

Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias
Grado en Estadística

Curso 2021/2022

**Trabajo de Fin de Grado:
Paradoja de Parrondo y Aplicaciones**



Autor/a:
Cristina Domingo Redondo

Tutor:
Eustasio del Barrio Tellado

Julio de 2022, Valladolid

Índice general

1. Contexto histórico	6
2. Marco teórico	8
2.1. Procesos estocásticos en tiempo discreto	9
2.2. Cadenas de Markov en tiempo discreto	10
2.3. Camino aleatorio	13
2.4. Juegos de Markov	13
2.5. Procesos estocásticos en tiempo continuo	22
2.6. Movimiento browniano	23
2.7. Trinquete browniano	26
2.8. Trinquete browniano intermitente	28
3. Aplicaciones	33
3.1. Caso práctico: COVID-19	35
3.1.1. Modelo SIADE	36
3.1.2. Función de coste	41
3.1.3. Alternancia de estrategias	43
4. Conclusiones	48

Índice de figuras

2.1.	Cadena de Markov	11
2.2.	Simulación en tiempo discreto - Estrategia A	18
2.3.	Simulación en tiempo discreto - Resultado promedio es- trategia A	19
2.4.	Simulación en tiempo discreto - Estrategia B	20
2.5.	Simulación en tiempo discreto - Resultado promedio es- trategia B	20
2.6.	Simulación en tiempo discreto - Combinación AB	21
2.7.	Simulación en tiempo discreto - Resultado promedio com- binación AB	22
3.1.	Resultados evolución pandemia - Estrategia A	44
3.2.	Resultados evolución pandemia - Estrategia B	45
3.3.	Resultados evolución pandemia - Estrategia B	45
3.4.	Resultados evolución pandemia - Combinación AB	46

Resumen

Se entiende por paradoja a todo dicho o hecho que, en apariencia, resulta contrario a la lógica. La Paradoja de Parrondo se definió como un proceso paradójico en relación a la Teoría de Juegos. Dicho proceso involucra dos juegos de azar que, jugados individualmente, tienden a perder la partida. Sin embargo, una combinación aleatoria de ambos juegos en sucesivas jugadas, tiende a ganarla. Este resultado contraintuitivo es explicable mediante procesos de Markov y un modelo de trinquete browniano intermitente.

Este proceso, además de resultar sorprendente, presenta innumerables aplicaciones. La utilidad de la Paradoja de Parrondo no se limita al dominio de la matemática aplicada, siendo extrapolable a otros campos como la economía, la salud o la biología.

Abstract

Paradox is understood as any statement or fact that, in appearance, is contrary to logic. Parrondo's Paradox was defined as a paradoxical process in relation to Game Theory. This process involves two games of chance that, played individually, tend to lose the game. However, a random combination of both games in successive plays tends to win the game. This counterintuitive result is explainable by Markov processes and a flashing Brownian ratchet model.

In addition to being surprising, this process has countless applications. The usefulness of Parrondo's Paradox is not limited to the domain of applied mathematics, being extrapolable to other fields such as economics, health or biology.

Capítulo 1

Contexto histórico

La Paradoja de Parrondo fue nombrada como tal en 1999, tras una publicación del ingeniero y físico Derek Abbott [1], quien había coincidido con Juan Manuel Rodríguez Parrondo durante una visita de este a la universidad de Adelaida (Australia). Juan M.R. Parrondo es un físico español que durante su investigación sobre los demonios de Maxwell¹, utilizó un dispositivo llamado trinquete browniano² para explicar un movimiento contraintuitivo de micropartículas en el campo de la termodinámica. Su visión del trinquete corregía la hasta ese momento propuesta por el físico estadounidense Richard Feynman. Inspirado en una versión llamada trinquete intermitente, en 1996 ideó los juegos como una ilustración pedagógica del trinquete browniano. Se puede considerar que los denominados juegos de Parrondo son una versión en tiempo discreto y espacio discreto del trinquete intermitente continuo.

Gracias al nuevo análisis de Parrondo y trabajando de manera conjunta con Abbott, quien se encontraba investigando también sobre los demonios de Maxwell, se llegó a una explicación sobre este fenómeno que concluyó con la publicación del artículo en 1999. Tras dicha publicación, este fenómeno aplicado a la teoría de juegos empezó a estudiarse detalladamente fuera del campo de la física, estableciéndose matemáticamente para la comunidad científica por Allison y Abbott en 2002.

¹Experimento mental diseñado como representación de la segunda ley de la termodinámica.

²Rueda de trinquete conectada a una paleta como parte de un experimento mental microscópico, concebido como móvil perpetuo aparente que parece violar el segundo principio de la termodinámica

Actualmente se sigue estudiando su aportación a campos como la economía, mediante la utilización de modelos simples de libros de texto de finanzas sobre rendimientos de valores. En este contexto, la Paradoja demuestra que las inversiones individuales con rendimientos medios negativos a largo plazo se pueden combinar fácilmente en carteras diversificadas con rendimientos medios positivos a largo plazo. También resulta interesante su aportación a la biología, ya que la alternancia periódica de ciertos organismos entre comportamientos nómadas y coloniales se ha sugerido como estrategia de supervivencia celular en ecosistemas. Las aplicaciones de la paradoja de Parrondo también se pueden encontrar en la teoría de la fiabilidad³.

El objetivo principal de este estudio, tal y como se detalla en los capítulos posteriores, es explicar el fundamento de esta Paradoja, así como resaltar sus múltiples aplicaciones y utilidades no solo en el ámbito de la matemática aplicada, sino en otros campos como el de la salud.

³Variables aleatorias que son interpretables matemáticamente en relación con la ocurrencia de un evento o fallo, determinante en la funcionalidad de un sistema que se pretende estudiar.

Capítulo 2

Marco teórico

Para ilustrar el fundamento teórico de este fenómeno se toman dos juegos, A y B, en los que el jugador realiza una apuesta de una unidad. $X(t)$ denota el capital del jugador en el instante t , donde $t=0, 1, 2, \dots$ representa el número de turnos jugados. El juego A consiste en lanzar una moneda ligeramente sesgada tal que la probabilidad p_A de ganar sea inferior a la perder, es decir, $p_A = 1/2 - \varepsilon$, donde el sesgo $\varepsilon > 0$. El segundo juego B, se juega con dos monedas sesgadas. Una moneda “mala”, y una moneda “buena”. El jugador debe lanzar la moneda mala si su capital $X(t)$ es un múltiplo de 3, de forma que la probabilidad de ganar p_{mala} en este caso se considera $p_{mala} = 1/10 - \varepsilon$. En caso contrario, se lanza la moneda buena cuya probabilidad de ganar corresponde a $p_{buena} = 3/4 - \varepsilon$.

Para estas elecciones de p_A , p_{buena} y p_{mala} , se demostrará que ambos juegos son justos¹ si $\varepsilon = 0$, en el sentido de que $E(X(t))$ es constante. También se ilustrará que ambos juegos tienden a perder cuando $\varepsilon > 0$, de manera que $X(t)$ va disminuyendo con el número de turnos t . Sin embargo, $X(t)$ tenderá a aumentar con t para una combinación aleatoria de ambos juegos.

Estas cuestiones se describen a continuación en relación con los pro-

¹ $E(\text{ganancia del juego})=0$

cesos estocásticos tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo, centrándose en los caminos aleatorios y las cadenas de Markov, así como con el movimiento browniano y su relación con el trinquete browniano intermitente.

2.1. Procesos estocásticos en tiempo discreto

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $X(t)$ que representan magnitudes que varían en función de otra variable, generalmente el tiempo t . Esta familia uniparamétrica de variables aleatorias permite modelar procesos dinámicos en los que existe cierta aleatoriedad.

En el caso de los procesos estocásticos $X(t)$ con tiempo $t \in T$, se dice que el proceso es en tiempo discreto cuando T representa un conjunto numerable de valores discretos. Generalmente se toma $T \subseteq \mathbb{N}$.

Para los procesos discretos las variables aleatorias $X(t)$ toman valores en un conjunto discreto E que se denomina espacio de estados. La secuencia de variables que indique el valor del proceso en instantes sucesivos t se puede representar como:

$$X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$$

donde cada variable X_j con $j \in [1, n]$ presenta una distribución de probabilidad. Estas probabilidades se denominan de ocupación del estado ($P(X_j = x_j)$) y se estudian a partir de las probabilidades de cambio entre los distintos estados E , denominadas probabilidades de transición ($p_{i,j}$ = probabilidad de pasar del estado i al estado j = $P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_i)$ con $i, j \in E$).

2.2. Cadenas de Markov en tiempo discreto

Para este estudio se pretende centrar el interés en un proceso estocástico en tiempo y espacio de estados discretos conocido como cadena de Markov en tiempo discreto. Este tipo de procesos deben cumplir la Propiedad de Markov:

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

para cualquier elección de $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in E$ tal que $P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0$.

Estas cadenas se considerarán homogéneas si las probabilidades de transición entre estados son las mismas en cada paso, esto es, independientemente del instante en el que nos encontremos:

$$p_{i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \text{ independiente de } n$$

Será no homogénea en caso contrario.

Otra característica de estos procesos derivada de la Propiedad de Markov, es que las probabilidades de transición $p_{i,j}$ forman una matriz estocástica P de transición, con $p_{i,j} > 0$ y $\sum p_{i,j} = 1$. Además, las probabilidades de transición en m pasos se pueden representar como $p_{i,j}^{(m)} := P(X_{n+m} = j | X_n = i)$, entendida como la probabilidad de llegar al estado j desde i tras m pasos, con $P^{(n)} = [p_{i,j}^{(n)}]$ para $i, j \in E$ concluyendo que $P^{(n)} = P^n$.

A partir de estas probabilidades se puede calcular la distribución estacionaria π^T . Se emplea la distribución marginal en el instante n $p_n^T = p_0^T P^n$, expresión que deriva en $\pi^T = p_n^T$. Una cadena será estacionaria si sus distribuciones marginales son constantes, esto es:

$$\begin{aligned}
P(X_m = i_0; X_{m+1} = i_1; \dots; X_{m+n} = i_n) &= \\
&= P(X_0 = i_0; X_1 = i_1; \dots; X_n = i_n)
\end{aligned}$$

Con la distribución estacionaria se describen las ecuaciones de equilibrio global:

$$\sum_{j \in E} \pi_i p_{i,j} = \sum_{j \in E} \pi_j p_{j,i}$$

Otra propiedad interesante relacionada con las anteriores es la reversibilidad. Una cadena estacionaria será además reversible tal y como se describe en las ecuaciones de equilibrio detallado si y solo si para cada $i, j \in E$:

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i}$$

Una cadena de Markov en tiempo discreto homogénea se puede representar como un grafo dirigido en el que cada nodo representa un estado, y con aristas entre aquellos estados con probabilidad de transición entre ellos mayor que cero.

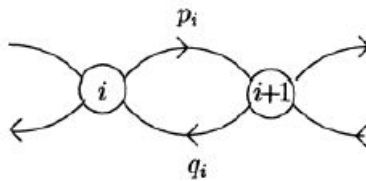


Figura 2.1: Cadena de Markov

Si se denomina $A_i := \{n \geq 1 : p_{i,i}^{(n)} > 0\}$ al conjunto de retornos posibles al estado i con n instantes, el periodo de i se denominará $d_i = \text{mcd}(A_i)$.

En este estudio es de interés el planteamiento de las cadenas irreducibles, relacionadas con estas otras propiedades. Una cadena es irreducible si posee una única clase de comunicación, esto es, si dos estado i, j tal que $i \rightarrow j, j \rightarrow i \Rightarrow i \leftrightarrow j \forall i, j$, es decir, se puede ir de un estado a cualquier otro en un número finito de pasos. En una cadena irreducible todos los estados tienen el mismo periodo ($d_i = d_j$).

Para conocer el comportamiento de estos procesos a largo plazo conviene caracterizar sus estados. Entendiendo T_i como el tiempo de retorno al estado i , dicho estado será persistente si $P_i(T_i < \infty) = 1$ (en caso contrario, i será transitorio). Si además $E_i(T_i) < \infty$ la persistencia será positiva.

Si una cadena irreducible tiene sus estados persistentes, siempre tiene (al menos) una medida invariante x , la cual se puede definir como $x = (x_i)_{i \in E}$ para P si $x_i \geq 0, i \in E$, algún $x_i > 0$ y $x^T = x^T P$; x_i número esperado de visitas a nodo i partiendo de cero. Si dicha medida invariante es sumable ($\sum_{i \in E} x_i < \infty$) entonces la distribución estacionaria de la cadena π_i es única e igual a $(\sum_{j \in E} x_j)^{-1} x_i$ y además la cadena será persistente positiva. Si no es sumable, no hay distribución estacionaria. De esta propiedad también se puede concluir que si una cadena homogénea irreducible tiene espacio de estados finito, será persistente positiva.

Si una cadena homogénea es irreducible, persistente positiva y aperiódica, será ergódica. Por el Teorema de la convergencia al equilibrio tendremos entonces que para la cadena ergódica con distribución π :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}^{(n)} = \pi_j$$

2.3. Camino aleatorio

El camino aleatorio es un caso específico de las cadenas de Markov en tiempo discreto homogéneas en el cual los estados consecutivos están comunicados de la forma: $i \rightarrow i + 1$ con probabilidad p y $i + 1 \rightarrow i$ con probabilidad $1 - p$, donde todos los estados de la forma $i \leftrightarrow j$ son cadenas irreducibles ($i, j \in E$).

Si se define un camino aleatorio con $E = N$, $p_{k,k+1} = p, p_{k,k-1} = 1 - p = q$, $k \geq 1$, $p_{0,1} = 1$, periodo d , la medida invariante se corresponderá:

$$x_n = px_{n-1} + (1 - p)x_{n+1} \text{ con } n \geq d$$

Si $p < \frac{1}{2}$, la cadena será persistente positiva, si no, no. Si el camino aleatorio corresponde a una cadena reversible, se cumplen las ecuaciones de equilibrio detallado:

$$p\pi_i = (1 - p)\pi_{i+1}$$

Esta ecuación resulta de interés, ya que cuando existe solución para las ecuaciones de equilibrio detallado, entonces esa solución se corresponde con la única distribución estacionaria.

2.4. Juegos de Markov

Tomando como referencia la definición de Kevin Leyton-Brown y Yoav Shoham [2], un juego estocástico es una colección de juegos de

forma normal² en el que los jugadores ponen en práctica repetidamente juegos de este tipo. El juego concreto que se aplica en una iteración determinada depende probabilísticamente del juego anterior y de las acciones realizadas por todos los jugadores participantes en esa partida, por lo que cumple la denominada propiedad de Markov³ y se puede representar de manera similar a las cadenas de Markov discretas, entendiéndose como una tupla (Q, N, A, P, R) , donde:

Q es un conjunto finito de estados, N es un conjunto finito de n jugadores, $A = A_1 \times \dots \times A_n$ sucesión donde A_i es el conjunto de acciones disponibles para el jugador i , $P : Q \times A \times Q \rightarrow [0, 1]$ como función de transición con $P(q, a, \hat{q})$ probabilidad de pasar del estado s al estado \hat{q} después de la acción a , $R = r_1, \dots, r_n$, donde $r_i : Q \times A \rightarrow \mathbb{R}$ función de ganancia del jugador i .

Un proceso de decisión de Markov discreto es simplemente un juego estocástico con un solo jugador, mientras que un juego repetido es un juego estocástico en el que sólo hay un estado.

Se asume que el espacio estratégico de los jugadores es el mismo en todos los juegos y, por lo tanto, que la diferencia entre los juegos se encuentra únicamente en la función de ganancia. Este espacio de estrategia se define como $h_t = (q^0, a^0, q^1, a^1, \dots, a^{t-1}, q^t)$ con t estados del juego y H_t el conjunto finito de todas las posibles jugadas. La estrategia del jugador puede consistir en cualquier combinación de estrategias deterministas, siempre que cumpla con la restricción de que dicha combinación tenga lugar en cada jugada de manera independiente.

Un juego estocástico es irreducible si cada estrategia da lugar a una cadena de Markov irreducible⁴ sobre el conjunto de jugadas, lo que

²Representación de la utilidad de cada jugador para cada estado del mundo cerrado del juego sabiendo que los estados de este dependen sólo de las acciones combinadas de los jugadores.

³Se dice que un proceso estocástico es un proceso de Markov si la evolución del proceso depende únicamente del pasado inmediato.

⁴Se dice que una cadena de Markov es irreducible si es posible ir de cualquier estado a cualquier otro en un número finito de pasos.

significa que cada jugada puede alcanzarse con probabilidad positiva independientemente de la estrategia adoptada. En el caso de estudio, los juegos A y B cumplen dicha condición, lo cual aporta una de las condiciones necesarias para ilustrar la Paradoja, que todos los estados de la cadena de Markov posean el mismo periodo. Además, en este tipo de juegos, las medias límite están bien definidas, y, siempre que demos a cada jugador una ganancia esperada al menos tan grande como su valor mínimo acotado, cualquier par de recompensas factible puede alcanzarse.

En relación a los juegos A y B utilizados para ilustrar la paradoja de Parrondo, si se toma el juego B individualmente se puede redefinir la probabilidad de ganar comentada anteriormente como

$$p_{ganar}(t) = \pi_0(t) * p_{mala} + [1 - \pi_0(t)] * p_{buena} \quad (2.1)$$

donde $\pi_0(t)$ es la probabilidad de que el capital actual $X(t)$ sea múltiplo de 3, es decir, la probabilidad de utilizar en el turno la moneda mala. Esta formulación fue descrita por el propio Parrondo en 2004 [3]. Este valor se puede calcular utilizando cadenas de Markov en tiempo discreto definiendo el proceso $Y(t) \equiv X(t) \bmod 3$, ya que el valor de $Y(t+1)$ dependerá exclusivamente del de $Y(t)$ y por tanto cumple la propiedad de Markov⁵. Se tomarán como únicos posibles estados de este proceso $Y(t)=0, 1, 2$, correspondientes a cuando $X(t)$ es múltiplo de 3, cuando el resto del módulo es uno, o cuando el resto es 2. Si se calcula la distribución estacionaria correspondiente a estos estados de forma que cada $\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y(t) = i)$, $i=0,1,2$:

$$\pi(t) = \begin{pmatrix} \pi_0(t) \\ \pi_1(t) \\ \pi_2(t) \end{pmatrix} \text{ y resolviendo la ecuación } \pi(t) = \Pi_B * \pi(t - 1)$$

⁵ $P(X_{t_n} \in B | X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = P(X_{t_n} \in B | X_{t_{n-1}}), \forall t_1 < \dots < t_n$

con matriz de probabilidades de transición de un estado a otro:

$$\Pi_B = \begin{pmatrix} 0 & p_{mala} & 1 - p_{mala} \\ 1 - p_{buena} & 0 & p_{buena} \\ p_{buena} & 1 - p_{buena} & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene que $\pi_2(t) = (1 - p_{mala})\pi_0(t - 1) + p_{buena}\pi_1(t - 1)$.

Tras iterar varios turnos del juego B, $\pi(t)$ se aproxima al valor estacionario π_B^{st} , de manera que se puede resolver la ecuación

$$\pi_B^{st} = \Pi_B \pi_B^{st} \quad (2.2)$$

obteniendo como solución a dicho valor que $\pi_B^{st} \simeq 0.38 - 0.20\epsilon$. Al sustituir estos valores en la ecuación inicial de probabilidad de ganancia para el juego B, se obtiene que

$$p_{ganar,B} = \frac{1}{2} + \frac{440}{2197}\epsilon + O(\epsilon^2) \quad (2.3)$$

es decir, una probabilidad inferior a un medio para $\epsilon > 0$. Esto demuestra que el juego B es justo cuando $\epsilon = 0$ y que es perdedor para sus valores positivos.

Si se analiza ahora el juego A, jugado siempre con la misma moneda y cuya ganancia no depende del capital anterior, $\pi(t)$ sigue una distribución uniforme en la que $\pi_0(t)$ tiende a $\frac{1}{3}$. Como este valor es menor que el calculado anteriormente para π_{0B}^{st} , se observa que en realidad la función del juego A es disminuir la probabilidad de usar la moneda mala en los turnos en los que se juega B.

Partiendo de estas premisas, se establece una nueva ecuación maestra para la combinación aleatoria de ambos juegos:

$$\pi_{AB}^{st} = \frac{1}{2}[\Pi_B + \Pi_A]\pi_{AB}^{st} \quad (2.4)$$

$$\text{donde } \Pi_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 - p_A & p_A \\ p_A & 0 & 1 - p_A \\ 1 - p_A & p_A & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la ecuación (2.4) el valor de la probabilidad de elegir el juego A, $p_A = \frac{1}{2} - \epsilon$, se obtiene como primer término de la solución que $\pi_{0AB}^{st} \simeq 0.35 + 0.10\epsilon$.

Estableciendo la nueva probabilidad de ganar con esta combinación y sustituyendo los valores de las distribuciones de ambos juegos obtenemos:

$$p_{\text{ganar},AB} = \pi_{0AB}^{st} \times \frac{p_{\text{mala}} + p_A}{2} + [1 - \pi_{0AB}^{st}] \times \frac{p_{\text{buena}} + p_A}{2} =$$

$$\frac{727}{1418} - \frac{486795}{502681}\epsilon + O(\epsilon^2)$$

Para valores de $\epsilon > 0$ suficientemente pequeños, dicha probabilidad es mayor que $\frac{1}{2}$, demostrándose una mayor tendencia a ganar con esta combinación aleatoria. Esto se debe a que aunque el juego A por sí mismo tiene una tendencia descendiente para la función del capital porque utiliza una moneda mala, aumenta la probabilidad de utilizar la moneda buena cuando se juega B, es decir, el juego A refuerza la tendencia positiva ya presente en B lo suficiente como para que la combinación resulte ganadora.

Para la demostración gráfica del comportamiento de cada estrategia y su combinación se emplea la herramienta RStudio [4]. Se ha decidido simular cada estrategia de la forma indicada en las siguientes figuras:

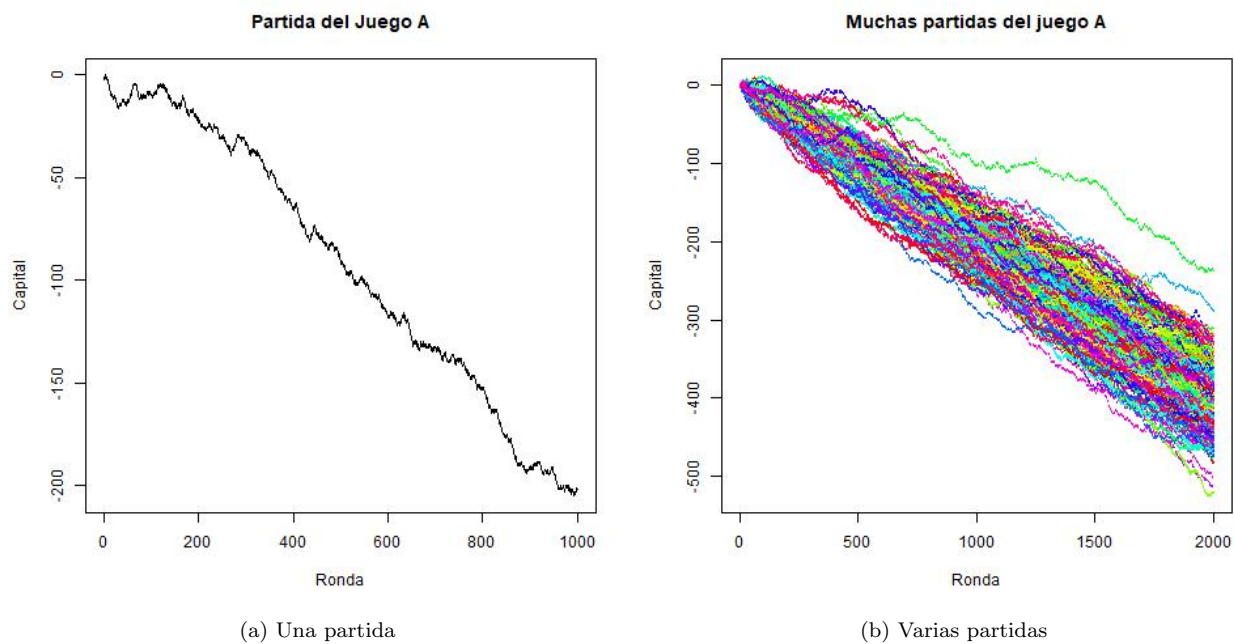


Figura 2.2: Simulación en tiempo discreto - Estrategia A

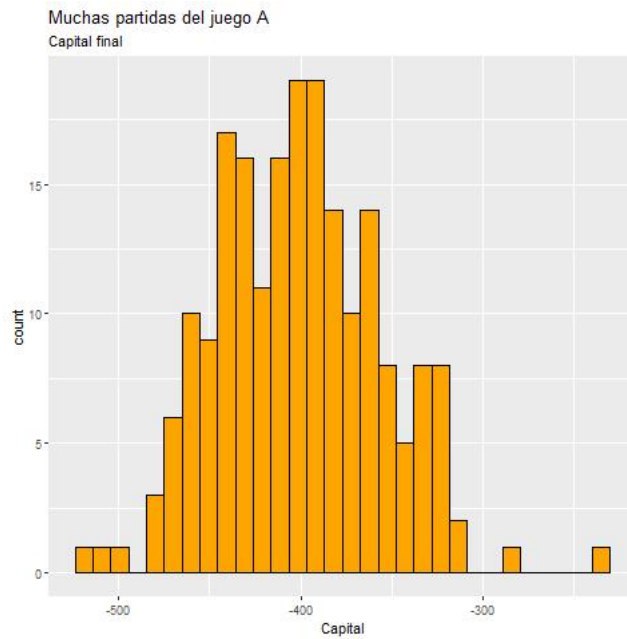


Figura 2.3: Simulación en tiempo discreto - Resultado promedio estrategia A

Como se puede observar, el capital del jugador va disminuyendo en cada ronda en la que se aplica la estrategia A (2.2a). Tras repetir varias partidas aplicando esta estrategia, observamos que la tendencia se mantiene (2.2b). Si se calcula el capital final de varias partidas en las que se emplea esta estrategia (2.3), se observa que el histograma está centrado entorno a valores negativos, es decir, se termina con pérdidas en el promedio de partidas.

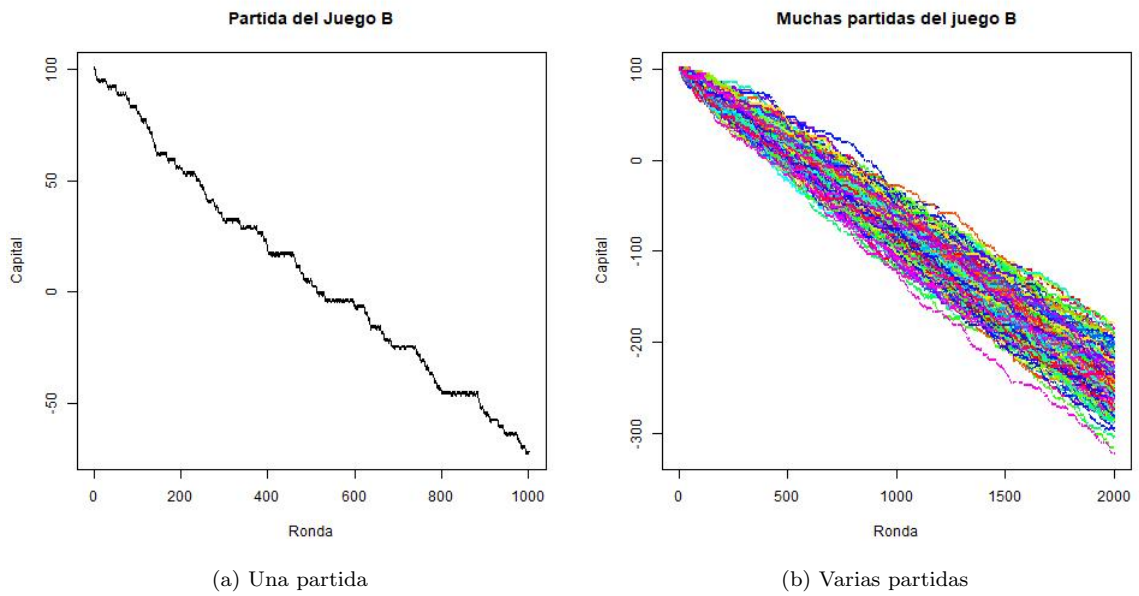


Figura 2.4: Simulación en tiempo discreto - Estrategia B

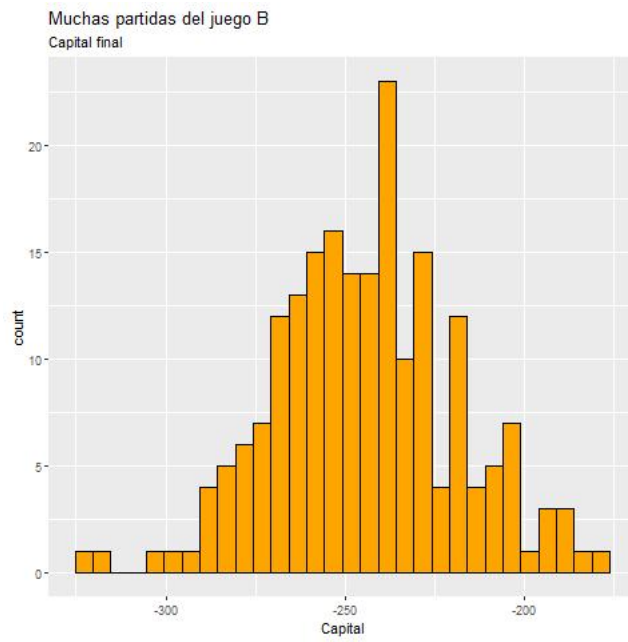


Figura 2.5: Simulación en tiempo discreto - Resultado promedio estrategia B

En el caso de la estrategia B (2.4, 2.5), se llegan a resultados y conclusiones similares a A.

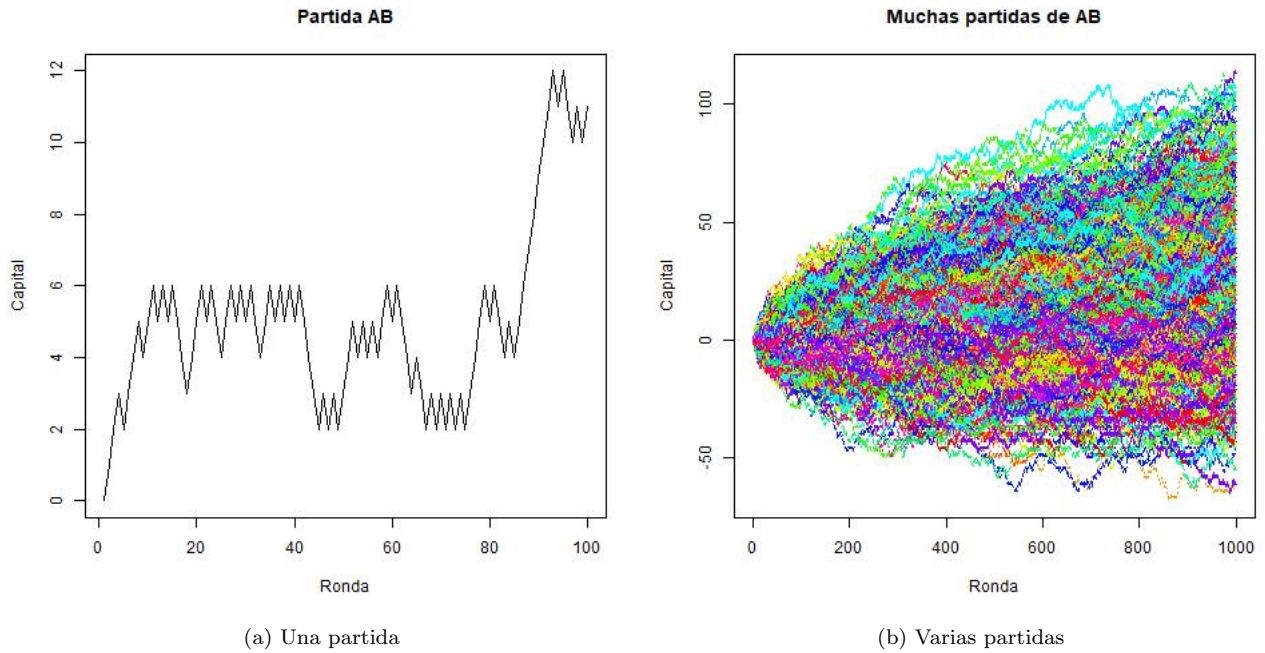


Figura 2.6: Simulación en tiempo discreto - Combinación AB

Para la combinación aleatoria de las estrategias A y B y tras simular varias partidas (2.6), se calcula la media sobre los valores del histograma resultando positiva, es decir, se termina con ganancias en el capital en el promedio de las partidas (2.7):

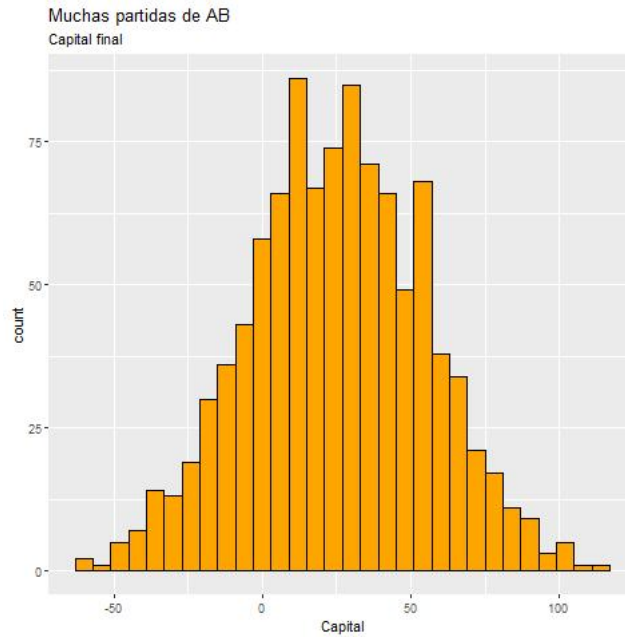


Figura 2.7: Simulación en tiempo discreto - Resultado promedio combinación AB

Una vez explicado el comportamiento de la Paradoja en tiempo discreto, se modelizará en un contexto de tiempo y espacio continuos.

2.5. Procesos estocásticos en tiempo continuo

Como recordatorio a lo mencionado anteriormente en la sección 2.1, se denominan procesos estocásticos a aquellas variables que evolucionan a lo largo del tiempo de manera parcial o totalmente aleatoria. En el caso de los procesos en tiempo continuo, dichas variables X_t dependen de un $t \in T$ en el que $T \in [0, \infty)$.

Las variables aleatorias X_t toman valores en un conjunto que se denomina espacio probabilístico. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ un espacio probabilístico, se observa una muestra aleatoria de tamaño n en relación con un suceso compuesto E formado por sucesos elementales ω :

$E = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \subset \Omega$, de manera que $E \in B$.

El suceso compuesto es un subconjunto contenido en el espacio muestral y es un álgebra de Boole B ⁶. A cada suceso ω le corresponde un valor de una variable aleatoria V , de manera que V es función de ω :

$$V = V(\omega); \quad \omega \in \Omega, \quad -\infty < V < \infty$$

El dominio de esta función corresponde con el campo de variabilidad del suceso elemental y su recorrido es el campo de los números reales. Se considerará proceso aleatorio al valor en (A, \mathcal{A}) de un elemento $X = (\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}, \mathcal{B}_t, (X_t)_t)$ donde $\forall t \in R$, X_t es una variable aleatoria del valor en (A, \mathcal{A}) . Si se observa el suceso ω en un momento t de tiempo:

$$V = V(\omega, t), \quad \omega \in \Omega, t \in T, \quad -\infty < V < \infty.$$

V define así un proceso estocástico en tiempo continuo.

2.6. Movimiento browniano

El movimiento browniano es el movimiento aleatorio que se observa en las partículas que se hallan en un medio fluido (líquido o gaseoso), como resultado de los choques entre las propias moléculas de dicho fluido. Se trata de uno de los procesos estocásticos en tiempo continuo más simples y se encuentra estrechamente relacionado con el camino aleatorio (sección 2.3). Este último se trata de la formalización matemática de la trayectoria que seguiría una de estas moléculas en el medio fluido. Este tipo de procesos se tratan como procesos de Markov, pues matemáticamente se generalizan como procesos aleatorios donde la po-

⁶Sistema de elementos $B = \{0,1\}$

sición de una partícula en cierto instante depende solo de su posición en algún instante previo y del efecto de una variable aleatoria que determina su subsecuente dirección y la longitud de paso. Además, como ya se ha mencionado anteriormente, los caminos aleatorios también varían respecto al tiempo. Como se estudiará a continuación, cuando la longitud del paso se disminuye a valores muy pequeños (instantes $0 < t < 1$), se consideran un caso específico o límite del movimiento browniano [3].

Si se realiza un símil con el caso de aplicación de interés a los juegos, se puede sustituir la trayectoria que sigue la posición de una molécula por la del capital acumulado del jugador en la jugada n tras sucesivas jugadas aleatorias, se denominará W_n . Se puede modelizar como:

$$W_{n+1} = W_n + \varepsilon_{n+1} \quad (2.5)$$

En el que W_n se corresponde con el capital en la jugada anterior y ε_{n+1} con el resultado obtenido en esta jugada:

$$\varepsilon_n \text{ i.i.d} = \begin{cases} +1 & p = \frac{1}{2} \\ -1 & (1-p) = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow W_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$$

Por el Teorema Central del Límite, a medida que las jugadas se sucedan (que n aumente hasta un número suficientemente grande) se observa que:

$$\frac{W_n}{\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

Ya que $E(\varepsilon_n) = 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0$ y $Var(\varepsilon_n) = E(\varepsilon^2) - E^\varepsilon = 1 - 0 = 1$

Si se reduce el intervalo de tiempo entre un juego y el siguiente haciendo estos instantes cada vez más próximos, se puede estudiar este proceso en tiempo continuo para $t \in (0, 1)$:

$$W_n(t) = \frac{W_{[nt]}}{\sqrt{n}} \quad (2.6)$$

$[nt]$ = parte entera del subíndice

$$W_n(t) = \frac{W_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}} \times \sqrt{\frac{[nt]}{n}} \rightarrow N(0, t)$$

$W(t)$ = función aleatoria tal que $\{W_n(t)\}_{0 \leq t \leq 1} \rightarrow W(t)_{0 \leq t \leq 1}$

Se demuestra así como el camino aleatorio discreto aproxima a un movimiento browniano en tiempo continuo, cuyas principales propiedades son:

- $W(0)=0$
- Incrementos independientes de $\{W(t)\}_{t \geq 0}$
- $W(t)-W(s) \rightarrow N(0, t - s)$ si $0 \leq t \leq s$

Estos procesos sirven para definir ecuaciones diferenciales estocásticas, solución recurrente para modelar aquellos procesos que no encajan en un modelo determinista. Para empezar se define la ecuación diferencial determinista más sencilla posible:

$$dX_t = \mu \cdot X_t dt \quad (2.7)$$

$$d(\log(X_t)) = \mu = cte$$

$$\log(X_t) = t \cdot \mu + c \rightarrow X(t) = X_0 \cdot e^{\mu t}$$

Su derivada dX_t depende exclusivamente del tamaño de la función. En ocasiones, esta dependencia no será tan sencilla y estará sujeta a

variabilidad. Para introducir esta variabilidad en la ecuación diferencial, se añade el término de perturbación aleatoria (dB_t):

$$dX_t = \mu \cdot X_t dt + \sigma \cdot X_t dB_t \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) se trata de una ecuación diferencial estocástica homogénea, ya que depende del estado del proceso y no del instante de tiempo. El término (μX_t) se denomina coeficiente de deriva y el término ($\sigma \cdot X_t dB_t$) coeficiente de difusión.

Dicha ecuación se puede modificar para modelar con mayor flexibilidad otros tipos de comportamiento. Llegaríamos entonces a la ecuación:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \quad (2.9)$$

Para el caso particular en el que $\sigma = 0$ se tendría una ecuación diferencial determinista homogénea. Si se añade el término sigma se permite que haya variabilidad, no necesariamente proporcional al tamaño del proceso. Existe una teoría que garantiza que hay soluciones a esta ecuación (2.9) bajo ciertas condiciones. Aquí no se estudia esa teoría, limitándose el estudio a un modelo concreto de ecuación diferencial estocástica. Tanto el trinquete como el movimiento brownianos son soluciones a este tipo de ecuación.

2.7. Trinquete browniano

Un trinquete browniano es un proceso que simula un comportamiento de difusión unidimensional que deriva hacia un mínimo de un potencial periódico asimétrico [5]. Si se plasma dicho proceso gráficamente, se observa que su trayectoria es característica por asemejarse a la silueta de los dientes de una sierra convencional.

Se define el modelo que simula el comportamiento ya mencionado de dientes de sierra comenzando por la definición de su potencial asimétrico $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha} & 0 \leq x \leq \alpha \cdot L \\ \frac{L-x}{1-\alpha} & \alpha \cdot L \leq x \leq L \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (2.10)$$

Este potencial se extiende periódicamente con periodo $L > 0$; L se considera el parámetro de escala, mientras que α es el parámetro de forma. Se requiere que $\alpha \neq \frac{1}{2}$. En el caso del trinquete browniano unidimensional, el coeficiente de difusión vale 1 y el coeficiente de deriva es proporcional al potencial de forma:

$$\mu(x) = -\gamma \cdot V'(x) = \begin{cases} \frac{-\gamma}{\alpha} & 0 \leq x \leq \alpha \cdot L \\ \frac{\gamma}{1-\alpha} & \alpha \cdot L \leq x \leq L \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1], \quad \gamma > 0 \quad (2.11)$$

Si se extiende periódicamente de nuevo para $L \in \mathbb{R}$, se obtiene la ecuación diferencial estocástica que define el proceso de interés mencionado en la sección 2.3:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + dB_t$$

que toma valores entre $[0, \alpha L]$ y donde B_t es un movimiento browniano estándar con carácter aleatorio. $\forall n \in \mathbb{Z}$, este proceso de difusión deriva hacia la izquierda en $[nL, (n + \alpha)L]$ y hacia la derecha en $[(n + \alpha)L, (n + 1)L]$, es decir, deriva hacia un mínimo del potencial V .

2.8. Trinquete browniano intermitente

El proceso concreto que motivó la Paradoja de Parrondo es el trinquete browniano intermitente, un proceso de difusión unidimensional no homogéneo que alterna entre dos regímenes, un movimiento browniano unidimensional y un trinquete browniano, produciendo un movimiento dirigido mediante una aproximación a un camino aleatorio.

Si visualizamos el capital $X(t)$ como la posición de una partícula browniana en una red unidimensional, el juego A, para $\epsilon = 0$, es una discretización del proceso de difusión libre, mientras que el juego B se asemeja al movimiento de la partícula bajo la acción del potencial asimétrico de diente de sierra V . Este potencial de diente de sierra varía con tendencia negativa (*off*) en un intervalo espacial corto $[\tau_1, \tau_1 + \tau_2]$ que se corresponderá con el movimiento browniano, y con una tendencia positiva (*on*) en un intervalo espacial más largo $[\tau_1 + \tau_2, 2\tau_1 + \tau_2]$, que se corresponderá con el comportamiento de un trinquete browniano. Como se reiterará a continuación, en el trinquete intermitente, el juego B rectifica las fluctuaciones del juego A.

Dados $\tau_1, \tau_2 > 0$, este proceso se puede definir con la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = dB_t + \eta(t)\mu(X_t)dt \quad (2.12)$$

donde:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{mod}(t, \tau_1 + \tau_2) < \tau_1 \\ 1 & \text{si } \text{mod}(t, \tau_1 + \tau_2) \geq \tau_1 \end{cases}$$

Para poder simular un proceso de este tipo y aplicarlo análogamente a la ganancia de un juego de azar en vez de a un desplazamiento de partículas, se discretizarán el tiempo y el espacio. Para empezar, se particularizará el coeficiente de deriva al caso en el que $\alpha = \frac{1}{3}$ y

$L = 3$ de manera que el intervalo acotado para valores del proceso $[0, \alpha L] = [0, 1]$. Para discretizar el espacio, se redefine el coeficiente de deriva como $\mu_j = \mu(j + \frac{1}{2})$ en el que se ha sustituido cada intervalo $[j, j+1]$ por su punto medio $j + \frac{1}{2}$.

Para discretizar el tiempo, se sustituye el movimiento browniano por un camino aleatorio simétrico cuando la función del potencial V está en su valor mínimo (*off*), que se corresponderá con el juego A, un juego justo de lanzamiento de monedas. Cuando la función del potencial V se encuentre en un valor máximo (*on*), se sustituirá el trinquete browniano por un camino aleatorio asimétrico que corresponderá al juego B, cuyas probabilidades de transición periódicas dependientes del estado están determinadas por el coeficiente de deriva discretizado:

$$P(j, j + 1) = \begin{cases} p_0 & \text{si } \text{mod}(j, 3) = 0 \\ p_1 & \text{si } \text{mod}(j, 3) = 1 \text{ o } 2 \end{cases} \quad (2.13)$$

Además, $P(j, j-1) = 1 - P(j, j+1)$ con $0 < p_0 < \frac{1}{2}$ debido a que $\mu_j = \mu_0 < 0$ si $\text{mod}(j, 3) = 0$, y $\frac{1}{2} < p_1 < 1$ por $\mu_j = \mu_1$ si $\text{mod}(j, 3) \neq 0$.

El resultado de esta discretización convierte el proceso en tiempo continuo en una cadena de Markov discreta. De cara a una simulación, esta discretización es necesaria.

Debido a estas probabilidades de transición y en relación a los procesos de Markov en tiempo discreto (sección 2.2), se obtiene una distribución de probabilidad π que verifica $\pi = \pi P$ de manera que si X_0 tiene distribución π , X_n también tiene distribución $\pi \forall n \geq 0$. Como ya se demostró en el apartado mencionado, P era irreducible por tratarse del caso particular de la aproximación a un camino aleatorio, por lo que la medida invariante existe y es única de forma que $\pi_j p_{j,j+1} = \pi_{j+1} p_{j+1,j}$. Además, es reversible y debe ser periódica de la forma $\pi(j) = \pi(j + 3)$

para que el camino aleatorio sea persistente.

Si se resuelven las ecuaciones de equilibrio de la medida invariante:

$$\begin{cases} \pi(0)p_0 = \pi(1)(1 - p_1) \\ \pi(1)p_1 = \pi(2)(1 - p_1) \\ \pi(2)p_1 = \pi(0)(1 - p_0) \end{cases}$$

Sabiendo que existe solución si $(1 - p_0)(1 - p_1)^2 = p_0 \cdot p_1^2$ y que $(1 - p_1) > 0$, se define p_1 en términos de p_0 :

$$p_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{p_0}{1-p_0}}}$$

En la que se denominará a $\sqrt{\frac{p_0}{1-p_0}} = \rho$, con $0 < \rho < 1$:

$$p_0 = \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \quad , \quad p_1 = \frac{1}{1 + \rho} \quad (2.14)$$

$$(\pi(0), \pi(1), \pi(2)) = \frac{(1 + \rho^2, \rho(1 + \rho), 1 + \rho)}{2(1 + \rho + \rho^2)} \quad (2.15)$$

Partiendo de estas ecuaciones (2.14) (2.15), es fácilmente demostrable que si la ganancia actual es múltiplo de 3, es decir, nos encontramos en el juego B, se gana con una probabilidad P y se pierde con una probabilidad $(1 - P)$. Con esta afirmación la ganancia promedio esperada para el juego será $E(X) = P - (1 - P) = 2P - 1$. Para el límite de la distribución π , el beneficio promedio viene determinado por $\pi(0)(2p_0 - 1) + (\pi(1) + \pi(2))(2p_1 - 1) = 0$, es decir, en promedio no se gana ni se pierde capital, quedando demostrado que B es un juego justo.

Parrondo particularizó este planteamiento matemático para $\rho = \frac{1}{3}$, de forma que $p_0 = \frac{1}{10}$ y $p_1 = \frac{3}{4}$ (o $\alpha = \frac{1}{3}L = 3$), pero dicha formulación se puede generalizar. Para ello, se asume que α es un número racional $\in (0, 1)$ y que existen enteros positivos primos l y L tal que $\alpha = \frac{l}{L}$. La definición del juego A se mantiene, pero las probabilidades de transición para el juego B pasan a ser:

$$P(j, j + 1) = \begin{cases} p_0 & \text{si } \text{mod}(j, L) < l \\ p_1 & \text{si } \text{mod}(j, L) \geq l \end{cases} \quad (2.16)$$

Ahora la medida invariante debe cumplir la condición de periodicidad $\pi(j) = \pi(j + L)$ para que el camino aleatorio sea persistente. De igual forma, las ecuaciones de dicha medida obtendrán solución si $(1 - p_0)^l(1 - p_1)^{L-l} = p_0^l p_1^{L-l}$. Redefiniendo p_1 en términos de p_0 :

$$p_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

donde ahora $\rho = \left(\frac{p_0}{1-p_0}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$:

$$p_0 = \frac{\rho^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1 + \rho^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} \text{ y } p_1 = \frac{1}{1 + \rho} \text{ para } \rho \in (0, 1).$$

Si se restringen los valores de la medida invariante a aquellos enteros $\in [1, l - 1]$:

$$\pi(j) = \begin{cases} C \rho^{\frac{j(1-\alpha)}{\alpha}} & \text{si } 0 \leq j \leq l - 1 \\ C \rho^{\frac{l(1-\alpha)}{\alpha - (j-l+1)}} (1 + \rho)(1 + \rho^{\frac{1-\alpha}{\alpha}})^{-1} & \text{si } l \leq j \leq L - 1 \end{cases}$$

Donde el parámetro C se elige de manera que el beneficio medio también resulte nulo y B sea un juego justo:

$$(\pi(0) + \dots + \pi(l-1))(2p_0 - 1) + (\pi(l) + \dots + \pi(L-1))(2p_1 - 1) =$$

$$-C \cdot \frac{1 - \rho^{\frac{l(1-\alpha)}{\alpha}}}{1 + \rho^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}} + C \cdot \frac{1 - \rho^{\frac{l(1-\alpha)}{\alpha}}}{1 + \rho^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}} = 0$$

Se puede deducir que p_1 es estrictamente convexa en $(0, \frac{1}{2})$ si $\alpha < \frac{1}{2}$, lo cual conlleva que la combinación aleatoria $cA + (1-c)B$ tenga una media mayor que 0 para $c \in (0, 1)$, es decir, la combinación es ganadora de forma que para esta generalización del planteamiento se llega a la misma conclusión que con los parámetros iniciales.

Capítulo 3

Aplicaciones

A lo largo de este estudio se ha ilustrado el funcionamiento de la Paradoja de Parrondo, así como su utilidad, en el campo de la Teoría de Juegos. Pudiera parecer que el campo de aplicación de dicha paradoja es limitado, pero nada más lejos de la realidad. Siempre que se cumplan ciertas condiciones de carácter estocástico, la Paradoja es aplicable a un gran número de procesos que abarcan diversas áreas desde la economía hasta la biología.

Entre estas aplicaciones destaca aquella relacionada con los mercados de valores [6], en concreto con la denominada *volatility pumping*. Esta estrategia de inversión financiera para la que se han utilizado modelos simples de libros de texto de finanzas sobre rendimientos de valores, demuestra que las inversiones individuales con rendimientos medios negativos a largo plazo, se pueden combinar fácilmente en carteras diversificadas con rendimientos medios positivos a largo plazo. Actualmente, se sigue estudiando su utilidad y generalización al ámbito de las apuestas.

También se ha estudiado su aplicación en relación a la teoría de la fiabilidad [7]. Se demostró que si se seleccionan dos sistemas en serie, siendo las unidades del primer sistema menos fiables que las del segundo y se modifica el primer sistema de modo que las distribuciones de

sus nuevas unidades sean mixturas de las distribuciones anteriores con iguales probabilidades, entonces, en condiciones adecuadas, el nuevo sistema es más fiable que el segundo.

Si bien estas aplicaciones resultan interesantes a nivel monetario, para este estudio se va a centrar el análisis en los campos de la biología y la salud [8]. Desde su publicación, la Paradoja se había estudiado en relación a la supervivencia multicelular o a la colonización de bacterias alternando entre diversos ambientes como manifestación de la misma. Recientemente, se ha extendido al campo del estudio de las enfermedades, demostrándose su aplicación en el tratamiento de algunos tipos de diabetes [9] mediante la combinación de medicamentos. En relación a este último campo, concretamente al de la oncología [10], la Paradoja ha servido para explicar la diversidad fenotípica de las células malignas, así como para comprender varios aspectos desconcertantes de la biología del cáncer. Por ejemplo, la elevada inestabilidad genética y epigenética de las células cancerosas, su comportamiento metastásico y su capacidad de entrar en letargo. También se ha demostrado que una vez que una terapia inicial reducía el tamaño y la diversidad de la población celular de un tumor grande, varias terapias menos agresivas, cada una de ellas incapaz de erradicar los tumores grandes, pueden eliminar con éxito las neoplasias¹ pequeñas y fragmentadas espacialmente. De nuevo, aunque cada tratamiento es incapaz de evitar la progresión del cáncer, la alternancia de los mismos en un determinado orden ilustra la Paradoja de Parrondo en un marco terapéutico.

Tras la actual pandemia derivada del coronavirus SARS-CoV-2 (COVID-19) y tras las nada positivas predicciones del *Big Data* sobre futuras pandemias [11], se ha decidido elegir como ejemplo práctico ilustrativo para el estudio la combinación de estrategias que, a priori, no funcionaban a la hora de erradicar el virus, pero que pueden mejorar los

¹Multiplicación o crecimiento anormal de células en un tejido del organismo.

indicadores pandémicos si se combinan. Esta aplicación se podría realizar análogamente a futuras pandemias.

3.1. Caso práctico: COVID-19

Para este ejemplo, tanto la función de coste que hacía referencia al capital del jugador, como las jugadas A y B , se verán sustituidas por costes y estrategias reales en relación al COVID-19 y tomando como fundamento el estudio de K.H.Cheong [12]. La nueva función de coste que se detallará más adelante (sección 3.1.2), tiene en cuenta la salud y el bienestar de la población, así como el impacto económico de las distintas medidas tomadas. Las estrategias propuestas son estrategias de bloqueo, cuyo objetivo es reducir la reproducción del virus, es decir, disminuir el número de personas a las que infecta cada contagiado.

Uno de los puntos clave de la pandemia y quizá de los más difíciles de alcanzar por todos los gobiernos a nivel mundial, ha sido el equilibrio entre economía y salud. Para el caso de estudio se definen las dos estrategias a aplicar: mantener un 100 % de libertad de movimiento en la población (ausencia de confinamiento) (A), o aplicar un confinamiento total de la misma (B). Es fácil observar que una limitación absoluta al movimiento reduce las oportunidades de que los individuos entren en contacto con los demás, limitando así la transmisión de la enfermedad. Aunque un cierre absoluto es eficaz para frenar una epidemia, con esta estrategia se paralizará la actividad económica (cierre de fábricas, bloqueo en cadenas productivas, las actividades individuales se ven obstaculizadas...). Esto tendrá un impacto negativo en la economía de dicha sociedad. Es decir, la estrategia de cierre tiene beneficios para aliviar la propagación del virus, pero diezmará la economía, por lo que para la función de coste propuesta que pondera ambos aspectos, no se obtendrá un balance positivo. Con la estrategia de libre movilidad se

llega al mismo resultado. Aunque económicamente el impacto es ínfimo, la transmisión del virus aumentará exponencialmente y la salud de la población se verá gravemente afectada, obteniéndose un balance negativo para la función de coste.

Se puede observar que ambas estrategias resultan en un impacto negativo aplicadas de forma individual, pero a continuación se demostrará como una combinación de ambas conlleva un balance positivo de la función de coste.

3.1.1. Modelo SIADE

Para modelar el comportamiento de la pandemia y poder cuantificar su impacto, se ha elegido un modelo compartimental denominado SIADE por sus siglas en inglés, según el cual se divide la población de estudio en cinco compartimentos entre los cuales la población puede ir alternando (cada letra identifica uno de ellos):

- S: *susceptible*, conjunto de personas susceptibles de contagiarse.
- I: *isolated*, conjunto de personas aisladas o confinadas (no necesariamente infectadas).
- A: *ailing*, conjunto de personas infectadas pero no detectadas.
- D: *diagnosed*, conjunto de personas infectadas y diagnosticadas (detectadas).
- E: *extinct*, conjunto de personas infectadas fallecidas.

La función de coste se verá influida por el tamaño que tenga en cada momento cada uno de los compartimentos, y la estrategia empleada determinará la forma en la que la población se mueve de unos a otros,

es decir, el valor de los coeficientes de la función varía en función de la estrategia empleada.

Para este estudio se ha decidido no tener en cuenta los nacimientos ni las muertes por causa natural de la población, por lo que el tamaño de cada conjunto en cada instante de tiempo t se determinará mediante las funciones: $S(t)$, $I(t)$, $A(t)$, $D(t)$ y $E(t)$, cuya suma será constante e igual al tamaño de la población. Para simular el comportamiento de este modelo, se va trabajar con datos aportados por la Junta de Castilla y León [13], por lo que tomaremos como tamaño de la población uno aproximado al de dicha Comunidad Autónoma ($N = 2.4 \cdot 10^6$). Más adelante se detallará el uso realizado de dicho conjunto de datos. Para calcular los incrementos y decrementos en cada compartimento, se emplearán ecuaciones diferenciales que permitan calcular estas variaciones en cada instante t :

- $dS(t) = -\alpha S(t)A(t) - \phi(t)S(t) + \varphi(t)I(t) + \xi(D)D(t) + \zeta A(t)$
- $dI(t) = \phi(t)S(t) - \varphi(t)I(t)$
- $dA(t) = \alpha(1 - \mu(D))S(t)A(t) - \gamma A(t) - vA(t) - \zeta A(t)$
- $dD(t) = \alpha\mu(D)S(t)A(t) + \gamma A(t) - \omega(D)D(t) - \xi(D)D(t)$
- $dE(t) = vA(t) + \omega(D)D(t)$

Estas ecuaciones se utilizan tanto en la estrategia A como en la B, con una variación para los compartimentos $S(t)$ e $I(t)$:

- Si estrategia A:
 $dS(t) = -\alpha S(t)A(t) + \varphi(t)I(t) + \xi(D)D(t) + \zeta A(t)$
 $dI(t) = -\varphi(t)I(t)$
- Si estrategia B:
 $dS(t) = -\alpha S(t)A(t) - \phi(t)S(t) + \xi(D)D(t) + \zeta A(t)$
 $dI(t) = \phi(t)S(t)$

En las ecuaciones del modelo aparecen otros parámetros y funciones que influyen en el comportamiento de los compartimentos poblacionales. Dichas funciones se corresponden con:

- $\phi(t)$: tasa de aislamientos.
- $\varphi(t)$: tasa de aislamientos discontinua (tasa de desconfinamiento).
- $\xi(D)$: tasa de recuperación de los infectados diagnosticados.
- $\mu(D)$: probabilidad de ser diagnosticado estando infectado.
- $\omega(D)$: tasa de muerte de los infectados diagnosticados.

El valor de estas funciones se calculará empleando la función sigmoide, que determinará el umbral de cambio entre una estrategia u otra. Por su naturaleza, esta función está acotada en el rango $[0,1]$. En el caso de estudio, es probable que los valores se encuentren fuera de este intervalo, por lo que se realizará una pequeña modificación de la expresión de la función, resultando dos nuevas funciones:

$$S_u(x, \eta, \sigma, a, b) = \frac{b}{1 + \exp\left(-\frac{x-\eta}{\sigma}\right)} + a \quad (3.1)$$

$$S_d(x, \eta, \sigma, a, b) = \frac{b}{1 + \exp\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)} + a \quad (3.2)$$

Las nuevas funciones estarán acotadas en el rango $[a, a+b]$. Respecto a sus parámetros, η es el umbral de conmutación donde $S_u(\eta) = \frac{1}{2}$ y $S_d(\eta) = \frac{1}{2}$ para algún $x = \eta$; σ es el parámetro de tolerancia, de manera que cuanto menor es su valor, más pronunciada será la función sigmoide en la región de tolerancia, afectando directamente a la frecuencia de cambio entre estrategias (sección 3.1.2). Como estimación para estos

parámetros que se emplearán en las funciones (3.1)(3.2), se tomará la realizada por Cheong en su estudio [12], adaptados a la estrategia que se esté utilizando en cada instante de tiempo.

De esta forma, cuando se aplica la estrategia A (libertad de movimiento), se deduce que se producirá un flujo de la población confinada (I) a la susceptible (S) si se parte de la estrategia opuesta, por lo que la tasa de desconfinamiento φ aumentará y se comportará de la forma:

$$\varphi(t) = S_u(t - t_{inicial}, 10, 7, 0.05, 0.05) + r,$$

donde r es un parámetro aleatorio que sigue una Uniforme $(-0.03, 0.03)$.

Si se aplica la estrategia B (confinamiento total), es previsible que aumente el flujo de población de susceptibles (S) a aislados (I), por lo que lógicamente la tasa de aislamientos ϕ aumentará respecto al caso anterior:

$$\phi(t) = S_u(t - t_{inicial}, 20, 10, 0.05, 0.05) + r,$$

donde r es un parámetro aleatorio que sigue una Uniforme $(-0.03, 0.03)$.

El resto de funciones mencionadas se calculan de la forma:

$$\begin{aligned} \gamma &\in [0.2, 0.3], \\ \mu(D) &= S_u(D, 10^4, 5 \cdot 10^3, 0.5, 0.45) \end{aligned}$$

En cuanto a los parámetros que aparecen en las ecuaciones diferenciales del modelo se tiene que:

- α : tasa de infección.

- ζ : tasa de recuperación.
- v : mortalidad de los infectados no detectados.
- γ : tasa de detección.

Para la estimación inicial de estas constantes que mejor se ajustase a la situación real ocurrida en Castilla y León, se tomó la base de datos proporcionada por el portal de datos abiertos de la Junta de Castilla y León [13] con el objetivo de realizar un ajuste por mínimos cuadrados. Estos datos se corresponden con una serie temporal que va desde marzo de 2020 hasta julio de 2022. Debido a la diferencia de comportamiento en la última etapa de la pandemia respecto al inicio, se decidió emplear solo la primera mitad de la serie (hasta abril de 2021). Dicha base contenía datos diarios observados de fallecidos, altas, infectados acumulados, nuevos infectados ese día e información relativa a la localización geográfica de las áreas de salud que proporcionaban los datos. A partir de estos datos, se calcularon los datos observados de infectados detectados activos (D) y fallecidos (E). Se realizó un ajuste por mínimos cuadrados para modelos no lineales [14] utilizando la predicción del modelo SIADÉ sobre los valores iniciales del conjunto y los valores observados reales de la base. Debido a la gran cantidad de datos no observables en el modelo propuesto, el ajuste resultante era de baja calidad, por lo que finalmente se ha decidido utilizar como valores óptimos para los parámetros aquellos que se proponen en el artículo de Cheong [12]: $\alpha = 1.4 \cdot 10^{-7}$, $\zeta = 0.2$, $v = 5 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 0.1$.

Empleando estos valores y resolviendo las ecuaciones diferenciales para el modelo SIADÉ con ayuda del paquete deSolve [15] de la herramienta RStudio, se han simulado nuevas series temporales sobre las que evaluar los costes de cada estrategia. Como valores iniciales para la resolución de las ecuaciones se han tomado los datos extraídos del conjunto mencionado anteriormente proporcionado por la Junta de

Castilla y León [13]. Estos resultados se plasman gráficamente en la sección 3.1.3.

3.1.2. Función de coste

La función de coste total, denominada $F(t)$, cuantifica la eficacia de la estrategia aplicada por día. Cuanto menor sea su valor, mejor la estrategia. Cabe mencionar que todos los valores estimados que aparecen en las funciones de coste y mencionados a continuación han sido extraídos de los informes emitidos por la Organización Mundial de la Salud [16]. La función de coste debe tener en cuenta diversos factores relacionados con la salud y la economía de una sociedad, por lo que se ha decidido definirla como la suma de otros cuatro costes que miden estos aspectos individualmente de la forma:

$$F(t) = F_H(t) + F_I(t) + F_C(t) + F_R(t) \quad (3.3)$$

donde:

- $F_H(t)$: Coste de hospitalización.

Esta función pondera el coste, económicamente hablando, de los casos más graves de hospitalización y de aquellos más leves:

$$F_H(t) = C_T(1 - \chi)D(t) + C_S\chi D(t),$$

donde C_T es el coste de un ingreso leve (de media 2000) y C_S el de un grave (20000). χ es la tasa de ingresos graves, a la que se asigna el valor 0.1 .

- $F_I(t)$: Coste de la pérdida de oportunidades individuales derivada del confinamiento.

$$F_I(t) = \begin{cases} I(t)\theta C_I \frac{t-t_{inicial}}{T_I} & t-t_{inicial} > T_I \\ I(t)\theta C_I & t-t_{inicial} < T_I \end{cases}$$

donde θ es la proporción de personas afectadas (se ha elegido como promedio 0.4, ya que algunos trabajos se pueden realizar telemáticamente), C_I el coste por cada individuo confinado (I) por día (50), $t_{inicial}$ el día que inicia su confinamiento, T_I la duración del mismo (de media 20).

- $F_C(t)$: Inversión en capital humano.

Es el coste derivado de la pérdida de capital humano debido a personas diagnosticadas sin posibilidad de trabajar (D) o fallecidas (E). Una reducción del capital humano tiene un efecto global sobre la producción económica del resto de población susceptible (S) de la forma:

$$F_C(t) = C_D D(t) + C_E E(t),$$

donde C_D es el coste que supone esta pérdida entre los infectados (D) y C_E el coste sobre los fallecidos; se estiman en 20000 y 25000 respectivamente.

- $F_R(t)$: Coste por comportamientos de riesgo.

Este coste está directamente determinado por cómo actúe la población de infectados no detectados (A):

$$F_R(t) = C_R A(t),$$

C_R se estima en 500 por persona y día, derivado de aquellos individuos que se siguen moviendo libremente propagando el virus a pesar de estar contagiados.

En cuanto a la evaluación de la efectividad de las estrategias empleando la función de coste total $F(t)$, se dirá que se ha obtenido un resultado “ganador” cuando el coste total resulte moderado, manteniéndose a su vez un tamaño bajo para el conjunto de fallecidos (E). Un resultado ganador puede lograrse porque el cambio de estrategia B a la estrategia A permite que la población de infectados (I) fluya hacia susceptibles (S). Como resultado, esto reduce el coste debido a $F_I(t)$, que es causado por un periodo de aislamiento prolongado. Al mismo tiempo, el cambio de la estrategia A a la estrategia B reduce significativamente el coste de hospitalización $F_H(t)$ y la inversión en capital humano $F_C(t)$ causado por un elevado aumento de las infecciones. En caso contrario, estaríamos ante un resultado “perdedor”.

3.1.3. Alternancia de estrategias

Existen múltiples combinaciones posibles para las estrategias A (libertad de movimiento) y B (confinamiento total). Si bien en el caso típico de aplicación de la Paradoja de Parrondo con dos juegos estos se combinaban eligiendo uno u otro al azar lanzando una moneda equilibrada, en este estudio dicha posibilidad no sería viable. Resultaría muy

difícil fundamentar la elección arbitraria y cambiante de los criterios frente a una sociedad real. Por ello, la opción más lógica es fundamentar el cambio de una a estrategia a otra en base a la evolución del número de infectados, esto es, empleando el número de nuevos infectados del día anterior $\alpha S(t)A(t)$ de la forma:

$$\begin{cases} \alpha S(t)A(t) < L_D & \text{Aplicar estrategia A} \\ \alpha S(t)A(t) > L_U & \text{Aplicar estrategia B} \end{cases}$$

Solo se cambiará de una estrategia a otra cuando el número de nuevos infectados se encuentre fuera del intervalo $[L_D, L_U]$. En caso contrario, se mantendrá la estrategia del día anterior. Como valores razonables en relación al tamaño poblacional se toma $L_D = 7000$, $L_U = 1000$. También hay que tener en cuenta que solo se puede cambiar de estrategia como máximo una vez por día.

Tras simular cómo habría evolucionado la pandemia si se aplicase solo una de las dos estrategias de forma individual, se puede observar que:

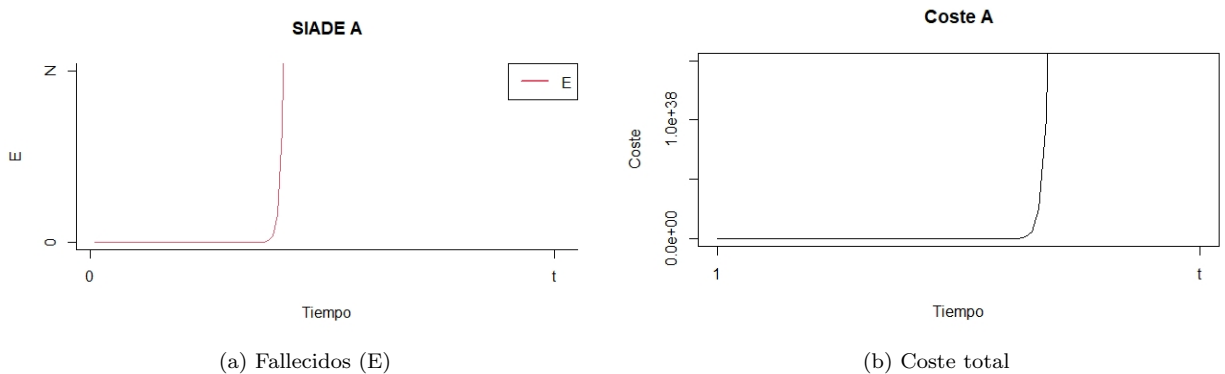


Figura 3.1: Resultados evolución pandemia - Estrategia A

Para la estrategia A (libertad de movimiento) se puede observar como el tamaño del conjunto de fallecidos aumenta exponencialmente (3.1a), es decir, con el paso del tiempo la mayoría de individuos de la población tenderían a fallecer. Esto conlleva que el coste (3.1b) crezca de igual forma, resultando catastrófico para el conjunto de la población. Esta estrategia resultaría claramente “perdedora”.

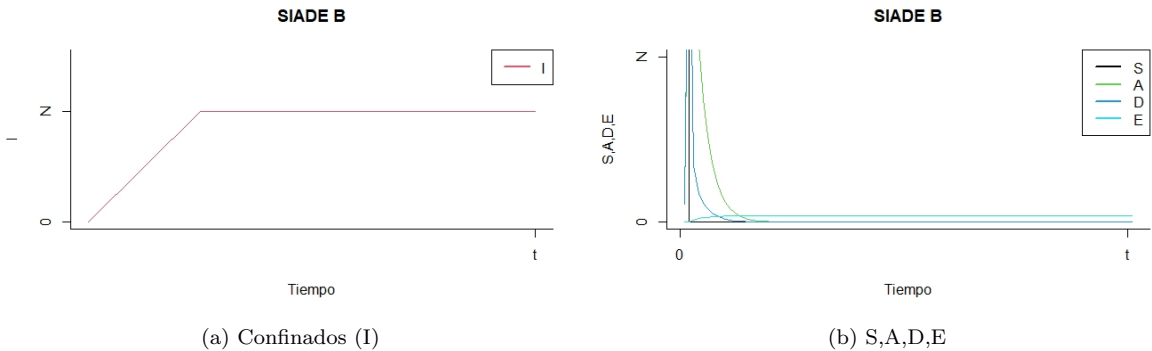


Figura 3.2: Resultados evolución pandemia - Estrategia B

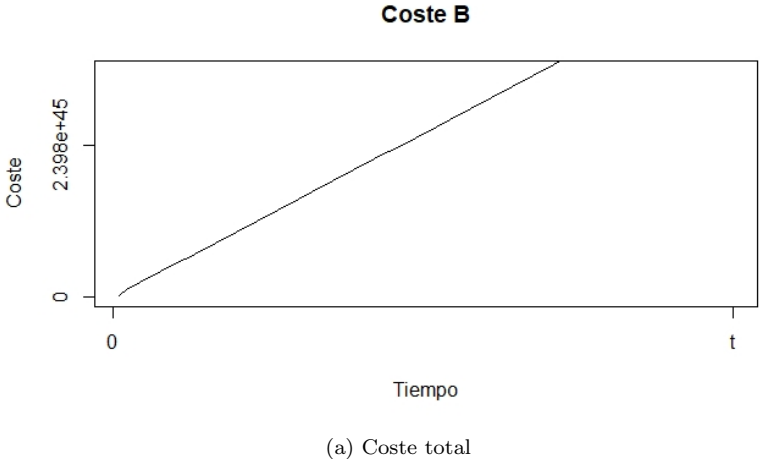


Figura 3.3: Resultados evolución pandemia - Estrategia B

Respecto a la estrategia B (confinamiento total), se observa (3.2b) como al aumentar el número de individuos confinados (I), el tamaño del resto de compartimentos, esto es individuos que se van contagiando (A,D) y falleciendo (E), comienza a disminuir de igual forma que lo hacen los susceptibles (S), ya que con un mayor número de individuos confinados disminuye la probabilidad de contagio. Respecto a su impacto en el coste (3.3), se puede ver como, de manera similar a lo que ocurría con A, tiende a crecer hasta valores muy grandes de magnitudes insostenibles para la sociedad, resultando ser también una estrategia “perdedora”.

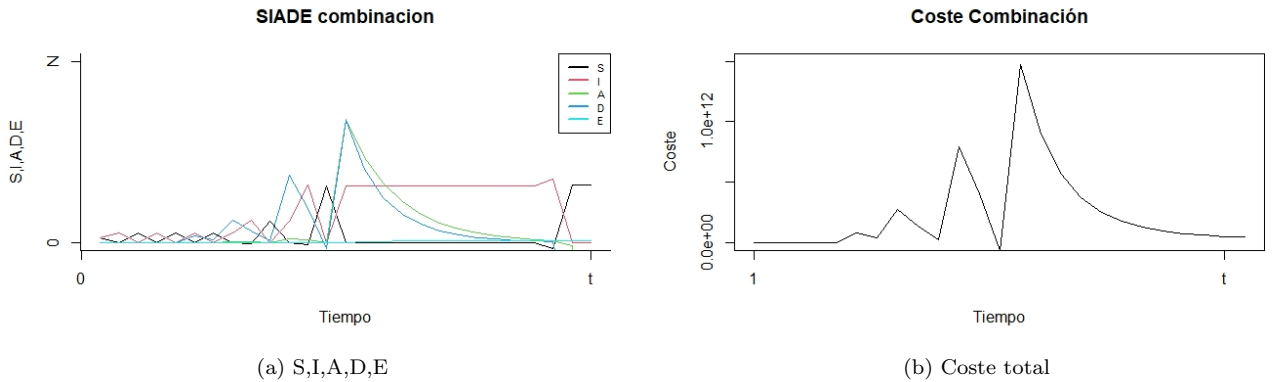


Figura 3.4: Resultados evolución pandemia - Combinación AB

Sin embargo, al emplear la alternancia de estrategias en base a los infectados del día anterior, se observa como el tamaño de los conjuntos va oscilando (3.4a), pero el número de individuos fallecidos (E) siempre se mantiene en una proporción menor respecto al tamaño de la población, observándose una gran diferencia con la estrategia A. En cuanto al coste diario (3.4b), se puede ver como también va oscilando, pero se mantiene siempre en valores menores que las estrategias individuales, ya que en este caso no sobrepasa nunca su valor máximo ($1.4767 \cdot 10^{12}$) mientras que la estrategia A llegaba a superar un coste de $4.1 \cdot 10^{69}$ y la B uno de $2.4 \cdot 10^{45}$. En comparación, los resultados de esta estrategia

son mejores, entendiéndose como un resultado “ganador”.

Capítulo 4

Conclusiones

Durante este estudio se ha ilustrado la Paradoja de Parrondo, desde su fundamento teórico hasta su aplicación práctica a diversos campos. Se ha demostrado que el carácter paradójico de este modelo queda explicado en base a los procesos de Markov, concretamente en base a cadenas de Markov en tiempo discreto, y mediante un modelo de trinquete browniano intermitente en tiempo continuo que aproxima a un camino aleatorio y que engloba a dos procesos: un movimiento browniano unidimensional y un trinquete browniano. Una vez modelizado matemáticamente el comportamiento de dos estrategias o jugadas que resultan perdedoras si se juegan de manera individual, se puede encontrar una combinación aleatoria de ambas que conlleva un resultado ganador.

Si bien se ha constatado su utilidad en el campo de los juegos de azar y del control epidemiológico, la Paradoja de Parrondo se puede aplicar a cualquier otro campo en el que el comportamiento de los sucesos se pueda modelizar mediante procesos estocásticos y cuyo impacto se pueda cuantificar. Entre estas aplicaciones destacan las estrategias de inversión financiera, su aplicación en la teoría de la fiabilidad, técnicas de supervivencia celular o el estudio de la eficacia de determinadas terapias asociadas a diversas enfermedades.

Tal es la dimensión de la utilidad de la Paradoja de Parrondo, que es probable que la mayoría de sus aplicaciones todavía no hayan sido puestas en práctica. Por ello, como trabajo futuro, se propone la exploración de otros campos. Un ejemplo de aplicación podría ser la política, en el que los juegos quedasen sustituidos por estrategias de índole político. Otra vertiente interesante sería la exploración del comportamiento de la Paradoja con más de dos juegos, de forma que se pudiera generalizar a más tipos de sucesos.

Bibliografía

- [1] Greg P Harmer and Derek Abbott. Parrondo's paradox. *Statistical Science*, pages 206–213, 1999.
- [2] Kevin Leyton-Brown and Yoav Shoham. Essentials of game theory: A concise multidisciplinary introduction. *Synthesis lectures on artificial intelligence and machine learning*, 2(1):1–88, 2008.
- [3] JMR Parrondo and Luis Dínis. Brownian motion and gambling: from ratchets to paradoxical games. *Contemporary Physics*, 45(2):147–157, 2004.
- [4] RStudio Team. *RStudio: Integrated Development Environment for R*. RStudio, PBC., Boston, MA, 2020.
- [5] SN Ethier and Jiyeon Lee. The flashing brownian ratchet and parrondo's paradox. *Royal Society Open Science*, 5(1):171685, 2018.
- [6] Michael Stutzer. The paradox of diversification. *The Journal of Investing*, 19(1):32–35, 2010.
- [7] Antonio Di Crescenzo. A parrondo paradox in reliability theory. *arXiv preprint math/0602308*, 2006.
- [8] Kang Hao Cheong, Jin Ming Koh, and Michael C Jones. Paradoxical survival: examining the parrondo effect across biology. *Bio-Essays*, 41(6):1900027, 2019.
- [9] Nasim Ejlali, Hamid Pezeshk, Yogendra P Chaubey, Mehdi Sadeghi, Ali Ebrahimi, and Abbas Nowzari-Dalini. Parrondo's paradox for games with three players and its potential application

- in combination therapy for type ii diabetes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 556:124707, 2020.
- [10] Jean-Pascal Capp, Aurora M Nedelcu, Antoine M Dujon, Benjamin Roche, Francesco Catania, Beata Ujvari, Catherine Alix-Panabières, and Frédéric Thomas. Does cancer biology rely on parrondo’s principles? *Cancers*, 13(9):2197, 2021.
- [11] TIME. <https://time.com/6184672/bill-gates-covid-19-mortality-time100-summit/>, 18 June 2022.
- [12] Kang Hao Cheong, Tao Wen, and Joel Weijia Lai. Relieving cost of epidemic by parrondo’s paradox: a covid-19 case study. *Advanced Science*, 7(24):2002324, 2020.
- [13] Junta de Castilla y León. <https://www.saludcastillayleon.es/transparencia/es/datos-abiertos-sanidad/datos-abiertos-sanidad/salud-publica/coronavirus-covid-19/situacion-epidemiologica-coronavirus-covid-19-castil-159d7f>, 2022. - Situación epidemiológica coronavirus (COVID-19) en Castilla y León por hospitales.
- [14] Timur V. Elzhov, Katharine M. Mullen, Andrej-Nikolai Spiess, Ben Bolker. *R Interface to the Levenberg-Marquardt Nonlinear Least-Squares Algorithm Found in MINPACK, Plus Support for Bounds*. R Foundation for Statistical Computing, CRAN, 2016.
- [15] Karline Soetaert, Thomas Petzoldt, and R. Woodrow Setzer. Solving differential equations in R: Package deSolve. *Journal of Statistical Software*, 33(9):1–25, 2010.
- [16] World Health Organization et al. Coronavirus disease 2019 (covid-19): situation report, 51. 2020.