Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

El teorema fundamental de valoración de activos

Autor:

Sergio Alegre Fernández

Tutor:

Eustasio del Barrio Tellado

Agradecimientos

A mis padres Manuel y Charo, por enseñarme tanto y tan bien sobre la vida, por su amor, su cariño y por inculcarme una buena educación con los valores de sacrificio, esfuerzo y constancia.

A mi hermana Alba, por nuestro amor de hermanos, por ser un pilar fundamental para mí, mi profesora favorita cuando era pequeño, por su cariño y por entenderme tal como soy, siempre picoforma.

A mi pareja Carlota, por su cariño, su apoyo, su energía positiva y por hacerme sentir especial.

A mi tutor Eustasio del Barrio, por su atención.

A mis compañeros del doble grado, por todo el tiempo compartido, por su apoyo para poder superar cada una de las diferentes asignaturas.

Resumen-Abstract

El objetivo principal de este trabajo es alcanzar el teorema fundamental de valoración de activos, así como realizar una demostración en la que no sean utilizadas herramientas profundas de análisis funcional, para ello se introducirán todos los conceptos económicos relacionados, así como toda la teoría de cálculo estocástico necesaria para la consecución de dicho teorema. En algunas ocasiones se introducirán definiciones, proposiciones y teoremas que, si bien no son imprescindibles para abordar el objetivo del trabajo, su importancia en el contexto que vamos a tratar sí adquiere una gran relevancia.

The main objective is to reach the fundamental theorem of asset pricing, as well as to carry out a demonstration in which deep functional analysis tools are not necessary, for which all the related economic concepts will be introduced, as well as all the stochastic calculus theory necessary to the achievement of said theorem. On some occasions, definitions, propositions and theorems will be introduced that, although they are not completely necessary to get the objective of the work, their importance in the context of this work does acquire great relevance.

Índice

Página

Introducción

Desde que Robert Brown, introdujera el movimiento browniano al observar algo tan natural y cotidiano como el movimiento aleatorio de las partículas que se hallan en un medio fluido, los procesos estocásticos son clave en el mundo de hoy en día. En su caso, estudió con el microscopio el movimiento de las partículas que se encontraban atrapadas dentro de un grano de polen que permanecía en agua, y aunque no pudo dar una explicación al movimiento observado, su contribución hizo despertar la curiosidad de otros científicos de la época como Thorvald N.Thiele, Louis Bachelier o Albert Einstein que se pusieron a estudiar dicho fenómeno para obtener una explicación matemática.

Y fue este último, quien en su artículo *"Sobre el movimiento postulado por la teoría cinética molecular del calor de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario"* publicado en 1905, proporcionó una sólida explicación física, apoyándose en el estudio estadístico de los movimientos térmicos de los átomos individuales.

Los procesos estocásticos tienen un amplio número de aplicaciones, en ámbitos tan variados como pueden ser:

- Telecomunicaciones
- Biomedicina
- Bolsa
- Meteorología
- Evolución de la población
- Modelos epidemiológicos

Es esta diversidad lo que los hace realmente importantes y uno de los temas más estudiados por los matemáticos en la actualidad.

Este trabajo se centrará en sus aplicaciones de ámbito económico y financiero, presentando a lo largo del mismo todas las herramientas matemáticas necesarias que permitirán finalmente introducir y desarrollar con éxito el principal objetivo, que no es otro que el **teorema fundamental de valoración de activos** en su forma discreta. Por lo que el objetivo de este trabajo, es hacer una presentación de las herramientas que el cálculo estocástico blinda y ofrece para diferentes aplicaciones de la vida cotidiana.

Para ello, se estructurará el documento en **4 capítulos**, donde en el capítulo 1 se presentarán todas las definiciones, términos y conceptos de la jerga económica necesarios para la comprensión de los desarrollos matemáticos que se tratarán, en este capítulo [5] será la referencia a seguir.

A continuación, en el capítulo 2, se introducirán las herramientas matemáticas, tales como definiciones, lemas y teoremas, que serán necesarias para un acercamiento de forma paulatina al teorema objetivo, estas herramientas serán el cálculo estocástico, centrando la atención en las martingalas y el movimiento browniano. En este capítulo, debido a su gran densidad, serán utilizadas varias referencias bibliográficas, destacando [6], [3].

Seguidamente, en el capítulo 3, se abordarán las medidas martingala y la fijación de precios por arbitraje utilizando martingalas. Además, se llegará a la fórmula ***Cox-Rox-Rubinstein*** a través del modelo de mercado binomial y, pasando al límite, se mostrará la convergencia de la fórmula Cox-Rox-Rubinstein a la conocida fórmula de **Black-Scholes** (teoría de opciones). La principal referencia a seguir será el capítulo 2 de [1].

Finalmente, en el capítulo 4 se abordará de forma progresiva el desarrollo y obtención del teorema objetivo, partiendo de unas primeras premisas geométricas, para finalmente llegar a la formulación del

teorema fundamental de fijación de activos en el caso discreto. Se pretende dar una demostración, en la que no sean necesarias herramientas de análisis funcional de gran profundidad, para ello, se seguirá [17]. Aunque, también se usará [1], para las dos primeras secciones.

Capítulo 1

Preliminares financieros

1.1 Contexto

Debido a las propiedades de los procesos estocásticos, su aplicación a la bolsa es más que una realidad, siendo una de las herramientas matemáticas más potentes en la predicción de las variabilidades de la misma. Y es que la bolsa es estudiada segundo a segundo, para aumentar las probabilidades de que los modelos predictivos basados en estos procesos se acerquen más al acierto, aunque como sabemos no hay ningún modelo matemático que sea capaz de asegurar, si al siguiente segundo en el que estamos, la bolsa va a bajar o a subir.

Dentro de los procesos estocásticos, adquieren, en este campo, un papel relevante los **procesos estocásticos estacionarios**, aquellos cuyos valores parecen ser caóticos, pero toman valores dentro de un rango limitado; un ejemplo de los mismos son los retornos diarios de los activos financieros.

1.2 Definiciones

La inversión es una de las principales actividades económicas, tanto de las empresas como de los pequeños inversores, uno de los instrumentos para ello son las opciones. Los primeros pasos en la investigación de estos instrumentos se produjeron en el año 1900 con la Tesis Doctoral de Louis Bachelier titulada "Théorie de la Spéculation", más tarde, en la década de los 70, se produjo un gran desarrollo y avance de la misma, por autores como Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton.
Hay diversos tipos de opciones dependiendo del derecho o la obliga-

ción que otorga a cada una de las partes, a continuación se muestra su definición y los tipos que hay atendiendo a diversos criterios.

Según el Real Decreto 1282/2010, del 15 de octubre, presente en el BOE, se definen las **opciones financieras** (art. 1) del siguiente modo:

> *Contratos a plazo que tengan por objeto valores, préstamos o depósitos, índices, futuros u otros instrumentos financieros; que tengan normalizado su importe nominal, objeto y precio del ejercicio, así como su fecha, única o límite, de ejecución; en los que la decisión de ejecutarlos o no, sea derecho de una de las partes, adquirido mediante el pago de la otra de una prima acordada; y que se negocien y transmitan en un mercado organizado cuya Sociedad Rectora los registre, compense y liquide, actuando como compradora ante el miembro vendedor y como vendedora ante el miembro comprador.*

Atendiendo a la modalidad de la opción, podemos distinguir dos tipos de opciones:

- **Opción de Compra o CALL**: Según adoptemos una posición compradora o vendedora en opciones CALL se distingue:
    - Posición compradora o larga(Long call): Derecho de compra.
    - Posición vendedora o corta(Short call): Obligación de venta
- **Opción de Venta o PUT**: Que a su vez se diferencian en:
    - Comprador de PUT(Long put): Derecho a vender.
    - Vendedor de PUT(Short put): Obligación de compra.

Atendiendo a la fecha en el que la opción puede ser ejercitada, es decir, atendiendo a lo que se denomina **fecha de vencimiento(exercise date)** se distinguen también dos tipos de opciones:

- **Opciones Europeas**: Son las que solo pueden ejercitarse, es decir, disfrutar del derecho que otorgan, en la fecha de vencimiento estipulada.
- **Opciones Americanas** : Son aquellas sobre las que el comprador puede ejercer su derecho en cualquier fecha hasta el vencimiento

de la opción.

Antes de mostrar la última clasificación, es preciso introducir un par de definiciones necesarias:

-Precio del ejercicio o Strike (E): Precio fijado por adelantado al que se comprará o venderá el activo subyacente si se ejerce la opción.

-Precio del subyacente (S): Precio del activo sobre el que se opera la opción en un momento determinado.

Finalmente, atendiendo a la relación entre los precios definidos con anterioridad, esto es, entre el precio del ejercicio y el precio del subyacente, podemos distinguir tres tipos de opciones:

- **Opciones in the Money o dentro de dinero**: Aquellas en las que se produce un beneficio en su ejercicio.
  -En opciones CALL: Cuando el precio del subyacente>precio del ejercicio.
  -En opciones PUT: Cuando el precio del subyacente<precio del ejercicio.
- **Opciones at the Money o en el dinero**: Aquellas en las que no se produce ni beneficio ni pérdida en su ejercicio.
  -Tanto en opciones CALL como en PUT cuando el precio del subyacente $\simeq$ precio del ejercicio.
- **Opciones out the Money o fuera de dinero**: Aquellas en las que se produce una pérdida en su ejercicio.
  -En opciones CALL: Cuando el precio del subyacente<precio del ejercicio.
  -En opciones PUT: Cuando el precio del subyacente>precio del ejercicio.

A continuación, mostramos en la figura 1, las diferentes casuísticas que pueden ser dadas en las opciones Call y Put dependiendo del precio del subyacente a la fecha de vencimiento, así como desde el punto de vista del comprador y del vendedor respectivamente.

Situación al vencimiento	El comprador de CALL:	Resultados			
		Comprador CALL		Vendedor CALL	
		Beneficio	Pérdida	Beneficio	Pérdida
S<E	No ejerce la opción	________	C	C	________
E<S<(C+E)	Ejerce la opción	________	(E+C)-S	(E+C)-S	________
S>(C+E)	Ejerce la opción	S-(E+C)	________	________	S-(E+C)

Situación al vencimiento	El comprador de PUT:	Resultados			
		Comprador PUT		Vendedor PUT	
		Beneficio	Pérdida	Beneficio	Pérdida
S>E	No ejerce la opción	_______	P	P	_______
E>S>(E-P)	Ejerce la opción	_______	S-(E-P)	S-(E-P)	_______
S<(E-P)	Ejerce la opción	(E-P)-S	_______	_______	(E-P)-S

Figura 1: Resultados del comprador y vendedor de una Call y una Put.

Cabe destacar que el comprador de una opción Call, solo ejercerá la opción cuando el precio del subyacente sea mayor que el precio del ejercicio, sin embargo, únicamente obtendrá beneficio si la suma entre el precio del ejercicio y la prima pagada es menor que el precio del subyacente. Cambiando los papeles se puede inferir las diversas situaciones desde el punto de vista del comprador de una opción PUT. Se recuerda, que la compra de una opción lleva asociada el pago de una prima, que se representa en la figura 1 mediante C(prima para Call) o P(prima para Put), por otro lado, S será el precio del subyacente y E el precio del ejercicio.

Por último, antes de introducir algunas definiciones económicas importantes para la comprensión de los capítulos siguientes, es conveniente destacar que las opciones pueden replicarse combinando carteras equivalentes del activo subyacente con otras opciones, es lo que se conoce como la ***paridad put-call*** . En ella queda reflejada la relación que debe existir entre el precio de una opción Call y de una opción Put bajo el supuesto de varias hipótesis como la no existencia de oprtunidades de arbirtraje, que definiremos más tarde.

Para obtener dicha relación, se considera una opción de compra y una de venta con valores C_t y P_t respectivamente, ambas con fecha de vencimiento $t = T$ y precio de ejercicio E. Si consideramos una cartera formada por una acción con valor S_t en tiempo t, una posición larga en un put y una posición corta en un call, entonces resulta que el valor de la cartera en tiempo t viene dado por la siguiente expresión:

$$V(t) = S_t + P_t - C_t$$

Luego, en tiempo t=T, el valor de la cartera considerada dependerá de la relación entre S_t y E. De acuerdo a la figura 1, tendremos dos situaciones:

- Si $S_T \geq E$. entonces $V(t) = S_T + 0 - (S_T - E) = E$.
- Si $S_T \leq E$. entonces $V(t) = S_T + (E - S_T) - 0 = E$.

Se observa, que es independiente del valor del activo en la fecha de su vencimiento, luego la cartera que hemos considerado siempre garantiza un beneficio de E. Ahora es de interés conocer cuál será el beneficio en $t < T$, pero en ausencia de arbitraje(una de las hipótesis), la única manera de obtener un beneficio de E en el periodo t=T, es depositando en el banco una cantidad $(\frac{1}{1+r})^{T-t}E$, siendo la única operación a realizar.
Por lo tanto, el único valor posible en tiempo t de la cartera supuesta para no caer en arbitraje, es $V(t) = (\frac{1}{1+r})^{T-t}E$. Y por consiguiente, la **relación put-call** mencionada tiene la expresión [1]:

$$S_t + P_t - C_t = (\frac{1}{1+r})^{T-t}E.$$

Donde r es el tipo de interés libre de riesgo y se trata de una constante, es decir, un tipo de interés determinista y t es la duración del préstamo.

Procedamos a introducir otros conceptos y elementos de las ciencias económicas que serán necesarios para el buen desarrollo de los capítulos venideros:

- **Activo financiero**: Tipo de instrumento financiero, mediante el cual, el comprador adquiere el derecho a recibir ingresos futuros por partida del vendedor.
- **Cartera de inversión o Portfolio**: Conjunto de activos financieros en los que se ha realizado una inversión de forma diversificada, con el objetivo de obtener una plusvalía.
- **Derivado financiero**: Tipo de activo financiero, cuyo valor viene dado debido a los cambios de otra activo, llamado activo subyacente. Ejemplos son los futuros y las opciones.
- **Arbitraje**: Operación económica que se realiza con la intención de obtener un beneficio debido a la imperfección de los precios en los productos, sin tener que asumir riesgo de mercado.
- **Swap**: Operación según la cual dos partes acuerdan intercambiar dos corrientes de pago en la misma o en diferentes monedas. Los hay de tipos de interés y de cambio. Su empleo trata de aprovechar las oportunidades de arbitraje.

Capítulo 2

Cálculo estocástico

2.1 Definiciones previas

Comenzaremos definiendo de forma clara y precisa qué es un proceso estocástico, mencionaremos sus tipos y finalizaremos introduciendo un tipo de proceso adaptado en particular, la martingala.
En el apéndice A, se pueden consultar los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, sobre los que se construyen los elementos que serán tratados en esta sección.

Introduciremos a continuación la definición de proceso estocástico, en primera instancia puede definirse un proceso estocástico, como un modelo matemático para un fenómeno aleatorio que evoluciona a lo largo del tiempo; por ejemplo, se podría utilizar para modelar la evolución de un activo financiero sin riesgo, es decir, sometido a un tipo de interés $r(t)$ determinista.

Formalmente:

Definición 2.1.1 (Proceso estocástico) *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ *definidas en un mismo espacio probabilístico* $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

El conjunto $\mathbb{T} \subset [0, \infty)$ lo interpretamos como el conjunto de índices de tiempo y hablamos de proceso en tiempo discreto si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ o en tiempo continuo si $\mathbb{T} = [0, \infty)$.

Para cada índice de tiempo, X_t es una aplicación de Ω en $\mathbb{R}$, que al elemento $w \in \Omega$ le asocia el valor real $X_t(w)$. Para cada w fijo, la función $t \to X(t, w)$ es una **trayectoria** del proceso.

Por lo que un proceso puede ser también considerado como una aplicación de Ω en $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$, es decir, que se puede interpretar como una variable aleatoria con valores en el espacio de funciones de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{R}$, tomando la σ-álgebra producto $\beta^{\mathbb{T}}$, que es la menor σ-álgebra que hace medibles las proyecciones.

La distribución del proceso viene dada por la ley inducida por X en $(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \beta^{\mathbb{T}})$ a partir de P. Por lo que, las distribuciones de los vectores aleatorios del tipo $(X(t_1), ..., X(t_k))$ determinan la distribución de un proceso; ya que, la familia de los conjuntos cilíndricos (los de la forma$(X(t_1) \in B_1, ..., X(t_k) \in B_k)$, con B_i de Borel, $1 \leq k$) genera la σ-álgebra $\beta^{\mathbb{T}}$.

A estas distribuciones se las denomina *distribuciones finito dimensionales* y de acuerdo a esto, se dice que *dos procesos tienen la misma distribución si y solo si tienen las mismas distribuciones finito dimensionales.* De hecho, se puede construir cualquier proceso estocástico, a partir de una familia cualquiera de distribuciones finito dimensionales, que sea razonable, esto es el *Teorema de extensión de Kolmogorov.* En concordancia con esto, por ejemplo, se habla de **procesos Gaussianos** cuando se tienen procesos con distribuciones finito dimensionales normales multivariantes.

Además de la igualdad en distribución explicada con anterioridad, se dispone de otras relaciones entre procesos que han sido definidos en un mismo espacio.

Definición 2.1.2 (Modificación o versión) *Decimos que Y es una versión de X si para cada $t \in \mathbb{T}$ el conjunto*

$$\{w \in \Omega : X(t, w) = Y(t, w)\}$$

tiene probabilidad 1.

Por otro lado, se tiene una definición similar, pero más restrictiva y con mayor potencia.

Definición 2.1.3 (Procesos indistinguibles) *Decimos que dos pro-*

cesos X e Y son indistinguibles si el conjunto:

$$\{w \in \Omega : X(t,w) = Y(t,w)\ \forall t \in \mathbb{T}\}$$

tiene probabilidad 1.

Nótese, que de ambas definiciones, podemos concluir que si X e Y son indistinguibles, entonces Y es una versión de X y ambos procesos tienen las mismas distribuciones finito dimensionales. Además, si $T = \mathbb{N}$, los dos conceptos coinciden.

Para muchos procesos de interés en tiempo continuo, las trayectorias presentan alguna regularidad en cuánto a que son funciones continuas, o al menos, continuas por la derecha con límites por la izquierda, que es lo que se denomina, debido a su abreviatura en francés, como **càdlàg.** Esto ayuda mucho en el manejo de dichas trayectorias, ya que, por ejemplo, dos procesos càdlag que sean uno versión del otro, hace que automáticamente sean indistinguibles.

Por otro lado, en muchas ocasiones es necesario para que un proceso esté bien definido que sea medible; por ejemplo, si X es un proceso medible y $T = [0, \infty)$, las trayectorias $X(\cdot, w)$ serán funciones medibles, y tiene sentido hablar de $\int_0^T |X(t,w)|dt < \infty$, con esta motivación adentramos la siguiente definición.

Definición 2.1.4 (Proceso medible) *Se dice que un proceso X es medible, si visto como una aplicación de $\Omega \times \mathbb{T}$ en $\mathbb{R}$ es $F \otimes \beta(T)|\beta(\mathbb{R})$-medible.*

Introduzcamos ahora un elemento esencial e indispensable en la teoría, este elemento es la **filtración**. Su papel es el de modelar la información que tenemos disponible hasta un cierto periodo de tiempo. Esto es fundamental, ya que, por ejemplo, en un modelo financiero de inversión de capital, las decisiones que se tomen en un instante de tiempo t, se basarán y tomarán, de acuerdo a la historia conocida antes de dicho instante.

Definición 2.1.5 (Filtración) *Se conoce como filtración $\mathcal{F}$ a una colección creciente de σ-álgebras, que denotaremos mediante $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}} \subset$*

$\mathcal{F}$.

Además, se dice que una filtración es:

- **Completa** si cada conjunto de medida nula para $\mathcal{F}$, está en $\mathcal{F}_0$ (y por ser la sucesión creciente, estará en cualquier otro $\mathcal{F}_t$)
- **Continua por la derecha** si $\bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$.
  Nótese, que esta propiedad tiene relevancia únicamente en el caso continuo, pues en el caso discreto, una filtración siempre es continua por la derecha.

Una filtración particular muy relevante es la **filtración natural**, la cual se define como $F_t^X = \sigma(X_s : s \leq t)$.

Definición 2.1.6 (Proceso adaptado) *Se dice que un proceso $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ si X_t es $\mathcal{F}_t$-medible para todo $t \in \mathbb{T}$.*

Nótese que un proceso siempre es adaptado respecto de la filtración natural.

A continuación, definimos proceso predecible en el caso discreto. No se hace de forma más general, ya que el caso continuo presenta mayor dificultad y no es requerido en este trabajo.

Definición 2.1.7 (Proceso predecible) *Un proceso predecible respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ es un proceso $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\{\phi_n\}$ es $\mathcal{F}_{n-1}$-medible, $n \geq 1$.*

Conceptualmente, un proceso es predecible si su valor en el instante n está determinado por la información que ya conocemos sobre los instantes anteriores, es decir, hasta el instante n-1.

2.2 Martingalas en tiempo discreto

Introduciremos ahora la martingala, un proceso adaptado de gran relevancia en el cálculo estocástico. El surgimiento de las martingalas estuvo motivado por la necesidad de modelar juegos de azar justos, sin embargo, su estudio actual está abarcando muchas disciplinas, permitiendo ampliar las líneas de investigación en muchos campos de la ciencia. El concepto fue introducido en la teoría de probabilidades por el matemático francés Paul Pierre Lévy en la década de los 30, adoptando una gran relevancia en su posterior desarrollo matemático Joseph Leo Dobb.

A lo largo de este apartado, definiremos lo que es una martingala en un caso general, para luego ya en el caso discreto, tratar los tipos que hay, sus propiedades, algunas desigualdades características, así como un estudio muy superficial de su integrabilidad uniforme y de su convergencia.

Todo esto nos servirá de nexo para la siguiente sección, que tratará una martingala en tiempo continuo muy especial y estudiada, como es el movimiento browniano.

Asumiremos que todas las variables y procesos están definidos en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Debido a la fuerte dependencia que presentan las martingalas con la esperanza condicionada y sus propiedades, se puede consultar los detalles elementales de este tipo de esperanza en el apéndice B.

Definición 2.2.1(Martingala) *Una martingala respecto de la filtración $\{F_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ es un proceso $\{M_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ adaptado a $\{F_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, tal que:*

$$E(|M_t|) < \infty$$

y

$$E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$$

c.s para $s \leq t \in \mathbb{T}$.

Decimos que $\{M_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ es *submartingala(supermartingala)* si
$E(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$ c.s (si $E(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$ c.s) para $s \leq t$.

Hablamos de martingala en tiempo discreto si $\mathbb{T}$=$\mathbb{N}$ o de martingala en tiempo continuo si $\mathbb{T} = [0, \infty)$.

Nos centraremos a partir de ahora en el caso de estudio de este trabajo, que es el caso discreto.
Observaciones:

- Si escribimos $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}, n \geq 1$ entonces, la propiedad de martingala es equivalente a la propiedad siguiente:

  $$E(\Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0.$$

  Veámoslo:

  $E(\Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n) = E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) - E(M_n|\mathcal{F}_n) =$

  $M_n - M_n = 0$, donde se ha aplicado la definición de martingala para uno de los sumandos, y para el otro la condición de $\mathcal{F}_n$-medible.

  Respectivamente dicha propiedad sería para una submartingala(supermantigala) $E(\Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq 0$ ($E(\Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq 0$). Es decir, que los incrementos de martingala son en esencia ruido estocástico, queriendo decir esto, que la mejor predicción del valor del proceso en un instante futuro requerido será el valor actual.
  Cabe destacar que esto hace que el valor esperado de una martingala sea constante, respectivamente el de una submartingala es una función creciente y el de una supermantigala es una función decreciente.

- Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ son variables aleatorias independientes centradas, $M_0 = 0$ y $M_n = X_1 + ... + X_n$ si $n \geq 1$ entonces $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es martingala respecto de la filtración natural:

  $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(M_n|\mathcal{F}_n) + E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n + E(X_{n+1}) = M_n.$

- Sea Y una variable aleatoria independiente, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración, entonces el proceso $X_n = E(Y|F_n)$ es una martingala, ya que se tiene que

  $$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(E(Y|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = E(Y|\mathcal{F}_n) = X_n.$$

Además, todas las martingalas uniformemente integrables son del tipo anterior, este concepto será visto en la sección 2.2.3.

- Nótese que si un proceso predecible $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala, entonces es constante casi seguro, ya que:

  - $E(\phi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \phi_n$ c.s, por ser martingala.
  - $E(\phi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \phi_{n+1}$ c.s, por ser predecible.

Definición 2.2.2 (Integración estocástica discreta) *Si $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ es un proceso predecible y $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala (respecto de la misma filtración), entonces el proceso $\phi \cdot M$ dado por:*

$$(\phi \cdot M)_0 = 0$$

y

$$(\phi \cdot M)_n = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \Delta M_i, \qquad n \geq 1$$

es la *integral estocástica de $\{\phi_n\}$ respecto $\{M_n\}$.*

Consecuentemente, la integral estocástica de un proceso predecible acotado respecto de una martingala es, de nuevo, una martingala. Recogemos este hecho, a través del siguiente teorema.

Teorema 2.2.3 (Propiedad de estabilidad) [1] *Si ϕ es acotado y predecible, ϕ_{n+1} es $\mathcal{F}_t$ medible y $\phi_{n+1}\Delta M_{n+1}$ es integrable, entonces la integral estocástica definida como el proceso $X = (\phi \cdot M)$ es una martingala.*

Demostración: Teniendo en cuenta que $\Delta X_{n+1} = \phi_{n+1}\Delta M_{n+1}$,obtenemos:

$$E(\Delta X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(\phi_{n+1}\Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \phi_{n+1}E(\Delta M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0.$$

A continuación, mostramos en el siguiente teorema, una caracterización que nos permitirá saber cuando un proceso adaptado, es o no una martingala.

Teorema 2.2.4 (caracterización de las martingalas)[1] *Un proceso adaptado* $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una martingala, respecto de una filtración* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ *si y solo si para cada proceso predecible acotado* ϕ

$$E((\phi \cdot M)_n) = 0,\, n \geq 1.$$

Demostración:
Sabemos que si M es una martingala, entonces el proceso $(\phi \cdot M)_n$ también será martingala, luego todos sus elementos tendrán la misma esperanza, y como $(\phi \cdot M)_0 = 0$ por definición, todos y cada uno de los $(\phi \cdot M)_n$ tendrán esperanza nula, por lo cual queda probada esta implicación.

Supongamos que $E((\phi \cdot M)_n) = 0$, $n \geq 1$ para cada proceso ϕ predecible y acotado respecto de tal filtración.
Sea ahora $m \in \mathbb{N}$ y un conjunto C que sea $\mathcal{F}_m$-medible; se define en este caso el proceso predecible $\hat{\phi}$ como:

$$\hat{\phi}_l = 1_C \quad si\, l = m + 1$$

$$\hat{\phi}_l = 0 \quad en\ otro\ caso.$$

Por lo que así, se tiene que para $s > m$:

$$0 = E((\phi \cdot M)_s) = E(1_C(M_{m+1} - M_m)).$$

Recordando que el conjunto C es arbitrario se tiene que

$$E((M_{m+1} - M_m)|\mathcal{F}_m) = 0.$$

y esto es válido para cada índice m.
□

2.2.1 Tiempos de parada

Estudiemos ahora un tiempo aleatorio particular, que denominaremos tiempo de parada o de Markov, cuya interpretación puede considerarse como una regla aleatoria de parada, en el sentido de que la propia decisión de parar en el instante n debe hacerse basándose en la información disponible hasta alcanzar dicho instante. La referencia a seguir en esta subsección es [6].

Definición 2.2.5 (Tiempo de parada o de Markov) *Una variable aleatoria τ es un tiempo de parada respecto de una filtración $\{F_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ si se verifica que $(\tau \leq t) \in F_t$ para cada $t \in \mathbb{T}$.*

A su vez, un concepto íntimamente relacionado con este es el **tiempo opcional**, que se trata de aquel en el que se verifica que $(\tau < t) \in F_t$ para cada t $\in \mathbb{T}$.
Si la filtración es continua por la derecha, lo que siempre ocurre en el caso discreto que estamos tratando, ambos conceptos, es decir, el tiempo de parada y el tiempo opcional, coincidirán.

Definición 2.2.6 (σ álgebra de sucesos anteriores a τ) *Dicha σ álgebra está definida por:*

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap (\tau \leq n) \in \mathbb{F}_t \forall t \in \mathbb{T}\}.$$

A continuación se analizan dos teoremas que relacionan los tiempos de parada y las martingalas, aportando sus respectivas demostraciones.

Teorema 2.2.7 (Muestreo opcional para tiempos acotados) *Si X es una supermantigala, σ y τ son tiempos de parada acotados con $\sigma \leq \tau$ c.s. entonces:*

$$E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \leq X_\sigma.$$

En particular, si X es martingala, entonces $E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$.

Demostración:
Consideramos el proceso $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ dado por $\{\phi_n\} = I(\sigma < n \leq \tau)$.
Dicho proceso $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ es predecible porque $(\sigma < n \leq \tau)$=$(\sigma < n) \cap (\tau < n)^C$.
Supongamos que k es una cota superior para el tiempo de parada τ y consideremos el proceso Z=$(\phi \cdot X)$.
Sabemos que ϕ_n es positivo y acotado por 1 luego, se tiene que:

$$|(\phi \cdot X)_n| \leq |X_0| + \cdots + |X_k|.$$

Por lo tanto, el proceso $Z_n$es integrable y supermantigala con $Z_0 = 0$ y $Z_k = X_r - X_\sigma$.

Consecuentemente, se tendrá:

$$0 = E(Z_0) \geq E(Z_k) = E(X_\tau - X_\sigma) = E(X_\tau) - E(X_\sigma).$$

Consideramos el conjunto $A \in \mathcal{F}_\sigma$ y definimos el tiempo de parada σ' como:

- $\sigma' = \sigma$ en A.
- $\sigma' = k$ fuera de A.

Análogamente, definiríamos el tiempo de parada τ'. Se tiene claramente que $\sigma' \leq \tau' \leq k$.

Por lo tanto, razonando como antes, se tiene que:

$$\int_A X_\tau dP \leq \int_A X_\sigma dP \;\; \forall A \in \mathcal{F}_\sigma,$$

lo que demuestra el resultado.
□

Definición 2.2.8 (Proceso parado en σ) *Sea $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ un proceso estocástico y σ un tiempo de parada, el proceso parado en σ, es el proceso X^σ, dado por:*

$$X_t^\sigma = X_{\sigma\wedge t}, \;\; t \in \mathbb{T}$$

.

Teorema 2.2.9 (Parada opcional para tiempos acotados) *Si X es una (super)martingala y σ un tiempo de parada acotado, entonces X^σ es una (super) martingala para la misma filtración.*

Demostración:
Supongamos que X es una supermartingala y que $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ entonces se

tiene que para cada $n \geq 1$:

$$X_{\sigma \wedge t} = X_0 + \sum_{m \leq n} I_{\{m \leq \sigma\}} \Delta X_m.$$

Se tiene, por lo tanto, que X^σ es adaptado a la filtración y como $I_{\{m \leq \sigma\}}$ es predecible y mayor que cero, se tiene que X^σ ser supermantigala. Se demuestra de forma análoga en el caso de que X sea martingala. □

2.2.2 Desigualdades

La propiedad de martingala, garantiza que dicho proceso no puede oscilar de forma descontrolada, por lo que su crecimiento tampoco lo hará. Estas propiedades adquieren gran importancia en las trayectorias para procesos de tiempo continuo, aunque nos restringiremos a los resultados para el caso de tiempo discreto. Introduciremos todas estas propiedades para el caso de que X sea submartingala, siendo el razonamiento análogo en los otros casos.
Presentaremos las **desigualdades maximales de Doob** que permiten controlar el crecimiento de las martingalas, y a continuación las desigualdades **upcrossing**, que permiten controlar la oscilación de las mismas. Al igual que en el apartado anterior, la referencia a seguir es [6].

Teorema 2.2.10(Desigualdades maximales de Doob) *Si* $\{X_n\}_{n \geq 0}$ es una submartingala entonces:

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k > t \right) \leq \frac{E(X_n^+)}{t}, \;\; t > 0.$$

$$P\left(\min_{0 \leq k \leq n} X_k < -t \right) \leq \frac{E(X_n^+) - E(X_0)}{t}, \;\; t > 0.$$

Demostración:

Escribamos $A_0 = (X_0 > t), A_k = (X_0 \leq t, ..., X_{k-1} \leq t, X_k > t)$, $k = 1, ...n$.

Observa que A_k es $\mathcal{F}_k$-medible. Además$(\underset{0\leq k\leq n}{sup} X_k > t = \cup_{k=0}^{n} A_k)$ y los sucesos A_k son disjuntos dos a dos.

Por lo tanto:
$E(X_n^+) \geq E\left(X_n^+ I(\underset{0\leq k\leq n}{máx} X_k > t)\right) = \sum_{k=0}^{n} E(X_n^+ I_{A_k}) =$
$\sum_{k=0}^{n} E(E(X_n^+ I_{A_k}|\mathcal{F}_k)) = \sum_{k=0}^{n} E(I_{A_k} E(X_n^+|\mathcal{F}_k)) \geq \sum_{k=0}^{n} E(I_{A_k} X_k^+) \geq$
$t\sum_{k=0}^{n} E(I_{A_k}) = tP\left(\underset{0\leq k\leq n}{máx} X_k > t)\right)$, donde se ha usado que X_n^+ es también una submartingala.

Para la segunda desigualdad:
Llamamos $\tau = inf\{j \geq 0 : X_j < -t\} \wedge n$.
Se tiene entonces que τ es un tiempo de parada acotado y por el teorema 2.2.7:

$$E(X_0) \leq E(X_\tau) = E(X_\tau I(\tau \leq n)) + E(X_n I(\tau > n)) \leq$$
$$-tP\left(mín_{0\leq k\leq n} X_k < -t\right) + E(X_n^+).$$

□

Teorema 2.2.11(Versión L_p de la desigualdad maximal)
Si $\{X_n\}_{n\geq 0}$ es una submartingala no negativa y $p > 1$, entonces:

$$\left(E\left(\underset{0\leq k\leq n}{máx} X_k > t\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} E(X_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

Tomemos dos números reales $a < b$, nos interesará el número de veces que una martingala, partiendo por debajo de a, supera la altura b en los n primeros instantes de tiempo, este número lo denotaremos por $U_n[a,b]$ y será el número de **upcrossing's**. De manera análoga, denotaremos por $D_n[a,b]$ al número de **downcrossing's** que serán las veces hasta tiempo n que la martingala queda, teniendo las mismas condiciones anteriores, por debajo de la altura a.

Teorema 2.2.12(Desigualdades up/down-crossing) *Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

es una submartingala entonces:

$$E(U_n(a,b)) \leq \frac{E(X_n - a)^+ - E(X_0 - a)^+}{b-a} \leq \frac{E(X_n^+) + |a|}{b-a}.$$

$$E(D_n(a,b)) \leq \frac{E(X_n - a)^+}{b-a}.$$

Demostración:
La segunda desigualdad para $E(U_n(a,b))$ es consecuencia de que $(X_n - a)^+ \leq X_n^+ + |a|$.
En la primera podemos suponer que $X_j \geq 0$ y que $0 = a < b$.
Por otro lado, si escribimos $T_0 = 0$ y $T_j = \tau_j \wedge n$, se tendrá, necesariamente que $T_n = n$ y

$$X_n - X_0 = X_{T_n} - X_{T_0} = \sum_{j=0}^{n-1}(X_{T_{j+1}} - X_{T_j}) = \sum_{j\,par}(X_{T_{j+1}} - X_{T_j}) + \sum_{j\,impar}(X_{T_{j+1}} - X_{T_j}).$$

Como los T_j son tiempos de parada acotados, tenemos que $E(X_{T_{j+1}} - X_{T_j}) \geq 0$, además, tendremos:

$$\sum_{j\,impar}(X_{T_{j+1}} - X_{T_j}) \geq b\,U_n(0,b).$$

Consecuentemente $E(X_n - X_0) \geq (b-a)E(X_n - X_0)$.
La demostración de la desigualdad downcrossing es análoga. □

2.2.3 Integrabilidad uniforme y convergencia de martingalas

Como consecuencia de la desigualdad upcrossing, se tiene que las submartingalas acotadas en L_1 convergen c.s. Los teoremas que serán tratados, permitirán extender al caso general los teoremas sobre tiempos y muestreos acotados vistos en la sección anterior, la referencia básica es [19].

Teorema 2.2.13
Si $\{X_n\}$ *es una supermantigala con* $sup_{n\in\mathbb{N}} E(X_n^+) < \infty$, entonces existe una variable aleatoria integrable X_∞ con $X_n \to X_\infty$ casi seguro.

Demostración:
Si nosotros probamos que X_n converge casi seguro al límite X_∞ en $[-\infty, \infty]$, entonces X_∞ es automáticamente integrable, ya que por el Lema de Fatou $E|X_\infty| \leq \liminf E|X_n| < \infty$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que X_n es una supermantigala, entonces para un par de números $a < b$ sea el suceso:

$$F_{a,b} = \left\{ w \in \Omega : \liminf_{n\to\infty} X_n(w) < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n(w) \right\}.$$

Si $\lim_{n\to\infty} X_n(w)$ no existiera en $[-\infty, \infty]$, entonces podríamos encontrar dos números reales, $a < b$ tal que $w \in F_{a,b}$. Como los números racionales son densos en $\mathbb{R}$, nosotros podríamos escoger a y b números racionales.
El teorema estaría probado si somos capaces de mostrar que $\mathrm{P}(F_{a,b}) = 0$ para cada dupla de números racionales a, b. Para ello fijemos $a < b$ y sea $U_n[a,b]$ el número de upcrossing´s de [a, b] en 0,1...n de X.
Si $w \in F_{a,b}$, entonces $U_n[a,b] \uparrow \infty$ cuando $n \to \infty$ y debido a la convergencia monótona $EU_n[a,b]) \uparrow \infty$ si $\mathrm{P}(F_{a,b}) > 0$.
Sin embargo, por la desigualdad de upcrossing's:

$$(b-a)EU_n[a,b] \leq E(X_n^+) + |a| \leq \sup_n E|X_n| + |a|.$$

Tenemos que el lado derecho de la desigualdad es finito, y que el lado izquierdo no puedo crecer a infinito, luego $EU_n[a,b]$ no tiende a infinito, y por ende $\mathrm{P}(F_{a,b}) = 0$. □

Definición 2.2.14 (Familia de variables aleatorias uniformemente integrables) *Se dice que una familia de variables aleatorias* $\{X_i\}_{i\in\mathbb{I}}$ *es uniformemente integrable sí:*

$$\sup_{i\in\mathbb{I}} E(|X_i| I(|X_i| > t)) \to 0 \ \textit{cuando} \ t \to \infty.$$

A continuación, se presenta un teorema que muestra la idea de que bajo integrabilidad uniforme, una martingala $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede cerrarse, es decir, se puede definir una variable aleatoria M_∞ tal que $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}\,\cup\,\{\infty\}}$ es martingala, diciéndose que la martingala tiene un último elemento.

Teorema 2.2.15
Si $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala uniformemente integrable entonces $M_n \to M_\infty$ c.s en L_1 y:

$$E(M_\infty|\mathcal{F}_n) = M_n.$$

Demostración:
La convergencia casi seguro es inmediata debido al teorema 2.2.13.
Por otro lado, de la integrabilidad uniforme se obtiene la convergencia en L_1. Además,

$$E(M_\infty|\mathcal{F}_n) = M_n.$$

es equivalente a que para cada $A \in \mathcal{F}_n$ se tenga que,

$$E(M_n I_A) = E(M_\infty I_A).$$

Ahora, por la propiedad de martingala, si $m \geq n$,

$$E(M_n I_A) = E(M_m I_A).$$

Notemos para completar la demostración que:

$$|E(M_m I_A) - E(M_\infty I_A)| \leq E|M_m - M_\infty| \to 0$$

ya que teníamos convergencia en L_1. □

Ahora podríamos realizar una extensión de los teoremas 2.2.7 y 2.2.9 a tiempos de parada que no sean necesariamente acotados.
Se tendría, por lo tanto, lo siguiente:

Teorema 2.2.16 (Muestro opcional)
Si M es una martingala uniformemente integrable y σ y τ son tiempos de parada tales que $\sigma \leq \tau$ c.s. entonces:

$$E(M_\tau|F_\sigma) = X_\sigma.$$

Teorema 2.2.17 (Parada opcional)
Si M es una martingala uniformemente integrable y τ un tiempo de parada, entonces M_τ es integrable y M^τ es una martingala uniformemente integrable. En particular:

$$E(M_\tau) = E(M_0).$$

2.3 Movimiento Browniano

2.3.1 Introducción

El movimiento browniano es un proceso con trayectorias continuas que es a la vez martingala. Aunque hayamos tratado las martingalas en tiempo discreto, todas las propiedades mencionadas son extrapolables de forma casi directa a tiempo continuo.

Movimiento browniano es el nombre que recibe el movimiento irregular del polen suspendido en agua, observado por el botánico Robert Brown en 1828. Dicho movimiento era errático y en forma de zig-zag.

Este fenómeno observado fue objeto de estudio del propio Brown, quién observó que la velocidad del movimiento aumentaba, cuando aumentaba la temperatura del agua. Esto derivó pronto en una explicación a través de la teoría cinética:

Las moléculas que componen el líquido están sometidas a un movimiento térmico, cuyas velocidades aleatorias tiene una distribución de probabilidad que es la distribución de Maxwell y que varía con la temperatura del medio.

Desde un punto de vista matemático, fue Norbert Wiener, quién inició en 1918 el estudio del movimiento browniano, el cual serviría de semilla para originar el desarrollo del estudio de los procesos estocásticos.

En la actualidad, el movimiento browniano ha adquirido importancia reseñable en otras ciencias y ámbitos de estudio como son la electrónica, la biología y la economía, siendo alguna aplicación a esta última, la estudiada en capítulos posteriores en este trabajo.

La referencia que se seguirá mayoritariamente es [6].

Definición 2.3.1(Movimiento Browniano) *Se dice que un proceso* $\{W_t\}_{t\leq 0}$ *con trayectorias continuas es un movimiento browniano estándar si:*

- *(w_1)* $W_0 = 0$ *c.s.*
- *(w_2)* W_t *tiene incrementos finitos independientes: si* $s < t$ *,* $W_t - W_s$ *es independiente de* $\mathcal{F}_s$*(filtración natural).*
- *(w_3) si* $s < t$ *,*$W_t - W_s$ *tiene distribución normal, centrada, con varianza t-s.*

De las propiedades (w_2) y (w_3), se obtiene que si
$t_1 < t_2 < ... < t_n$ entonces $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son variables aleatorias normales independientes, por lo que el vector aleatorio $(W_{t_1}, ...W_{t_n})$ tiene distribución normal.

Concluyendo, el proceso con trayectorias continuas $\{W_t\}_{t\leq 0}$ es un proceso Gaussiano, centrado y con función de covarianza:

$$K(s,t) = \text{mín}(s,t).$$

Definición 2.3.2 (Movimiento Browniano d-dimensional) *Si* $d \geq 1$*, sean* $W_t^1, ...W_t^d$ *d movimientos Brownianos estándar independientes, entonces* $W_t = (W_t^1, ...W_t^d)$ *se denomina movimiento Browniano d-dimensional.*

2.3.2 Propiedades

- *Observación: Cambio de notación, ahora se indicará entre llaves y en este orden, el proceso y la filtración correspondiente.*

Proposición 2.3.3 *Si* $\{W_t,\mathcal{F}_t\}$ *es movimiento Browniano estándar, entonces:*

- *a)*$\{W_t, \mathcal{F}_t\}$ *es martingala,*
- *b)* $\{W_t^2 - t, \mathcal{F}_t\}$ *es martingala,*
- *c) para cada* $\sigma > 0$,$\{exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t), \mathcal{F}_t\}$ *es martingala.*

Demostración

Sean dos instantes $0 \leq s < t$ y sea $\mathcal{F}_s$ la filtración natural.

a)

$E(W_t|\mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_{s)} = E(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) + E(W_s|\mathcal{F}_s)$
Debido a la independencia de los incrementos, $E(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s)$ por lo tanto:

$$E(W_t|\mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s) + E(W_s|\mathcal{F}_s) = W_s.$$

b)

Como W es martingala e $W_t - W_s$ independiente de $\mathcal{F}_s$ se tiene que:
$t - s = E(W_t - W_s) = E\left((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_t\right) = E(W_t^2|\mathcal{F}_t) - 2E(W_t W_s|\mathcal{F}_{t)} + W_s^2 = W_s^2 - E(W_t^2|\mathcal{F}_s)$.
Donde se han tenido en cuenta las propiedades de la esperanza condicionada.

c)

Teniendo en cuenta el cálculo de la transformada de Laplace de una variable normal estándar y las propiedades del movimiento browniano, se tendrá que:

$$e^{\lambda^2 \frac{t-s}{2}} = E(e^{\lambda(W_t - W_s)}) = E(e^{\lambda(W_t - W_s)}|\mathcal{F}_t) = E(e^{\lambda W_t}|\mathcal{F}_t)e^{-\lambda W_s}$$

La siguiente definición viene motivada, por ser una propiedad que presenta el movimiento browniano [8], y que será tratada en la proposición 2.3.5.

Definición 2.3.4 (Proceso auto-similar) *Un proceso estocástico* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *es auto-similar, si existe un* $H > 0$ *tal que para cada* $a > 0$ *se tiene que:*

$$\{X_{at}\} \stackrel{d}{=} \{a^H X_t\}.$$

Observación:($\stackrel{d}{=}$) indica la igualdad de las distribuciones finito dimensionales de los procesos.

Proposición 2.3.5 *Si* $\{W_{t,}\mathcal{F}_t\}$ *es movimiento Brwoniano entonces tiene las siguientes propiedades de invariancia:*

- *a)Simetría:* $-W_t$ *es un movimiento browniano.*
- *b)Homogeneidad temporal: Para todo* $t \geq 0$ *el proceso* W^t *dado por* $W_s^t = W_{t+s} - W_t$ *es un movimiento Browniano independiente de* $\sigma(W_s : s \leq t)$.
- *c)Autosimilitud: Para todo* $c > 0$ *el proceso* $\frac{W_{ct}}{\sqrt{c}}, t \geq 0$ *es un movimiento Browniano.*
- *d)Inversión temporal: El proceso:*

$$X_t = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \\ tW_{\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases} \quad \textit{para } t \geq 0 \textit{ es un movimiento Browniano.}$$

Demostración

a)

Los incrementos de $-W$ son iguales y opuestos a los incrementos de B, por lo que serán independientes y estacionarios. Las trayectorias de $-W$ comienzan en cero y además son continuas.
Finalmente, como la distribución normal centrada presenta invariancia frente a la transformación, $x \to -x$ vemos que W_t y $-W_t$ tienen la misma distribución y, por lo tanto, $-B$ es un movimiento browniano.

b)

Si $0 = s_0 < s_1 < ... < s_n$ entonces: $(W_{s_1}^t - W_{s_0}^t, ..., W_{s_n}^t - W_{s_{n-1}}^t) = (W_{t+s_1} - W_t, ..., W_{t+s_n} - W_{t+s_{n-1}})$; los incrementos de W^t serán independientes y estacionarios, ya que los de W lo son, además W_s^t presenta distribución normal (0,s).
Finalmente, veamos que efectivamente W^t es independiente de $\mathcal{F}_t$, para ello observemos que por la propiedad de incrementos finitos independientes de W, se tiene que $W_{t1}^t, ...W_{tn}^t$ es independiente de $(W_{s_1}, ..., W_{s_n})$ si $s_1, ..., s_n \leq t$. Y utilizando clases monótonas se tiene que W^t es independiente de $\mathcal{F}_t$.

c)

Se trata de demostrar atendiendo a la definición 2.3.4 que el movimiento browniano es autosimilar con $H = \frac{1}{2}$, para ello nos basta, con demostrar que $\frac{W_{ct}}{\sqrt{c}}$ es movimiento browniano estándar.

Las propiedades (w_1) y (w_2) se heredan de W_t, así como el hecho de que $\frac{W_{ct}}{\sqrt{c}}$ presente distribución normal estándar.
En concordancia con esto, solo será necesario probar que efectivamente se trata de un proceso centrado y de que la varianza es t.
Su esperanza será:

$$E(\frac{W_{ct}}{\sqrt{c}}) = \frac{1}{\sqrt{c}}E(W_{ct}) = 0.$$

Por otro lado, su varianza será:

$$Var(\frac{W_{ct}}{\sqrt{c}}) = \frac{1}{c}Var(W_{ct}) = \frac{1}{c}ct = t.$$

d)

Será necesario con ver que $E(X_t) = 0, Cov(X_t, X_s) = mín(t, s)$ y la continuidad de X_t en el cero.
Sean $t, s \neq 0$ entonces tenemos que:

$$E(X_t) = tE(W_{\frac{1}{t}}) = 0.$$

$$Cov(X_t, X_s) = E(X_t X_s) = stE(W_{\frac{1}{t}} W_{\frac{1}{s}}) = stCov(W_{\frac{1}{t}} W_{\frac{1}{s}})$$
$$= st\, mín(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}) = min(s, t).$$

Hemos probado en definitiva que X_t es un proceso gaussiano en ley, es decir, que tiene distribución normal. Para probar la continuidad en el cero, vale con utilizar la ley de los grandes números aplicada a nuestro proceso [9], es decir:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0\, c.s.$$

□

Se introducen las siguientes definiciones motivadas por el teorema 2.3.11.

Definición 2.3.6(Proceso de Markov) *El proceso* $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_t$ *es de Markov si para cualquier función medible y acotada f, con* $s, t \geq 0$ *se tiene que*

$$E(f(X_{t+s})|\mathcal{F}_s) = E(f(X_{t+s})|X_s).$$

Si además $E(f(X_{t+s})|X_s = x) = E(f(X_t)|X_0 = x)$ entonces se trata de un proceso de Markov homogéneo.

Nótese, que un proceso es de Markov, si su distribución en instantes futuros, conocido el valor actual, es independiente de la historia anterior.

Definición 2.3.7(Familia de Markov) *Una familia de Markov es un proceso* $\{X_t, \mathbb{F}_t\}_t$ *junto con una familia de probabilidades* $P^x, x \in \mathbb{R}^d$ *de forma que* $P(X_0 = X) = 1$ *y tal que:*

$$E^x(f(X_{t+s})|\mathbb{F}_s) = (U_t f)(X_s), \;\; P^x \; c.s$$

donde $(U_t f)(X) = E^x f(X_t)$.

Definición 2.3.8 (Propiedad fuerte de Markov) *Un proceso* $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_t$ *tiene la propiedad fuerte de Markov si la propiedad de Markov se cumple incluso cuando cambiamos s por un tiempo de parada* τ.

Definición 2.3.9 (Proceso de Lévy) *Se dice que un proceso* $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_t$ *es de Lévy, si es estacionario de tiempo continuo y sus incrementos de valor no dependen de sus valores pasados.*
Formalmente, un proceso adaptado $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *con* $X_0 = 0$ *es un proceso de Lévy si:*

- *X tiene incrementos finitos independientes, es decir, si* $X_t - X_s$ *es independiente de la filtración* $\mathcal{F}_s$, $0 \leq s < t < \infty$.
- *X tiene incrementos estacionarios, es decir,* $X_t - X_s$ *tiene la misma distribución que* X_{t-s}, $0 \leq s < t < \infty$.
- X_t *es continuo en probabilidad, es decir* $\lim_{t\to s} X_t = X_s$, *donde el límite se toma en probabilidad.*

Definición 2.3.10 (Familia Browniana) *Una d-dimensional familia browniana es un proceso d-dimensional adaptado* $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_t$ *en un espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$ *junto con una familia de medidas de probabilidad* $\{P^x\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ *de forma que:*

- *(i) para cada* $F \in \mathcal{F}$ *la correspondencia* $x \to P^x(F)$ *es universalmente medible;*
- *(ii) para cada* $x \in \mathbb{R}^d$, $P^x[X_0 = x] = 1$*;*
- *(iii) para cada probabilidad de la familia de probabilidades, el proceso* $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_t$ *es un d-dimensional movimiento browniano comenzando en x.*

Presentamos en el siguiente teorema, la caracterización del movimiento browniano atendiendo a los diferentes tipos de proceso.

Teorema 2.3.11 [10]
Se tiene que:

- *El movimiento browniano es un proceso de Markov.*
- *El movimiento browniano es un proceso con la propiedad fuerte de Markov.*
- *Una familia browniana es una familia de Markov.*
- *El movimiento browniano es un proceso de Lévy.*

Teorema 2.3.12 (De caracterización de Paul-Lévy) [10]
Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ *es un movimiento browniano si y solo si:*

- *Tiene tracyectorias continuas c.s.*
- $X_0 = 0$.
- *Los procesos* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *y* $\{X_t^2 - t,\ t \geq 0\}$ *son martingalas.*

Ahora trataremos otro tipo de propiedades relacionadas con las trayectorias del movimiento Browniano. Comenzaremos introduciendo unas definiciones necesarias para a continuación, dar paso a algunos teoremas junto con sus demostraciones.

Definición 2.3.13(Variación cuadrática) *Llamamos variación cuadrática en $[0,t]$ del proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ al límite en probabilidad, si existe,*

$$[X]_t = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

donde $0 = t_0 < t_1 < ...t_n = t$ *y* $\delta_n = \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1})$.

De forma similar y con la notación utilizada anteriormente, se tiene que:

Definición 2.3.14(Covariación cuadrática) *Llamamos covariación cuadrática en $[0,t]$ del proceso $\{X_t\}_{t\geq 0}$ al límite en probabilidad:*

$$[X,Y]_t = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{i-1}).$$

Observaciones:

- Si la variación (o covariación) de procesos adaptados existe, entonces es un proceso adaptado.
- $[X]_t = [X,X]_t$.

Teorema 2.3.15
Si $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es movimiento Browniano estándar entonces $[W]_t = t$.

Demostración
Los incrementos de W son normales, independientes, centrados y con varianza $t_i - t_{i-1}$.

Por lo tanto:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = t.$$

Además, se tiene que:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right) = \sum_{i=1}^{n} Var\left((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^2 E(Y^2 - 1)^2 \leq tE(Y^2 - 1)\delta_n$$

siendo Y una variable normal estándar y utilizando la desigualdad de Chebychev se completa la demostración. $\square$

Como consecuencia del anterior teorema, se puede afirmar que el movimiento Browniano presenta una variación infinita en cualquier intervalo. Detallemos y definamos con precisión matemática a que nos referimos con variación.

Definición 2.3.16(Variación de una función) *Dada una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ se llama variación de f en $[a, b]$ a*

$$V_{[a,b]}(f) = sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

*con el supremo extendido a las particiones $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Se dice que una función f es de **variación finita** si $V_{[0,t]} < \infty$ para cada $t > 0$.*

Teorema 2.3.17
Si W es un movimiento browniano y $0 \leq a < b$ entonces $V_{[a,b]}(W) = \infty$ c.s.

Demostración
Tomemos sin pérdida de generalidad un intervalo [a,b]=[0,t], así mismo sea $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n$ una secuencia de particiones, con $\delta_n \to 0$.

Por el teorema 2.3.15 $\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \to t$ en probabilidad. Tomando subsucesiones podemos suponer que

$$\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \to t$$

con probabilidad 1.

Entonces, la variación del movimiento browniano será infinito en el intervalo $[0, t]$ para el conjunto de convergencia, pues si no se diera esto, debido a la continuidad de las trayectorias de W, tendríamos que:

$$\sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| \sum_{i=1}^{n} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|$$

$$\leq V_{[0,t]}(W) \max_{1 \leq i \leq n} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| \to 0.$$

□

De este teorema 2.3.17, se infiere, que el movimiento Browniano no puede ser en ningún intervalo Lipschitz, de hecho no es derivable en ningún punto, como se enuncia en la siguiente proposición sin demostración.

Proposición 2.3.18[10] *Para todo $t \geq 0$, el movimiento browniano no es diferenciable c.s en t.*

Capítulo 3

Medidas martingala

La referencia principal a seguir es el capítulo 2 de [1].

3.1 Modelo general de mercado en tiempo discreto

Fijemos el conjunto de tiempos $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, ...T\}$, donde cada punto del conjunto es un admisible "día comercial" y el punto T sería el día de finalización de la actividad financiera en cuestión.

Fijaremos también el espacio probalístico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que modelará todos los posibles estados del mercado a estudiar. El papel de $\mathcal{F}$ no es más que el de identificar cuáles son los posibles eventos para los inversores.
Nos referiremos a mercados finitos, pues los mercados de la vida real son por supuesto así; sin embargo, el considerar espacios arbitrarios y $\sigma - \acute{a}lgebras$ arbitrarias, que proporcionan una generalidad mayor, es simplemente por conveniencia matemática.

También, notemos que la estructura de la información es dada a los inversores por una secuencia creciente y finita de $\sigma - \acute{a}lgebras$ de $\mathcal{F}$. Asumimos que $(\Omega, \mathcal{F}_0)$ es completo y que,

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset ... \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F}.$$

Por lo que $\mathcal{F}_t$ contiene toda la información disponible hasta el tiempo t para los inversores, los cuales aprenden sin olvidar, no pueden utilizar información privilegiada que aportaría ventaja de unos a otros y además, se considera que nuestros inversores son "pequeños inversores" en el sentido de que sus actos no cambian las probabilidades asignadas a los diferentes eventos del mercado.

Por otro lado, sea $d \in \mathbb{N}$ la dimensión del mercado, utilizamos, para representar la evolución temporal del proceso de cotización de valores, al proceso estocástico de dimensión d+1 definido por:

$$S = \{S_t^i : t \in \mathbb{T},\ \ 0 \leq i \leq d\}.$$

El valor S^0 se denomina sin riesgo (proceso no aleatorio), en la jerga economista es denominado *bank account*, mientras que los otros d valores restantes con valores de proceso $S^1, S^2, ..., S^d$ presentan riesgo (se trata de procesos aleatorios). Así mismo, asumimos que el proceso S es adaptado a la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, lo que deriva en que S_t^i es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $i \leq d$. De hecho, lo más frecuente es tomar la filtración $\mathbb{F}$ como la generada por el proceso de cotización $S = \{S^0, S^1, ..., S^d\}$, que sería en este caso la filtración natural.

Nuestro mercado de valores se representa matemáticamente por la tupla $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$. Se pide a este modelo que al menos uno de los procesos de cotización sea siempre estrictamente positivo, ya que será considerado el punto de referencia, también conocido como **numerario**. Tradicionalmente, se asigna este papel a S^0, aunque se podría utilizar cualquier otro S^i que fuera estrictamente positivo.

3.2 Estrategias de inversión y oportunidad de arbitraje

Asumiremos sin pérdida de generalidad que nuestro numerario $S_0^0 = 1$, por lo que las demás cantidades podrán ser expresadas en unidades relativas a este valor. Además, si r es la tasa de interés constante, se tiene que $S_t^0 = (1 + r)^t$.

Definición 3.2.1(Factor de descuento) *El factor de descuento* $\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$ *es la suma de dinero que nosotros necesitamos invertir en bonos en t=0, para tener 1 unidad de valor a tiempo t.*

Se considera que el porfolio, cartera de inversión o estrategia de inversión, viene representado para $t \geq 1$ por el vector aleatorio $\theta_t =$

$(\theta_t^i)_{0\leq i\leq d}$ con valores en $\mathbb{R}^{d+1}$ Representa el número de acciones de tipo i-ésimo en el instante t-ésimo.

Definición 3.2.2(Proceso de valor) *Se trata del proceso estocástico definido por:*

$$V_0(\theta) = \theta_1 \cdot S_0,$$

$$V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i \cdot S_t^i, \quad t \in \mathbb{T}, t \geq 1.$$

El proceso de valor $V_0(\theta)$ representa el endeudamiento inicial al que tiene que enfrentarse el inversor. Los inversores seleccionan su porfolio relativo al tiempo t, de acuerdo con los precios al tiempo t-1 que ellos conocen. Mantienen su porfolio en el intervalo de tiempo $[t-1,t)$. Cuando llega el tiempo t, los inversores puedes modificar y ajustar sus porfolios de acuerdo al nuevo conocimiento sobre los precios de los procesos de valor en el tiempo t, y ellos mantendrán su nuevo porfolio (θ_{t+1}) durante el intervalo $[t,t+1)$.

Las hipótesis de nuestro modelo de mercado serán las siguientes:

- La estrategia de inversión $\{\theta_t : t = 1, 2, ...T\}$ es un proceso estocástico predecible.
- El mercado no presenta fricciones, es decir, no hay costes de transacción.
- Ventas en corto ilimitadas.
- Prestar está permitido (las variables aleatorias θ_t^i pueden tomar cualquier valor real).
- Los valores son perfectamente divisibles, S_t^i puede tomar cualquier valor real positivo.

Definición 3.2.3(Estrategia de inversión autofinanciada) *Se dice que una estrategia de inversión θ es autofinanciada si:*

$$\theta_{t+1} \cdot S_t = \theta_t \cdot S_t \quad 0 \leq t \leq T-1.$$

Su interpretación es la siguiente: una vez anunciados los nuevos precios S_t en el instante t, los inversores modifican su cartera sin añadir ni consumir riqueza, es decir, si se compra $\theta_{t+1} - \theta_t$ activos, el coste de dicha operación será de $(\theta_{t+1} - \theta_t) \cdot S_t$, si ahora deseamos que este sea cero, se tendrá que $\theta_{t+1} \cdot S_t = \theta_t \cdot S_t$ para t entre 0 y $T - 1$.

Definición 3.2.4(Proceso de ganancias) *Se denomina proceso de ganancias asociado con θ al proceso definido mediante:*

$$G_0(\theta) = 0.$$

$$G_t(\theta) = \theta_1 \cdot \Delta S_1 + \theta_2 \cdot \Delta S_2 + ...\theta_t \cdot \Delta S_t.$$

Proposición 3.2.5 *Una estrategia de inversión es autofinanciada si y solo sí:*

$$V_{t+1}(\theta) - V_t(\theta) = \theta_{t+1} \cdot (S_{t+1} - S_t) \quad 0 \leq t \leq T - 1.$$

O utilizando la notación introducida del proceso de ganancias, una estrategia de inversión es autofinanciada si y solo sí:

$$V_t(\theta) = V_0(\theta) + G_t(\theta).$$

Definición 3.2.6(Estrategia admisible) *Una estrategia de inversión θ es admisible si es autofinanciada y $V_t(\theta) \geq 0$ para todo $0 \leq t \leq T$.*

Definición 3.2.7(Estrategia u oportunidad de arbitraje fuerte) *Una estrategia de inversión θ es una oportunidad de arbitraje si:*

- $V_0(\theta) = 0.$
- $V_t(\theta) \geq 0, \forall t \in \mathbb{T}.$
- $E(V_T(\theta)) > 0.$

Es decir, que se trata de una estrategia admisible con valor inicial cero, pero valor final estrictamente positivo con probabilidad no nula. Nótese, que si existen oportunidades de arbitraje, con una inversión inicial nula, obtendríamos una riqueza final no nula.

Definición 3.2.8(Arbitraje débil) *Una estrategia de inversión θ es una oportunidad de arbitraje débil si:*

- $V_0(\theta) = 0.$

- $E(V_T(\theta)) > 0$.

Nótese, que a diferencia del arbitraje fuerte, no se pide que el proceso de valor sea positivo siempre, es decir, en algún momento es posible tener pérdidas.

Se puede demostrar, mediante una construcción implícita, que los dos arbitrajes son equivalentes.

Proposición 3.2.9 (Equivalencia de arbitrajes) *Si se tiene arbitraje débil, es posible construir un arbitraje fuerte, es decir, en un mercado finito el arbitraje débil es equivalente al arbitraje fuerte.*

Definición 3.2.10(Mercado viable) *Un modelo de mercado se dice que es viable si no tiene oportunidades de arbitraje, es decir, si se realiza una inversión inicial nula, se obtendrá una riqueza final nula casi seguro.*

Sea H un derivado financiero con madurez o fecha de vencimiento T, que se representará matemáticamente mediante una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible en $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, introduzcamos la siguiente definición.

Definición 3.2.11(Derivado alcanzable) *Un derivado financiero H, siguiendo la notación anterior, se dice que es alcanzable, si existe una estrategia admisible θ que lo genere, es decir:*

$$V_T(\theta) = H.$$

Sería apropiado que el proceso de valor asociado con una estrategia generadora fuera dado de forma única, ya que por el contrario, se violaría la **ley del precio único**, que permitiría obtener beneficio sin riesgo y por lo tanto, el mercado no sería viable [11].
Esto lo tenemos garantizado gracias al siguiente lema:

Lema 3.2.12 *Si H es un derivado financiero con madurez T en un mercado viable, entonces, los procesos de valor de todas las estrategias que pueden generar H, son iguales.*

Demostración
Si θ y ϕ son dos estrategias admisibles, con:

$$V_T(\theta) = H = V_T(\phi)$$

pero con $V(\theta) \neq V(\phi)$, entonces existe $t < T$ tal que

$$V_u(\theta) = V_u(\phi) \quad (u < t) \quad V_t(\theta) \neq V_t(\phi).$$

Sea el conjunto $A = \{V_t(\theta) > V_t(\phi)\}$ que está en $\mathcal{F}_t$, asumimos, sin pérdida de generalidad, que $P(A) > 0$. Por otro lado, la variable aleatoria $X = V_t(\theta) - V_t(\phi)$ es $\mathcal{F}_t$-medible y define una estrategia autofinanciada ψ, cuya expresión viene dada por:

$$\psi_u(w) = \theta_u(w) - \phi_u(w) \quad para\ u \leq t\ en\ A\ y\, para\, todo\ u \in \mathbb{T}\, en\, A^c$$

.

$$\psi_u^0 = \beta_t X, \quad \psi_u^i = 0, \quad i = 1, 2, ...d\ en\ A\ para\ u > t.$$

Es obvio que ψ es predecible, además como θ y ϕ son autofinanciadas también se mantiene para ψ en el caso de $u < t$, por otro lado, en el caso $u > t$, $\psi_{u+1} \cdot S_u = \psi_u \cdot S_u$ en A^c, mientras que en A, se tiene que $\psi_{u+1} = \psi_u$.
Por lo tanto, solo necesitamos comparar $\psi_t \cdot S_t = V_t(\theta) - V_t(\phi)$ y $\psi_{t+1} \cdot S_t = \mathbf{1}_{A^c}(\theta_{t+1} - \phi_{t+1}) \cdot S_t + \mathbf{1}_A \beta_t X S_t^0$.
Nótese que $S_t^0 {=} \beta^{-1}$ y que $X = V_t(\theta) - V_t(\phi)$, mientras que en A^c el primer término se convierte en $(\theta_t - \phi_t) \cdot S_t = V_t(\theta) - V_t(\phi)$, mientras que el último término desaparece.
Por lo que $\psi_{t+1} \cdot S_t = V_t(\theta) - V_t(\phi) = \psi_t \cdot S_t$.

Teniendo en cuenta que $V_0(\theta) = V_0(\phi)$, ψ es una estrategia autofinanciada con valor inicial cero.Pero $V_T(\psi) = \mathbf{1}_A(\beta_t X S_T^0) = \ \mathbf{1}\beta_t \beta_T^{-1} X$ es no negativo y estrictamente positivo en A, lo cual hace que tenga probabilidad positiva.
Como consecuencia, ψ es un arbitraje débil, y aplicando la proposición 3.2.9, podemos concluir que el mercado no es viable, ya que presenta oportunidad de arbitraje. $\square$

Por lo tanto, queda demostrado que en un mercado viable, es posible asociar un único precio de arbitraje a cualquier derivado financiero.

En la sección siguiente, se caracterizará los modelos de mercados viables sin tener que construir estrategias de forma implícita ya que derivaremos una fórmula general para el precio por arbitraje en su lugar.

3.3 Valoración por arbitraje con medidas de martingala

Se recuerda que estamos en un espacio medible arbitrario $(\Omega, \mathcal{F})$ en el cuál se consideran varias medidas de probabilidad, también tenemos una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, de forma que $(\Omega, \mathcal{F}_0)$ es completo y $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Finalmente, se recuerda que S será un proceso estocástico d+1 dimensional cuyas componentes expresan lo indicado en la sección 3.1. Es decir, como se mostró en la 3.1, nuestro mercado de valores se representa matemáticamente por la tupla $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$.
Se remarca que en esta sección, no asumimos que el modelo de mercado es finito, o dicho de otro modo, que la filtración $\mathbb{F}$ es generada por el proceso S.

Suponemos que $\overline{S} = \beta S$ es una martingala respecto de una probabilidad Q, por lo tanto $E_Q(\Delta\overline{S}_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$ para $t \geq 1$ en $\mathbb{T}$.

Sea $\theta = \{\theta_t^i : i \leq d, \ \ t = 1, 2, ...T\}$ una estratrgia admsible y sea su proceso de valor descontado $\bar{V}_t(\theta)$ que tiene la siguiente forma:

$$\overline{V_t}(\theta) = V_0(\theta) + \overline{G}_t(\theta).$$

(Se recuerda que $\bar{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \bar{S}_t$*)*

Puesto que el valor de proceso descontado $\overline{V_t}(\theta)$ es una constante más una suma finita de martingalas, es también una martingala con valor constante inicial $V_0(\theta)$, haciendo que tengamos que $E(\overline{V}_T(\theta)) = E(V_0(\theta))$.

Lo mencionado anteriormente, excluye la posibilidad de arbitraje, ya que si $V_0(\theta) = 0$ y $V_T(\theta) \geq 0$ casi seguro con la medida de probabilidad Q, $E(\overline{V}_T(\theta)) = 0$, por lo que $V_T(\theta) = 0$ casi seguro con la medida probabilidad Q.

Esto sigue siendo cierto casi seguro para la medida de probabilidad P, siempre que la medida de probabilidad Q tenga los mismos conjuntos de medina nula que P, es decir, siempre que Q y P sean medidas equivalentes, lo cual se denota $Q \sim P$.

Definición 3.3.1(Medida de martingala equivalente) *Una medida de probabilidad Q en $(\Omega, \mathcal{F})$, se dice que es una medida de martingala equivalente, si $Q \sim P$ y además $\overline{S}$ es una martingala respecto a Q para la filtración $\mathbb{F}$, es decir, para cada $i \leq d$ $\overline{S}^i$ es una $(\mathbb{F}, Q)$-martingala.*

Se acaba de mostrar por lo tanto, que la existencia de una medida martingala equivalente para S es suficiente para garantizar que el mercado de valores es viable. Matemáticamente, es normalmente más sencillo encontrar una medida de martingala equivalente para S que demostrar que no existen oportunidades de arbitraje para $\overline{S}$.

Económicamente, las asignaciones de probabilidad no deben relacionarse con las valoraciones por arbitraje, el único criterio es que los inversores prefieren más a menos y por lo tanto ellos se convertirían en arbitrajistas si el mercado permitiera arbitraje.

El precio que obtengamos para el derivado financiero H, debe de ser el mismo para todas las preferencias de riesgo de los agentes mientras las mismas excluyan la oportunidad de arbitraje. En particular, una economía de agentes neutrales al riesgo también obtendrá el precio de arbitraje del que hablábamos anteriormente.
La medida martingala equivalente Q, representa la asignación de probabilidad hecha en esta economía neutral al riesgo, y el precio que esta economía asigna al derivado financiero será simplemente el valor promedio descontado del pago H. Por lo tanto, la existencia de medida de martingala equivalente proporciona un método general de valoración de derivados financieros.

Veamos como se obtiene esa valoración, sea $\pi(H)$ el valor del derivado financiero a t=0, es decir, el valor que ven justo las dos partes implicadas. En un modelo de mercado viable, un inversor intentaría evaluar $\pi(H)$ construyendo una estrategia admisible la cual replique exactamente los flujos proporcionados por H en el tiempo T.

Para esta estrategia de inversión admisible $V_0(\theta)$ debería representar $\pi(H)$ de H. Se recuerda que un derivado es alcanzable si existe una estrategia θ generadora, tal que $V_T(\theta) = H$ o equivalentemete $\overline{V}_T(\theta) = \beta_T H$, pero como Q es una medida martingala para S, $\overline{V}(\theta)$ es salvo una constante, una transformación de martingala y por lo tanto es una martingala sobre Q, es decir que para todo $t \in \mathbb{T}$ se tiene que:

$$\overline{V}_t(\theta) = E_Q(\beta_T H|\mathcal{F}_t)$$

y como consecuencia para cualquier estrategia de inversión admisible:

$$V_t(\theta) = \beta_t^{-1} E_Q(\beta_T H|\mathcal{F}_t).$$

Particularizando:

$$\pi(H) = \overline{V}_0(\theta) = E_Q(\beta_T H|\mathcal{F}_0) = E_Q(\beta_T H).$$

Definición 3.3.2 (Mercado completo) *Se dice que un modelo de mercado es completo si todos los derivados financieros son alcanzables.*

Los mercados completos proporcionan la clase más simple en términos de valoración de opciones, pues cualquier derivado financiero puede ser valorado fácilmente calculando su esperanza relativa a una medida martingala equivalente para el modelo en cuestión.

Proposición 3.3.3 (Unicidad de la medida martingala equivalente) *En un mercado viable completo hay una única medida de martingala equivalente.*

Demostración
Notemos que $\overline{V}_0(\theta) = E_Q(\beta_T H)$ para cada medida martingala equivalente Q del modelo. Puesto que H es alcanzable, su precio $\pi(H)$ será independiente de la elección de medida de martingala equivalente Q.

En un modelo de mercado completo, si R y Q son dos medidas de martingala equivalente, se debe tener que:

$$E_Q(\beta_T H) = \pi(H) = E_R(\beta_T H).$$

Pero, esto significa(ya que $\beta_T > 0$) que la esperanza de cada variable aleatoria no negativa H es la misma bajo Q y R. Además, lo mismo seguirá siendo cierto para cualquier variable aleatoria, ya que el mercado es completo, considerando su parte positiva y negativa, separadamente.

Como en particular, podemos coger la variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible $H = 1_A$ donde $A \in \mathcal{F}_t$ arbitrario,teniendo que:

$$P_Q(A) = P_R(A),$$

se tiene que Q y R son idénticas y por lo tanto, que en un modelo de mercado viable completo habrá unicidad de medida martingala equivalente. $\square$

3.4 Aplicación: Fórmula de CRR y fórmula de Black-Scholes.

Para cerrar el capítulo, llegaremos a la fórmula de Cox-Ross-Rubinstein, y a partir de ella, a la de Black-Scholes. Aunque no sean necesarias para el objetivo fundamental del TFG, su importancia en el marco teórico matemático el cual estamos tratando es notable.

Asumiremos que tenemos un modelo de mercado binomial de dimensión d=1, es decir tenemos S^1 y S^0, con intereses devengados a una tasa fija $r > 0$. Tomando $S_0^0 = 1$, tenemos que $S_t^0 = (1+r)^t \quad t \in \mathbb{T}$ y por lo tanto $\beta_t = (1+r)^{-t}$. Los ratios de las variable stock sucesivas son variables aleatorias de Bernoulli, esto es para $t < T$, se tiene que $S_t^1 = S_{t-1}^1(1+a)$ o $S_t^1 = S_{t-1}^1(1+b)$ con $b > a > -1$, mientras que S_0^1, el precio inicial es conocido. También se define $R_t = \frac{S_t^1}{S_{t-1}^1} \; t > 0$.

El conjunto de posibles estados es entonces $\Omega = \{1+a, 1+b\}^T$, con la filtración natural generada por S, es decir, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ y $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_u^1 : \; u \leq t\}$. Nótese, que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F} = 2^\Omega$, es la σ-álgebra generado por todos los conjuntos de Ω. La medida P sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ es inducida por la razón de los precios del activo. Por simplicidad, reemplazaremos a los largo de toda la sección S por S^1 por lo $R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$ para $t > 0$. Para cada $\omega = (\omega_1, \omega_2 ... \omega_T) \in \Omega$, se define:

$$P(\{\omega\}) = P(R_t = \omega_t,\ t = 1, 2, ...T)$$

Observamos, que para cualquier medida de probabilidad Q en $(\Omega, \mathcal{F})$, la relación $E_Q(\overline{S}_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \overline{S}_{t-1}$, es equivalente a $E_Q(R_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 1 + r$, puesto que $\frac{\beta_t}{\beta_{t-1}} = 1 + r$.
Como Q es una medida martingala equivalente para S, se tiene que $E_Q(R_t) = 1 + r$. Por otro lado, R_t solo toma los valores $1 + a$ y $1 + b$ como se vio antes, por lo que el el valor esperado de R_t será igual a $1 + r$ si y solo si $a < r < b$.

Recogemos el resultado obtenido en la siguiente proposición.

Proposición 3.4.1 *Para que exista una medida martingala equivalente en un modelo binomial, se debe tener $a < r < b$.*

Cuando el mercado es viable, exsite una única medida martingala equivalente Q para S. Vamos a construir esta medida, probando el siguiente resultado.

Proposición 3.4.2 *$\overline{S}$ es una Q-martingala si y solo si las variables aleatorias (R_t) son independientes e igualmente distribuidas, con $Q(R_1 = 1 + b) = q$ y $Q(R_1 = 1 + a) = 1 - q$ donde $q = \frac{r-a}{b-a}$*

Demostración
Supongamos que (R_t) son variables aleatorias e igualmente distribuidas con $Q(R_1 = 1 + b) = q$ y $Q(R_1 = 1 + a) = 1 - q$, entonces satisfacen que

$$E_Q(R_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E_Q(R_t) = q(1+b)+(1-q)(1+a) = q(b-a)+1+a = 1+r.$$

Por lo que $\overline{S}$ es martingala.

Recíprocamente, si $\overline{S}$ es martingala, se tiene que $E_Q(R_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 1 + r$, además como R_t solo toma los valores $1+a$ y $1+b$, tenemos que:

$$(1 + a)Q(\{R_t = 1 + a\}|\mathcal{F}_{t-1}) + (1 + b)Q(\{R_t = 1 + b\}|\mathcal{F}_{t-1}) = 1 + r$$

donde $Q(\{R_t = 1 + a\}|\mathcal{F}_{t-1}) + Q(\{R_t = 1 + b\}|\mathcal{F}_{t-1}) = 1$.

Sea $q = Q(\{R_t = 1 + b\}|\mathcal{F}_{t-1})$, obtememos que

$$(1 + a)(1 - q) + (1 + b)q = 1 + r,$$

de donde deducimos que $q = \frac{r-a}{b-a}$.
La independencia de las variables aleatorias se consigue por inducción sobre $t > 0$, ya que para $\omega = (\omega_1, \omega_2 ... \omega_T) \in \Omega$ vemos de forma inductiva que:

$$Q(R_1 = \omega_1, R_2 = \omega_2, ..., R_t = \omega_t) = \prod_{i=1}^{t} q_i$$

donde $q_i = q$ cuando $\omega_i = (1 + b)$ y es $(1 - q)$ cuando $\omega_i = (1 + a)$, afirmando que las variables aleatorias (R_t) son i.i.d. □

Luego un modelo de mercado binomial viable, admite una única medida equivalente martingala y está dada por Q. A continuación, calcularemos el precio de una opción europea Call, llegando para ello, a la fórmula de Cox-Ross-Rubinstein. Enunciamos por lo tanto el siguiente teorema tras la motivación expuesta.

Teorema 3.4.3 (Fórmula Cox-Ross-Rubinstein) Bajo el modelo y premisas anteriores, se tiene que el precio en t=0 de una opción europea call $X = (S_T - K)^+$, está determinada por la siguiente expresión denominada **la fórmula de valoración de opciones de Cox-Ross-Rubinstein**:

$$\pi(X) = (1+r)^{-T} \sum_{u=A}^{T} \left[\frac{T!}{u!(T-u)!} q^u (1-q)^{T-u} \cdot (S_0(1+b)^u (1+a)^{T-u} - K) \right]$$

donde A es el primer número entero k para el que
$S_0(1 + b)^k (1 + a)^{T-k} > K$ y $q = \frac{r-a}{b-a}$.

Demostración
Veamos como llegar a esta fórmula, tenemos que el valor de una opción europea call a tiempo $t \in \mathbb{T}$ es

$$V_t(C_T) = \beta_t^{-1} E_Q(\beta_T C_T | \mathcal{F}_t)$$

Puesto que $S_T = S_t \prod_{u=t+1}^{T} R_u$, (por la definición de R_u), podemos calcular esta esperanza de forma simple, puesto que S_t es $\mathbb{F}_t$-medible y cada $R_u (u > t)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$:

$$V_t(C_T) = \beta_t^{-1} \beta_T E_Q((S_t \prod_{u=t+1}^{T} R_u - K)^+ | \mathcal{F}_t) =$$

$(1+r)^{t-T} E_Q((S_t \prod_{u=t+1}^{T} R_u - K)^+ | \mathcal{F}_t) = (1+r)^{t-T} E_Q((S_t \prod_{u=t+1}^{T} R_u - K)^+) = (1+r)^{-(T-t)} \sum_{u=0}^{T-t} \frac{(T-t)!}{u!(T-t-u)!} q^u (1-q)^{T-t-u}\, S_t(1+b)^u (1+a)^{T-t-u} - K)^+$.

En particular, el precio a tiempo t=0, será:

$$\pi(X) = (1+r)^{-T} \sum_{u=A}^{T} \left[\frac{T!}{u!(T-u)!} q^u (1-q)^{T-u}\, S_0 (1+b)^u (1+a)^{T-u} - K) \right] \square$$

Este modelo conocido como modelo de Cox-Ross-Rubinstein fue desarrollado por John Carrington Cox, Stephen A. Ross y Mark Rubinstein y presentado en 1979 en un artículo llamado *Option pricing: A simplified approach* en la prestigiosa revista *Journal of financial Economics.*

Además, el modelo de Black-Scholes es el resultado de llevar el modelo de Cox-Ross-Rubinstein al límite, entendido como límite de tiempo continuo. Veamos entonces esta convergencia, para obtener la fórmula de Black-Scholes.

Consideremos una opción europea tipo Call sobre un activo con un strike K y fecha de expiración T. Su saldo está dada por $(S_T - K)^+$. Transformaremos el contexto actual, en un problema de tiempo discreto, considerando un modelo binomial para un activo, con valor incial S_0 y que cambia un número finito de veces en tiempos discretos en $(0, T]$, consideramos una distancia fija $h = \frac{T}{N}$, para algún N fijo de forma que que el conjunto $\{0, h, 2h, ..., Nh\} \subset [0, T]$. Consideramos el precio de la opción en este nuevo conjunto.

El precio de la misma estará dado por:

$$V_0^N = \beta_N E_Q((S_0 \prod_{n=1}^{N} R_n^N - K)^+) = (1+R)^{-N} E_Q((S_0 \prod_{n=1}^{N} R_n^N - K)^+),$$

donde $R_n^N = \frac{S_{nh}^N}{S_{(n-1)h}^N}$ toma valores de la forma $(1+b)$ y $(1+a)$ para $n \geq 1$. Además las variables (R_N^h) son i.i.d y

$$Q(R_1^N = 1+b) = q = \frac{R-a}{b-a}$$

Ahora, fijando $r \geq 0$ y siendo $R = \frac{rT}{N}$, puesto que tasa de interés sin riesgo en tiempo discreto R sobre [0,h] tiende a cero cuando N tiende a infinito, y r actua como una tasa de interés "instantánea" en puntos de [0,T]. Nótese que $e^{rT} = \lim_{N\to\infty}(1+R)^N$.
Fijado $\sigma > 0$ (representará la volatibilidad) y fijado N, podemos escoger los parámetros a y b, de forma que la aproximación binomial N-ésima del proceso de precios S^N venga dada por:

$$log(\frac{1+b}{1+R}) = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} = \sigma\sqrt{h},$$

$$log(\frac{1+a}{1+R}) = -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} = -\sigma\sqrt{h}$$

Escribimos $S_{nh}^{0,N} = (1+R)^n$ $(n \leq N)$ para el activo sin riesgo asociado. Los radios de los procesos de precio descontados de la opción tienen la forma $e^{\sigma\xi_n}$, donde las variables aleatorias (ξ_n) son i.i.d. y toman los valores $\pm\sqrt{h}$, con probabilidad q y $1-q$ respectivamente.

Ahora, el Teorema Central del Límite, en su versión del Teorema de Lindeberg-Feller para arreglos triangulares, asegura que dada una colección de variables aleatorias i.i.d. $(Y_k^N)_{k\leq N}$ con media μ_N tal que $(N\mu_N)_N$ converge a μ cuando N tiende a infinito y cuya varianza es de la forma $\frac{\sigma^2}{N} + o(\frac{1}{N})$, entonces la suma $Z_N = \sum_{k=1}^N Y_k^N$ converge en distribución a una variable aleatoria Z, con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ La demostración puede consultarse en [1].

Para aplicar esto a V_0^N, introducimos el factor $(1+R)^{-N} = (1 + (\frac{rT}{N}))^{-N}$ dentro de la esperanza y definimos:

$$Y_n^N = log(\frac{R_n^N}{1+R}), \quad Z_N = \sum_{n=1}^N Y_n^N.$$

Obteniendo que:

$$(1+R)^{-N}\prod_{n=1}^{N} R_n^N = (1+R)^{-N}(1+R)^N exp(\sum_{n=1}^{N} Y_n^N) = e^{Z_N}$$

Por lo que V_0^N toma la forma:

$$V_0^N = E_Q[S_0 e^{Z_N} - (1+\frac{rT}{N})^{-N} K]^+.$$

Pero R_n^N toma los valores $1+b$ y $1+a$, luego Y_n^N toma los valores $\pm(\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{N}}) = \pm\sigma\sqrt{h}$, calculando su esperanza se obtiene:

$$\sigma\sqrt{h}q - \sigma\sqrt{h}(1-q) = (2q-1)\sigma\sqrt{h}$$

Ahora rescribiendo $(2q-1) = 1-2(1-q) = 1-2(\frac{b-R}{b-a}) = 1 - \frac{[e^{-\sigma\sqrt{h}}-1}{sinh(e^{\sigma\sqrt{h}})}$.

Expandiendo en serie de Taylor, se tiene que $2q-1 = -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{(\frac{T}{N})} + O(\frac{1}{N})$, por lo que $N\mu_N \to -\frac{1}{2}\sigma^2 T$ cuando N tiende a infinito. Luego, aplicando el Teorema Central del Límite, se obtiene que $Z_N \to Z$ en distribución, por lo que $(S_0 e^{Z_N} - (1+\frac{rT}{N})^{-N}K)^+$ también converge en distribución a $(S_0 e^Z - e^{-rT}K)^+$.

Puede probarse, aunque no realizamos la oportuna demostración, que $V_0^N = E(S_0 e^{Z_N} - (1+\frac{rT}{N})^{-N})^+ \to E(S_0 e^Z - e^{-rT}K)^+$. donde la esperanza es tomada respecto a la distribución de $Z \sim N(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$.

Dado que $Z \sim N(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$, la variable $X = (\frac{1}{\sigma\sqrt{T}})(Z+\frac{1}{2}\sigma^2 T) \sim N(0,1)$, por lo que el valor límite de V_0^N puede ser encontrado mediante la evaluación de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [(S_0 e^{-(\frac{1}{2})\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K)^+] \frac{e^{-(\frac{1}{2})x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Nótese que la integral es distinta de cero solo cuando $\sigma\sqrt{T}x - \frac{1}{2}\sigma^2 T > log(\frac{K}{S_0}) - rT$, es decir, en el intervalo (γ, ∞) con $\gamma = (log(\frac{K}{S_0}) + (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)T)/\sigma\sqrt{T}$.

Cambiando los límites de integración de acuerdo a lo anterior, el precio de la opción, para el modelo de precios límite viene dado por:

$$S_0 \int_{\gamma}^{\infty} e^{-(\frac{1}{2})\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x - \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} - Ke^{-rT}(1-\Phi(\gamma)) =$$

$$S_0(1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T})) - Ke^{-rT}(1 - \Phi(\gamma))$$

(donde Φ denota la función de distribución acumulada normal estándar).

Notemos que:

$$\gamma - \sigma\sqrt{T} = \frac{log(\frac{K}{S_0}) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Usando la simetría de Φ, notemos que $1 - \Phi(\gamma) = \Phi(-\gamma) = \Phi(d_-)$ y $1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T}) = \Phi(d_+)$ donde:

$$d_+ = \frac{log(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_- = \frac{log(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Hemos llegado, por lo tanto, a la conocida fórmula de Black-Scholes, en la que a tiempo t=0, el precio de la opción Call viene dado por:

$$V_0(C) = V_0 = S_0\Phi(d_+) - e^{rT}K\Phi(d_-) \tag{1}$$

Reemplazando T por T-t y S_0 por S_t, podemos obtener el proceso de valor V_t para la opción de forma similar. Entendiendo la opción como un contrato escrito a tiempo T con tiempo hasta la fecha de vencimiento T-t, tenemos que:

$$V_t(C) = S_t\Phi(d_{t+}) - e^{r(T-t)}K\Phi(d_{t-})$$

donde:

$$d_{t+} = \frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_{t-} = \frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Esta forma de obtención, no nos ha requerido estudiar las dinámicas del precio de opción límite S, el cual tomaría la forma:

$$dS_t = S_t\mu d_t + \sigma S_t dW_t, \tag{2}$$

donde W es un movimiento

Se puede demostrar que la ecuación 2, tiene como única solución,

$$S_t^1 = S_0^1 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t},$$

véase capítulo 7 en [1].

Cuando $\mu = r$, entonces se deduce de la proposición 2.3.3.(c) que el proceso descontado $\overline{S}_t^1$ es una martingala. Puede probarse también que las leyes de los procesos anteriores son equivalentes entre sí, independientemente del valor de μ, de manera que la ley de

$$S_0^1 e^{(\sigma W_t - (\frac{\sigma^2}{2} - r)t)}$$

descontada, es la medida martingala equivalente para las soluciones de la ecuación 2. La teoría de valoración por arbitraje de activos financieros en tiempo continuo (*véase* capítulo 7 en [1]) nos dice entonces que el precio de la opción europea a tiempo continuo debe ser el valor esperado descontado bajo la medida martingala equivalente, es decir,

$$e^{-rT} E(S_0^1 exp(\sigma W_t - (\frac{\sigma^2}{2} - r)T) - K)^+.$$

Teniendo en cuenta que $W_t \sim N(0, T)$, repitiendo los cálculos anteriores, volvemos a obtener la fórmula de Black-Scholes de valoración de una opción europea:

$$V_0^T = S_0^1(1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T})) - Ke^{-rT}(1 - \Phi(\gamma))$$

con $\gamma = (log(\frac{K}{S_0}) + (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)T)/\sigma\sqrt{T}$.

Ejemplo de aplicación, tomado de [5]:

Calculemos el precio de una opción de compra de una acción de la empresa "X"que en el momento actual, está valorada en 50 u.m, siendo el precio de ejercicio 45, el tiempo hasta el vencimiento 3 meses, el tipo de interés del activo libre de riesgo del 5 %, y la volatilidad del 25 %.

Con lo expuesto anteriormente y viendo que se trata de una opción tipo Call, tenemos que:

$$c = 50 \cdot N(d_1) - 45 \cdot e^{-0{,}05 \cdot 0{,}25} \cdot N(d_2)$$

Procedemos a calcular los valores d_1 y d_2.

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{50}{45}\right) + \left(0,05 + \frac{1}{2}0,25^2\right) \cdot 0,25}{0,25 \cdot \sqrt{0,25}} = 1,0054$$

$$d_2 = 1,0054 - 0,25 \cdot \sqrt{0,25}$$

Así mismo,

$$N(1,0054) = 0,8426$$

$$N(0,8804) = 0,8107$$

Por lo que:

$$c = 50 \cdot 0,8426 - 45 \cdot e^{-0,05 \cdot 0,25} \cdot 0,8107 = 6,1050$$

u.m

De esa cantidad, 5u.m (50-45) constituyen el valor intrínseco y el resto (1,1050) sería el valor temporal de la opción.
Se adquiriría la opción, si el precio de la misma en el mercado fuese menor a "c" y si fuese mayor se vendería.

Capítulo 4

El teorema fundamental de valoración de activos

Hemos demostrado en el capítulo 3 que la existencia de una medida de martingala equivalente Q para S es suficiente para garantizar que el modelo de mercado es viable. Ahora probaremos el recíproco, es decir, si tenemos un modelo de mercado viable, entonces nosotros podemos construir una medida equivalente de martingala para S, haciendo que el precio del derivado financiero en cuestión pueda ser obtenido mediante la esperanza condicionada bajo Q. La referencia a seguir en la primera parte del capítulo será [1], mientras que en la parte final del mismo, donde se realiza la demostración del teorema, nos basaremos en [17].

4.1 Teorema de separación por hiperplanos en $\mathbb{R}^n$.

Este teorema se puede ver como una aplicación del teorema de Hahn-Banach, la demostración que se realiza en este trabajo es autocontenida y elemental, para ello asumiremos que estamos trabajando en un modelo de mercado finito, en el cual la σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ está generada por partición $\mathcal{P}_t$ de Ω. Esta restricción nos va a evitar tener que recurrir a técnicas de análisis funcional avanzadas, las cuales son necesarias para el caso general, aunque las ideas básicas estarán casi todas presentes en el caso particular que estamos considerando.

Particularmente, usaremos el siguiente teorema para conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.1.1 (Separación por hiperplanos).
Sea L un subespacio lineal de $\mathbb{R}^n$ y sea K un subconjunto compacto y convexo en $\mathbb{R}^n$ de L. Entonces se puede separar estrictamente L y K por un hiperplano que contiene a L, esto es, existe un funcional lineal $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = 0$ para todo $x \in L$ pero $\phi(x) > 0$ para todo $x \in K$.

Demostración:
Sea C un subconjunto cerrado y convexo de $\mathbb{R}^n$ que no contiene al vector cero. Nosotros vamos a mostrar que hay un funcional lineal ϕ en $\mathbb{R}^n$ cuyo núcleo $\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}$ no contiene a C.
Denotamos por B=B(0,r), a la bola cerrada de radio r y centrada en el origen en $\mathbb{R}^n$, y escogemos un $r > 0$ tal que B interseca con C. Por consiguiente, $B \cap C$ es no vacío, cerrado y acotado, luego compacto.
Tendremos entonces que la función continua $x \to |x|$ alcanza su ínfimo en $B \cap C$ para algún $z \in B \cap C$($|x|$denota en este caso la norma euclídea de x en $\mathbb{R}^n$). Puesto que $|x| \geq r$ cuando $x \notin B$, es claro que $|x| \geq |z| \ \forall x \in C$. En particular, como C es convexo, $y = \lambda x + (1-\lambda)z$ está en C cuando $x \in C$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Así que $y \geq z$, en otras palabras:

$$|\lambda x + (1-\lambda)z|^2 \geq |z|^2$$

.

Desarrollando ambos lados de la desigualdad y denotando $a \cdot b$ como el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ obtenemos:

$$\lambda^2 x \cdot x + 2\lambda(1-\lambda)x \cdot z + (1-\lambda)^2 z \cdot z \geq z \cdot z$$

y simplificando

$$2(1-\lambda)x \cdot z - 2z \cdot z + \lambda(x \cdot x + z \cdot z) \geq 0$$

Esto se cumple para cada $\lambda \in [0,1]$, por lo que sí $\lambda \to 0$ se tiene que:

$$x \cdot z \geq z \cdot z = |z|^2 > 0$$

Definiendo $\phi(x) = x \cdot z$ hemos encontrado un funcional lineal tal que $\phi(x)$ es acotado inferiormente en C por $|z|^2$.

Sea ahora K un conjunto compacto convexo y disjunto del subespacio L. Definimos

$$C = K - L = \{x \in \mathbb{R}^n : x = k - l \ \ para \ \ algún \ \ k \in K, l \in L\}.$$

Entonces C es convexo, ya que lo K y L lo son, y C es cerrado, para verlo notemos que si $x_n = k_n - l_n$ converge a algún $x \in \mathbb{R}^n$, entonces, como K es compacto, (k_n) tiene una subsucesión convergente para algún $k \in K$. Puesto que $x_{n_r} = k_{n_r} - l_{n_r} \to x$ *cuando* $r \to \infty$ *y* $k_{n_r} \to k$, así que $l_{n_r} = k_{n_r} - x_{n_r} \to k - x$ y puesto que $l = k - x$ pertenece a L, luego L es cerrado. Pero entonces también se tiene que $x = k - l \in C$, por lo que C es cerrado.

Como C no contiene al origen, se puede aplicar la primera parte de la demostración a C, para obtener en $\mathbb{R}^n$ un funcional lineal acotado, tal que $\phi(x) \geq |z|^2 > 0$, para todo z como antes. En otras palabras, sea $x = k - l$, tenemos que $\phi(k) - \phi(l) \geq |z|^2 > 0$, esto se cumple para cualquier $x \in C$.

Fijemos k y reemplacemos l por λl, con λ positiva si $\phi(l) \geq 0$ y por λl con lambda negativa si $\phi(l) < 0$. Los vectores λl pertenecen a L, por ser L un espacio lineal, como ϕ es acotado, nosotros tendremos que $\phi(l) = 0$, esto es, L es un subespacio del hiperplano $\ker\phi = \{x : \phi(x) = 0\}$, mientras que $\phi(K)$ es acotado inferiormente por $|z|^2 > 0$. Esto prueba el teorema. $\square$

Veamos en la siguiente sección como puede aplicarse este teorema en la construcción de medidas martingala que nos permitirán acercarnos al objetivo del capítulo.

4.2 Construcción de medidas martingala

Aplicaremos el teorema de separación de hiperplanos en $\mathbb{R}^\Omega$, el espacio de todas las funciones de Ω en R, identificando este espacio con $\mathbb{R}^n$ para un n finito, en vista de asumir que la σ-álgebra $\mathcal{F}$ está finitamente generada, es decir asumimos que $\Omega = D_1 \cup D_2 ... \cup D_n$ con $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $P(D_i) = p_i > 0$ para $i \leq n$. Sin pérdida de generalidad se pueden tomar los (D_i) como puntos w_i de Ω.

Definición 4.2.1(Cono) *Denotaremos por C al cono(subconjunto cerrado para suma de vectores y multiplicación por escalares no negativos)de $\mathbb{R}^n$, es decir:*
C=$\{Y \in \mathbb{R}^n : Y_i \geq 0\,(i = 1, 2, ..., n)$ y tal que existe algún índice j, tal que $Y_j > 0\}$.

Como hemos identificado las celdas de la partición con los puntos de Ω, tendremos que los valores y las ganancias de cualquier estrategia de inversión pueden ser vistas como vectores en $\mathbb{R}^n$.

Por lo tanto, la suposición de no arbitraje implica que para cada estrategia admisible $\theta \in \Theta_a$ se tiene que:

$$si\ V_0(\theta) = 0\ entonces\ \overline{V}_T(\theta) = \overline{G}_T(\theta) \notin\ C.$$

Es decir, el proceso de ganancia descontado $\overline{G_\theta}$ para una estrategia θ no puede tener un valor final contenido en C.

Veamos esta última afirmación, con un pequeño abuso de notación se puede definir proceso de ganancias descontado asociado con $\hat{\theta}$ como

$$\overline{G}_t(\hat{\theta}) = \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta\overline{S}_u = \sum_{u=1}^{t}(\sum_{i=1}^{d} \theta_u^i \cdot \Delta\overline{S}_u^i)$$

para $t = 1, 2, ..., T$.

Supongamos que $\overline{G}_T(\hat{\theta}) \in C$, entonces:

$V_T(\theta) = \beta_T^{-1}\overline{V}_T(\theta) = \beta_T^{-1}(V_0(\theta) + \overline{G}_T(\theta)) = \beta_T^{-1}\overline{G}_T(\hat{\theta})$ es no negativo con probabilidad 1 y es estricamente positivo con probabilidad positiva, por lo que θ es un arbitraje débil, contradiciendo la viabilidad del modelo.

Hemos probado por lo tanto que:

Lema 4.2.2 *Si el modelo de mercado es viable, el proceso de ganancias descontado asociado con cualquier proceso predecible $\hat{\theta}$ con valores en $\mathbb{R}^d$ no puede pertenecer al cono C.*

Estamos ya en disposición de probar el resultado buscado, es decir el teorema de equivalencia.

Teorema 4.2.3(Teorema de equivalencia) *Un modelo de mercado finito es viable si y solo si existe una medida de martingala equivalente para S.*

Demostración
Ya hemos probado en el **capítulo 3** que la existencia de una medida de martingala equivalente implica la viabilidad del modelo, ahora probaremos el recíproco.

Supongamos que el mercado es viable, necesitamos construir una medida $Q \sim P$ con la que los procesos de precio sean martingalas relativas a la filtración $\mathbb{F}$. Recordemos que el cono C es el cono convexo de todas las variables aleatorias reales ϕ en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\phi(w) \geq 0$ c.s y $\phi(w) > 0$ para al menos un $w_i \in \Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$.

Hemos mostrado anteriormente que un mercado viable nosotros debemos tener $G_T(\hat{\theta}) \notin C$ para todos los procesos predecibles $\mathbb{R}$-valuados $\hat{\theta}$. Por otro lado, el conjunto definido por los procesos de ganancias, $L = \{G_T(\hat{\theta}) : \hat{\theta} = (\theta^1, \theta^2, ..., \theta^d)$, con θ^i predecible para todo $i = 1, ...d\}$ es un subespacio lineal del espacio de vectores de todas las funciones reales $\mathcal{F}$-medibles en Ω.

Puesto que L no interseca con C, nosotros podemos separar L y el subconjunto de C compacto convexo $K = \{X \in C : E_p(X) = 1\}$, por un funcional lineal f en $\mathbb{R}^n$ el cual sea estrictamente positivo en K y nulo en L, utilizando el **Teorema 4.1.1** . El funcional lineal tiene una representación en la forma $f(x) = (x, q) = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i$ para un único vector $q = (q_i)$ en $\mathbb{R}^n$.Tomando los vectores $\xi_i = (0, ..., 0, \frac{1}{pi}, 0, ..., 0)$ sucesivamente, vemos que $E_P(\xi_i) = \frac{p_i}{p_i} = 1$, así que $\xi_i \in K$, y, por lo tanto, $f(\xi_i) = \frac{q_i}{p_i} > 0$ de donde se deduce que $q_i > 0$ para todo $i \leq n$.

Ahora definimos un nuevo funcional lineal $g = \frac{f}{\alpha}$, donde $\alpha = \sum_{i=1}^{n} q_i > 0$, si $p_i^* = \frac{q_i}{\alpha} > 0$, entonces nótese que $\sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1$, luego el vector p^* induce una medida de probabilidad que denotaremos por P^* en $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ a través de $P^*(\{\omega_i\}) = p_i^* > 0$, así que $P^* \sim P$.

Denotemos por E^* a la esperanza relativa a P^*, entonces como $g(x) = \frac{1}{\alpha} f(x) = 0$ para todo $x \in L$, se tiene que$E^*(\overline{G}_T(\hat{\theta})) = 0$ para cualquier vector $\hat{\theta}$ de procesos predecibles, luego en particular para una estrategia autofinanciada con $V_0(\theta) = 0$ como $\overline{V_T}(\theta) = V_0(\theta) + \overline{G}_T(\theta)$,tendremos que $E^*(\overline{V}_T(\theta)) = 0$.

Pero como ya hemos visto, se puede generar cualquier cartera θ de la forma anterior a partir de familias finitas de procesos predecibles n dimensionales, en particular de las de la forma $(0, ..., 0, \theta^i, 0, ..., 0)$,donde 0 denota el proceso nulo que es trivialmente predecible y θ^i está dada para $i \leq n$.

De todo lo anterior se tiene que

$$E^*(\sum_{t=1}^{T} \theta_t^i \Delta \overline{S}_t^i) = 0$$

para cualquier proceso predecible y acotado θ^i , $i = 1, 2, ...T$..
Por el teorema **Teorema 2.2.3** esto implica que cada S^i es una martingala respecto a P^* , por lo que P^* es la deseada medida de martingala equivalente para el proceso de precios S. □

4.3 Forma local de la condición de no arbitraje

El carácter geométrico del **Teorema 4.3.3** es claro por el uso esencial y necesario que se hace en él del **Teorema 4.1.1**.

Se puede hacer una formulación geométrica más directa de él, basada en la condición local equivalente de no arbitraje. De hecho, aunque la definición de no arbitraje implica solo los valores inicial y final de una estrategia, se puede mostrar que la condición de no arbitraje se puede expresar mediante el comportamiento de las trayectorias de los procesos de valor. En esta sección se tratarán muchas de las ideas que permiten esa formulación más geométrica del **Teorema 4.3.3**, así como se abordará la construcción paso por paso de una medida de martingala equivalente.

Nuestro tratamiento se restringirá al caso en el que $\mathcal{F}$ está finitamente generada, estas ideas tratadas en la presente sección serán clave cuando abordemos el caso general en la sección 4.5.

4.3.1 El caso de una única acción

Consideramos un modelo de mercado con un *bank account* y una única acción, es decir, d=1, y asumimos que $S^0 = 1$.
Supongamos que nosotros conocemos en el tiempo $(t-1) \in \mathbb{T}$ que el precio de la acción S^1 no va a decrecer en el intervalo [t-1,t], esto es que para un conjunto $A \in \mathcal{P}_{t-1}$ nosotros tenemos que $P(\{\Delta S_t^1 \geq 0\}|A) = 1$, entonces nosotros compraremos la acción S^1 en el periodo t-1, la venderemos en el periodo t y tendremos un beneficio de ΔS_t^1 sin riesgo. Para prevenir esta oportunidad de arbitraje nosotros necesitamos tener $P(\{\Delta S_t^1 = 0\}|A) = 1$, es decir, que S^1 y, por lo tanto, también su proceso de valor $V(\theta)$ asociado con alguna estrategia admisible θ,sean una martingala de un paso en el periodo [t-1, t].

Esta idea puede ser extendida a modelos con d acciones.

$$\Delta V_t(\theta) = \theta_t \cdot \Delta S_t = \sum_{k=1}^{d} \theta_t^k \Delta S_t^k.$$

Se puede interpretar este hecho, viendo que a lo largo de cada camino de muestreo del proceso de precios S, el soporte de la distribución condicional de la variable aleatoria vectorial ΔS_t, dado $A \in \mathcal{P}_t$ no puede estar concentrada íntegramente en "un único lado"de un hiperplano de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Proposición 4.3.1 *Si un modelo de mercado finito $S = (S^0, S^1, ..., S^d)$ es viable, entonces para todo $\theta \in \Theta$, $t > 0$,$A \in \mathcal{P}_{t-1}$ y con $V_t = V_t(\theta)$ se tiene lo siguiente.*

I. $P(\Delta V_t \geq 0|A) = 1$ implica que $P(\Delta V_t = 0|A) = 1$.

II. $P(\Delta V_t \leq 0|A) = 1$ implica que $P(\Delta V_t = 0|A) = 1$.

Es decir, esta proposición anterior puede ser utilizada para establecer la viabilidad de un modelo.

En la siguiente proposición no necesitamos que la filtración $\mathbb{F}$ esté finitamente generada, luego es válida para cualquier espacio probabilístico arbitrario.

Proposición 4.3.2 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ un modelo de mercado discreto arbitrario, donde $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio probabilístico, $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, ..., T\}$ es un conjunto de tiempo discreto, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ es una filtración completa y $S = (S^i)_{i=0,1,2,...,d}$ es un proceso de precios, los siguientes enunciados son equivalentes.*

I. *El modelo permite una oportunidad de arbitraje.*

II. *Para algún t=1,2,... T hay una función $\mathcal{F}_{t-1}$-medible $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$ de forma que $\phi \cdot \Delta S_t \geq 0$ y $P(\phi \cdot \Delta S_t > 0) > 0$.*

III. *Para algún t=1,2,... T hay una función $\mathcal{F}_{t-1}$-medible $\hat{\phi}\Omega \to \mathbb{R}^d$ de forma que $\hat{\phi} \cdot \Delta\hat{S}_t \geq 0$ y $P(\hat{\phi} \cdot \Delta\hat{S}_t > 0) > 0$.*

Este último resultado muestra que la existencia de *arbitraje global* es equivalente a la existencia de *arbitraje local* para algún $t \in \mathbb{T}$.

Para profundizar en esta visión geométrica, volvemos al caso de modelo de mercado finito.

Corolario 4.3.3 *Si un modelo de mercado finito es viable, entonces para todo $t > 0 \in \mathbb{T}$ y todo vector (no aleatorio) $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene lo siguiente*

$$x \cdot \Delta\hat{S}_t(w) \geq 0 \;\; P\,c.s. \;\; \textit{implica} \;\; x \cdot \Delta\hat{S}_t(w) = 0 \;\; P\,c.s.$$

4.3.2 Interpretación geométrica de arbitraje

Introduzcamos dos conceptos elementales y un resultado básico de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^d$[15].

I. Se define el interior relativo de un subconjunto C en $\mathbb{R}^d$ como el interior de C cuando es visto como un subconjunto del menor subespacio afín que lo contiene.

El menor subespacio afín y la envolvente conexa de C son definidos respectivamente como sigue

$$aff(C) = \{x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \ c_i \in C \, , \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\}$$

$$conv(C) = \{x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \ c_i \in C \ \ a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\}$$

Por lo tanto, el interior relativo a C es el conjunto

$$ri(C) = \{x \in \ aff(C) : \exists \epsilon > 0, \ B_\epsilon(X) \cap aff(C) \subset C\}$$

donde $B_\epsilon(X)$ es la bola euclídea centrada en x y con radio ϵ.

II. La existencia de un hiperplano que separa dos conjuntos convexos no vacíos es equivalente a que sus interiores relativos sean disjuntos.(*véase* [15])

En ausencia de arbitraje no hay hiperplano en R^d con la propiedad de que separe al origen de la envolvente conexa $C_t(A)$ del conjunto $\hat{A} = \{\Delta \hat{S}_t(w) : w \in A\}$ para algún $A \in \mathcal{P}_{t-1}, t > 0$, esto prueba la primera parte de la siguiente proposición.

Proposición 4.3.4 *En un modelo de mercado finito, la condición de no arbitraje es equivalente a que para todo $t \in \mathbb{T}$ y todo $A \in \mathcal{P}_{t-1}$, 0 debería pertenecer al interior relativo de $C_t(A)$. En otras palabras, el modelo de mercado finito no permite oportunidades de arbitraje si y solo si para cada t y $A \in \mathbb{P}_{t-1}$, el valor S_{t-1} es una combinación estrictamente convexa de valores de S_t en A.*

Demostración

Para probar la última equivalencia, supongamos que $0 \in C_t(A)$. Puesto que $A \in \mathcal{P}_{t-1}$ y que S es adaptado, $\hat{S}_{t-1}(w) = c \in \mathbb{R}^d$ es constante $\forall w \in A$. Cualquier vector en $C_t(A)$ será de la forma $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(z_i - c)$, donde $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, y cada $z_i = \hat{S}_t(w)$ para algún $w \in A$. Por lo tanto, $0 \in C_t(A)$ si y solo si $c = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i$, donde los vectores z_i son valores de $\hat{S}_t$ en A, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ y todo $\alpha_i > 0$. $\square$

4.3.3 Construcción de la medida martingala equivalente

La **Proposición 4.3.4** puede ser interpretada en términos de probabilidades condicionadas, para cada $A \in \mathcal{P}_{t-1}$ se pueden redistribuir las probabilidades condicionadas para asegurarnos que con la nueva masa de distribución, el vector de incremento de precios $\Delta\hat{S}_t$ tiene esperanza condicional nula en A. Poniendo en común todas estas probabilidades, se puede construir una medida de martingala equivalente para S.

A continuación se introduce la **Proposición 4.3.5**, que será usada en el posterior **Teorema 4.3.6**. Resaltar que en la demostración de la proposición, la cual no se muestra en este trabajo y puede consultarse en [1], se usa el lema de Farkas que trata la resolubilidad para un sistema finito de desigualdades matemáticas.

Introduzcamos, por lo tanto, la proposición mencionada anteriormente.

Proposición 4.3.5 *Para una filtración $\mathbb{F}$ finitamente generada, los siguientes resultados son equivalentes.*

I. Para todo $t > 0$ y $A \in \mathcal{P}_{t-1}$, el vector cero d-dimensional puede ser expresado como una combinación convexa estricta de vectores en el conjunto $C_t(A) = \{\Delta\hat{S}_t(w) : w \in A\}$,

II. para todo $t > 0$ en $\mathbb{T}$ y todo vector aleatorio $x \in \mathbb{R}^d \mathcal{F}_{t-1}$medible, tenemos que $x \cdot \Delta\hat{S}_t \geq 0$ $P\,c.s.$ implica que $x \cdot \Delta\hat{S}_t = 0$ $P\,c.s.$,

III. Hay una medida de probabilidad $Q_A \sim P_A$ en (A, A_A) con $E_{Q_A}(\Delta S_t \mathbf{1}_A) = 0$.

Teniendo en cuenta muchos de los resultados vistos en este capítulo, podemos recogerlos todos ellos en tres condiciones equivalentes que garanticen la viabilidad del modelo, a través de la formulación del siguiente teorema.

Teorema 4.3.6
Los siguientes enunciados son equivalentes

I. *El modelo de mercado de valores es viable,*

II. *Para todo $t > 0$ en $\mathbb{T}$ y todo vector aleatorio $x \in \mathbb{R}^d \mathcal{F}_{t-1}$medible, que $x \cdot \Delta\hat{S}_t \geq 0$ P c.s. implica que $x \cdot \Delta\hat{S}_t = 0$ P c.s.,*

III. *Existe una medida de martingala equivalente Q para S.*

Demostración

Que I implica II fue visto en el **Corolario 4.3.3**, y que III implica I fue mostrado en la **sección 3.3**.
Por lo tanto, bastaría probar que II implica III.
La familia

$$\{P_A : A \in \mathcal{P}_t, t < T\}$$

determina P, puesto que todas las σ-álgebras consideradas son finitamente generadas.
Entonces para cada $w \in \Omega$ se puede encontrar una única secuencia de conjuntos $(B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ con $B_t \in \mathcal{P}_t$ para cada $t < T$, de forma que

$$\Omega = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset ... \supset B_{T-1} \supset B_T = \{\omega\}.$$

Por la ley de la probabilidad total, se puede escribir

$$P(\{\omega\}) = P_{B_0}(B_1)P_{B_1}(B_2)...P_{BT-1}(\{\omega\})$$

Por lo tanto, si suponemos II, podemos utilizar la **Proposición 4.3.5** continuamente; con $t = 1$ *y* $A \in P_0$ para construir una medida de probabilidad Q_A, luego repetimos para $t = 2$ y conjuntos en $\mathcal{P}_t$, y así sucesivamente. En particular, esto produce medidas de probabilidad Q_{B_t} para cada $t < T$, y estableciendo

$$Q(\{\omega\}) = Q_{B_0}(B_1)Q_{B_1}(B_2)...Q_{BT-1}(\{\omega\})$$

obtenemos una medida de probabilidad $Q \sim P$ en todo $(\Omega, \mathcal{F})$. Para cada $t > 0$ y $A \in \mathcal{P}_{t-1}$ la probabilidad condicionada es

$$Q(\{\omega\}|A) = \mathbf{1}_A(\{\omega\})Q_A(B_t)Q_{B_t}(B_{t+1})...Q_{B_{T-1}}(\{\omega\}).$$

Entoces para $\omega \in A$, $E_Q(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1})(\omega) = 0$, y por lo tanto Q es una medida martingala equivalente para S. $\square$

4.3.4 Medidas martingala equivalentes para modelos de mercado discreto

La construcción detallada de la medida martingala equivalente Q para el proceso de precios S que se vio en la sección anterior, depende con fuerza de la suposición de que la filtración $\mathbb{F}$ está finitamente generada. En los últimos años varios autores han producido variantes para contextos más generales del **Teorema 4.2.3**. La equivalencia entre las condiciones de tipos de no arbitraje y la existencia de una medida martingala equivalente se ha denominado el **Teorema fundamental de valoración de activos**. Este teorema sirve como nexo o conexión, entre el significado económico de la condición de no arbitraje y la razón matemática por la que equiparar los procesos de valor con la clase de P-semimartingalas, permitiendo así el máximo aprovechamiento de la teoría de semimartingalas y cálculo estocástico general.

Para un modelo de mercado discreto, sobre un espacio probabilístico general $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y un conjunto de tiempo discreto finito $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, ..., T\}$, el **Teorema 4.2.3** ha sido probado, sin asumir que la filtración en cuestión es finitamente generada. Precisando lo anterior, se enuncia el siguiente teorema, que es el objetivo buscado de este trabajo:

Teorema 4.3.7 (Teorema fundamental de valoración de activos)

Si se cumple I o II, entonces Q puede ser encontrada con derivada $\frac{dQ}{dP}$ *de Radon-Nikodym acotada (ver apéndice).Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio probabilístico, sea* $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, ..., T\}$. *Se asume dada una filtración* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_{t\in\mathbb{T}})$ *y un proceso* $S = (S_t)_{t\in\mathbb{T}})$ *con valores en R, de dimensión d+1 y adaptado a* $\mathbb{F}$. *Asumimos, como hasta ahora que la primera componente* $S^0 \equiv 1$ *y que para* $i \leq d$ *y* $t \in \mathbb{T}$ *tenemos que* $S_t^i > 0\, P$ *c.s. Entonces, se tiene que los siguientes enunciados son equivalentes:*

I. *Hay una probabilidad* $Q \sim P$ *tal que* $(S_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *es una Q-martingala.*

II. *No hay oportunidades de arbitraje, es decir para cada estrategia de inversión autofinanciada* $\theta = (\theta_t^0, \theta_t^1, ..., \theta_t^d)_{t\in\mathbb{T}}$ *con procesos de* *ganancia* $G_t(\theta)$ *definidos por* $G_t(\theta) = \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta S_u$, *si tenemos que* $G_T(\theta) \geq 0\, P\, c.s.$, *entonces implica que* $G_T(\theta) = 0\, P\, c.s.$.

Si se cumple I o II, entonces Q puede ser encontrada con derivada $\frac{dQ}{dP}$ *de Radon-Nikodym acotada (ver apéndice).*

La demostración de este teorema viene detallada en [16], dónde fue probado por primera vez, sin embargo, nosotros acudiremos como principal referencia a [17], ya que demuestra el teorema de forma más elemental sin acudir a resultados de análisis funcional profundos, pues se basa en un argumento de maximización de utilidad.

Para la demostración del mismo, y siguiendo [17], se recurrirá a diferentes proposiciones, necesarias para contrastar diversas hipótesis de diferente índole, como puede ser la medibilidad correspondiente, las cuales serán introducidas durante el transcurso del argumento de la propia demostración.

Demostración

Proposición 4.3.8

Supongamos que $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ *tiene las siguientes propiedades*

- $\varphi(w, \cdot)$ *es estrictamente convexa para cada W.*
- $\varphi(\cdot, a)$ *es G-medible, para cada a, dónde G es una sub-*σ *álgebra de F.*

Entonces los eventos

$$A_0 \equiv \{w :\, donde\, existe\, a^*\, tal\, que\, \varphi(\omega, a^*) \leq \varphi(\omega, a)\, para\, todo\, a\}$$

$$A_1 \equiv \{\omega : Para\, cada\, a \in \mathbb{R}^d - \{0\}, \lim_{t \to \infty} \varphi(w, ta) = \infty\}$$

Son los mismos, y son G-medibles, además $a^* = a^*(\omega)$ *es G-medible.*

Si nosotros asumimos además que

$$F(\omega) = \{a \in S^{d-1} : \lim \varphi(w, ta) < \infty)\}$$

es cerrado para todo ω, *entonces es posible elaborar una elección G-medible* $\alpha(\omega) \in F(w)$ *siempre que sea* $F(\omega) \neq \emptyset$.

*Pasemos a demostrar el **Teorema 4.3.7**.*

I→ II

*Si existe una medida martingala equivalente Q y una oportunidad de arbitraje, entonces por la **proposición 4.3.2** tendríamos que hay alguna estrategia* θ_t , $\mathcal{F}_{t-1}$ *medible, tal que* $\theta_t \cdot \Delta S_t \geq 0$ *c.s y* $P(\theta_t \cdot \Delta S_t > 0) > 0$. *Reemplazando ahora* θ_t *por* $\theta_t |\theta_t|^{-1} I_{\{|\theta_t>0\}}$, *asumiendo que* θ_t *es acotado y que* $\theta_t \cdot \Delta S_t \in L^1(Q)$, *tenemos que* θ_t *tiene media 0 con la probabilidad Q, puesto que S es una Q-martingala, luego se llega a una contradicción.*

II→ I

Supongamos ahora que no hay arbitraje, debemos construir una medida martingala equivalente Q.

Primero, vamos a fijar nuestra función estrictamente creciente y cóncava $U : \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$. *Notemos que U satisface la condición de que dado* $\gamma > 0$, *se tiene que para todo* $x \in \mathbb{R}$

$$U'(X) \leq \gamma(1 + |U(x)|).$$

Nuestro objetivo es maximizar la utilidad esperada ,es decir, maximizar

$$E \prod_{t=1}^{T} U(\theta_t \cdot \Delta S_t)$$

donde $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$.

Sin embargo, el primer problema que puede aparecer es que la esperanza no sea finita, veamos que este obstáculo se puede superar con facilidad.

Proposición 4.3.9 *Existe una función estrictamente positiva decreciente y acotada* $g : \mathbb{R}^+ \to (0, \infty)$ *tal que para todo* $a \in \mathbb{R}^d$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |U(a \cdot x)| g(|x|) < \infty$$

Se obtiene inmediatamente reemplazando P por P', donde $dP' \propto \prod_{t=1}^{T} g(|\Delta S_j|) dP$, *que la integrabilidad de* $\prod_{t=1}^{T} U(\theta_t \cdot \Delta S_t)$ *es asegurada*

para todo $\theta_t \in \mathbb{R}^d$.
Nosotros debemos construir medidas inductivamente

$$P_T = P', P_{T-1}, ..., P_0 \equiv Q$$

equivalentes a P *de la forma*

$$dP_t = c_n \prod_{k=t+1}^{T} U'(\xi_k \cdot \Delta S_k) dP',$$

donde ξ_k *será* $\mathcal{F}_{k-1}$*-medible y* c_n *será la constante apropiada de normalización.*
Las medidas P_t *satisfarán las siguientes hipótesis de inducción:*

- *para todo* $k \leq n$ *y para todo* $a \in \mathbb{R}^d$, $U(a \cdot \Delta S_k) \in L^1(P_t)$;
- $(S_k)_{k=t}^T$ *es una* $((\mathcal{F}_k)_{k=t}^T, P_t)$*-martingala.*

Consecuentemente, una vez que se complete el proceso inductivo, P_0 *es nuestra medida de martingala equivalente y la densidad será acotada si hemos escogido a* U *con inversa acotada.*

Verificar las hipótesis de inducción para $t = T$ *es inmediato, pues la primera hipótesis es asegurada por la forma de construir* P' *y la segunda es trivial.*
Supongamos entonces, que hemos construido $P_T, ...P_t$ *y que ahora queremos construir* P_{t-1}*, denotamos por* $k(\cdot,\cdot)$ *la* P_t *distribución condicional regular para* ΔS_t *dada* $\mathcal{F}_{t-1}$.

Proposición 4.3.10 *Sea* Π *el espacio métrico compacto de todas las* $d \times d$ *matrices de proyección ortogonales, entonces existe una función* $\mathcal{F}_{t-1}$*-medible* $R : \Omega \to \Pi$ *tal que para casi todo* ω

$$ker R(\omega) = lin(supp(k(w, \cdot)))$$

Donde supp, denota el soporte de la distribución k *y* $lin(supp(k(w,\cdot)))$ *denota el subespacio vectorial generado por* $supp(k(w,\cdot))$*, esto es, el menor subespacio vectorial que contiene a* $supp(k(w,\cdot))$*. La demostración puede encontrarse en el apéndice de [17].*

*Entonces podemos aplicar la **Proposición 4.3.8** a la siguiente función convexa aleatoria* $\mathcal{F}_{t-1}$*-medible*

$$\varphi(w,a) \equiv \int -U(a \cdot x)k(w,dx) + |R(\omega)a|^2 = -E_t(U(a \cdot x)|F_{t-1}) + |R(\omega)a|^2$$

la cual verifica las hipótesis de la ***Proposición 4.3.8****. Para cada racional a,* $\varphi(w, a) < \infty$ *c.s., ya que* $U(a \cdot \Delta S_t)$ *está en* $L^1(P_t)$*. Por eso, exceptuando en un conjunto nulo de* ω*,* φ *está finitamente evaluada para cada racional, y por lo tanto, de acuerdo a la densidad de* $\mathbb{Q}$ *en* $\mathbb{R}$*, finitamente evaluada de forma general.*

Por otro lado, considerando lo que ocurre para $a \in F(\omega)$ *tenemos que*

$$\text{lím}\, \varphi(\omega, ta) < \infty.$$

Esto nos permite concluir que $R(\omega)a = 0$*, por lo que* $a \in lin(supp(k(w, \cdot)))$ *y tenemos que*

$$k(\omega, \{x : a \cdot x < 0\}) = 0,$$

de lo contrario $\int -U(a \cdot x)k(w, dx)$ *podría diverger cuando* $t \to \infty$*. Para un* ω *fijo, el conjunto de los* $a \in S^{d-1}$ *para los cuales* $k(\omega, \{x : a \cdot x < 0\}) = 0$*, es claramente cerrado, de este modo podemos usar* ***Proposición 4.3.8*** *para dar una elección* F_{t-1}*-medible* $\alpha(\omega)$ *siempre que* $F(\omega) \neq \emptyset$*, pero entonces tendríamos que*

$$k(\omega, \{x : \alpha(\omega) \cdot x > 0\}) > 0,$$

ya que de otro modo

$$k(\omega, \{x : \alpha(\omega) \cdot x = 0\}) = 1$$

contradiciendo la definición de R.

Esta $\mathcal{F}_{t-1}$*-medible elección de* $\alpha(\omega)$ *sería, por lo tanto, una oportunidad de arbitraje; la única conclusión es que el conjunto* $F(\omega)$ *debe de ser vacio casi seguro y exite una elección* $a^*(\omega)\, F_{t-1}$*-medible la cual minimiza* $\varphi(w, \cdot)$*. Evidentemente,* $R(\omega)a^*(\omega) = 0$ *para esta elección minimizadora.*

Solo nos queda realizar el análisis de primer orden, tenemos que para cualquier $v \in \mathbb{R}^d$ *y* $h > 0$

$$0 \leq \frac{1}{h} \int \left[U(a^*(\omega) \cdot x) - U(a^*(\omega) \cdot x + hv \cdot x)\right] k(\omega, dx)$$

$$= \frac{1}{h} \int_{v \cdot x < 0} \left[U(a^*(\omega) \cdot x) - U(a^*(\omega) \cdot x + hv \cdot x)\right] k(\omega, dx)$$

$$+\frac{1}{h}\int_{v\cdot x>0}\left[U(a^*(\omega)\cdot x)-U(a^*(\omega)\cdot x+hv\cdot x)\right]k(\omega,dx)$$

y haciendo tender $h\downarrow 0$, usamos convergencia monótona en cada integral, recordando que la finitud del primer término viene dada por las hipótesis de P_t mencionadas anteriormente.

La conclusión es que

$$0\leq\int v\cdot x\,U'(a^*(w)\cdot x)k(w,dx)$$

y como v es arbitrario, tenemos que

$$0=\int x\,U'(a^*(w)\cdot x)k(w,dx)$$

y por supuesto $x\,U'(a^*(\omega)\in L^1(k(\omega,\cdot))$.

Antes, nos permitimos definir P_{t-1} de la manera indicada, ahora debemos comprobar que(escribiendo ξ_t para a^* y ΔS_t para X) $U'(\xi_t\cdot\Delta S_t)\in L^1(P_t)$.

Teniendo en cuenta que

$$U'(X)\leq\gamma(1+|U(x)|).$$

, tenemos que

$$\int U'(\xi_t\cdot\Delta S_t)dP_t\leq\gamma+\gamma\int -U(\xi_t\cdot\Delta S_t)dP_t$$

$$=\gamma+\gamma\int E_t\left[-U(\xi_t\cdot\Delta S_t)|\mathcal{F}_{t-1}\right]dP_t\leq\gamma-\gamma U(0)$$

ya que $\xi_t(\Omega)$ es la elección de portfolio la cual maximiza $E_t(U(\xi\cdot\Delta S_t)|\mathcal{F}_{t-1})$ y por lo tanto al menos debe de ser mejor que usar 0.

Por consiguiente, podemos definir P_{t-1} de la forma

$$dP_{t-1}=c_n\prod_{k=t}^{T}U'(\xi_k\cdot\Delta S_k)dP'$$

y solo tendremos que comprobar que P_{t-1} satisface las hipótesis de inducción

- *para todo $k\leq n$ y para todo $a\in$,$U(a\cdot\Delta S_k)\in L^1(P_t)$;*

- $(S_k)_{k=t}^T$ *es una* $((\mathcal{F}_k)_{k=t}^T, P_t)$*-martingala.*

Entonces para $k \leq n-1, a \in \mathbb{R}^d$

$$\int |U(a \cdot \Delta S_k)| dP_{t-1} \propto \int |U(a \cdot \Delta S_k)| U'(\xi_t \cdot \Delta S_t) dP_t$$

$$\leq \gamma \int |U(a \cdot \Delta S_k| \{1 - U(\xi_t \cdot \Delta S_t)\} dP_t \leq \gamma(1 - U(0)) \int |U(a \cdot \Delta S_k| dP_t$$

Por lo tanto, la primera condición de hipótesis se mantiene y para la segunda es claro que cambiando P_t *por* P_{t-1} *no afectará a la propiedad de martingala de* $(S_t)_{k=n}^N$*. Por lo que concluimos la demostración.* $\square$

Apéndice

A. Conceptos básicos teoría de la probabilidad

Definición A.1 (Espacio muestral) *Conceptualmente el espacio muestral asociado a un experimento no es más que el conjunto formado por los posibles resultados de ese experimento. Cuando el espacio muestral es de tipo finito o numerable, lo representaremos por la notación* $\Omega = \{w_1, w_2, ...w_n, ...\}$ *y lo denominaremos discreto.*

Definición A.2 (σ-álgebra) *Una σ-algebra de sucesos de Ω es una clase $\sigma \subset P(\Omega)$ con las siguientes propiedades:*

- *$\Omega \in \sigma$ (contiene al suceso seguro).*
- *$A \in \sigma \to A^c \in \sigma$ (es cerrada para complementarios).*
- *$A_n \in \sigma, n \in N \to \cap_{n \in N} A_n \in \sigma$ (es cerrada para intersecciones numerables).*

Definición A.3 (Probabilidad) *Una probabilidad sobre el espacio* $\Omega = \{w_1, w_2, ...w_n, ...\}$ *es una función $P : P(\Omega) \to R$ con las propiedades:*

- *$P(A) \geq 0$, para todo $A \in P(\Omega)$.*
- *$P(\Omega) = 1$.*
- *σ-aditividad de la probabilidad: $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, cuando $\{A_i , i \in I\}$ es cualquier familia numerable de subconjuntos de Ω disjuntos dos a dos.*

Definición A.4 (Espacio probabilístico y medible) *Un* ***espacio probabilístico*** *es una terna (Ω, σ, P) formada por un espacio muestral Ω, una σ-álgebra de sucesos de Ω, y una probabilidad P sobre σ. A la pareja (Ω, σ) se le denomina* ***espacio medible*** *. Los conjuntos de σ se denominan sucesos o conjuntos medibles.*

Definición A.5 (Aplicación medible) *Una aplicación f:* $\Omega \to \Omega'$ *es* $\sigma|\sigma'$*-medible si la contraimagen por f de cada conjunto de* σ' *es un conjunto de* σ*:*

$$f^{-1}(A') \in \sigma \text{ para cada } A' \in \sigma'$$

Si el espacio (Ω',σ') *es* (R,β)*, las aplicaciones medibles se denominan* ***variables aleatorias reales .***
Las funciones medibles entre espacios Euclídeos (f:$R^m \to R^n$*) se denominan* ***funciones de Borel.***

B. Teorema de Radon-Nikodym

Se introduce este teorema, ya que es parte del ***teorema 4.3.7****,resultado objetivo de este trabajo.Se utiliza como fuente bibliográfica principal [18].*

Si ν *es una medida en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *y* μ *es una medida positiva* σ*-finita en* $(\Omega, \mathcal{F})$*, tales que* $\mu(A) = 0 \to \nu(A) = 0 \ \ \forall A \in \mathcal{F}$ *entonces* $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$*,* $\mathcal{F}$*-medible tal que* $\nu(A) = \int_A f(x) d\nu(x)$*.*
A tal función f se le llama derivada de R-N de ν *respecto de* μ *y se nenota* $\frac{d\nu}{d\mu}$*.*

C. Esperanza condicionada

Sean Y, Y_1, Y_2 *variables aleatorias, vectores aleatorios o procesos estocásticos en* Ω *y sea* $\mathcal{F}$ *un* σ*-álgebra de* Ω*.*
Se dice que:

- *La información de Y está contenida en* $\mathcal{F}$ *o que Y no contiene más información que la contenida en* $\mathcal{F}$ *si* $\sigma(Y) \subset \mathcal{F}$*.*
- Y_2 *contiene más información que* Y_1 *si* $\sigma(Y_1) \subset \sigma(Y_2)$*.*

De acuerdo a estas ideas, se dice que una variable aleatoria Z es la ***esperanza condicional de X***$(\ Z = E(X|\mathcal{F}))$ *dada la σ-álgebra $\mathcal{F}$ si:*

- $\sigma(Z) \subset \mathcal{F}$.
- *Z satisface la relación $E(XI_A) = E(ZI_A)\ \forall A \in \mathcal{F}$.*

La esperanza condicionada de X, es decir $E(X|\mathcal{F})$ es la versión más gruesa de la variable aleatoria original X.

Sean Y una variable aleatoria, vector aleatorio o proceso estocástico en Ω y sea $\sigma(Y)$ la σ-álgebra generada por Y.
La esperanza condicionada de una variable aleatoria X dada Y se define por

$$E(X|Y) = E(X|\sigma(Y))$$

Reglas para el cálculo de la esperanza condicional

Primero hay que mencionar un resultado de existencia y unicidad, si $E|X| < \infty$, la esperanza condicional $E(X|\mathcal{F})$ existe y es única.

Enunciemos las diversas reglas de cálculo:

I. *La esperanza condicional es lineal, es decir sean X_1, X_2 variables aleatorias y c_1, c_2 constantes.*

$$E([c_1X_1 + c_2X_2]\,|\mathcal{F}) = c_1E(X_1|\mathcal{F}) + c_2E(X_2|\mathcal{F}).$$

II. $EX = E\left[E(X|\mathcal{F})\right].$

III. *Si X y la σ-álgebra $\mathcal{F}$ son independientes, entonces $E(X|\mathcal{F}) = EX$, en particular si X e Y son independientes, entonces $E(X|Y) = EX$.*

IV. *Si $\sigma(X) \subset \mathcal{F} \to E(X|\mathcal{F}) = X$.*
En particular, si $\sigma(X) \subset \sigma(Y) \to E(X|Y) = X$.

V. *Si $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$, entonces para cualquier variable aleatoria G*

$$E(XG|\mathcal{F}) = XE(G|\mathcal{F}).$$

En particular,si X es una función de Y $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$,entonces

$$E(XG|Y) = XE(G|Y).$$

VI. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son dos σ-álgebras con $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ entonces:*

$$E(X|\mathcal{F}) = E(E(X|\mathcal{F}')|\mathcal{F}).$$

,

$$E(X|\mathcal{F}) = E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{F}').$$

VII. *Si X es independiente de $\mathcal{F}$ y $\sigma(G) \subset \mathcal{F}$, con G variable aleatoria, vector aleatorio o proceso estocástico, entonces para cualquier función $h(x, y)$:*

$$E(h(X, G)|\mathcal{F}) = E(E_x [h(X, G)] |\mathcal{F}).$$

donde $E_x [h(X, G)]$ denota que fijamos G y tomamos la esperanza respecto de X.

Propiedad de proyección

Sea X una variable aleatoria tal que $EX^2 < \infty$. La esperanza condicionada $E(X|\mathcal{F})$ es una variable aleatoria en $L^2(\mathcal{F})$ la cuál es la más cercana a X en el sentido de media cuadrática, es decir:

$$E [X - E(X|\mathcal{F})]^2 = \min_{z \in L^2(\mathcal{F})} E(X - Z)^2$$

En este sentido, $E(X|\mathcal{F})$ es la proyección de la variable X en el espacio $L^2(\mathcal{F})$ de las variables aleatorias Z que contienen información $\mathcal{F}$, es decir, $E(X|\mathcal{F})$ es la mejor predicción de X dada $\mathcal{F}$.

Por otro lado, si $\mathcal{F} = \sigma(Y), E(X|Y)$ es la función de Y con momento de ordendo finito que más cerca está de X en el sentido de media cuadrática.

Referencias

[1] ELLIOT, ROBERT J *y* EKKEHARD KOPP.P*, Mathematics of Financial Markets, primera edición, New York, USA, Springer, 1999.*

[2] BILLINGSLEY, PATRICK*, Probability and Measure, Anniversary ed. Wiley, 2012.*

[3] MIKOSCH, THOMAS *Elementary Stochastic Calculus: with Finance in View, World Scientfic, 2000.*

[4] AVELLANEDA, MARCO *y* LAURENCE, PETER*, Quantitative Modeling of Derivative Securities from Theory to Practice, Florida, Chapman-Hall, 1999.*

[5] ARGUEDAS SANZ, RAQUEL *y* GONZÁLEZ ARIAS, JULIO*, Finanzas empresariales, Madrid,Editorial Universitaria Ramón Areces, 2016.*

[6] KARATZAS I. *y* SHREVE,S.E.*, Brownian motion and Stochastic Calculus, Second Ed,Springer, 1991.*

[7] FREEDMAN D. *Brownian Motion and diffusion, Springer, 1983.*

[8] EMBRECHTS, PAUL *y* MAEJIMA, MAKOTO, *An introduction to the theory of selfsimilarstochastic processes, International Journal of Modern Physics, 2000.*

[9] BRADY, STEPHEN *Construction and properties of Brownian Motion, Springer, 2006.*

[10] MOTERS P. *y* PERES I. *Brownian motion, Cambridge University Press, USA, 2001.*

[11] PLISKA STANLEY R. *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models, Blackwell Publishers, 1997.*

[12] LAMBERTON D. *y* LAPEYRE B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman Hall, Londres, 1995.*

[13] WILLIAMS D. *Probability with Martingales, Cambridge University Press,Cambridge 1991.*

[14] Neveu J. *Discrete-Parameter Martingales, North-Holland, Amsterdam,1975.*

[15] Rockfellar R.T. *Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton,N.J., 1970.*

[16] Dalang R.C.,Morton A.,Willinger W. *Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market model, Stochastics and Stochastics Report, 1990.*

[17] Rogers L.C.G. *Equivalent martingale measures and no-arbitrage, Stochastics and Stochastics Report University of London, 1994.*

[18] Shilov G.E. *y* Gurevich B.L. *Integral,measure and derivative. A unified approach,Dover Publications Inc., United States, 2012*

[19] Van der Vaart, A.W. *y* Wellner, J. *Weak Convergence and Empirical Processes,Dover Springer, 1996.*

Índice alfabético