



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID  
FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO FIN DE GRADO  
GRADO EN MATEMÁTICAS

---

# El Teorema de Interpolación de Carleson

---

*Autor: Carlos Saravia de Coca*

*Tutores:*

*Javier Sanz Gil*

*Jesús Javier Jiménez Garrido*

*Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología*



# Agradecimientos

En estas líneas me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento a toda las personas con las que he compartido todos estos años y que me han ayudado a llegar hasta aquí, a seguir cada vez que tropiezo y a celebrar cada vez que algo sale bien. Para evitar el agravio de quienes no son nombrados o de quienes siéndolo discrepan en los términos en que se hace, las normas no escritas marcan tres pautas: brevedad, ambigüedad y corrección política. Sin intención alguna de menoscabar la solemmnidad del texto que se presenta, permítanme aprovechar la libertad, fuera del rigor matemático que me brinda este espacio, excediendo lo protocolario en longitud, concreción y franqueza.

- La realización de este TFG no podría haber sido posible sin la intachable dirección de **Javi Sanz y Javi Jiménez (los Javis)**, este trabajo no hubiera salido adelante sin todo vuestro trabajo. Agradezco vuestra enorme paciencia. Sois los mejores tutores que uno podría escoger ya que me habéis apoyado y comprendido en todo. Espero que esto sea el principio de todo lo que queda por venir. Sois las personas más brillantes y buenas que conozco.
- A mi familia por haber sido siempre el apoyo más incondicional que se puede tener. Me habéis visto y ayudado a crecer. A **Papá y Mamá** gracias por haberme entendido siempre y haberme hecho como soy. A mi **hermana** por aguantarme, apoyarme tanto y hacerme pasar tantos buenos momentos. A mis primos **Marina, Rodrigo y Luis** hemos compartido tantos momentos que a igual que con mi hermana sé que vais a ser uno de mis mayores apoyos. A mis **Abuelos** no hay nada que agradezca más que teneros a vosotros. Finalmente mis **tíos: Gema, César, Jose Luis, Valentina y María Jesús** siempre habéis sido mis segundos padres, haciéndome crecer hasta lo más alto. Aunque tenga vértigo del futuro, estoy tranquilo porque os tengo a vosotros.
- A mis amigos de la Universidad de Valladolid, **Alvarito** no solo eres sin duda uno de mis mejores amigos, eres mi hermano. Eres la persona más buena y leal que conozco, espero que ambos lleguemos lejos y estemos juntos para celebrarlo. **Jesús y Álvaro** sois grandísimos amigos, gracias por apoyarme y darme un rumbo cuando me siento perdido, y por darme tantos buenos momentos, vuestra bondad supera cualquier límite. **Inés**, gracias por apoyarme y comprenderme tanto, siempre has conseguido mantenerme en el Camino (tiene mucho mérito), eres una grandísima amiga. **Edu** gracias por preocuparte tanto de mí, siempre estas ahí. A **Roberto**, gracias por haberme ayudado y apoyado tanto todos estos años, la palabra que mejor que te define es noble. Finalmente, a **Manolo**, eres otro hermano que me llevo de esta carrera, hemos recorrido este duro camino juntos y al final lo hemos conseguido, mi aprecio hacia ti es infinito, creo que es imposible ser mejor persona.

- A mis profesores **Ana, Philippe, Antonio, Jose Enrique, Miguel Ángel, Ujué, Nuria, Paco** . . . , vosotros sois mi mayor escudo, no sé la de horas que habré pasado con cada uno de vosotros hablando, reflexionando y celebrando... No me cabe ninguna duda que tenéis mucho que ver en que yo haya conseguido llegar hasta aquí, gracias por apoyarme en duros momentos y haberme dado unos consejos que sin duda me han llevado a buen puerto. No existen palabras para agradecer todo lo que habéis hecho por mí.
- A mis profesores del colegio San Juan Bautista de la Salle, **Carlos** gracias por transmitirme tu pasión, sin duda si he llegado aquí es en parte gracias a ti, aún sigo leyendo todas las revistas y libros científicos que hemos compartido. A **Isabel** gracias por transmitir siempre tu alegría, haces del colegio (y del Mundo) un lugar mejor. A **María Luisa** eres de esas profesoras que ha influido mucho en mí, gracias por cuidarme, espero que la redacción de este trabajo esté a la altura de lo que me has enseñado. A **Álvaro**, gracias por las numerosas conversaciones profundas y divertidas que hemos tenido y gracias por descubrirme tantos puntos de vista y sobretodo descubrirme la Fe. A **Berta**, gracias por cuidarme tanto, sigo manteniendo lo que te dije en su día, serás muy buena madre de tus hijos. A **Tesifonte**, conseguiste que me diera cuenta de que las Matemáticas con lo mío, eres de los profesores más grandes que he tenido, gracias por descubrirme mi vocación. En general, gracias a toda la familia que es este gran colegio, siempre os llevo en mi corazón, Indivisa Manent.
- A mi grupo de amigos del colegio **Gadea, Cristina, Lucía, Helen, Esther, Alejandro, Ricardo, Raúl** . . . sois de lo mejor que tengo, sois familia, equipo y escudo. Gracias por haberme sacado una sonrisa en mis momento duros y por haberme acompañado en los momentos más felices que gracias a vosotros han sido los más numerosos.
- Este último (y no por ello menos importante) párrafo va dedicado a las personas con las que he compartido este año en Santander. A **Fernando**, me pareces una persona increíble, gracias por verme con tan buenos ojos. Eres de esos buenísimos amigos con los que se tiene una conexión única, somos tal para cual. No me cabe ninguna duda de que esta amistad es para toda la vida. A **Gorka**, eres de esas personas que muy rara vez uno encuentra en la vida, una persona con la que conectas y tienes absoluta complicidad y confianza. Eres muy especial para mí. Espero que esto sea el principio de una eterna relación. Lo mismo digo de **Iker**, se nota que eres una persona noble con todo lo que eso implica.

Para terminar, gracias a todos los que sois parte de mi vida, me hacéis muy feliz. Espero haberos transmitido con estas palabras mmi gratitud y afecto.

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introducción</b>  | <b>7</b>  |
| <b>1. Resultados preliminares</b>  | <b>9</b>  |
| 1.1. Lema de Schwarz . . . . .   | 9         |
| 1.1.1. Homografías en el disco . . . . .                                     | 10        |
| 1.1.2. Métrica pseudohiperbólica . . . . .                                   | 12        |
| 1.2. Teorema de Pick . . . . .   | 14        |
| <b>2. Funciones armónicas. El Teorema maximal de Hardy-Littlewood</b>        | <b>21</b> |
| 2.1. Integral de Poisson. El problema Dirichlet . . . . .                    | 21        |
| 2.2. Función maximal de Hardy-Littlewood . . . . .                           | 33        |
| 2.3. Función maximal no tangencial y el teorema de Fatou . . . . .           | 40        |
| 2.4. Funciones subarmónicas . . . . .  | 46        |
| <b>3. Espacios de Hardy <math>H^p</math></b>                                 | <b>53</b> |
| 3.1. Definiciones y resultados fundamentales de los espacios $H^p$ . . . . . | 53        |
| 3.2. Ceros de funciones holomorfas y Productos de Blaschke . . . . .         | 58        |
| 3.2.1. Productos infinitos . . . . .   | 58        |
| 3.2.2. Productos de Blaschke . . . . .                                       | 61        |
| 3.3. Funciones maximales y valores en la frontera . . . . .                  | 64        |
| 3.4. Dualidad de los Espacios de Hardy . . . . .                             | 69        |
| 3.5. Invarianza conforme de las medidas de Carleson . . . . .                | 70        |
| <b>4. Sucesiones interpolantes. El Teorema de interpolación de Carleson</b>  | <b>75</b> |
| <b>A. Miscelánea de resultados del Análisis Matemático</b>                   | <b>87</b> |



# Introducción

The Carleson's interpolation theorem is now understood to be one of the pillars of function theory, and it shows up in areas ranging from the corona problem to operator theory (and many places between).

---

*Peter Jones en el homenaje a Lennart Carleson e Yngve Domar; Suecia, 1993*

Los problemas de interpolación llevan siendo objeto de estudio desde tiempos pretéritos. Partiendo del problema de interpolación finito, el problema de Pick o también llamado el problema de Nevanlinna-Pick fue estudiado por Pick en [29] y por Nevanlinna en [25], donde dados  $z_1, \dots, z_n, a_1, \dots, a_n \in D$ , se preguntaron bajo qué condiciones el problema de interpolación  $f(z_j) = a_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , tiene una solución  $f$ , holomorfa en  $D$  y  $|f(z)| \leq 1$ ,  $z \in D$ . La respuesta fue que la función  $f$  siempre puede ser tomada como un producto de Blaschke de grado a lo sumo  $n$ ; Nevanlinna más tarde en [26] dio una parametrización de todas las soluciones. La interpolación de Nevanlinna-Pick ha sido un tema de estudio frecuente y su crecimiento en estas últimas décadas ha sido ocasionado por su conexión con la teoría de operadores y la teoría de sistemas lineales. Las generalizaciones juegan un papel importante en el estudio del espacio  $H^\infty$ .

El principal objetivo de esta memoria es exponer el Teorema de interpolación de Carleson. Dada una función compleja  $f$  holomorfa y acotada en el semiplano superior del plano complejo, y fijada una sucesión de puntos  $\{z_j\}_{j=1}^\infty$  de dicho semiplano, es claro que la sucesión de imágenes  $\{f(z_j)\}_{j=1}^\infty$  es acotada. El problema de interpolación de Carleson consiste en determinar las sucesiones  $\{z_j\}_{j=1}^\infty$  como la anterior, tales que dada una sucesión acotada arbitraria  $\{b_j\}_{j=1}^\infty$  de valores complejos, es posible encontrar una función  $f$  en las condiciones indicadas de modo que  $f(z_j) = b_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Dichas sucesiones  $\{z_j\}_{j=1}^\infty$  reciben el nombre de sucesiones interpolantes, y su caracterización es conocida como el teorema de interpolación de Carleson. La presentación de este resultado requiere el desarrollo de una serie de herramientas y técnicas avanzadas de Variable Compleja, entre las que se encuentran el estudio de productos de Blaschke, las medidas de Carleson, o los espacios  $H^p$  en el disco o en el semiplano.

Históricamente el Teorema de interpolación de Carleson ha desempeñado un rol crucial en el estudio de los espacios de Hardy durante más de cuarenta años. La primera aparición de este resultado surge fruto del esfuerzo por entender  $H^\infty$  como un álgebra de Banach. Esto último, está íntimamente ligado a la solución de Carleson al corona problema el cual no se estudiará en esta memoria pero puede ser consultado en [16], esto lleva de manera natural a la noción de medida de Carleson que será de frecuente aparición en este trabajo, además dichas medidas aunque no se vaya a explicar en este escrito, juegan un papel fundamental en la construcción de los espacios BMO. Las sucesiones caracterizadas por el teorema de interpolación de Carleson reciben el nombre de sucesiones interpolantes. En palabras de los matemáticos H. S. Shapiro y A. L. Shields, la noción de sucesión interpolante tiene sentido para cualquier espacio de

funciones analíticas. Si bien en este trabajo los espacios que tendrán más presencia serán los espacios de Hardy, en estas últimas décadas han sido numerosos los paralelismos del teorema de interpolación de Carleson para espacios de Bergman y espacios de Dirichlet.

La pretensión de esta memoria no es otra que la de presentar de la manera más detallada posible el teorema de interpolación de Carleson así como todos los resultados y propiedades relativos a su demostración. Se ha realizado un análisis detallado de los resultados estudiados y se han aportado las demostraciones correspondientes. Con esto en mente, la estructura es sencilla: en cada uno de los capítulos en los que se divide la materia se relatan los conceptos, propiedades y teoremas correspondientes se añaden incluso algunos ejemplos y observaciones aclaratorias.

- El Capítulo 1 está dedicado por un lado a recoger algunos resultados y conceptos elementales de Variable Compleja, algunos de ellos ya estudiados en el Grado en Matemáticas, como pueden ser: el lema de Schwarz o las homografías. También se introducirá de manera sucinta la métrica pseudohiperbólica. El capítulo termina con la presentación del teorema de Pick ya mencionado previamente y que tendrá un papel crucial para el objetivo del trabajo.
- En el Capítulo 2 se estudian diversos temas del Análisis Complejo y del Análisis Armónico como son la integral de Poisson en el caso del Análisis Complejo y respecto al Análisis Armónico el concepto más relevante es la función maximal de Hardy-Littlewood y el Teorema maximal de Hardy-Littlewood. Además se estudiarán la función maximal no tangencial y por último las funciones subarmónicas siendo estas últimas muy importantes para el siguiente capítulo.
- El Capítulo 3 presenta de manera detallada un estudio profundo de los espacios donde se trabajará la mayor parte de la memoria, los espacios de Hardy. Se expondrán también los productos de Blaschke, unas funciones que poseen gran relevancia en el problema a resolver en este trabajo. También se estudiarán algunos resultados de dualidad de los espacios de Hardy además de la invarianza conforme de las medidas de Carleson.
- Finalmente en el Capítulo 4, se estudian las sucesiones interpolantes culminando con el Teorema de interpolación de Carleson que hará uso de todos los resultados, conceptos y herramientas presentados en los capítulos previos.
- Se añade además el Apéndice A donde aparecen algunos resultados clásicos que se usarán de manera esporádica en algunas demostraciones.

Se incluye una abundante lista de referencias bibliográficas, incorporando libros de texto y artículos. Además aunque no sea imprescindible, se citan obras de carácter histórico para hacer referencia a la autoría original de muchos de los resultados aquí plasmados. Se destaca una pequeña colección de textos que han sido de uso más frecuente para la redacción del escrito, unas más modernas [16], [2], [35], [11], [15], [32], [33] y [38] y otras más clásicas [29], [25], [26], [7], [8] y [9].



# Capítulo 1

## Resultados preliminares

En este primer capítulo, se presentarán algunos conceptos fundamentales que se utilizarán reiteradamente en el resto de la memoria. Se discuten diversos temas de análisis real y complejo que serán necesarios para el desarrollo de la teoría posterior. En primer lugar se estudiará la forma invariante del Lema de Schwarz. Después se definirán las homografías en el disco, que son una familia de funciones muy fructíferas para los objetivos de este trabajo. Esto dará pie a un breve estudio de la métrica hiperbólica, siendo esta una métrica apropiada para el estudio de funciones holomorfas acotadas en el disco. Para ilustrar la relevancia del Lema de Schwarz, se prueba el teorema de Pick para el problema de interpolación finita que proporciona una respuesta parcial al principal problema que se resuelve en este trabajo.

### 1.1. Lema de Schwarz

Se empieza fijando alguna notación. Dado un número complejo  $z_0 \in \mathbb{C}$  y un radio  $r > 0$ , se denota el *disco abierto* por

$$D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

el *disco cerrado* por

$$\overline{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

y la *circunferencia* por

$$\partial D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

Sea  $D$  el disco unitario  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  en el plano complejo y sea  $\mathcal{B}$  el conjunto de funciones holomorfas de  $D$  en  $\overline{D}$ . Por tanto,  $|f(z)| \leq 1$  si  $f \in \mathcal{B}$  y  $|z| < 1$ . Además se define el *semiplano superior abierto*  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ .

**Lema 1.1.1 (de Schwarz).** Sea  $f \in \mathcal{B}$  tal que  $f(0) = 0$ . Entonces

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \text{para cada } z \in D, \tag{1.1}$$

y

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{1.2}$$

La igualdad en (1.1) se alcanza en algún punto  $z$  si, y solo si, existe  $\varphi \in \mathbb{R}$  tal que para  $z \in D$ ,  $f(z) = e^{i\varphi}z$ . Análogamente para (1.2)

**Demostración.** La demostración consiste en probar que la función holomorfa  $g(z) = f(z)/z$  satisface  $|g| \leq 1$  en virtud del principio del módulo máximo. Se define

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z & \text{si } z \in D \setminus \{0\}, \\ f'(0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

En  $D \setminus \{0\}$  se tiene el cociente de dos funciones holomorfas y, puesto que el denominador no se anula, la función es holomorfa en  $D \setminus \{0\}$ . Además, como  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z = f'(0)$  donde se ha tenido en cuenta que  $f(0) = 0$ , que justamente coincide con  $g(0)$  se concluye que  $g \in \mathcal{H}(D \setminus \{0\}) \cap \mathcal{C}(D)$  y entonces  $g$  es holomorfa en  $D$ . Veamos que  $|g(z)| \leq 1$  para cada  $z \in D$ . Si  $|z| < r < 1$ , en virtud del principio del módulo máximo

$$|g(z)| \leq \max\{|g(w)| : |w| = r\} \leq \frac{1}{r} \sup\{|f(w)| : w \in D\} \leq \frac{1}{r}.$$

Haciendo tender  $r$  hacia 1, se tiene que  $|g| \leq 1$  en  $D$ . Esto proporciona (1.1) para  $z \neq 0$  y (1.2) en  $z = 0$ . Por supuesto (1.1) se cumple en  $z = 0$  por hipótesis. Si la igualdad se alcanza en alguna de las dos desigualdades del enunciado,  $g$  alcanza su módulo máximo en algún punto de  $D$ , y por tanto  $g$  es una constante  $\lambda$  en  $D$ , necesariamente  $|\lambda| = 1$ . Por ello,  $f(z) = \lambda z$  para todo  $z \in D$ .  $\square$

### 1.1.1. Homografías en el disco

**Definición 1.1.2.** Una *homografía* es una función  $T$  de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \neq \frac{-d}{c}$$

siendo  $ad - bc \neq 0$ . Las homografías son también denominadas *transformaciones de Möbius*, *transformaciones bilineales* o *transformaciones racionales lineales*.

**Observación 1.1.3.** A los automorfismos del disco se los define como aplicaciones biyectivas, holomorfas y de inversa holomorfa del disco en sí mismo. Se probará después que los elementos de  $\text{Aut}(D)$  son un tipo concreto de homografías.

A continuación, se estudia el comportamiento de las funciones holomorfas del disco, en general de un disco en otro. El Lema de Schwarz es un lema útil para tal estudio, y se obtendrá una nueva versión en esta sección. Se pondrá atención en el caso de homografías del disco unitario  $D$  en sí mismo. El siguiente lema proporciona una clase importante de ejemplos:

**Lema 1.1.4.** Fijando  $\alpha \in D$ , se define la función  $T_\alpha$  en  $\hat{\mathbb{C}}$  por

$$T_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z},$$

donde  $T_\alpha(\infty) = -1/\bar{\alpha}$  y  $T_\alpha(1/\bar{\alpha}) = \infty$ . Entonces,  $T_\alpha$  es una función continua de  $\hat{\mathbb{C}}$  en  $\hat{\mathbb{C}}$  cuya inversa es  $T_{-\alpha}$ . Se tiene que  $T_\alpha$  es holomorfa en  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{1/\bar{\alpha}\}$  con un polo simple en  $1/\bar{\alpha}$ . Además,

$$T_\alpha(D) = D, \quad T_\alpha(\partial D) = \partial D, \quad T'_\alpha(z) = \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \bar{\alpha}z)^2}$$

lo que implica que

$$T'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1 - |\alpha|^2} \quad \text{y} \quad T'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2.$$

**Demostración.** La mayoría de los asertos se siguen de la definición de  $T_\alpha$  y de que sea una homografía. Para probar que  $T_\alpha(\partial D) = \partial D$ , se estudia la imagen de  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  por  $T_\alpha$ , se calcula, para cada  $z$  con  $|z| = 1$

$$\left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = \left| \frac{z - \alpha}{\bar{z}(1 - \bar{\alpha}z)} \right| = \left| \frac{z - \alpha}{\bar{z} - \bar{\alpha}} \right| = 1.$$

En virtud del principio del módulo máximo,  $T_\alpha$  lleva  $D$  en  $D$ . Como  $T_\alpha^{-1} = T_{-\alpha}$  y  $|\alpha| < 1$  si  $|\alpha| < 1$ , se demuestra que  $T_\alpha$  lleva  $D$  en  $D$  y lleva  $\partial D$  en  $\partial D$ . Las fórmulas que involucran a la derivada de  $T_\alpha$  son un simple ejercicio de cálculo.  $\square$

**Lema 1.1.5 (generalización de Pick del lema de Schwarz).** Si  $f \in \mathcal{B}$ , entonces

$$\frac{|f(z) - f(\alpha)|}{|1 - \overline{f(\alpha)}f(z)|} \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|, \quad z \neq \alpha \quad (1.3)$$

y

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}. \quad (1.4)$$

La igualdad en (1.3) y (1.4) se alcanza en algún punto  $z$  si, y solo si,  $f(z)$  es una transformación de Möbius. Si ponemos  $f(\alpha) = w_0$ , existe un número complejo unimodular  $\lambda$  tal que  $f$  es la composición  $T_{-w_0} \circ \lambda T_\alpha = T_{w_0}^{-1} \circ \lambda T_\alpha$ . Esto es

$$f(z) = \frac{\lambda T_\alpha(z) + w_0}{1 + \bar{w}_0 \lambda T_\alpha(z)}, \quad |z| < 1.$$

**Demostración.** Sea  $\alpha \in D$  y sea  $w_0 = f(\alpha)$ . Se va a aplicar el lema de Schwarz a la función  $g = T_{w_0} \circ f \circ T_{-\alpha}$ . Primero, como  $f$  lleva  $D$  en  $\bar{D}$ , también lo hace  $g$ . También,

$$g(0) = T_{w_0}(f(T_{-\alpha}(0))) = T_{w_0}(f(\alpha)) = T_{w_0}(w_0) = 0.$$

En virtud del Lema de Schwarz,  $|g(w)| \leq |w|$  para  $|w| < 1$ , y reemplazando  $w$  por  $T_\alpha(z)$  y como  $g(T_\alpha(z)) = T_{w_0}(f(z))$ , se obtiene (1.3). Además por el lema de Schwarz, se tiene  $|g'(0)| \leq 1$ . Ahora bien, por el Lema 1.1.4 y la regla de la cadena

$$\begin{aligned} g'(0) &= T'_{w_0}(f(T_{-\alpha}(0)))f'(T_{-\alpha}(0))T'_{-\alpha}(0) \\ &= T'_{w_0}(f(\alpha))f'(\alpha)(1 - |\alpha|^2) \\ &= \frac{1}{1 - |f(\alpha)|^2}f'(\alpha)(1 - |\alpha|^2). \end{aligned}$$

Entonces la condición  $|g'(0)| \leq 1$  implica (1.4). Ahora si la igualdad se alcanza en (1.3) para algún  $z \neq \alpha$ , entonces  $|g(T_\alpha(z))| = |T_\alpha(z)|$  para  $z \neq \alpha$ , por lo que  $|g(w)| = |w|$  para  $w = T_\alpha(z) \neq 0$ . Si la igualdad se alcanza en (1.4), entonces  $|g'(0)| = 1$ . En cualquier caso, el lema de Schwarz proporciona un número complejo unimodular  $\lambda$  tal que  $g(w) = \lambda w$  para  $|w| < 1$ . Se toma  $w = T_\alpha(z)$  para obtener  $T_{w_0}(f(z)) = \lambda T_\alpha(z)$ , esto es,  $f(z) = T_{-w_0}(\lambda T_\alpha(z))$  para  $|z| < 1$ .  $\square$

**Definición 1.1.6.** Se define  $T_{\theta, \alpha} : D \rightarrow D$  como la función biholomorfa definida como

$$T_{\theta, \alpha}(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

con  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $|\alpha| < 1$ . Con esta notación se puede escribir  $\alpha = T_{\theta, \alpha}^{-1}(0)$ .

Toda homografía en el disco, más en concreto toda homografía en  $\mathcal{B}$ , puede ser escrita según la definición anterior:

**Teorema 1.1.7.** Sea  $f : D \rightarrow D$  una biyección holomorfa, entonces  $f = \lambda T_\alpha$ , donde  $\lambda$  es unimodular y  $\alpha \in D$ .

**Demostración.** Sea  $\alpha \in D$  tal que  $f(\alpha) = 0$  y sea  $g = f^{-1}$ , por lo que  $g(0) = \alpha$ . Ahora como  $g(f(z)) = z$ , se tiene que usando la regla de la cadena  $1 = g'(f(z))f'(z)$ , en particular,  $1 = g'(f(\alpha))f'(\alpha) = g'(0)f'(\alpha)$ . En virtud del Lema 1.1.12 se tiene que  $|g'(0)| \leq 1 - |\alpha|^2$  y  $|f'(\alpha)| \leq \frac{1}{(1-|\alpha|^2)}$ . Por tanto,

$$1 = |g'(0)||f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |\alpha|^2} = 1.$$

Entonces,  $|f'(\alpha)| = \frac{1}{(1-|\alpha|^2)}$  y  $|g'(0)| = 1 - |\alpha|^2$ . Por tanto, de nuevo por el Lema 1.1.12 se concluye que  $f = \lambda T_\alpha$ .  $\square$

### 1.1.2. Métrica pseudohiperbólica

Ahora se estudia la métrica pseudohiperbólica, siendo esta una métrica apropiada para el estudio de funciones holomorfas acotadas. Uno de los principales objetivos de estudio es el problema de interpolación. Por ello, el estudio de la métrica hiperbólica se orienta de tal forma que dados dos puntos  $p$  y  $q$  se determinará cual es la máxima distancia, sea cual sea el camino que se tome.

**Definición 1.1.8.** Sean  $z, w \in D$ . Se define la *distancia pseudohiperbólica* en el disco  $D$  como

$$\rho(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$$

**Proposición 1.1.9.** Sea  $f : D \rightarrow D$  una función holomorfa en  $D$ . Entonces,  $f$  es Lipschitz continua con respecto de la distancia pseudo-hiperbólica, es decir, para todos  $z, w \in D$  se tiene que

$$\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w).$$

Además la distancia pseudohiperbólica es invariante bajo transformaciones de Möbius

$$\rho(z, w) = \rho(T_{\theta, \alpha}(z), T_{\theta, \alpha}(w)).$$

**Demostración.** Es consecuencia del Lema 1.1.5.  $\square$

**Definición 1.1.10.** Sea  $z_0 \in \mathbb{C}$  y  $r > 0$ , se define el *disco no euclídeo con distancia pseudohiperbólica* como

$$K(z_0, r) = \{z : \rho(z, z_0) < r\}, \quad 0 < r < 1.$$

**Proposición 1.1.11.** El disco no euclídeo  $K(z_0, r)$ ,  $0 < r < 1$ , es la imagen inversa del disco  $\{w : |w| < r\}$  por  $w = T_{z_0}(z)$ . El disco  $K(z_0, r)$  es también un disco euclídeo  $D(c, R)$  cuyos centro y radio son:

$$c = \frac{1 - r^2}{1 - r^2|z_0|^2} z_0 \tag{1.5}$$

y

$$R = r \frac{1 - |z_0|^2}{1 - r^2|z_0|^2}. \tag{1.6}$$

**Demostración.** El disco no euclídeo  $K(z_0, r)$ ,  $0 < r < 1$  es la imagen inversa por  $T_{z_0}$  del disco  $\{w : |w| < r\}$ . Ahora se determinan el centro y el radio. La línea recta que pasa a través de 0 y  $z_0$  es invariante bajo  $T_{z_0}$  porque una homografía lleva rectas y circunferencias en rectas o circunferencias, y resulta que los puntos 0,  $z_0$  y  $-z_0$ , que determinan la "recta o circunferencia" que contiene a la línea que une 0 y  $z_0$ , van a parar respectivamente a  $-z_0, 0$  y  $\frac{-2}{1+|z_0|^2}z_0$  que vuelven a determinar la misma "recta o circunferencia". Por ello, se tiene que  $\partial K(z_0, r) = T_{z_0}^{-1}(\{w : |w| = r\})$  es un círculo ortogonal a dicha línea. El diámetro de  $K(z_0, r)$  es por lo tanto la imagen inversa del segmento  $[-rz_0/|z_0|, rz_0/|z_0|]$ . Como  $z = \frac{w+z_0}{1+\bar{z}_0w}$ , este diámetro es el segmento

$$[\alpha, \beta] = \left[ \frac{|z_0| - r}{1 - r|z_0|} \frac{z_0}{|z_0|}, \frac{|z_0| + r}{1 + r|z_0|} \frac{z_0}{|z_0|} \right]. \quad (1.7)$$

Los extremos de (1.7) son los puntos de  $\partial K(z_0, r)$  con el mayor y menor módulo. Se tiene  $c = (\alpha + \beta)/2$  y  $R = |\beta - \alpha|/2$  por lo que (1.5) y (1.6) se cumplen.  $\square$

**Proposición 1.1.12.** La distancia pseudohiperbólica es una métrica, es decir, la aplicación  $\rho : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en Definición 1.1.8 satiface las siguientes propiedades

- (I)  $\rho(z, w) \geq 0$  para todos  $z, w \in D$ .
- (II)  $\rho(z, w) = 0$  si, y solo si,  $z = w$ .
- (III)  $\rho(z, w) = \rho(w, z)$  para todos  $z, w \in D$ .
- (IV)  $\rho(z_0, z_2) \leq \rho(z_0, z_1) + \rho(z_1, z_2)$  para todos  $z_i \in D$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Demostración.** Las Propiedades (I) a (III) son consecuencia inmediata de la Definición 1.1.8, Por lo tanto se prueba (IV), la desigualdad triangular resulta inmediata de

$$\frac{\rho(z_0, z_2) - \rho(z_2, z_1)}{1 - \rho(z_0, z_2)\rho(z_2, z_1)} \leq \rho(z_0, z_1) \leq \frac{\rho(z_0, z_2) + \rho(z_2, z_1)}{1 + \rho(z_0, z_2)\rho(z_2, z_1)}. \quad (1.8)$$

Para probar (1.8) se puede suponer que  $z_2 = 0$  porque  $\rho$  es invariante bajo transformaciones de Möbius. Entonces, con esta suposición (1.8) pasa a ser

$$\frac{|z_0| - |z_1|}{1 - |z_0||z_1|} \leq \left| \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right| \leq \frac{|z_0| + |z_1|}{1 + |z_0||z_1|}. \quad (1.9)$$

Si  $|z_1| = r$ , entonces  $z = \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} = T_{z_0}(z_1) = T_{-z_0}^{-1}(z_1) \in K(-z_0, r)$  y por tanto  $|z|$  está entre el módulo de los extremos del segmento (1.7) y esto prueba (1.9).  $\square$

**Corolario 1.1.13.** Si  $f \in \mathcal{B}$ , entonces

$$|f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|} \quad (1.10)$$

**Demostración.** Por el Lema 1.1.5,  $\rho(f(z), f(0)) \leq |z|$ , por lo que  $f(z) \in \overline{K(f(0), |z|)}$ . La cota en (1.10) se obtiene a partir de (1.7). La igualdad en (1.10) se alcanza solo si  $f$  es una transformación de Möbius y  $\arg z = \arg f(0)$  donde  $f(0) \neq 0$ .  $\square$

## 1.2. Teorema de Pick

Se presentará en esta sección el teorema de interpolación finita de Pick, que resuelve un caso particular del problema de interpolación original pero sumamente importante para nuestros objetivos. Necesitamos para ello introducir los productos de Blaschke.

**Definición 1.2.1.** Un *producto de Blaschke finito* es una función de la forma

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_j}z} = e^{i\theta} \prod_{j=1}^n T_{\alpha_j}(z), \quad |\alpha_j| < 1.$$

El *grado* de un producto de Blaschke finito se define como su número de ceros contados con su multiplicidad y se denotará por  $\deg(B)$ . Un producto de Blaschke de grado 0 es una función constante con valor absoluto 1.

**Propiedades 1.2.2.** La función  $B$  tiene las propiedades:

- (I)  $B$  es holomorfa en  $D$  y que admite extensión continua a  $\partial D$ .
- (II)  $|B| = 1$  en  $\partial D$ .
- (III)  $B$  tiene un número finito de ceros.

**Observación 1.2.3.** Estas propiedades determinan  $B$  salvo un factor constante de módulo uno. Por supuesto, si una función holomorfa  $f$  cumple esas propiedades, y si  $B(z)$  es un producto de Blaschke finito con los mismos ceros, por el Principio del módulo máximo,  $|f/B| \leq 1$  y  $|B/f| \leq 1$ , en  $D$ , y por tanto  $f/B$  es constante y dicha constante será unimodular.

Cada producto de Blaschke finito pertenece al álgebra del disco  $A_0$  siendo el álgebra del disco el conjunto de funciones holomorfas y acotadas en  $D$  y continuas en  $\overline{D}$ . De hecho, los productos de Blaschke finitos son los únicos elementos de  $A_0$  que llevan  $\partial D$  en  $\partial D$ .

**Lema 1.2.4.** Sea  $B$  un producto de Blaschke finito de grado  $n$  y sea  $\alpha \in D$ . Entonces  $T_\alpha \circ B$  y  $B \circ T_\alpha$  son productos de Blaschke finitos de grado  $n$ .

**Demostración.** La función  $T_\alpha \circ B \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}^0(\overline{D})$  y además,  $|T_\alpha \circ B(z)| = 1$  para cada  $z \in \partial D$ . La Observación 1.2.3 afirma que  $T_\alpha \circ B$  es un producto de Blaschke finito. Es más,  $(T_\alpha \circ B)(z) = 0$  si, y solo si,  $B(z) = \alpha$ . La ecuación  $B(z) = \alpha$  tiene exactamente  $n$  soluciones en  $D$ . Entonces,  $T_\alpha \circ B$  es un producto de Blaschke finito de grado  $n$ .

El hecho de que  $B \circ T_\alpha$  es un producto de Blaschke finito de grado  $n$  puede ser verificado de manera directa.  $\square$

**Teorema 1.2.5 (de Fatou para productos de Blaschke).** Si  $f \in \mathcal{H}(D)$  y

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} |f(z)| = 1,$$

entonces  $f$  es un producto de Blaschke finito.

**Demostración.** Como  $|f(z)| \xrightarrow[|z| \rightarrow 1]{\text{unif.}} 1$ , existe  $r < 1$  tal que  $f$  no se anula en  $\{z : r \leq |z| < 1\}$ .

Entonces,  $f$  tiene un número finito de ceros en  $D$ . Sea  $B$  un producto de Blaschke finito formado por los ceros de  $f$ , contados con su multiplicidad. Entonces,  $f/B$  y  $B/f$  son holomorfas en  $D$  y su módulo tiene uniformemente a 1 a medida que se aproxima a  $\partial D$ . En virtud del Principio del módulo máximo se tiene que  $|f/B| \leq 1$  y  $|B/f| \leq 1$  en  $D$ , por lo que  $f/B$  es constante en  $D$ . Por ser constante es unimodular, y se concluye que  $f$  es un producto de Blaschke finito múltiplo de  $B$ .  $\square$

**Teorema 1.2.6 (de Carathéodory).** Si  $f \in \mathcal{B}$ , entonces existe una sucesión  $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$  de productos de Blaschke finitos de grado menor o igual que  $k$  que converge uniformemente a  $f$  en los subconjuntos compactos de  $D$ .

**Demostración.** Como  $f$  es holomorfa, lo que equivale a ser analítica,  $f$  se puede expresar como suma de una serie de potencias, en concreto para cada  $z \in D$

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j.$$

Por inducción, se busca un producto de Blaschke de grado a lo sumo  $n$  cuyos primeros  $n$  coeficientes coinciden con los de  $f$ ;

$$B_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j + \sum_{j=n}^{\infty} d_j z^j$$

es decir,  $f - B_n$  tiene un cero de orden  $n$  en  $z = 0$ ;

Sea

$$g(z) = \frac{1}{z} \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)}.$$

Observamos que  $g \in \mathcal{B}$ , esto se ve haciendo uso de la versión de Pick del Lema de Schwarz. Ya que  $|c_0| \leq 1$ , se puede definir

$$B_0(z) = \begin{cases} \frac{z+c_0}{1+\overline{c_0}z} & \text{si } |c_0| < 1, \\ c_0 & \text{si } |c_0| = 1. \end{cases}$$

Como hipótesis de inducción sea  $B_{n-1}$  producto de Blaschke de grado a lo sumo  $n-1$  de modo que  $g - B_{n-1}$  tiene un cero de orden  $n-1$  en  $z = 0$ . Entonces,  $zg - zB_{n-1} = z(g - B_{n-1})$  tiene  $n$  ceros en  $z = 0$ . Se define

$$B_n(z) = \frac{zB_{n-1}(z) + f(0)}{1 + \overline{f(0)}zB_{n-1}(z)}.$$

Entonces, por el Lema 1.2.4  $B_n$  es un producto de Blaschke finito con  $\deg(B_n) = \deg(zB_{n-1}) \leq n$ , y

$$\begin{aligned} f(z) - B_n(z) &= \frac{zg(z) + f(0)}{1 + \overline{f(0)}zg(z)} - \frac{zB_{n-1}(z) + f(0)}{1 + \overline{f(0)}zB_{n-1}(z)} \\ &= \frac{(1 - |f(0)|^2)z(g(z) - B_{n-1}(z))}{(1 + \overline{f(0)}zg(z))(1 + \overline{f(0)}zB_{n-1}(z))}. \end{aligned}$$

por lo que  $f - B_n$  tiene un cero de orden  $n$  en  $z = 0$ . Vamos a ver que la convergencia de  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  hacia  $f$  es uniforme en los compactos de  $D$ . Como  $|f(z)| \leq 1$ ,  $|B_n(z)| \leq 1$ , y se tiene que  $f^{(j)}(0) = B_n^{(j)}(0)$ ,  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ , se define la función  $h = f - B_n$ , por tanto  $|h| = |f - B_n| \leq 2$ , y  $h^{(j)}(0) = 0$ ,  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ . Se define una nueva función

$$h_0(z) = \frac{f(z) - B_n(z)}{2},$$

que cumple  $|h_0(z)| \leq 1$ ,  $z \in D$  y  $h(0) = 0$ .

Se define también la función

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} \frac{h_0(z)}{z^n} & \text{si } z \neq 0, \\ \frac{h_0^{(n)}(0)}{n!} & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Esta función cumple que  $\tilde{h} \in \mathcal{H}(D)$  y si  $|z| < r \leq 1$ , se puede aplicar el mismo razonamiento que en el Lema 1.1.1 para deducir que

$$|\tilde{h}(z)| \leq \max_{|w|=r} |\tilde{h}(w)| \leq \frac{1}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 1,$$

por lo que

$$|h_0(z)| \leq |z|^n,$$

despejando

$$|f(z) - B_n(z)| \leq 2|z|^n.$$

A partir de esta desigualdad es inmediato deducir la convergencia uniforme en los compactos de  $D$  anunciada inicialmente.  $\square$

La sucesión de los coeficientes  $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$  de funciones en  $\mathcal{B}$  fue caracterizada por Schur en [34] aunque dicha sucesión para funciones con parte real positiva en  $D$  fue caracterizada por Carathéodory en [5] y por Toeplitz en [41]. En vez de exponer y probar el teorema de Schur, se estudiará el teorema de Pick en [29], ambos teoremas están contenidos en un resultado probado por Cantor en 1981 donde encontró la condición matricial necesaria y suficiente para la interpolación por un número finito de derivadas de una función en  $\mathcal{B}$  en un número finito de puntos en  $D$ .

Dados  $z_1, z_2, \dots, z_n, w_1, w_2, \dots, w_n \in \overline{D}$ , el problema de interpolación finita consiste en responder bajo qué condiciones el problema de interpolación

$$f(z_j) = w_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.11)$$

tiene una solución  $f$  holomorfa en el disco y  $|f(z)| \leq 1$ ,  $z \in D$ .

El problema de interpolación finita fue estudiado por Pick en [29] para aplicaciones del semiplano superior en si mismo.

**Teorema 1.2.7 (de Pick).** Existe  $f \in \mathcal{B}$  satisfaciendo (1.11) si, y sólo si, la forma cuadrática

$$Q_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j,k=1}^n \frac{1 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k$$

es semidefinida positiva. En este caso, la función  $f$  puede tomarse como un producto de Blaschke de grado a lo sumo  $n$ .

**Demostración.** A lo largo de la demostración se usarán diversos resultados basados en el Lema 1.1.5 considerando  $\frac{|\alpha|}{\alpha} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ , donde  $\alpha \in D \setminus \{0\}$ . Considerando la función holomorfa  $f_1(z) = \frac{f(z)}{\frac{|\alpha|}{\alpha} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}}$  y aplicando el Principio del módulo máximo, si  $f : D \rightarrow D$  es holomorfa y



$f(\alpha) = 0$ , entonces  $f(z) = \frac{|\alpha|}{\alpha} \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} f_1(z)$  donde  $f_1 \in \mathcal{B}$ .

Se prueba por inducción sobre  $n$ . El caso para  $n = 1$  es evidente pues la forma  $Q_1(t) = \frac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2} |t|^2$  es semidefinida positiva y se puede tomar una homografía que lleve un punto en otro en  $D$ . Se supone que  $n > 1$ . Primero se supone que se cumple (1.11). Entonces  $|w_n| \leq 1$ , en el caso en el que  $|w_n| = 1$  la función interpoladora es la constante  $w_n$  y  $w_j = w_n$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ . Para la otra implicación se supone  $Q_n$  semidefinida positiva. Tomando  $t_n = 1$ ,  $t_j = 0$ ,  $j < n$ , se ve que  $|w_n| \leq 1$ ; y si  $|w_n| = 1$ , se toman  $t_j = 0$ ,  $j \neq k, n$ , se ve por (1.3) como antes que  $w_k = w_n$ . Por lo tanto se puede tomar  $B_n = w_n$  si  $|w_n| = 1$ . El problema es trivial si  $|w_n| = 1$ , y en cualquier caso,  $|w_n| \leq 1$ . Ahora se supone que  $|w_n| < 1$ . Se desplazan  $z_n$  y  $w_n$  al origen. Sean

$$z'_j = \frac{z_j - z_n}{1 - \bar{z}_n z_j}, \quad w'_j = \frac{w_j - w_n}{1 - \bar{w}_n w_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Existe  $f \in \mathcal{B}$  satisfaciendo (1.11) si, y solo si,

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_n}{1+\bar{z}_n z}\right) - w_n}{1 - \bar{w}_n f\left(\frac{z+z_n}{1+\bar{z}_n z}\right)} \quad (1.12)$$

pertenece a  $\mathcal{B}$  y resuelve

$$g(z'_j) = w'_j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.13)$$

También,  $f$  es un producto de Blaschke de grado a lo sumo  $n$  si, y solo si,  $g$  es un producto de Blaschke de grado a lo sumo  $n$ . Por otro lado, la forma cuadrática  $Q'_n$  correspondiente a los puntos  $\{z'_1, \dots, z'_{n-1}, 0\}$  y  $\{w'_1, \dots, w'_{n-1}, 0\}$  esta relacionada con  $Q_n$ . Se muestra la relación. Haciendo cálculos

$$\frac{1 - z'_j \bar{z}'_k}{1 - z_j \bar{z}_k} = \frac{1 - |z_n|^2}{(1 - \bar{z}_n z_j)(1 - z_n \bar{z}_k)} = \alpha_j \bar{\alpha}_k$$

y

$$\frac{1 - w'_j \bar{w}'_k}{1 - w_j \bar{w}_k} = \frac{1 - |w_n|^2}{(1 - \bar{w}_n w_j)(1 - w_n \bar{w}_k)} = \beta_j \bar{\beta}_k$$

se tiene

$$\frac{1 - w'_j \bar{w}'_k}{1 - z'_j \bar{z}'_k} t_j \bar{t}_k = \frac{1 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} \left( \frac{\beta_j}{\alpha_j} t_j \right) \left( \frac{\bar{\beta}_k}{\alpha_k} \bar{t}_k \right)$$

y

$$Q'_n(t_1, \dots, t_n) = Q_n \left( \frac{\beta_1}{\alpha_1} t_1, \dots, \frac{\beta_n}{\alpha_n} t_n \right). \quad (1.14)$$

Esta forma cuadrática  $Q'_n \geq 0$  si, y solo si,  $Q_n \geq 0$ , y el problema ha sido reducido al caso  $z_n = w_n = 0$ . Por lo tanto, se asume que  $z_n = w_n = 0$ . Hay una función  $f \in \mathcal{B}$  tal que  $f(0) = 0$ ,

$$f(z_j) = w_j, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

si, y solo si, hay una función  $g(z) = f(z)/z \in \mathcal{B}$  tal que

$$g(z_j) = w_j/z_j, \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (1.15)$$

Nótese que  $f$  es un producto de Blaschke de grado  $d$  si, y solo si,  $g$  es un producto de Blaschke de grado  $d-1$ . Ahora por inducción, (1.15) tiene solución si, y solo si, la forma cuadrática

$$\tilde{Q}_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1}) = \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{1 - (w_j/z_j)(\overline{w_k/z_k})}{1 - z_j \bar{z}_k} s_j \bar{s}_k$$

es no negativa. Esto quiere decir que el teorema se reduce a mostrar que

$$Q_n \geq 0 \Leftrightarrow \tilde{Q}_{n-1} \geq 0$$

bajo la suposición de que  $z_n = w_n = 0$ . Porque con la hipótesis  $z_n = w_n = 0$ , se tiene

$$Q_n(t_1, \dots, t_n) = |t_n|^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} \bar{t}_j t_n + \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{1 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k.$$

Completando los cuadrados relativos a  $t_n$ ,

$$Q_n(t_1, \dots, t_n) = \left| t_n + \sum_{j=1}^{n-1} t_j \right|^2 + \sum_{j,k=1}^{n-1} \left( \frac{1 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} - 1 \right) t_j \bar{t}_k.$$

Ahora

$$\frac{1 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} - 1 = \frac{z_j \bar{z}_k - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} = \frac{1 - (w_j/z_j)(\overline{w_k/z_k})}{1 - z_j \bar{z}_k} z_j \bar{z}_k.$$

Por eso

$$Q_n(t_1, \dots, t_n) = \left| \sum_{j=1}^n t_j \right|^2 + \tilde{Q}_{n-1}(z_1 t_1, \dots, z_{n-1} t_{n-1}). \quad (1.16)$$

Por lo tanto  $\tilde{Q}_{n-1} \geq 0$  implica  $Q_n \geq 0$ , y escribiendo  $t_n = -\sum_{j=1}^{n-1} t_j$ , también se ve que  $Q_n \geq 0$  implica  $\tilde{Q}_{n-1} \geq 0$ . □

El teorema de Pick se sigue fácilmente del trabajo de Pick en el que hace uso de aplicaciones conformes, véase [25]. La prueba que se muestra en el presente trabajo tiene como fuente [24] aunque algo antes en [23] publicó una demostración ligeramente diferente. Un enfoque alternativo a este teorema se puede hacer desde la teoría de operadores como se expone en [40] y [12].

**Corolario 1.2.8.** Se supone  $Q_n \geq 0$ . Entonces (1.11) tiene solución única  $f(z) \in \mathcal{B}$  si, y solo si,  $\det(Q_n) = 0$ . Si  $\det(Q_n) = 0$  y  $m < n$  es el rango de  $Q_n$ , entonces la función interpoladora es un producto de Blaschke de grado  $m$ . Por otro lado, si un producto de Blaschke de grado  $m < n$  satisface (1.11), entonces  $Q_n$  tiene rango  $m$ .

**Demostración.** Si  $|w_n| = 1$  la demostración es trivial ya que como hemos visto en la demostración previa, se tendría que  $Q_n = 0$ ,  $m = 0$  y  $B_n = w_n$  el producto de Blaschke constante de grado 0. Por lo que se supone  $|w_n| < 1$ . Por lo tanto, también se supone  $z_n = w_n = 0$ , ya que por (1.14),  $Q_n$  y  $Q'_n$  tienen el mismo rango, mientras que por (1.12), el problema original tiene solución única si, y solo si, el problema ajustado (1.13) tiene solución única. También (1.13) puede ser resuelta con un producto de Blaschke de grado  $m$  si, y solo si, (1.11) también. Entonces, (1.11) tiene solución única y puede ser resuelto por un producto de Blaschke de grado  $n$  si, y solo si, (1.15) tiene solución única y puede ser resuelto por un producto de Blaschke de grado  $m - 1$ . Como consecuencia, por inducción, todos los asertos del corolario quedarán probados cuando se pruebe que

$$\operatorname{rank}(Q_n) = 1 + \operatorname{rank}(\tilde{Q}_{n-1}). \quad (1.17)$$

donde rank denota el rango de la correspondiente matriz. Escribiendo la forma matricial asociada a la forma cuadrática  $\tilde{Q}_{n-1} = (a_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n-1}$ , se comprueba fácilmente a partir de (1.16)

$$Q_n = \left( \begin{array}{c|c} 1 + z_j \bar{z}_k a_{j,k} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 \cdots 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \right),$$

que tiene el mismo rango que

$$\left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ z_j \bar{z}_k a_{j,k} & \vdots \\ \vdots & 0 \\ 1 \cdots 1 & 1 \end{array} \right),$$

y el rango de esta matriz es  $1 + \text{rank}(\tilde{Q}_{n-1})$ .  $\square$

**Corolario 1.2.9.** Se supone  $Q_n \geq 0$  y  $\det(Q_n) > 0$ . Sea  $z \in D$ ,  $z \neq z_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . El conjunto de valores

$$W = \{f(z) : f \in \mathcal{B}, f(z_j) = w_j, 1 \leq j \leq n\}$$

es un disco cerrado no degenerado contenido en  $D$ . Si  $f \in \mathcal{B}$ , y si  $f$  satisface (1.11), entonces  $f(z) \in \partial W$  si, y solo si,  $f$  es un producto de Blaschke de grado  $n$ . Además, si  $w \in \partial W$ , hay una única solución a (1.11) en  $\mathcal{B}$  que también resuelve  $f(z) = w$ .

**Demostración.** De nuevo se supone que  $z_n = w_n = 0$ . Entonces,  $\det(\tilde{Q}_{n-1}) > 0$  por (1.17). Por inducción,

$$\tilde{W} = \{g(z) : g \in \mathcal{B}, g(z_j) = w_j/z_j, 1 \leq j \leq n-1\}$$

en un disco cerrado contenido en  $D$ . Pero entonces  $W = \{z\xi : \xi \in \tilde{W}\}$  es también un disco cerrado. Además  $w \in \partial W$  si, y solo si,  $w/z \in \partial \tilde{W}$ , el resto de asertos se prueban por inducción sobre  $n$ .  $\square$

El teorema de Pick junto a los dos últimos corolarios proporcionan una respuesta al problema de interpolación finita, es decir, (1.11).



## Capítulo 2

# Funciones armónicas. El Teorema maximal de Hardy-Littlewood

Este capítulo va a tratar temas clásicos del Análisis: el conjunto de ideas relativas a la integral de Poisson y funciones maximales, estas funciones desempeñan un papel muy importante para controlar y sobre todo acotar funciones y poder estudiar ciertos límites. Dos de los conceptos más importantes de este capítulo son la función maximal de Hardy-Littlewood y el Teorema maximal de Hardy-Littlewood. El capítulo termina con una breve introducción a funciones subarmónicas y mayorantes armónicos que serán de utilidad para introducir los espacios de Hardy sobre los que tratará el siguiente capítulo.

### 2.1. Integral de Poisson. El problema Dirichlet

Las funciones armónicas juegan un papel crucial en el Análisis Matemático. Concretamente, el problema de determinar funciones armónicas en un dominio acotado verificando condiciones frontera fijadas es de vital importancia. Se comienza recordando la definición de función armónica:

**Definición 2.1.1.** Se dice que una función  $u$  de clase  $\mathcal{C}^2$  en un abierto  $\Omega$  del plano es *armónica* en  $\Omega$  si su laplaciano  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  es idénticamente nulo en  $\Omega$ . La ecuación en derivadas parciales  $\Delta u = 0$  se conoce como *ecuación de Laplace*.

La parte real e imaginaria de una función holomorfa en un abierto son armónicas en dicho abierto, y en un abierto simplemente conexo (en particular, en cualquier disco abierto) toda función real y armónica es la parte real de una función holomorfa en dicho abierto. Este último hecho permite deducir importantes propiedades de las funciones armónicas a partir de las propiedades de las funciones holomorfas.

**Proposición 2.1.2.** Toda función armónica en un abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty$  en  $\Omega$ .

Sea  $u$  una función continua en el disco unitario cerrado  $\bar{D}$ , sea  $\alpha = re^{i\theta}$  en  $D$ . A continuación, se extiende el teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy.

**Lema 2.1.3.** Sea  $u$  una función continua en  $\bar{D}$  y holomorfa en  $D$ . Entonces

(I)  $\oint_{\partial D} u(w)dw = 0$ .

(II) Para cada  $z \in D$  se tiene que  $u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{u(w)}{w-z} dw$ .

**Demostración.**

- (I) Por el Teorema de Cauchy, para  $0 < r < 1$ ,  $\int_{C(0,r)} f(w)dw = 0$ . Sea  $f_n(z) = f(\frac{n}{n+1}z)$ , entonces  $f_n$  es holomorfa en  $D(0, \frac{n+1}{n})$  y la sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $f$  uniformemente en  $\partial D$  (por la continuidad de  $f$  en  $\bar{D}$ ). Por tanto

$$\int_{\partial D} f_n(w)dw \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\partial D} f(w)dw.$$

Como

$$\int_{\partial D} f_n(w)dw = \frac{n+1}{n} \int_{\partial D(0, \frac{n}{n+1})} f(w)dw = 0$$

queda probado este aserto.

- (II) Basta aplicar (I) a la función

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z, \\ f'(z) & \text{si } w = z. \end{cases}$$

que es continua en  $\bar{D}$  (por la definición de derivada en  $z$ ) y holomorfa en  $D \setminus \{z\}$ , luego es holomorfa en  $D$ .

Nótese que esta demostración tiene una sencilla adaptación a cualquier disco  $D(z_0, r)$ .  $\square$

**Definición 2.1.4.** Para  $z \in D$  se definen las funciones  $Q_z, P_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$Q_z(\theta) = \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}, \quad P_z(\theta) = \operatorname{Re}(Q_z(\theta)) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}. \quad (2.1)$$

La función  $Q_z$  es el denominado *núcleo (integral) de Cauchy*, y  $P_z$  se denomina *núcleo de Poisson*. Nótese que  $P_z(\theta)$  y  $Q_z(\theta)$  son  $2\pi$ -periódicas. Además, si  $|z| = r < 1$ ,  $z = re^{i\alpha}$ , entonces

$$P_z(\theta) = \frac{1 - r^2}{|e^{i\theta} - re^{i\alpha}|^2} = \frac{1 - r^2}{|e^{i(\theta-\alpha)} - r|^2} = P_r(\theta - \alpha),$$

y lo mismo para  $Q_z$ ,

$$Q_z(\theta) = \frac{e^{i\theta} + re^{i\alpha}}{e^{i\theta} - re^{i\alpha}} = \frac{e^{i(\theta-\alpha)} + r}{e^{i(\theta-\alpha)} - r} = Q_r(\theta - \alpha).$$

**Proposición 2.1.5 (Fórmula integral de Poisson).** Sea  $u$  una función continua en  $\bar{D}$  y holomorfa en  $D$ . Entonces para cada  $z \in D$  se verifica que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(\theta)u(e^{i\theta})d\theta.$$

Cualquier otro disco se transforma en  $D$  mediante una traslación y una homotecia, lo que permite establecer la generalización a esta fórmula.

**Demostración.** Por el Lema 2.1.3 (II),

$$u(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{u(w)}{w} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt,$$

por lo tanto,  $u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_0(t)u(e^{it}) dt$  ya que  $P_0(t) \equiv 1$ . Esto considera el caso en el que  $z = 0$ . Si  $z \neq 0$ , entonces de nuevo por el Lema 2.1.3 se tiene

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{u(w)}{w-z} dw \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{u(w)}{w-1/\bar{z}} dw = 0,$$

la segunda ecuación se cumple debido a que  $1/\bar{z} \notin \bar{D}$ . Restando la segunda ecuación de la primera, se tiene que

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \left( \frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-1/\bar{z}} \right) u(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{e^{it}-z} - \frac{1}{e^{it}-1/\bar{z}} \right) e^{it} u(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{it}}{e^{it}-z} + \frac{\bar{z}e^{it}}{1-\bar{z}e^{it}} \right) u(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{it}}{e^{it}-z} + \frac{\bar{z}}{e^{-it}-\bar{z}} \right) u(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} u(e^{it}) dt \end{aligned}$$

lo que prueba la fórmula. □

**Corolario 2.1.6 (Propiedad de la media).** Sea  $u$  una función armónica en un abierto que contiene al disco cerrado  $\bar{D}(\alpha, r)$ . Entonces, el valor de  $u$  en  $\alpha$  es el promedio de los valores  $u(z)$  sobre la circunferencia  $\partial D(\alpha, r)$ , es decir, se verifica la denominada *propiedad de la media de Gauss*

$$u(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\alpha + re^{i\theta}) d\theta$$

En particular, si  $\alpha = 0$

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$$

**Demostración.** Consecuencia inmediata de la fórmula integral de Poisson. □

**Observaciones 2.1.7.** (I) En esta observación primero se va a establecer la relación entre el núcleo de Poisson en el disco y en el semiplano. Para ello se definen las siguientes homografías que serán de utilidad a lo largo de la memoria. Se tiene  $T : \bar{\mathcal{H}} \rightarrow \bar{D}$  definida como

$$T(z) = \frac{i-z}{i+z},$$

y su inversa  $T^{-1} : \bar{D} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}$  dada por

$$T^{-1}(w) = i \frac{1-w}{1+w}.$$

Además, dada  $u$  una función armónica en  $\mathcal{H}$  y continua en  $\overline{\mathcal{H}} \cup \{\infty\}$  se define una nueva función

$$u_0 : \overline{D} \xrightarrow{T^{-1}} \overline{\mathcal{H}} \xrightarrow{u} \mathbb{C}$$

$$u_0 = u \circ T^{-1}.$$

Nótese que  $u_0$  es armónica en  $D$  y continua en  $\overline{D}$ . Además,  $u = u_0 \circ T$ . A continuación se realizan unos cálculos que serán de utilidad después. Observemos que la circunferencia unidad es el conjunto imagen por  $T$  del eje real (el punto  $-1$  sería la imagen del punto del infinito). Si  $t \in \mathbb{R}$  se puede escribir esta correspondencia como

$$e^{i\theta} = \frac{i-t}{i+t} = -\frac{t+i-2i}{t+i} = -1 + \frac{2i}{t+i}.$$

Entonces,

$$ie^{i\theta}d\theta = \frac{-2i}{(t+i)^2}dt,$$

por tanto

$$d\theta = \frac{-2}{(t+i)^2} \cdot \frac{i+t}{i-t} dt = 2 \frac{dt}{t^2+1}.$$

Sea  $z = x + iy$  un punto de  $\mathcal{H}$ . Tomando  $w = T(z) = \frac{i-(x+iy)}{i+(x+iy)}$  se tiene que

$$P_w(\theta) = \frac{1-|w|^2}{|e^{i\theta}-w|^2} = \frac{1-\left|\frac{i-(x+iy)}{i+(x+iy)}\right|^2}{\left|\frac{i-t}{i+t} - \frac{i-(x+iy)}{i+(x+iy)}\right|^2}.$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{1-\frac{x^2+(1-y)^2}{x^2+(y+1)^2}}{\frac{4(y^2+(x+t)^2)}{(1+t^2)(x^2+(y+1)^2)}} &= \frac{((y+1)^2 - (1-y)^2)(1+t^2)}{4(y^2+(x-t)^2)} \\ &= \frac{y(1+t^2)}{y^2+(x-t)^2}. \end{aligned}$$

Volviendo a la función  $u$ ,

$$\begin{aligned} u(x+iy) &= u_0(T(x+iy)) = u_0\left(\frac{i-(x+iy)}{i+(x+iy)}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_w(\theta) u_0(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{y(1+t^2)}{y^2+(x-t)^2} u(t) \frac{2dt}{t^2+1} \\ &= \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(t)}{(x-t)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Tomando  $z = x+iy$ , se definen las fórmulas del núcleo de Poisson en el semiplano superior

$$P_y(t) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{t^2+y^2}, \quad P_z(t) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}.$$



Se puede concluir que  $P_z(t) = P_y(x - t)$ . Finalmente, llevando la fórmula integral de Poisson sobre el semiplano superior, se ve que

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}} P_z(t)u(t)dt = \int_{\mathbb{R}} P_y(x - t)u(t)dt, \quad z = x + iy \in \mathcal{H}, \quad (2.2)$$

donde  $u(z)$  es continua en  $\overline{\mathcal{H}} \cup \{\infty\}$  y armónica en  $\mathcal{H}$ .

- (II) De acuerdo con (2.1) para  $e^{i\theta}$  fijo la función  $P_z(\theta)$  es armónica en  $D$  por ser la parte real de la función  $Q_z(\theta)$  holomorfa en  $D$ . Entonces, como consecuencia del Teorema de Leibniz de derivación de integrales paramétricas,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(\theta)f(\theta)d\theta \quad (2.3)$$

es armónica en  $D$  para una  $f \in L^1(\partial D)$ . Como  $P_z(\theta)$  es también una función continua de  $\theta$ , si en (2.3) se sustituye  $f(\theta)d\theta$  por una medida finita  $d\mu(\theta)$  en  $\partial D$ , la expresión (2.3) proporciona también

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} P_r(\theta_0 - \theta)d\mu(\theta)$$

una función armónica en  $D$ . Además se puede interpretar la fórmula integral de Poisson como una convolución. Si  $z = re^{i\theta_0}$

$$P_z(\theta) = P_r(\theta_0 - \theta)$$

y (2.3) toma la forma

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta_0 - \theta)f(\theta)d\theta = (P_r * f)(\theta_0).$$

Entonces,

$$u(ze^{i\alpha}) = u(re^{i(\theta_0 + \alpha)}) = (P_r * f)(\theta_0 + \alpha).$$

Esto implica el hecho de que el espacio de funciones armónicas en  $D$  es invariante bajo rotaciones.

- (III) Cuando  $t \in \mathbb{R}$  es fijo, el núcleo de Poisson para  $\mathcal{H}$  es una función armónica de  $z$  ya que

$$P_z(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{t - z} \right).$$

A partir de esto se puede acotar el núcleo de Poisson  $P_z(t) \leq c_z/(1 + t^2)$ , donde  $c_z$  es una constante que depende de  $z$ . Si  $1 \leq q \leq \infty$ , entonces  $P_z(t) \in L^q(\mathbb{R})$ , y la función

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}} P_z(t)f(t)dt \quad (2.4)$$

donde  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  es armónica en  $\mathcal{H}$ , esto es consecuencia de que el núcleo de Poisson en  $\mathcal{H}$  es una función armónica y del Teorema de Leibniz.

La fórmula integral de Poisson para el semiplano superior puede ser escrita como una convolución

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}} P_y(x - t)f(t)dt = (P_y * f)(x), \quad z = x + iy.$$

Esto prueba el hecho de que el espacio de funciones armónicas en  $\mathcal{H}$  es invariante bajo traslaciones horizontales. Además se tiene que  $P_y(t) = \frac{1}{y}P_1(t/y)$  lo que significa que  $P_y$  es homogénea de grado  $-1$ :  $P_y(at) = a^{-1}P_y(t)$ .

**Propiedades 2.1.8 (del núcleo de Poisson).** Sea  $y \in \mathbb{R}$ , entonces el núcleo de Poisson cumple las siguientes propiedades

- (I)  $P_y(t) \geq 0, \int_{\mathbb{R}} P_y(t) dt = 1.$
- (II)  $P_y(-t) = P_y(t).$
- (III)  $P_y(t)$  es decreciente para  $t > 0.$
- (IV)  $P_y(t) \leq \frac{1}{\pi y}$
- (V) Para  $\delta > 0, \sup_{|t|>\delta} P_y(t) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$
- (VI) Para  $\delta > 0, \int_{|t|>\delta} P_y(t) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$
- (VII)  $\{P_y\}$  es semigrupo con la operación convolución,  $P_{y_1} * P_{y_2} = P_{y_1+y_2}.$

**Demostración.** (I) Es consecuencia inmediata de la definición.

(II) Basta con sustituir en la definición

$$P_y(-t) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(-t)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{t^2 + y^2} = P_y(t).$$

(III) Consecuencia directa de  $y \leq t^2 + y^2.$

(IV) Basta con acotar el denominador

$$P_y(t) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{t^2 + y^2} \leq \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2} = \frac{1}{\pi y}.$$

(V) Sea  $\delta > 0$  tal que  $|t| > \delta$ , entonces

$$\frac{1}{\pi} \frac{y}{t^2 + y^2} \leq \frac{1}{\pi} \frac{y}{\delta^2 + y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0.$$

(VI) Sea  $\delta > 0$ , entonces

$$\int_{|t|>\delta} P_y(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{y}{t^2 + y^2} dt = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\delta}{y}\right) \right),$$

es evidente que  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\delta}{y}\right) \right) = 0.$

(VII) Si  $u$  es una función armónica como en (2.4), entonces  $u(z + iy_1)$  puede ser calculada a partir de  $u(t + iy_1), t \in \mathbb{R}$ , por convolución con  $P_y$ . Luego para demostrarla se considera la función armónica  $u(x + iy) = P_{y_1+y_2}(x)$ . Esta función se puede extender de manera continua a  $\overline{\mathcal{H}} \cup \{\infty\}$ . Por (2.2),

$$P_{y_1+y_2}(x) = \int P_{y_2}(x-t)u(t)dt = (P_{y_1} * P_{y_2})(x).$$

Y así quedarían demostradas las propiedades. □

Una herramienta importante para estudiar las integrales de la forma (2.4) es la desigualdad de Minkowski para integrales que se enuncia a continuación:

**Proposición 2.1.9 (Desigualdad de Minkowski para integrales).** Si  $\mu$  y  $\nu$  son medidas  $\sigma$ -finitas,  $1 \leq p < \infty$  y  $F(x, t)$  es  $\nu \times \mu$  medible, entonces

$$\left\| \int F(x, t) d\nu(x) \right\|_{L^p(\mu)} \leq \int \|F(x, t)\|_{L^p(\mu)} d\nu(x).$$

formalmente es la misma que la desigualdad de Minkowski para sumas de funciones  $L^p(\mu)$ .

**Demostración.** Para  $p = 1$  basta con aplicar el Teorema de Fubini. Para  $p > 1$  se supone que  $F(x, t) \geq 0$  y que  $F(x, t)$  es una función simple, por lo que ambas integrales convergen. Nótese que bastará con considerar el caso en el que  $F(x, t)$  es una función simple porque en el caso en el que  $F$  fuera una función medible se podría construir una sucesión creciente  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  de funciones simples tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$ . Sea

$$G(t) = \left( \int F(x, t) d\nu(x) \right)^{p-1}.$$

Entonces, con  $q = p/(p-1)$  el conjugado de  $p$ ,

$$\|G\|_{L^q(\mu)} = \left\| \int F(x, t) d\nu(x) \right\|_{L^p(\mu)}^{p-1},$$

y en virtud del Teorema de Fubini y la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} \left\| \int F(x, t) d\nu(x) \right\|_{L^p(\mu)}^p &= \int G(t) \int F(x, t) d\nu(x) d\mu(t) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \iint G(t) F(x, t) d\nu(x) d\mu(t) \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int \|G\|_{L^q(\mu)} \|F(x, t)\|_{L^p(\mu)} d\nu(x) d\mu(t) \\ &= \|G\|_{L^q(\mu)} \int \|F(x, t)\|_{L^p(\mu)} d\nu(x) d\mu(t). \end{aligned}$$

Cancelando  $\|G\|_{L^q(\mu)}$  en sendos lados queda probada la desigualdad. □

Usando la desigualdad de Minkowski se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 2.1.10.** Si  $u(x, y) = P_y * f(x)$ ,  $f \in L^p$ . Entonces:

$$\left( \int |u(x, y)|^p dx \right)^{1/p} \leq \|f\|_p, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (2.5)$$

si  $u(x, y) = P_y * \mu = \int P_y(x-t) d\mu(t)$ , donde  $\mu$  es una medida finita en  $\mathbb{R}$ . Entonces:

$$\int |u(x, y)| dx \leq \int |d\mu|. \quad (2.6)$$

**Demostración.** Su prueba es inmediata a partir de la Proposición 2.1.9 y la Propiedad 2.1.8.(I). □

Será de frecuente uso la convergencia débil-\*

**Definición 2.1.11.** Sea  $X$  un espacio normado y  $X'$  su dual. Sean  $\varphi_n, \varphi \in X'$ , se dice que  $\varphi_n$  converge débil-\* a  $\varphi$ , y se denota por

$$\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w^*} \varphi,$$

si para cada  $x \in X$  se tiene que

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi(x).$$

**Ejemplo 2.1.12.** Un caso de particular interés será al considerar el espacio normado  $L^1$  y su dual  $(L^1)' = L^\infty$ . En este caso, para  $f_n, f \in L^\infty$  se dice que  $f_n$  converge débil-\* a  $f$  si para cada  $g \in L^1$

$$f_n(g) = \int f_n g \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int f g = f(g).$$

**Lema 2.1.13.** Sea  $1 \leq p < \infty$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R})$  y para cada  $t \in \mathbb{R}$  se define  $f_t(x) = f(x - t)$ . Entonces,

$$\|f_t - f\|_p \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

**Teorema 2.1.14.** (I) Si  $1 \leq p < \infty$  y si  $f \in L^p$ , entonces

$$\|P_y * f - f\|_p \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} 0.$$

(II) Si  $f \in L^\infty$ ,  $P_y * f$  converge débil-\* a  $f$ , es decir si  $g \in L^1$

$$\int g(x)(P_y * f)(x) dx \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} \int f(x)g(x) dx.$$

(III) Si  $d\mu$  es una medida finita en  $\mathbb{R}$ , la sucesión de medidas  $(P_y * \mu)(x) dx$  converge débil-\* a  $d\mu$ , es decir

$$\int g(x)(P_y * \mu)(x) dx \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} \int g(x) d\mu(x)$$

para cada  $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ , las funciones que se anulan en el  $\infty$ .

(IV) Si  $f$  está acotada y es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ ,  $P_y * f$  converge uniformemente a  $f$  en  $\mathbb{R}$  cuando  $y \rightarrow 0$ .

**Demostración.** Sea  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $p = \infty$  se supone como hipótesis adicional que  $f$  es una función uniformemente continua. Entonces

$$(P_y * f(x)) - f(x) = \int P_y(t)(f(x - t) - f(x)) dt.$$

Haciendo uso de la desigualdad de Minkowski se tiene que

$$\|P_y * f - f\|_p \leq \int P_y(t) \|f_t - f\|_p dt,$$

cuando  $p < \infty$ , porque  $P_y \geq 0$ . La misma desigualdad es trivial para el caso  $p = \infty$ . Sea  $\delta > 0$ , se tiene

$$\|P_y * f - f\|_p \leq \underbrace{\int_{|t| \leq \delta} P_y(t) \|f_t - f\|_p dt}_{(\dagger)} + \underbrace{\int_{|t| > \delta} P_y(t) \|f_t - f\|_p dt}_{(\ddagger)}$$

Entonces,

- $(\dagger)$  Para cada  $\varepsilon$  existe  $\delta_0$  tal que si  $|t| < \delta_0$ , entonces  $\|f_t - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . Por tanto, como  $\int_{\mathbb{R}} P_y = 1$ , se tiene que

$$\int_{|t| \leq \delta} P_y(t) \|f_t - f\|_p dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t| \leq \delta} P_y(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

- $(\ddagger)$  Se tiene que

$$\|f_t - f\|_p \leq \|f_t\|_p + \|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \underset{x-t=y}{=} 2\|f\|_p.$$

Y haciendo uso de lo anterior y de la Propiedad 2.1.8(VI) se tiene que si  $y \in (0, y_0)$  adecuadamente pequeño, entonces

$$\int_{|t| > \delta_0} P_y(t) \|f_t - f\|_p dt \leq 2\|f\|_p \int_{|t| > \delta_0} P_y(t) dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego usando,  $(\dagger)$  y  $(\ddagger)$  se concluye que si  $0 < y < y_0$

$$\|P_y * f - f\|_p \leq \int_{|t| \leq \delta_0} P_y(t) \|f_t - f\|_p dt + \int_{|t| > \delta_0} P_y(t) \|f_t - f\|_p dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

El aserto (II) se sigue del aserto (I) y del Ejemplo 2.1.12. El aserto (III) se sigue del aserto (IV).  $\square$

**Observaciones 2.1.15.** Se sigue del Teorema 2.1.14 que  $f \in L^p$  está unívocamente determinada por la función armónica  $u(z) = P_y * f(x)$  y que una medida  $\mu$  está determinada por su integral de Poisson  $P_y * \mu$ . Nótese también que por (I) y (II) y usando la segunda desigualdad triangular si  $p < \infty$  y la convergencia débil-\* si  $p = \infty$  se tiene que:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|P_y * f\|_p = \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Por (2.5) y la propiedad (VII), la función  $\|P_y * f\|_p$  es monótona en  $y$ . De hecho, si  $0 < y_1 < y_2$ , entonces  $\|P_{y_1} * f\|_p \geq \|P_{y_2} * f\|_p$ .

**Corolario 2.1.16.** Sea  $f$  es una función acotada y uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ , y sea

$$u(x, y) = \begin{cases} (P_y * f)(x) & \text{si } y > 0, \\ f(x) & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Entonces,  $u(x, y)$  es armónica en  $\mathcal{H}$  y continua en  $\overline{\mathcal{H}}$

**Demostración.** Es consecuencia del Teorema 2.1.14.  $\square$

También se necesita la versión local del corolario:

**Lema 2.1.17.** Se supone que  $f \in L^p, 1 \leq p \leq \infty$ , y que  $f$  es continua en  $x_0$ . Sea  $u(x, y) = P_y * f(x)$ . Entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow x_0} u(x, y) = f(x_0).$$

**Demostración.** Sea  $\delta > 0$  y  $|x - x_0| < \delta$ ,

$$|u(x, y) - f(x_0)| \leq \int_{|t| < \delta} P_y(t) |f(x - t) - f(x_0)| dt + \int_{|t| \geq \delta} P_y(t) |f(x - t) - f(x_0)| dt.$$

Usando argumentos similares a los de la demostración del Teorema 2.1.14. Se tiene que

$$\int_{|t| < \delta} P_y(t) |f(x - t) - f(x_0)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_{|t| \geq \delta} P_y(t) |f(x - t) - f(x_0)| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces,

$$|u(x, y) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

y por tanto, se concluye que  $\lim_{(x,y) \rightarrow x_0} u(x, y) = f(x_0)$ .  $\square$

Nótese que la convergencia es uniforme en un subconjunto  $E \subseteq \mathbb{R}$  si se supone que la continuidad de  $f$  es uniforme en  $E$  y que  $|f|$  está acotada en  $E$ . Es importante que las integrales de Poisson de las funciones y medidas  $L^p$  son caracterizadas por las desigualdades en norma como (2.5) y (2.6). La demostración en el semiplano superior requiere del siguiente lema:

**Lema 2.1.18.** Si  $u(z)$  es armónica en  $\mathcal{H}$  y acotada y continua en  $\overline{\mathcal{H}}$  entonces

$$u(z) = \int P_y(x - t) u(t) dt.$$

**Demostración.** Sea

$$U(z) = u(z) - \int P_y(x - t) u(t) dt.$$

Entonces, haciendo uso del Teorema de Leibniz se tiene que  $U$  es armónica en  $\mathcal{H}$  y continua en  $\overline{\mathcal{H}}$  además  $U \equiv 0$  en  $\mathbb{R}$  haciendo uso del Lema 2.1.17. Sea

$$V(z) = \begin{cases} U(z) & \text{si } y \geq 0, \\ -U(\bar{z}) & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Puesto que  $U$  es acotada y armónica también lo es cada trozo de la función anterior luego  $V$  es acotada y armónica en  $\mathcal{H}$ . Como  $V \in \mathcal{H}(\mathcal{H})$  y es acotada en virtud del Teorema de Liouville  $V$  es constante es decir  $V(z) = V(0) = 0$  para cada  $z \in \mathcal{H}$ . Y por tanto,  $U \equiv 0$ .  $\square$

**Teorema 2.1.19.** Sea  $u$  una función armónica en el semiplano superior  $\mathcal{H}$ . Entonces

(I) Si  $1 \leq p < \infty$ ,  $u$  es la integral de Poisson de una función en  $L^p$  si, y solo si,

$$\sup_{y > 0} \|u(x + iy)\|_{L^p(dx)} < \infty \quad (2.7)$$

(II) La función  $u$  es la integral de Poisson de una medida finita en  $\mathbb{R}$  si, y solo si,

$$\sup_{y > 0} \int_{\mathbb{R}} |u(x + iy)| dx < \infty. \quad (2.8)$$

(III) (**Teorema de Herglotz**). La función  $u$  es positiva si, y solo si,

$$u(z) = cy + \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t) d\mu(t),$$

donde  $c \geq 0, \mu \geq 0$ , y  $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{1+t^2} < \infty$ .

**Demostración.** (I) Ya se ha señalado que (2.7) y (2.8) son condiciones necesarias debido a la Proposición 2.1.10. Se supone que  $u$  satisface (2.7) y (2.8). Entonces se tiene la siguiente cota

$$|u(z)| \leq \left(\frac{2}{\pi y}\right)^{1/p} \sup_{\eta>0} \|u(x, \eta)\|_{L^p(dx)}. \quad (2.9)$$

Sea  $\zeta = \xi + i\eta$ . Entonces por la Desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} |u(z)| &= \frac{1}{\pi y^2} \left| \iint_{D(z,y)} u(\zeta) d\xi d\eta \right| \\ &\leq \left( \frac{1}{\pi y^2} \iint_{D(z,y)} |u(\zeta)|^p d\xi d\eta \right)^{1/p} \\ &\stackrel{(\star)}{\leq} \left( \frac{1}{\pi y^2} \int_0^{2y} \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi + i\eta)|^p d\xi d\eta \right)^{1/p} \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \frac{2}{\pi y} \right)^{1/p} \sup_{\eta>0} \left( \int_{\mathbb{R}} |u(\xi + i\eta)|^p d\xi \right)^{1/p} \\ &= \left( \frac{2}{\pi y} \right)^{1/p} \sup_{\eta>0} \|u(x, \eta)\|_{L^p(dx)}. \end{aligned}$$

( $\star$ ) : Se aplica el Teorema de Fubini. Además se envuelve al disco en una banda horizontal  $\Omega_y$ , ver Figura 2.1.

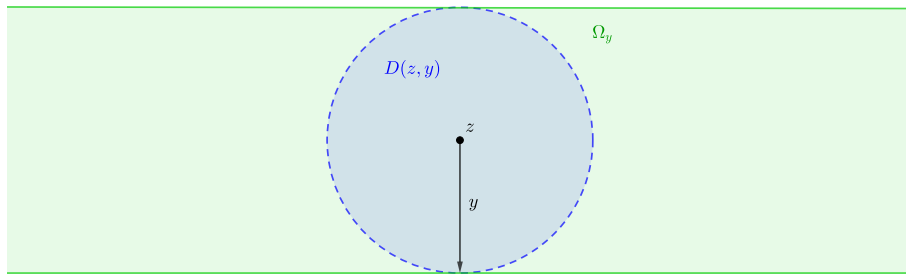


Figura 2.1: Disco  $D(z, y)$  envuelto en la banda  $\Omega_y$ .

La cota obtenida en (2.9) dice que  $u$  está acotada para  $y > y_n > 0$  y en virtud del Lema 2.1.18 se tiene que

$$u(z + iy_n) = \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t) u(t + iy_n) dt.$$

Sea  $y_n$  tal que  $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{decrece}} 0$ . Si  $1 < p \leq \infty$ , la sucesión  $f_n(t) = u(t + iy_n)$  está acotada en  $L^p$  por (2.7) si  $p < \infty$  y por lo anterior si  $p = \infty$ . En virtud del Teorema de Banach-Alaoglu, la sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  tiene un punto de acumulación débil-\*  $f \in L^p$ . Como los núcleos de Poisson pertenecen a  $L^q$ ,  $q = p/(p-1)$ , se tiene que

$$u(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(z + iy_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t) f_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t) f(t) dt.$$

- (II) La demostración es la misma que (I) salvo que ahora la sucesión de las medidas  $u(t + iy_n) dt$ , que tiene norma acotada, converge débil-\* a una medida finita en  $\mathbb{R}$ .
- (III) Se necesitará llevar  $\mathcal{H}$  en  $D$ , usando el análogo de (II) para funciones armónicas en  $D$  para después regresar a  $\mathcal{H}$ . Una función armónica  $u$  en  $D$  es la integral de Poisson de una medida finita  $\nu$  en  $\partial D$  si, y solo si,  $\sup_r \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta < \infty$ . La medida  $\nu$  es entonces límite débil-\* de medidas  $u(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$  en la topología débil-\* de medidas en  $\partial D$ . Si  $u(z) \geq 0$ , entonces las medidas  $u(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$  son positivas y acotadas ya que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = u(0),$$

entonces el límite  $\nu$  existe y es una medida positiva. Esto prueba (III) en su versión en el disco. Ahora se lleva  $D$  en  $\mathcal{H}$  con  $T(w) = i \frac{1-w}{1+w}$ . La función armónica  $u$  en  $\mathcal{H}$  es positiva si, y solo si, la función armónica  $u(T(w))$ , que es positiva, es la integral de Poisson de una medida positiva  $\nu$  en  $\partial D$ . Se considera primero el caso en el que  $\nu$  está soportada en el punto  $w = -1$ , el cual corresponde con  $z = T(w) = \infty$ . Entonces

$$u(T(w)) = \nu(\{-1\}) P_w(-1) = \nu(\{-1\}) \frac{1 - |w|^2}{|1 + w|^2} = \nu(\{-1\}) \text{Im } z = \nu(\{-1\}) y.$$

Ahora, se supone que  $\nu(\{-1\}) = 0$ . La aplicación  $T$  lleva  $\nu$  en una medida positiva finita  $\tilde{\nu}$  en  $\mathbb{R}$  y para  $t = T(e^{i\theta})$ ,

$$P_w(\theta) = \pi(1 + t^2) P_z(t).$$

Y en este caso se tiene

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t) d\mu(t),$$

donde

$$\mu = \pi(1 + t^2) \tilde{\nu}.$$

El caso general es la suma de los dos casos ya contemplados en esta demostración.  $\square$

**Observaciones 2.1.20.** Los resultados de esta sección también se cumplen para el disco unitario  $D$ , donde se escribe

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi,$$

$$P_r(\theta - \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2}, \quad z = re^{i\theta}.$$



## 2.2. Función maximal de Hardy-Littlewood

Para cada función  $f$  en  $\mathbb{R}$  se asocian dos funciones auxiliares que miden respectivamente el tamaño de  $f$  y el comportamiento de la integral de Poisson de  $f$ . La primera función puede ser definida siempre que  $f$  sea una función medible en cualquier espacio de medida  $(X, \mu)$ . Para exponer con rigor los conceptos y resultados de esta sección será necesario definir los espacios de Lorentz.

**Notación 2.2.1.** En un espacio de medida  $(X, \mu)$  para denotar la medida de un conjunto se usarán indistintamente  $\mu(\cdot)$  o  $|\cdot|$ .

**Definición 2.2.2.** Sea  $1 \leq p < \infty$ ,  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  y  $(X, \mu)$  un espacio medida, se define

$$\|f\|_{L^p_{\text{débil}}}^* := \sup_{\lambda > 0} \lambda (\mu\{x : f(x) > \lambda\})^{1/p}$$

y el espacio  $L^p$  débil

$$L^p_{\text{débil}}(\mathbb{R}^d) := \{f : \|f\|_{L^p_{\text{débil}}((X, \mu))}^* < \infty\}.$$

Equivalentemente,  $f \in L^p_{\text{débil}}$  si, y sólo si,  $\mu\{x : |f(x)| > \lambda\} \lesssim \lambda^{-p}$ .

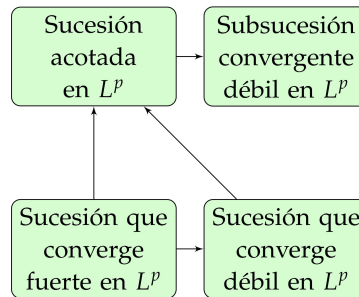


Figura 2.2: Convergencias de sucesiones en los espacios  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ .

**Definición 2.2.3.** Sea  $f$  una función medible en un espacio medida  $(X, \mu)$ . Para  $\lambda > 0$ , la *función de distribución* se define como

$$m_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}).$$

La función de distribución es decreciente, y determina las normas  $L^p$  de  $f$ . Si  $f \in L^\infty$ , entonces  $m_f(\lambda) = 0$  para  $\lambda \geq \|f\|_\infty$ , y  $m_f(\lambda) > 0$  para  $\lambda < \|f\|_\infty$ ; por lo que se tiene que

$$\|f\|_\infty = \sup\{\lambda : m_f(\lambda) > 0\}.$$

**Lema 2.2.4.** Si  $(X, \mu)$  es un espacio de medida, si  $f$  es medible, y si  $0 < p < \infty$ , entonces

$$\int |f|^p d\mu = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_f(\lambda) d\lambda. \quad (2.10)$$

**Demostración.** Se supone que  $f$  se anula salvo en un conjunto de medida  $\sigma$ -finita, ya que de lo contrario los dos lados de la expresión a demostrar serían infinitos. Entonces por el Teorema

de Fubini se tiene que

$$\begin{aligned}\int_X |f|^p d\mu &= \int_X \int_0^{|f|} p\lambda^{p-1} d\lambda d\mu \\ &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \mu(|f| > \lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_f(\lambda) d\lambda.\end{aligned}$$

□

**Proposición 2.2.5 (Desigualdad de Chebyshev).** Sea  $f \in L^p, 0 < p < \infty$ . Se tiene que

$$m_f(\lambda) \leq \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

En el caso en el que  $p = 1$  se llama *desigualdad de Markov*.

**Demostración.** Sea  $f \in L^p, 0 < p < \infty$  y sea  $E_\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$ , por lo que  $\mu(E_\lambda) = m_f(\lambda)$ . Entonces,

$$\lambda^p \mu(E_\lambda) \leq \int_{E_\lambda} |f|^p d\mu \leq \|f\|_p^p,$$

y despejando se obtiene la desigualdad buscada. □

**Definición 2.2.6.** Si  $0 < p < \infty$  se dice que  $f$  es una *función  $L^p$  débil* si existe una constante  $A$  tal que

$$m_f(\lambda) \leq \frac{A^p}{\lambda^p}$$

**Observación 2.2.7.** La desigualdad de Chebyshev dice que toda función  $L^p$  es una función  $L^p$  débil.

**Ejemplo 2.2.8.** La función  $|x \log x|^{-1}$  en  $[0, 1]$  no está en  $L^1$ , pero satisface  $m_f(\lambda) = o(1/\lambda)$  con  $\lambda \rightarrow \infty$ , por lo que es  $L^1$  débil.

Ahora se define la segunda función auxiliar, esta se define solo para funciones en  $\mathbb{R}$ . El teorema de Lebesgue dice que si  $f(x)$  es localmente integrable en  $\mathbb{R}$ , entonces

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{1}{h+k} \int_{x-h}^{x+k} f(t) dt = f(x) \quad (2.11)$$

para casi todo  $x \in \mathbb{R}$ . Para hacer el teorema de Lebesgue cuantitativo se sustituye en (2.11) el límite por el supremo, y se pone el valor absoluto en el integrando, escribiendo  $|I|$  para la longitud de un intervalo.

La definición siguiente introduce la función maximal de Hardy-Littlewood. Esta función fue introducida por Hardy y Littlewood en [18], pero su importancia no fue reconocida hasta mucho después. Lo verdaderamente importante de la función  $Mf(x)$  es que acota muchas otras funciones asociadas a  $f$ . Una noción intuitiva es que la función maximal de Hardy-Littlewood determina el máximo valor medio en un entorno de  $x$ .

**Definición 2.2.9.** Sea  $f$  es localmente integrable en  $\mathbb{R}$ , se define la *función maximal de Hardy-Littlewood*

$$Mf(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt.$$

donde  $|I|$  hace referencia a la longitud del intervalo  $I$ .

**Teorema 2.2.10.** Para cada  $\alpha > 0$  y  $t \in \mathbb{R}$ , sea  $\Gamma_\alpha(t)$  el sector en  $\mathcal{H}$  con vértice en  $t$  y ángulo  $2 \arctan \alpha$ ,  $\Gamma_\alpha(t) = \{(x, y) : |x-t| < \alpha y, 0 < y < \infty\}$ . Sea  $f \in L^1(\frac{dt}{1+t^2})$  y sea  $u(x, y)$  la integral de Poisson de  $f(t)$ ,

$$u(x, y) = \int P_y(s) f(x-s) ds.$$

Entonces

$$\sup_{\Gamma_\alpha(t)} |u(x, y)| \leq A_\alpha M f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

donde  $A_\alpha$  es una constante que depende solo de  $\alpha$ .

**Demostración.** Se puede suponer  $t = 0$ . Primero se consideran los puntos de la forma  $(0, y), y \in \mathbb{R}$  en el eje del sector  $\Gamma_\alpha(0)$ . Entonces,

$$u(0, y) = \int P_y(s) f(s) ds,$$

y el núcleo de Poisson  $P_y(s)$  es una función par positiva que es decreciente en  $s$ . Se va a expresar  $P_y$  como combinación de unas funciones núcleos caja definidos por  $\frac{1}{2h} \chi_{(-h, h)}$ , nótese que esta función asigna a cada intervalo el inverso de su medida tal y como se hacía en la definición de la función maximal de Hardy-Littlewood  $M_f$ . Ahora, se definen las funciones  $h_n$

$$h_n(s) = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{(-x_j, x_j)}(s),$$

con  $a_j \geq 0$ , y  $\int h_n(s) ds = \sum_{j=1}^N a_j |(-x_j, x_j)| = \sum_{j=1}^N 2a_j x_j \leq 1$ , estas funciones son no negativas, pares y decrecientes para  $s$  donde  $h_n$  se aproxima a  $P_y$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int h_n(s) f(s) ds \right| &\leq \int h_n(s) |f(s)| ds \\ &= \int \sum_{j=1}^N a_j \chi_{(-x_j, x_j)}(s) |f(s)| ds \\ &\leq \sum_{j=1}^N 2x_j a_j \frac{1}{2x_j} \int_{-x_j}^{x_j} |f(s)| ds \\ &\leq M_f(0). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |u(0, y)| &= \left| \int P_y(s) f(s) ds \right| \\ &\leq \int P_y(s) |f(s)| ds \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s) |f(s)| ds \\ &\stackrel{\text{Conv. Monótona}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n(s) |f(s)| ds \\ &\leq M_f(0). \end{aligned}$$

Ahora se fija  $(x, y) \in \Gamma_\alpha(0)$ . Entonces  $|x| < \alpha y$ , y  $P_y(x - s)$  se puede acotar superiormente por una función  $\psi(s) := \sup\{P_y(x - t) : |t| > s\}$  que es positiva, par y decreciente. Aproximando  $\psi$  por  $h_n$ , y haciendo un razonamiento análogo al anterior, se tiene que

$$\int \psi(s)|f(s)|ds \leq A_\alpha M_f(0),$$

y

$$|u(x, y)| \leq \int \psi(s)|f(s)|ds \leq A_\alpha M_f(0).$$

siendo esta última (2.12). □

**Observación 2.2.11.** La condición  $f \in L^1(\frac{dt}{1+t^2})$  garantiza la convergencia de  $\int P_y(s)f(x - s)ds$ .

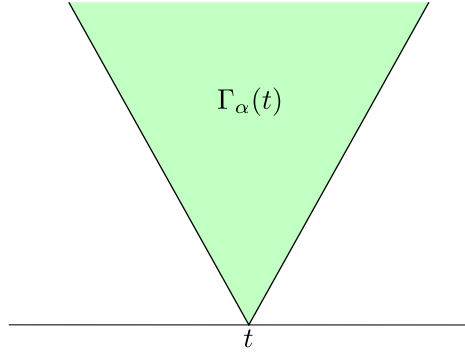


Figura 2.3: El sector  $\Gamma_\alpha(t)$ ,  $\alpha = \frac{2}{3}$ .

La demostración del teorema maximal de Hardy-Littlewood que será expuesto posteriormente usa dos teoremas: un lema de recubrimiento tipo Vitali para la parte (I) y el teorema de interpolación de Marcinkiewicz para la parte (II). Se presentan dichos resultados previos para después abordar la demostración del teorema 2.2.15.

Este lema de recubrimiento tipo Vitali se puede encontrar en [17] se le atribuye a W. H. Young. Para otro lema de recubrimiento válido en  $\mathbb{R}^n$ , y para una discusión más general de funciones maximales e identidades de aproximación se puede consultar [38] escrito por E. M. Stein.

**Lema 2.2.12.** Sea  $\mu$  una medida de Borel positiva en  $\mathbb{R}$  y sea  $\{I_1, \dots, I_n\}$  una familia finita de intervalos abiertos en  $\mathbb{R}$ . Hay una subfamilia  $\{J_1, \dots, J_m\}$  tal que  $J_k$  son disjuntos por parejas dos a dos y tal que

$$\sum_{k=1}^m \mu(J_k) \geq \frac{1}{2} \mu \left( \bigcup_{j=1}^n I_j \right).$$

**Demostración.** Por inducción a partir de la familia de intervalos  $\{I_1, \dots, I_n\}$  se puede obtener una subfamilia tal que para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  se tiene que  $I_j \not\subseteq \cup_{i \neq j} I_i$  y donde la unión de esta familia refinada es la misma que la de la familia original. Cada intervalo de esta nueva familia se denota por  $I_j = (\alpha_j, \beta_j)$  y se construyen de forma que  $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$ . Entonces,  $\beta_{j+1} > \beta_j$  ya que de lo contrario  $I_{j+1} \subseteq I_j$ , y además  $\alpha_{j+1} > \beta_{j-1}$  ya que de lo contrario

$I_j \subseteq I_{j-1} \cup I_{j+1}$ . De esta forma se obtienen dos subfamilias por un lado las de numeración par y por otro lado las de numeración impar siendo estas disjuntas. Entonces,

$$\sum_{j\text{par}} \mu(I_j) + \sum_{j\text{impar}} \mu(I_j) \geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^n I_j\right),$$

para los intervalos  $J_i$  comentados anteriormente se usa un razonamiento análogo. Es claro que, necesariamente, una de estas dos subfamilias ha de cumplir la desigualdad del enunciado. La representación de los intervalos puede verse de manera gráfica en la Figura 2.4.  $\square$

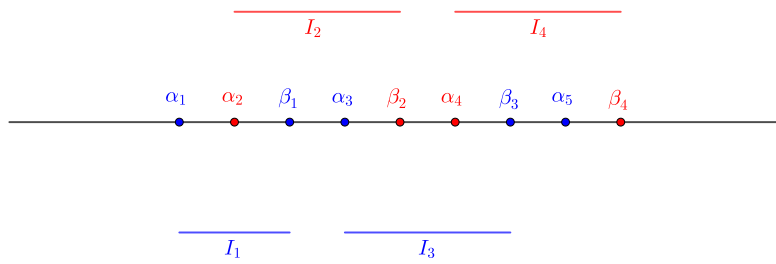


Figura 2.4: Construcción de la familia de intervalos  $I_j$ .

**Teorema 2.2.13 (de Marcinkiewicz).** Sean  $(X, \mu)$  y  $(Y, \nu)$  espacios de medida, y sea  $1 < p_1 \leq \infty$ . Se supone que  $T$  es una aplicación de  $L^1(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$  a funciones  $\nu$ -medibles tal que

$$(I) \quad |T(f+g)(y)| \leq |Tf(y)| + |Tg(y)|, \text{ para } f \in L^1 \text{ y } g \in L^{p_1}.$$

$$(II) \quad \nu(\{y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \frac{A_0}{\lambda} \|f\|_1, \quad f \in L^1.$$

$$(III) \quad \nu(\{y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{A_1}{\lambda}\|f\|_{p_1}\right)^{p_1}, \quad f \in L^{p_1}.$$

(donde si  $p_1 = \infty$  se supone que  $\|Tf\|_\infty \leq A_1\|f\|_\infty$ ). Entonces, para  $1 < p < p_1$ ,

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad f \in L^p,$$

donde  $A_p$  depende únicamente de  $A_0, A_1, p$  y  $p_1$ .

**Demostración.** Se fija  $f \in L^p, 1 < p < p_1$  y  $\lambda > 0$ . Se definen los conjuntos

$$E_\lambda = \{y : |Tf(y)| > \lambda\}.$$

Se estimará  $\nu(E_\lambda)$  y, usando el Lema 2.2.4 se concluirá para  $\|Tf\|_p$ . Se divide  $f$  en dos trozos por  $\lambda/2A_1$ . Se definen

$$f_0 = f\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda/(2A_1)\}} \quad \text{y} \quad f_1 = f\chi_{\{x:|f(x)|\leq\lambda/(2A_1)\}},$$

de modo que  $f = f_0 + f_1$ ;  $f_0 \in L^1$  y  $f_1 \in L^{p_1}$ . Definiendo

$$B_\lambda = \{y : |Tf_0(y)| > \lambda/2\} \quad y \quad C_\lambda = \{y : |Tf_1(y)| > \lambda/2\},$$

se tiene que  $E_\lambda \subseteq B_\lambda \cup C_\lambda$ .

Por la descomposición de  $f$  ya definida y por la hipótesis (I), se tiene que  $|Tf(y)| \leq |Tf_0(y)| + |Tf_1(y)|$ . Aplicando (II) al conjunto  $B_\lambda$ ,

$$\nu(B_\lambda) \leq 2 \frac{A_0}{\lambda} \|f_0\|_1 \leq 2 \frac{A_0}{\lambda} \int_{|f| > \lambda/(2A_1)} |f| d\mu.$$

Para estimar  $\nu(C_\lambda)$  hay que considerar dos casos. Si  $p_1 = \infty$ , entonces  $\|f_1\|_\infty < \lambda/(2A_1)$  y se tendría haciendo uso de (III) que  $C_\lambda = \emptyset$ . Si  $p_1 < \infty$ , haciendo uso de (III) sobre el conjunto  $C_\lambda$

$$\nu(C_\lambda) \leq \left( \frac{2}{\lambda} A_1 \|f_1\|_{p_1} \right)^{p_1} \leq \frac{(2A_1)^{p_1}}{\lambda^{p_1}} \int_{|f| \leq \lambda/(2A_1)} |f|^{p_1} d\mu.$$

Se acota ahora  $\nu(E_\lambda)$  haciendo uso de  $\nu(B_\lambda)$  y  $\nu(C_\lambda)$  y usando el Lema 2.2.4. Si  $p_1 = \infty$ ,

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \nu(E_\lambda) d\lambda \\ &\leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \left( 2 \frac{A_0}{\lambda} \int_{|f| > \lambda/(2A_1)} |f| d\mu \right) d\lambda \\ &\leq 2A_0 p \int |f| \int_0^{2A_1|f|} \lambda^{p-2} d\lambda d\mu \\ &= 2^p \frac{A_0 A_1^{p-1}}{p-1} \int |f|^p d\mu, \end{aligned}$$

ya que  $p-2 > -1$ . Por tanto,  $Tf \in L^p$ . Si  $p_1 < \infty$ , se ha de añadir el término asociado a  $\nu(C_\lambda)$

$$\|Tf\|_p^p \leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \left( 2 \frac{A_0}{\lambda} \int_{|f| > \lambda/(2A_1)} |f| d\mu \right) d\lambda + \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \frac{(2A_1)^{p_1}}{\lambda^{p_1}} \int_{|f| \leq \lambda/(2A_1)} |f|^{p_1} d\mu d\lambda.$$

La primera integral ya ha sido calculado previamente. Ahora, la segunda

$$(2A_1)^{p_1} p \int |f|^{p_1} \int_{2A_1|f|}^\infty \lambda^{p-p_1-1} d\lambda d\mu = \frac{(2A_1)^p p}{p_1 - p} \int |f|^p d\mu$$

porque  $p - p_1 - 1 < -1$ . Juntando todo esto se tiene

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

con

$$A_p^p \leq 2^p A_1^{p-1} \left( \frac{A_0 p}{p-1} + \frac{A_1 p}{p_1 - p} \right),$$

y con esto queda probado el teorema.  $\square$

**Observación 2.2.14.** La hipótesis de que el dominio de  $T$  sea  $L^1(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$  es solo para asegurar  $Tf$  esté definida cuando  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p \leq p_1$ . Para  $f \in L^p$ , se escribe  $f = f_{\chi_{|f|>1}} + f_{\chi_{|f|\leq 1}} = f_0 + f_1$ . Entonces  $|f_0| \leq |f|^p \in L^1$  y  $|f_1| \leq |f|^{p/p_1} \in L^{p_1}$ . Para mayor información del teorema de Marcinkiewicz y otros teoremas de interpolación de operadores se pueden consultar [43] y [39].

**Teorema 2.2.15 (maximal de Hardy-Littlewood).** Si  $f \in L^p, 1 \leq p \leq \infty$ , entonces  $Mf(t)$  es finita casi siempre. Además:

(I) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces  $Mf$  es una función  $L^1$  débil, y

$$|\{t \in \mathbb{R} : Mf(t) > \lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1, \quad \lambda > 0$$

(II) Si  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , con  $1 < p \leq \infty$ , entonces  $Mf \in L^p(\mathbb{R})$  y

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p,$$

donde  $A_p$  depende solo de  $p$ .

**Demostración.** Se divide la demostración en dos partes, una por aserto.

(I) Se usará  $|E|$  como notación para la medida de Lebesgue de  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Se supone que  $f \in L^1$  y sea  $\lambda > 0$ . Entonces el conjunto  $E_\lambda = \{t : Mf(t) > \lambda\}$  es abierto, y por lo tanto medible. Para cada  $t \in E_\lambda$  se tiene un intervalo abierto  $I$  conteniendo a  $t$  tal que

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f| ds > \lambda$$

que es lo mismo que

$$|I| < \frac{1}{\lambda} \int_I |f| ds. \quad (2.13)$$

Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $E_\lambda$  y se cubre  $K$  con un número finito de intervalos  $I_1, \dots, I_n$  que satisfacen (2.13). Aplicando el lema 2.2.12 a  $\{I_1, \dots, I_n\}$  proporciona intervalos disjuntos dos a dos  $J_1, \dots, J_m$  que satisfacen (2.13) tal que

$$\left| \bigcup_{j=1}^n I_j \right| \leq 2 \sum_{j=1}^n |J_j|.$$

Entonces

$$|K| \leq \left| \bigcup_{j=1}^n I_j \right| \leq 2 \sum_j \frac{1}{\lambda} \int_{J_j} |f| ds \leq \frac{2}{\lambda} \int |f| ds.$$

Dejando a  $|K|$  crecer hasta  $|E_\lambda|$  queda demostrada la primera parte.

(II) En este caso los espacios de medida son ambos  $(\mathbb{R}, dx)$ . El operador  $M$  claramente satisface la condición de subaditividad del Teorema 2.2.13 (I). La condición (II) del Teorema 2.2.13 se prueba como la parte (I) del Teorema 2.2.15. Se toma  $p_1 = \infty$  y la condición (III) del Teorema 2.2.13 se cumple con  $A_1 = 1$ . Entonces en virtud del teorema 2.2.13 se tiene

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad 1 < p \leq \infty$$

siendo este el aserto (II) del Teorema 2.2.15. Esto se sigue de que  $Mf <_{c.s} \infty$ .

□

**Observaciones 2.2.16.** Merece la pena insistir en algunos comentarios sobre este teorema

a) El hecho de que  $Mf <_{c.s} \infty$  es consecuencia de (I) y (II).

- b) La condición (I) quiere decir que el operador  $Mf$  es del tipo débil  $(1, 1)$  y del tipo fuerte  $(p, p)$  para  $1 < p \leq \infty$ . En general, se dice que un operador  $T$  es del tipo débil  $(p, q)$  si  $mTf(\lambda) \leq C \frac{\|f\|_p^q}{\lambda^q}$ .
- c) La desigualdad de tipo débil en (I) es la mejor cota posible para  $Mf$  con  $f \in L^1$ . Nótese que si  $f \neq 0$ , entonces  $Mf$  no puede pertenecer a  $L^1$ , ya que para  $x$  suficientemente grande, si se considera el intervalo  $[-x, x]$ , vamos a usar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Se tiene que  $(|f|\chi_{[-x, x]})(t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} |f|$  y  $\| |f|\chi_{[-x, x]} \| \leq \|f\|$ , entonces el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue dice que

$$\int_{-x}^x |f| = \int_{\mathbb{R}} |f|\chi_{[-x, x]} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \|f\|_1 \neq 0.$$

Por lo que existe  $x_0 > 0$  tal que

$$\int_{-x}^x |f| \geq \frac{\|f\|_1}{2} \quad \text{para cada } x > x_0.$$

Entonces,

$$\frac{1}{|2x|} \int_{-x}^x |f| \geq \frac{\|f\|_1/4}{|x|}$$

Tomando  $c := \|f\|_1/4$

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|2x|} \int_{-x}^x |f| \geq \frac{\|f\|_1/4}{|x|} = \frac{c}{|x|}.$$

### 2.3. Función maximal no tangencial y el teorema de Fatou

Para comenzar esta sección se define la función maximal no tangencial, intuitivamente esta función representa el maximo valor en un entorno no tangencial.

**Definición 2.3.1.** Fijado  $\alpha > 0$ , se consideran los sectores

$$\Gamma_\alpha(t) = \{z \in \mathcal{H} : |x - t| < \alpha y\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A un sector de esta forma se le denomina *región de aproximación no tangencial*

**Definición 2.3.2.** Si  $u$  es una función armónica en  $\mathcal{H}$ , la *función maximal no tangencial* de  $u$  en  $t \in \mathbb{R}$  se define por

$$u^*(t) := \sup_{z \in \Gamma_\alpha(t)} |u(z)|.$$

El valor de  $u^*$  depende del parámetro  $\alpha$ , pero una vez fijado  $\alpha$  se ignorará tal distinción.

**Teorema 2.3.3.** Sea  $u$  es armónica en  $\mathcal{H}$  y sea  $1 \leq p < \infty$ . Se supone que

$$\sup_y \int_{\mathbb{R}} |u(x + iy)|^p dx < \infty.$$

Si  $p > 1$ , entonces  $u^*(t) \in L^p$ , y

$$\|u^*\|_p^p \leq B_p \sup_y \int_{\mathbb{R}} |u(x + iy)|^p dx. \quad (2.14)$$



Si  $p = 1$ , entonces  $u^*$  es  $L^1$  débil, y

$$|\{t : u^*(t) > \lambda\}| \leq \frac{B_1}{\lambda} \sup_y \int_{\mathbb{R}} |u(x + iy)| dx. \quad (2.15)$$

La constante  $B_p$  depende solo de  $p$  y  $\alpha$ .

**Demostración.** Sea  $p > 1$ . Entonces por el Teorema 2.1.19(I) se tiene que  $u$  es la integral de Poisson de una función  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , y

$$\|f\|_p \leq \sup_y \left( \int |u(x + iy)| dx \right)^{1/p}.$$

El Teorema 2.2.10 dice que  $u^*(t) \leq A_\alpha Mf(t)$ , y en virtud del Teorema maximal de Hardy-Littlewood queda probada la ecuación (2.14).

Si  $p = 1$ , de nuevo por el Teorema 2.1.19(II) se sabe que  $u(z)$  es la integral de Poisson de una medida finita  $\mu$  en  $\mathbb{R}$  y

$$\int_{\mathbb{R}} |d\mu| \leq \sup_y \int_{\mathbb{R}} |u(x + iy)| dx,$$

ya que  $\mu$  es un límite débil-\* de medidas  $u(x + iy)dx, y \rightarrow 0$ . Se define

$$M(d\mu)(t) = \sup_{I \ni t} \left( \frac{|\mu|(I)}{|I|} \right).$$

La demostración del Teorema 2.2.10 se muestra que  $u^*(t) \leq A_\alpha M(d\mu)(t)$ . Y en la demostración del Teorema 2.2.15 (I) muestra que  $M(d\mu)(t) \in L^1_{\text{débil}}$  y

$$|\{t : M(d\mu)(t) > \lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda} \int d|\mu|,$$

entonces (2.15) se cumple.  $\square$

La función maximal no tangencial  $u^*$  será de mayor importancia que la función maximal de Hardy-Littlewood  $Mf$  para el propósito de esta memoria.

**Corolario 2.3.4.** Si  $u(z)$  es armónica en  $\mathcal{H}$  y si  $p > 1$ , entonces

$$\int \sup_y |u(x + iy)|^p dx \leq B_p \sup_y \int |u(x + iy)|^p dx.$$

**Demostración.** Resulta inmediato del Teorema 2.3.3 pues,

$$\int \sup_y |u(x + iy)|^p dx \leq \|u^*\|_p^p$$

y quedaría probado.  $\square$

**Definición 2.3.5.** Sea  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  se dice que  $F$  tiene un *límite no tangencial*  $\lambda$  en  $z \in D$ , si para cada  $\alpha < 1$ ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F(z_j) = \lambda$$

para cada  $\{z_j\}_{j=1}^\infty$  que converge a  $z$  en  $\Gamma_\alpha$ .

**Lema 2.3.6.** Si  $\nu$  es una medida finita singular en  $\mathbb{R}$ , entonces  $(P_y * \nu)(x)$  converge no tangencialmente casi siempre a 0.

**Demostración.** se supone que  $\nu \geq 0$ . Como  $\nu$  es singular, se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nu((t-h, t+h))}{2h} =_{c.s} 0. \quad (2.16)$$

Si (2.16) no fuese cierta, existiría un conjunto compacto  $K$  tal que  $|K| > 0$ ,  $\nu(K) = 0$ , y

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{\nu((t-h, t+h))}{2h} > a > 0, \quad \text{para cada } t \in K.$$

Por definición de compacto para cada recubrimiento abieto se puede obtener un subrecubrimiento finito del mismo, en este caso de intervalos  $I_j$  tales que  $\nu(\cup_j I_j) = \sum_j \nu(I_j) < \varepsilon$  y tales que  $\nu(I_j) > a|I_j|$ . En virtud del Lema 2.2.12, a partir de la familia  $\{I_j\}_j$  se puede obtener una nueva familia de intervalos disjuntos dos a dos  $\{J_i\}_i$  que cumplen que,

$$|K| \leq 2 \sum_i |J_i| < \frac{2}{a} \sum_i \nu(J_i) < \frac{2\varepsilon}{a},$$

lo cual es absurdo.

Se supone que (2.16) se cumple para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Sea  $z \in \Gamma_\alpha(t)$  y se supone sin pérdida de generalidad y para mayor sencillez que  $\operatorname{Re} z = t$ . Como  $\nu \geq 0$ , se tiene

$$u_\nu(t) = (P_y * \nu)(t) = \int_{|s-t| < Ay} P_y(t-s) d\nu(s) + \int_{|s-t| \geq Ay} P_y(t-s) d\nu(s).$$

Por un lado,

$$\int_{|s-t| \geq Ay} P_y(t-s) d\nu(s) \leq \frac{1}{\pi A^2 y} \int_{\mathbb{R}} d\nu$$

y por otro,

$$\int_{|s| < Ay} P_y(s) d\nu(s) = \int P_y(s) \chi_{|s| < Ay} d\nu(s),$$

y aproximando  $P_y(s) \chi_{|s| < Ay}(s)$  por las función escalera usadas en la demostración del Teorema 2.2.10, se tiene que

$$\int_{|s-t| < Ay} P_y(t-s) d\nu(s) \leq \sup_{h < Ay} \frac{\nu((t-h, t+h))}{2h}.$$

Tomando  $A = A(y)$  tal que  $Ay \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$  pero  $A^2 y \xrightarrow{y \rightarrow 0} \infty$  por tanto si (2.16) se cumple,  $P_y * \nu(t) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ . El razonamiento para  $|x-t| < \alpha y$  es análogo.  $\square$

El teorema de Fatou que se enuncia a continuación se recoge en su clásico artículo [13], escrito no mucho después de la introducción de la integral de Lebesgue.

**Teorema 2.3.7 (de Fatou).** Sea  $u(z)$  armónica en  $\mathcal{H}$ , sea  $1 \leq p \leq \infty$  y se asume

$$\sup_y \|u(x + iy)\|_{L^p(dx)} < \infty.$$

Entonces para casi todo  $t$  el límite no tangencial

$$\lim_{\Gamma_\alpha(t) \ni z \rightarrow t} u(z) = f(t)$$

existe.

Si  $p > 1$ ,  $u(z)$  es la integral de Poisson de la función de valores en la frontera  $f(t)$ , y si  $1 < p < \infty$ ,

$$\|u(x + iy) - f(x)\|_p \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0.$$

Si  $p = 1$ , entonces  $u(z)$  es la integral de Poisson de una medida finita  $\mu$  en  $\mathbb{R}$ , y  $\mu$  está relacionada con el valor de la función de valores en la frontera  $f(t)$  como

$$d\mu = f(t)dt + d\nu,$$

donde  $d\nu$  es singular con respecto de la medida de Lebesgue.

**Demostración.** Sea  $1 \leq p < \infty$  y se supone que  $u(z)$  es la integral de Poisson de  $f \in L^p$ . Se va a demostrar que  $u(z)$  tiene límite no tangencial  $f(t)$  para casi todo  $t$ . Sin pérdida de generalidad se supone que  $f$  es real. Sea

$$\Omega_f(t) = \limsup_{z \rightarrow t} u(z) - \liminf_{z \rightarrow t} u(z), \quad z \in \Gamma_\alpha(t).$$

Entonces en virtud del Teorema maximal de Hardy-Littlewood

$$\Omega_f(t) \leq 2u^*(t) \leq 2A_\alpha Mf(t),$$

por lo que  $\Omega_f$ , al igual que los límites superior e inferior, es finito casi siempre ya que este es la diferencia de dichos límites. La función  $\Omega_f(t)$  representa la oscilación no tangencial de  $u$  en  $t$  y además,  $u$  tiene límite no tangencial en  $t$  si, y solo si,  $\Omega_f(t) = 0$ . Por el Teorema 2.3.3 y por la Desigualdad de Chebyshev si  $p > 1$ , se tiene

$$m_{\Omega_f}(\varepsilon) = |\{t : \Omega_f(t) > \varepsilon\}| \leq B_p \left(\frac{2}{\varepsilon} \|f\|_p\right)^p. \quad (2.17)$$

Ahora, si  $g \in L^p \cap g \in C_0(\mathbb{R})$ , entonces por el Teorema 2.1.14,  $\Omega_g \equiv 0$  para todo  $t$ , por lo que  $\Omega_f = \Omega_{f+g}$ . Tomando  $g \in C_0(\mathbb{R})$  de modo que  $\|f + g\|_p \leq \varepsilon^2$ , entonces

$$|\{t : \Omega_f(t) > \varepsilon\}| = |\{t : \Omega_{f+g}(t) > \varepsilon\}| \leq B_p \left(\frac{2}{\varepsilon} \|f + g\|_p\right)^p \leq c_p \varepsilon^p.$$

Entonces,  $\Omega_f(t) =_{c.s.} 0$  y  $u$  tiene límite no tangencial casi siempre. El límite coincide con  $f(t)$  casi siempre ya que  $u(x, y)$  converge en norma en  $L^p$  a  $f(x)$ . Esto prueba el teorema en el caso  $1 < p < \infty$ , y suponiendo que  $u(z)$  es la integral de Poisson de una función en  $L^1$ , el caso  $p = 1$ . Sea  $p = \infty$  y sea  $u(z) = (P_y * f)(x)$  con  $f(t) \in L^\infty$ . Sea  $A > 0$ ,  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$  donde  $f_2(t) \equiv 0$  en  $(-A, A)$  y  $f_1 \in L^1$ . Entonces  $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$ , donde  $u_j(z) = (P_y * f_j)(x)$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . Se probó en el Lema 2.1.17 que  $u_2(z)$  tiene límite  $f_2(t) = 0$  en  $(-A, A)$ , y por lo anterior,  $u_1$  tiene límite no tangencial casi siempre igual a  $f_1$ . Por ello,  $u$  converge no tangencialmente casi siempre a  $f(t)$  en  $(-A, A)$ . Tomando  $A \rightarrow \infty$  queda probado el caso  $p = \infty$ .

Ahora, se toma  $p = 1$ , suponiendo que

$$\sup_y \|u(x + iy)\|_{L^1(dx)} < \infty.$$

Entonces,  $u(z)$  es la integral de Poisson de una medida finita  $\mu$  en  $\mathbb{R}$ . Tomando  $d\mu = f(t)dt + d\nu$ , donde  $d\nu$  es singular a  $dx$ , y sea  $u_1(z) = (P_y * f)(x)$ ,  $u_2(z) = (P_y * \nu)(x)$ . Entonces  $u(z) = u_1(z) + u_2(z)$ . Antes se probó que  $u_1(z)$  tiene límite no tangencial casi siempre  $f(t)$ . Como  $\nu$  es singular el Lema 2.3.6 muestra que  $u_2(z)$  tiene límite no tangencial nulo casi siempre, y con esto queda demostrado el resultado.  $\square$

**Definición 2.3.8.** Una medida positiva  $\sigma$  en  $\mathcal{H}$  es una *medida de Carleson* si existe una constante  $c$  tal que

$$\sigma(Q) \leq ch \quad (2.18)$$

para todos los cuadrados  $Q = \{x_0 < x < x_0 + h, 0 < y < h\}$ . La más pequeña de estas constantes  $N(\sigma) := \inf\{c : \sigma(Q) \leq ch\}$  es la *norma de Carleson* de  $\sigma$ .

**Lema 2.3.9.** Sea  $\sigma$  una medida positiva en  $\mathcal{H}$ , y sea  $\alpha > 0$ . Entonces  $\sigma$  es una medida de Carleson si, y solo si, existe  $A = A(\alpha)$  tal que

$$\sigma(\{|u(z)| > \lambda\}) \leq A|\{t : u^*(t) > \lambda\}|, \quad \lambda > 0 \quad (2.19)$$

para cada función armónica en  $\mathcal{H}$ , donde  $u^*(t)$  es la función maximal no tangencial de  $u(z)$  sobre el sector  $\{|x - t| < \alpha y\}$ . Si  $A$  es la menor constante que cumple (2.19), entonces

$$c_1(\alpha)A \leq N(\sigma) \leq c_2(\alpha)A.$$

**Demostración.** Se toma  $\alpha = 1$ . La demostración para otro  $\alpha$  es similar. Se supone que  $\sigma$  es una medida de Carleson. El conjunto abierto  $\{t : u^*(t) > \lambda\}$  es la unión de una sucesión disjunta de intervalos abiertos  $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ , con centros  $c(I_j)$ . Sea  $T_j$  la "tienda" (véase la Figura 2.5)

$$T_j = \{z : |x - c(I_j)| + y < |I_j|/2\}, \quad z = x + iy \in \mathcal{H}$$

un triángulo rectángulo isósceles con hipotenusa  $I_j$  y cuya altura es la mitad de la longitud de la base, además al tomar cualquier punto de la base de estas tiendas y considerando por cada punto su correspondiente sector  $\Gamma_\alpha$  el punto superior de la tienda estará contenido en dichos sectores. Si  $|u(z)| > \lambda$ , entonces  $u^*(t) > \lambda$  en el intervalo  $\{|t - x| < y\}$  pues  $z \in \Gamma_1(t)$ , y este intervalo está contenido en algún  $I_j$  (ver la Figura 2.5). Consecuentemente

$$\{z : |u(z)| > \lambda\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} T_j.$$

Por (2.18) se tiene

$$\begin{aligned} \sigma(\{z : |u(z)| > \lambda\}) &\leq \sum_j \sigma(T_j) \\ &\leq N(\sigma) \sum_j |I_j| \\ &= N(\sigma) |\{t : u^*(t) > \lambda\}| \end{aligned}$$

y (2.19) se cumple.

Recíprocamente, sea  $I$  un intervalo  $\{x_0 < t < x_0 + h\}$  y sea  $u(z) = P_y * f(x)$  con  $f(x) = 4\lambda\chi_I(x)$ . Entonces se pasa a demostrar que  $u(z) > \lambda$  en el cuadrado  $Q$  con base  $I$ ,

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt = \frac{4\lambda y}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2}$$

Se estudia esta última integral

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{dt}{(x-t)^2 + y^2} &= \frac{y}{y^2} \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{t-x}{y}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{y} \left[ \arctan\left(\frac{t-x}{y}\right) \right]_{t=x_0}^{x_0+h} \\ &= \frac{1}{y} \left[ \arctan\left(\frac{x_0+h-x}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x_0-x}{y}\right) \right]. \end{aligned}$$

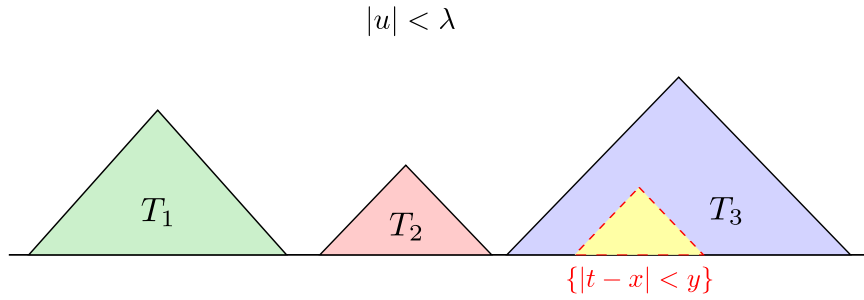


Figura 2.5: Tiendas  $T_j$  donde  $|u| < \lambda$ .

Si  $a < 0 < b$  y  $b - a > 1$  se tiene que  $\arctan b - \arctan a > \frac{\pi}{4}$ . Entonces, como  $\frac{h}{y} > 1$ , se concluye que

$$u(z) = \frac{4\lambda}{\pi} \left[ \arctan \left( \frac{x_0 + h - x}{y} \right) - \arctan \left( \frac{x_0 - x}{y} \right) \right] > \frac{4\lambda}{\pi} \frac{\pi}{4} = \lambda.$$

en virtud de (2.19) y el Teorema 2.2.15,

$$\sigma(Q) \leq A |\{t : u^*(t) > \lambda\}| \leq \frac{AC}{\lambda} \|f\|_1 \leq 4ACH$$

y  $\sigma$  es una medida de Carleson.

□

La prueba del lema anterior se debe a E. M. Stein. El Teorema 2.3.10 viene recogido en [7] y [8].

**Teorema 2.3.10 (de Carleson).** Sea  $f \in L^p(\mathbb{R})$  y se denota por  $u(z)$  a la integral de Poisson de  $f$ . Si  $\sigma$  es una medida positiva en el semiplano superior, entonces los siguientes asertos son equivalentes.

- (I)  $\sigma$  es una medida de Carleson.
- (II) Para  $1 < p < \infty$ , y para cada  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $u \in L^p(\sigma)$ .
- (III) Para  $1 < p < \infty$ ,

$$\int_{\mathcal{H}} |u(z)|^p d\sigma \leq C_p \int_{\mathbb{R}} |f|^p dt, \quad f \in L^p.$$

- (IV) Para cada  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , se tiene la desigualdad de la función de distribución

$$\sigma(\{z : |u(z)| > \lambda\}) \leq \frac{c_1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt, \quad \lambda > 0.$$

**Demostración.** Si (I) se cumple, entonces haciendo uso de por (2.19) y el Teorema 2.3.3 se tiene (IV), De nuevo, suponiendo (I) y en virtud del Teorema 2.1.14, las Observaciones 2.1.15 y (2.5) se tiene (III). Claramente, (III) implica (II), y si (II) se cumple para algún  $p$ , entonces el Teorema del grafo cerrado para espacios de Banach muestra que (III) se cumple para el mismo valor de  $p$ , se detalla esto un poco más: Se define el operador  $T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\sigma)$  definido por  $f \mapsto u$  (manda a cada función con su integral de Poisson), este operador claramente es lineal pues viene dado por una integral, haciendo uso del Teorema del Grafo Cerrado se tendría que  $T$  es continuo lo que equivale a que  $T$  es acotado (el aserto (III)). Considerando las sucesiones de funciones  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  y  $\{u_n\}_{n=1}^\infty$  siendo  $u_n$  la integral de Poisson de cada  $f_n$ , de modo que si  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ , por (2.5),

$$(f_n, u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (f, v).$$

Se sabe que  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  en  $L^p(\mathbb{R})$  y  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v$  en  $L^p(\sigma)$ . Existe  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$  tal que  $u_{n_k}(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u(z)$  casi siempre, por tanto

$$u(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_y * f_{n_k}(x) = P_y * f(x) = u_f(z).$$

Entonces  $f \mapsto u$  y el grafo es cerrado. Ahora se supone que (IV) se cumple o que (III) se cumple para algún  $p$ ,  $1 < p < \infty$ . Tomando  $I = \{x_0 < t < x_0 + h\}$  y tomando  $u(z) = P_y * f(x)$ ,  $f(t) = 4\chi_I(t)$ . Entonces  $\|f\|_p = 4h^{1/p}$  y  $u(z) > 1$  en  $Q = I \times (0, h)$ . Por tanto

$$\sigma(Q) \leq \sigma(\{z : |u(z)| > 1\}) \leq C_p \int |f|^p dt = 4^p C_p h,$$

y  $\sigma(Q) \leq N(\sigma)h$  se cumplen. Por un lado si se cumple (IV) e tiene que

$$\sigma(Q) \leq \sigma(\{z : |u(z)| > 1\}) \leq C_1 \leq_{\mathbb{R}} |f| = 4C_1 h,$$

y si se cumple (III),

$$\sigma(Q) \leq \sigma(\{z : |u(z)| > 1\}) \leq \int_{\mathcal{H}} |u(z)|^p d\sigma \leq C_p \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt,$$

y así queda demostrado el resultado. □

**Observación 2.3.11.** Si (II) o (III) se cumplen para un valor de  $p$ ,  $1 < p < \infty$ , entonces (I) se cumple. Las constantes  $C_p$  y  $N(\sigma)$  solo dependen de  $p$  y de  $\sigma$ . De hecho, si (I) se cumple, se puede tomar  $C_p = N(\sigma)B_p$  con  $\alpha = 1$  donde  $B_p$  es la constante del Teorema 2.3.3. Si (III) o (IV) se cumplen entonces (2.18) se cumple con  $N(\sigma) \leq 4^p C_p$ .

## 2.4. Funciones subarmónicas

Las funciones subarmónicas son de vital importancia en el análisis complejo y en las ecuaciones en derivadas parciales. En esta sección se orientará la teoría de funciones subarmónicas a los objetivos del trabajo, en concreto para introducir los espacios de Hardy en el siguiente capítulo. La teoría de funciones subarmónicas se recoge en [42] y [20].

**Definición 2.4.1.** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto en el plano. Una *función subarmónica* en  $\Omega$  es una función  $v : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  tal que

(I)  $v$  es semicontinua superiormente en  $\Omega$

$$v(z_0) \geq \lim_{z \rightarrow z_0} v(z), \quad z_0 \in \Omega.$$

(II) Para cada  $z_0 \in \Omega$  existe  $r(z_0) > 0$  tal que el disco  $D(z_0, r(z_0)) = \{z : |z - z_0| < r(z_0)\}$  está contenido en  $\Omega$  y tal que para cada  $r < r(z_0)$ ,

$$v(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} v(z) dx dy. \quad (2.20)$$

La semicontinuidad garantiza que  $v$  es medible y acotada sobre cualquier subconjunto compacto de  $\Omega$ . Por lo tanto la integral en (2.20) converge o diverge a  $-\infty$ .

**Proposición 2.4.2.** Toda función armónica es subarmónica.

**Ejemplo 2.4.3.** Se considera la función  $v(z) = \log |f(z)|$ , donde  $f(z)$  es una función holomorfa en  $\Omega$ . Es claro que  $v$  es semicontinua superiormente. La condición (2.20) es trivial en los puntos  $z_0$  tales que  $f(z_0) = 0$ . Si  $f(z_0) \neq 0$ , entonces  $\log f(z)$  tiene una determinación univaluada en un entorno de  $z_0$ , y  $v(z) = \operatorname{Re}(\log f(z))$  es armónica en ese entorno. Por tanto (2.20) se cumple con igualdad si  $f(z_0) \neq 0$ .

**Lema 2.4.4 (Desigualdad de Jensen).** Sea  $(X, \mu)$  un espacio medible tal que  $\mu$  es una medida de probabilidad,  $\mu(X) = 1$ . Sea  $v \in L^1(\mu)$  una función real, y sea  $\varphi(t)$  una función convexa en  $\mathbb{R}$ . Entonces

$$\varphi\left(\int_X v d\mu\right) \leq \int_X \varphi(v) d\mu$$

La desigualdad de Jensen también es cierta si  $\int v d\mu = -\infty$ , definiendo  $\varphi$  en  $t = -\infty$  y creciente en  $[-\infty, \infty)$ .

**Demostración.** La convexidad de  $\varphi$  significa que  $\varphi(t)$  es el supremo de las funciones lineales que se encuentran debajo de  $\varphi$ :

$$\varphi(t) = \sup\{at + b : at + b \leq \varphi(t), t \in \mathbb{R}\}.$$

Para cualquier  $at + b \leq \varphi(t)$  se tiene

$$a\left(\int_X v d\mu\right) + b = \int_X (av + b) d\mu \leq \int_X \varphi(v) d\mu,$$

y el supremo de los términos de la izquierda es  $\varphi(\int v d\mu)$ . □

**Observación 2.4.5.** Otros autores llaman desigualdad de Jensen a

$$\log |f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta$$

en este trabajo la desigualdad de Jensen será la expresión que aparece en el lema anterior. Dado que el logaritmo es una función cóncava, las dos expresiones candidatas a denominarse "desigualdad de Jensen" van en direcciones opuestas.

**Teorema 2.4.6.** Sea  $v$  una función subarmónica en  $\Omega$ , y sea  $\varphi$  una función convexa creciente en  $[-\infty, \infty)$ , continua en  $t = -\infty$ . Entonces  $\varphi \circ v$  es una función subarmónica en  $\Omega$ .

**Demostración.** Como toda función convexa es continua en  $\mathbb{R}$ , la función  $\varphi$  es continua en  $[-\infty, \infty)$ , por lo que  $\varphi \circ v$  es semicontinua superiormente. Si  $z_0 \in \Omega$  y si  $r < r(z_0)$ , se tiene que

$$\varphi(v(z_0)) \leq \varphi\left(\frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(z_0, r)} v(z) dx dy\right).$$

En virtud de la desigualdad de Jensen

$$\varphi(v(z_0)) \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(z_0, r)} \varphi(v(z)) dx dy,$$

que es la condición (2.20) para  $\varphi \circ v$ . □

**Ejemplo 2.4.7.** Si  $f(z)$  es holomorfa en  $\Omega$ , entonces  $|f(z)|^p = \exp(p \log |f(z)|)$  es una función subarmónica en  $\Omega$  si  $0 < p < \infty$ , y

$$\log^+ |f(z)| = \max\{\log |f(z)|, 0\}$$

es también una función subarmónica en  $\Omega$ .

**Observación 2.4.8.** Nótese el contraste con la situación para funciones armónicas, donde se tiene que  $|u|^p$  es subarmónica solo si  $p \geq 1$  (por la desigualdad de Hölder).

**Teorema 2.4.9.** Sea  $v : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  una función semicontinua superiormente. Entonces  $v$  es subarmónica en  $\Omega$  si, y solo si, se cumplen las siguientes condiciones: Si  $u$  es una función armónica en un subconjunto abierto acotado  $W$  de  $\Omega$  y si

$$\limsup_{z \in W \rightarrow \xi} (v(z) - u(z)) \leq 0$$

para cada  $\xi \in \partial W$ , entonces

$$v(z) \leq u(z), \quad z \in W.$$

**Demostración.** Se supone que  $v$  es subarmónica en  $\Omega$ . Sean  $u$  armónica y  $W$  un subconjunto abierto y acotado de  $\Omega$  como en el enunciado. Entonces,  $V(z) = v(z) - u(z)$  es subarmónica en  $W$  y

$$\limsup_{z \in W \rightarrow \xi} V(z) \leq 0$$

para cada  $\xi \in \partial W$ . Usando el Principio del módulo máximo vamos a ver que se tiene que  $V \leq 0$  en  $W$ . Se puede suponer que  $W$  es conexo. Sea  $a = \sup_{z \in W} V(z)$  y se supone por reducción al absurdo, que  $a > 0$ . Sea  $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$  una sucesión en  $W$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(z_n) = a$ . Como  $a > 0$  los puntos  $z_n$  no pueden tener puntos de acumulación en  $\partial W$  pero sí admiten al menos un punto de acumulación  $z \in W$ . Por la semicontinuidad  $V(z) = a$  y el conjunto

$$E = \{z \in W : V(z) = a\}$$

es no vacío. El conjunto  $E$  es cerrado debido a la semicontinuidad superior de  $V$  cuyo máximo es  $a$ . Si  $z_0 \in E$  entonces como  $V(z) \leq a$  en  $W$  en virtud de (2.20) se muestra que  $V(z) =_{c.s} a$  en  $D(z_0, r)$ , para un  $r > 0$  adecuado. Por lo tanto  $E$  es denso en  $D(z_0, r)$ . Como  $E$  es cerrado se tiene que  $D(z_0, r) \subseteq E$  y  $E$  es abierto pero claro. Como se había supuesto que  $W$  es conexo se llega a un absurdo y se concluye que  $a \leq 0$ . Recíprocamente, sea  $z_0 \in \Omega$  y sea  $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$ . Como  $v$  es semicontinua superiormente existe una sucesión de funciones continuas  $\{u_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$



decreciente cuyo límite es  $v(z)$  en  $\partial D(z_0, r)$ . Sea  $U_n$  la función armónica en  $D(z_0, r)$  con valores en el borde  $u_n(z)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Haciendo uso de la fórmula integral de Poisson para  $D$  se obtiene  $U_n$  a través de  $u_n$  y por tanto  $U_n$  es continua en  $\overline{D}(z_0, r)$ . Por hipótesis se tiene que  $v(z_0) \leq U_n(z_0)$  y, entonces

$$v(z_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

por el Teorema de la convergencia monótona. Multiplicando por  $2s$ , integrando respecto de  $s$  en  $(0, r)$  y dividiendo por  $r^2$  en ambos lados de la igualdad se obtiene (2.20).  $\square$

**Observación 2.4.10.** Lo anterior prueba que si  $v$  es subarmónica en  $\Omega$ , entonces (2.20) se verifica para cualquier  $r > 0$  tal que  $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$ . Esto también muestra que se puede reemplazar las medias de área por medias circulares en (2.20). La condición

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

$0 < r < r(z_0)$ , es por tanto equivalente a (2.20).

**Corolario 2.4.11.** Si  $\Omega$  es un conjunto abierto conexo y  $v(z)$  es una función subarmónica en  $\Omega$  tal que  $v(z) \neq -\infty$ , entonces cuando  $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \neq -\infty.$$

**Demostración.** Sea  $\{u_n\}$  una sucesión de funciones continuas decreciente a  $v$  en  $\partial D(z_0, r)$ , y sea  $U_n$  la extensión armónica de  $u_n$  a  $D(z_0, r)$ . Si

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = -\infty,$$

como  $v$  es una función acotada superiormente y como los núcleos de Poisson están acotados y son funciones positivas, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_z(\theta) v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = -\infty, \quad |z| < r.$$

Entonces  $U_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$  para cada  $z \in D(z_0, r)$  y por el Teorema 2.4.9 se tiene que  $v = -\infty$  en  $D(z_0, r)$ . Por tanto, el conjunto  $\{z \in \Omega : v(z) \equiv -\infty \text{ en un entorno de } z\}$  se tendría que es abierto y cerrado y eso es absurdo.  $\square$

**Teorema 2.4.12.** Sea  $v(z)$  una función subarmónica en el disco unitario  $D$ . Suponiendo  $v(z) \neq -\infty$ . Para  $0 < r < 1$ , sea

$$v_r(z) = \begin{cases} v(z) & \text{si } |z| \geq r \\ \frac{1}{2\pi} \int P_{z/r}(\theta) v(re^{i\theta}) d\theta & \text{si } |z| < r \end{cases}$$

Entonces,  $v_r(z)$  es una función subarmónica en  $D$ ,  $v_r(z)$  es armónica en  $|z| < r$ ,  $v_r(z) \geq v(z)$ ,  $z \in D$ , y  $v_r(z)$  es una función creciente de  $r$ .

**Demostración.** Por el Corolario 2.4.11 y por la tercera sección del presente capítulo se sabe que  $v_r$  es finita y armónica en  $D(0, r)$ . Para ver que  $v_r$  es semicontinua superiormente en un punto  $z_0 \in \partial D(z_0, r)$  hay que probar que

$$v(z_0) \geq \limsup_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ |z| < r}} v_r(z).$$

Esto se sigue de la semicontinuidad de  $v$  y las propiedades del núcleo de Poisson. Tomando  $z_0 = re^{i\theta_0}$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $v(re^{i\theta}) < v(z_0) + \varepsilon$  si  $|\theta - \theta_0| < \delta$ . Entonces si  $z \in D(0, r) = \{z : |z| < r\}$  y  $|z - z_0| < \delta$ ,

$$\begin{aligned} v_r(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{z/r}(\theta) v(re^{i\theta}) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| \leq \delta} P_{z/r}(\theta) (v(z_0) + \varepsilon) d\theta + \frac{1}{2\pi} \left( \sup_{\theta} v(re^{i\theta}) \right) \int_{|\theta - \theta_0| > \delta} P_{z/r}(\theta) d\theta \\ &\leq v(z_0) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto,  $v_r$  es semicontinua superior.

Si se considera de nuevo la sucesión  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  decreciente a  $v$  en  $\partial D(0, r)$ . Entonces haciendo uso de un razonamiento análogo al usado en el Corolario 2.4.11 se tiene que  $v(z) \leq v_r(z)$ . Como  $v$  es subarmónica, esta desigualdad refleja que  $v_r(z)$  satisface (2.20) en cada punto  $z_0$  con  $|z_0| = r$ . Entonces,  $v_r$  es subarmónica en  $D$ . Si  $r > s$ , entonces  $(v_s)_r$ , y para cualquier función subarmónica  $v$ ,  $v_r \geq v$ , las funciones  $v_r$  son crecientes para  $r$ .  $\square$

**Corolario 2.4.13.** Si  $v$  es una función subarmónica en  $D$ , entonces

$$m_v(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta$$

es una función creciente de  $r$ .

La función subarmónica  $v$  en  $\Omega$  tiene una mayorante armónica si existe una función armónica  $U$  tal que  $v(z) \leq U(z)$  a lo largo de  $\Omega$ . Si  $\Omega$  es conexo, si  $v(z) \neq -\infty$  en  $\Omega$ , y si  $v$  tiene una mayorante armónica, entonces el proceso de Perron para resolver el problema de Dirichlet produce la *menor mayorante armónica*  $u$ , que es una función que mayor a  $v$  y satisfaciendo  $u(z) \leq U(z)$  para cualquier otra mayorante armónica  $U$  de  $v$ . En  $D$  o en  $\mathcal{H}$ , dichas mayorantes se pueden obtener gracias a los núcleos de Poisson.

**Teorema 2.4.14.** Sea  $v(z)$  un función subarmónica en el disco unitario  $D$ . Entonces  $v$  tiene una función armónica mayorante si, y solo si,

$$\sup_{r>0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta = \sup_r v_r(0) < \infty$$

El menor mayorante armónico de  $v(z)$  es entonces

$$u(z) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{z/r}(\theta) v(re^{i\theta}) d\theta = \lim_{r \rightarrow 1} v_r(z).$$

**Demostración.** Si  $\sup_{r>0} v_r(0)$  es finito en virtud del Teorema de Harnack las funciones  $v_r$  crecen a una función armónica finita  $u$  en  $D$ . Como  $v(z) \leq v_r(z)$ , se tiene que  $u(z)$  es mayorante armónica de  $v(z)$ . Recíprocamente, si  $U(z)$  es armónica en  $D$  y si  $U(z) \geq v(z)$  en  $D$ , entonces por el Teorema 2.4.9,  $U(z) \geq v_r(z)$  para cada  $r$ . Como consecuencia  $\sup_{r>0} v_r(0) < \infty$  y de nuevo el límite  $u(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} v_r(z)$  es finito y armónico. Como  $v_r(z) \leq U(z)$  se tiene que  $u(z) \leq U(z)$  y se concluye que  $u$  es la menor mayorante armónica.  $\square$

Por continuidad  $u(z) = \lim_{r \rightarrow 1} u(rz)$ , la menor mayorante armónica de  $v(z)$  también puede ser escrita como

$$u(z) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int P_z(\theta) v(re^{i\theta}) d\theta.$$

**Teorema 2.4.15.** Sea  $v(z)$  una función subarmónica en el semiplano superior  $\mathcal{H}$ . Si

$$\sup_y \int_{\mathbb{R}} |v(x + iy)| dx = M < \infty,$$

entonces  $v(z)$  tiene una mayorante armónica en  $\mathcal{H}$  de la forma

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}} P_y(x - t) d\mu(t),$$

donde  $\mu$  es una medida signada finita en  $\mathbb{R}$ .

**Demostración.** La desigualdad, tomando  $z = x + iy, y > 0$

$$v(z) \leq \frac{2}{\pi y} \sup_{\eta} \int |v(\xi + i\eta)| d\xi, \quad (2.21)$$

se prueba de manera similar a como se probó (2.9) en la demostración del Teorema 2.1.19. Se fija  $y_0 > 0$  y se considera la función armónica

$$u(z) = u_{y_0}(z) = \int P_{y-y_0}(x - t) v(t, y_0) dt,$$

definida en el semiplano  $\{y > y_0\}$ . Se prueba ahora que  $v(z) \leq u(z)$  en  $y > y_0$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y sea  $A > 0$ , sea  $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones decreciente a  $v(t + iy_0)$  en  $[-A, A]$  y sea

$$U_n(z) = \int_{-A}^A P_{y-y_0}(x - t) u_n(t) dt, \quad y > y_0,$$

la integral de Poisson de  $u_n$ . La función

$$V(z) = v(z) - \varepsilon \log |z + i| - U_n(z),$$

es subarmónica en  $\{y > y_0\}$ . Con  $\varepsilon > 0$  fijado se tiene por (2.21) que  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(z) = -\infty$ , Además por (2.21)

$$\limsup_{z \rightarrow (t, y_0)} V(z) \leq 0$$

para  $|t| \geq A$ . Si  $|t| < A$ , entonces

$$\limsup_{z \rightarrow (t, y_0)} V(z) \leq v(t, y_0) - u_n(t, y_0) \leq 0.$$

En virtud del Teorema 2.4.9 se deduce que  $V(z) \leq 0$  en  $\{y > y_0\}$ , Haciendo  $n \rightarrow \infty$ , entonces  $A \rightarrow \infty$  y luego  $\varepsilon \rightarrow 0$  se deduce  $v(z) \leq u(z)$  en  $\{y > y_0\}$ . Las medidas  $v(t, y_0) dt$  permanecen acotadas cuando  $y_0 \rightarrow 0$  y si  $d\mu(t)$  es un punto de acumulación débil-\*, entonces

$$\lim_{y \rightarrow 0} u_{y_0}(z) = \int_{\mathbb{R}} P_y(x - t) d\mu(t),$$

es un mayorante armónico de  $v(z)$ . □

**Observación 2.4.16.** Para terminar con esta sección y por ello con el capítulo mencionar que la función  $u(z)$  es de hecho la menor mayorante armónica de  $v(z)$ .



## Capítulo 3

# Espacios de Hardy $H^p$

Este capítulo tiene como objetivo la exposición rigurosa de los espacios de Hardy llamados así en referencia a G. H. Hardy. Estos espacios gozan de numerosas e interesantes propiedades concernientes a factorizaciones, valores en la frontera y representaciones de Cauchy en términos de medidas en el borde del disco. Una introducción conveniente a esta materia es a través de las funciones subarmónicas que ya fueron introducidas en el anterior capítulo. En concreto, este capítulo pondrá especial énfasis en los resultados y técnicas que se usarán en los capítulos posteriores estando estas sustentadas en tres pilares: primero las funciones maximales no tangenciales, después la subarmonicidad de  $|f|^p$  y  $\log |f|$  donde  $f$  es una función holomorfa y por último el uso de los productos de Blaschke, un tipo particular de funciones que nos servirán para dar respuesta al principal objetivo de este trabajo. Hay dos teorías de espacios  $H^p$ , una para el disco y otra para el semiplano superior. Se introducirán sendas teorías de manera simultánea.

### 3.1. Definiciones y resultados fundamentales de los espacios $H^p$

**Definición 3.1.1.** Sea  $0 < p < \infty$  y sea  $f(z)$  una función holomorfa en  $D$ ,  $f \in \mathcal{H}(D)$ . Se dice que  $f \in H^p = H^p(D)$  si

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \|f\|_{H^p}^p < \infty,$$

es decir,  $H^p(D) = \{f \in \mathcal{H}(D) : \|f\|_{H^p} < \infty\}$ .

Si  $p = \infty$ , se dice que  $f \in H^\infty(D)$  si  $f(z)$  es una función holomorfa acotada en  $D$  y se escribe

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Así la bola unitaria cerrada de  $H^\infty$ ,  $\{f \in H^\infty : \|f\|_\infty \leq 1\}$  es la clase  $\mathcal{B}$  considerada en el Capítulo 1.

Para  $p < \infty$  los resultados sobre funciones subarmónicas en el Capítulo 2 muestran que  $f \in H^p$  si, y solo si, la función subarmónica  $|f(z)|^p$  tiene un mayorante armónico, y  $\|f\|_{H^p}^p$  es el valor del menor mayorante armónico en  $z = 0$ . Esta segunda definición de  $H^p$  en términos de mayorantes armónicos es conformemente invariante.

**Proposición 3.1.2.** Si  $1 \leq p < q \leq \infty$ , entonces  $H^q(D) \subseteq H^p(D)$  y para  $f \in H^q(D)$ ,

$$\|f\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^q}.$$

**Demostración.** La desigualdad que involucra a las normas se deduce de la desigualdad de Hölder si  $q < \infty$  y de acotación superior para  $q = \infty$ . Tomando supremos para  $z \in D$  las desigualdades se preservan.  $\square$

**Ejemplo 3.1.3.** Consideramos las funciones

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha},$$

con  $\alpha > 0$ . Fijado  $p$ , esta función pertenece a  $H^p(D)$  si, y solo si,  $\alpha p < 1$ .

**Lema 3.1.4.** Sea  $f \in H^p(D)$ . Entonces, existe  $C_p > 0$  para cada  $z \in D$ ,

$$|f(z)| \leq C_p \frac{\|f\|_{H^p}}{(1-|z|)^{1/p}}.$$

**Demostración.** Si  $p = \infty$  es trivial, por lo que se supone que  $p$  es finito. Sea  $r$  tal que  $|z| < r < 1$ , y sea  $\gamma_r = \partial D(0, r)$  con orientación antihoraria. Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Tomando  $w = re^{it}$ , se tiene  $dw = ire^{it} dt$ , por lo que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{1 - \frac{z}{r} e^{-it}} dt.$$

Si  $z = |z|e^{i\theta}$ ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{1 - \frac{|z|}{r} e^{-i(\theta-t)}} dt.$$

Por la desigualdad de Hölder, tomando  $\frac{1}{2\pi} = (\frac{1}{2\pi})^{1/p} (\frac{1}{2\pi})^{1/q}$

$$|f(z)| \leq \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{1/p} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\left|1 - \frac{|z|}{r} e^{-i(\theta-t)}\right|^q} dt \right)^{1/q},$$

donde  $q$  es el exponente dual de  $p$ . Haciendo uso del cambio de variable  $v = t - \theta$  y usando la periodicidad del integrando, se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\left|1 - \frac{|z|}{r} e^{-i(\theta-t)}\right|^q} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\left|1 - \frac{|z|}{r} e^{-iv}\right|^q} dv = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\left|1 - \frac{|z|}{r} e^{it}\right|^q} dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\left(1 - \frac{|z|}{r}\right)^q}.$$

Para  $q > 1$ ,

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq C_p \|f\|_{H^p} \left(1 - \frac{|z|}{r}\right)^{-\frac{q-1}{q}} \\ &= C_p \|f\|_{H^p} \left(1 - \frac{|z|}{r}\right)^{-1/p}. \end{aligned}$$

Haciendo tender  $r \rightarrow 1$ , queda probado.  $\square$

**Corolario 3.1.5.** La convergencia en  $H^p(D)$  implica la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de  $D$ .

**Demostración.** Sea  $K \subseteq D$  un subconjunto compacto. Entonces, existe  $r < 1$  tal que  $K \subseteq \overline{D}(0, r)$ . En virtud del Lema 3.1.4, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  en  $H^p(D)$ ,

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \leq C_p \frac{\|f_n - f\|_{H^p}}{(1-r)^{1/p}},$$

tiende a 0. □

Es usual definir funciones  $H^p$  en cualquier superficie de Riemann. Sin embargo, los espacios  $H^p$  en el semiplano superior  $\mathcal{H}$  tiene una definición especial que no es conformemente invariante.

**Definición 3.1.6.** Sea  $f$  una función holomorfa en  $\mathcal{H}$ . Para  $0 < p < \infty$ , se dice que  $f \in H^p = H^p(dx)$  si

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p dx = \|f\|_{H^p}^p < \infty.$$

Cuando  $p = \infty$  se escribe  $H^\infty$  para funciones holomorfas y acotadas en  $\mathcal{H}$ , y se dota a  $H^\infty$  de la norma  $\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathcal{H}} |f(z)|$ .

**Observación 3.1.7.** Nótese que la definición de  $H^p(dx)$  involucra todo  $y$ ,  $0 < y < \infty$ , en lugar de considerar solo valores pequeños de  $y$  como  $0 < y < 1$ .

**Ejemplo 3.1.8.** Si

$$g(z) = \frac{e^{-iz/p}}{(i+z)^{2/p}},$$

entonces  $\int |g(x+iy)|^p dx = \pi e^y (1+y)^{-1}$ , pero  $g(z) \notin H^p(dx)$ .

Para poder introducir ciertos resultados tanto para el disco como para el semiplano superior se establece relación entre sendos conjuntos. El caso más sencillo es cuando  $p = \infty$ : primero se considera la transformación  $T : D \rightarrow \mathcal{H}$  definida como

$$T(z) = i \frac{1-z}{1+z}$$

y su inversa

$$T^{-1}(w) = \frac{i-w}{i+w}$$

entonces

$$f \mapsto f \circ T^{-1} = T_\infty f$$

es una isometría de  $H^\infty(D)$  en  $H^\infty(dx)$ , por el simple hecho de que  $f$  está acotada si, y solo si,  $f \circ T^{-1}$  está acotada, y las dos  $\infty$ -normas son iguales (en este caso también es cierto para funciones armónicas acotadas pero no será cierto para  $p$  finito). En conclusión si  $p = \infty$  se tiene que  $f \circ T \in H^\infty(D)$  si, y solo si,  $f \in H^\infty(dx)$ . Esto no se cumple en el caso en el que  $p < \infty$ .  $H^p(D)$  y  $H^p(dx)$  no se transforman uno en el otro. Por ejemplo,  $H^p(D)$  contiene constantes no nulas, pero  $H^p(dx)$  no, como contraejemplo basta estudiar la función  $f \equiv 1$ . Para ver qué ha de ser modificado para lograr una equivalencia completa se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 3.1.9.** Sea  $f$  continua en  $\overline{D}$  y holomorfa en  $D$ . Si  $1 \leq p \leq \infty$ , la transformación

$$T_p f(z) = \frac{1}{\pi^{1/p}(z+i)^{2/p}} f \circ T^{-1}(z)$$

es una isometría de  $H^p(D)$  en  $H^p(dx)$ .

**Demostración.** Sea  $g = f \circ T^{-1}$ , esta función es continua en  $\overline{\mathcal{H}}$ . Se calcula la norma en  $L^p$  de  $g|_{\mathbb{R}}$ . Como la transformación de Cayley tiene una extensión continua a  $\overline{D} \setminus \{-1\}$ , y

$$\begin{aligned} T(e^{i\theta}) &= i \frac{(1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})}{(1 + e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})} \\ &= i \frac{-2i \sin(\theta)}{2(1 + \cos(\theta))} \\ &= -\cot \frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H} \end{aligned}$$

con el cambio de variable  $x = -\cot \frac{\theta}{2}$  se tiene

$$\begin{aligned} \|g|_{\mathbb{R}}\|_p &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f \circ T^{-1}(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left( \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{\sin^2(\theta/2)} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

La expresión anterior difiere de la norma en  $L^p$  de  $g$  en un factor  $\sin^{-2}(\theta/2)$  proveniente del cambio de variable. Esto sugiere que se ha de multiplicar  $g$  por una potencia de  $(T^{-1})' = \frac{-2i}{(x+i)^2}$ . Precisamente, para  $p < \infty$  y  $f \in H^p(D)$ , se tiene

$$T_p f(z) = \frac{1}{\pi^{1/p}(z+i)^{2/p}} f \circ T^{-1}(z)$$

que es una isometría de  $H^p(D)$  en  $H^p(dx)$ .  $\square$

Para el estudio de  $H^p(D)$  y  $H^p(dx)$  de manera simultánea, se introducen los dos lemas que vienen a continuación.

**Lema 3.1.10.** Si  $0 < p < \infty$  y si  $f \in H^p(dx)$ , entonces la función subarmónica  $|f(z)|^p$  tiene un mayorante armónico  $u$  en  $\mathcal{H}$  y

$$u(i) \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_{H^p}^p.$$

**Demostración.** Se considera la función subarmónica  $|f|^p$  como  $f \in H^p(dx)$  se cumplen las hipótesis del Teorema 2.4.15 que aporta el mayorante armónico buscado.  $\square$

**Lema 3.1.11.** Si  $0 < p < \infty$  y si  $f$  es una función holomorfa en el semiplano superior tal que la función subarmónica  $|f|^p$  tiene un mayorante armónico, entonces

$$F(z) = \frac{\pi^{-1/p}}{(z+i)^{2/p}} f(z)$$

está en  $H^p(dx)$  y

$$\|F\|_{H^p}^p \leq u(i) \tag{3.1}$$

donde  $u(z)$  es el menor mayorante armónico de  $|f(z)|^p$ .



**Demostración.** Sea  $u$  el menor mayorante armónico de  $|f|^p$ . La función armónica positiva  $u$  tiene la forma

$$u(z) = cy + \int_0^{2\pi} P_y(x-t) d\mu(t), \quad (3.2)$$

donde  $c \geq 0$  y donde  $\mu$  es una medida positiva en  $\mathbb{R}$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} d\mu(t) < \infty.$$

Como consecuencia,

$$|F(z)|^p = \frac{1}{\pi(x^2 + (1+y)^2)} |f(z)|^p,$$

entonces, por (3.2) y el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \int |F(x+iy)|^p dx &\leq c + \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{1+x^2} \int P_y(x-t) d\mu(t) dx \\ &= c + \int P_y(t) \int P_1(x-t) d\mu(x) dt \\ &= c + (u(i) - c) = u(i), \end{aligned}$$

por lo que  $F \in H^p(dx)$ . La demostración del Teorema 2.4.15 muestra que

$$\int |F(x+iy)|^p dx$$

es una función decreciente de  $y$ . Por tanto,

$$\|F\|_{H^p}^p = \lim_{y \rightarrow 0} \int |F(x+iy)|^p dx$$

□

**Observación 3.1.12.** El Lema 3.1.10 y el Lema 3.1.11 muestran que si  $f \in H^p(dx)$ , entonces  $g(w) = f(T(w)) \in H^p(D)$  y  $\|g\|_{H^p} \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_{H^p}$ .

**Proposición 3.1.13.** Si  $p \geq 1$ , el espacio  $(H^p, d)$  con  $d(f, g) = \|f - g\|_{H^p}^p$  es un espacio métrico.

**Demostración.** Es una consecuencia inmediata de  $|z_1 + z_2|^p \leq |z_1|^p + |z_2|^p$ . □

**Teorema 3.1.14.** Para  $0 < p \leq \infty$ , el espacio de Hardy  $H^p$  es completo.

**Demostración.** El caso  $p = \infty$  es trivial luego se puede suponer que  $p < \infty$ . Se prueba para el semiplano superior  $\mathcal{H}$ ; el razonamiento para el disco es similar. Sea  $z = x + iy \in \mathcal{H}$ , para cada  $r < y$ ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + re^{it}) dt,$$

por la propiedad de la media de Gauss. Integrando en coordenadas polares, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(z, y)|} \int_{B(z, y)} f(w) dw &= \frac{1}{\pi y^2} \int_0^y \int_{-\pi}^{\pi} f(z + re^{it}) dt r dr \\ &= \frac{2}{y^2} \int_0^y f(z) r dr \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Entonces, usando la desigualdad de Hölder y la inclusión  $B(z, y) \subseteq \Omega_y = \{u + iv : 0 < v < 2y\}$ ,

$$\begin{aligned}
 |f(z)| &\leq \frac{1}{\pi y^2} \int_{B(z, y)} |f(w)| dw \\
 &\leq \left( \frac{1}{\pi y^2} \int_{B(z, y)} |f(w)|^p dw \right)^{1/p} \\
 &\leq \left( \frac{1}{\pi y^2} \int_{\Omega_y} |f(w)|^p dw \right)^{1/p} \\
 &= \left( \frac{1}{\pi y^2} \int_{\Omega_y} |f(u + iv)|^p dudv \right)^{1/p} \\
 &\leq \|f\|_{H^p} \left( \frac{1}{\pi y^2} \int_0^{2y} dv \right)^{1/p} \\
 &= \left( \frac{2}{\pi y} \right)^{1/p} \|f\|_{H^p}.
 \end{aligned}$$

Esto muestra que cualquier sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  de  $H^p$  converge puntualmente a una función holomorfa  $f$  en  $\mathcal{H}$ . El lema de Fatou muestra que

$$\begin{aligned}
 \int |f(x + iy) - f_n(x + iy)|^p dx &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int |f_m(x + iy) - f_n(x + iy)|^p dx \\
 &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{H^p}^p.
 \end{aligned}$$

Por eso  $\|f - f_n\|_{H^p}^p \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{H^p}^p$ , y se concluye que  $H^p$  es completo.  $\square$

**Observación 3.1.15.** En contraste con  $H^p(D)$ , ningún espacio  $H^p(dx)$  está contenido en otro. Esto se puede ver con el siguiente ejemplo: para  $\alpha > 0$

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{(z + i)^\alpha}$$

pertenece a  $H^p(dx)$  si, y solo si,  $p\alpha > 1$  y

$$g_\alpha(z) = \frac{1}{z^\alpha(z + i)^2}$$

pertenece a  $H^p(dx)$  si, y solo si,  $p\alpha < 1$ .

## 3.2. Ceros de funciones holomorfas y Productos de Blaschke

### 3.2.1. Productos infinitos

Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{C}$  y  $f$  una función meromorfa y no constante en  $\Omega$  (eso significa que  $f$  es holomorfa salvo en un subconjunto de  $\Omega$  de singularidades aisladas). A lo largo de este trabajo se denotará por  $Z_f$  al conjunto

$$Z_f = \{a \in \Omega : a \text{ es cero de } f\}$$

este conjunto es discreto y numerable. Si  $a \in Z_f$  la multiplicidad del cero de  $f$  en  $a$  se denotará por  $m(f, a)$ . Como los resultados estarán orientados a la construcción de productos de Blaschke

siendo estos productos infinitos nuestro objeto de estudio en esta subsección será la relación de los ceros de funciones holomorfas y productos infinitos. Si  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  son ceros de una función  $f$  una manera de construir dicha función consiste en considerar una sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  con  $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$  tal que  $f_n$  tiene un único cero en  $\alpha_n$  y se considera el límite de los productos

$$P_n = \prod_{k=1}^n f_k,$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Además hay que hacer ciertos arreglos para que la sucesión  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  converja a alguna  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  tal que esta función límite  $f$  no se anule en ningún punto salvo en los  $\alpha_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Las demostraciones que no se incluyan en esta subsección pueden encontrarse en [33].

**Definición 3.2.1.** Sea  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  una sucesión de números complejos,

$$P_n = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k) \quad (3.3)$$

tal que  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$  existe. Entonces, se escribe

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k). \quad (3.4)$$

Entonces,  $P_k$  son los *productos parciales* del *producto infinito*  $P$ . El producto infinito se dice que converge si  $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$  converge.

Al igual que en el estudio de series la condición necesaria es que el término general converja a cero; en el caso de los productos infinitos la condición necesaria es que  $1 + \alpha_n$  converja a uno, es decir, que  $\alpha_n$  converja a cero.

**Lema 3.2.2.** Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  son números complejos y si

$$P_N = \prod_{n=1}^N 1 + \alpha_n, \quad P_N^* = \prod_{n=1}^N 1 + |\alpha_n|, \quad (3.5)$$

entonces

$$P_N^* \leq \exp\left(\sum_{n=1}^N |\alpha_n|\right) \quad (3.6)$$

y

$$|P_N - 1| \leq P_N^* - 1. \quad (3.7)$$

**Teorema 3.2.3.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  y sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones complejas acotadas en  $\Omega$ , tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$  converge uniformemente en  $\Omega$ . Entonces, el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} 1 + f_n(z) \quad (3.8)$$

converge uniformemente en  $\Omega$  y existe  $z_0 \in \Omega$  tal que  $f(z_0) = 0$  si, y solo si,  $f_n(z_0) = -1$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Es más cualquier reordenación da lugar al mismo producto infinito.

**Demostración.** Por las hipótesis se tiene que  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$  está acotada en  $\Omega$  y si  $P_N$  denota al producto parcial de (3.8) en virtud del Lema 3.2.2 para cada  $N \in \mathbb{N}$  existe una constante  $C$  tal que  $|P_N(z)| \leq N$  para todo  $z \in \Omega$ . Sea  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon < 1/2$ : Existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $z \in \Omega$

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |f_n(z)| < \varepsilon$$

denotando por  $Q_M$  el  $M$ -ésimo producto parcial de una reordenación de (3.8) (es decir se considera una permutación de los índices del producto original). Sea  $\{n_1, n_2, \dots\}$  una permutación de  $\{1, 2, \dots\}$ . Si  $N \geq N_0$ , para  $M$  suficientemente grande  $\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$ , entonces

$$Q_M - P_N = P_N \left( \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_{n_k}) - 1 \right).$$

para  $n_k > N_0$ . Por lo tanto, en virtud del Lema 3.2.2

$$|Q_M - P_N| \leq |P_N|(e^\varepsilon - 1) \leq 2|P_N|\varepsilon \leq 2C\varepsilon.$$

Si  $n_k = k, k \in \mathbb{N}$ , entonces  $Q_M = P_M$ . La cadena de desigualdades anterior muestra que  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge uniformemente a una función límite  $f$  y también que para cada  $M > N_0$

$$|P_M - P_{N_0}| \leq 2|P_{N_0}|\varepsilon$$

por lo que

$$|P_M| \geq (1 - 2\varepsilon)|P_{N_0}|.$$

Por tanto para cada  $z \in \Omega$

$$|f(z)| \geq (1 - 2\varepsilon)|P_{N_0}(z)|$$

que muestra que  $f(z) = 0$  si, y solo si,  $P_{N_0}(z) = 0$ .  $\square$

**Teorema 3.2.4.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  y sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones complejas acotadas en  $\Omega$  tales que  $0 \leq f_n < 1$ . Entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - f_n(z)) > 0 \quad \text{si, y solo si,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) < \infty.$$

**Demostración.** Si  $P_N = (1 - f_1) \cdots (1 - f_N)$ , entonces  $P_1 \geq P_2 \geq \cdots \geq P_N > 0$  por lo que  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$  existe. Si  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) < \infty$ , en virtud del Teorema 3.2.3 se tiene que  $P > 0$ . Por otro lado,

$$P \leq P_N = \prod_{n=1}^N (1 - f_n(z)) \leq \exp \left( - \sum_{n=1}^N f_n(z) \right),$$

y la última expresión tiende a cero cuando  $N$  tiende a infinito.  $\square$

**Teorema 3.2.5.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  abierto y sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones holomorfas en  $\Omega$  no idénticamente nulas en  $\Omega$  y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $\Omega$ . Entonces el producto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $\Omega$ . Por ello  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Es más, para cada  $z \in \Omega$  se tiene

$$m(f, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z).$$

**Demostración.** La primera parte se sigue del Teorema 3.2.3. Para la segunda nótese que para cada  $z \in \Omega$  existe un entorno  $V$  en el cual algunas  $f_n$  tienen un cero. Tomando esos factores primero, el producto de los restantes no tiene ceros en  $V$ , en virtud del Teorema 3.2.3 se prueba la igualdad relativa a la multiplicidad de los ceros.  $\square$

**Teorema 3.2.6.** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$  y sea  $A \subseteq \Omega$  tal que  $A$  no tiene ningún punto límite en  $\Omega$ , A cada  $\alpha \in A$  se le asigna un número entero  $m(f, \alpha)$ . Entonces existe una función  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  cuyos ceros están en  $A$ , de hecho los ceros de  $f$  serán los  $\alpha$  de multiplicidad  $m(f, \alpha)$ .

**Observación 3.2.7.** El Teorema 3.2.6 expone que la localización de los ceros de una función holomorfa en una región  $\Omega$  no está sujeta a ninguna restricción.

La situación será distinta si se sustituye el espacio de funciones holomorfas por ciertas subclases definidas por ciertas condiciones de crecimiento. En estas situaciones las distribuciones de los ceros han de satisfacer ciertas condiciones cuantitativas. La condición clave será la expresada en el Teorema 3.2.8 se aplicará este resultado a ciertas clases de funciones enteras y ciertas clases de  $\mathcal{H}(D)$ .

**Teorema 3.2.8 (Desigualdad de Jensen).** Sea  $\Omega = D(0, R)$ ,  $R > 0$ . Sea  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ,  $f(0) \neq 0$  y sean  $\alpha_j \in Z_f$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  en  $\overline{D}(0, r)$ ,  $0 < r < R$ . Entonces

$$|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{\alpha_n} \leq \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right). \quad (3.9)$$

**Demostración.** Se puede encontrar en [33].  $\square$

**Observación 3.2.9.** Esta desigualdad permite el estudio de valores en la frontera de funciones holomorfas acotadas en el disco unitario, es decir, las funciones  $H^\infty$ .

### 3.2.2. Productos de Blaschke

En esta sección veremos que los ceros  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  de una función  $H^p$  no nula en el disco satisfacen la condición de Blaschke

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty. \quad (3.10)$$

Nótese que esta condición no depende de  $p$ . Cuando (3.10) se cumple, un tipo de funciones de  $H^\infty$  llamadas productos de Blaschke se pueden construir de forma que tengan a  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  como ceros. Los productos de Blaschke jugarán un papel expansivo en los últimos capítulos de este trabajo. Los productos de Blaschke fueron introducidos por W. Blaschke en [4].

**Teorema 3.2.10.** Sea  $f(z)$  una función holomorfa en el disco,  $f \not\equiv 0$ , y sean  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  los ceros de  $f(z)$ . Si  $\log |f(z)|$  tiene un mayorante armónico, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty.$$

Si  $f(0) \neq 0$  y si  $u(z)$  es el menor mayorante armónico de  $\log |f(z)|$ , entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) \leq u(0) - \log |f(0)|.$$

**Demostración.** Reemplazando  $f(z)$  por  $f(z)/z^N$ . Se puede suponer que  $f(0) \neq 0$ . Entonces, en virtud del Teorema 2.4.14,

$$\sup_r \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = u(0),$$

donde  $u$  es el menor mayorante armónico de  $\log |f(z)|$ . Se fija  $r < 1$  por lo que  $|z_n| \neq r$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y sean  $z_1, \dots, z_n$  los ceros con  $|z_j| < r$ . Entonces,  $f(rz)$  es holomorfa en el disco cerrado y  $f(rz)$  tiene ceros  $z_1/r, \dots, z_n/r$ . Sea

$$B_r(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - \frac{z_j}{r}}{1 - \frac{\bar{z}_j z}{r}}$$

un producto de Blaschke finito cuyos ceros son los mismos que  $f(rz)$  y sea  $g(z) = f(rz)/B_r(z)$ . Entonces,  $g$  es holomorfa sin ceros en  $\bar{D}$ , por lo que

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(e^{i\theta})| d\theta.$$

Como  $|g(e^{i\theta})| = |f(re^{i\theta})|$ , se obtiene la clásica fórmula de Jensen

$$\log |f(0)| + \sum_{|z_j| < r} \log \frac{r}{|z_j|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Haciendo  $r \rightarrow 1$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \log \frac{1}{|z_j|} &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| \\ &= u(0) - \log |f(0)|. \end{aligned}$$

Como  $1 - |z_j| \leq \log \frac{1}{|z_j|}$ , queda probado el resultado.  $\square$

Si  $f \in H^p(D)$ , entonces  $\log |f| \leq \frac{1}{p} |f|^p$ , y  $\log |f|$  tiene un mayorante armónico. Por eso, si  $f \in H^p(D)$ , o por el Lema 3.1.10 si  $f(w) = F(z(w))$  donde  $F \in H^p(dx)$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty$ . El Teorema 3.2.8 hace posible determinar las condiciones que los ceros de una función no constante  $H^\infty$  ha de cumplir.

**Teorema 3.2.11.** Sea  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de puntos en  $D$  tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\alpha_n|) < \infty.$$

Sea  $m$  el número de  $\alpha_n$  iguales a 0. Entonces el producto de Blaschke

$$B(z) = z^m \prod_{|\alpha_n| \neq 0} \frac{-\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|} \frac{z - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n z} \quad (3.11)$$

converge en  $D$ . La función  $B(z)$  está en  $H^\infty(D)$  y los ceros de  $B(z)$  son precisamente los puntos  $\alpha_n$ , cada cero teniendo como multiplicidad el número de veces que ocurre en la sucesión  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ . Además  $|B(z)| \leq 1$  y

$$|B(e^{i\theta})| =_{c.s} 1$$

Se define un *producto de Blaschke* en  $D$  como una función de la forma (3.11).

**Demostración.** Se puede suponer que  $|\alpha_n| > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sea

$$b_n(z) = \frac{-\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|} \frac{z - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n z}.$$

Entonces, el producto  $\prod_{n=1}^\infty b_n$  converge en  $D$  a una función holomorfa que tiene a  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  como ceros si, y solo si,  $\sum_{n=1}^\infty |1 - b_n(z)|$  converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $D$ . Se tiene,

$$|1 - b_n(z)| = \frac{|\alpha_n + z\bar{\alpha}_n|}{|\alpha_n||1 - \bar{\alpha}_n z|} (1 - |\alpha_n|) \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} (1 - |\alpha_n|)$$

En virtud del Teorema 2.3.10 se tiene que  $B \in \mathcal{H}(D)$  y  $B$  tiene como ceros a  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ . Además puesto que  $|b_n| \leq 1$  se tiene que  $B \in H^\infty$  y  $|B| \leq 1$ . La función armónica acotada  $B$  tiene límites no tangenciales  $B(e^{i\theta})$  casi siempre. Para ver que  $|B(e^{i\theta})| =_{c.s} 1$  se define  $B_n(z) = \prod_{k=1}^n b_k(z)$ . Entonces  $B/B_n$  es también un producto de Blaschke y

$$\left| \frac{B(0)}{B_n(0)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|B(e^{i\theta})|}{|B_n(e^{i\theta})|} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta.$$

Haciendo tender  $n \rightarrow \infty$  y como  $|B| \leq 1$  y dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(0)}{B_n(0)=1}$  se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta = 1.$$

Por lo que  $|B(e^{i\theta})| =_{c.s} 1$  y queda probado el teorema.  $\square$

**Observación 3.2.12.** El propósito de la convergencia de los factores  $\frac{-\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|}$  es hacer que  $\sum_{n=1}^\infty \arg b_n(z)$  converge, donde  $b_n(z) = \frac{-\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|} \frac{z - \alpha_n}{1 - \bar{\alpha}_n z}$ .

**Proposición 3.2.13.** Sean  $f, g \in \mathcal{H}(D)$  tal que  $g(z)$  no tiene ceros en  $D$  y  $B(z)$  es un producto de Blaschke. Entonces la función  $f$  tiene una factorización

$$f(z) = B(z)g(z), \quad z \in D,$$

si, y solo si, la función subarmónica  $\log |f(z)|$  tiene un mayorante armónico.

**Demostración.** Es consecuencia del Teorema 3.2.10 y el Teorema 3.2.11.  $\square$

**Observación 3.2.14.** En el semiplano superior la condición (3.10) se reemplaza por

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{y_n}{1 + |z_n|^2} < \infty, \quad z_n = x_n + iy_n, \quad (3.12)$$

y el producto de Blaschke con ceros  $\{z_n\}$  es

$$B(z) = \left( \frac{z - i}{z + i} \right)^m \prod_{z_n \neq i} \frac{|z_n^2 + 1|}{z_n^2 + 1} \frac{z - z_n}{z - \bar{z}_n}.$$

Si el módulo  $|z_n|$  está acotado, (3.12) se convierte en  $\sum_{n=1}^\infty y_n < \infty$ , y la convergencia de los factores no es necesaria ya que  $\prod \frac{z - z_n}{z - \bar{z}_n}$  converge.

El siguiente teorema se debe a F. Riesz en [30]

**Teorema 3.2.15 (de F. Riesz).** Sea  $0 < p < \infty$ . Sea  $f \in H^p(D)$ ,  $f \neq 0$ , sea  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  los ceros de  $f(z)$ , y sea  $B(z)$  el producto de Blaschke cuyos ceros son  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Entonces  $g(z) = \frac{f(z)}{B(z)}$  pertenece a  $H^p(D)$  y

$$\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}.$$

**Demostración.** Es remarcable que  $B(z)$  converge cuando  $f \in H^p$ . Sea  $B_n$  el producto de Blaschke finito cuyos ceros son  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , y sea  $g_n = f/B_n$ . Fijando  $r < 1$ . Entonces

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq \lim_{R \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \frac{|f(Re^{i\theta})|^p}{|B_n(Re^{i\theta})|^p} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Si  $1 - R$  es pequeño, entonces  $|B_n(Re^{i\theta})| > 1 - \varepsilon$ , por lo que

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq \lim_{R \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \|f\|_{H^p}^p.$$

En virtud del Teorema de la convergencia dominada  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} |g_n|$  y como  $|B| \leq 1$  se tiene que  $|g| \geq |f|$ , esto lleva a que  $\|g\|_{H^p}^p = \|f\|_{H^p}^p$ .  $\square$

**Observación 3.2.16.** El teorema de F. Riesz también es cierto para  $H^p(dx)$ , ya que

$$\sup_{y \geq 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x + iy)|^p dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x + iy)|^p dx.$$

### 3.3. Funciones maximales y valores en la frontera

Sea  $f \in H^p(dx)$ . Si  $p > 1$ , se sabe debido al Capítulo 1 que la función maximal no tangencial  $f^*(t)$  pertenece a  $L^p$ , además  $f(z)$  converge no tangencialmente casi siempre a función  $f(t)$  de  $L^p$ . Un aspecto remarcable de los espacios  $H^p$  es que los siguientes resultados son ciertos para todo  $p, 0 < p \leq \infty$ . El siguiente teorema se debe a G. H. Hardy y J. E. Littlewood en [18].

**Teorema 3.3.1.** Sea  $0 < p < \infty$  y sea  $f(z)$  una función en  $H^p(dx)$ . Entonces para cada  $\alpha > 0$ , la función maximal no tangencial

$$f^*(t) = \sup_{z \in \Gamma_\alpha(t)} |f(z)|$$

está en  $L^p(\mathbb{R})$  y

$$\|f^*\|_p^p \leq A_\alpha \|f\|_{H^p}^p, \quad (3.13)$$

donde la constante  $A_\alpha$  depende solo de  $\alpha$ . Es más, para casi todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(z)$  tiene límite no tangencial  $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$  satisfaciendo

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt = \|f^*\|_p^p = \|f\|_{H^p}^p \quad (3.14)$$

y

$$\lim_{y \rightarrow 0} \|f(t + iy) - f(t)\|_p^p = 0. \quad (3.15)$$



**Demostración.** El caso para  $p > 1$  ya ha sido probado en el Capítulo 1. Para probar de manera más precisa el resultado que se acaba de enunciar, es decir, tratar el caso en el que  $0 < p < 1$  se usará el Teorema 3.2.15 y la Observación 3.2.16. Se supone que  $f \in H^p$  no idénticamente nula. Sea  $B$  el producto de Blaschke cuyos ceros son los ceros de  $f$  y sea  $g(z) = f(z)/B(z)$ . Entonces  $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$  y como  $|f(z)| \leq |g(z)|$  se tiene que  $|f^*(t)| \leq |g^*(t)|$ . Sea  $p_1 > 1$ . Como  $g$  no tiene ceros y  $g \in H^p$  la función holomorfa  $g^{p/p_1} \in H^{p_1}(dx)$  (la preservación de la holomorfia al hacer potencias de la función  $g \in \mathcal{H}(\mathcal{H})$  se debe a que al ser  $\mathcal{H}$  simplemente conexo, como la función  $g$  es holomorfa en él y que no se anule admite logaritmo analítico  $G$ , y por lo tanto  $g = e^G$  en  $\mathcal{H}$ ; entonces, para un número positivo cualquiera  $a$  se tiene que  $(e^{G/a})^a = e^G = g$ , luego la función  $e^{G/a}$  es una raíz  $a$ -ésima analítica de  $F$ ). Por tanto  $(g^*)^{p/p_1} = (g^{p/p_1})^* \in L^{p_1}$  y en virtud del Teorema 2.3.3

$$\|g^*\|_p^p = \|(g^{p/p_1})^*\|_{p_1}^{p_1} \leq B_{p_1} \|g\|_{H^p}^p.$$

Tomando  $p_1 = 2$  se comprueba la veracidad de (3.13) con independencia del valor de  $p$  ya que  $f^* \leq g^*$ . Ahora, la función  $G(z) = (g(z))^{p/p_1}$  tiene límite no tangencial  $G(t)$  casi siempre. Tomando  $p_1/p$  como un entero positivo  $m \in \mathbb{Z}^+$ , se ve que  $g(z) = G(z)^m$  también tiene límite no tangencial. Como  $B(z)$  tiene valores en la frontera casi siempre se concluye que  $f$  tiene límite no tangencial casi siempre. Ahora en virtud de (3.13) y el Teorema de la convergencia dominada se tiene que  $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$  y de ahí quedan probadas las ecuaciones (3.14) y (3.15) y finalmente se ha demostrado el teorema.  $\square$

**Observación 3.3.2.** La igualdad (3.14) establece una isometría entre  $H^p(dx)$  y un subespacio cerrado de  $L^p(\mathbb{R})$ . Para  $p < 1$ , a pesar de que  $L^p$  no es un espacio de Banach, es como un espacio  $H^p$ , un espacio métrico completo bajo la métrica  $d(f, g) = \|f - g\|_p^p$ . Cuando  $p \geq 1$ , este espacio de funciones en  $H^p$  con valores en la frontera tiene una simple caracterización. Las expresiones análogas a (3.14) y (3.15) para el caso del disco ya habían sido probadas por F. Riesz en [30].

**Corolario 3.3.3.** Sea  $1 \leq p \leq \infty$  y sea  $f(t) \in L^p(\mathbb{R})$ . Entonces,  $f(t)$  es casi siempre el límite no tangencial de una función en  $H^p(dx)$  si, y solo si, su integral de Poisson  $f(z) = P_y * f(x)$  es holomorfa en  $\mathcal{H}$ . La integral de Poisson  $f(z)$  es la correspondiente función  $H^p$ .

**Demostración.** Si  $f \in L^p(\mathbb{R})$  y  $f(z) = P_y * f(x)$ , por lo expuesto en el Capítulo 1,  $f \in H^p(dx)$  y  $f(z)$  converge no tangencialmente a  $f(t)$ . Recíprocamente, se supone que  $f \in H^p$ . Si  $p > 1$ , entonces por el Teorema 2.3.7,  $f(z)$  tiene límite no tangencial  $f(t)$  y  $f(z) = P_y * f(x)$ . El caso  $p = 1$  requiere del Teorema 3.3.1. Cuando  $f \in H^1$ , en virtud de que como se demostró anteriormente en el Teorema 3.1.14 para el semiplano superior  $|f(x + iy)| \leq (2/\pi y)^{1/p} \|f\|_{H^p}$  y el Lema 2.1.18 para cada  $\varepsilon > 0$  se tiene

$$f(z + i\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} P_z(t) f(t + i\varepsilon) dt.$$

Por (3.15), se tiene que  $f(z)$  es la integral de Poisson de su función frontera  $f(t)$ .  $\square$

**Observación 3.3.4.** Debido a (3.14), usualmente se identifica  $f(z) \in H^p$  con su función frontera  $f(t)$ , a menudo se escribe  $\|f\|_p$  en lugar de  $\|f\|_{H^p}$ . Sin embargo, no se conoce ningún método para recuperar  $f(z)$  de  $f(t)$  cuando  $p < 1$ . El Teorema 3.3.1 es también cierto para el disco unitario. La igualdad (3.14) para la correspondencia  $f(z) \mapsto f(e^{i\theta})$  también muestra que  $H^p(D)$  es isométrico a un subespacio cerrado del espacio de Lebesgue  $L^p(d\theta/2\pi)$ . Y si  $p \geq 1$ ,  $f(z)$  es la integral de Poisson de  $f(e^{i\theta})$ .

Se necesitarán algunas clases de funciones holomorfas suaves que sean densas en  $H^p(dx)$  que jugarán el papel de los polinomios en el caso del disco.

**Definición 3.3.5.** Sea  $N$  un entero positivo y sea  $\mathcal{U}_N$  la familia de funciones de  $H^\infty(dx)$  tales que:

- (I) La función  $f(z)$  es continua en  $\overline{\mathcal{H}}$  y  $f(t)$  es infinitamente diferenciable,  $\mathcal{C}^\infty$ .
- (II) Para  $z \in \mathcal{H}$ ,  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^N |f(z)| = 0$ .

**Corolario 3.3.6.** Sea  $N$  un entero positivo. Para  $0 < p < \infty$ , la clase  $\mathcal{U}_N$  es densa en  $H^p(dx)$ . Para  $f \in H^\infty$ , hay funciones  $f_n(z)$  en  $\mathcal{U}_N$  tal que  $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  y tal que  $|f_n(t)| \leq_{c.s} |f(t)|$ .

**Demostración.** Si no fuera por la condición de decaimiento de la Definición 3.3.5 se podría aproximar  $f$  por las funciones suaves  $f(z + i/n)$  que convergen en la norma  $H^p$  a  $f(t)$  si  $p < \infty$  y converge puntualmente casi siempre a  $f(t)$  si  $p = \infty$ . Existen ciertas funciones  $g_k(z)$  tales que

- (a)  $g_k(z) \in \mathcal{U}_N$ .
- (b)  $|g_k(z)| \leq 1, z \in \overline{\mathcal{H}}$ .
- (c)  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(z) = 1, z \in \overline{\mathcal{H}}$ .

Antes de construir dichas funciones  $g_k$ , nótese que las funciones

$$f_n(z) = g_n(z) f\left(z + \frac{i}{n}\right)$$

en  $\mathcal{U}_N$  proporcionan la aproximación buscada. Se construyen estas funciones en  $D$ , donde  $w = -1$  corresponde con  $z = \infty$ . Sea  $\alpha_k < 1$  con  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 1$ . La función

$$h_k(w) = \left( \frac{w + \alpha_k}{1 + \alpha_k w} \right)^{N+1}$$

tiene un cero de multiplicidad  $N + 1$  en  $-\alpha_k$ . Estas funciones  $h_k(w)$  están acotadas por 1 y con  $N$  fijado convergen uniformemente a 1 en subconjuntos compactos de  $\overline{D} \setminus \{-1\}$ . Entonces, las funciones

$$g_k(z) = h_k(\alpha_k, w), \quad w = \frac{i - z}{i + z}$$

satisfacen (a), (b) y (c). □

Ahora se clarifica la relación entre  $H^p(D)$  y  $H^p(dx)$ .

**Corolario 3.3.7.** Sea  $0 < p < \infty$ , sea  $f(z)$  una función holomorfa en el semiplano superior y sea

$$F(z) = \frac{\pi^{-1/p}}{(z + i)^{2/p}} f(z).$$

Entonces,  $|f(z)|^p$  tiene un mayorante armónico si, y solo si,  $F \in H^p$ . En ese caso, tenemos que

$$\|F\|_{H^p}^p = u(i), \tag{3.16}$$

donde  $u(z)$  es el menor mayorante armónico de  $|f(z)|^p$ .

**Demostración.** Sea  $g(w) = f(z)$ ,  $z = T(w) = i\frac{1-w}{1+w}$ . El Corolario afirma que  $g \in H^p(D)$  si, y solo si,  $F \in H^p(dx)$  y que  $\|g\|_p = \|F\|_p$ . Si  $N > 2/p$  y si  $F \in \mathcal{U}_N$ , entonces la correspondiente función  $g(w)$  está acotada en  $D$  y como  $\frac{d\theta}{2\pi}$  corresponde con  $\frac{dt}{\pi(1+t^2)}$ ,

$$\int_0^{2\pi} |g(\theta)|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |F(t)|^p dt.$$

Por la densidad de  $\mathcal{U}_N$  en  $H^p$ , por (3.14) se tiene que  $g \in H^p(D)$  para  $F \in H^p(dx)$  y

$$\|g\|_{H^p} = \|F\|_{H^p}.$$

Por el Lema 3.1.11 se muestra que  $F \in H^p(dx)$  si  $g(w) \in H^p(D)$  y con esto queda probado el resultado.  $\square$

**Observación 3.3.8.** El tener la igualdad (3.16) en lugar de la desigualdad (3.1) significa que en la fórmula  $u(z) = cy + \int P_y(x-t)d\mu(t)$  para el menor mayorante armónico de  $|f(z)|^p$ , el término constante es  $c = 0$ .

El siguiente corolario es notable ya que para  $p \leq 1$  su demostración es un resultado relativamente reciente.

**Corolario 3.3.9.** Sea  $0 < p < \infty$  y sea  $u(z)$  una función armónica real-valuada en el semiplano superior  $\mathcal{H}$ . Si  $u(z)$  es la parte real de una función  $f \in H^p$ , entonces

$$u^*(t) = \sup_{\Gamma_\alpha(t)} |u(z)|$$

está en  $L^p(\mathbb{R})$ .

**Demostración.** Es consecuencia del Teorema 3.3.1.  $\square$

Se vuelven a estudiar los valores frontera en el caso  $p = 1$ . Si la función armónica  $u(z)$  satisface

$$\sup_y \int |u(x+iy)| dx < \infty,$$

entonces  $u(z)$  no necesita ser la integral de Poisson de su límite no tangencial  $u(t)$ . Todo lo que se puede decir es que  $u(z)$  es la integral de Poisson de una medida finita. Sin embargo, si  $u(z)$  es también una función holomorfa, entonces la medida es absolutamente continua y su densidad es el valor frontera  $u(t)$ . La razón es que la función maximal  $u^*(t)$  es integrable. El Teorema 3.3.10 es del célebre artículo de F. y M. Riesz [31] se puede encontrar la demostración debida a Bochner en [16].

**Teorema 3.3.10.** Si  $f \in H^1(dx)$ , entonces  $f(z)$  es la integral de Poisson de sus valores frontera:

$$f(z) = \int_0^{2\pi} P_y(x-t)f(t)dt. \quad (3.17)$$

Recíprocamente, si  $\mu$  es una medida compleja finita en  $\mathbb{R}$  tal que la integral de Poisson  $f(z) = P_y * \mu(x)$  es una función holomorfa en  $\mathcal{H}$ , entonces  $\mu$  es absolutamente continua y

$$d\mu = f(t)dt,$$

donde  $f(t)$  es la función frontera de la integral de Poisson  $f(z)$  de  $\mu$ .

**Demostración.** Si  $f \in H^1$ , entonces (3.17) ya se probó en el Corolario 3.3.3. Recíprocamente, si  $f(z) = P_y * \mu(x)$  es una función holomorfa, entonces en virtud de la Proposición 2.1.9 se tiene que  $f \in H^1$  y por lo tanto es la integral de Poisson de su valor en la frontera  $f(t)$ . La medida  $d\nu(t) = d\mu(t) - f(t)dt$  tiene integral de Poisson nula por lo que en virtud del Teorema 2.1.14 se tiene que  $\nu = 0$ .  $\square$

**Lema 3.3.11.** Sea  $f \in H^1$ . Entonces la transformada de Fourier

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ist} dt = 0$$

para cada  $s \leq 0$ .

**Demostración.** Se define el operador  $f \mapsto \hat{f}$  que es lineal y continuo, se supone que dicho operador pertenece a la clase  $\mathcal{U}_N$ . Entonces, como  $s \leq 0$ ,  $F(z) = f(z)e^{-2\pi isz}$  también pertenece a  $\mathcal{U}_N$ . En virtud del Teorema de Cauchy

$$\int_0^\pi |F(re^{i\theta})| R d\theta \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

entonces queda probado el resultado

Nótese que

$$P_z(t) = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right). \quad (3.18)$$

Nótese también que para  $f \in H^1$ , por el Lema 3.3.11 aplicado a  $(t-\bar{z})^{-1}f(t)$  produce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-\bar{z}} dt = 0, \quad \text{Im } z > 0.$$

**Teorema 3.3.12.** Sea  $d\mu(t)$  una medida compleja finita en  $\mathbb{R}$  tal que

- (I)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t-z} = 0$  con  $\text{Im } z < 0$ .
- (II)  $\hat{\mu}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ist} d\mu(t) = 0$  con  $s < 0$ .

Entonces  $d\mu$  es absolutamente continua y  $d\mu = f(t)dt$ , donde  $f(t) \in H^1$ .

**Demostración.** Si (I) se cumple, entonces por (3.18),  $f(z) = P_y * \mu(x)$  es holomorfa y el resultado se sigue del Teorema 3.3.10. Suponiendo que (II) se cumple. El núcleo de Poisson  $P_y(t)$  tiene transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ist} P_y(t) dt = e^{-2\pi |s|y},$$

porque  $\hat{P}_y(-s) = \overline{\hat{P}_y(s)}$  siendo  $P_y$  real y porque si  $s \leq 0$ ,  $e^{-2\pi isz}$  es la función armónica acotada con valores frontera  $e^{-2\pi ist}$ . Sea  $f_y(x) = P_y * \mu(x)$ . Por el teorema de Fubini,  $f_y$  tiene transformada de Fourier

$$\hat{f}_y(s) = \begin{cases} e^{-2\pi xy} \hat{\mu}(s) & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

Como  $\hat{f}_y \in L^1$ , la inversión de Fourier implica

$$f_y(x) = \int e^{-2\pi ixs} \hat{f}_y(s) ds = \int_0^\infty e^{-2\pi i(x+iy)s} \hat{\mu}(s) ds.$$

Diferenciando bajo el signo de la integral se tiene que  $f(z) = f_y(x)$  es holomorfa y por el Teorema 3.3.10 implica que  $f \in H^1$ .  $\square$

**Observación 3.3.13.** La versión para el disco del Teorema 3.3.10, o equivalentemente el Teorema 3.3.12, es una mitad del famoso teorema de F. y M. Riesz. La otra mitad afirma que si  $f \in H^1$ ,  $f \neq 0$ , entonces  $|f(t)| >_{c.s} 0$ . Esto es consecuencia de un resultado más fuerte.

### 3.4. Dualidad de los Espacios de Hardy

Para poder demostrar posteriormente el Teorema de Interpolación de Carleson se necesitarán argumentos de dualidad, en concreto la relación entre  $H^\infty$  y  $H^1$ .

**Proposición 3.4.1.** Sea  $X$  un espacio de Banach cuyo espacio dual es  $X^*$  y sea  $Y$  un subespacio cerrado de  $X$ . Entonces

$$Y^\perp = \{x^* \in X^* : \langle y, x^* \rangle = 0 \text{ para cada } y \in Y\}$$

es un subespacio cerrado de  $X^*$ .

**Proposición 3.4.2.** Sea  $X$  un espacio de Banach cuyo espacio dual es  $X^*$  y sea  $Y$  un subespacio cerrado de  $X$  e  $Y^\perp$ . Entonces

$$Y^* \cong X^*/Y^\perp, \quad (3.19)$$

y

$$(X/Y)^* \cong Y^\perp. \quad (3.20)$$

Es decir, son isomorfos.

**Demostración.** Basta tomar los espacios mencionados y hacer uso del Teorema de Hahn Banach.  $\square$

Las ecuaciones (3.19) y (3.20) pueden ser escritas como indica el Lema 3.4.3

**Lema 3.4.3.** Sea  $X$  un espacio de Banach cuyo espacio dual es  $X^*$  y sea  $Y$  un subespacio cerrado de  $X$  e  $Y^\perp$ . Sea  $x^* \in X^*$ , entonces

$$\sup\{|\langle x^*, y \rangle| : y \in Y, \|y\| \leq 1\} = \inf\{\|x^* - k\| : k \in Y^\perp\}. \quad (3.21)$$

Si  $x \in X$ , entonces

$$\inf\{\|x - y\| : y \in Y\} = \sup\{|\langle x, k \rangle| : k \in Y^\perp, \|k\| \leq 1\}. \quad (3.22)$$

**Demostración.** El lado izquierdo de (3.21) es la norma de la restricción de  $x^*$  al subespacio de  $Y$  y el lado derecho de (3.21) es la norma de  $x^* + Y^\perp$  en  $X^*/Y^\perp$ . Por (3.19) dichas cantidades son iguales. Para demostrar que (3.20) implica (3.22) es un razonamiento análogo.  $\square$

**Lema 3.4.4.** Si  $1 \leq p < \infty$ , si  $q = p/(p-1)$  y si  $g \in L^q(\mathbb{R})$ , entonces  $g \in (H^p(dx))^\perp$ , esto es

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt = 0 \quad (3.23)$$

para toda  $f \in H^p(dx)$  si, y solo si,  $g \in H^q(dx)$ .

**Demostración.** Se probará por doble implicación

- $\boxed{\Leftarrow}$  Si  $g \in H^q(dx)$ , entonces por la desigualdad de Hölder  $fg \in H^1(dx)$  y en virtud del Lema 3.3.11 se cumple (3.23).
- $\boxed{\Rightarrow}$  Se supone que se cumple (3.23) entonces la integral de Poisson de  $g$  es holomorfa en  $\mathcal{H}$ . Además, si  $z \in \mathcal{H}$ , se fija  $z_0 \in \mathcal{H}$  y se define

$$h_z(t) = \frac{1}{\bar{z} - t} - \frac{1}{\bar{z}_0 - t}$$

se tiene que  $h_z \in H^p$  y

$$P_z - P_{z_0} = \frac{1}{2\pi i}(h_z - \bar{h}_z).$$

Entonces, por (3.23),

$$\begin{aligned} g(z) - g(z_0) &= \int_{\mathbb{R}} g(t)(P_z(t) - P_{z_0}(t))dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} g(t) \left( (h_z(t) - \bar{h}_z(t)) \right) dt, \end{aligned}$$

y se tiene que  $g$  es holomorfa en  $\mathcal{H}$ . En virtud del Teorema 2.1.19 se concluye que  $g \in H^q$ .

□

**Proposición 3.4.5.** Si  $1 \leq p < \infty$  y  $q = p/(p-1)$  se tiene que

$$(H^p)^* = L^q/H^q. \quad (3.24)$$

**Demostración.** El resultado es cierto en virtud del Lema 3.4.4 y de la Proposición 3.4.1 tomando  $X = L^q$  e  $Y = H^p$  se tiene que  $Y^\perp = (H^p)^\perp = H^q$ . □

### 3.5. Invarianza conforme de las medidas de Carleson

Para el desarrollo de esta sección se ha empleado el texto [16], donde se expondrán una serie de resultados para concluir la invarianza conforme de medidas de Carleson.

**Definición 3.5.1.** Una medida positiva  $\lambda$  en  $D$  es una *medida de Carleson* si existe una constante  $N(\lambda)$  tal que

$$\lambda(S_{h,\theta_0}) \leq N(\lambda)h \quad (3.25)$$

para cada  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ , cada  $h \in (0, 1]$  y cada trapecio circular (véase Figura 3.1)

$$S_{h,\theta_0} = \{re^{i\theta} : 1-h \leq r < 1, |\theta - \theta_0| \leq h\}.$$

Como se incluye el caso  $h = 1$ , tenemos que  $\lambda(D) \leq 4N(\lambda)$ .

**Observación 3.5.2.** Haciendo uso del Teorema 3.5.5 y los resultados vistos anteriormente que relacionan  $H^p(dx)$  y  $H^p(D)$  se sabía que  $\lambda$  es una medida de Carleson si, y solo si,  $\int |f(z)|^p d\lambda \leq C_p \|f\|_p^p$  para todo  $f \in L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , o para todo  $f \in H^p$ ,  $0 < p < \infty$ . Se quiere hacer notar el carácter invariante de las medidas de Carleson.

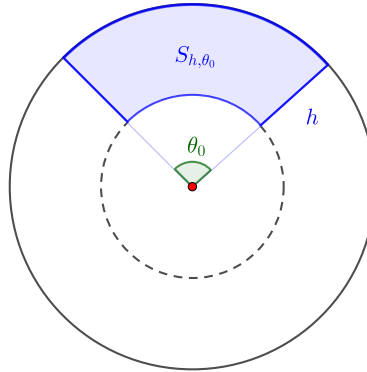


Figura 3.1: Trapecio circular  $S_{h, \theta_0}$ .

**Lema 3.5.3.** Una medida positiva  $\lambda$  en  $D$  es una medida de Carleson si, y solo si,

$$\sup_{z_0 \in D} \int_D \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} d\lambda(z) = M < \infty. \quad (3.26)$$

La constante  $M$  en (3.26) satisface

$$C_1 N(\lambda) \leq M \leq C_2 N(\lambda)$$

para constantes  $C_1$  y  $C_2$  dependientes de  $\lambda$ .

**Demostración.** Se demostrará el lema haciendo uso de la doble implicación.

- $\boxed{\Leftarrow}$  Se supone que (3.26) se cumple y se define el trapecio circular  $S_{h, \theta_0}$ . Tomando  $z_0 = 0$  en (3.26) se tiene que  $\lambda(D) \leq M$ . Por tanto, si  $h \in [\frac{1}{4}, 1]$  se tiene que

$$\lambda(S_{h, \theta_0}) \leq \lambda(D) \leq M = \frac{1}{4} 4M \leq hM4,$$

entonces se cumple la definición tomando  $N(\lambda) \geq M \cdot 4$ . En consecuencia, podemos suponer que  $h < \frac{1}{4}$ , tomando  $z_0 = (1 - \frac{h}{2})e^{i\theta_0}$ , para  $z \in S_{h, \theta_0}$ , se tiene que

$$\frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \geq \frac{C}{1 - |z_0|^2}.$$

Por tanto, se tiene que

$$(1 - |z_0|) \int_{S_{h, \theta_0}} \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} d\lambda \geq (1 - |z_0|) \int_{S_{h, \theta_0}} \frac{C}{(1 - |z_0|)(1 + |z_0|)} d\lambda = \frac{C}{1 + |z_0|} \lambda(S_{h, \theta_0}).$$

Entonces,

$$\lambda(S_{h, \theta_0}) \leq \frac{2}{C} (1 - |z_0|) \int_{S_{h, \theta_0}} \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} d\lambda,$$

basta con tomar  $C_1 := \frac{2}{C}$  para probar la presente implicación.

- $\boxed{\Rightarrow}$  Recíprocamente, ahora se supone que  $\lambda$  es una medida de Carleson por lo que se cumple (3.25) y sea  $z_0 \in D$ . Si  $|z_0| < \frac{3}{4}$  se tiene la siguiente cota para la integral

$$\int_D \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} d\lambda(z) \leq C\lambda(D) \leq C'N(\lambda).$$

Si  $|z_0| > \frac{3}{4}$ , se define (veáse Figura 3.2)

$$E_n = \left\{ z \in D : \left| z - \frac{z_0}{|z_0|} \right| < 2^n(1 - |z_0|) \right\}.$$

Entonces, por (3.25) se tiene que  $\lambda(E_n) \leq CN(\lambda)2^n(1 - |z_0|)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Además, se tiene

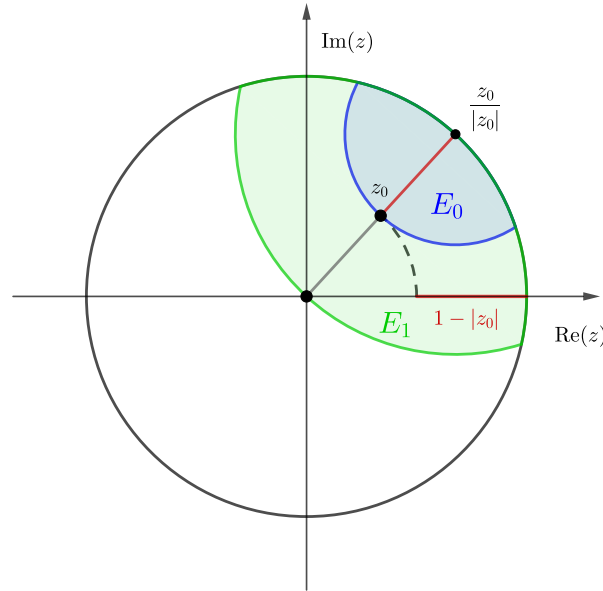


Figura 3.2: Representación de los conjuntos  $E_0$  y  $E_1$  tomando  $z_0 \in D$ .

que

$$\frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \leq \frac{C}{1 - |z_0|}, \quad z \in E_1,$$

y para  $n \geq 2$ ,

$$\frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \leq \frac{C}{2^{2n}(1 - |z_0|)}, \quad z \in E_n \setminus E_{n-1}.$$

Como los conjuntos  $E_n$  recubren el disco, es decir,  $D = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$  y existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq n_0$  se tiene que  $E_n \setminus E_{n-1} = \emptyset$ , se concluye que:

$$\begin{aligned} \int_D \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} d\lambda &\leq \int_{E_1} \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} d\lambda(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{E_n \setminus E_{n-1}} \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} d\lambda(z) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2C\lambda(E_n)}{2^{2n}(1 - |z_0|)} \leq C'N(\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = C'N(\lambda). \end{aligned}$$



□

En el semiplano superior, las medidas de Carleson se definen exigiendo (3.27) que es (3.25) con cuadrados en vez de trapecios circulares.

**Definición 3.5.4.** Una medida positiva  $\sigma$  en  $\mathcal{H}$  es una *medida de Carleson* si existe una constante  $N(\lambda)$  tal que

$$\sigma(Q) \leq N(\sigma)h \quad (3.27)$$

para cada sector  $Q = \{x_0 \leq x \leq x_0 + h, 0 < y \leq h\}$ .

El Teorema sobre medidas de Carleson, el Teorema 2.3.10 también se puede extender a espacios  $H^p$ ,  $0 < p \leq 1$ , porque la clave de su demostración fue el teorema maximal.

**Teorema 3.5.5 (de Carleson).** Sea  $\sigma$  una medida positiva en el semiplano superior. Entonces los siguientes asertos son equivalentes:

(I)  $\sigma$  es una medida de Carleson.

(II) Para todo  $p$ ,  $0 < p < \infty$ ,

$$\int |f|^p d\sigma \leq A \|f\|_{H^p}^p, \quad f \in H^p,$$

donde  $A$  es una constante.

(III) Para algún  $p$ ,  $0 < p < \infty$ ,  $f \in L^p(\sigma)$  para cada  $f \in H^p$ .

**Demostración.** ■ (I)  $\Rightarrow$  (II). Es consecuencia de (3.13) y del Lema 2.3.9.

■ (II)  $\Rightarrow$  (III). Es consecuencia de las definiciones involucradas.

■ (III)  $\Rightarrow$  (II). Haciendo uso del contrarrecíproco para  $0 < p < \infty$ ; sea  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de funciones en  $H^p$  tal que  $\|f_n\|_p = 1$  pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n|^p d\sigma = \infty$ , entonces la suma  $\sum_{n=1}^\infty f_n$  dará como resultado una función en  $H^p$  para la cual el aserto (III) no se verifica.

■ (II)  $\Rightarrow$  (I). Para  $p > 0$ . Sea  $Q$  el cuadrado  $Q = \{(x, y) : x_0 < x < x_0 + y_0, 0 < y < y_0\}$  y sea

$$f(z) = \left( \frac{1}{\pi} \frac{y_0}{(z - \bar{z}_0)^2} \right)^{1/p},$$

donde  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Entonces  $f \in H^p$  y  $\|f\|_p^p = \int P_{z_0}(t) dt = 1$ . Como para cada  $z \in Q$  se tiene que  $|f(z)|^p \geq \frac{1}{5\pi y_0}$  implica que

$$\sigma(Q) \leq \sigma(\{z : |f(z)| > 1/(5\pi y_0)^{1/p}\}) \leq 5\pi A y_0,$$

donde  $A$  es una constante; por lo que (I) se cumple. □

El Lema 3.5.6 es la versión en  $\mathcal{H}$  del Lema 3.5.3

**Lema 3.5.6.** Una medida positiva  $\lambda$  en  $\mathcal{H}$  es una medida de Carleson si, y solo si,

$$\sup_{z_0 \in \mathcal{H}} \int_{\mathcal{H}} \frac{y_0}{|z - \bar{z}_0|^2} d\lambda(z) = M < \infty \quad (3.28)$$

La constante  $M$  en (3.28) satisface

$$C_1 N(\lambda) \leq M \leq C_2 N(\lambda)$$

para constantes absolutas  $C_1$  y  $C_2$ .

**Demostración.** Demostración análoga a la del Lema 3.5.3. □



## Capítulo 4

# Sucesiones interpolantes. El Teorema de interpolación de Carleson

En el Capítulo 1 se estudió el problema de Nevalinna-Pick que fue estudiado independientemente por G. Pick en [29] y por R. Nevalinna en [25] en el que dados  $z_1, \dots, z_n$  en  $D$  y  $w_1, \dots, w_n$  en  $\overline{D}$ , se pregunta bajo qué condiciones el problema de interpolación  $f(z_j) = w_j, j = 1, \dots, n$  tiene una solución  $f(z), z \in D$  holomorfa en  $D$  y  $|f(z)| \leq 1$ . El objetivo del presente capítulo busca dar respuesta al problema de interpolación más general. Dada una función compleja  $f$  holomorfa y acotada en el semiplano superior del plano complejo, y fijada una sucesión de puntos  $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$  de dicho semiplano, es claro que la sucesión de imágenes  $\{f(z_j)\}_{j=1}^{\infty}$  es acotada. El problema de interpolación de Carleson consiste en determinar las sucesiones  $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$  como la anterior, tales que dada una sucesión acotada arbitraria  $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$  de valores complejos, es posible encontrar una función  $f$  en las condiciones indicadas de modo que  $f(z_j) = b_j$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Dichas sucesiones  $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$  reciben el nombre de sucesiones interpolantes, y su caracterización es conocida como el Teorema de interpolación de Carleson.

Sea  $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$  una sucesión en el semiplano superior  $\mathcal{H}$ . Se quiere determinar cuándo todo problema de interpolación

$$f(z_j) = a_j, \quad j \in \{1, 2, \dots\}, \quad (4.1)$$

con  $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$  acotada, tiene una solución  $f \in H^{\infty}$ .

**Definición 4.0.1.** Se dice que una sucesión  $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$  es una *sucesión interpolante* si (4.1) tiene solución en  $H^{\infty}$  para cada  $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ .

**Proposición 4.0.2.** Si  $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$  es una sucesión interpolante, entonces el operador lineal

$$\begin{aligned} T : H^{\infty} &\rightarrow \ell^{\infty} \\ f &\mapsto \{f(z_j)\}_{j=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

es una aplicación lineal acotada de  $H^{\infty}$  en  $\ell^{\infty}$ .

**Demostración.** El operador  $T$  es un operador lineal. Si  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  y  $Tf_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ , como la convergencia en  $H^{\infty}$  implica la puntual, y como la convergencia en  $\ell^{\infty}$  implica la convergencia por coordenadas, ha de ser

$$a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tf_n)_j = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_j) = f(z_j),$$

entonces  $a = Tf$ . Dado que el grafo de  $T$  es cerrado y que los espacios  $H^\infty$  y  $\ell^\infty$  son de Banach,  $T$  es continuo por el Teorema del grafo cerrado.  $\square$

Como el operador  $T$  anterior es sobreyectivo, cuando  $\{z_j\}_{j=1}^\infty$  es interpolante y ambos son completos el Teorema de la aplicación abierta establece que  $T$  es abierta, y proporciona una constante  $M$  tal que (4.1) tiene solución  $f$  con

$$\|f\|_\infty \leq M \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| = M \|a_j\|_\infty. \quad (4.2)$$

**Definición 4.0.3.** La menor constante  $M$  tal que (4.1) tiene solución  $f$  con (4.2) es llamada la *constante de interpolación*

$$M = \sup_{\|a_j\|_\infty \leq 1} \inf \{ \|f\|_\infty : f \in H^\infty, f(z_j) = a_j, j \in \{1, 2, \dots\} \}.$$

**Definición 4.0.4.** Una sucesión se dice que es *separada* si (4.3)

$$\left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq a = \frac{1}{M} > 0, \quad j \neq k \quad (4.3)$$

se cumple con una constante  $a > 0$  que no depende ni de  $j$  ni de  $k$ .

**Proposición 4.0.5.** Una sucesión interpolante es separada.

**Demostración.** Sean  $z_j$  y  $z_k$  puntos distintos de la sucesión interpolante. Entonces existe  $f \in H^\infty$  tal que

$$f(z_j) = 0, \quad f(z_k) = 1, \quad \|f\|_\infty \leq M.$$

Por el Lema 1.1.1 esto significa

$$\left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| = \rho(z_j, z_k) \geq \frac{\left| \frac{f(z_j)}{M} - \frac{f(z_k)}{M} \right|}{\left| 1 - \frac{f(z_k)f(z_j)}{M^2} \right|} = \frac{1}{M}$$

por lo tanto

$$\left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq a = \frac{1}{M} > 0, \quad j \neq k$$

con  $a = \frac{1}{M}$ .

Históricamente, fue con el teorema de interpolación que surgieron por primera vez las medidas de Carleson. Para enunciar el teorema se vuelve al caso del semiplano superior  $\mathcal{H}$ , pero antes se enuncia y demuestra un lema que hará falta para demostrar el teorema

**Lema 4.0.6.** Sea  $B(z)$  el producto de Blaschke en el semiplano superior con ceros  $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ , con  $z_j = x_j + iy_j$ , para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Entonces,

$$-\log |B(z)|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4yy_j}{|z - \bar{z}_j|^2}, \quad z = x + iy. \quad (4.4)$$

Recíprocamente, si

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} \rho(z, z_j) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \left| \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \right| = a > 0$$

entonces

$$-\log |B(z)|^2 \leq \left( 1 + 2 \log \frac{1}{a} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4yy_j}{|z - \bar{z}_j|^2}. \quad (4.5)$$

**Demostración.** La desigualdad  $-\log t \geq 1 - t, t > 0$ , da

$$-\log \left| \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \right|^2 \geq 1 - \left| \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \right|^2 = \frac{4yy_j}{|z - \bar{z}_j|^2}.$$

Sumando se obtiene (4.4). La desigualdad contraria,

$$-\log t \leq \frac{-2 \log a}{1 - a^2} (1 - t) \leq \left( 1 + 2 \log \frac{1}{a} \right) (1 - t)$$

es válida para  $a^2 < t < 1$ , como se comprueba fácilmente, y de manera similar se obtiene (4.5).  $\square$

**Teorema 4.0.7 (de interpolación de Carleson).** Si  $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$  es una sucesión en el semiplano superior, entonces los siguientes asertos son equivalentes:

(I) La sucesión es una sucesión interpolante: todo problema de interpolación

$$f(z_j) = a_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

con  $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$  tiene solución  $f \in H^{\infty}$ .

(II) Existe  $\delta > 0$  tal que

$$\inf_k \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq \delta > 0 \quad (4.6)$$

(III) La sucesión  $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$  es separada:

$$\rho(z_j, z_k) = \left| \frac{z_j - z_k}{z_j - \bar{z}_k} \right| \geq a > 0, \quad j \neq k,$$

y existe una constante  $A$  tal que para todo cuadrado  $Q = \{x_0 \leq x \leq x_0 + \ell(Q), 0 < y < \ell(Q)\}$ , de lado  $\ell(Q)$  y apoyado sobre el eje real, se tiene que

$$\sum_{z_j \in Q} y_j \leq A \ell(Q). \quad (4.7)$$

La constante  $\delta$  en (4.6) y la constante de interpolación

$$M = \sup_{\|a_j\|_{\infty} \leq 1} \inf \{ \|f\|_{\infty} : f(z_j) = a_j, j \in \{1, 2, \dots\}, f \in H^{\infty} \}$$

están relacionadas por las desigualdades

$$\frac{1}{\delta} \leq M \leq \frac{c}{\delta} \left( 1 + \log \frac{1}{\delta} \right), \quad (4.8)$$

donde  $c$  es una constante absoluta.

**Demostración (de Carleson).**  $\blacksquare$  (I)  $\Rightarrow$  (II) Para probar que (I) implica (II) se lleva un paso más allá el razonamiento dado en la demostración de la Proposición 4, para obtener así una condición necesaria para la interpolación que también será una condición

suficiente. Fijando  $z_k$ , sea  $f \in H^\infty$ ,  $\|f\|_\infty \leq M$  donde  $M$  es la constante de interpolación, que interpola los valores

$$f(z_k) = 1, \quad f(z_j) = 0, \quad j \neq k.$$

Sea  $B^{[k]}$  el producto de Blaschke cuyos ceros son  $\{z_j : j \neq k\}$ . Como  $f \neq 0$  este producto existe. Entonces  $f = B^{[k]}g$ , donde  $g \in H^\infty$ , y  $\|g\|_\infty \leq M$ , por lo que

$$1 = |f(z_k)| = |B^{[k]}(z_k)||g(z_k)| \leq M|B^{[k]}(z_k)|$$

y  $|B^{[k]}(z_k)| \geq \frac{1}{M}$ . Ya que  $z_k$  es arbitrario, se concluye que

$$\inf_k \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq \delta > 0$$

se cumple para una sucesión interpolante  $\{z_j\}_{j=1}^\infty$  con constante  $\delta = \frac{1}{M}$  y se tiene (II).

- (III)  $\Rightarrow$  (II) Se supone que (III) se cumple. Entonces por (4.7) y (3.28) se tiene que

$$\sum_j \frac{4y_k y_j}{|z_k - \bar{z}_j|^2} = \sum_j \frac{4y_k y_j}{|z_j - \bar{z}_k|^2} \leq C', \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

Por conveniencia, se obtendrá (4.9) de (4.7), esencialmente repitiendo la prueba de (3.28). Fijemos  $z_k = x_k + iy_k$  y sea  $S_n = \{z \in \mathcal{H} : |z - x_k| \leq 2^n y_k\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Nótese que  $S_n = D(x_k, 2^n y_k) \cap \mathcal{H} \subseteq Q_n = \{z = x + iy : x_k - 2^n y_k \leq x \leq x_k + 2^n y_k, 0 < y < 2^{n+1} y_k\}$  (véase Figura 4.1). Por (4.7), y  $\ell(Q_n) = 2^{n+1} y_k$ ,

$$\sum_{S_n} y_j \leq \sum_{Q_n} y_j \leq A 2^{n+1} y_k.$$

Cuando  $z_j \in S_0$ , se tiene  $|z_j - \bar{z}_k|^2 \geq y_k^2$ , y cuando  $z_j \in S_n \setminus S_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ , como  $|z_j \bar{z}_k| \geq |z_j - x_k| \geq 2^{n-1} y_k$ , se tiene  $|z_j - \bar{z}_k|^2 \geq 2^{2n-2} y_k^2$ . Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{4y_k y_j}{|z_j - \bar{z}_k|^2} &\leq 4 \sum_{z_j \in S_0} \frac{y_j}{y_k} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{z_j \in S_n \setminus S_{n-1}} \frac{y_j}{2^{2n} y_k} \right) \\ &\leq 8A + 32A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = A'. \end{aligned}$$

Ya que  $\inf_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq a$ , ahora se puede usar (4.5) en el producto de Blaschke  $B^{[k]}$  cuyos ceros son  $\{z_j : j \neq k\}$  para obtener

$$\prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq \delta = \delta(a, A).$$

Por tanto, (III) implica (II).

- (II)  $\Rightarrow$  (III) Ahora se supone que (II) se cumple, es decir, se supone

$$\inf_k \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq \delta.$$

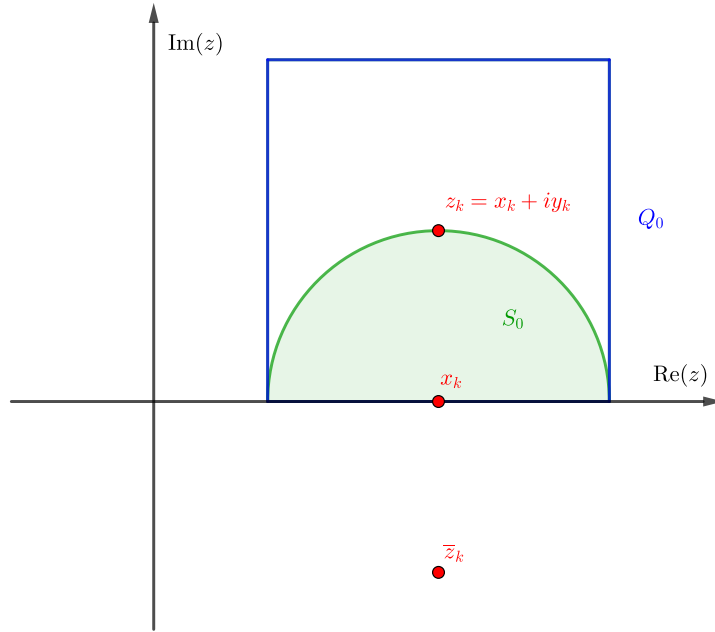


Figura 4.1: Representación de  $S_0$  y  $Q_0$  con  $z_k = x_k + iy_k$ .

Entonces,

$$\left| \frac{z_k - z_j}{z_k - \bar{z}_j} \right| \geq \delta, \quad j \neq k$$

la sucesión  $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$  es separada. Usando (4.4) con el producto de Blaschke  $B^{[k]}(z)$  que ha sido formado eliminando el cero  $z_k$ , se obtiene

$$\sum_{j, j \neq k} \frac{4y_k y_j}{|z_k - \bar{z}_j|^2} \leq 2 \log \frac{1}{\delta}.$$

Consideremos un cuadrado  $Q = \{x_0 \leq x \leq x_0 + \ell(Q), 0 < y < \ell(Q)\}$ . Primero se trata el caso especial en el cual la mitad superior  $T(Q) = \{z \in Q : y > \frac{\ell(Q)}{2}\}$  contiene un punto  $z_k$  de la sucesión, es decir,  $y_k > \frac{\ell(Q)}{2}$ . Entonces se tiene  $|z_k - \bar{z}_j|^2 \leq 5\ell^2(Q)$ ,  $z_j \in Q$ , esta desigualdad se debe a que  $\sqrt{5}\ell(Q)$  es la diagonal del rectángulo de lados  $\ell(Q)$  (horizontal) y  $2\ell(Q)$  (vertical) al que pertenecen  $z_k$  y  $\bar{z}_j$ , (véase Figura 4.2) por lo que

$$y_j \leq \frac{5\ell^2(Q)}{4y_k} \frac{4y_j y_k}{|z_k - \bar{z}_j|^2} \leq \frac{5\ell(Q)}{2} \frac{4y_j y_k}{|z_k - \bar{z}_j|^2}.$$

Por tanto

$$\sum_{z_j \in Q} y_j \leq \frac{5\ell(Q)}{2} \sum_j \frac{4y_j y_k}{|z_k - \bar{z}_j|^2} \leq \frac{5\ell(Q)}{2} \left(1 + 2 \log \frac{1}{\delta}\right)$$

y (4.7) se cumple con  $A = c(1 + \log \frac{1}{\delta})$  para los cuadrados  $Q$  tales que  $T(Q) \cap \{z_k : k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ . Para obtener (4.7) para todos los cuadrados  $Q$  se usará un argumento de parada. Sea  $Q = Q_0 = \{x_0 \leq x \leq x_0 + \ell(Q), 0 < y < \ell(Q)\}$ . Se particiona  $Q \setminus T(Q)$  en

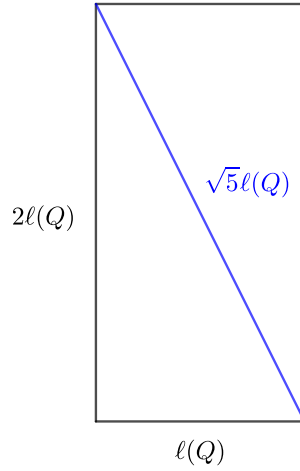


Figura 4.2: Representación geométrica de la diagonal  $\sqrt{5}\ell(Q)$  del rectángulo de lados  $\ell(Q)$  (horizontal) y  $2\ell(Q)$  (vertical).

dos cuadrados  $Q_1$ , de lado  $\frac{\ell(Q)}{2}$ . La mitad superior de  $Q_1$  es  $T(Q_1)$ , y ahora se particiona  $Q_1 \setminus T(Q_1)$  en dos cuadrados  $Q_2$  de lado  $\frac{\ell(Q_1)}{2}$  y así sucesivamente. En el paso  $n$  se tienen  $2^n$  cuadrados  $Q_n$  de lado  $\frac{\ell(Q)}{2^n}$  cuyas mitades superiores son  $T(Q_n)$  son todas congruentes a  $T(Q)$  en la métrica hiperbólica. Estos cuadrados  $Q_n$  tienen interiores disjuntos dos a dos y cubren  $\{z \in Q : 0 < y \leq \frac{\ell(Q)}{2^n}\}$ . Sean  $Q^1, Q^2, \dots$  esos cuadrados  $Q_n$  tales que  $T(Q_n) \cap \{z_j : j \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$  y  $Q_n$  no está contenido en otro cuadrado más grande con puntos  $z_j$  en su mitad superior. Entonces  $Q \cap \{z_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq Q^1 \cup Q^2 \cup \dots$ , y las proyecciones de los cuadrados seleccionados  $Q^k$  sobre el eje  $\{y = 0\}$  tienen interiores disjuntos dos a dos, por lo que

$$\sum_k \ell(Q^k) \leq \ell(Q).$$

Ya se ha visto que (4.7) se cumple para cada uno de los cuadrados seleccionados  $Q_{n_k}$ , con constante  $A = c(1 + \log \frac{1}{\delta})$ . Sumando (4.7) se tiene para los cuadrados  $Q^k$  se obtiene

$$\sum_{z_j \in Q} y_j \leq c \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right) \ell(Q)$$

que prueba (4.7) en general. Para probar la desigualdad (4.8) se debe de usar el hecho de que la constante  $A$  en (4.7) tiene la forma

$$A \leq c(1 + \log \frac{1}{\delta}). \quad (4.10)$$

- (II) y (III)  $\Rightarrow$  (I) Ahora se ha de mostrar que (II) y (III) implican (I). Sea  $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ ,  $|a_j| \leq 1$ , y se considera el problema finito

$$f(z_j) = a_j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.11)$$



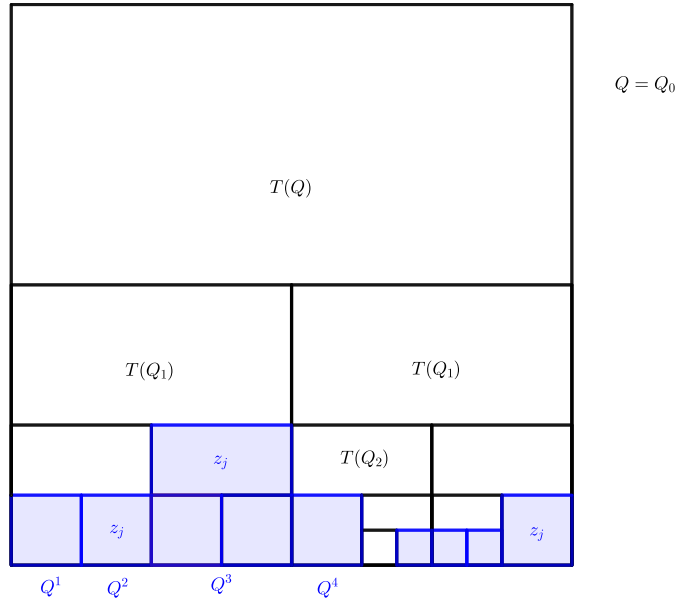


Figura 4.3: Los cuadrados sombreados  $Q^1, Q^2, \dots$  son maximales  $Q_n$  tales que  $T(Q_n) \cap \{z_j\} \neq \emptyset$ .

Ya que los puntos son distintos el problema finito (4.11) tiene solución  $f \in H^\infty$ . Por ejemplo, se toma  $f(z) = \frac{p(z)}{(z+i)^n}$ , donde  $p(z)$  es un polinomio adecuado de grado  $n$ . Consideremos el problema de interpolación finito y se define para cada  $n \in \mathbb{N}$  la familia de funciones

$$F_n = \{f \in H^\infty : f(z_j) = a_j, 1 \leq j \leq n\},$$

claramente  $F_n \supseteq F_{n+1}$ . Sea

$$M_n(\{a_j\}_{j=1}^\infty) = \inf\{\|f\|_\infty : f \in H^\infty, f(z_j) = a_j, 1 \leq j \leq n\}$$

y sea

$$M_n = \sup_{\|a_j\|_\infty \leq 1} M_n(\{a_j\}_{j=1}^\infty).$$

Claramente  $M_n(\{a_j\}_{j=1}^\infty) \leq M_{n+1}(\{a_j\}_{j=1}^\infty)$  y  $M_n \leq M_{n+1}$ . Si probamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \leq \frac{C}{\delta} \left(1 + \log \frac{1}{\delta}\right)$ , entonces  $M_n$  es acotada por, digamos  $M$ . Sea  $f_n \in F_n$  tal que  $\|f_n\|_\infty < M_n + 1 < M + 1$ . La sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  es acotada en  $H^\infty$ , luego es acotada en  $\mathcal{H}(\mathcal{H})$  con la topología compacta-abierta. Entonces, en virtud del Teorema de Montel, admite una subsucesión que converge uniformemente en los compactos de  $\mathcal{H}$   $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  hacia una función  $f$  que también será de  $H^\infty$ . Además, dado  $j \in \mathbb{N}$ , si  $k_0$  es tal que  $n_{k_0} \geq j$ , y  $k \geq k_0$ ,  $n_k \geq j$ . Entonces,

$$f_{n_k}(z_j) = a_j \quad \text{y} \quad f(z_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z_j) = a_j,$$

por lo que  $f$  resuelve el problema de interpolación.

Sea

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j}.$$

Para  $\{a_j\}_{j=1}^\infty$  fijada sea  $f_0 \in H^\infty$  una solución de (4.11). Entonces

$$M_n(\{a_j\}_{j=1}^\infty) = \inf\{\|f_0 + B_n g\|_\infty : g \in H^\infty\} = \inf\{\|f_0 \bar{B}_n + g\|_\infty : g \in H^\infty\}.$$

Como haciendo uso del Lema 3.4.4 se tiene que

$$H^\infty = \left\{ g \in L^\infty : \int_{\mathbb{R}} g G dx = 0, \text{ para toda } G \in H^1 \right\}$$

la dualidad indicada en el Lema 3.4.3 permite escribir

$$M_n(\{a_j\}_{j=1}^\infty) = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} f_0 \bar{B}_n G dx \right| : G \in H^1, \|G\|_1 \leq 1 \right\}.$$

Gracias al Corolario 3.3.6, la función  $G$  se puede tomar en el subespacio denso de  $H^1$  formado por las funciones que cumplen la condición  $|G_1(z)| = O(|z^{-2}|)$  en infinito; con esa condición, la integral en el borde de un semicírculo situado en el semiplano superior tiende, cuando el radio tiende hacia infinito, hacia la integral sobre el eje real, pues la aportación de la parte circular tiende hacia 0 dado que  $f_0$  y  $B_n$  son funciones acotadas. Entonces, aplicando el Teorema de los residuos, se deduce que:

$$\int_{\mathbb{R}} f_0 \bar{B}_n G dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{f_0(x)G(x)}{B_n(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \frac{f_0(z_j)G(z_j)}{B'_n(z_j)}.$$

Como  $f_0(z_j) = a_j, j = 1, 2, \dots, n$ , se tiene que

$$M_n = \sup_{\|a_j\|_\infty \leq 1} \sup \left\{ 2\pi \left| \sum_{j=1}^n \frac{a_j G(z_j)}{B'_n(z_j)} \right| : G \in H^1, \|G\|_1 \leq 1 \right\}.$$

Para  $G(z)$  fija, la sucesión  $\{a_j\}_{j=1}^\infty$  puede ser elegida de forma que  $|a_j| = 1$  y que

$$\frac{a_j G(z_j)}{B'_n(z_j)} \geq 0.$$

Por lo tanto se tiene

$$M_n = \sup \left\{ 2\pi \sum_{j=1}^n \frac{|G(z_j)|}{|B'_n(z_j)|} : G \in H^1, \|G\|_1 \leq 1 \right\}. \quad (4.12)$$

Ahora

$$B'_n(z_j) = \frac{-i}{2y_j} \prod_{k=1, k \neq j}^n \left( \frac{z_j - z_k}{z_j - \bar{z}_k} \right)$$

por lo que (II) implica que

$$|B'_n(z_j)| \geq \frac{\delta}{2y_j}.$$

Por tanto

$$M_n \leq \frac{4\pi}{\delta} \sup \left\{ \sum_{j=1}^n y_j |G(z_j)| : G \in H^1, \|G\|_1 \leq 1 \right\}.$$

Por (III), la medida  $\sigma = \sum_j y_j \delta_{z_j}$  es una medida de Carleson ya que

$$\sigma(Q) = \sum_{z_j \in Q} y_j \leq A\ell(Q),$$

, y por el Teorema 3.5.5

$$\sup \left\{ \sum_{j=1}^n y_j |G(z_j)| : G \in H^1, \|G\|_1 \leq 1 \right\} \leq CA,$$

donde  $A$  es la constante de (4.7). Consecuentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \leq 4\pi \frac{CA}{\delta}$$

y (I) queda probado. Es más, usando la estimación (4.10) de la constante  $A$  en (4.7), se tiene

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \leq \frac{c}{\delta} \left( 1 + \log \frac{1}{\delta} \right)$$

por lo que (4.8) queda probado. □

**Observaciones 4.0.8.** (I) A continuación se va a interpretar geoméricamente la condición (4.6). En el disco unitario  $D$  la expresión (4.6) se convierte en

$$\inf_k \prod_{j, j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_j z_k} \right| \geq \delta > 0. \quad (4.13)$$

Sea  $B(z)$  el producto de Blaschke

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{-\bar{z}_j}{|z_j|} \left( \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right).$$

Si se ve  $z_k$  como el origen tomando  $w = \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}$  como la función coordenada en el disco, entonces los ceros de  $B$  son

$$w_j = \frac{z_j - z_k}{1 - \bar{z}_k z_j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

y (4.13) se cumple si, y solo si, para todo  $k$

$$\prod_{j, j \neq k} |w_j| \geq \delta.$$

Como  $1 - |w| \leq \log \frac{1}{|w|}$  esto da

$$\sum_j (1 - |w_j|) \leq 1 + \log \frac{1}{\delta} \quad (4.14)$$

y (4.13) se cumple si, y solo si, la suma de Blaschke (4.14) tiene una cota que no depende de qué punto  $z_k$  se tome como origen. Esto por supuesto refleja la invarianza conforme del problema de interpolación (4.1). Con la identidad

$$1 - \left| \frac{z_j - z_k}{1 - \bar{z}_j z_k} \right|^2 = \frac{(1 - |z_k|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - \bar{z}_k z_j|^2}$$

por lo estudiado en la primera sección del capítulo 1, (4.14) da

$$\sup_k \sum_j \frac{(1 - |z_k|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - \bar{z}_k z_j|^2} \leq C(\delta).$$

Si este supremo se hubiera tomado sobre todos los puntos del disco en vez de solo los puntos de la sucesión, se tendría

$$\sup_{z_0 \in D} \sum_j \frac{(1 - |z_0|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z_j|^2} \leq C'(\delta). \quad (4.15)$$

Por el Lema 3.5.3, se tiene que (4.15) se cumple si, y solo si, la medida

$$\sum_j (1 - |z_j|) \delta_{z_j}$$

es una medida de Carleson en el disco. Ahora no es muy difícil de ver que (4.13) implica (4.15), y recíprocamente, si la sucesión es separable, (4.15) implica (4.13).

- (II) Excepto para el valor de la constante numérica  $c$ , la cota por arriba dada por  $M$  en (4.8) es óptima. Sea  $\omega = e^{2\pi i/N}$  la raíz primitiva  $N$ -ésima de la unidad. En el disco se toma la sucesión

$$z_j = r\omega^j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Los dos parámetros  $N$  y  $r < 1$  serán fijados después. El producto de Blaschke con ceros  $z_j$  es

$$B(z) = \frac{z^N - r^N}{1 - r^N z^N}.$$

De (4.13) se tiene

$$\delta = \inf(1 - |z_j|^2) |B'(z_j)| = Nr^{N-1} \frac{1 - r^2}{1 - r^{2N}}.$$

Consideremos el problema de interpolación

$$f(z_j) = a_j = \omega^{-j}.$$

Por el Corolario 1.2.9 este problema finito tiene una única función interpolante  $f$  de norma minimal y

$$f(z) = mB_1(z)$$

donde  $B_1$  es un producto de Blaschke con a lo sumo  $N - 1$  ceros. Como

$$z_{j+1} = \omega z_j, \quad a_{j+1} = \omega^{-1} a_j$$

la unicidad implica que

$$f(z) = \omega f(\omega z).$$

Entonces el conjunto de ceros de  $B_1(z)$  es invariante bajo la multiplicación por  $\omega$ . Al haber a lo sumo  $N - 1$  ceros, todos los ceros están en  $z = 0$ , y

$$f(z) = mz^p$$

con  $p \leq N - 1$ . Después de unas breves cuentas se tiene que

$$f(z) = r^{1-N} z^{N-1}.$$

Haciendo tender  $r \rightarrow 1$  y  $N \rightarrow \infty$ , donde  $m = r^{1-N}$  está fijada, se tiene que

$$\delta = Nm \frac{1-r^2}{m^2-r^2} \quad \text{y} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} N(1-r^2) = 2 \log m,$$

por lo que para  $N$  grande

$$\delta \geq \frac{\log m}{m}.$$

Como consecuencia existen sucesiones interpolantes finitas tales que

$$M \geq m \geq \frac{1}{\delta} \log \frac{1}{\delta}.$$

- (III) La expresión (4.7) dice que  $\sum y_j \delta_{z_j}$  es una medida de Carleson. La condición (III), siendo más geométrica, es en algunos casos más útil que (II). Se ponen dos ejemplos. Primero, se supone que los puntos  $z_j$  están posicionados en la línea horizontal  $\{y_j = y > 0\}$ . Entonces (4.7) se cumple siempre y cuando la sucesión de los puntos sea separada. Por lo que una sucesión horizontal es una sucesión interpolante si, y solo si, es separada. En el segundo ejemplo, se supone que los puntos  $z_j$  se sitúan en la línea vertical  $\{x = 0\}$ . Entonces (4.7) se cumple si, y solo si,

$$\sum_{y_j \leq y_k} y_j \leq Ay_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Esta condición se satisface si la sucesión es separada. Si los  $y_j$  están acotados por arriba y si los puntos están indexados de forma que  $y_{j+1} < y_j$ , entonces la condición se cumple si, y solo si, los puntos tienden al eje horizontal de forma exponencial:

$$\frac{y_{j+1}}{y_j} \leq \alpha < 1.$$

Por tanto una sucesión vertical es una sucesión interpolante si, y solo si, es separada. Por supuesto, no toda sucesión separada satisface (4.7). Una sucesión que solo cumple (4.3) puede no ser una sucesión de Blaschke, podría tener subsucesiones que converjan no tangencialmente a cada punto del eje real.



## Apéndice A

# Miscelánea de resultados del Análisis Matemático

Este anexo recoge una colección de resultados que se usan a lo largo de este Trabajo Fin de Grado.

**Proposición A.0.1 (Desigualdad de Hölder).** Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida. Sean  $p$  y  $q$  exponentes conjugados,  $p, q \in (1, \infty)$ . Si  $f, g$  son dos funciones medible en  $X$  no negativas, entonces

$$\int_X fg d\mu \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_X g^q d\mu \right)^{1/q}.$$

**Teorema A.0.2 (de la convergencia monótona, de Lebesgue).** Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida. Sea  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de funciones medibles y no negativas tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$f_n \leq f_{n+1}.$$

Entonces la función definida casi siempre por  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  es medible y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n = \int_X f$ .

**Teorema A.0.3 (de la convergencia dominada de Lebesgue).** Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida. Sea  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de funciones medibles  $\mathbb{K}$ -valuadas en  $X$  tal que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \text{para cada } x \in X.$$

Si existe  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  tal que

$$|f_n(x)| \leq_{\text{c.s}} g(x), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } x \in X.$$

Entonces:

- (I)  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  pertenece a  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .
- (II)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ .
- (III)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ .

**Teorema A.0.4 (del módulo máximo).** Sean  $\Omega$  un abierto conexo de  $\mathbb{C}$  y  $f$  una función holomorfa en  $\Omega$ . Entonces:

- (I) Si  $|f|$  presenta un máximo local en un punto  $z_0 \in \Omega$ , es decir, si existe un entorno  $V$  de  $z_0$  con  $V \subseteq \Omega$  y de modo que  $|f(z_0)| \geq |f(z)|$  para todo  $z \in V$ , entonces  $f$  es constante en  $\Omega$ .
- (II) Se supone además que  $\Omega$  es acotado y que  $f$  es continua en  $\overline{\Omega}$ . Entonces,  $|f|$  alcanza su máximo absoluto en la frontera de  $\Omega$ ; es decir, existe un punto  $\xi \in \text{Fr}(\Omega)$  tal que  $|f(\xi)| \geq |f(z)|$  para todo  $z \in \Omega$ .

**Teorema A.0.5 (de Harnack, primera versión).** Si una sucesión de funciones armónicas en un dominio acotado  $\Omega$  y continuas en  $\overline{\Omega}$  converge uniformemente en  $\partial\Omega$ , entonces converge uniformemente en  $\Omega$  a una función armónica

**Teorema A.0.6 (de Banach-Alaoglu).** Sea  $1 < p < \infty$  y  $f_n \in L^p$  una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión débilmente convergente a  $f \in L^p$ .

Veamos el siguiente esquema para las convergencias en los espacios  $L^p$  con  $1 < p < \infty$ :

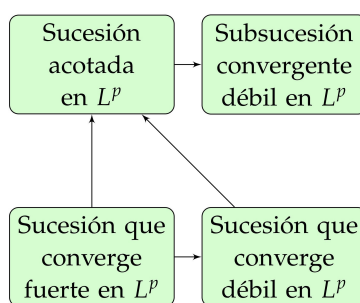


Figura A.1: Convergencias de sucesiones en los espacios  $L^p$ .

**Teorema A.0.7 (de Montel).** Una familia uniformemente acotada de funciones holomorfas definidas en un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$  es normal.



# Bibliografía

- [1] L. V. Ahlfors. *Conformal Invariants, Topics in Geometric Function Theory*. Mc Graw-Hill, 1973.
- [2] R. Ash. *Complex Variables*. Dover, 2004.
- [3] A. Beurling. On two problems concerning linear transformations in hilbert space. *Acta Math*, 1949.
- [4] W. Blaschke. Eine erweiterung des satzes von vitali über folgen analytischer funktionen. *S. -B. Sächs Akad. Wiss. Leipzig Math. -Natur. Kl.*, 1915.
- [5] C. Carathéodory. Über den variabilitätsbereich der fourier'schen konstanten von positiven harmonischen funktionen. *Rend. Circ. Mat*, 1911.
- [6] C. Carathéodory. *Theory of Functions of a Complex Variable. Volume One and Two*. Chelsea Publishing, 1954.
- [7] L. Carleson. An interpolation problem for bounded analytic functions. *Amer. J. Math*, 1958.
- [8] L. Carleson. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. *Annals of Mathematics*, 1962.
- [9] L. Carleson. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. *Proc. Internat. Congr. Math. Stockholm*, 1962.
- [10] S. Chaplick, H. Förster, M. Kryven, and A. Wolff. On arrangements of orthogonal circles. 2019.
- [11] J.B. Conway. *Functions of One Complex Variable I*. Springer, 1978.
- [12] W.F. Donoghue. *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*. Springer, 1974.
- [13] P. Fatou. Séries trigonometriques et séries de taylor. *Acta Math*, 1906.
- [14] O. Frostman. Potential d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.*, 1935.
- [15] F. Galindo, Gómez J., J. Sanz, and L. A. Tristán. *Guía práctica de Variable Compleja y sus aplicaciones*. Ediciones Universidad de Valladolid; N.º 1 edición (27 septiembre 2019), 2019.
- [16] J.B. Garnett. *Bounded Analytic Functions*. Springer, 2007.

- [17] A. Garsia. *Topics in Almost Everywhere Convergence*. Markham, 1970.
- [18] G.H. Hardy and J.E. Littlewood. A maximal theorem with function-theoretic applications. *Acta Math*, 1930.
- [19] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 1959.
- [20] W. K. Hayman and P. L. Kennedy. *Subharmonic Functions*. Academic Press, 1976.
- [21] J. L. W. V. Jensen. Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. *Acta Math*, 1899.
- [22] G. A. Jones and D. Singerman. *Complex functions: an algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press, 1987.
- [23] D.E. Marshall. An elementary proof of the pick-nevanlinna interpolation theorem. *Michigan Math*, 1974.
- [24] D.E. Marshall. Approximation and interpolation by inner functions. *Thesis, University of California*, 1976.
- [25] R. Nevanlinna. Über beschränkte funktionen die in gegebenen punkten vorgeschrieben werte annehmen. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 1919.
- [26] R. Nevanlinna. Über beschränkte analytische funktionen. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 1929.
- [27] K. Noshiro. *Cluster sets*. Springer-Verlag, 1960.
- [28] M. Parreau. Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de riemann. *Ann. Inst. Fourier*, 1951.
- [29] G. Pick. Über die beschränkungen analytische funktionen, welche durch vorgegebene funktionswerte bewirkt werden. *Annals of Mathematics*, 1916.
- [30] F. Riesz. Über die randwerte einer analytischen funktionen. *Math. Z.*, 1923.
- [31] F. Riesz and M. Riesz. Über randwerte einer analytischen funktionen. *Quatrième Congrès des Math. Scand. Stockholm*, 1916.
- [32] W. Rudin. Analytic functions of class  $h_p$ . *Amer. Math. Soc*, 1955.
- [33] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill, 1987.
- [34] I. Schur. Über potenzreihen die im innern des einheitskreises beschränkt sind. *J. Reine Angew. Math*, 1917.
- [35] K. Seip. *Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions. University Lecture Series. Volume 33*. American Mathematical Society, 1962.
- [36] V. I. Smirnov. Sur les valeurs limits des fonctions, regulière à l'intérieur d'un cercle. *J. Soc. Phys. Math. Léningrade*, 1929.
- [37] C. Stanley Ogilvy. *Excursions in geometry*. Oxford University Press, 1969.

- [38] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970.
- [39] E. M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1970.
- [40] B. Sz.-Nagy and A. Korányi. Relations d'un problème de nevanlinna et pick avec la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien. *Science Academy of Hungary*, 1956.
- [41] O. Toeplitz. Über die fouriersche entwicklung positiver funktionen. *Rend. Circ. Mat*, 1911.
- [42] M. Tsuji. *Potential Theory in Modern Function Theory*. Chelsea Publishing, 1959.
- [43] A. Zygmund. *Trigonometric Series, 2nd ed.* Cambridge University Press, 1968.