35], en donde se realiza un análisis más exhaustivo de los resultados de las simulaciones numéricas.

Centrándonos más en las técnicas analíticas, hemos usado dos teorías de perturbaciones distintas, las cuales han demostrado complementarse entre sí. Por ejemplo, aunque el método de Manton y Merabet nos haya dado una dependencia de las amplitudes de radiación con  $\sigma$  que concuerda con todo lo llevado a cabo con las simulaciones numéricas, ha sido el método de Oxtoby y Barashenkov el que nos ha permitido llegar a órdenes más altos, pudiendo así predecir la existencia de más frecuencias en los espectros de la primera componente del campo. Es más, en ambos métodos hemos obtenido expresiones para la misma magnitud cuya forma es prácticamente idéntica, este es el caso de las leyes de decaimiento calculadas para  $\hat{a}(t)$  o la obtención de las amplitudes de radiación para la frecuencia  $2\hat{\omega}$ .

Por último, cabe destacar que la totalidad de los fenómenos físicos desentrañados en el presente documento son altamente novedosos y dan pie a nuevas posibilidades para intentar mejorar aún más la comprensión de estos sorprendentes fenómenos. Una de estas posibilidades puede consistir en la aplicación de estos mismos métodos a nuevos modelos, o incluso estudiar los mecanismos de transferencia de energía cuando, inicialmente, excitamos varios modos de vibración.

## A. Anexo: Resolución general a una ecuación diferencial homogénea con coeficientes que incluyen funciones hiperbólicas

En el presente Anexo, expondremos como obtener soluciones a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} + \left( \epsilon - \nu \cosh 2\mu - \nu \sinh 2\mu \tanh x + \cosh^2 \mu \operatorname{sech}^2 x \right) g(x) = 0. \quad (\text{A.1})$$

La solución a (A.1) puede ser dada en términos de los parámetros  $a$  y  $b$  obtenidos del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = -\epsilon + \nu \cosh 2\mu, \\ 2ab = \nu \sinh 2\mu. \end{cases}$$

Ahora, si introducimos el cambio de variable dependiente

$$g(x) = e^{-ax} (\operatorname{sech} x)^b F(x) \quad (\text{A.2})$$

en nuestra ecuación diferencial llegamos a que la nueva ecuación a resolver es

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} - 2(a + b \tanh x) \frac{dF(x)}{dx} + (\nu \cosh^2 \mu - b(b + 1)) \operatorname{sech}^2 x F(x) = 0. \quad (\text{A.3})$$

A continuación, si realizamos un segundo cambio de variable, en este caso en la variable independiente dada por

$$u = \frac{1}{2}(1 - \tanh x) \quad (\text{A.4})$$

Con el cambio de variable (A.4), la ecuación (A.3) se transforma en

$$u(1 - u) \frac{d^2 F(u)}{du^2} - 2(a + b + 1 - 2(b + 1)u) \frac{dF(u)}{du} + (\nu \cosh^2 \mu - b(b + 1)) F(u) = 0, \quad (\text{A.5})$$

cuya solución es

$$F(u) = A {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, u) + B u^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, u) \quad (\text{A.6})$$

donde  ${}_2F_1$  es la función hipergeométrica y donde

$$\begin{cases} \alpha = b + \frac{1}{2} - \sqrt{\nu \cosh^2 \mu + \frac{1}{4}}, \\ \beta = b + \frac{1}{2} + \sqrt{\nu \cosh^2 \mu + \frac{1}{4}}, \\ \gamma = a + b + 1. \end{cases}$$

Todo lo expuesto anteriormente, nos permite escribir la solución general a (A.1) como

$$g(x) = e^{-ax} (\operatorname{sech} x)^b \left( A {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, u) + B u^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, u) \right), \quad (\text{A.7})$$

con la variable  $u$  dada por la fórmula (A.4).

Generalmente,  $u^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, u)$  presentará divergencias en el límite  $x \rightarrow \infty$ , es por ello que a la hora de usar la solución (A.7) fijemos  $B = 0$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Este procedimiento se puede encontrar también en el Apéndice C de [4] y el el Capítulo 11 de [36].

## Referencias

- [1] N. Manton, *Topological Solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [2] Y. M. Shnir, *Topological and non-topological solitons in scalar field theories* (Cambridge University Press, Cambridge, 2018).
- [3] A. Vilenkin y E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [4] T. Vachaspati, *Kinks and Domain walls: An Introduction to classical and quantum solitons* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [5] T. Yanagisawa, I. Hase y Y. Tanaka, *Massless and quantized modes of kinks in the phase space of superconducting gaps*, Phys. Lett. A **382**, 3483 (2018).
- [6] D. Melnikov, A.J. Niemi y A. Sedrakyan, *Topological indices of proteins*, Sci. Rep. **9**, 14641 (2019).
- [7] D. Melnikov y A. B. F. Neves, *Chern-Simons-Higgs model as a theory of protein molecules*, J. Appl. Phys. **126**, 244701 (2019).
- [8] A. S. Davydov, *Solitons in molecular systems* (D. Reidel, Dordrech, 1985).
- [9] D. Bazeia y E. Ventura, *Topological twistons in crystalline polyethylene*, Chem. Phys. Lett. **303**, 341 (1999).
- [10] A. Ardian y H. Ramadhan, *Bogomol'nyi equations of classical solutions*, Phys. Rev. D **90**, 105009 (2014).
- [11] C. Almeida, D. Bazeia y L. Losano, *Exploring the vicinity of the Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield bound*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 3351 (2001).
- [12] L. F. Mollenauer y J. P. Gordon, *Solitons in optical fibers—Fundamentals and applications* (Academic Press, Burlington, 2006).
- [13] T. Schneider, *Nonlinear optics in Telecommunications* (Springer, Heidelberg, 2004).
- [14] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, 1995).
- [15] D. K. Campbell, J. S. Schonfeld y C. A. Wingate. *Resonance structure in kink-antikink interactions in  $\phi^4$  theory*. Phys. D **9**, 1 (1983).
- [16] A. Alonso-Izquierdo, J. Queiroga-Nunes y L.M. Nieto, *Scattering between wobbling kinks*, Phys. Rev. D **103**, 045003 (2021).
- [17] A. Alonso-Izquierdo, J. Queiroga-Nunes, L.M. Nieto, *Asymmetric scattering between kinks and wobblers*, Comm. Nonlinear Sci. Numer. **107**, 106183 (2022).
- [18] N.S. Manton y H. Merabet, *kinks-gradient flow and dynamics*, Nonlinearity **10**, 3 (1997).
- [19] I.V. Barashenkov y O.F. Oxtoby, *Wobbling kinks in  $\phi^4$  theory*, Phys. Rev. E **80**, 026608 (2009).
- [20] I.V. Barashenkov, *The continuing story of the Wobbling Kink*, A Dynamical Perspective on the  $\phi^4$  Model, Springer 187 (2019).
- [21] A. Alonso-Izquierdo, *Kink dynamics in the MSTB model*, Phys. Scr. **94**, 085302 (2019).

- [22] C. Montonen, *On solitons with an abelian charge in scalar field theories (I) Classical theory and Bohr-Sommerfeld quantization*, Nucl. Phys. B **112**, 349 (1976).
- [23] R. Rajaraman y E.J. Weinberg, *Internal symmetry and the semiclassical method in quantum field theory*, Phys. Rev. D **11**, 2950 (1975).
- [24] S. Sarker, S.E. Trullinger y A.R. Bishop, *Solitary-wave solution for a complex one-dimensional field*, Phys. Lett. A **59**, 255 (1976).
- [25] J. F. Currie, S. Sarker, A. R. Bishop y S. E. Trullinger, *Statistical mechanics of one-dimensional complex scalar fields with phase anisotropy*, Phys. Rev. A **20**, 2213 (1979).
- [26] R. Rajaraman, *Solitons of Coupled Scalar Field Theories in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **42**, 200 (1979).
- [27] K.R. Subbaswamy y S.E. Trullinger, *Instability of non topological solitons of coupled scalar field theories in two dimensions*, Phys. Rev. D **22**, 1495 (1980).
- [28] K.R. Subbaswamy y S.E. Trullinger, *Intriguing properties of kinks in a simple model with a two-component field*, Physica D **2**, 379 (1981).
- [29] E. Magyari y H. Thomas, *Solitary waves in a 1D anharmonic lattice with two-component order parameter*, Phys. Lett. **100A**, 11 (1984).
- [30] H. Ito, *Kink energy sum rule in a two-component scalar field model of 1+1 dimensions*, Phys. Lett. **112A**, 119 (1985).
- [31] H. Ito y H. Tasaki, *Stability theory for non-linear Klein-Gordon kinks and Morse's index theorems*, Phys. Lett. **113A**, 179 (1985).
- [32] A. Alonso-Izquierdo, M. A. Gonzalez Leon, y J. Mateos Guilarte, *Kink from dynamical systems: domain walls in a deformed  $O(N)$  linear sigma model*, Nonlinearity **13**, 1137 (2000).
- [33] A. Alonso-Izquierdo, M. A. Gonzalez Leon, y J. Mateos Guilarte, *Stability of kink defects in a deformed  $O(3)$  linear sigma model*, Nonlinearity **15**, 1097 (2002).
- [34] A. Alonso-Izquierdo y J. Mateos Guilarte, *Generalized MSTB models: Structure and kink varieties*, Physica D **237**, 3263 (2008).
- [35] A. Alonso-Izquierdo, D. Miguélez-Caballero, L. M. Nieto y J. Queiroga-Nunes, *Wobbling kinks in a two-component scalar field theory: Interaction between shape modes*, Preprint USal-UVa (2022).
- [36] P. Morse y H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill Book Company, 1953).