Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Predicción secuencial y estrategias de inversión

Autor: Álvaro Delgado Pérez

Tutor: Eustasio del Barrio Tellado

Abstract

The prediction problem consists on the evaluation of future items of a series from a collection of observations. The problem can be approached from a statistical point of view, assuming the series fits some stochastic process model, so that information provided by past observations can be used to estimate the risk associated with different prediction strategies and, in this way, find an optimal strategy in the sense of minimizing risk. However, this approach is not appropriate in situations in which it is not assumable that the behavior of the series to be predicted adjusts to a stochastic process model (what happens, for example, if the series responds to an adversarial behaviour). In this work it is proposed to explore adequate ways of evaluating the performance of prediction strategies in this framework, looking, if possible, for minimax strategies, that is, strategies that are appropriate in the most adverse conditions possible. The work would also explore the connection between the prediction problem and the construction of investment strategies and the application to the appropriate selection of wallets will be studied.

Resumen

El problema de predicción consiste en la valoración de términos futuros de una serie a partir de una colección de observaciones. El problema se puede abordar desde un punto de vista estadístico, asumiendo que la serie se ajusta a algún modelo de proceso estocástico, de forma que se puede aprovechar la información aportada por observaciones pasadas para estimar el riesgo asociado a diferentes estrategias de predicción y, de esta forma, encontrar una estrategia óptima en el sentido de minimizar el riesgo. Sin embargo este planteamiento no es apropiado en situaciones en las no es asumible que el comportamiento de la serie a predecir se ajuste a un modelo de proceso estocástico (lo que ocurriría, por ejemplo, si la serie responde a un comportamiento adversarial). En este trabajo se propone explorar formas adecuadas de evaluar el rendimiento de estrategias de predicción en este marco, buscando, si es posible, estrategias minimax, es decir, estrategias que resulten apropiadas en las condiciones más adversas posibles. En el trabajo se explorará también la conexión entre el problema de predicción y la construcción de estrategias de inversión y se estudiará la aplicación a la selección adecuada de carteras.

Índice general

1

El problema de la predicción.

La predicción que vamos a tratar a lo largo del trabajo es la referente a evoluciones a corto plazo de distintos fenómenos. Esta forma de predicción se encuentra en multitud de ámbitos, como la predicción del tiempo, los precios de diversos activos o el juego. Aunque la naturaleza de los problemas son diferentes, todos se basan en la misma estructura:

A partir de una secuencia de datos del pasado, $y_1, y_2 ... y_{t-1}$, un pronosticador trata de predecir el siguiente elemento de la sucesión y_t antes de que éste sea revelado.

En la teoría clásica de predicción secuencial, se supone que la secuencia de resultados con la que trabajamos se ajusta a algún modelo estocástico, de forma que uno puede derivar propiedades estadísticas de las secuencias observadas y realizar sus predicciones basándose en dichas estimaciones, sin embargo, en situaciones en las que no podemos (o no queremos) asumir el comportamiento de cómo la secuencia a predecir ha sido generada, hemos de proceder de forma diferente, con lo que se ha denominado como la predicción de secuencias individuales.

Debido a que no contamos con un modelo probabilístico en el que basar nuestras predicciones, no tenemos en principio una función que haga recuento de las pérdidas con la que medir el rendimiento del pronosticador. Por ende, para no realizar suposiciones sobre la forma que toman estas funciones, aunque se expondrán varias de ellas a lo largo del trabajo, se introduce unos analistas de referencia que vamos a denominar *expertos*. Los expertos realizan sus predicciones y éstas se hacen disponibles para el pronosticador antes de que se revele el siguiente elemento de la secuencia. El pronosticador realiza su predicción basándose en las recomendaciones de los expertos, de forma que su pérdida acumulada se mantenga próxima a la del mejor experto.

La diferencia entre la pérdida acumulada por un experto y la del pronosticador es lo que denominaremos *arrepentimiento*, que se puede entender como el arrepentimiento que "siente" el pronosticador una vez se ha revelado el siguiente resultado por no haber seguido la recomendación de dicho experto. La naturaleza de estos expertos varía según la aplicación en la que nos encontremos.

Es por esto que se trata de construir pronosticadores que nos garanticen un arrepentimiento pequeño frente a todos los expertos de los que disponemos. La posibilidad de lograr este objetivo depende del tamaño y la estructura de la clase de los expertos y de la función de pérdida con la que estemos tratando.

El presente trabajo estudia los problemas anteriormente descritos empleando el libro *Prediction, learning, and games* de Nicolò Cesa-Bianchi y Gábor Lugosi. En su desarrollo se añaden demostraciones de algunos resultados no incluidos en el libro, propuestos como ejercicio en algunos casos. Estas demostraciones son el resultado de trabajo personal.

En el el segundo y tercer capítulo, se va a estudiar la generación de pronosticadores a partir de diversas estrategias, así como las diferentes funciones de pérdida que se pueden considerar al analizar el rendimiento de los pronosticadores. También se buscarán formas de acotar el arrepentimiento que sufre un pronosticador frente a los expertos u otros pronosticadores generados (expertos simulables). En el cuarto capítulo se hará hincapié en el uso de la pérdida logarítmica para el análisis de las estrategias de predicción, donde se van a introducir pronosticadores que asignan una probabilidad a cada suceso posible de forma que sus predicciones se basan en dichas probabilidades. También se introduce una manera de proceder cuando tratamos de usar información adicional en el proceso de predicción. Por último en el capítulo 5 se aplica todo lo expuesto al problema de inversión secuencial en la bolsa (o activos en general) y se estudia la relación entre el problema de inversión y el de predicción. Aquí se introducirán varias estrategias de inversión como son la cartera universal o la estrategia EG, así como la forma de proceder cuando contamos con información adicional y sabemos cómo esta va a afectar al mercado.

A lo largo del trabajo se expondrán resultados importantes para la búsqueda de cotas para el arrepentimiento, así como condiciones en las que se puede considerar que el pronosticador ha ganado al entorno y viceversa. También se expondrán ciertos resultados que nos indican las estrategias óptimas que se pueden llegar a seguir, así como una versión del teorema minimax, el cual nos indica en qué situaciones es posible el intercambio entre el minimax y el maximin, y se estudiarán formas de alcanzar dichos valores en la medida de lo posible.

2

Predicción asesorada por expertos

Para el desarrollo de la predicción asesorada por expertos presentamos la notación que se va a utilizar a lo largo del presente trabajo:

El pronosticador que va a tomar las decisiones trata de predecir los elementos de una *secuencia desconocida* $y_1, y_2, ...$ de un *espacio de resultados* $\mathcal{Y}$, donde las *predicciones* $\widehat{p}_i$ se encuentran en el *espacio de toma de decisiones* $\mathcal{D}$, el cual suponemos que es un subconjunto convexo de un espacio vectorial, y que a veces, aunque no normalmente, coincide con el espacio de resultados.

Una vez el pronosticador ha realizado su predicción, su rendimiento se compara con un conjunto de pronosticadores de referencia que hemos denominado *expertos*. En cada instante de tiempo t, el pronosticador tiene acceso a las *predicciones de los expertos* $\{f_{E,t} : E \in \mathcal{E}\}$ donde $f_{E,t} \in \mathcal{D}$, y $\mathcal{E}$ es un conjunto fijado de índices de expertos. Basándose en las predicciones de los expertos, el pronosticador realiza su predicción $\widehat{p}_t$ del siguiente resultado de la serie y_t.

Se mide el rendimiento de las predicciones gracias a una función no negativa que llamaremos *función de pérdida* $l : \mathcal{D} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.

En resumen, el marco general que se sigue es el siguiente: Trabajamos con un espacio de decisión $\mathcal{D}$ y sobre un espacio de resultados $\mathcal{Y}$, gracias al conjunto $\mathcal{E}$ de índice de expertos y la función de pérdida l. Para cada ronda $t = 1, 2, ...$

1. El entorno genera el siguiente elemento y_t y la recomendación de los expertos $\{f_{E,t} \in \mathcal{D} : E \in \mathcal{E}\}$, que se revela al pronosticador.
2. El pronosticador hace la predicción $\widehat{p}_t \in \mathcal{D}$.
3. El entorno revela y_t
4. El pronosticador sufre la pérdida $l(\hat{p}_t, y_t)$ y cada experto E sufre la pérdida $l(f_{E,t}, y_t)$

También, a lo largo del trabajo se va a hacer uso de los siguientes conceptos:

- Pérdida acumulada por el pronosticador tras n rondas

$$\widehat{L}_n = \sum_{t=1}^{n} l(\widehat{p}_t, y_t) \tag{2.0.1}$$

- Pérdida acumulada por el experto E tras n rondas

$$L_{E,n} = \sum_{t=1}^{n} l(f_{E,t}, y_t) \tag{2.0.2}$$

- Arrepentimiento instantáneo respecto al experto E en el tiempo t

$$r_{E,t} = l(\widehat{p}_t, y_t) - l(f_{E,t}, y_t) \tag{2.0.3}$$

  Éste se puede entender como el arrepentimiento que siente el pronosticador de no haber seguido la recomendación dada por el experto E una vez ha sido revelado el resultado y_t.

- Arrepentimiento respecto al experto E tras n rondas

$$R_{E,n} = \widehat{L}_n - L_{E,n} = \sum_{t=1}^{n} (l(\widehat{p}_t, y_t) - l(f_{E,t}, y_t)) \tag{2.0.4}$$

  o, dado el arrepentimiento instantáneo, también se puede expresar como

$$R_{E,n} = \sum_{t=1}^{n} r_{E,t} \tag{2.0.5}$$

Como hemos mencionado, el objetivo del pronosticador consiste en mantener un arrepentimiento mínimo respecto a cada experto. Para este primer capítulo asumimos que el número de expertos es finito utilizando los subíndices $i = 1, ..., N$ para referirnos a cada uno de ellos. Dado que el pronosticador quiere mantener el arrepentimiento lo más pequeño posible, éste puede querer llegar a obtener una pérdida que disminuya uniformemente con cada ronda, de forma que ésta sea una $o(n)$, es decir

$$\frac{1}{n}\left(\widehat{L}_n - \min_{i=1,\dots,N} L_{i,n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{2.0.6}$$

Es por esto, que a lo largo de éste capítulo y de los posteriores, vamos a presentar diversas formas que pueden tomar los pronosticadores y las funciones de pérdida y a analizar qué comportamientos de pueden deducir de ellos.

2.1 Pronosticador de peso ponderado

Un pronosticador de peso ponderado es el que realiza su predicción ponderando las recomendaciones de los expertos, de forma que en el momento t predice de acuerdo con

$$\widehat{p}_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} f_{i,t}}{\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1}} \tag{2.1.1}$$

donde cada $w_{i,t-1} \geq 0$ denomina el peso que se le asigna al experto i en el instante t.

Gracias a la convexidad del espacio de toma de decisiones, y a que el pronosticador es una combinación lineal de elementos de éste, $\widehat{p}_t \in \mathcal{D}$. Dado que como hemos expuesto, tratamos de minimizar el arrepentimiento, una manera lógica de asignar cada peso, es hacerlo a partir del arrepentimiento que hemos experimentado hasta el momento $t-1$, de forma que si nuestro arrepentimiento frente al experto i es grande, a éste le asignaremos un peso mayor, y viceversa. Por lo tanto, a las recomendaciones de los expertos que tienen una pérdida acumulada menor, es decir, que han cometido menos errores hasta el momento, les asignamos un mayor peso en la siguiente predicción.

De esta manera, podemos entender la asignación de pesos como una aplicación que crece junto al arrepentimiento respecto a cada experto. Para trabajar con dicha aplicación, vamos a definir la función creciente, convexa y no negativa en cuestión como $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde el pronosticador va a hacer uso de su derivada ϕ', para determinar el peso asignado a cada experto, de forma que $w_{i,t-1} = \phi'(R_{i,t-1})$.

Definición 2.1. Dada una función función creciente, convexa , derivable y no negativa ϕ, el *pronosticador de peso ponderado* es el que realiza su predicción en el momento t por

$$\widehat{p}_t = \frac{\sum_{i=1}^N \phi'(R_{i,t-1}) f_{i,t}}{\sum_{i=1}^N \phi'(R_{i,t-1})} \tag{2.1.2}$$

que depende como hemos expuesto, de las recomendaciones de cada experto en el momento t de predicción y del arrepentimiento acumulado hasta $t-1$.

Antes de proseguir, señalemos varias observaciones técnicas sobre este tipo de pronosticadores.

Lema 2.1. *Si la función de pérdida l es convexa en su primer argumento, entonces*

$$\sup_{y_t \in \mathcal{Y}} \sum_{i=1}^N r_{i,t} \phi'(R_{i,t-1}) \leq 0.$$

Demostración. Dada la convexidad de l en su primer argumento, obtenemos a partir de la desigualdad de Jensen que para cada $y \in \mathcal{Y}$

$$l(\widehat{p}_t, y) = l\left(\frac{\sum_{i=1}^N \phi'(R_{i,t-1}) f_{i,t}}{\sum_{i=1}^N \phi'(R_{i,t-1})}, y\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^N \phi'(R_{i,t-1}) l(f_{i,t}, y)}{\sum_{i=1}^N \phi(R_{i,t-1})}.$$

□

Para lo que sigue, definamos el *vector de arrepentimiento instantáneo* como $\mathbf{r}_t = (r_{1,t}, ..., r_{N,t}) \in \mathbb{R}^N$, con su correspondiente *vector de arrepentimiento*, dado por $\mathbf{R}_n = \sum_{t=1}^n \mathbf{r}_t$ para simplificar la notación. También, por razones que se van a presentar a continuación, presentamos la función potencial $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que toma la forma

$$\Phi(\mathbf{u}) = \psi\left(\sum_{i=1}^N \phi(u_i)\right) \tag{2.1.3}$$

donde ψ es cualquier función real no negativa, estrictamente creciente, cóncava, y dos veces diferenciable y ϕ es cualquier función real no negativa, creciente, y dos veces diferenciable.

Gracias a esto, podemos definir la predicción dada por el pronosticador de peso ponderado como

$$\widehat{p}_t = \frac{\sum_{i=1}^N \nabla\Phi(\mathbf{R}_{t-1})_i f_{i,t}}{\sum_{j=1}^N \nabla\Phi'(\mathbf{R}_{t-1})_j} \tag{2.1.4}$$

donde $\nabla\Phi(\mathbf{R}_{t-1})_i = \partial\Phi(\mathbf{R}_{t-1})/\partial R_{i,t-1}$ es la componente i del gradiente del vector de arrepentimiento. Notemos que dada la definición del pronosticador, este es independiente de ψ, debido a la cancelación de sus derivadas.

El resultado del Lema 2.1 es equivalente a

$$\sup_{y_t \in Y} \mathbf{r}_t \cdot \nabla\Phi(R_{t-1}) \leq 0 \tag{2.1.5}$$

denominada *condición de Blackwell*. Esta condición muestra cómo la función Φ juega un papel similar al de un potencial en un sistema dinámico, de ahí que lo hayamos denominado como tal. Es así como el pronosticador de peso ponderado mantiene el punto del vector de arrepentimiento próximo al mínimo de la función, forzándolo a apuntar en la dirección contraria al gradiente de Φ.

El siguiente resultado nos servirá a lo largo del trabajo para establecer acotaciones en el arrepentimiento para las diferentes formas que puede tomar el pronosticador de peso ponderado.

Teorema 2.1. *Dado un pronosticador que cumple la condición de Blackwell para su potencial $\Phi(\boldsymbol{u}) = \psi\left(\sum_{i=1}^N \phi(u_i)\right)$, para cada $n = 1, 2, \ldots$ se tiene*

$$\Phi(\boldsymbol{R}_n) \leq \Phi(\boldsymbol{0}) + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} C(\boldsymbol{r}_t)$$

donde

$$C(\boldsymbol{r}_t) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_N} \psi'\left(\sum_{i=1}^N \phi(u_i)\right) \sum_{i=1}^N \phi''(u_i) r_{i,t}^2.$$

Demostración. Comenzamos aplicando el teorema de Taylor de forma que

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{R}_t) &= \Phi(\mathbf{R}_{t-1} + \mathbf{r}_t) \\
&= \Phi(\mathbf{R}_{t-1}) + \nabla\Phi(\mathbf{R}_{t-1}) \cdot \mathbf{r}_t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j}\right|_{\xi} r_{i,t} r_{j,t} \\
&\leq \Phi(\mathbf{R}_{t-1}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j}\right|_{\xi} r_{i,t} r_{j,t}
\end{aligned}$$

donde la desigualdad se debe a la condición de Blackwell y ξ es un vector en $\mathbb{R}^N$. Operando con el último sumando llegamos a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j}\right|_{\xi} r_{i,t} r_{j,t} &= \psi''\left(\sum_{i=1}^N \phi(\xi_i)\right) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi'(\xi_i)\phi'(\xi_j) r_{i,t} r_{j,t} + \psi'\left(\sum_{i=1}^N \phi(\xi_i)\right) \sum_{i=1}^N \phi''(\xi_i) r_{i,t}^2 \\
&= \psi''\left(\sum_{i=1}^N \phi(\xi_i)\right) \left(\sum_{i=1}^N \phi'(\xi_i) r_{i,t}\right)^2 + \psi'\left(\sum_{i=1}^N \phi(\xi_i)\right) \sum_{i=1}^N \phi''(\xi_i) r_{i,t}^2 \\
&\leq \psi'\left(\sum_{i=1}^N \phi(\xi_i)\right) \sum_{i=1}^N \phi''(\xi_i) r_{i,t}^2 \leq C(\mathbf{r}_t)
\end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad se debe a la concavidad de ψ.

Tenemos por tanto $\Phi(\mathbf{R}_t) \leq \Phi(\mathbf{R}_{t-1}) + C(\mathbf{r}_t)/2$, de forma que sumando hasta el momento n obtenemos la expresión deseada.

□

El teorema puede ser reformulado de la siguiente manera en la que va a ser más utilizado a lo largo del trabajo. Gracias a la monotonía de ϕ y ψ

$$\psi\left(\phi\left(\max_{i=1,\ldots,N} R_{i,n}\right)\right) = \psi\left(\max_{i=1,\ldots,N} \phi(R_{i,n})\right) \leq \psi\left(\sum_{i=1}^{N} \phi(R_{i,n})\right) = \Phi(\mathbf{R}_n).$$

De forma que si tanto ψ como ϕ son invertibles (ψ lo es por definición) tenemos

$$\max_{i=1,\ldots,N} R_{i,n} \leq \phi^{-1}(\psi^{-1}(\Phi(\mathbf{R}_n)))$$

donde $\Phi(\mathbf{R}_n)$ se sustituye por la cota que se ha presentado en el teorema.

Esto muestra la importancia de ψ en el análisis de este tipo de pronosticadores. Notemos que la convexidad de ϕ no ha sido necesaria para la prueba del teorema, por lo que no se ha mencionado en la definición de la función potencial Φ, sin embargo, los pronosticadores con los que vamos a tratar en el presente trabajo que se basan en potenciales, han sido construidos a partir de una función ϕ convexa.

Pronosticador de peso ponderado polinómicamente

Este pronosticador se construye a partir del potencial

$$\Phi_p(\mathbf{u}) = \left(\sum_{i=1}^{N} (u_i)_+^p\right)^{2/p} = \|\mathbf{u}_+\|_p^2 \tag{2.1.6}$$

para $p \geq 2$ y donde $\mathbf{u}_+$ representa el vector formado a partir de las partes positivas de $\mathbf{u}$. De esta forma los pesos asignados a cada experto vienen dados por

$$w_{i,t-1} = \nabla\Phi_p(\mathbf{R}_{t-1})_i = \frac{2(R_{i,t-1})_+^{p-1}}{\|(\mathbf{R}_{t-1})_+\|_p^{p-2}}$$

así la predicción dada por el pronosticador toma la forma

$$\widehat{p}_t = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{t-1}(l(\widehat{p}_s, y_s) - l(f_{i,s}, y_s))\right)_+^{p-1} f_{i,t}}{\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{s=1}^{t-1}(l(\widehat{p}_s, y_s) - l(f_{i,s}, y_s))\right)_+^{p-1}}. \tag{2.1.7}$$

Como habíamos comentado al comienzo del capítulo, es deseable que el arrepentimiento disminuya a medida que pasa el tiempo. Veamos que el pronosticador con el que nos encontramos satisface el siguiente resultado.

Corolario 2.1. *Dada una función de pérdida l, convexa en su primer argumento, que toma valores en $[0,1]$. Se tiene que para cualquier secuencia de resultados y para cualquier $n \geq 1$, el arrepentimiento del pronosticador de peso ponderado polinómicamente cumple la desigualdad*

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,\ldots,N} L_{i,n} \leq \sqrt{n(p-1)N^{2/p}}$$

de forma que si $p \geq 2$, el arrepentimiento por ronda 2.0.6 converge uniformemente a razón de $O(1/\sqrt{n})$.

Si se toma $p = 2\ln N$ para $N > 2$ se puede minimizar aproximadamente dicha cota superior de forma que se obtiene una mejor dependencia con el número de expertos

$$\widehat{L_n} - \min_{i=1,\ldots,N} L_{i,n} \leq \sqrt{ne(2\ln N - 1)}.$$

Demostración. Sean $\phi(x) = x_+^p$, $\psi(x) = x^{2/p}$, $\psi'(x) = \frac{2}{px^{(p-2)/p}}$ y $\phi''(x) = p(p-1)x_+^{p-2}$.

Partiendo de la desigualdad de Hölder aplicada a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \phi''(u_i) r_{i,t}^2 &= p(p-1) \sum_{i=1}^{N} (u_i)_+^{p-2} r_{i,t}^2 \\ &\leq p(p-1) \left(\sum_{i=1}^{N} \left((u_i)_+^{p-2} \right)^{p/(p-2)} \right)^{(p-2)/p} \left(\sum_{i=1}^{N} |r_{i,t}|^p \right)^{2/p}\end{aligned}$$

donde, gracias a las definiciones de las funciones auxiliares obtenemos que

$$\psi' \left(\sum_{i=1}^{N} \phi(u_i) \right) \sum_{i=1}^{N} \phi''(u_i) r_{i,t}^2 \leq 2(p-1) \left(\sum_{i=1}^{N} |r_{i,t}|^p \right)^{2/p}.$$

Dado que se cumplen las condiciones del Teorema 2.1 con $C(\mathbf{r}_t) \leq 2(p-1)\|r_t\|_p^2$ y que $\Phi(\mathbf{0}) = 0$ obtenemos gracias a su aplicación

$$\left(\sum_{i=1}^{N} (R_{i,n})_+^p \right)^{2/p} = \Phi_p(\mathbf{R}_n) \leq (p-1) \sum_{t=1}^{n} \|\mathbf{r}_t\|_p^2 \leq n(p-1)N^{2/p}.$$

Por último, puesto que

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,\ldots,N} L_{i,n} = \max_{i=1,\ldots,N} R_{i,n} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} (R_{i,n})_+^p \right)^{1/p}$$

se obtiene el resultado. □

Notemos que el hecho de que se haya definido el potencial usando $\psi(x) = x^{2/p}$ ha sido por conveniencia a la hora de realizar el último análisis, pero se obtienen resultados similares tomando otras funciones, ya que como hemos mencionado previamente, la elección de $\psi(x)$ no influye en las predicciones realizadas.

Pronosticador de peso ponderado exponencialmente

Este pronosticador está generado a partir del potencial

$$\Phi_\eta(\mathbf{u}) = \frac{1}{\eta} ln \left(\sum_{i=1}^{N} e^{\eta u_i} \right) \quad \text{para } \eta > 0 \tag{2.1.8}$$

de forma que los pesos asignados a cada experto vienen dados por

$$w_{i,t-1} = \nabla\Phi_\eta(\mathbf{R}_{t-1})_i = \frac{e^{\eta R_{i,t-1}}}{\sum_{j=1}^{N} e^{\eta R_{j,t-1}}},$$

tomando así la predicción dada por el pronosticador la forma

$$\widehat{p}_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} \exp(\eta(\widehat{L}_{t-1} - L_{i,t-1})) f_{i,t}}{\sum_{i=1}^{N} \exp(\eta(\widehat{L}_{t-1} - L_{i,t-1})} = \frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta L_{i,t-1}} f_{i,t}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\eta L_{j,t-1}}}. \tag{2.1.9}$$

Se obtiene así un pronosticador que depende exclusivamente de cómo de buenas han resultado ser las recomendaciones pasadas de los expertos, donde otro tipo de pronosticadores hacen uso de las predicciones pasadas hechas por el mismo pronosticador hasta el momento.

Corolario 2.2. *Dada una función de pérdida l, convexa en su primer argumento, que toma valores en* $[0,1]$*. Se tiene que para cualquier* $\eta > 0$*, cualquier secuencia de resultados y para cualquier* $n \geq 1$*, el arrepentimiento del pronosticador de peso ponderado exponencialmente cumple la desigualdad*

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,\dots,N} L_{i,n} \leq \frac{\ln N}{\eta} + \frac{n\eta}{2}.$$

Donde para un valor de $\eta = \sqrt{2\ln N/n}$ *se logra una cota óptima*

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,\dots,N} L_{i,n} \leq \sqrt{2\ln N}.$$

Esta cota resulta en una mejora con respecto a la obtenida para el pronosticador de peso ponderado polinómicamente.

Demostración. Aplicando de nuevo el Teorema 2.1 con las funciones $\phi(x) = e^{\eta x}$ y $\psi(x) = (1/\eta)\ln x$ y la desigualdad

$$\psi'\left(\sum_{i=1}^{N} \phi(u_i)\right) \sum_{i=1}^{N} \phi''(u_i) r_{i,t}^2 \leq \eta \max_{i=,\dots,N} r_{i,t}^2 \leq \eta$$

dado que $\Phi_\eta(\mathbf{0}) = (\ln N)/\eta$ obtenemos

$$\max_{i=1,\dots,N} R_{i,n} \leq \Phi_\eta(\mathbf{R}_n) \leq \frac{\ln N}{\eta} + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} C(\mathbf{r}_t) \leq \frac{\ln N}{\eta} + \frac{n\eta}{2}.$$

□

Aunque se ha derivado en una cota mejor para el arrepentimiento si se hace uso de este tipo de pronosticador, el problema que surge al utilizar la ponderación exponencial es que si queremos optimizar el valor de η necesitamos saber a priori el valor que va a tomar n. Es por esto que vamos a introducir a continuación unas modificaciones del pronosticador que no presentan este inconveniente.

2.2 Acotaciones óptimas

Antes de continuar, vamos a tratar de mejorar la cota obtenida para el pronosticador de peso ponderado exponencialmente, de forma que como veremos más adelante, esta resulte óptima.

Teorema 2.2. *Dada una función de pérdida l convexa en su primer argumento, que tome valores en* $[0,1]$*. Para cada n y* $\eta > 0$*, el arrepentimiento del pronosticador de peso ponderado exponencialmente cumple*

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,\dots,N} L_{i,n} \leq \frac{\ln N}{\eta} + \frac{n\eta}{8}$$

donde, para un valor de $\eta = \sqrt{8\ln N/n}$ *se logra una cota superior de* $\sqrt{(n/2)\ln N}$

Antes de hacer la demostración vamos a introducir un resultado derivado de la desigualdad de Hoeffding que nos va a ser útil.

Lema 2.2. *Sea X una variable aleatoria tal que $a \leq X \leq b$, para cada $s \in \mathbb{R}$*

$$\ln \mathbb{E}[e^{sX}] \leq s\mathbb{E}X + \frac{s^2(b-a)^2}{8}.$$

Demostración. Dado que $\ln \mathbb{E}[e^{sX}] \leq s\mathbb{E}X + \ln \mathbb{E}[e^{s(X-\mathbb{E}X)}]$ debido a la convexidad de e^{sx}, nos vale con demostrar que para cualquier variable aleatoria con $\mathbb{E}X = 0$, si $a \leq b$ se tiene que

$$\mathbb{E}[e^{sX}] \leq e^{s^2(b-a)^2/8}.$$

Dada la convexidad de la función exponencial

$$e^{sx} \leq \frac{x-a}{b-a}e^{sb} + \frac{b-x}{b-a}e^{sa} \text{ para } a \leq x \leq b.$$

Introduciendo la notación $p = -a/(b-a)$ y dado que $\mathbb{E}X = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{sX}] &\leq \frac{b}{b-a}e^{sa} - \frac{a}{b-a}e^{sb}\\ &= (1-p+pe^{s(b-a)})e^{-ps(b-a)}\end{aligned}$$

donde si tomamos $u = s(b-a)$, podemos denotar el último resultado como $e^{\phi(u)}$, donde $\phi(u) = -pu + log(1-p+pe^u)$.

Aplicando el teorema de Taylor, obtenemos que

$$\phi(u) = \phi(0) + u\phi'(0) + \frac{u^2}{2}\phi''(\delta) \leq \frac{u^2}{8} = \frac{s^2(b-a)^2}{8}$$

y dado que

$$\phi'(u) = -p + \frac{p}{p+(1-p)e^{-u}}$$

que

$$\phi'(0) = -p + \frac{p}{p+(1-p)} = 0$$

y que su segunda derivada cumple

$$\phi''(u) = \frac{p(1-p)e^{-u}}{(p+(1-p)e^{-u})^2} \leq \frac{1}{4},$$

deducimos así el resultado deseado

$$\mathbb{E}[e^{sX}] \leq e^{\phi(u)} \leq e^{s^2(b-a)^2/8}.$$

□

Ahora ya podemos proceder con la demostración del teorema.

Demostración Teorema 2.2. Vamos a proceder de forma análoga a la demostración del Corolario 2.2, donde ahora en vez de delimitar $(1/\eta)\ln\left(\sum_i e^{\eta R_{i,t}}\right)$ delimitamos $(1/\eta)\ln(W_i/W_{t-1})$ siendo $W_t = \sum_{i=1}^N e^{\eta L_{i,t}}$ con $W_0 = N$.

$$\begin{aligned}\ln\frac{W_n}{W_0} &= \ln\left(\sum_{i=1}^N e^{-\eta L_{i,n}}\right) - \ln N\\ &\geq \ln\left(\max_{i=1,\dots,N} e^{-\eta L_{i,n}}\right) - \ln N\\ &= -\eta \min_{i=1,\dots,N} L_{i,n} - \ln N.\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Por otro lado, para cada $t = 1, ..., n$ se tiene

$$\ln \frac{W_t}{W_{t-1}} = \ln \frac{\sum_{i=1}^N e^{-\eta l(f_{i,t},y_t)} e^{-\eta L_{i,t-1}}}{\sum_{j=1}^N e^{-\eta L_{j,t-1}}} = \ln \frac{\sum_{i=1}^N e^{-\eta l(f_{i,t},y_t)} w_{i,t-1}}{\sum_{j=1}^N w_{j,t-1}}$$

donde aplicando el Lema 2.2, este último valor se acota superiormente por

$$-\eta \frac{\sum_{i=1}^N l(f_{i,t}, y_t) w_{i,t-1}}{\sum_{j=1}^N w_{j,t-1}} + \frac{\eta^2}{8} \leq -\eta l \left(\frac{\sum_{i=1}^N f_{i,t} w_{i,t-1}}{\sum_{j=1}^N w_{j,t-1}}, y_t \right) + \frac{\eta^2}{8} = -\eta l(\hat{p}_t, y_t) + \frac{\eta^2}{8}$$

donde se ha hecho uso de la convexidad de la función de pérdida en su primer argumento y la definición del pronosticador. Para finalizar sumando para todo $t = 1, ..., n$ obtenemos

$$\ln \frac{W_n}{W_0} = -\eta \widehat{L}_n + \frac{\eta^2}{8} n,$$

que combinado con 2.2.1 y despejando llegamos al resultado deseado

$$\widehat{L}_n \leq \min_{i=1,\ldots,N} L_{i,n} + \frac{\ln N}{\eta} + \frac{\eta}{8} n.$$

□

2.3 Cotas uniformes en el tiempo

Volviendo al problema mencionado anteriormente que surge al tratar de encontrar una cota para el arrepentimiento al usar el pronosticador de peso ponderado exponencialmente, pues si se quiere acotar de forma óptima para el valor de η necesitaríamos conocer previamente el valor que va a tomar n, es decir, necesitaríamos fijar el tiempo que vamos a hacer predicciones para optimizar el parámetro η del que depende el pronosticador. Para tratar de solventar este inconveniente, vamos a proceder dividiendo el tiempo en periodos de longitudes que crecen exponencialmente, de manera que en cada intervalo se va a elegir un parámetro η que sea óptimo para ese periodo de tiempo. Una vez acabado uno de los intervalos de tiempo, se vuelve a calcular el parámetro para el siguiente.

Por ejemplo, podemos considerar la estrategia en la que el tiempo se divide en periodos que van doblando su tamaño $(2^m, ..., 2^{m+1} - 1)$, para $m = 0, 1, 2, ...$ (i.e. el primer periodo es el instante 1, el segundo va de 2 a 3, el tercero de 4 a 7, etc). En cada periodo $(2^m, ..., 2^{m+1} - 1)$ se utiliza el pronosticador de peso ponderado exponencialmente con parámetro $\sqrt{8(\ln N)/2^m}$, de forma que cada vez que el instante de tiempo es una potencia de 2, el pronosticador se recalcula con un nuevo valor de η. Procediendo de esta manera se logra el siguiente resultado.

Lema 2.3. *Sea la función pérdida l convexa en su primer argumento y que toma sus valores en $[0, 1]$, entonces para cada $n \geq 1$, el arrepentimiento del pronosticador de peso ponderado exponencialmente con parámetro $\eta_m = \sqrt{8(\ln N)/2^m}$ en cada periodo de tiempo $(2^m, ..., 2^{m+1} - 1)$ para $m = 0, 1, 2, ...$, cumple, dada cualquier secuencia de resultados $y_1, y_2 ... \in \mathcal{Y}$ que*

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,\ldots,N} L_{i,n} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \sqrt{\frac{n}{2} \ln N}.$$

Demostración. Aplicando el Teorema 2.2. Si nos restringimos a cada periodo $(2^m, ..., 2^{m+1} - 1)$ tenemos

$$\widehat{L}_t - \min_{i=1,...,N} L_{i,t} \leq \frac{\ln N}{\eta_m} + \frac{2^m \eta_m}{8}.$$

Por lo tanto, sumando cada periodo hasta el momento n que es de la forma 2^k, obtenemos

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,...,N} L_{i,n} \leq \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{\ln N}{\eta_m} + \frac{2^m \eta_m}{8} \right) = \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{\ln N}{\sqrt{\frac{8 \ln N}{2^m}}} + \frac{2^m \sqrt{\frac{8 \ln N}{2^m}}}{8} \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{k} \sqrt{\frac{\ln N}{2}} (\sqrt{2})^m \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\ln N}{2}}$$

por tratarse de una suma geométrica de razón $\sqrt{2}$ donde el término $a_n = \sqrt{n}$. □

Este resulta ser peor que el resultado obtenido en el Teorema 2.2. Además dado que el proceso expuesto reinicia los pesos después de cada periodo de tiempo, surge la búsqueda de un parámetro dependiente del tiempo como solución alternativa. Puesto que el valor óptimo del límite se ha obtenido tomando $\eta = \sqrt{8(\ln N)/n}$, una propuesta lógica puede ser $\eta_t = \sqrt{8(\ln N)/t}$.

Teorema 2.3. *Sea la función pérdida l convexa en su primer argumento y que toma sus valores en* $[0, 1]$*, entonces para cada* $n \geq 1$ *el arrepentimiento del pronosticador de peso ponderado exponencialmente con parámetro dependiente del tiempo* $\eta_t = \sqrt{8(\ln N)/t}$ *cumple*

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,...,N} L_{i,n} \leq 2\sqrt{\frac{n}{2} \ln N} + \sqrt{\frac{\ln N}{8}}.$$

Para probar el teorema, primero presentamos lo siguiente.

Definición 2.2. Sea X una variable aleatoria que toma valores en un conjunto numerable $\mathcal{X}$ con distribución $\mathbb{P}[X = x] = p(x), x \in \mathcal{X}$. Se define la *entropía de* X como

$$H(X) = \mathbb{E}[-\log p(X)] = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x).$$

Lema 2.4. *Para cada* $N \geq 2$*, para todo* $\beta \geq \alpha \geq 0$*, y para* $d_1, ..., d_N \geq 0$ *tales que* $\sum_{i=1}^{N} e^{-\alpha d_i} \geq 1$,

$$\ln \frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-\alpha d_i}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\beta d_j}} \leq \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \ln N.$$

Demostración. Primero, dada la definición de la esperanza y la desigualdad de Jensen, podemos ver que

$$\ln \frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-\alpha d_i}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\beta d_j}} = \ln \frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-\alpha d_i}}{\sum_{j=1}^{N} e^{(\alpha-\beta) d_j} e^{-\alpha d_j}} = -\ln \mathbb{E}[e^{(\alpha-\beta)D}] \leq (\beta - \alpha)\mathbb{E}D$$

donde D es una variable aleatoria que toma los valores d_i con probabilidad $e^{-\alpha d_i} / \sum_{i=1}^{N} e^{-\alpha d_i}$ para cada N. Dado que D toma como mucho N valores diferentes, su entropía, $H(D)$ es como mucho $\ln N$ luego

$$\begin{aligned}\ln N &\geq H(D)\\ &= \sum_{i=1}^{N} e^{-\alpha d_i}\left(\alpha d_i + \ln \sum_{k=1}^{N} e^{-\alpha d_k}\right)\frac{1}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\alpha d_j}}\\ &= \alpha \mathbb{E}D + \ln \sum_{k=1}^{N} e^{-\alpha d_k} \geq \alpha \mathbb{E}D\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que $\sum_{i=1}^{N} e^{-\alpha d_i} \geq 1$. Hemos obtenido pues, la desigualdad $\mathbb{E}D \leq (\ln N)/\alpha$, donde, dado que $\alpha < \beta$ nos basta con sustituir en la desigualdad del comienzo de la demostración para obtener la expresión deseada. □

Para la demostración siguiente, vamos a utilizar la notación k_t para referirnos al experto cuya pérdida tras las primeras t rondas es menor, es decir, el que cumple $L_{k_t,t} = \text{mín}_{i\leq N} L_{i,t}$. En caso de empate se elige el experto de menor índice. También usamos la notación $w'_{i,t-1} = e^{-\eta_{t-1}L_{i,t-1}}$ para referirnos al peso $w_{i,t-1}$ donde el parámetro η_t se cambia por η_{t-1}.

Demostración Teorema 2.3. Para la demostración vamos a seguir el mismo procedimiento que en la demostración del Teorema 2.2, donde vamos a estudiar la evolución de $\ln(W_t/W_{t-1})$ junto con $\ln(w_{k_{t-1},t-1}/w_{k_t,t})$ incluyendo el parámetro dependiente del tiempo η_t. Partiendo de

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\eta_t}\ln\frac{w_{k_{t-1},t-1}}{W_{t-1}} - \frac{1}{\eta_{t+1}}\ln\frac{w_{k_t,t}}{W_t}\\ &\quad= \left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t}\right)\ln\frac{W_t}{w_{k_t,t}} + \frac{1}{\eta_t}\ln\frac{w'_{k_t,t}/W'_t}{w_{k_t,t}/W_t} + \frac{1}{\eta_t}\ln\frac{w_{k_{t-1},t-1}/W_{t-1}}{w'_{k_t,t}/W'_t}.\end{aligned}$$

Vamos a acotar cada término por separado. Primero, dado que $\eta_{t+1} < \eta_t$ y la definición de k_t demos que $w_{k_t,t}/W_t$ es como mucho $1/N$ luego

$$\left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t}\right)\ln\frac{W_t}{w_{k_t,t}} \leq \left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t}\right)\ln N$$

Para el segundo término, aplicando el Lema 2.4 con $d_i = L_{i,t} - L_{k_{t+1},t}$

$$\frac{1}{\eta_t}\ln\frac{w'_{k_t,t}/W'_t}{w_{k_t,t}/W_t} = \frac{1}{\eta_t}\ln\frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta_{t+1}(L_{i,t}-L_{k_t,t})}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\eta_t(L_{j,t}-L_{k_t,t})}} \leq \frac{\eta_t - \eta_{t+1}}{\eta_t\eta_{t+1}}\ln N = \left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t}\right)\ln N.$$

Mencionemos que las condiciones para aplicar el lema se cumple, pues $d_i \geq 0$ por la definición de k_t y $\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta_{t+1}d_i} \geq 1$ pues para $i = k_{t+1}$ tenemos $d_i = 0$.

Por otro lado, el tercer término se puede dividir en

$$\frac{1}{\eta_t}\ln\frac{w_{k_{t-1},t-1}/W_{t-1}}{w'_{k_t,t}/W'_t} = \frac{1}{\eta_t}\ln\frac{w_{k_{t-1},t-1}}{w'_{k_t,t}} + \frac{1}{\eta_t}\ln\frac{W'_t}{W_{t-1}},$$

donde el primero de los subtérminos es

$$\frac{1}{\eta_t}\ln\frac{w_{k_{t-1},t-1}}{w'_{k_t,t}} = \frac{1}{\eta_t}\ln\frac{e^{-\eta_t L_{k_{t-1},t-1}}}{e^{-\eta_t L_{k_t,t}}} = L_{k_t,t} - L_{k_{t-1},t-1}.$$

Para el segundo, aplicando el Lema 2.2 a la variable aleatoria Z que toma los valores $l_{f_{i,t},y_t}$ con probabilidad $w_{i,t-1}/W_{t-1}$ para cada $i = 1, ..., N$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\eta_t} \ln \frac{W'_t}{W_{t-1}} &= \frac{1}{\eta_t} \ln \sum_{i=1}^{N} \frac{w_{i,t-1}}{W_{t-1}} e^{-\eta_t l(f_{i,t},y_t)} \\
&\leq -\sum_{i=1}^{N} \frac{w_{i,t-1}}{W_{t-1}} l(f_{i,t}, y_t) + \frac{\eta_t}{8} \\
&\leq -l(\widehat{p}_t, y_t) + \frac{\eta_t}{8},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la convexidad de la función de pérdida. De esta manera, juntando las acotaciones obtenidas y despejando $l(\widehat{p}_t, y_t)$ llegamos a

$$\begin{aligned}
l(\widehat{p}_t, y_t) \leq (L_{k_t,t} - L_{k_{t-1},t-1}) &+ \frac{\sqrt{a \ln N}}{8} \frac{1}{\sqrt{t}} \\
&+ \frac{1}{\eta_{t+1}} \ln \frac{w_{k_t,t}}{W_t} - \frac{1}{\eta_t} \ln \frac{w_{k_{t-1},t-1}}{W_{t-1}} \\
&+ 2\left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t}\right) \ln N,
\end{aligned}$$

donde sumando los momentos hasta n y haciendo uso de 2.0.1, $\sum_{t=1}^{n} 1/\sqrt{t} \leq 2\sqrt{n}$,

$$\sum_{t=1}^{n} (L_{k_t,t} - L_{k_{t-1},t-1}) = \min_{i=1,..,N} L_{i,n}$$

y de

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{N} \left(\frac{1}{\eta_{t+1}} \ln \frac{w_{k_t,t}}{W_t} - \frac{1}{\eta_t} \ln \frac{w_{k_{t-1},t-1}}{W_{t-1}}\right) &\leq -\frac{1}{\eta_1} \ln \frac{w_{k_0,0}}{W_0} = \sqrt{\frac{\ln N}{a}} \\
\sum_{t=1}^{N} \left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t}\right) &= \sqrt{\frac{n+1}{a(\ln N)}} - \sqrt{\frac{1}{a(\ln N)}},
\end{aligned}$$

podemos escribir

$$\widehat{L}_n \leq \min_{i=1,...,N} L_{i,n} + \frac{\sqrt{an \ln N}}{4} + 2\sqrt{\frac{(n+1) \ln N}{a}} - \sqrt{\frac{\ln N}{a}}.$$

Finalmente, tomando $a = 8$ y acotando por exceso llegamos a la expresión deseada

$$\widehat{L}_n \leq \min_{i=1,...,N} L_{i,n} + 2\sqrt{\frac{n}{2} \ln N} + \sqrt{\frac{\ln N}{8}}.$$

□

2.4 Una mejora para pérdidas pequeñas

A continuación vamos a realizar un análisis particular para los casos en los que sabemos que las pérdidas concurridas por los mejores expertos van a ser pequeñas. Vamos a ver cómo las acotaciones que se pueden llegar a fijar para el arrepentimiento en estos casos mejoran las obtenidas por previos teoremas, como el 2.2.

Por ejemplo, en el caso en que $\mathcal{Y} = \mathcal{D} = \{0, 1\}$ si el pronosticador sabe *a priori* que uno de los expertos no va a sufrir pérdidas, la forma en la que se procede es sencilla. En el momento $t = 1$, predice acorde con lo que estima la mayoría. Una vez se revela el resultado y_1, se descartan todos los expertos que han errado en la predicción, es decir, aquellos tales que $f_{i,1} \neq y_1$. Repitiendo el proceso para cada instante de tiempo, se logra ir descartando los expertos que han fallado en su predicción, de manera que cada vez que el pronosticador falla, al menos la mitad de los expertos que quedaban hasta el momento son descartados, dado que el pronosticador ha realizados su predicción en base a la de la mayoría. Si se llega al momento en el que solo persiste un experto, éste no va a fallar, por lo que el pronosticador tampoco. Por lo tanto, el máximo número de fallos que puede realizar el pronosticador será como mucho $\lfloor \log_2 N \rfloor$. Dado que $\mathcal{Y} = \mathcal{D} = \{0, 1\}$ este coincide con el arrepentimiento.

Vamos a tratar de demostrar pues, como se pueden obtener para pérdidas acotadas en espacios de decisión convexos, cotas superiores para el arrepentimiento de la forma $O(\ln N)$ en los casos en los que el pronosticador sabe que el mejor experto no va a sufrir pérdidas. Estos límites resultan ser una mejora de los obtenidos hasta ahora, pues son independientes de la pérdida del mejor experto.

Para esto, presentamos la siguiente mejora del Teorema 2.2, donde como simplificación, introducimos la notación $L_n^* = \min_{i=1,\dots,N} L_{i,n}$.

Teorema 2.4. *Dada una función de pérdida l convexa en su primer argumento, que tome valores en $[0, 1]$. Sea $\eta > 0$, el arrepentimiento del pronosticador de peso ponderado exponencialmente cumple*

$$\widehat{L}_n \leq \frac{\eta L_n^* + \ln N}{1 - e^{-\eta}}.$$

En este caso, vemos que incluso para valores constantes de η se llega a obtener una buena cota superior. De este teorema se pueden deducir los siguientes resultados.

Corolario 2.3. *Haciéndose uso del pronosticador de peso ponderado exponencialmente con $\eta = 1$, entonces, bajo las condiciones del Teorema 2.4*

$$\widehat{L}_n \leq \frac{e}{e-1}(L_n^* + \ln N).$$

Para los casos en los que $L_n^* \ll \sqrt{2}$ se obtiene una cota mejor que la del Teorema 2.2, pero en otras situaciones esta podría ser mucho peor.

Ahora, en el caso en el que tenemos información previa de la pérdida que va a sufrir el mejor experto, podemos afinar aún más.

Corolario 2.4. *Haciéndose uso del pronosticador de peso ponderado exponencialmente con $\eta = \ln(1 + \sqrt{(2 \ln N)/L_n^*})$, donde $L_n^* > 0$ se conoce a priori. Entonces, bajo las condiciones del Teorema 2.4*

$$\widehat{L}_n - L_n^* \leq \sqrt{2 L_n^* \ln N} + \ln N.$$

Demostración. Aplicando el Teorema 2.4 solo necesitamos ver que para la elección de η del enunciado

$$\frac{\ln N + \eta L_n^*}{1 - e^{-\eta}} \leq L_n^* + \ln N + \sqrt{2 L_n^* \ln N}.$$

Dado que $(e^{\eta} - e^{-\eta})/2 = \sinh(\eta) \geq \eta$ si $\eta \geq 0$, la desigualdad anterior se da si

$$\frac{\ln N}{1 - e^{-\eta}} + \frac{1 + e^{-\eta}}{2e^{-\eta}} L_n^* \leq L_n^* + \ln N + \sqrt{2L_n^* \ln N},$$

que se cumple para nuestra elección de η. □

Para realizar la demostración del teorema introducimos previamente el siguiente lema.

Lema 2.5. *Sea X una variable aleatoria que toma valores en $[0,1]$. Entonces para cualquier $s \in \mathbb{R}$,*

$$\ln \mathbb{E}[e^{sX}] \leq (e^s - 1)\mathbb{E}X.$$

Demostración. Dada la convexidad de e^{sx}, tenemos que para $x \in [0,1]$, $e^{sx} \leq xe^s + (1-x)$. Por lo tanto

$$\mathbb{E}[e^{sx}] \leq \mathbb{E}Xe^s + 1 - \mathbf{E}X$$

y aplicando la desigualdad $1 + x \leq e^x$ deducimos

$$\mathbb{E}[e^{sx}] \leq 1 + \mathbb{E}Xe^s - \mathbf{E}X \leq e^{(e^s - 1)\mathbb{E}X}.$$

□

Demostración Teorema 2.4. Al igual que en la demostración del Teorema 2.2

$$-\eta L_n^* - \ln N \leq \ln \frac{W_n}{W_0} = \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{W_t}{W_{t-1}} = \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} e^{-\eta l(f_{i,t}, y_t)}}{\sum_{j=1}^{N} w_{j,t-1}}$$

donde aplicando el Lema 2.5 para la variable X_t que toma los valores $l(f_{i,t}, y_t)$ con probabilidad $w_{i,t-1}/W_{t-1}$ para cada $i = 1, ..., N$ obtenemos

$$\ln \frac{\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} e^{-\eta l(f_{i,t}, y_t)}}{\sum_{j=1}^{N} w_{j,t-1}} = \ln \mathbb{E}[e^{-\eta X_t}] \leq (e^{-\eta} - 1)\mathbb{E}X_t \leq (e^{-\eta} - 1) l(\widehat{p}_t, y_t)$$

donde la última desigualdad se debe a la convexidad de la función de pérdida y la desigualdad de Jensen. Por lo tanto

$$-\eta L_n^* - \ln N \leq \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} e^{-\eta l(f_{i,t}, y_t)}}{\sum_{j=1}^{N} w_{j,t-1}} \leq (e^{-\eta} - 1)\widehat{L}_n$$

de donde se deduce el resultado despejando $\widehat{L}_n$. □

2.5 Uso del gradiente de la pérdida en pronosticadores

En este apartado, vamos a explorar una variación del pronosticador de peso ponderado exponencialmente en el que la función de pérdida acumulada $L_{i,t-1}$ que aparece en el exponente de los pesos $w_{i,t-1} = e^{-\eta L_{i,t-1}}$ se sustituye por su gradiente. De esta manera, el pronosticador de peso ponderado exponencialmente basado en el gradiente de pérdida acumulada queda definido por su predicción

$$\widehat{p}_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \nabla l(\widehat{p}_s, y_s) \cdot f_{i,t}\right) f_{i,t}}{\sum_{i=j}^{N} \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \nabla l(\widehat{p}_s, y_s) \cdot f_{j,t}\right)}. \tag{2.5.1}$$

Veamos que bajo ciertas condiciones se puede obtener la misma cota superior para el arrepentimiento que la obtenida para el pronosticador estándar dada por el Corolario 2.2.

Corolario 2.5. *Sea el espacio de decisiones $\mathcal{D}$ un subconjunto convexo de la bola unidad euclídea $\{q \in \mathbb{R}^d : \|q\| \leq 1\}$, la función de pérdida l es convexa en su primer argumento y cuyo gradiente existe y cumple $\|\nabla l\| \leq 1$. Entonces, para cualquier n y $\eta > 0$, y cualquier serie $y_1, ..., y_n \in \mathcal{Y}$ el arrepentimiento del pronosticador de peso ponderado exponencialmente basado en el gradiente de la pérdida acumulada cumple*

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,\ldots,N} L_{i,n} \leq \frac{n \ln N}{\eta} + \frac{n\eta}{2}.$$

Demostración. Como hemos visto al comienzo de la sección, los pesos presentan la forma

$$w_{i,t-1} = \exp\left(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \nabla l(\hat{p}_s, y_s) \cdot f_{i,s}\right)$$

que corresponden a un pronosticador de peso ponderado exponencialmente en el que la función de pérdida toma la forma $l'(q, y_t) = q \cdot \nabla l(\widehat{p}_t, y_t)$ para $q \in \mathcal{D}$. Si asumimos que l' toma valores en $[-1, 1]$, aplicando el Teorema 2.2 tras reescalar l' a $[0, 1]$ por la transformación lineal $l' \mapsto (l' + 1)/2$ obtenemos

$$\max_{i=1,\ldots,N} \sum_{i=1}^{n} (\widehat{p}_t - f_{i,t}) \cdot \nabla l(\widehat{p}_t, y_t) = \sum_{t=1}^{n} l'(\widehat{p}_t, y_t) - \min_{i=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} l'(f_{i,t}, y_t) \leq \frac{\ln N}{\eta} + \frac{n\eta}{2}.$$

Por último, expandimos $l(f_{i,t}, y_t)$ alrededor de $l(\hat{p}_t, y_t)$ de la forma:

$$l(\widehat{p}_t, y_t) - l(f_{i,t}, y_t) \leq (\widehat{p}_t - f_{i,t}) \cdot \nabla l(\widehat{p}_t, y_t),$$

de donde deducimos que

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,\ldots,N} L_{i,n} \leq \sum_{t=1}^{n} l'(\widehat{p}_t, y_t) - \min_{i=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} l'(f_{i,t}, y_t).$$

□

2.6 Traslación al problema general

Hasta ahora hemos tratado el problema en el que la función de pérdida toma valores en el intervalo $[0, 1]$. Vamos a tratar de escalar el problema al caso en le que la función pérdida toma valores en $[0, M]$. En el caso en el que M sea conocida, el pronosticador se aplica escalando las pérdidas por l/M sin ninguna otra modificación, de manera que al aplicar el Corolario 2.3 se obtiene la siguiente cota

$$\widehat{L}_n - L_n^* \leq \sqrt{2L_n^* M \ln N} + M \ln N.$$

De igual manera, si consideramos el intervalo $[-M, 0]$, donde las pérdidas negativas se pueden entender como ganancias, introducimos el arrepentimiento $G_n^* - \widehat{G}_n$ que mide la diferencia entre la ganancia acumulada por el mejor experto, dado por $G_n^* = -L_n^* = \max_{i=1,...N}(-L_{i,n})$ y la del pronosticador. Al igual que en el párrafo anterior, si M se conoce, basta con reescalar las pérdidas de manera que esta vez se obtiene una cota superior para el arrepentimiento de

$$G_n^* - \widehat{G}_n \leq \sqrt{2G_n^* M \ln N} + M \ln N.$$

Ahora, tratando el caso general en el que los pronosticadores se valoran gracias una función que vamos a denominar *función de saldo*, $h : \mathcal{D} \times \mathcal{Y} :\to \mathbb{R}$, cóncava en el primer argumento, entonces la finalidad del pronosticador es maximizar dicho saldo acumulado. A esta nueva función se le asocia un nuevo arrepentimiento definido como:

$$\max_{i=1,\dots,N} \sum_{t=1}^{n} h(f_{i,t}, y_t) - \sum_{t=1}^{n} h(\widehat{p}_t, y_t) = H_n^* - \widehat{H}_n. \tag{2.6.1}$$

Cuando la función de saldo h toma sus valores en $[0, M]$ decimos que el pronosticador esta jugando un juego de ganancias. En el caso en que h toma sus valores en $[-M, 0]$ se dice que este está jugando un juego de pérdidas.

En el caso general en que $h \in [-M, M]$, encontramos que al reducirlo al de [0,1] por la transformación lineal $h \mapsto (h + M)/(2M)$ el resultado que obtenemos tras aplicar el Corolario 2.3 es la acotación superior

$$H_n^* - \widehat{H}_n \le \sqrt{4(H_n^* + Mn)(M \ln N)} + 2M \ln N = O\left(M\sqrt{n \ln N}\right),$$

donde el factor n muestra que esta forma de proceder no es del todo ideal. Es preferible derivar en una expresión que dependiera de un término del estilo a $|h(f_{i,1}, y_1)| + \cdots + |h(f_{i,n}, y_n)|$ para algún experto i. Veamos que en ocasiones se puede obtener un comportamiento incluso mejor.

2.7 Pronosticador multilineal

Para tratar de llegar a cotas que muestren un mejor comportamiento cuando nos encontramos en el problema general que acabamos de exponer, vamos a introducir y a analizar un nuevo pronosticador que no hace uso de potenciales.

Dado un juego en el que puedan ocurrir tanto pérdidas como ganancias, medidas a través de la función de saldo $h : \mathcal{D} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$, consideramos el pronosticador de peso ponderado dado por la ecuación 2.1.1 donde los pesos vienen dados de forma recursiva como:

$$w_{i,t} = \begin{cases} 1 & \text{si t = 0} \\ w_{i,t-1}(1+\eta h(f_{i,t}, y_t)) & \text{si t} \neq 0 \end{cases}$$

donde $\eta > 0$ es el parámetro del pronosticador. De esta definición recibe su nombre el pronosticador.

Para llegar a una acotación del arrepentimiento utilizamos una técnica similar a la expuesta en el Teorema 2.2. Antes de ello introducimos el siguiente lema.

Lema 2.6. *Para todo $z \ge -1/2$, $\ln(1 + z) \ge z - z^2$*

Demostración. Sean $f(z) = \ln(1 + z)$ y $g(z) = z - z^2$, dado que $f(-1/2) > g(-1/2)$, nos sirve con comprobar que $f'(z) \ge g'(z)$ para todo $z \ge -1/2$. Esto se comprueba fácilmente ya que

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \ge 1 - 2z = g'(z) \Leftrightarrow \frac{1}{1+z} + 2z \ge 1 \Leftrightarrow 1 + 2z + 2z^2 \ge 1 + z \Leftrightarrow z \ge -\frac{1}{2}.$$

□

Teorema 2.5. *Dada la función de saldo h, cóncava en su primer argumento, que satisface $h \in [-M, \infty)$. Para cualquier n y $0 < \eta \leq 1/(2M)$, y para toda sucesión $y_1, ..., y_n \in \mathcal{Y}$, el arrepentimiento del pronosticador multilineal cumple*

$$H_{i,n} - \widehat{H}_n \leq \frac{\ln N}{\eta} + \eta \sum_{t=1}^{n} h(f_{i,t}, y_t)^2 \quad \textit{para cada } i = 1, ..., N.$$

Demostración. Para todo $i = 1, ..., N$, dado que $h(f_{i,t}, y_t) \geq -M$ y $\eta \leq 1/(2M)$ tenemos la desigualdad $\eta h(f_{i,t}, y_t) \geq -1/2$, que junto al Lema 2.6 se deduce

$$\begin{aligned}
\ln \frac{W_n}{W_0} &= -\ln N + \ln \prod_{t=1}^{n} (1 + \eta h(f_{i,t}, y_t)) \\
&= -\ln N + \sum_{t=1}^{n} \ln(1 + \eta h(f_{i,t}, y_t)) \\
&\geq -\ln N + \sum_{t=1}^{n} (\eta h(f_{i,t}, y_t) - \eta^2 h(f_{i,t}, y_t)^2) \\
&= -\ln N + \eta H_{i,n} - \eta^2 \sum_{t=1}^{n} h(f_{i,t}, y_t)^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\ln \frac{W_n}{W_0} &= \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{W_t}{W_{t-1}} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \ln \left(\sum_{i=1}^{N} \widehat{p}_{i,t} (1 + \eta h(f_{i,t}, y_t)) \right) \\
&\leq \eta \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} \widehat{p}_{i,t} h(f_{i,t}, y_t)) \\
&\leq \eta \widehat{H}_n
\end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad se debe a que $\ln(1 + x) \leq x$ para todo $x > -1$ y la última a la concavidad de h en su primer argumento. Juntando ambas cotas se obtiene

$$-\ln N + \eta H_{i,n} - \eta^2 \sum_{t=1}^{n} h(f_{i,t}, y_t)^2 \leq \eta \widehat{H}_n$$

de donde se deduce el resultado. □

Utilizando la notación $Q_n^* = h(f_{k,1}, y_1)^2 + \cdots + h(f_{k,n}, y_n)^2$ donde k cumple que $H_{k,n} = H_n^* = \text{máx}_{i=1,...,N} H_{i,n}$. Del teorema se deduce el siguiente corolario.

Corolario 2.6. *Eligiendo*

$$\eta = \text{mín} \left\{ \frac{1}{2M}, \sqrt{\frac{\ln N}{Q_n^*}} \right\}$$

donde se supone que $Q_n^* > 0$ se conoce previamente, entonces, bajo las condiciones del Teorema 2.5

$$H_n^* - \widehat{H}_n \leq 2\sqrt{Q_n^* \ln N} + 4M \ln N.$$

Podemos observar cómo en el caso de un juego de pérdidas, dado que $Q_n^* \leq ML_n^*$, el pronosticador multilineal es como mucho un factor $\sqrt{2}$ mejor que el pronosticador de peso ponderado exponencialmente, que estaba dominado por el término $\sqrt{2L_n^* M \ln N}$. Sin embargo, cuando Q_n^* es mucho mas pequeño que ML_n^* el Corolario 2.6 muestra una mejora importante. No obstante, se sigue tratando de dar con pronosticadores que obtengan una acotación para el arrepentimiento del orden de $\sqrt{2L_n^* M \ln N}$ sin hacer uso de un conocimiento previo sobre la secuencia de resultados $y_1, ..., y_n$ o necesitar de la monotonía de Q_n^*, que no se da necesariamente ya que los expertos que han obtenido las mejores resultados hasta el momento t no tienen por que ser los mismos que en $t+1$.

2.8 El pronosticador exponencial para el problema general

Volviendo al estudio del pronosticador de peso ponderado exponencialmente, vamos a realizar un análisis de cómo se puede obtener un arrepentimiento pequeño en el problema general en el que se pueden producir tanto pérdidas como ganancias. Para esto, introducimos un potencial que varía con el tiempo que no requiere de un conocimiento previo del saldo acumulado por el mejor experto H_n^* como en la sección anterior.

Primero, vamos a redefinir el pronosticador de peso ponderado con parámetro variable con el tiempo.

Dada la función de saldo h, este pronosticador predice mediante

$$\widehat{p}_t = \frac{\sum_{i=1}^N e^{\eta_t H_{i,t-1}} f_{i,t}}{\sum_{j=1}^N e^{\eta_t H_{j,t-1}}} \tag{2.8.1}$$

donde $H_{i,t-1} = h(f_{i,1}, y_1) + \cdots + h(f_{i,t-1}, y_{t-1})$ y asumimos que la secuencia de parámetros $\eta_1, \eta_2, ...$ es positiva.

Sean $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias tales que $X_t = h(f_{i,t}, y_t)$ con probabilidad $\frac{e^{\eta_t H_{i,t-1}}}{\sum_{j=1}^N e^{\eta_t H_{j,t-1}}}$ para cada i y t. Entonces, para cualquier secuencia no creciente de parámetros se obtiene el siguiente resultado.

Lema 2.7. *Sea h una función de saldo cóncava en su primer argumento. El pronosticador de peso ponderado exponencialmente, ejecutado con una secuencia no creciente de parámetros $\eta_1, \eta_2, ...$ cumple, para cada $n \geq 1$, que para cualquier secuencia $y_1, ..., y_n$ de resultados*

$$H_n^* - \widehat{H}_n \leq \left(\frac{2}{\eta_{n+1}} - \frac{1}{\eta_1} \right) \ln N + \sum_{t=1}^n \frac{1}{\eta_t} \ln \mathbb{E}[e^{\eta_t (X_t - \mathbb{E}X_t)}].$$

Demostración. Para la demostración vamos a seguir el mismo procedimiento que en la demostración del Teorema 2.3 donde vamos a estudiar la evolución de $\ln(W_t/W_{t-1})$ junto con $\ln(w_{k_{t-1},t-1}/w_{k_t,t})$ siendo esta vez, k_t el índice de experto tal que $H_{k_t,t} = \max_{i=1,...,N} H_{i,t} = H_t^*$. Partiendo de que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\eta_t} \ln \frac{w_{k_{t-1},t-1}}{W_{t-1}} - \frac{1}{\eta_{t+1}} \ln \frac{w_{k_t,t}}{W_t} \\ &\quad = \left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t} \right) \ln \frac{W_t}{w_{k_t,t}} + \frac{1}{\eta_t} \ln \frac{w'_{k_t,t}/W'_t}{w_{k_t,t}/W_t} + \frac{1}{\eta_t} \ln \frac{w_{k_{t-1},t-1}/W_{t-1}}{w'_{k_t,t}/W'_t}, \end{aligned}$$

vamos a volver a acotar cada término por separado. Primero, dado que $\eta_{t+1} \leq \eta_t$ y la definición de k_t, vemos que $w_{k_t,t}/W_t$ es como mucho $1/N$ luego

$$\left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t}\right) \ln \frac{W_t}{w_{k_t,t}} \leq \left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t}\right) \ln N.$$

Para el segundo término, aplicando el Lema 2.4 con $d_i = H_{i,t} - H_{k_{t+1},t}$

$$\frac{1}{\eta_t} \ln \frac{w'_{k_t,t}/W'_t}{w_{k_t,t}/W_t} = \frac{1}{\eta_t} \ln \frac{\sum_{i=1}^N e^{-\eta_{t+1}(H_{i,t}-H_{k_t,t})}}{\sum_{j=1}^N e^{-\eta_t(H_{j,t}-H_{k_t,t})}} \leq \frac{\eta_t - \eta_{t+1}}{\eta_t \eta_{t+1}} \ln N = \left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t}\right) \ln N$$

ya que las condiciones para aplicar el lema se cumplen, pues $d_i \geq 0$ por la definición de k_t y $\sum_{i=1}^N e^{-\eta_{t+1} d_i} \geq 1$ debido a que para $i = k_{t+1}$ tenemos $d_i = 0$.

Por otro lado, el tercer término se puede dividir en

$$\frac{1}{\eta_t} \ln \frac{w_{k_{t-1},t-1}/W_{t-1}}{w'_{k_t,t}/W'_t} = \frac{1}{\eta_t} \ln \frac{w_{k_{t-1},t-1}}{w'_{k_t,t}} + \frac{1}{\eta_t} \ln \frac{W'_t}{W_{t-1}},$$

donde el primero de los subtérminos es

$$\frac{1}{\eta_t} \ln \frac{w_{k_{t-1},t-1}}{w'_{k_t,t}} = \frac{1}{\eta_t} \ln \frac{e^{\eta_t H_{k_{t-1},t-1}}}{e^{\eta_t H_{k_t,t}}} = -(H_{k_t,t} - H_{k_{t-1},t-1}).$$

Para el segundo, dado que

$$\frac{1}{\eta_t} \ln \frac{W'_t}{W_{t-1}} = \frac{1}{\eta_t} \ln \sum_{i=1}^N \frac{w_{i,t-1}}{W_{t-1}} e^{\eta_t h(f_{i,t},y_t)}$$

aplicando el Lema 2.5 para la variable X_t que toma los valores $h(f_{i,t}, y_t)$ con probabilidad $w_{i,t-1}/W_{t-1}$ para cada $i = 1, ..., N$ obtenemos

$$\ln \frac{\sum_{i=1}^N w_{i,t-1} e^{\eta_t h(f_{i,t},y_t)}}{\sum_{j=1}^N w_{j,t-1}} = \ln \mathbb{E}[e^{\eta_t X_t}] \leq \eta_t \mathbb{E} X_t + \ln \mathbb{E}[e^{\eta_t (X_t - \mathbb{E}X_t)}] \leq \eta_t h(\widehat{p}_t, y_t) + \ln \mathbb{E}[e^{\eta_t (X_t - \mathbb{E}X_t)}]$$

donde la penúltima desigualdad se debe a la convexidad de e^{sx} y la última a la convexidad de la función de saldo junto con la desigualdad de Jensen.

Por último, juntando las acotaciones obtenidas

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\eta_t} \ln \frac{w_{k_{t-1},t-1}}{w_{t-1}} - \frac{1}{\eta_{t+1}} \ln \frac{w_{k_t,t}}{w_t} \\ &\quad \leq 2\left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t}\right) \ln N - (H_{k_t,t} - H_{k_{t-1},t-1}) + h(\widehat{p}_t, y_t) + \frac{1}{\eta_t} \ln \mathbb{E}[e^{\eta_t (X_t - \mathbb{E}X_t)}] \end{aligned}$$

donde sumando los momentos hasta n y haciendo uso de que $\sum_{t=1}^n (H_{k_t,t} - H_{k_{t-1},t-1}) = \text{máx}_{i=1,..,N} H_{i,n}$, y de

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^N \left(\frac{1}{\eta_{t+1}} \ln \frac{w_{k_t,t}}{W_t} - \frac{1}{\eta_t} \ln \frac{w_{k_{t-1},t-1}}{W_{t-1}}\right) \leq -\frac{1}{\eta_1} \ln \frac{w_{k_0,0}}{W_0} = \frac{\ln N}{\eta_1} \\ &\sum_{t=1}^N \left(\frac{1}{\eta_{t+1}} - \frac{1}{\eta_t}\right) = \left(\frac{1}{\eta_{n+1}} - \frac{1}{\eta_1}\right) \end{aligned}$$

llegamos a que

$$H_n^* - \widehat{H}_n \leq 2\left(\frac{1}{\eta_{n+1}} - \frac{1}{\eta_1}\right)\ln N + \frac{\ln N}{\eta_1} + \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\eta_t} \ln \mathbb{E}[e^{\eta_t(X_t - \mathbb{E}X_t)}]$$

como se quería probar.

$\square$

Cabe remarcar que, al contrario que en el Teorema 2.5, este resultado se ha obtenido sin asumir ninguna cota para los valores de la función de saldo h.

Ahora, sea

$$V_t = \sum_{s=1}^{t} \mathrm{var}(X_s) = \sum_{s=1}^{t} \mathbb{E}[(X_s - \mathbb{E}X_s)^2]$$

veamos como eligiendo de forma correcta la secuencia η_t se puede obtener un arrepentimiento para el pronosticador exponencial en el momento n del orden de $\sqrt{V_n \ln N}$.

Teorema 2.6. *Sea h una función de saldo cóncava en su primer argumento que toma valores en $[-M, M]$. Suponiendo que se ejecuta el pronosticador de peso ponderado exponencialmente con los parámetros*

$$\eta_t = \text{mín}\left\{\frac{1}{2M}, \sqrt{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{e-2}}\sqrt{\frac{\ln N}{V_{t-1}}}\right\}, \quad t = 2, 3, ...$$

Entonces, para cada $n \geq 1$ y cualquier secuencia de resultados $y_1, ..., y_n$

$$H_n^* - \widehat{H}_n \leq 4\sqrt{V_n \ln N} + 4M \ln N + (e-2)M.$$

Demostración. Primero vamos a denotar por comodidad

$$C = \sqrt{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{e-2}}.$$

Aplicando el Lema 2.7 con $\eta_1 = \eta_2$

$$\begin{aligned} H_n^* - \widehat{H}_n &\leq \left(\frac{2}{\eta_{n+1}} - \frac{1}{\eta_1}\right)\ln N + \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\eta_t} \ln \mathbb{E}[e^{\eta_t(X_t - \mathbb{E}X_t)}] \\ &\leq 2\,\text{máx}\left\{2M \ln N, \frac{1}{C}\sqrt{V_n \ln N}\right\} + \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\eta_t} \ln \mathbb{E}[e^{\eta_t(X_t - \mathbb{E}X_t)}] \end{aligned}$$

.

Ahora, dado que $\eta_t \leq 1/(2M), \eta_t(X_t - \mathbb{E}X_t) \leq 1$, y podemos aplicar la desigualdad $e^x \leq 1 + x + (e-2)x^2$ para cada $x \leq 1$ obtenemos que

$$H_n^* - \widehat{H}_n \leq 2\,\text{máx}\left\{2M \ln N, \frac{1}{C}\sqrt{V_n \ln N}\right\} + (e-2)\sum_{t=1}^{n} \eta_t \mathrm{var}(X_t).$$

Denotando como T al primer momento t en el que $V_t > M^2$. Usando $\eta_t \leq 1/(2M)$ para cada t y $V_T \leq 2M^2$

$$\sum_{t=1}^{n} \eta_t \mathrm{var}(X_t) \leq M + \sum_{t=T+1}^{n} \eta_t \mathrm{var}(X_t)$$

donde podemos acotar a su vez la suma gracias a que $\eta_t \sqrt{(\ln N)/V_{t-1}}$ para $t \geq 2$. Por lo tanto

$$\sum_{t=T+1}^{n} \eta_t \mathrm{var}(X_t) \leq C\sqrt{\ln N} \sum_{t=T+1}^{n} \frac{V_t - V_{t-1}}{\sqrt{V_{t-1}}}.$$

Sea $v_t = \mathrm{var}(X_t) = V_t - V_{t-1}$. Como $V_t \leq V_{t-1} + M^2$ y $V_{t-1} \geq M^2$

$$\frac{v_t}{\sqrt{V_{t-1}}} = \frac{\sqrt{V_t} + \sqrt{V_{t-1}}}{\sqrt{V_{t-1}}}(\sqrt{V_t} + \sqrt{V_{t-1}}) \leq (\sqrt{2}+1)(\sqrt{V_t} - \sqrt{V_{t-1}}).$$

Llegamos así a que

$$\sum_{t=T+1}^{n} \eta_t \mathrm{var}(X_t) \leq \frac{C\sqrt{\ln N}}{\sqrt{2}-1}(\sqrt{V_n} - \sqrt{V_T}) \leq \frac{C}{\sqrt{2}-1}\sqrt{V_n \ln N}.$$

Por lo tanto,

$$H_n^* - \widehat{H}_n \leq 2\,\text{máx}\left\{2M\ln N, \frac{1}{C}\sqrt{V_n \ln N}\right\} + (e-2)M + (e-2)\frac{C}{\sqrt{2}-1}\sqrt{V_n \ln N}$$

de donde se deduce el resultado acotando por exceso. □

Los resultados de los Teoremas 2.5, 2.6 y el Corolario 2.6 muestran que el pronosticador multilineal y el exponencial funcionan en el caso general. Además, las acotaciones que se han obtenido para el arrepentimiento muestran ser potencialmente mejores que las obtenidas al realizar la transformación lineal propuesta al final de la Sección 2.6. Sin embargo, el inconveniente que presentan todas estas acotaciones es que requieren de información previa sobre los valores que va a tomar la secuencia de saldos.

La aparición del término V_n en la cota obtenida gracias al Teorema 2.6, nos indica que este término es menor que cualquiera de la forma

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} \frac{w_{i,t-1}}{W_{t-1}}(h(f_{i,t}, y_t) - \mu_t)^2$$

donde la secuencia de valores $\mu_1, \mu_2, \ldots$ no son necesarios para la definición del pronosticador. Esto nos permite elegir dichos valores de la manera que más nos convenga.

Presentamos como ejemplo, el pronosticador que toma cada parámetro con la forma $\eta_t = \text{mín}_{j=1,\ldots,N} h(f_{j,t}, y_t) + R_t/2$, donde $R_t = \text{máx}_{i=1,\ldots,N} h(f_{i,t}, y_t) - \text{mín}_{j=1,\ldots,N} h(f_{j,t}, y_t)$ es el rango de los saldos en el instante t. Para esta situación en particular, el resultado que se obtiene es el siguiente.

Corolario 2.7. *Bajo las condiciones del Teorema 2.6*

$$H_n^* - \widehat{H}_n \leq 2\sqrt{(\ln N)\sum_{t=1}^{n} R_t^2} + 4M\ln N + (e-2)M.$$

Este corolario muestra que para un juego de pérdidas, el arrepentimiento está acotado por el término dominante $2M\sqrt{n \ln N}$, que comparado con el dado por el Teorema 2.3 muestra que hemos logrado obtener un resultado mucho mas general solo a costa de un factor $\sqrt{2}$.

2.9 Expertos simulables

Hasta ahora hemos entendido a los expertos como unos entes que generan en cada momento una recomendación a la que tiene acceso el pronosticador. Sin embargo, aquí vamos a presentar el escenario en el que cada experto E se puede definir a partir de una secuencia de funciones $f_{E,t} : \mathcal{Y}^{t-1} \to \mathcal{D}$ para $t = 1, 2, ...$ de forma que en cada momento, el experto predice de acuerdo con $f_{E,t}(y^{t-1})$. Asumiremos que en este modelo, el pronosticador también tiene acceso a estas funciones, por lo que puede hacer uso de ellas en cualquier momento y sacar hipótesis de futuros resultados computando todas las posibles predicciones posibles a partir de una secuencia de resultados. Por esto decimos que se trata de expertos "simulables", porque el pronosticador es capaz de hacer simulaciones sobre las predicciones de los expertos. Cabe mencionar que aquí hemos supuesto que las predicciones dependen de los resultados previos y^{t-1}, pero en casos mas generales las recomendaciones de los expertos pueden ser independientes de éstos, o depender de información a la que el pronosticador no tiene acceso.

Un tipo particular de expertos simulables es el del *experto estático*. Un experto estático es aquél que sus predicciones $f_{E,t}$ dependen solo de t y no de y^{t-1}. Es decir, las $f_{E,t}$ son constantes. Por lo tanto, la secuencia de predicciones de este experto $f_{E,1}, f_{E,2}, ...$ no depende de los resultados que se vayan obteniendo. En este caso, utilizaremos la notación $f = (f_1, f_2, ...)$ para referirnos a un experto estático arbitrario, y también abusando algo de notación para denotar a expertos simulables.

En secciones posteriores veremos el uso que se puede hacer de este tipo de expertos para lograr reducir el arrepentimiento.

2.10 Arrepentimiento minimax

Hasta ahora, la mejor acotación que se ha obtenido para el modelo de predicción asesorado por expertos es de $\sqrt{(n/2)\ln N}$, para el caso en que las funciones de pérdidas son convexas y toman valores en $[0, 1]$ haciendo uso del pronosticador de peso ponderado exponencialmente.

A continuación, tratamos de analizar de qué manera se puede obtener la mejor acotación posible para el arrepentimiento, y qué pronosticador es el correcto dependiendo de la función de pérdida. Para esto introducimos el siguiente término.

Definición 2.3. Dada la función de pérdida l, y considerándose N expertos, se define el *arrepentimiento minimax en el horizonte n* como

$$V_n^{(N)} = \sup_{(f_{1,1},...,f_{N,1})\in\mathcal{D}^N} \inf_{\widehat{p}_1\in\mathcal{D}} \sup_{y_1\in\mathcal{Y}} \sup_{(f_{1,2},...,f_{N,2})\in\mathcal{D}^N} \inf_{\widehat{p}_2\in\mathcal{D}} \sup_{y_2\in\mathcal{Y}}$$
$$... \sup_{(f_{1,n},...,f_{N,n})\in\mathcal{D}^N} \inf_{\widehat{p}_n\in\mathcal{D}} \sup_{y_n\in\mathcal{Y}} \left(\sum_{t=1}^{n} l(\widehat{p}_t, y_t) - \min_{i=1,...,N} \sum_{t=1}^{n} l(f_{i,t}, y_t) \right).$$

En el caso en el que se haga uso de expertos estáticos se puede dar una definición mas simple. Vamos a hacer uso de una estrategia de predicción P, que para cada predicción $\widehat{p}_t$ tiene en cuenta los resultados previos $y_1, ..., y_{t-1}$ y las recomendaciones de los expertos $(f_{1,s}, ..., f_{N,s})$ para $s = 1, ..., t$, es decir

$$\widehat{p}_t : \mathcal{Y}^{t-1} \text{x} (\mathcal{D}^N)^t \to \mathcal{D}.$$

Entonces, fijada una clase de N expertos $\mathcal{F}$, denotamos como $\widehat{L}_n(P, \mathcal{F}, y^n)$ a la pérdida acumulada tras la secuencia de resultados y^n por el pronosticador que sigue la estrategia P usando las recomendaciones de los expertos de $\mathcal{F}$. En este caso el arrepentimiento minimax se puede definir como

$$V_n^{(N)} = \inf_P \sup_{\{\mathcal{F}:|\mathcal{F}|=N\}} \sup_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \max_{i=1,\dots,N} \left(\widehat{L}_n(P, \mathcal{F}, y^n) - \sum_{t=1}^{n} l(f_{i,t}, y_t) \right).$$

El arrepentimiento minimax mide el mejor resultado posible que uno puede obtener dado un algoritmo de pronosticadores que se mantiene para todas las clases posibles de N expertos y toda secuencia de n resultados. Esta noción se basa en el rendimiento que va a presentar un pronosticador en el caso de contar con los peores expertos posibles. Una cota superior nos indica la existencia de una estrategia de predicción que va a lograr un arrepentimiento no mucho mas grande que dicha cota sean cuales sean los expertos y la secuencia de resultados, mientras que una cota inferior sobre $V_n^{(N)}$ nos dice que sea cual sea la estrategia que utilicemos, existe una clase de expertos y una serie de resultados que van a hacer que el arrepentimiento sufrido sea al menos tan grande como esta cota. En próximas secciones vamos a deducir acotaciones minimax para distintos tipos de pérdidas.

También, podríamos estar interesados en saber cuales son los mejores resultados posibles a los que un pronosticador puede llegar frente al mejor experto de una familia de expertos fijada. Esto nos lleva a la siguiente definición de minimax. Tomamos la función de pérdida l, y consideramos la clase $\mathcal{F}$ de expertos simulables que no es necesariamente finita. Haciendo en este caso uso de una estrategia de predicción P basada en $\mathcal{F}$, donde ahora la secuencia de predicciones $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, ...$ son funciones que no dependen de forma explícita de la recomendación de cada experto

$$\widehat{p}_t : \mathcal{Y}^{t-1} \to \mathcal{D}.$$

Se define el arrepentimiento minimax respecto a $\mathcal{F}$ en el horizonte n como

$$V_n(\mathcal{F}) = \inf_P \sup_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \left(\sum_{t=1}^{n} l(\widehat{p}_t(y^{t-1}), y_t) - \inf_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} l(f_t(y^{t-1}), y_t) \right).$$

También, en el caso en que se trate de expertos simulables, se puede definir la siguiente noción,

$$U_n(\mathcal{F}) = \sup_Q \inf_P \int_{\mathcal{Y}^n} \left(\sum_{t=1}^{n} l(\widehat{p}_t(y^{t-1}), y_t) - \inf_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} l(f_t(y^{t-1}), y_t) \right) dQ(y^n),$$

conocida como el arrepentimiento maximin respecto a $\mathcal{F}$. Mencionemos que para que se puedan definir estas medidas sobre $\mathcal{Y}^n$, asumiremos que $\mathcal{Y}$ es un compacto de $\mathbb{R}^d$.

Observemos que la función

$$F(P, Q) = \int_{\mathcal{Y}^n} \left(\sum_{t=1}^{n} l(\widehat{p}_t(y^{t-1}), y_t) - \inf_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} l(f_t(y^{t-1}), y_t) \right) dQ(y^n),$$

es convexa en su primer y segundo argumento.

Gracias a esto se puede definir una combinación convexa $\lambda P^{(1)} + (1-\lambda) P^{(2)}$ dada por dos estrategias de pronosticadores $P^{(1)} = (\widehat{p}_1^{(1)}, \widehat{p}_2^{(1)}, ...)$ y $P^{(2)} = (\widehat{p}_1^{(2)}, \widehat{p}_2^{(2)}, ...)$, de forma que la combinación predice en cada instante t de acuerdo a

$$\lambda \widehat{p}_t^{(1)}(y^{t-1}) + (1-\lambda) \widehat{p}_t^{(2)}(y^{t-1}).$$

Teorema minimax

Para concluir la sección, enunciamos una versión del Teorema minimax, uno de los más importantes a los que llegamos en el presente trabajo, y del que se derivan resultados como el Teorema minimax de von Neumann que resulta ser uno de los más relevantes en la Teoría de Juegos.

Teorema 2.7. *Sea $f(x,y)$ una función real acotada definida en $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ donde $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son conjuntos convexos y además $\mathcal{X}$ es compacto. Si $f(\cdot, y)$ es convexa y continua para cada $y \in \mathcal{Y}$ y Si $f(x, \cdot)$ es cóncava para cada $x \in \mathcal{X}$, entonces*

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} f(x,y) = \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} f(x,y).$$

Demostración. Para cualquier función f es trivial que

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} f(x,y) \geq \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} f(x,y).$$

Veamos pues la otra desigualdad. Sin pérdida de generalidad suponemos que $f(x,y) \in [0,1]$ para cada $(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Tomando $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ grande. Por la compacidad de $\mathcal{X}$ existe una serie de puntos $\{x^{(1)}, ..., x^{(N)}\} \subset \mathcal{X}$ tales que cada $x \in \mathcal{X}$ se encuentra a una distancia ϵ de algún $x^{(i)}$. Definimos las secuencias $x_1, ..., x_n \in \mathcal{X}$ e $y_1, ..., y_n \in \mathcal{Y}$ de forma recursiva. Para y_0 se toma cualquier valor. Ahora, para cada $t = 1, ..., n$

$$x_t = \frac{\sum_{i=1}^N x^{(i)} e^{-\eta \sum_{s=0}^{t-1} f(x^{(i)}, y_s)}}{\sum_{j=1}^N e^{-\eta \sum_{s=0}^{t-1} f(x^{(j)}, y_s)}}$$

con $\eta = \sqrt{8 \ln N / n}$ e y_t que cumpla que $f(x_t, y_t) \geq \sup_{y\in\mathcal{Y}} f(x_t, y) - 1/n$. Tenemos entonces que gracias a la convexidad de f en su primer argumento y aplicando el Teorema 2.2 que

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n f(x_t, y_t) \leq \min_{i=1,...,N} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n f(x^{(i)}, y_t) + \sqrt{\frac{\ln N}{2n}}. \tag{2.10.1}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} f(x,y) &\leq \sup_{y\in\mathcal{Y}} f\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n f(x_t, y)\right) \leq \sup_{y\in\mathcal{Y}} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n f(x_t, y) \quad \text{(por la convexidad de } f(\cdot, y)) \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n \sup_{y\in\mathcal{Y}} f(x_t, y) \leq \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n f(x_t, y_t) + \frac{1}{n} \quad \text{(por la definición de } y_t) \\
&\leq \min_{i=1,...,N} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n f(x^{(i)}, y_t) + \sqrt{\frac{\ln N}{2n}} + \frac{1}{n} \quad \text{(por 2.10.1)} \\
&\leq \min_{i=1,...,N} f\left(x^{(i)}, \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n y_t\right) + \sqrt{\frac{\ln N}{2n}} + \frac{1}{n} \quad \text{(por la concavidad de } f(x, \cdot)) \\
&\leq \sup_{y\in\mathcal{Y}} \min_{i=1,...,N} f(x^{(i)}, y) + \sqrt{\frac{\ln N}{2n}} + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Llegando así a que para cada n,

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} f(x,y) \leq \sup_{y\in\mathcal{Y}} \min_{i=1,...,N} f(x^{(i)}, y) + \sqrt{\frac{\ln N}{2n}} + \frac{1}{n}$$

donde tomando el límite para $n \to \infty$ obtenemos

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} f(x,y) \leq \sup_{y\in\mathcal{Y}} \min_{i=1,\ldots,N} f(x^{(i)},y).$$

Finalmente, si tomamos $\epsilon \to 0$ y haciendo uso de la continuidad de f llegamos a que

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} f(x,y) \leq \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} f(x,y).$$

□

Concluimos, que cuando el espacio de decisión es convexo y la función de pérdida es convexa y continua en su primer argumento, la aplicación del Teorema 2.7 nos aporta la igualdad

$$V_n(\mathcal{F}) = U_n(\mathcal{F}).$$

2.11 Arrepentimiento descontado

En una cantidad de aplicaciones, vamos a encontrar razonable considerar que las pérdidas pasadas pesen menos que las pérdidas recientes. Por esta razón introducimos en este apartado del capítulo los arrepentimientos descontados:

$$\rho_{i,n} = \sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t} r_{i,t} \tag{2.11.1}$$

donde los factores β_t decrecen con el tiempo $\beta_0 \geq \beta_1 \geq \beta_2 \geq ...$, de forma que para el instante $t = n$, el arrepentimiento actual mantiene su peso por completo, mientras que los anteriores pierden en importancia a medida que pasa el tiempo.

El objetivo del pronosticador es asegurar que independientemente de la secuencia de resultados, el arrepentimiento descontado medio acumulado dado por

$$\max_{i=1,\ldots,N} \frac{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t} r_{i,t}}{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t}}$$

sea lo más pequeño posible. Es mas, uno esperaría que dicho arrepentimiento convergiese a cero si $n \to \infty$.

Vamos entonces a tratar de analizar con qué secuencias de arrepentimientos descontados se puede lograr a dicho objetivo. Primero, el siguiente teorema nos muestra que si la secuencia de descuento decrece demasiado rápido no se va a llegar a un resultado que merezca la pena.

Teorema 2.8. *Asumiendo que existe $c > 0$ tal que para cada n existe un par de resultados $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ y dos expertos $i \neq i'$ tales que $i = \mathrm{argmin}_j l(f_{j,n}, y_1)$, $i' = \mathrm{argmin}_j l(f_{j,n}, y_2)$ y $\min_{y=y_1,y_2} |l(f_{i,n}, y) - l(f_{i',n}, y)| \geq c$. Si $\sum_{t=0}^{\infty} \beta_t < \infty$, entonces existe una constante C tal que para cualquier pronosticador, hay una secuencia de resultados que cumplen*

$$\max_{i=1,\ldots,N} \frac{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t} r_{i,t}}{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t}} \geq C$$

para cada n.

Demostración.

$$\max_{i=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t} r_{i,t} \geq \max_{i=1,\ldots,N} \beta_0 r_{i,n} = l(\widehat{p}_n, y_n) - \min_{i=1,\ldots,N} l(f_{i,n}, y_n)$$

de forma que

$$\begin{aligned}
&\sup_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \max_{i=1,\ldots,N} \frac{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t} r_{i,t}}{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t}} \\
&\geq \frac{\sup_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \left(l(\widehat{p}_n, y_n) - \min_{i=1,\ldots,N} l(f_{i,n}, y_n) \right)}{\sum_{t=0}^{\infty} \beta_t} \\
&\geq \frac{C}{2 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t}
\end{aligned}$$

□

Veamos ahora cómo, realizando un análisis análogo al hecho con el pronosticador de peso ponderado en el que simplemente sustituimos $r_{i,t}$ por $\tilde{r}_{i,t} = \beta_{n-1} r_{i,t}$ en su definición, llegamos a los siguientes resultados.

Teorema 2.9. *Considerando el pronosticador de peso ponderado polinómicamente con descuento definido por*

$$\widehat{p}_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} \phi'\left(\sum_{s=1}^{t-1} \tilde{r}_{i,s}\right) f_{i,s}}{\sum_{j=1}^{N} \phi'\left(\sum_{s=1}^{t-1} \tilde{r}_{j,s}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \phi'\left(\sum_{s=1}^{t-1} \beta_{n-s} r_{i,s}\right) f_{i,s}}{\sum_{j=1}^{N} \phi'\left(\sum_{s=1}^{t-1} \beta_{n-s} r_{j,s}\right)}$$

donde $\phi'(x) = (p-1)x^p$ con $p = 2 \ln N$. Entonces el arrepentimiento descontado medio cumple

$$\max_{i=1,\ldots,N} \frac{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t} r_{i,t}}{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t}} \leq \sqrt{2e \ln N} \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t}^2}}{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t}}.$$

En particular, si $\sum_{t=0}^{\infty} \beta_t = \infty$ se tiene que

$$\max_{i=1,\ldots,N} \frac{\sum_{t=1}^{s} \beta_{n-t} r_{i,t}}{\sum_{t=1}^{s} \beta_{n-t}} = o(1).$$

Demostración. Dado que el pronosticador cumple la condición de Blackwell, y para cada t, $|\tilde{r}_{i,t}| \leq \beta_{n-t}$, el Teorema 2.1 implica

$$\max_{i=1,\ldots,N} \rho_{i,n} \leq \sqrt{2e \ln N} \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t}^2}$$

de donde se demuestra la primera parte del teorema. Para la segunda afirmación, basta con observar que

$$\sqrt{2e \ln N} \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t}^2}}{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t}} = \sqrt{2e \ln N} \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} \beta_{t-1}^2}}{\sum_{t=1}^{n} \beta_{t-1}} \leq \sqrt{2e \ln N} \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} \beta_{t-1}}}{\sum_{t=1}^{n} \beta_{t-1}} = \frac{\sqrt{2e \ln N}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} \beta_{t-1}}} = o(1).$$

□

Por lo tanto, podemos observar cómo para los casos en los que los factores de descuento decrecen tan lentamente que $\sum_{t=0}^{\infty} \beta_t = \infty$, es posible lograr que el arrepentimiento previamente mencionado desaparezca para grandes valores de n.

Consideremos como ejemplo el caso particular en que $\beta_t = (t+1)^{-a}$ para $0 < a \leq 1$. Por lo visto en el Teorema 2.8, para $a > 1$ no se podía deducir ningún límite útil. Para $a = 1$ del Teorema 2.9 obtenemos

$$\max_{i=1,\dots,N} \frac{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t} r_{i,t}}{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t}} \leq \frac{C}{\log n}$$

lo que resulta en una convergencia a cero bastante lenta, ya que en este caso la serie está en el límite de ser no sumable. Sin embargo para $a < 1$ la convergencia es mucho más rápida como recogemos a continuación.

$$\max_{i=1,\dots,N} \frac{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t} r_{i,t}}{\sum_{t=1}^{n} \beta_{n-t}} = \begin{cases} O(1/\sqrt{n}) & \text{si } a < 1/2 \\ O(\sqrt{(\log n)/n} & \text{si } a = 1/2 \\ O(n^{a-1}) & \text{si } 1/2 < a < 1 \\ O(1/\log n) & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Podemos ver que cuanto más lento disminuye el factor de descuento, más rápido converge el arrepentimiento a 0.

3

Mejora en las cotas para ciertas pérdidas

En este capítulo vamos a analizar las mejoras que se pueden realizar en las cotas obtenidas previamente, viendo que para ciertas funciones de pérdida y clases de expertos se puede llegar a obtener cotas más finas. También vamos a ver qué cotas inferiores se pueden deducir para el arrepentimiento en los peores casos posibles.

Hasta ahora, hemos usado el Teorema 2.1 para acotar el potencial $\Phi(\mathbf{R}_n)$ del pronosticador de peso ponderado por $\Phi(\mathbf{0})$ y una suma de términos a los que se había llegado tomando aproximaciones lineales. Veamos ahora cómo en ciertos casos ese potencial se puede acotar directamente por $\Phi(\mathbf{0})$ sin necesidad de aproximación alguna. Gracias a esto, a lo largo de este capítulo vamos a explorar diversas técnicas con las que llegar a dichas mejoras en las cotas.

3.1 Seguir al mejor experto

Una de las estrategias más simples que se pueden seguir en el problema de la predicción asesorada por expertos es aquella que consiste en seguir al mejor experto, es decir, en el momento t, se escoge al experto cuyas pérdidas acumuladas hasta el momento $t-1$ son menores.

Dada una clase $\mathcal{E}$ de expertos, el pronosticador de esta estrategia hace sus predicciones tal que

$$\widehat{p}_t = f_{E,t} \quad \text{si} \quad E = \operatorname*{argmin}_{E' \in \mathcal{E}} \sum_{s=1}^{t-1} l(f_{E',s}, y_s).$$

Supondremos que dicho mínimo siempre se alcanza, y en el caso de empate entre varios expertos que minimicen las pérdidas, E se escoge al azar entre ellos.

En este apartado vamos a tratar de comparar el rendimiento de nuestro pronosticador frente al del mejor experto, con aras de hallar cotas para el arrepentimiento

$$\widehat{L}_n - \inf_{E \in \mathcal{E}} L_{E,n} = \sum_{t=1}^{n} l(\widehat{p}, y_t) - \inf_{E \in \mathcal{E}} \sum_{t=1}^{n} l(f_{E,t}, y_t).$$

Para realizar este análisis vamos a considerar el pronosticador hipotético

$$p_t^* = f_{E,t} \quad \text{si} \quad E = \operatorname*{argmin}_{E' \in \mathcal{E}} \sum_{s=1}^{t} l(f_{E',s}, y_s).$$

Este pronosticador está definido igual que $\widehat{p}_t$, con la diferencia de que p_t^* también tiene en cuenta las pérdidas sufridas en el instante t. Obviamente, este no es un pronosticador legal, porque está siendo capaz de "ver el futuro", pero nos será útil pues, como indicamos en el siguiente lema, p_t^* rinde al menos tan bien como el mejor experto.

Lema 3.1. *Para cualquier secuencia $y_1, ..., y_n$ de resultados,*

$$\sum_{t=1}^{n} l(p_t^*, y_t) \leq \sum_{t=1}^{n} l(p_n^*, y_t) = \min_{E \in \mathcal{E}} L_{E,n}$$

Demostración. Probemos mediante inducción. El resultado es obvio para $n = 1$. Ahora, suponiendo que

$$\sum_{t=1}^{n-1} l(p_t^*, y_t) \leq \sum_{t=1}^{n-1} l(p_{n-1}^*, y_t)$$

como por definición $\sum_{t=1}^{n-1} l(p_{n-1}^*, y_t) \leq \sum_{t=1}^{n-1} l(p_n^*, y_t)$, junto a la hipótesis se deduce que

$$\sum_{t=1}^{n-1} l(p_t^*, y_t) \leq \sum_{t=1}^{n-1} l(p_n^*, y_t)$$

donde sumando $l(p_n^*, y_n)$ a cada lado se llega al resultado. □

De aquí deducimos que el arrepentimiento de $\widehat{p}_t$ estará acotado por

$$\widehat{L}_n - \inf_{E \in \mathcal{E}} L_{E,n} \leq \sum_{t=1}^{n} (l(\widehat{p}, y_t) - l(p_t^*, y_t)).$$

Es lógico esperar que en ciertos casos, ambos pronosticadores $\widehat{p}_t$ y p_t^* estarán próximos entre si, por lo que, si se puede asegurar que para cada momento t,

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} (l(\widehat{p}, y_t) - l(p_t^*, y_t)) \leq \epsilon_t$$

para una secuencia de números reales ϵ_t, entonces

$$\widehat{L}_n - \inf_{E \in \mathcal{E}} L_{E,n} \leq \sum_{t=1}^{n} \epsilon_t. \tag{3.1.1}$$

Nos interesa entonces ver bajo qué condiciones se da que $\epsilon_t \sim 1/t$, de forma que este arrepentimiento crezca como $O(\ln n)$.

En los ejemplos presentados a continuación vamos a considerar expertos constantes, cuya pérdida es independiente del tiempo, es decir, tales que para cualquier y, $l(f_{E,1}, y) = \cdots = l(f_{E,n}, y)$. Por simplificación vamos a designar dicho valor como $l(E, y)$.

Pérdida cuadrática

Sea $\mathcal{D} = \mathcal{Y} = \{p : \|p\| \leq 1\}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tomamos como primer ejemplo la función de pérdida cuadrática dada para $p, y \in \mathcal{H}$ por

$$l(p, y) = \|p - y\|^2.$$

Para este caso en particular, podemos ver que el pronosticador $\widehat{p}$ que sigue a los expertos de la clase $\mathcal{E}$ indexados por $E \in \mathcal{D}$, gracias a que para cada $p \in \mathcal{D}$,

$$\frac{1}{t-1}\sum_{s=1}^{t-1}\|p - y_s\|^2 = \frac{1}{t-1}\sum_{s=1}^{t-1}\left\|\frac{1}{t-1}\sum_{s=1}^{t-1} y_r - y_s\right\|^2 + \left\|\frac{1}{t-1}\sum_{s=1}^{t-1} y_r - p\right\|^2$$

toma la forma

$$\widehat{p}_t = \frac{1}{t-1}\sum_{s=1}^{t-1} y_s.$$

Análogamente,

$$p_t^* = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} y_s.$$

Por lo tanto, para cualquier $y \in \mathcal{D}$

$$l(\widehat{p}_t, y) - l(p_t^*, y) = \|\widehat{p}_t - y\|^2 - \|p_t^* - y\|^2 = (\widehat{p}_t - p_t^*) \cdot (\widehat{p}_t + p_t^* - 2y) \leq 4\|\widehat{p}_t - p_t^*\|.$$

Ahora, tomando las expresiones anteriores, podemos acotar dicha norma teniendo en cuenta que

$$\widehat{p}_t - p_t^* = \frac{1}{t-1}\sum_{s=1}^{t-1} y_s - \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} y_s = \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)\sum_{s=1}^{t-1} y_s - \frac{y_t}{t}$$

de manera que, sea cual sea la secuencia de resultados, $\|\widehat{p}_t - p_t^*\| \leq 2/t$, llegamos a que

$$l(\widehat{p}_t, y) - l(p_t^*, y) \leq \frac{8}{t}.$$

Por último, introducimos el resultado en 3.1.1 y gracias a la desigualdad $\sum_{t=1}^{n} 1/t \leq 1 + \int_1^n dx/x = 1 + \ln n$ obtenemos que

$$\widehat{L}_n - \inf_{E\in\mathcal{E}} L_{E,n} \leq \sum_{t=1}^{n}\frac{8}{t} \leq 8(1 + \ln n).$$

Aquí podemos observar que en efecto hemos obtenido una cota que mejora aquella deducida en la sección anterior que resultaba ser del orden de $\sqrt{n}$. Adicionalmente, esta resulta ser independiente del tamaño de la clase de expertos.

Pérdidas convexas y expertos constantes

Veamos de qué manera podemos generalizar el resultado obtenido para la función de pérdida cuadrática a funciones de pérdida convexas cuando la clase de expertos contiene expertos constantes.

Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^d$ donde se asocia cada experto E a un elemento de $\mathcal{D}$ de forma que la pérdida del experto E en el instante t es $l(E, y_t)$. Denotamos al vector del pronosticador que sigue al mejor experto como $\widehat{\mathbf{p}}_t = (\widehat{p}_{1,t}, ..., \widehat{p}_{d,t})$ y como $\mathbf{p}_t^* = (p_{1,t}^*, ..., p_{d,t}^*)$ al pronosticador hipotético con el que lo comparamos. Suponemos que la función de pérdida cumple:

- l es convexa en su primer argumento y toma valores en [0,1].
- Para cada $y \in \mathcal{Y}$ fija $l(\cdot, y)$ es Lipschitziana en su primer argumento, con constante B.
- Para cada $y \in \mathcal{Y}$ fija $l(\cdot, y)$ es dos veces diferenciable. Además existe una constante $C > 0$ tal que para cada $y \in \mathcal{Y}$ fija, la matriz Hessiana

$$\left(\frac{\partial^2 l(\mathbf{p}, y)}{\partial p_i \partial p_j}\right)_{d\times d}$$

  es positiva definida con autovalores acotados inferiormente por C.
- Para cualquier sucesión $y_1, ..., y_t$, el pronosticador $\mathbf{p}_t^*$ cumple que $\nabla\Psi_t(\mathbf{p}_t^*) = 0$ donde, para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$

$$\Psi_t(\mathbf{p}) = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} l(\mathbf{p}, y_s).$$

Teorema 3.1. *Bajo las hipótesis anteriores, el arrepentimiento por ronda del pronosticador que sigue al mejor experto cumple*

$$\frac{1}{n}\left(\widehat{L}_n - \inf_{E\in\mathcal{E}} L_{E,n}\right) \leq \frac{4B^2(1+\ln n)}{Cn}.$$

Demostración. Gracias al desarrollo de Taylor de Ψ_t alrededor del mínimo $\mathbf{p}_t^*$ obtenemos

$$\Psi_t(\widehat{\mathbf{p}}_t) - \Psi_t(\mathbf{p}_t^*) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \left.\frac{\partial^2 l(\mathbf{p}, y)}{\partial p_i \partial p_j}\right|_p (\widehat{p}_{i,t} - p_{i,t}^*)(\widehat{p}_{j,t} - p_{j,t}^*) \geq \frac{C}{2}\|\widehat{\mathbf{p}}_t - \mathbf{p}_t^*\|^2$$

para algún $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\Psi_t(\widehat{\mathbf{p}}_t) - \Psi_t(\mathbf{p}_t^*) &= (\Psi_{t-1}(\widehat{\mathbf{p}}_t) - \Psi_t(\mathbf{p}_t^*)) + (\Psi_t(\widehat{\mathbf{p}}_t) - \Psi_{t-1}(\widehat{\mathbf{p}}_t)) \\
&\leq (\Psi_{t-1}(\mathbf{p}_t^*) - \Psi_t(\mathbf{p}_t^*)) + (\Psi_t(\widehat{\mathbf{p}}_t) - \Psi_{t-1}(\widehat{\mathbf{p}}_t)) \\
&= \frac{1}{t(t-1)}\sum_{s=1}^{t-1}(l(\mathbf{p}_t^*, y_s) - l(\widehat{\mathbf{p}}_t, y_s)) + \frac{1}{t}(l(\widehat{\mathbf{p}}_t, y_t) - l(\mathbf{p}_t^*, y_t)) \\
&\leq \frac{2B}{t}\|\widehat{\mathbf{p}}_t - \mathbf{p}_t^*\|,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la propiedad Lipschitziana de la función de pérdida. Comparando ambas cotas deducimos que para cada $t = 1, 2, ...,$

$$\|\widehat{\mathbf{p}}_t - \mathbf{p}_t^*\| \leq \frac{4B}{Ct}.$$

Por lo tanto

$$\widehat{L}_n - \inf_{E\in\mathcal{E}} L_{E,n} \leq \sum_{t=1}^{n}(l(\widehat{\mathbf{p}}_t, y) - l(\mathbf{p}_t^*, y)) \leq \sum_{t=1}^{n} B\|\widehat{\mathbf{p}}_t - \mathbf{p}_t^*\| \leq \frac{4B^2}{C}\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t}$$

de donde se llega a la expresión utilizando otra vez que $\sum_{t=1}^{n} 1/t \leq 1 + \int_1^n dx/x = 1 + \ln n$. □

Como podemos observar, bajo estas condiciones se obtiene una cota superior que no depende del tamaño de la clase de expertos y que además crece lentamente a razón de $\ln n$. Como ejemplo, las funciones de pérdida que toman la forma $l(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{y}\|^\alpha$ para algún $\alpha \in (1, 2]$ entrarían en esta categoría ya que cumplen las hipótesis.

3.2 Funciones de pérdida exponencialmente cóncavas

Volviendo al pronosticador de peso ponderado 2.1.1, veamos una clase de funciones que presentan unas propiedades bastante útiles al utilizarlas junto al potencial exponencial dado por 2.1.8.

Definición 3.1. Una función de pérdida l es *exponencialmente cóncava* si para algún $\eta > 0$ la función $F(z) = e^{-\eta l(z,y)}$ es cóncava para todo $y \in \mathcal{Y}$.

Esta propiedad es más fuerte que la convexidad en el primer argumento como veremos en el Lema 3.2. Es más, cuanto mayor sea el valor de η, más fuerte resulta ser.

Teorema 3.2. *Si la función de pérdida es exponencialmente cóncava para $\eta > 0$, entonces, el arrepentimiento del pronosticador de peso ponderado exponencialmente, dado por el mismo valor de η, cumple para todo $y_1, ..., y_n \in \mathcal{Y}$, que $\Phi_\eta(\boldsymbol{R}_n) \leq \Phi_\eta(\boldsymbol{0})$.*

Demostración. Nos basta con comprobar que $\Phi_\eta(\mathbf{R}_t) \leq \Phi_\eta(\mathbf{R}_{t-1})$, o lo que es lo mismo,

$$\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta L_{i,t-1}} e^{\eta r_{i,t}} \leq \sum_{i=1}^{N} e^{-\eta L_{i,t-1}}.$$

Esto se puede reformular como

$$\exp(-\eta l(\widehat{p}_t, y_t)) \geq \frac{\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} \exp(-\eta l(f_{i,t}, y_t))}{\sum_{j=1}^{N} w_{j,t-1}} \tag{3.2.1}$$

desigualdad que se cumple gracias a la definición del pronosticador, la concavidad de $F(z)$ y la desigualdad de Jensen. $\square$

Este resultado nos va a proporcionar la capacidad para acotar el arrepentimiento por una constante independiente de la longitud de la secuencia n.

Proposición 3.1. *Si, para alguna función de pérdida l y algún $\eta > 0$ el pronosticador cumple $\Phi_\eta(\boldsymbol{R}_n) \leq \Phi_\eta(\boldsymbol{0})$ para toda secuencia $y_1, ..., y_n \in \mathcal{Y}$, entonces el arrepentimiento del pronosticador está acotado por*

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,...,N} L_{i,n} \leq \frac{\ln N}{\eta}.$$

Demostración. A partir de $\Phi_\eta(\mathbf{R}_n) \leq \Phi_\eta(\mathbf{0})$ obtenemos directamente

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,...,N} L_{i,n} = \max_{i=1,...,N} R_{i,n} \leq \frac{1}{\eta} \ln \sum_{j=1}^{N} e^{\eta R_{j,n}} = \Phi_\eta(\mathbf{R}_n) \leq \Phi_\eta(\mathbf{0}) = \frac{\ln N}{\eta}.$$

$\square$

Está claro que cuanto mayor sea el valor de η, mejor es la cota a la que se llega. Por lo tanto, con aras de optimizar el rendimiento del pronosticador, vamos a tratar de encontrar el valor maximal que, si es que este existe, hace que la función de pérdida l con la que estemos trabajando sea exponencialmente cóncava. Veamos algunos ejemplos.

Pérdida de entropía relativa

Sea $\mathcal{D} = \mathcal{Y} = [0,1]$, consideremos la pérdida de entropía relativa $l(\widehat{p}, y) = y\ln(y/\widehat{p}) + (1-y)\ln(1-y)/(1-\widehat{p}))$. Podemos ver que para $\eta = 1$, $F(z)$ es cóncava para cualquier valor de y. El caso particular en el que $\mathcal{D} = [0,1]$ y $\mathcal{Y} = \{0,1\}$ estamos ante la pérdida logarítmica $l(z,y) = -\mathbb{I}_{y=1}\ln z - \mathbb{I}_{y=0}\ln(1-z)$, que será desarrollada más en profundidad en un próximo apartado.

Pérdida cuadrática

Sea $\mathcal{D} = \mathcal{Y} = [0,1]$, la función de pérdida cuadrática viene dada por $l(z,y) = (z-y)^2$. En este caso, $F(z)$ es cóncava si y solo si para cada z, $(z-y)^2 \leq 1/(2\eta)$, que se da si $\eta \leq 1/2$.

Pérdida absoluta

Sea $\mathcal{D} = \mathcal{Y} = [0,1]$, consideramos la función de pérdida absoluta $l(z,y) = |z-y|$. En este caso, $F(z)$ no es cóncava para ningún valor de η. Mas adelante veremos que las pérdidas acumuladas por este pronosticador no pueden ser acotadas independientemente del valor n.

Otra utilidad de las funciones de pérdida exponencialmente convexas es que gracias a ellas podemos deducir cotas que se mantienen independientemente del número de expertos. Simplemente, modificando el potencial 2.1.8 por $\Phi_\eta(\mathbf{R}) = \frac{1}{\eta}\ln(\sum_{i=1}^{\infty} q_i e^{\eta R_i})$, donde $\{q_i : i = 1,2..\}$ es cualquier distribución de probabilidad sobre un conjunto de enteros positivos, lo que asegura la convergencia de la serie. Cada q_i representa el peso inicial de cada experto i.

Corolario 3.1. *Dados (l,η) que satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2. Dada cualquier clase numerable de expertos y cualquier distribución de probabilidad $\{q_i : i = 1,2...\}$ sobre el conjunto de enteros positivos, el pronosticador de peso ponderado exponencialmente definido por el potencial $\Phi_\eta(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{\eta}\ln(\sum_{i=1}^{\infty} q_i e^{\eta R_i})$, cumple que para cada $n \geq 1$ y para cualquier $y_1, ..., y_n \in \mathcal{Y}$*

$$\widehat{L}_n \leq \inf_{i\geq 1}\left(L_{i,n} + \frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{q_i}\right).$$

Demostración. Procedemos igual que en la prueba del Teorema 3.2 donde en este caso $w_{i,t-1}$ pasa a ser $q_i e^{\eta L_{i,t-1}}$, deduciendo que $\Phi_\eta(\mathbf{R}_n) \leq \Phi_\eta(\mathbf{0})$. Por lo tanto, para cada $i \geq 1$,

$$q_i e^{\eta R_{i,n}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} q_j e^{\eta R_{j,n}} = e^{\eta \Phi_\eta(\mathbf{R}_n)} \leq e^{\eta\Phi_\eta(\mathbf{0})} = 1$$

de donde obtenemos la cota deseada despejando $R_{i,n}$. □

Vemos pues, que la pérdida acumulada por el pronosticador supera a la de cada experto como mucho por una constante que depende del experto. Si formulamos el pronosticador de peso ponderado exponencialmente para un conjunto numerable de expertos como

$$\widehat{p}_t = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} f_{i,t}\exp\left(-\eta\left(L_{i,t-1} + \frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{q_i}\right)\right)}{\sum_{j=1}^{\infty}\exp\left(-\eta\left(L_{j,t-1} + \frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{q_j}\right)\right)}$$

podemos entender el factor $\frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{q_i}$ como la penalización que añadimos a la pérdida acumulada por el experto i cada momento t. Esta desigualdad a la que se ha llegado en el Corolario 3.1 se conoce como una "desigualdad del oráculo", que estipula que el pronosticador mezcla sufre una pérdida acumulada igual a la mejor penalización que han sufrido los expertos.

Un pronosticador mixto para pérdidas exponencialmente cóncavas

Para concluir esta sección vamos a indicar como gracias a lo que acabamos de introducir se puede extender el pronosticador de peso ponderado exponencialmente a una clase de expertos no numerable. La forma en la que procedemos es la siguiente: tomamos un conjunto de N expertos que formarán un casco convexo que denominamos expertos base, que en cada momento t viene dados por $f_{i,t} \in \mathcal{D}$, $i = 1, ..., N$, $t = 1, ..., n$. Denotaremos como $\mathbf{f}_t = (f_{1,t}, ..., f_{N,t})$ al vector de expertos en el momento t. El espacio de toma de decisiones se supone convexo, y la función de pérdida l, es exponencialmente convexa para algún $\eta > 0$. El objetivo del pronosticador es predecir tan bien como la mejor combinación convexa de expertos base, de forma que el arrepentimiento respecto al casco convexo de N expertos base dado por

$$\widehat{L}_n - \inf_{\mathbf{q}\in\Delta} L_{\mathbf{q},n} = \sum_{t=1}^{n} l(\widehat{p}_t, y_t) - \inf_{\mathbf{q}\in\Delta} \sum_{t=1}^{n} l(\mathbf{q} \cdot \mathbf{f}_t, y_t)$$

sea lo menor posible, donde Δ denota el símplex de N-vectores $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_N)$ con $q_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{N} q_i = 1$. $L_{\mathbf{q},n}$ designa la pérdida acumulada del experto asociado a $\mathbf{q}$.

El pronosticador con el que vamos a trabajar lo vamos a bautizar como *pronosticador mixto*, ya que consiste en un pronosticador de peso ponderado exponencialmente definido por la "mezcla"

$$\widehat{p} = \frac{\int_\Delta w_{\mathbf{q},t-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{f} \, d\mathbf{q}}{\int_\Delta w_{\mathbf{q},t-1} d\mathbf{q}}$$

para $w_{\mathbf{q},t-1} = \exp(-\eta \sum_{s=1}^{t-1} l(\mathbf{q} \cdot \mathbf{f}_s, y_s))$, donde η hace que la función de pérdida sea exponencialmente cóncava. De esta forma, el pronosticador está realizando una media ponderada exponencialmente sobre el símplex Δ de acuerdo con el rendimiento hasta el momento de cada vector $\mathbf{q}$. Veamos que el arrepentimiento de este pronosticador se puede acotar si se asume que la función de pérdidas está acotada, aunque esta hipótesis se puede relajar en ciertos casos.

Teorema 3.3. *Asumiendo que la función de pérdida l es cóncava exponencialmente para η y toma valores en $[0, 1]$. Entonces, el pronosticador mixto cumple*

$$\widehat{L}_n - \inf_{q\in\Delta} L_{q,n} \leq \frac{N}{\eta} \ln \frac{e\eta n}{N}.$$

Antes de realizar la demostración veamos el siguiente resultado.

Lema 3.2. *Dada la función de pérdida l tal que $F(z) = e^{-\eta l(z,y)}$ es cóncava, entonces $l(z, y)$ es convexa en su primer argumento.*

Demostración. Por ser l cóncava exponencialmente, tenemos que dados dos puntos x y z, para cada $t \in [0, 1]$

$$e^{-\eta l(tx+(1-t)z,y)} \geq te^{-\eta l(x,y)} + (1-t)e^{-\eta l(z,y)}$$

o lo que es lo mismo,

$$e^{-\eta l(tx+(1-t)z,y)+\eta l(z+y)} \geq te^{-\eta l(x,y)+\eta l(z,y)} + (1-t).$$

Ahora gracias a la convexidad de e^{sx}, tenemos que para $x \in [0,1]$ y cualquier $s \in \mathbb{R}$, $e^{sx} \leq xe^s + (1-x)$, por lo que

$$te^{-\eta l(x,y)+\eta l(z,y)} + (1-t) \geq e^{-\eta t l(x,y)+\eta t l(z,y)}.$$

Por lo tanto, juntando ambas desigualdades y gracias a la monotonía de la exponencial, esto equivale a que

$$-\eta l(tx+(1-t)z,y) + \eta l(z,y) \geq -\eta t l(x,y) + \eta t l(z,y),$$

donde reorganizando los términos y dividiendo por $\eta > 0$ obtenemos

$$l(tx+(1-t)z,y) \leq tl(x,y) + (1-t)l(z,y)$$

es decir, la convexidad de l en su primer argumento. □

Ahora ya podemos proceder con la demostración del teorema.

Demostración Teorema 3.3. Sea el arrepentimiento de cada $\mathbf{q}$

$$R_{\mathbf{q},n} = \widehat{L}_n - L_{\mathbf{q},n}$$

podemos denotar como $\mathbf{R}_n$ a la función $\mathbf{q} \mapsto R_{\mathbf{q},n}$. Introduciendo el potencial

$$\Phi_\eta(\mathbf{R}_n) = \int_\Delta e^{\eta R_{\mathbf{q},n}}\, \mathrm{d}\mathbf{q}$$

vemos que al igual que con la demostración del Teorema 3.2, $\Phi_\eta(\mathbf{R}_n) \leq \Phi_\eta(\mathbf{0}) = 1/(N!)$. Ahora, sea $\mathbf{q}^*$ el vector de Δ tal que

$$L_{\mathbf{q}^*,n} = \inf_{\mathbf{q}\in\Delta} L_{\mathbf{q},n}$$

dado que por el Lema 3.2 la función de pérdida es convexa en su primer argumento, para cada $\mathbf{q}' \in \Delta$ y $\lambda \in (0,1)$,

$$L_{(1-\lambda)\mathbf{q}^*+\lambda\mathbf{q}',n} \leq (1-\lambda)L_{\mathbf{q}^*,n} + \lambda L_{\mathbf{q}',n} \leq (1-\lambda)L_{\mathbf{q}^*,n} + \lambda n$$

gracias a que la función de pérdida está acotada por hipótesis. Por lo tanto, para cualquier $\lambda \in (0,1)$ fijo,

$$\begin{aligned}
\Phi_\eta(\mathbf{R}_n) &= \int_\Delta e^{\eta R_{\mathbf{q},n}}\, \mathrm{d}\mathbf{q} \\
&= e^{\eta \hat{L}_n} \int_\Delta e^{-\eta L_{\mathbf{q},n}}\, \mathrm{d}\mathbf{q} \\
&\geq e^{\eta \hat{L}_n} \int_{\{\mathbf{q}:\mathbf{q}=(1-\lambda)\mathbf{q}^*+\lambda\mathbf{q}',\mathbf{q}'\in\Delta\}} e^{-\eta L_{\mathbf{q},n}}\, \mathrm{d}\mathbf{q} \\
&\geq e^{\eta \hat{L}_n} \int_{\{\mathbf{q}:\mathbf{q}=(1-\lambda)\mathbf{q}^*+\lambda\mathbf{q}',\mathbf{q}'\in\Delta\}} e^{-\eta((1-\lambda)L_{\mathbf{q}^*,n}+\lambda n)}\, \mathrm{d}\mathbf{q} \\
&= e^{\eta \hat{L}_n} e^{-\eta((1-\lambda)L_{\mathbf{q}^*,n}+\lambda n)} \int_{\{\mathbf{q}:\mathbf{q}=(1-\lambda)\mathbf{q}^*+\lambda\mathbf{q}',\mathbf{q}'\in\Delta\}} \mathrm{d}\mathbf{q}.
\end{aligned}$$

La integral de la derecha es el volumen del símplex escalado por λ y centrado en $\mathbf{q}^*$, de modo que, esto es λ^N veces el volumen de Δ, es decir $\lambda^N/(N!)$. Gracias a que $\Phi_\eta(\mathbf{R}_n) \leq 1/(N!)$ y reordenando la desigualdad anterior obtenemos

$$\widehat{L}_n - \inf_{\mathbf{q}\in\Delta} L_{\mathbf{q},n} \leq \widehat{L}_n - (1-\lambda)L_{\mathbf{q}^*,n} \leq \frac{1}{\eta}\ln \lambda^{-N} + \lambda n.$$

El término de la derecha se hace mínimo para $\lambda = N/\eta n$, de donde se llega al resultado. □

3.3 El pronosticador codicioso

Como hemos visto hasta ahora, la forma en la que se analiza el rendimiento del pronosticador es acotando los valores de una función potencial que mide el arrepentimiento. Estos valores suelen aumentar con el tiempo, sin embargo hay situaciones, como la expuesta en el Teorema 3.2 donde esta función llega incluso a disminuir con el tiempo. Esto incita la búsqueda de estrategias de predicción que minimicen el aumento del potencial en el peor de los casos para cada instante de tiempo.

Para explorar esta idea podríamos tratar de trabajar con el pronosticador que en cada instante de tiempo t, realiza su predicción de forma que minimiza el arrepentimiento que se obtendría en el peor de los casos, es decir,

$$\begin{aligned}\widehat{p}_t &= \operatorname*{argmin}_{p\in\mathcal{D}} \sup_{y_t\in\mathcal{Y}} \max_{i=1,\dots,N} R_{i,t}\\ &= \operatorname*{argmin}_{p\in\mathcal{D}} \sup_{y_t\in\mathcal{Y}} \max_{i=1,\dots,N} (R_{i,t-1} + l(p_t,y_t) - l(f_{i,t},y_t)).\end{aligned}$$

Este valor existe siempre que la función de pérdida l esté acotada y sea convexa en su primer argumento, aunque puede no ser único. En estos casos, se podría escoger de acuerdo a una regla fijada previamente. Sin embargo, esta estrategia no logra garantizar un arrepentimiento que disminuya tras cada ronda.

Otra opción puede ser tratar de minimizar, en vez de $\max_{i=1,\dots,N} R_{i,t}$, una versión mas suave, como el potencial

$$\Phi_\eta(\mathbf{R}_t) = \frac{1}{\eta}\ln\left(\sum_{i=1}^{N} e^{\eta R_{i,t}}\right)$$

donde podemos observar que si $\eta \max_{i=1,\dots,N} R_{i,t}$ es grande, $\Phi_\eta(\mathbf{R}_t) \approx \max_{i=1,\dots,N} R_{i,t}$. El parámetro η realiza el papel de suavizante de la función.

A partir de este potencial se puede introducir el pronosticador que en cada instante, minimiza el aumento más grande posible que puede sufrir la función potencial para cualquier resultado posible y_t, es decir,

$$\widehat{p}_t = \operatorname*{argmin}_{p\in\mathcal{D}} \sup_{y_t\in\mathcal{Y}} \Phi(\mathbf{R}_{t-1} + \mathbf{r}_t).$$

Es por esto que lo denominamos *pronosticador codicioso (greedy forecaster)*, ya que el realiza sus predicciones de forma que el arrepentimiento sea lo menor posible en el peor de los casos (no quiere perder lo que tiene).

Recordando que el componente i-ésimo del vector de arrepentimiento $\mathbf{r}_t$ es $l(p,y_t) - l(f_{i,t},y_t)$, el pronosticador se puede escribir como

$$\widehat{p}_t = \operatorname*{argmin}_{p\in\mathcal{D}} \sup_{y_t\in\mathcal{Y}} \left(l(p,y_t) + \frac{1}{\eta}\ln\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta L_{i,t}}\right).$$

Sea Φ convexa, dado que el supremo de una función convexa es convexo, $\sup_{y_t\in\mathcal{Y}} \Phi(\mathbf{R}_{t-1} + \mathbf{r}_t)$ es una función convexa sobre p si l es convexa en su primer argumento. En consecuencia, el mínimo sobre p existe, aunque puede no ser único, pero podemos realizar la elección a partir de una regla acordada previamente. Vemos pues, que el pronosticador está bien definido. A continuación mostraremos que rinde tan bien como el pronosticador de peso ponderado basado en el mismo potencial.

Teorema 3.4. *Sea $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función convexa no negativa, dos veces diferenciable. Suponiendo que existe un pronosticador cuyo vector de arrepentimiento cumple*

$$\Phi(\boldsymbol{R}'_t) \leq \Phi(\boldsymbol{R}'_{t-1}) + c_t$$

para cualquier secuencia $\boldsymbol{r}'_1, ..., \boldsymbol{r}'_n$ de vectores de arrepentimiento y para cualquier $t = 1, ..., n$, siendo c_t una constante que depende solo de t. Entonces el arrepentimiento $\boldsymbol{R}_t$ del pronosticador codicioso cumple

$$\Phi(\boldsymbol{R}_n) \leq \Phi(\boldsymbol{0}) + \sum_{t=1}^{n} c_t$$

Demostración. Basta con ver que para cada $t = 1, ..., n$,

$$\Phi(\mathbf{R}_t) \leq \Phi(\mathbf{R}_{t-1}) + c_t.$$

Por la definición del pronosticador esto es equivalente a decir que existe un $\widehat{p}_t \in \mathcal{D}$ tal que

$$\sup_{y_t \in \mathcal{Y}} \Phi(\mathbf{R}_{t-1} + \mathbf{r}_t) \leq \Phi(\mathbf{R}_{t-1}) + c_t$$

donde $\mathbf{r}_t$ es el vector de componentes $l(\widehat{p}_t, y_t) - l(f_{i,t}, y_t)$ para $i = 1, ..., N$. La existencia de dicho $\widehat{p}_t \in \mathcal{D}$ está garantizada por lo expuesto previo a la demostración. □

Veamos algunos ejemplos de pronosticadores codiciosos.

Pérdida absoluta

En el simple caso en que $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ y $\mathcal{D} = [0, 1]$, consideramos la pérdida absoluta $l(\widehat{p}, y) = |\widehat{p} - y|$. El pronosticador basado en el potencial Φ_η que obtenemos al minimizar el máximo de las dos funciones convexas es

$$\widehat{p}_t = \underset{p \in [0,1]}{\operatorname{argmin}} \max \left\{ \sum_{i=1}^{N} e^{\eta(l(p,0) - l(f_{i,t},0) - L_{i,t-1})}, \sum_{i=1}^{N} e^{\eta(l(p,1) - l(f_{i,t},1) - L_{i,t-1})} \right\}.$$

El máximo de dos funciones convexas alcanza su mínimo o en un punto en el que ambas son iguales, o en el mínimo de una de ellas. Por lo tanto, el pronosticador toma el valor de 0, 1, o

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\eta} \ln \frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta L_{i,t-1} - \eta l(f_{i,t},1)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\eta L_{j,t-1} - \eta l(f_{j,t},0)}}$$

Entonces, de los Teoremas 3.4 y 2.2 deducimos que el arrepentimiento del pronosticador cumple

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,...,N} L_{i,n} \leq \frac{\ln N}{\eta} + \frac{n\eta}{8}.$$

Pérdida cuadrática

Considerando los mismos espacios que en el ejemplo anterior pero con la función de pérdida $l(\widehat{p}, y) = (\widehat{p} - y)^2$, el pronosticador codicioso en este caso presenta la misma forma, es decir, toma el valor de 1, 0 o

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\eta} \ln \frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta L_{i,t-1} - \eta l(f_{i,t},1)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\eta L_{j,t-1} - \eta l(f_{j,t},0)}}$$

dependiendo de cual de los valores otorga un valor menor para el peor de los casos a la función potencial. Ahora, como hemos visto en la Proposición 3.1 y los ejemplos que la seguían, tomando $\eta = 1/2$ obtenemos que el pronosticador cumple que

$$\widehat{L}_n - \min_{i=1,\dots,N} L_{i,n} \leq 2 \ln N.$$

Pérdida logarítmica

Por último, tomamos ahora la pérdida logarítmica $l(\widehat{p}, y) = -\mathbb{I}_{\{y=1\}} \ln \widehat{p} - \mathbb{I}_{\{y=0\}} \ln(1-\widehat{p})$ con su potencial exponencial, y consideramos otra vez los mismos espacios. En este ejemplo, si tomamos $\eta = 1$ el pronosticador codicioso coincide con el pronosticador de peso ponderado exponencialmente por lo que no nos aporta un resultado adicional.

3.4 El pronosticador que agrega

El análisis que hemos realizado haciendo uso de la concavidad exponencial se ha basado en la búsqueda de un $\eta > 0$ que haga que el potencial exponencial esté acotado por su origen $\Phi_\eta(\mathbf{0})$, donde gracias a la Proposición 3.1 obtenemos que si tal η existe, el arrepentimiento del pronosticador de peso ponderado exponencialmente queda acotado por $(\ln N)/\eta$. En esta sección vamos a tratar de obtener mejores cotas para dichas pérdidas a través de pronosticadores que sigan cumpliendo $\Phi_\eta(\mathbf{R}_n) \leq \Phi_\eta(\mathbf{0})$ para valores superiores de η de los que se pueden permitir con el pronosticador de peso ponderado. El pronosticador que buscamos por tanto ha de satisfacer $\Phi_\eta(\mathbf{R}_{t-1} + \mathbf{r}_t) \leq \Phi_\eta(\mathbf{R}_{t-1})$ independientemente del siguiente resultado de la serie. Esto equivale a que para cada $y_t \in \mathcal{Y}$ se cumpla

$$l(\widehat{p}_t, y_t) \leq -\frac{1}{\eta} \ln \left(\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta l(f_{i,t}, y_t)} \mathbf{q}_{i,t-1} \right).$$

La distribución $q_{1,t-1}, \dots q_{N,t-1}$ viene dada por los pesos asociados al potencial exponencial. Dado que ningún pronosticador es capaz de evitar el aumento del potencial, si queremos ser capaces de analizar las pérdidas vamos a relajar la condición anterior sustituyendo $1/\eta$ por $\mu(\eta)/\eta$. Es por esto que introducimos la siguiente definición.

Definición 3.2. Dado $\eta > 0$, la *curva de mezcla* $\mu(\eta)$ es el ínfimo de los números c tales que para cada N, cualquier distribución de probabilidades $(q_1, \dots, q_N)$, y cualquier elección de recomendaciones de expertos $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{D}$, existe $\widehat{p} \in \mathcal{D}$ tal que

$$l(\widehat{p}_t, y) \leq -\frac{c}{\eta} \ln \left(\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta l(f_i, y)} \boldsymbol{q}_i \right) \tag{3.4.1}$$

para todo $y \in \mathcal{Y}$

Vamos a denominar como *pronosticador que agrega* a cualquier pronosticador que al ser ejecutado con η cumple 3.4.1 con $c = \mu(\eta)$. La curva de mezcla sirve para obtener una cota en la pérdida del pronosticador para cualquier valor η.

Proposición 3.2. *Sea μ una curva de mezcla para una función de pérdida l. Entonces, para todo $\eta > 0$, el pronosticador que agrega cumple*

$$\widehat{L}_n \leq \mu(\eta) \min_{i=1,\dots,N} L_{i,n} + \frac{\mu(\eta)}{\eta} \ln N$$

para todo $n \geq 1$ y para cualquier $y_1, .., y_n \in \mathcal{Y}$.

Demostración. Sea $W_t = \sum_{i=1}^{N} e^{-\eta L_{i,t}}$, entonces, por definición, para cada t existe un $\widehat{p}_t \in \mathcal{D}$ de forma que

$$l(\widehat{p}_t, y_t) \leq -\frac{\mu(\eta)}{\eta} \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta L_{i,t-1}} e^{-\eta l(f_{i,t}, y_t)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\eta L_{j,t-1}}} \right) = -\frac{\mu(\eta)}{\eta} \ln \left(\frac{W_t}{W_{t-1}} \right).$$

Así pues, sumando para todo $t = 1, ..., n$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{L}_n &\leq -\frac{\mu(\eta)}{\eta} \ln \left(\prod_{t=1}^{n} \frac{W_t}{W_{t-1}} \right) \\
&= -\frac{\mu(\eta)}{\eta} \ln \frac{W_n}{W_0} \\
&= -\frac{\mu(\eta)}{\eta} \ln \left(\frac{\sum_{j=1}^{N} e^{-\eta L_{j,n}}}{N} \right) \\
&\leq \frac{\mu(\eta)}{\eta} (\eta L_{i,n} + \ln N)
\end{aligned}$$

para cada experto $i = 1, ..., N$. □

Vamos a analizar un poco mas a fondo el problema de predicción asesorada por expertos. La situación se puede entender como un juego entre el pronosticador y el entorno. En este juego, el entorno, sigue una estrategia desconocida para el pronosticador, mediante la que genera la recomendación de cada experto y el resultado de cada ronda basándose en las predicciones que ha hecho previamente el pronosticador. Fijadas las estrategias del entorno y del pronosticador, dado $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ podemos fijar como condición que el pronosticador gana si logra que

$$\widehat{L}_n \leq a \min_{i=1,...,N} L_{i,n} + b \ln N$$

para cada n y $N \geq 1$, si no, el entorno gana. Este juego fue introducido y analizado por Vovk[2], donde, bajo ciertas condiciones leves sobre $\mathcal{D}$, $\mathcal{Y}$ y l, llega a la conclusión de que para cada par $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ el juego está determinado, es decir, que o existe una estrategia de predicción que gana sea cual sea la estrategia que sigue el entorno, o el entorno gana sea cual sea la estrategia utilizada por el pronosticador. Además, el pronosticador gana en dichos pares en los que existe un $\eta \geq 0$ tal que $\mu(\eta) \leq a$ y $\mu(\eta)/\eta \leq b$.

Esto nos dice que la curva de mezcla que acabamos de introducir es la frontera del conjunto de puntos (a, b) para los que el pronosticador puede garantizar la victoria. El máximo η para el que $\mu(\eta) = 1$ es de gran importancia a la hora de minimizar el arrepentimiento, pues de esta manera se obtienen cotas de la forma $(\ln N)/\eta$.

Definición 3.3. Llamaremos *η-mezclable* a cualquier función de pérdida para la que existe un η tal que la curva de mezcla cumple que $\mu(\eta) = 1$ siendo $\mathcal{D} = [0, 1]$ y $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$

Esta definición y el análisis que sigue se puede extender sin problema para cualquier par de valores reales a y b con $a < b$.

Teorema 3.5. ***(Teorema de la mezcla).*** *Sean $\mathcal{D} = [0, 1]$, $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ y dada la función de pérdida l. Tomemos el conjunto $S \subseteq [0, 1]^2$ de los pares (x, y) tales que existe algún $p \in [0, 1]$ de forma que*

$l(p,0) \leq x$ y $l(p,1) \leq y$. Para cada $\eta > 0$ se introduce el homeomorfismo $H_\eta : [0,1]^2 \to [e^{-\eta},1]^2$ dado por $H_\eta(x,y) = (e^{-\eta x}, e^{-\eta y})$. Entonces l es η-mezclable si y solo si $H_\eta(S)$ es convexo.

Demostración. Queremos encontrar un número $p \in [0,1]$ de forma que para algún $\eta > 0$ se cumpla

$$l(p,y) \leq -\frac{1}{\eta} \ln \left(\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta l(f_i,y)} q_i \right)$$

para cualquier $y \in \{0,1\}$, cualquier distribución de probabilidad $q_1, ..., q_N$ y cualquier asesoramiento de expertos $f_1, ..., f_N \in [0,1]$. Esto se puede reescribir como

$$e^{-\eta l(p,y)} \geq \sum_{i=1}^{N} e^{-\eta l(f_i,y)} q_i$$

donde, teniendo en cuenta que $y \in \{0,1\}$, equivale a

$$e^{-\eta l(p,0)} \geq \sum_{i=1}^{N} e^{-\eta l(f_i,0)} q_i \quad \text{y} \quad e^{-\eta l(p,1)} \geq \sum_{i=1}^{N} e^{-\eta l(f_i,1)} q_i.$$

Estas condiciones indican que cada coordenada de $H_\eta(l(p,0), l(p,1))$ no ha de ser menor que la correspondiente a la combinación convexa $\sum_{i=1}^{N} H_\eta(l(f_i,0), l(f_i,1)) q_i$. Si $H_\eta(S)$ es convexa, la combinación pertenece a $H_\eta(S)$ y entonces dicho p existe por definición de S. Esta condición también es claramente necesaria. □

Veamos que existe una relación entre el pronosticador que agrega y el pronosticador codicioso introducido previamente.

Proposición 3.3. *Para cualquier función de pérdida η-mezclable, el pronosticador codicioso generado por el potencial exponencial Φ_η es un pronosticador que agrega.*

Demostración. Si la función pérdida l es mezclable, entonces para cada t y cada $y_t \in \mathcal{Y}$ existe $\widehat{p}_t \in \mathcal{D}$ que cumple

$$l(\widehat{p}_t, y_t) \leq -\frac{1}{\eta} \ln \frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta L_{i,t-1} - \eta l(f_{i,t} y_t)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\eta L_{j,t-1}}}.$$

Dicho $\widehat{p}_t$ se puede definir como

$$\begin{aligned} \widehat{p}_t &= \underset{p \in \mathcal{D}}{\operatorname{argmin}} \sup_{y_t \in \mathcal{Y}} \left(l(p, y_t) + \frac{1}{\eta} \ln \frac{\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta L_{i,t-1} - \eta l(f_{i,t} y_t)}}{\sum_{j=1}^{N} e^{-\eta L_{j,t-1}}} \right) \\ &= \underset{p \in \mathcal{D}}{\operatorname{argmin}} \sup_{y_t \in \mathcal{Y}} \left(l(p, y_t) + \frac{1}{\eta} \ln \sum_{i=1}^{N} e^{-\eta L_{i,t}} \right) \end{aligned}$$

que coincide con la definición del pronosticador codicioso generado por el potencial exponencial. □

La desigualdad del oráculo para pérdidas mezclables

Al igual que hemos hecho para el pronosticador mixto, es posible extender el pronosticador que agrega para que sea capaz de considerar una clase infinita numerable de expertos. Dada la secuencia $f_1, f_2, ...$ de expertos tales que en el momento t, cada experto i realiza la predicción

$f_{i,t} \in \mathcal{D}$. Dado que el pronosticador trata de predecir tan bien como cualquiera de los expertos, a cada uno de ellos le vamos a asignar un valor positivo $\pi_i > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$. A estos valores los llamamos probabilidades previas.

Sea $\mathcal{D}$ un espacio métrico compacto, y la función de pérdida l continua con curva de mezcla μ. Dada la definición de μ, para cada $y_t \in \mathcal{Y}$, dada cualquier secuencia $q_1, q_2, \ldots$ de valores positivos tales que $\sum_i q_i = 1$, con $N > 0$, existe un $\widehat{p}^{(N)} \in \mathcal{D}$ tal que

$$l(\widehat{p}^{(N)}, y_t) \leq -\frac{\mu(\eta)}{\eta} \ln \left(\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta l(f_i, y_t)} \frac{q_i}{\sum_{j=1}^{N} q_j} \right) \leq -\frac{\mu(\eta)}{\eta} \ln \left(\sum_{i=1}^{N} e^{-\eta l(f_i, y_t)} q_i \right).$$

Al ser $\mathcal{D}$ compacto, la secuencia $\{\widehat{p}^{(N)}\}$ tiene un punto de acumulación $\widehat{p} \in \mathcal{D}$. Además, gracias a la continuidad de l, este satisface que

$$l(\widehat{p}, y_t) \leq -\frac{\mu(\eta)}{\eta} \ln \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\eta l(f_i, y_t)} q_i \right).$$

Es decir, el pronosticador que agrega dado por $\widehat{p}_t$ está bien definido y cumple

$$l(\widehat{p}_t, y_t) \leq -\frac{\mu(\eta)}{\eta} \ln \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i e^{-\eta L_{i,t-1} - \eta l(f_{i,t} y_t)}}{\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j e^{-\eta L_{j,t-1}}}.$$

Por lo tanto, argumentando de forma similar al Corolario 3.1, llegamos a que para cualquier $\eta > 0$

$$\widehat{L}_n \leq \mu(\eta) \min_{i=1,2,\ldots} \left(L_{i,n} + \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\pi_i} \right)$$

para todo $n \geq 1$ y cualquier $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{Y}$. El pronosticador se puede escribir entonces en la forma

$$l(\widehat{p}^{(N)}, y_t) \leq -\frac{\mu(\eta)}{\eta} \ln \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \exp\left(-\eta \left(L_{i,t-1} + \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\pi_i}\right) - \eta l(f_{i,t}, y_t)\right)}{\sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-\eta \left(L_{j,t-1} + \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\pi_j}\right)\right)},$$

donde el término $\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\pi_i}$ se puede entender como una penalización que se añade a la pérdida acumulada del experto i tras cada instante t. Esta expresión resulta en lo que previamente habíamos llamado desigualdad del oráculo.

3.5 Cotas inferiores generales

Vamos a analizar las cotas que se han obtenido hasta ahora, y a tratar de obtener cotas inferiores para el arrepentimiento en los peores casos posibles. Es decir, vamos a analizar el arrepentimiento minimax $V_n^{(N)}$ introducido previamente en la Sección 2.10.

Veamos que, quitando los casos triviales y sin importancia, la pérdida minimax es al menos proporcional a $\ln N$. El teorema que se presenta a continuación, obtiene una cota sea cual sea la función de pérdida, y cuando este se aplica a pérdidas mezclables, nos muestra la dependencia de la cota con $\ln N$.

Definición 3.4. Decimos que la recomendación de los expertos $f_{1,t}, \ldots, f_{N,t}$ en el momento t es *m-emparejada* si $f_{i,t} = f_{m+i,t}$ para cada $i = 1, \ldots, m$.

Definición 3.5. Decimos que la recomendación de los expertos es *m-simple* si $f_{1,t} = ... = f_{m,t}$ y $f_{m+1,t} = ... = f_{2m,t}$.

Teorema 3.6. *Dada una función de pérdida l. Entonces* $V^{(N)}_{n\lfloor \log_2 N \rfloor} \geq \lfloor \log_2 N \rfloor V^{(2)}_n$ *para cada* $N \geq 2$ *y cada* $n \geq 1$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos que hay $N = 2^M$ expertos, para algún $M \geq 1$. Para cualquier $m \leq N/2$ dividimos el tiempo en M etapas con n pasos temporales en cada uno y decimos que la recomendación de los expertos es m-simple en la etapa s si es m-simple en cada instante de tiempo dentro de la etapa. Elegimos la recomendación de forma que ésta sea 2^{s-1}-simple para cada etapa $s = 1, ..., M$ y para que en cada $s = 1, ..., M-1$, la recomendación sea 2^s-emparejada en todos los instantes de tiempo hasta la etapa s incluida.

Dada una estrategia de predicción P, para cualquier secuencia fija $y_1, ..., y_M$ en la que se ejecute P, y cualquier par de etapas $1 \leq r \leq s \leq M$, sea

$$R_i(y_r^s) = \sum_{t=n(r-1)+1}^{ns} \left(l(\widehat{p}_t, y_t) - l(f_{i,t}, y_t) \right).$$

Primero, tomemos por simplificación $n = 1$. Fijado un experto i, se escoge cualquier experto j. Si $i, j \leq 2^{M-1}$ o $i, j > 2^{M-1}$, entonces $R_i(y_1^M) = R_i(y_1^{M-1}) + R_j(y_M)$ ya que la recomendación en el momento $s = M$ es 2^{M-1}-simple. Si no, se asume sin pérdida de generalidad que $i \leq 2^{M-1}$ y $j > 2^{M-1}$. Dado que la recomendación en $s = 1, ..., M-1$ es 2^{M-1}-emparejada existe $k > 2^{M-1}$ tal que $R_i(y_1^{M-1}) = R_k(y_1^{M-1})$. Además dado que para $t = M$ la recomendación es 2^{M-1}-simple, $R_j(y_M) = R_k(y_M)$. De forma que para cualquier i y j siempre existe k tal que $R_i(y_1^M) = R_k(y_1^{M-1}) + R_j(y_M)$. Repitiendo la argumentación y de forma recursiva llegamos a que

$$R_i(y_1^M) = \sum_{s=1}^{M} R_{j_s}(y_s)$$

donde $j_1, ..., j_M = j$ son expertos arbitrarios. Extendiendo el razonamiento para $n \geq 1$ obtenemos

$$R_i(y_1^{nM}) = \sum_{s=1}^{M} R_{j_s}(y_{n(s-1)+1}^{ns})$$

donde ahora, la recomendación de los expertos en cada etapa $s = 1, ..., M$ es 2^{s-1}-simple, de forma que tenemos un grupo de al menos 2 expertos que no se comprometen en cada instante de tiempo. Así pues, teniendo en cuenta que la secuencia de resultados es arbitraria y que

$$V_n^{(N)} = \inf_P \sup_{\{\mathcal{F}:|\mathcal{F}|=N\}} \sup_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \max_{i=1,...,N} \sum_{t=1}^{n} \left(l(\widehat{p}_t, y_t) - l(f_{i,t}, y_t) \right)$$

donde $\mathcal{F}$ es la clase de expertos estáticos, tenemos que para cada etapa s

$$R_{j_s}(y_{n(s-1)+1}^{ns}) \geq V_n^{(2)}$$

para ciertos resultados y_t, índices de expertos j_s y recomendaciones de expertos estáticos. Se concluye viendo que trivialmente $V_M^{(N)} \geq R_i(y_1^M)$. □

Ahora, si nos encontramos frente a una función de pérdida no mezclable, como es el caso de la pérdida absoluta, habíamos deducido gracias al Teorema 2.2 que el arrepentimiento del pronosticador de peso ponderado exponencialmente presenta una cota superior de $\sqrt{(n/2)\ln N}$, de forma que para cada n y N,

$$\frac{V_n^{(N)}}{\sqrt{(n/2)\ln N}} \leq 1.$$

Veamos que dicha cota no se puede mejorar y que además el pronosticador de peso ponderado exponencialmente es asintóticamente óptimo.

Teorema 3.7. *Sea $\mathcal{Y} = \{0,1\}$, $\mathcal{D} = [0,1]$ y $l(p,y) = |p-y|$, entonces*

$$\sup_{n,N} \frac{V_n^{(N)}}{\sqrt{(n/2)\ln N}} \geq 1.$$

Antes de proceder con la demostración necesitamos dos resultados.

Lema 3.3. *Sean $\{Z_{i,t}\}$ $(i = 1,...,N; t = 1,2,...)$ variables aleatorias independientes igualmente distribuidas con distribución de Rademacher $\mathbb{P}[Z_{i,t} = -1] = \mathbb{P}[Z_{i,t} = 1] = 1/2$, y sean $G_1,...,G_N$ v.a.i.i.d, $N(0,1)$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\max_{i=1,...,N} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} Z_{i,t}\right] = \mathbb{E}\left[\max_{i=1,...,N} G_i\right].$$

Demostración. Definimos los N-vectores $X_n = (X_{n,1},...,X_{n,N})$ de componentes

$$X_{n,i} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} Z_{i,t}$$

para $i = 1,...,N$. Debido al Teorema de Cramér-Wold [3, p. 383], una secuencia de vectores $\{X_n\}$ converge en distribución a un vector aleatorio $G = (G_1,...,G_N)$ si y solo si $\sum_{i=1}^{N} a_i X_{n,i}$ converge en distribución a $\sum_{i=1}^{N} a_i G_i$, sean cuales sean los coeficientes $a_1,...,a_N$. De esta forma, $\sum_{i=1}^{N} a_i X_{n,i}$ converge en distribución cuando $n \to \infty$ hacia una variable aleatoria normal con media 0 y varianza $\sum_{i=1}^{N} a_i^2$. Por lo tanto, para $n \to \infty$ el vector X_n converge en distribución a $G = (G_1,...,G_k)$ donde $G_1,...,G_k$ son v.a.i.i.d, $N(0,1)$.

La convergencia en distribución equivale a que para cualquier función continua y acotada $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\psi(X_{n,1},...,X_{n,N})] = \mathbb{E}[\psi(G_1,...,G_N)]. \tag{3.5.1}$$

Vamos a tomar la función $\psi(x_1,...,x_N) = \phi_L(\max_i x_i)$, con $L > 0$ y donde ϕ_L es la función definida por

$$\phi_L(x) = \begin{cases} -L & \text{si } x < -L \\ x & \text{si } |x| \leq L \\ L & \text{si } x > L. \end{cases}$$

Está claro que ϕ_L es continua y está acotada. Por lo tanto, junto a 3.5.1 deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\phi_L\left(\max_{i=1,...,N} X_{n,i}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\phi_L\left(\max_{i=1,...,N} G_i\right)\right].$$

En consecuencia, vemos que para cualquier $L > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\max_{i=1,\dots,N} X_{n,i}\right] \geq \mathbb{E}\left[\phi_L\left(\max_{i=1,\dots,N} X_{n,i}\right)\right] + \mathbb{E}\left[\left(L + \max_{i=1,\dots,N} X_{n,i}\right)\mathbb{I}_{\{\max_{i=1,\dots,N} X_{n,i} < -L\}}\right],$$

donde

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[\left(L + \max_{i=1,\dots,N} X_{n,i}\right)\mathbb{I}_{\{\max_{i=1,\dots,N} X_{n,i} < -L\}}\right]\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\left|\max_{i=1,\dots,N} X_{n,i}\right| - L\right)\mathbb{I}_{\{|\max_{i=1,\dots,N} X_{n,i}| - L > 0\}}\right] \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}\left[\left|\max_{i=1,\dots,N} X_{n,i}\right| > L + u\right] \mathrm{d}u \\
&= \int_L^\infty \mathbb{P}\left[\left|\max_{i=1,\dots,N} X_{n,i}\right| > u\right] \mathrm{d}u \\
&\leq \int_L^\infty N \max_{i=1,\dots,N} \mathbb{P}[|X_{n,i}| > u] \mathrm{d}u \\
&\leq 2N \int_L^\infty e^{-u^2/2} \mathrm{d}u \quad \text{(por la desigualdad de Hoeffding)} \\
&\leq 2N \int_L^\infty \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) e^{-u^2/2} \mathrm{d}u \\
&= \frac{2N}{L} e^{-L^2/2}.
\end{aligned}$$

De esta forma, deducimos que para cualquier $L > 0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\max_{i=1,\dots,N} X_{n,i}\right] \geq \mathbb{E}\left[\phi_L\left(\max_{i=1,\dots,N} G_i\right)\right] - \frac{2N}{L} e^{-L^2/2}.$$

Tomando el límite $L \to \infty$ en el lado derecho de la desigualdad y gracias al teorema de la convergencia dominada, obtenemos finalmente que

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\max_{i=1,\dots,N} X_{n,i}\right] \geq \mathbb{E}\left[\phi_L\left(\max_{i=1,\dots,N} G_i\right)\right].$$

La prueba de que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\max_{i=1,\dots,N} X_{n,i}\right] \leq \mathbb{E}\left[\phi_L\left(\max_{i=1,\dots,N} G_i\right)\right]$$

se realiza de forma análoga. □

Lema 3.4. *Sean $G_1, \dots, G_N$ variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Entonces*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\max_{i=1,\dots,N} G_i\right]}{\sqrt{2\ln N}} = 1.$$

Demostración. La demostración se puede encontrar en [4]. □

Demostración Teorema 3.7. Está claro que $V_n^{(N)} \geq \sup_{\mathcal{F}:|\mathcal{F}|=N} V_n(\mathcal{F})$, donde hemos tomado el supremo sobre las clases de N expertos estáticos. Primero, acotamos inferiormente $V_n^{(\mathcal{F})}$ para un $\mathcal{F}$ fijo. El arrepentimiento minimax para una clase fija de expertos está definido por

$$V_n(\mathcal{F}) = \inf_P \sup_{y^n \in \{0,1\}^n} \sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^n \left(|\widehat{p}_t - y_t| - |f_t - y_t|\right)$$

donde el ínfimo se toma de todas la estrategias de predicción P. Tomando las variables independientes igualmente distribuidas $Y_1, ..., Y_n$ con distribución de Bernoulli simétrica ($\mathbb{P}[Y_t = 0] = \mathbb{P}[Y_t = 1] = 1/2$), se tiene entonces que

$$V_n(\mathcal{F}) \geq \inf_P \mathbb{E} \sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} (|\widehat{p}_t - Y_t| - |f_t - Y_t|) = \inf_P \mathbb{E} \sum_{t=1}^{n} |\widehat{p}_t - Y_t| - \mathbb{E} \inf_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} |f_t - Y_t|.$$

Dado que la secuencia de variables es aleatoria, para cualquier estrategia de predicción se tiene que $\mathbb{E} \sum_{t=1}^{n} |\widehat{p}_t - Y_t| = n/2$, por lo tanto

$$\begin{aligned} V_n(\mathcal{F}) &\geq \frac{n}{2} - \mathbb{E}\left[\inf_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} |f_t - Y_t|\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - |f_t - Y_t|\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - f_t\right) \sigma_t\right] \end{aligned}$$

donde $\sigma_t = 1 - 2Y_t$ son variables independientes igualmente distribuidas con distribución de Rademacher, esto es $\mathbb{P}[\sigma_t = 1] = \mathbb{P}[\sigma_t = -1] = 1/2$. De esta forma acotamos $\sup_{\mathcal{F}:|\mathcal{F}|=N} V_n(\mathcal{F})$ inferiormente tomando la media sobre un grupo de N expertos elegidos de forma aproximada. Esto se puede hacer sustituyendo cada experto $f = (f_1, ..., f_n)$ por una secuencia de variables independientes igualmente distribuidas con distribución de Bernoulli simétrica. Es decir, sea $\{Z_{i,t}\}$ una matriz $N \times n$ de variables independientes igualmente distribuidas con distribución de Rademacher, entonces

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{F}:|\mathcal{F}|=N} V_n(\mathcal{F}) &\geq \sup_{\mathcal{F}:|\mathcal{F}|=N} \mathbb{E}\left[\sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - f_t\right) \sigma_t\right] \\ &\geq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\max_{i=1,...,N} \sum_{t=1}^{n} Z_{i,t}\sigma_t\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\max_{i=1,...,N} \sum_{t=1}^{n} Z_{i,t}\right]. \end{aligned}$$

Por el teorema central del límite, para cada $i = 1, ..., N$, $\frac{\sum_{t=1}^{n} Z_{i,t}}{\sqrt{n}}$ converge a una variable aleatoria normal estándar, de forma que gracias al Lema 3.3

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\max_{i=1,...,N} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} Z_{i,t}\right] = \mathbb{E}\left[\max_{i=1,...,N} G_i\right]$$

siendo $G_1, ..., G_N$ variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Pero entonces, por el Lema 3.4 llegamos a que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\mathbb{E}\left[\max_{i=1,...,N} G_i\right]}{\sqrt{2 \ln N}} = 1$$

de donde se deduce el resultado deseado. $\square$

4

Pérdida logarítmica

4.1 Asignación secuencial de probabilidad

En este capítulo vamos a analizar una función de pérdida muy importante conocida como la pérdida logarítmica. Esta función resulta muy útil en varios problemas de inversión secuencial, como la relacionada con la inversión en el mercado de valores que desarrollaremos en el capítulo siguiente.

La situación en la que nos encontraremos a lo largo del capítulo es la siguiente. Fijado un entero $m > 1$, trabajamos en el espacio de resultados $\mathcal{Y} = \{1, 2, ..., m\}$. El espacio de decisiones viene dado por el símplex probabilístico

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{p} = (p(1), ..., p(m)) : \sum_{j=1}^{m} p(j) = 1, p(j) \geq 0, j = 1, ..., m \right\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Cada vector $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$ se puede entender como una distribución de probabilidad sobre $\mathcal{Y}$. Es más, hay ocasiones en las que el pronosticador va a asignarle una probabilidad a cada posible resultado acorde con su confianza en que dicho suceso ocurra.

A lo largo de la sección vamos a utilizar los expertos simulables que presentamos en la Sección 2.9, por lo tanto, cada experto f viene representado por la secuencia $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ...)$ de las funciones $\mathbf{f}_t : \mathcal{Y}^{t-1} \to \mathcal{D}$ que dependen de los resultados previos hasta y^{t-1}. Los componentes del vector $\mathbf{f}_i(\cdot|y^{t-1}) \in \mathcal{D}$ son

$$f_t(1|y^{t-1}), ..., f_t(m|y^{t-1})$$

donde el componente j-ésimo, $f_t(j|y^{t-1})$ se entiende como la probabilidad condicional que f asigna al j-ésimo elemento de $\mathcal{Y}$ teniendo en cuenta los anteriores y^{t-1}.

A su vez, el pronosticador elige en cada momento el vector de probabilidades

$$\widehat{\mathbf{p}}_t(\cdot|y^{t-1}) = (\widehat{p}_t(1|y^{t-1}), ..., \widehat{p}_t(m|y^{t-1})).$$

Si introducimos para cada $n \geq 1$ y $y^n \in \mathcal{Y}^n$ la notación

$$f_n(y^n) = \prod_{t=1}^{n} f_t(y_t|y^{t-1}), \qquad \widehat{p}_n(y^n) = \prod_{t=1}^{n} \widehat{p}_t(y_t|y^{t-1})$$

donde

$$\sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} f_n(y^n) = \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \widehat{p}_n(y^n) = 1.$$

Se puede observar entonces que efectivamente tanto los expertos como el pronosticador actúan asignando distribuciones de probabilidad sobre todas las secuencias de longitud n. Inversamente, cualquier distribución de probabilidad $\widehat{p}_n(y^n)$ sobre $\mathcal{Y}^n$ define un pronosticador a partir de las probabilidades condicionadas

$$\widehat{p}_n(y_t|y^{t-1}) = \frac{\widehat{p}_t(y^t)}{\widehat{p}_{t-1}(y^{t-1})}$$

donde $\widehat{p}_t(y^t) = \sum_{y_{t+1}^n \in \mathcal{Y}^{n-1}} \widehat{p}_n(y^n)$.

La función de pérdida que vamos a utilizar a lo largo del capítulo es la pérdida logarítmica, definida como

$$l(\mathbf{p}, y) = \ln \frac{1}{p(y)}, \qquad y \in \mathcal{Y}, \mathbf{p} \in \mathcal{D}.$$

De la definición queda claro que el pronosticador trata de asignar probabilidades altas a los resultados de la secuencia. Para la secuencia de resultados $y_1, ..., y_n$ la pérdida acumulada por el experto f y el pronosticador vienen dadas por

$$L_f(y^n) = \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{1}{f_t(y_t|y^{t-1})} \quad \text{y} \quad \widehat{L}(y^n) = \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{1}{\widehat{p}_t(y_t|y^{t-1})}$$

que también se pueden escribir como $L_f(y^n) = -\ln f_n(y^n)$ y $\widehat{L}(y^n) = -\ln \widehat{p}_n(y^n)$. Por lo tanto, el arrepentimiento viene dado por la expresión

$$L_f(y^n) - \inf_{f \in \mathcal{F}} L_f(y^n) = \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{1}{\widehat{p}_t(y_t|y^{t-1})} - \inf_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{1}{f_t(y_t|y^{t-1})} = \sup_{f \in \mathcal{F}} \ln \frac{f_n(y^n)}{\widehat{p}_n(y^n)}.$$

Cabe mencionar, que aquí nos hemos restringido al caso en el que el espacio de resultados es finito. Sin embargo, esto se puede extender al caso general cuando $\mathcal{Y}$ es un espacio medible. En ese caso, se trata de trabajar con las densidades sobre el espacio de resultados.

4.2 Pronosticadores mixtos

Vamos a comenzar el análisis de la pérdida logarítmica con el pronosticador de peso ponderado exponencialmente. Ya que la pérdida logarítmica es exponencialmente cóncava para $\eta \leq 1$ se puede aplicar el Teorema 3.2. Así pues, llegamos a que si la clase de expertos es finita $|\mathcal{F}| = N$, el pronosticador de peso ponderado exponencialmente con parámetro $\eta = 1$ verifica que

$$\widehat{L}(y^n) - \inf_{f \in \mathcal{F}} L_f(y^n) \leq \ln N$$

o lo que es lo mismo,

$$\widehat{p}_n(y^n) \geq \frac{1}{N} \sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(y^n).$$

Cabe notar que dada la definición del pronosticador de peso ponderado exponencialmente con parámetro $\eta = 1$, éste se reduce a

$$\widehat{p}_t(y_t|y^{t-1}) = \frac{\sum_{f \in \mathcal{F}} f_t(y_t|y^{t-1}) f_{t-1}(y^{t-1})}{\sum_{f \in \mathcal{F}} f_{t-1}(y^{t-1})} = \frac{\sum_{f \in \mathcal{F}} f_t(y^t)}{\sum_{f \in \mathcal{F}} f_{t-1}(y^{t-1})}.$$

La probabilidad que el pronosticador le asigna a la secuencia y^n es entonces

$$\widehat{p}_n(y^n) = \prod_{t=1}^{n} \frac{\sum_{f\in\mathcal{F}} f_t(y^t)}{\sum_{f\in\mathcal{F}} f_{t-1}(y^{t-1})} = \frac{\sum_{f\in\mathcal{F}} f_n(y^n)}{N}.$$

Es decir, la distribución de probabilidad que el pronosticador define sobre el conjunto $\mathcal{Y}^n$ de secuencias de longitud n es simplemente la mezcla uniforme de las distribuciones definidas por cada experto. Es por esto que al pronosticador de peso ponderado exponencialmente lo llamamos a veces, *pronosticador mixto*. Curiosamente, cuando trabajamos con la pérdida logarítmica con $\eta = 1$, el pronosticador mixto coincide con el pronosticador codicioso y resulta que también es un pronosticador que agrega.

Dado que el pronosticador que agrega se podía extender al caso en que tengamos un conjunto numerable de expertos, veamos que también podemos realizar esta extensión como sigue. Sean $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$ los expertos de la familia numerable $\mathcal{F}$, definimos el pronosticador mixto asignando a cada experto $f^{(i)}$ el peso $\pi_i \geq 0$ de forma que $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$. Queda así definido el pronosticador como

$$\widehat{p}_t(y_t|y^{t-1}) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i f_t^{(i)}(y_t|y^{t-1}) f_{t-1}^{(i)}(y^{t-1})}{\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j f_{t-1}^{(j)}(y^{t-1})} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i f_t^{(i)}(y_t|y^{t-1}) e^{-\eta L_{f^{(i)}}(y^{t-1})}}{\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j e^{-\eta L_{f^{(j)}}(y^{t-1})}}.$$

Se observa claramente cómo la unión de las probabilidades que el pronosticador asigna a cada secuencia y^n es

$$\widehat{p}_n(y^n) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i f^{(i)}(y^n).$$

Acotando de forma trivial por $\widehat{p}_n(y^n) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i f^{(i)}(y^n) \geq \pi_k f^{(k)}(y^n)$ para cada k, obtenemos que

$$\widehat{L}(y^n) \leq \inf_{i=1,2,\ldots} \left(L_{f^{(i)}}(y^n) + \ln \frac{1}{\pi_i} \right)$$

para cada $y^n \in \mathcal{Y}^n$, que resulta ser un caso particular de la desigualdad del oráculo que habíamos deducido en la Sección 3.4.

Este tipo de pronosticador también se conoce como *mezcla Bayesiana* dada su analogía con los pronosticadores que surgen en la estadística Bayesiana, siendo los pesos π_i las probabilidades iniciales. Sin embargo no vamos a utilizar dicha terminología dado que no estamos trabajando bajo una configuración Bayesiana.

4.3 El juego

Para ejemplificar lo expuesto hasta ahora, supongamos que nos encontramos en el siguiente escenario. Realizamos apuestas en una carrera de m caballos que compiten varias veces. En la carrera número t apostamos todo nuestro capital entre los m caballos de acuerdo a las proporciones $\widehat{p}_t(1), \ldots, \widehat{p}_t(m)$, donde $\widehat{p}_t(i) \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{m} \widehat{p}_t(j) = 1$, de forma que si el caballo j gana la carrera t multiplicamos el dinero que hemos apostado por dicho caballo por el factor $o_t(j)$ y si no lo perdemos. Este factor $o_t(j)$ es un valor positivo que representa la cuota a la que se paga la apuesta por cada caballo j. De esta forma, sea y_t el índice que denota el caballo ganador de la carrera t, tras ella nuestro capital pasa a ser

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbb{I}_{\{y_t=j\}} \widehat{p}_t(j) o_t(j) = \widehat{p}_t(y_t) o_t(y_t).$$

Para que quede claro que las probabilidades que vamos a asignar a cada resultado dependen de las carreras anteriores, vamos a sustituir $\widehat{p}_t(j)$ por $\widehat{p}_t(j|y^{y-1})$ para que estas aparezcan de forma explícita. Así pues, si empezamos con un capital C, tras n carreras este pasa a ser

$$C\prod_{t=1}^{n}\widehat{p}_t(y_t|y^{t-1})o_t(y_t).$$

Ahora, si nos enfrentamos ante una clase de expertos, donde cada experto f divide sus apuestas en cada carrera t de acuerdo con las proporciones $f_t(y_t|y^{t-1})$, $j = 1, ..., m$ empezando con el mismo capital que nosotros, entonces tras n carreras este se convierte en

$$C\prod_{t=1}^{n}f_t(y_t|y^{t-1})o_t(y_t).$$

Por lo tanto, la proporción entre el capital del mejor experto y el nuestro es

$$\frac{\sup_{f\in\mathcal{F}} C\prod_{t=1}^{n}f_t(y_t|y^{t-1})o_t(y_t)}{C\prod_{t=1}^{n}\widehat{p}_t(y_t|y^{t-1})o_t(y_t)} = \sup_{f\in\mathcal{F}}\frac{f_n(y^n)}{\widehat{p}_n(y^n)}.$$

Vemos que el logaritmo de este valor es la diferencia entre la pérdida logarítmica del pronosticador y la del mejor experto.

4.4 El pronosticador minimax óptimo

Una de las cualidades que presenta la pérdida logarítmica que la diferencian de las demás, es que gracias a ella se puede obtener explícitamente un pronosticador que alcanza el valor minimax de forma óptima. Esto nos facilita el estudio del arrepentimiento minimax, y de esta forma tener una base con la que comparar cualquier otro pronosticador. Recordemos que para cualquier clase de expertos $\mathcal{F}$ y $n \in \mathbb{N}$, el arrepentimiento minimax venía dado por

$$V_n(\mathcal{F}) = \inf_{\widehat{p}}\sup_{y^n\in\mathcal{Y}^n}\left(\widehat{L}(y^n) - \inf_{f\in\mathcal{F}}L_f(y^n)\right) = \inf_{\widehat{p}}\sup_{y^n\in\mathcal{Y}^n}\ln\frac{\sup_{f\in\mathcal{F}}f_n(y^n)}{\widehat{p}_n(y^n)}.$$

Si para un pronosticador definimos el peor arrepentimiento posible como

$$V_n(\widehat{p},\mathcal{F}) = \sup_{y^n\in\mathcal{Y}^n}\left(\widehat{L}(y^n) - \inf_{f\in\mathcal{F}}L_f(y^n)\right)$$

entonces $V_n(\mathcal{F}) = \inf_{\widehat{p}} V_n(\widehat{p},\mathcal{F})$. De esta forma, podemos encontrar explícitamente el pronosticador que logra ese arrepentimiento minimax. Veamos que el pronosticado p^* definido a partir de la distribución de máxima probabilidad normalizada

$$p_n^*(y^n) = \frac{\sup_{f\in\mathcal{F}}f_n(y^n)}{\sum_{x^n\in\mathcal{Y}^n}\sup_{f\in\mathcal{F}}f_n(x^n)}$$

cumple dicha propiedad. Recordemos que esta distribución de probabilidad define un pronosticador gracias a las probabilidades condicionadas $p_t^*(y_t|y^{t-1})$.

Teorema 4.1. *Para cualquier clase de expertos $\mathcal{F}$ y $n \in \mathbb{N}$, el pronosticador dado por la máxima probabilidad normalizada p^* es el único que cumple que*

$$\sup_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \left(\widehat{L}(y^n) - \inf_{f \in \mathcal{F}} L_f(y^n) \right) = V_n(\mathcal{F}).$$

Además, este logra que para todo $y^n \in \mathcal{Y}^n$ se alcance la igualdad

$$\ln \frac{\sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(y^n)}{p_n^*(y^n)} = \ln \sum_{x^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(x^n) = V_n(\mathcal{F})$$

es decir, es independiente de y^n.

Demostración. Primero probemos la segunda parte. Dada la definición de p^*, su pérdida acumulada cumple

$$\widehat{L}(y^n) - \inf_{f \in \mathcal{F}} L_f(y^n) = \ln \frac{\sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(y^n)}{\widehat{p}_n(y^n)} = \ln \sum_{x^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(x^n).$$

Ahora, para ver que p^* es el minimax óptimo, tomemos un pronosticador $p \neq p^*$ arbitrario. Dado que $\sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} p_n(y^n) = \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} p_n^*(y^n) = 1$, para algún $y^n \in \mathcal{Y}^n$ debemos de tener que $p_n(y^n) < p_n^*(y^n)$. Entonces para dicho y^n

$$\ln \frac{\sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(y^n)}{p_n(y^n)} > \ln \frac{\sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(y^n)}{p_n^*(y^n)} = \text{const.} = V_n(p^*, \mathcal{F})$$

ya que hemos probado que el segundo término es independiente de y^n. Por lo tanto,

$$V_n(p, \mathcal{F}) = \sup_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \ln \frac{\sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(y^n)}{p_n(y^n)} > V_n(p^*, \mathcal{F}).$$

□

Como vimos en el apartado 2.10, bajo ciertas condiciones que aquí se satisfacen, el arrepentimiento maximin

$$U_n(\mathcal{F}) = \sup_q \inf_{\hat{p}} \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} q(y^n) \ln \frac{\sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(y^n)}{\widehat{p}_n(y^n)}$$

es igual al arrepentimiento minimax $V_n(\mathcal{F})$. Lógicamente, el pronosticador dado por la máxima probabilidad normalizada p^* logra alcanzar ese arrepentimiento maximin, es decir que para cualquier distribución de probabilidad q sobre $\mathcal{Y}^n$

$$U_n(\mathcal{F}) = \sup_q \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} q(y^n) \ln \frac{\sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(y^n)}{p_n^*(y^n)}.$$

Notemos que es necesario conocer la longitud de la secuencia n previamente para ser capaces de determinar el pronosticador óptimo p^*, pues el pronosticador asigna las probabilidades sobre todas las secuencias de longitud n, pues el cálculo del pronosticador para cierto n, no resulta ser la extensión del calculado para $n-1$. Otro problema que surge a la hora de realizar los cálculos es que dada su expresión, este realiza sus predicciones de forma que a medida que avanza, el número de términos aumenta de forma exponencial.

4.5 Ejemplos

Vamos a mostrar varios ejemplos para así hacernos una mejor idea de lo que acabamos de exponer.

Clases finitas

El caso mas sencillo consiste en tomar una clase finita de expertos con $|\mathcal{F}| = N$, de forma que

$$V_n(\mathcal{F}) = \ln \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(y^n) \leq \ln \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sum_{f \in \mathcal{F}} f(y^n) = \ln \sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} f(y^n) = \ln N.$$

Este resultado no es nuevo, es más, el pronosticador mixto que hemos descrito en este mismo capítulo presentaba la misma cota. No obstante, el pronosticador mixto muestra ser bastante útil frente al dado por la máxima probabilidad normalizada, ya que es mas eficiente computacionalmente al no depender del tamaño n.

Expertos contantes

Tomando la clase de expertos constantes de forma que $f_t(j|y^{t-1}) = f(j) \geq 0$ con $\sum_{j=1}^{m} f(j) = 1$ para cada $f \in \mathcal{F}$. Primero consideramos el caso en que $m = 2$.

Sea $\mathcal{Y} = \{1, 2\}$ y $\mathcal{D}\{(q, 1-q) \in \mathbb{R}^2 : q \in [0, 1]\}$, cada experto de $\mathcal{F}$ se identifica por el valor $q \in [0, 1]$ tal que $q = f(1)$, de forma que cada experto predice de acuerdo con el vector $(q, 1-q) \in \mathcal{D}$ independientemente del instante de tiempo y de los resultados previos. Dada esta clase de expertos constantes, el valor asintótico del arrepentimiento minimax viene dado gracias al siguiente resultado.

Teorema 4.2. *El arrepentimiento minimax $V_n(\mathcal{F})$ de la clase de expertos constantes sobre el espacio de resultados $\mathcal{Y} = \{1, 2\}$ cumple*

$$V_n(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} + \epsilon_n$$

donde $\epsilon_n \to 0$ para $n \to \infty$.

Demostración. Por el Teorema 4.1 habíamos visto que

$$V_n(\mathcal{F}) = \ln \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{f \in \mathcal{F}} f_n(y^n).$$

Ahora, sea n_1 el número de unos en la secuencia $y^n \in \{1, 2\}^n$, y el número de doses $n_2 = n - n_1$. Entonces para el pronosticador f que predice de acuerdo a $(q, 1-q)$, tenemos que $f_n(y^n) = q^{n_1}(1-q)^{n_2}$. Vemos que tomando el logaritmo y derivando llegamos a que el máximo se obtiene para

$$\frac{n_1}{q} - \frac{n_2}{1-q} = 0$$

es decir para $q = n_1/n$. Por lo tanto

$$V_n(\mathcal{F}) = \ln \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1} \left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2}.$$

Dado que hay $\binom{n}{n_1}$ secuencias que contienen exactamente n_1 unos,

$$V_n(\mathcal{F}) = \ln \sum_{n_1=1}^{n-1} \binom{n}{n_1} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1} \left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2}.$$

Partiendo de la fórmula de Stirling

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n)} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n+1)}$$

vamos a probar que $V_n(\mathcal{F}) \leq \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} + o(1)$, donde la otra desigualad se obtiene de forma análoga utilizando la cota inferior. Así pues, tenemos acotado el binomio por

$$\binom{n}{n_1} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1} \left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{n_1 n_2}} e^{1/(12n+1)}$$

donde realizando la suma sobre n_1 llegamos a que

$$V_n(\mathcal{F}) \leq \ln \left(\sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{1/(12n+1)} \sum_{n_1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \right).$$

Por último, si escribimos

$$\sum_{n_1=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} = \sum_{n_1=1}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{n_1}{n}(1 - \frac{n_1}{n})}}$$

esto se trata de una aproximación de Riemann de la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \mathrm{d}x = \pi.$$

Por lo tanto, cuando $n \to \infty$

$$V_n(\mathcal{F}) \leq \ln \left((1 + o(1)) \sqrt{\frac{n\pi}{2}} \right).$$

□

Al realizar la extensión al caso general $m > 2$, Q. Xie y A. Barron [5] probaron el siguiente resultado.

Teorema 4.3. *El arrepentimiento minimax $V_n(\mathcal{F})$ de la clase de expertos constantes sobre el espacio de resultados $\mathcal{Y} = \{1, 2, ...m\}$ $m > 2$ cumple*

$$V_n(\mathcal{F}) = \frac{m-1}{2} \ln \frac{n}{2\pi} + \ln \frac{\Gamma(1/2)^m}{\Gamma(m/2)} + o(1).$$

donde $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \mathrm{d}x$ es la función Gamma.

4.6 La mezcla de Laplace

A continuación vamos a presentar cómo podemos extender los pronosticadores mixtos que introducimos en el apartado 4.2 a un conjunto no numerable de expertos al igual que hicimos previamente con el pronosticador de peso ponderado exponencialmente. En esta situación, las propiedades particulares que presenta la pérdida logarítmica nos va a permitir deducir mejores cotas y simplificar la expresión que toma el pronosticador mixto.

Partimos del modelo mas simple en el que tratamos con expertos constantes donde $m = 2$. Es decir, el espacio de resultados es $\mathcal{Y} = \{1, 2\}$ y $\mathcal{D} = \{(q, 1-q) \in \mathbb{R}^2 : q \in [0, 1]\}$ de forma que en cada momento, cada experto predice de acuerdo con el vector $(q, 1-q) \in \mathcal{D}$ independientemente de los resultados previos. El Teorema 4.2 nos ha demostrado que $V_n \approx \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$.

Para una clase finita de expertos hemos visto que el pronosticador de peso ponderado exponencialmente asigna a cada secuencia y^n la media de las probabilidades que le ha asignado cada experto, es decir

$$\widehat{p}_n(y^n) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_n^{(i)}(y^n).$$

Esto se puede extender al caso de expertos constantes. Sean otra vez n_1 y n_2 el número de unos y doses en la secuencia y^n. Entonces, la probabilidad que se le asigna a dicha secuencia viene dada por $q^{n_1}(1-q)^{n_2}$. La *mezcla de Laplace* es pues el pronosticador que asigna a cada $y^n \in \{1, 2\}^n$ la media de todas las probabilidades que asignan los expertos, es decir

$$\widehat{p}_n(y^n) = \int_0^1 q^{n_1}(1-q)^{n_2}\mathrm{d}q.$$

Para probar los siguientes resultados, vamos a introducir una propiedad que tiene que ver con la función Beta. Aunque se puede probar por otras vías, el argumento utilizado aquí es autocontenido.

Lema 4.1.

$$\int_0^1 q^{n_1}(1-q)^{n_2}\mathrm{d}q = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{n_1}}.$$

Demostración. Procedamos de forma inductiva inversa respecto a n_1. Si $n_1 = n$, está claro que $\int_0^1 q^n \mathrm{d}q = \frac{1}{(n+1)}$. Sea entonces nuestra hipótesis

$$\int_0^1 q^{n_1+1}(1-q)^{n_2-1}\mathrm{d}q = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{n_1+1}},$$

integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 q^{n_1}(1-q)^{n_2}\mathrm{d}q &= \frac{n-n_1}{n_1+1}\int_0^1 q^{n_1+1}(1-q)^{n_2-1}\mathrm{d}q \\ &= \frac{n-n_1}{n_1+1} \times \frac{1}{(n+1)\binom{n}{n_1+1}} = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{n_1}}.\end{aligned}$$

□

Gracias a esto podemos entender mejor el funcionamiento de este pronosticador, ya que las predicciones que este toma se interpretan muy fácilmente. Sea el número de unos y doses en la secuencia y^{t-1}, t_1 y t_2, entonces, la probabilidad que el pronosticador de Laplace asigna a que el siguiente resultado sea un 1 es

$$\widehat{p}_t(1|y^{t-1}) = \frac{\widehat{p}_t(y^{t-1}1)}{\widehat{p}_{t-1}(y^{t-1})} = \frac{\frac{1}{(t+1)\binom{t}{t_1+1}}}{\frac{1}{t\binom{t-1}{t_1}}} = \frac{t_1+1}{t+1}.$$

Esta se puede entender como una ligera modificación de la frecuencia relativa $t_1/(t-1)$. Suavizando de esta forma se puede evitar las pérdidas infinitas que ocurrirían si $t_1 = 0$ o $t_2 = 0$. Para continuar con el análisis de este pronosticador veamos la siguiente propiedad de los binomios.

Lema 4.2. *Para todo* $1 \leq k \leq n$*,*

$$\binom{n}{k} \leq \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}}.$$

Demostración. Dadas las variables aleatorias independientes igualmente distribuidas $Y_1, ..., Y_n$ donde $\mathbb{P}[Y_i = 1] = 1 - \mathbb{P}[Y_i = 2] = k/n$, entonces, la probabilidad de que k de ellas tomen el valor 1 es $\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}$ y al tratarse de una probabilidad, esta expresión no puede tomar un valor superior a 1. □

Teorema 4.4. *El arrepentimiento del pronosticador mixto de Laplace cumple que*

$$\sup_{y^n \in \{1,2\}^n} \left(\widehat{L}(y^n) - \inf_{f\in\mathcal{F}} L_f(y^n)\right) = \ln(n+1).$$

Demostración. Sean n_1 y n_2 el número de unos y doses en la secuencia y^n, ya hemos visto que

$$\sup_{q\in[0,1]} q^{n_1}(1-q)^{n_2} = \left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1}\left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2}$$

por lo tanto, el arrepentimiento tras dicha secuencia resulta ser

$$\widehat{L}(y^n) - \inf_{f\in\mathcal{F}} L_f(y^n) = \ln \frac{\sup_{q\in[0,1]} q^{n_1}(1-q)^{n_2}}{\int_0^1 q^{n_1}(1-q)^{n_2}\mathrm{d}q} = \ln \frac{\left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1}\left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2}}{\frac{1}{(n+1)\binom{n}{n_1}}} \leq \ln(n+1)$$

gracias a los Lemas 4.1 y 4.2. La igualdad se logra para la secuencia $y^n = (1, 1, ..., 1)$. □

Vemos que, aunque el pronosticador mixto de Laplace resulte ser extremadamente simple, logra una pérdida acumulada del mismo orden de magnitud que la del pronosticador minimax óptimo que requería de un gasto computacional importante.

El Teorema 4.4 se puede extender también al caso general en que $m > 2$, llegándose así al siguiente resultado.

Teorema 4.5. *El arrepentimiento del pronosticador mixto de Laplace extendido a* $m \geq 2$ *cumple que*

$$\sup_{y^n\in\mathcal{Y}^n} \left(\widehat{L}(y^n) - \inf_{f\in\mathcal{F}} L_f(y^n)\right) = \ln\binom{n+m-1}{m-1} \leq (m-1)\ln(n+1).$$

4.7 Un pronosticador mixto refinado

Como hemos visto tras el Teorema 4.4, la mezcla de Laplace presenta los mayores arrepentimientos para las secuencias en las que había o pocos unos o pocos doses. Dado que el pronosticador óptimo no depende de la secuencia de resultados, lo que queremos es modificar la mezcla de forma que los expertos que predicen bien en estas situaciones obtengan un peso mayor. Una primera opción, sugerida por Krichevsky y Trofimov puede ser la de usar, en vez de una distribución normal, usar una Beta$(1/2, 1/2)$ que presenta la función de densidad $1/(\pi\sqrt{q(1-q)})$. De esta forma definimos el pronosticador mixto de Krichevsky-Trofimov por

$$\widehat{p}_n(y^n) = \int_0^1 \frac{q^{n_1}(1-q)^{n_2}}{\pi\sqrt{q(1-q)}} \mathrm{d}q$$

donde gracias a una argumentación similar a la de la demostración del Lema 4.1 llegamos a que en este caso la probabilidad de que el siguiente valor sea un uno tras haber observado t_1 unos viene dada por

$$\widehat{p}_t(1|y^{t-1}) = \frac{t_1 + 1/2}{t}.$$

Lema 4.3. *Para todo $q \in [0,1]$,*

$$\int_0^1 \frac{q^{n_1}(1-q)^{n_2}}{\pi\sqrt{q(1-q)}} \mathrm{d}q \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1} \left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2}.$$

Demostración. Definiendo

$$P(n_1, n_2) = \int_0^1 \frac{q^{n_1}(1-q)^{n_2}}{\pi\sqrt{q(1-q)}} \mathrm{d}q \tag{4.7.1}$$

y

$$\Delta(n_1, n_2) = \frac{P(n_1, n_2)}{\frac{1}{\sqrt{n_1+n_2}} \left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)^{n_1} \left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right)^{n_2}}. \tag{4.7.2}$$

queremos ver que

$$\Delta(n_1, n_2) \geq \frac{1}{2}.$$

Suponiendo que $n_1 \geq 1$, consideramos

$$\frac{\Delta(n_1+1, n_2)}{\Delta(n_1, n_2)} = \frac{n_1^{n_1}(n_1+1/2)}{(n_1+1)^{n_1+1}} \cdot \left(\frac{n_1+n_2+1}{n_1+n_2}\right)^{n_1+n_2+1/2}.$$

Para analizar esta expresión definimos para $t \in [1, \infty)$ las funciones

$$f(t) = \ln \frac{t^t(t+1/2)}{(t+1)^{t+1}} \quad \text{y} \quad g(t) = \ln \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1/2}.$$

Las derivadas son entonces

$$\frac{df(t)}{dt} = \ln \frac{t}{t+1} + \frac{1}{t+1/2} \quad \text{y} \quad \frac{dg(t)}{dt} = \ln \frac{t+1}{t} - \frac{t+1/2}{t(t+1)}.$$

Sea

$$\alpha = \frac{1/2}{t+1/2}$$

vemos que $0 < \alpha \leq 1/3$. Utilizando el desarrollo de Taylor, de

$$\ln \frac{t}{t+1} = \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = -2(\alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} + \cdots) \leq -2\alpha = -\frac{1}{t+1/2}$$

obtenemos entonces que

$$\frac{df(t)}{dt} \leq 0.$$

Por lo tanto

$$\frac{n_1^{n_1}(n_1+1/2)^{n_1+1}}{(n_1+1)} \geq \lim_{n_1\to\infty} \frac{n_1^{n_1}(n_1+1/2)^{n_1+1}}{(n_1+1)} = \frac{1}{e}. \tag{4.7.3}$$

Procediendo de manera similar,

$$\ln \frac{t+1}{t} = 2(\alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} + \cdots) \leq 2(\alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \cdots) = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{t+1/2}{t(t+1)}$$

de donde obtenemos que

$$\frac{dg(t)}{dt} \leq 0. \tag{4.7.4}$$

Se deduce ahora que

$$\left(\frac{n_1+n_2+1}{n_1+n_2}\right)^{n_1+n_2+1/2} \geq \lim_{n_1\to\infty} \left(\frac{n_1+n_2+1}{n_1+n_2}\right)^{n_1+n_2+1/2} = e. \tag{4.7.5}$$

De esta forma, combinando 4.7.3 y 4.7.5 deducimos que para $n_1 \geq 1$

$$\Delta(n_1+1, n_2) \geq \Delta(n_1, n_2). \tag{4.7.6}$$

En el caso en que $n_1 = 0$, esto implica entonces que $n_2 \geq 1$. Tomando

$$\frac{\Delta(1, n_2)}{\Delta(0, n_2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{n_2+1}{n_2}\right)^{n_2+1/2} \tag{4.7.7}$$

y usando 4.7.4, vemos que

$$\Delta(1, n_2) \geq \frac{e}{2}\Delta(0, n_2).$$

De esta forma, juntando 4.7.6 y 4.7.7, tenemos

$$\Delta(n_1+1, n_2) \geq \Delta(n_1, n_2). \tag{4.7.8}$$

para $n_1 \geq 0$. Por lo tanto

$$\Delta(n_1, n_2) \geq \Delta(0,1) = \Delta(1,0).$$

El lema se deduce entonces del hecho de que

$$\Delta(0,1) = \Delta(1,0) = 1/2.$$

□

A partir de aquí podemos analizar el rendimiento del pronosticador.

Teorema 4.6. *El arrepentimiento del pronosticador mixto de Krichevsky-Trofimov cumple que*

$$\sup_{y^n\in\{1,2\}^n} \left(\widehat{L}(y^n) - \inf_{f\in\mathcal{F}} L_f(y^n)\right) \leq \frac{1}{2}\ln n + \ln 2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\widehat{L}(y^n) - \inf_{f\in\mathcal{F}} L_f(y^n) &= \ln \frac{\sup_{q\in[0,1]} q^{n_1}(1-q)^{n_2}}{\int_0^1 \frac{q^{n_1}(1-q)^{n_2}}{\pi\sqrt{q(1-q)}}\mathrm{d}q} \\ &= \ln \frac{\left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1}\left(\frac{n_2}{n}\right)^{n_2}}{\int_0^1 \frac{q^{n_1}(1-q)^{n_2}}{\pi\sqrt{q(1-q)}}\mathrm{d}q} \\ &\leq \ln(2\sqrt{n})\end{aligned}$$

gracias al Lema 4.3. □

Este pronosticador también puede ser extendido a la clase del todos los expertos constantes cuando el espacio de resultados es $\mathcal{Y} = \{1, ..., m\}$ para $m \geq 2$. En esta situación, la mezcla se calcula a partir de la densidad de Dirichlet(1/2,...,1/2)

$$\phi(\mathbf{p}) = \frac{\Gamma(m/2)}{\Gamma(1/2)^m} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{p(j)}}$$

sobre el símplex de probabilidad $\mathcal{D}$, que contiene los vectores $\mathbf{p} = (p(1), ..., p(m)) \in \mathbb{R}^m$, con $p(i) > 0$ y $\sum_i^m p(i) = 1$. De modo que, el pronosticador toma la expresión

$$\widehat{p}_n(y^n) = \int_{\mathcal{D}} \prod_{j=1}^{m} p(j)^{n_j} \phi(\mathbf{p}) \mathrm{d}\mathbf{p},$$

donde $n_1, ..., n_m$ indican el número de veces que aparece cada elemento en y^n. Gracias al Teorema 4.6 se puede acotar el arrepentimiento que este alcanza en el peor de los casos por

$$\frac{m-1}{2} \ln n + \ln \frac{\Gamma(1/2)^m}{\Gamma(m/2)} + \frac{m-1}{2} \ln 2 + o(1).$$

Cabe notar que esta cota difiere del arrepentimiento minimax por solo una constante $\frac{m-1}{2} \ln 2$. Además, el pronosticador se calcula fácilmente gracias a la fórmula

$$\widehat{p}_t(i|y^{t-1}) = \frac{t_i + 1/2}{t - 1 + m/2}$$

para $i = 1, ..., m$, donde t_i es el número de veces que ha sucedido i en y^{t-1}.

Teorema 4.7. *Para cualquier secuencia $y^n \in \{1,2\}^n$, el arrepentimiento del pronosticador mixto de Krichevsky-Trofimov cumple que*

$$\widehat{L}(y^n) - \inf_{f\in\mathcal{F}} L_f(y^n) = \frac{1}{2} \ln n + \Theta(1).$$

Demostración. Fijada una secuencia de resultados. Al igual que antes denotamos n_1 y n_2 al número de unos y doses en la secuencia y^n. Primero, observemos que dada la función gamma $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \mathrm{d}x$, la probabilidad que da la mezcla de Krichevsky-Trofimov se puede escribir como

$$\widehat{p}_n(y^n) = \frac{\Gamma(n_1 + \frac{1}{2})\Gamma(n_2 + \frac{1}{2})}{\pi n!}.$$

Por lo tanto,

$$\widehat{L}(y^n) - \inf_{f\in\mathcal{F}} L_f(y^n) - \frac{1}{2}\ln n = \ln \frac{\pi n! n_1^{n_1} n_2^{n_2}}{\Gamma(n_1+\frac{1}{2})\Gamma(n_2+\frac{1}{2}) n^n \sqrt{n}}.$$

Ahora, introduciendo la función

$$F(n_1,n_2) = \frac{\pi(n_1+n_2)! n_1^{n_1} n_2^{n_2}}{\Gamma(n_1+\frac{1}{2})\Gamma(n_2+\frac{1}{2})(n_1+n_2)^{n_1+n_2}\sqrt{n_1+n_2}}$$

y observando que dada la función gamma, el término $P(n_1,n_2)$ definido en 4.7.1 se puede expresar como

$$P(n_1,n_2) = \frac{\Gamma(n_1+1/2)\Gamma(n_2+1/2)}{\Gamma(n_1+n_2+1)},$$

de 4.7.2 y las propiedades de la función gamma obtenemos que $\Delta(n_1,n_2)$ es la inversa de $F(n_1,n_2)$. Gracias entonces a la demostración del Lema 4.3 donde habíamos visto que $\Delta(n_1,n_2)$ es creciente en ambos argumentos, tenemos que $F(n_1,n_2)$ es decreciente en ambos argumentos, es decir $F(n_1,n_2) \geq F(n,n)$ y por lo tanto

$$\widehat{L}(y^n) - \inf_{f\in\mathcal{F}} L_f(y^n) - \frac{1}{2}\ln n \leq \ln \frac{\pi(2n)! n^{2n}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})^2 (2n)^{2n}\sqrt{2n}}.$$

Por último aplicando la aproximación de Stirling $\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}(x/e)^x/\sqrt{x}(1+o(1))$ si $x \to \infty$, vemos que el término de la derecha converge a una constante cuando $n \to \infty$. □

4.8 Cotas inferiores para la mayoría de secuencias

Dada la definición de $V_n(\mathcal{F})$, se deduce que para todo pronosticador existe una secuencia de resultados que hacen que el arrepentimiento sea al menos tan grande como $V_n(\mathcal{F})$. A continuación vamos a analizar ciertos casos en los que se puede llegar a obtener cotas inferiores mucho mejores. Además, vamos a ver que para ciertas clases de expertos, da igual cual sea el pronosticador que utilicemos, podemos lograr que el arrepentimiento no sea mucho menor que $V_n(\mathcal{F})$ para la "mayoría" de secuencias de resultados y^n. Es decir, vamos a ver cómo se puede lograr el arrepentimiento minimax no solo para ciertos casos excepcionales.

Al igual que en los apartados anteriores, vamos a trabajar con el caso en el que $\mathcal{Y} = \{1,2\}$ y los expertos son constantes, y luego el razonamiento se puede extender al caso general.

Así pues, la clase de expertos $\mathcal{F}$ contiene todas las distribuciones de probabilidad sobre $\{1,2\}^n$, que asignan a cada secuencia $y^n \in \{1,2\}^n$, la probabilidad $q^j(1-q)^{n-j}$, donde j es el número de unos en la secuencia y $q \in [0,1]$ el parámetro que determina al experto. Para dicha secuencia, el mejor experto asigna una probabilidad

$$\max_{q\in[0,1]} q^j(1-q)^{n-j} = \left(\frac{j}{n}\right)^j \left(\frac{n-j}{n}\right)^{n-j}$$

de forma que, $\inf_{f\in\mathcal{F}} L_f(y^n) = -j\ln\frac{j}{n} - (n-j)\ln\frac{n-j}{n}$.

Dividiendo el conjunto $\{1,2\}^n$ en $n+1$ clases dependiendo el número de unos que contiene la secuencia, definimos los conjuntos

$$T_j = \{y^n \in \{1,2\}^n : \text{el número de unos en } y^n \text{ es exactamente } j\} \quad j = 0,1,...,n.$$

Teorema 4.8. *Dada la clase de expertos constantes $\mathcal{F}$ sobre el espacio $\mathcal{Y} = \{1,2\}$. Sea $\epsilon_n > 0$, consideramos el pronosticador $\widehat{p}_n$. Definimos el conjunto*

$$A = \left\{ y^n \in \{1,2\}^n : \widehat{L}(y^n) \leq \inf_{f \in \mathcal{F}} L_f(y^n) + \frac{1}{2} \ln n - \ln \frac{C}{\epsilon_n} \right\}$$

donde $C = \sqrt{\pi} e^{1/6} / \sqrt{2} \approx 1,4806$. Para cualquier $\delta_n > 0$, tal que $\epsilon_n \ll \delta_n$ (por ejemplo se podría tomar $\delta_t \sim 1/\ln \ln n$ y $\epsilon_t \sim 1/\ln n$),

$$\left| \left\{ j : \frac{|A \cap T_j|}{|T_j|} > \delta_n \right\} \right| \leq \frac{n\epsilon_n}{\delta_n}.$$

De esta forma, aunque ϵ_n es pequeño, el conjunto A contiene todas las secuencias para las que el arrepentimiento del pronosticador es significativamente más pequeño que el valor minimax $V_n(\mathcal{F}) \approx \frac{1}{2} \ln n$.

Demostración. Primero, acotemos el cardinal de cada conjunto T_j utilizando la fórmula de Stirling

$$\begin{aligned} \ln |T_j| = \ln \binom{n}{j} &\geq \ln \left(\frac{n}{j}\right)^j \left(\frac{n}{n-j}\right)^{n-j} + \ln \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi j(n-j)} e^{1/6}} \\ &\geq \ln \left(\frac{n}{j}\right)^j \left(\frac{n}{n-j}\right)^{n-j} - \frac{1}{2} \ln n - \ln C, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha utilizado que $\sqrt{j(n-j)} \leq n/2$. Entonces, para cualquier secuencia $y^n \in T_j$ tenemos que

$$\inf_{f \in \mathcal{F}} L_f(y^n) \leq \ln |T_j| + \frac{1}{2} \ln n + \ln C.$$

Por lo tanto, si $y^n \in A \cap T_j$

$$\widehat{L}(y^n) \leq \ln |T_j| + \ln n - \ln \frac{1}{\epsilon_n}$$

es decir,

$$\widehat{p}_n(y^n) \geq \frac{1}{|T_j| n \epsilon_n}.$$

Por último veamos que, denotando como $T(y^n)$ al conjunto T_j que contiene a y^n,

$$\left| \left\{ j : \frac{|A \cap T_j|}{|T_j|} > \delta_n \right\} \right| \leq \frac{1}{\delta_n} \sum_{j=0}^{n} \frac{|A \cap T_j|}{|T_j|} = \frac{1}{\delta_n} \sum_{y^n \in A} \frac{1}{|T(y^n)|} \leq \frac{n\epsilon_n}{\delta_n} \sum_{y^n \in A} \widehat{p}_n(y^n) \leq \frac{n\epsilon_n}{\delta_n}$$

□

Este teorema se puede entender de forma que, dado cualquier pronosticador, su arrepentimiento no puede ser significativamente menor que este para la mayoría de los casos. Es decir, que el subconjunto de secuencias de T_j que hacen que el arrepentimiento sea pequeño es insignificante. Gracias a este teorema redefinimos lo que podemos entender como "mayoría" a algo mas que simplemente basarnos en contar el número de secuencias.

4.9 Predicción con información adicional

Una vez expuestas las formas de predicción que hemos analizado hasta este punto, cabe preguntarse, si a parte de las recomendaciones que obtenemos de los expertos, se puede hacer uso de información adicional a la que tengamos acceso. Nos encontramos pues en la siguiente situación. La secuencia de resultados toma valores en el espacio finito $\mathcal{Y} = \{1, ..., m\}$. Dado $K \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G}_1, ...\mathcal{G}_K$ es la base de pronosticadores estáticos. Hemos tomado este tipo de pronosticadores para simplificar la notación, pero se puede extender al caso general sin problema. Cada clase $\mathcal{G}_j$ contiene los pronosticadores de la forma

$$g^{(j)}(y^n) = \prod_{t=1}^{n} g_t^{(j)}(y_t)$$

donde para cada t, el vector $(g_t^{(j)}(1), ..., g_t^{(j)}(m))$ es un elemento de probabilidad del símplex $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^m$. También, en cada momento t el pronosticador tiene acceso a la información adicional $z_t \in \mathcal{Z} = \{1, ..., K\}$. Nuestro pronosticador va a competir con una clase $\mathcal{F}$ cuyos pronosticadores toman la forma

$$f_t(y|y^{t-1}, z_t) = f_t(y|z_t) = g_{\bar{t}_{z_t}}^{(z_j)}(y)$$

donde para cada j, $\bar{t}_j$ indica la longitud de la secuencia de momentos $s < t$ tal que $z_s = j$. Es decir, cada f ignora los resultados previos y usa la información adicional z_t escogiendo $\mathcal{G}_{z_t}$. Cabe mencionar que aunque los f son estáticos, la información adicional puede depender sin saberlo de los resultados previos o incluso de los futuros.

Por lo tanto, la pérdida que experimenta $f \in \mathcal{F}$ para la secuencia de resultados $y^n \in \mathcal{Y}^n$ y que ha obtenido una información adicional $z^n \in \mathcal{Z}^n$ es

$$-\sum_{t=1}^{n} \ln f_t(y_t|y^{t-1}, z_t) = -\sum_{t=1}^{n} \ln g_{\bar{t}_{z_t}}^{(z_j)}(y).$$

Queremos entonces obtener un pronosticador $\widehat{p}_t$ cuya pérdida acumulada

$$-\sum_{t=1}^{n} \ln \widehat{p}_t(y_t|y^{t-1}, z_t)$$

esté lo más próxima a la del mejor experto posible, sea cual sea la secuencia de resultados y la información adicional a la que se ha tenido acceso. Supongamos que para cada clase de expertos estáticos $\mathcal{G}_j$ existe un $q^{(j)}$ que hace que este alcance el peor arrepentimiento posible

$$V_n(q^{(j)}, \mathcal{G}_j) = \sup_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{g^{(j)} \in \mathcal{G}_j} \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{g_t^{(j)}(y_t)}{g_t^{(j)}(y_t|y^{t-1})}.$$

Definamos el pronosticador con información adicional como

$$p_t(y|y^{t-1}, z_t) = q_{\bar{t}_{z_t}}^{(z_j)}(y|\bar{y}_{z_t}^t)$$

donde aquí, para cada j, $\bar{y}_j^t$ indica la secuencia de resultados y_s ($s < t$) tal que $z_s = j$. Es decir, el pronosticador mira los resultados previos $y_1, ..., y_{t-1}$ y toma solo los momentos en los que la información adicional estuvo de acuerdo con la actual z_t. Analicemos pues su rendimiento.

Teorema 4.9. *Para cualquier secuencia de resultados $y^n \in \mathcal{Y}^n$ y secuencia de información adicional $z^n \in \mathcal{Z}^n$, el arrepentimiento que experimenta el pronosticador p respecto a los expertos de la clase $\mathcal{F}$ cumple que*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{f_t(y_t|y^{t-1}, z_t)}{p_t(y_t|y^{t-1}, z_t)} \leq \sum_{j=1}^{K} V_{\bar{n}_j}(q^{(j)}, \mathcal{G}_j),$$

donde $\bar{n}_j = \sum_{t=1}^{n} \mathbb{I}_{\{z_t=j\}}$ denota al número de veces que aparece la información adicional j en la secuencia.

Demostración. Vemos que aplicando las definiciones se obtiene fácilmente que

$$\begin{aligned}
\sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{f_t(y_t|y^{t-1}, z_t)}{p_t(y_t|y^{t-1}, z_t)} &= \sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{g^{(z_t)}_{\bar{t}_{z_t}}(y_t)}{q^{(z_j)}_{\bar{t}_{z_t}}(y_t|\bar{y}^t_{z_t})} \\
&= \sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{j=1}^{K} \left(\sum_{t=1}^{n} \mathbb{I}_{\{z_t=j\}} \ln \frac{g^{(j)}_{\bar{t}_j}(y_t)}{q^{(j)}_{\bar{t}_j}(y_t|\bar{y}^t_j)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{K} \sup_{g^{(j)}\in\mathcal{G}_j} \sum_{t=1}^{n} \mathbb{I}_{\{z_t=j\}} \ln \frac{g^{(j)}_{\bar{t}_j}(y_t)}{q^{(j)}_{\bar{t}_j}(y_t|\bar{y}^t_j)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{K} V_{\bar{n}_j}(q^{(j)}, \mathcal{G}_j).
\end{aligned}$$

□

4.10 Una cota superior general

Pasemos ahora a analizar el arrepentimiento minimax para clases más generales de expertos. Para esto, primero vamos a introducir la siguiente métrica que nos dará una idea del tamaño de una clase de expertos $\mathcal{F}$, definida como

$$d(f, g) = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \sup_{y^t} (\ln f(y_t|y^{t-1}) - \ln g(y_t|y^{t-1}))^2}. \tag{4.10.1}$$

Definición 4.1. Llamamos *número de recubrimiento de $\mathcal{F}$ bajo la métrica d* al cardinal del menor subconjunto $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}$ existe un $g \in \mathcal{F}'$ con $d(f, g) \leq \epsilon$. Lo vamos a denotar como $N(\mathcal{F}, \epsilon)$.

Teorema 4.10. *Para cualquier clase $\mathcal{F}$ de expertos,*

$$V_n(\mathcal{F}) \leq \inf_{\epsilon>0} \left(\ln N(\mathcal{F}, \epsilon) + 24 \int_0^{\epsilon} \sqrt{\ln N(\mathcal{F}, \delta)} \mathrm{d}\delta \right).$$

Para probar este resultado se van a usar desigualdades maximales y algunos conceptos propios de procesos Gaussianos y empíricos. Para evitar extendernos demasiado se presentan con una cantidad mínima de comentarios.

Definición 4.2. Definimos la *entropía relativa (o divergencia de Kullback-Leibler)* entre dos distribuciones de probabilidad P y Q sobre el conjunto $\mathcal{X}$ con densidades de probabilidad $p(x)$ y $q(x)$ como

$$D(P||Q) = \sum_{x \in \mathcal{X}: p(x)>0} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Lema 4.4. *Dada la entropía relativa entre dos distribuciones de probabilidad P y Q sobre el conjunto $\mathcal{X}$ con densidades de probabilidad $p(x)$ y $q(x)$*

$$D(P||Q) \geq 0$$

y se da la igualdad si y solo si $P = Q$.

Demostración. Dado que $\log x \leq x - 1$,

$$\begin{aligned} D(P||Q) &= - \sum_{x \in \mathcal{X}: p(x)>0} p(x) \log \frac{q(x)}{p(x)} \\ &\geq - \sum_{x \in \mathcal{X}: p(x)>0} p(x) \left(\frac{q(x)}{p(x)} - 1 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Definición 4.3. Decimos que una secuencia de variables aleatorias $V_1, V_2, ...,$ es una *diferencia martingalas* con respecto a la secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, ...$ si para cada $i > 0$, V_i es una función de $X_1, ..., X_i$ y

$$\mathbb{E}[V_{i+1}|X_1, ..., X_i] = 0$$

con probabilidad 1.

Lema 4.5. *Sea $V_1, V_2, ...$ una diferencia martingalas respecto a la secuencia $X_1, X_2, ...$ tal que $V_i \in [A_i, A_i + c_i]$ para alguna variable aleatoria A_i, medible respecto a $X_1, ..., X_{i-1}$ y c_i una constante positiva. Si $S_k = \sum_{i=1}^{k} V_i$, entonces para cualquier $s > 0$,*

$$\mathbb{E}[e^{sS_n}] \leq e^{(s^2/8)\sum_{i=1}^{n} c_i^2}.$$

Demostración. Aplicando el Lema 2.2 visto previamente tenemos que

$$\mathbb{E}[e^{sS_n}] = \mathbb{E}[e^{sS_{n-1}} \mathbb{E}[e^{sV_n}|X_1, ..., X_{n-1}]] \leq \mathbb{E}[e^{sS_{n-1}} e^{s^2 c_n^2/8}] = e^{s^2 c_n^2/8} \mathbb{E}[e^{sS_{n-1}}].$$

Reiterando el proceso se llega a la expresión deseada. □

Para entender la estructura geométrica de la clase de expertos es necesario introducir los términos siguientes.

Dada una clase de expertos estáticos $\mathcal{F}$ y una métrica ρ, denotaremos ahora al número de recubrimiento como $N_\rho(\mathcal{F}, r)$, donde el cardinal de un conjunto $\mathcal{F}_r$ de expertos estáticos, cumple que para todo $f \in \mathcal{F}$ existe algún $g \in \mathcal{F}_r$ tal que

$$\rho(f, g) \leq r.$$

Definición 4.4. Dada la familia de variables aleatorias con media cero $\{T_f : f \in \mathcal{F}\}$ indexadas por un espacio métrico $(\mathcal{F}, \rho)$. Sea $N_\rho(\mathcal{F}, r)$ el número de recubrimiento del espacio métrico $\mathcal{F}$ respecto a la métrica ρ. Decimos que la familia es *subgaussiana* en la métrica ρ si

$$\mathbb{E}[e^{\lambda(T_f - T_g)}] \leq e^{\lambda^2 \rho(f,g)^2/2}$$

para cualquier $f, g \in \mathcal{F}$ y $\lambda > 0$.

Definición 4.5. Decimos que una familia $\{T_f : f \in \mathcal{F}\}$ es *de muestra continua* si para cualquier secuencia $f^{(1)}, f^{(2)} ... \in \mathcal{F}$ que converge a algún $f \in \mathcal{F}$, tenemos que $T_{f^{(n)}} - T_f \to 0$ casi siempre.

Lema 4.6. *Dado $\sigma > 0$, y sean $X_1, ..., X_N$ variables aleatorias reales tales que para cualquier $\lambda > 0$ y $1 \leq i \leq N$*

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_i}\right] \leq e^{\lambda^2 \sigma^2/2},$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[\max_{i=1,...,N} X_i\right] \leq \sigma\sqrt{2 \ln N}.$$

Demostración. Gracias a la desigualdad de Jensen, para todo $\lambda > 0$,

$$e^{\lambda \mathbb{E}[\max_{i=1,...,N} X_i]} \leq \mathbb{E}[e^{\lambda \max_{i=1,...,N} X_i}] = \mathbb{E}\left[\max_{i=1,...,N} e^{\lambda X_i}\right] \leq \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_i}\right] \leq N e^{\lambda^2\sigma^2/2}.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\max_{i=1,...,N} X_i\right] \leq \frac{\ln N}{\lambda} + \frac{\lambda \sigma^2}{2}$$

donde tomando $\lambda = \sqrt{2 \ln N / \sigma^2}$ obtenemos la expresión deseada. □

Teorema 4.11. ***(Cota de entropía de Dudley).*** *Si $\{T_f : f : \mathcal{F}\}$ es subgaussiana y de muestra continua para la métrica ρ, entonces*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{f \in \mathcal{F}} T_f\right] \leq 12 \int_0^{D/2} \sqrt{\ln N_\rho(\mathcal{F}, \epsilon)} \mathrm{d}\epsilon,$$

donde D es el diámetro de $\mathcal{F}$.

Para demostrar el teorema principal, lo que se ha hecho ha sido replicar el método de encadenamiento [7].

Demostración. Sea $\mathcal{F}^{(k)}$ el recubrimiento mínimo de $\mathcal{F}$ de radio $D2^{-k}$ para cada $k = 0, 1, 2, ...$ De forma que $|\mathcal{F}^{(k)}| = N_\rho(\mathcal{F}, D2^{-k})$. Denotamos al único elemento de $\mathcal{F}^{(0)}$ por f_0. Sea Ω el dominio en el que las variables aleatorias $T_f, f \in \mathcal{F}$ están definidas. Dado $\omega \in \Omega$ y sea $f^* \in \mathcal{F}$ el que cumple que $\sup_{f \in \mathcal{F}} T_f(\omega) = T_{f^*}(\omega)$.

Para cada $k \geq 0$, sea f_k^* el elemento de $\mathcal{F}^{(k)}$ que minimiza la distancia a f^*, lógicamente $\rho(f^*, f_k^*) \leq D2^{-k}$, y por lo tanto por la desigualdad triangular tenemos que para cada $k \geq 1$,

$$\rho(f_{k-1}^*, f_k^*) \leq \rho(f^*, f_k^*) + \rho(f^*, f_{k-1}^*) \leq 3D2^{-k}. \tag{4.10.2}$$

Vemos pues que $\lim_{k\to\infty} f_k^* = f^*$, y por ser la familia de muestra continua,

$$\sup_f T_f(\omega) = T_{f^*}(\omega) = T_{f_0}(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty}(T_{f_k^*}(\omega) - T_{f_{k-1}^*}(\omega)).$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\sup_f T_f\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\max_{f,g}(T_f - T_g)\right],$$

donde se ha tomado el máximo sobre todos los pares $(f,g) \in \mathcal{F}^{(k)} \times \mathcal{F}^{(k-1)}$ de forma que $\rho(f,g) \leq 3D2^{-k}$. Teniendo en cuenta que habrá como mucho $N_\rho(\mathcal{F}, D2^{-k})^2$ de estos pares, y que estamos trabajando con una familia subgaussiana en la métrica ρ, aplicando el Lema 4.6 y 4.10.2, deducimos que para cada $k \geq 1$

$$\mathbb{E}\left[\max_{f,g}(T_f - T_g)\right] \leq 3D2^{-k}\sqrt{2\ln N_\rho(\mathcal{F}, D2^{-k})^2}.$$

Y sumando sobre k obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_f T_f\right] &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 3D2^{-k}\sqrt{2\ln N_\rho(\mathcal{F}, D2^{-k})^2} \\ &= 12\sum_{k=1}^{\infty} D2^{-(k+1)}\sqrt{\ln N_\rho(\mathcal{F}, D2^{-k})} \\ &= 12\int_0^{D/2} \sqrt{\ln N_\rho(\mathcal{F}, \epsilon)}\mathrm{d}\epsilon.\end{aligned}$$

$\square$

Lema 4.7. *Para cualquier clase de expertos $\mathcal{F}$,*

$$V_n(\mathcal{F}) \leq 24\int_0^{D/2} \sqrt{\ln N(\mathcal{F}, \epsilon)}\mathrm{d}\epsilon$$

donde $D = \sup_{f,g\in\mathcal{F}} d(f,g)$ es el diámetro de $\mathcal{F}$.

Demostración. Dado que como habíamos visto en el Teorema 4.1, $V_n(\mathcal{F}) = \sup_{f\in\mathcal{F}} \ln \frac{f_n(y^n)}{p_n^*(y^n)}$ es una constante independiente de y^n, podemos tomar cualquier media ponderada suya sin modificar su valor. De esta forma, si hacemos esto tomando la distribución de probabilidad definida por p^* obtenemos que

$$V_n(\mathcal{F}) = \sum_{y^n\in\mathcal{Y}^n}\left(\sup_{f\in\mathcal{F}} \ln \frac{f_n(y^n)}{p_n^*(y^n)}\right) p_n^*(y^n).$$

Ahora, si introducimos el vector de variables aleatorias $Y^n = (Y_1, ..., Y_n)$ con distribución p_n^* vemos que

$$\begin{aligned}V_n(\mathcal{F}) &= \mathbb{E}\left[\sup_{f\in\mathcal{F}} \ln \frac{f_n(Y^n)}{p_n^*(Y^n)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{f_n(Y_t|Y^{t-1})}{p_n^*(Y_t|Y^{t-1})}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\sup_{f\in\mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n}\left(\ln \frac{f(Y_t|Y^{t-1})}{p^*(Y_t|Y^{t-1})} - \mathbb{E}\left[\ln \frac{f(Y_t|Y^{t-1})}{p^*(Y_t|Y^{t-1})}\,\middle|Y^{t-1}\right]\right)\right],\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que por el Lema 4.4

$$\mathbb{E}\left[\ln \frac{p^*(Y_t|Y^{t-1}=y^{t-1})}{f(Y_t|Y^{t-1}=y^{t-1})}\right] \geq 0.$$

Sea para cada $f \in \mathcal{F}$

$$T_f(y^n) = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\left(\ln \frac{f(y_t|y^{t-1})}{p^*(y_t|y^{t-1})} - \mathbb{E}\left[\ln \frac{f(Y_t|Y^{t-1})}{p^*(Y_t|Y^{t-1})}\,\middle|Y^{t-1}\right]\right)$$

tenemos entonces que $V_n(\mathcal{F}) \leq 2\mathbb{E}[\sup_{f\in\mathcal{F}} T_f]$, donde por simplificación hemos escrito $T_f = T_f(Y^n)$.

Para acotar esta expresión vamos a ver primero que la familia $\{T_f : f \in \mathcal{F}\}$ es subgausiana bajo la métrica d. (Es trivial que es de muestra continua.) Dados cualquier $f, g \in \mathcal{F}$,

$$T_f(y^n) - T_g(y^n) = \sum_{t=1}^{n} Z_t(y^t)$$

donde

$$Z_t(y^t) = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{f(y_t|y^{t-1})}{g(y_t|y^{t-1})} - \mathbb{E}\left[\ln \frac{f(Y_t|Y^{t-1}=y^{t-1})}{g(Y_t|Y^{t-1}=y^{t-1})}\right]\right).$$

Tenemos entonces que $T_f - T_g = T_f(y^n) - T_g(y^n)$ es una suma acotada de diferencias martingalas respecto a la secuencia $Y_1, Y_2, ...Y_n$. Esto quiere decir que cada término Z_t tiene media cero y está acotada en $2d_t(f,g)$. Aplicando entonces el Lema 4.5 tenemos que para cualquier $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda(T_f - T_g)}] \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} d(f,g)^2\right)$$

Por lo tanto, la familia $\{T_f : f \in \mathcal{F}\}$ es subgausiana y gracias a $V_n(\mathcal{F}) \leq 2\mathbb{E}[\sup_{f\in\mathcal{F}} T_f]$ y al Teorema 4.11 llegamos al resultado deseado. □

Después de todo esto podemos proceder ya a la demostración del principal teorema de esta sección.

Demostración Teorema 4.10. Vamos a proceder dividiendo la clase de expertos en subclases en las que aplicar el Lema 4.7 y tras ello combinar el pronosticador óptimo obtenido para cada subclase a través de una mezcla finita. Esto se realiza como sigue. Primero, dado $\epsilon > 0$, y sea $\mathcal{G} = \{g_1, ..., g_N\}$ un recubrimiento de $\mathcal{F}$ de tamaño mínimo $N = N(\mathcal{F}, \epsilon)$. Los subconjuntos $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_N$ de $\mathcal{F}$ vienen dados por

$$\mathcal{F}_i = \{f \in \mathcal{F} : d(f, g_i) \leq d(f, g_j) \text{ para cada } j = 1, ..., N\}$$

de forma que cada $\mathcal{F}_i$ contiene los expertos del recubrimiento cercanos a g_i. Claramente la unión de estos subconjuntos da $\mathcal{F}$. Sea para cada $i = 1, ..., N$, $g^{(i)}$ el pronosticador dado por la máxima probabilidad normalizada de $\mathcal{F}_i$

$$g_n^{(i)}(y^n) = \frac{\sup_{f\in\mathcal{F}_i} f_n(y^n)}{\sum_{x^n\in\mathcal{Y}^n} \sup_{f\in\mathcal{F}_i} f_n(x^n)}.$$

Ahora, sea p_ϵ el pronosticador mixto uniforme a partir de $g^{(1)}, ..., g^{(N)}$. Por un lado está claro que $V_n(\mathcal{F}) \leq \inf_{\epsilon>0} V_n(p_\epsilon, \mathcal{F})$, por lo tanto solo nos queda acotar el arrepentimiento de p_ϵ.

Dado $y^n \in \mathcal{Y}^n$ y sea $k = k(y^n)$ el índice del subconjunto $\mathcal{F}_k$ que contiene el mejor experto para dicha secuencia, es decir, aquél que

$$\ln \sup_{f \in \mathcal{F}} f(y^n) = \ln \sup_{f \in \mathcal{F}_k} f(y^n),$$

entonces

$$\ln \frac{\sup_{f \in \mathcal{F}} f(y^n)}{p_\epsilon(y^n)} = \ln \frac{g^{(k)}(y^n)}{p_\epsilon(y^n)} + \ln \frac{\sup_{\mathcal{F}_k} f(y^n)}{g^{(k)}(y^n)}.$$

El primer término, lo podemos acotar gracias a la cota obtenida previamente para los pronosticadores mixtos por

$$\sup_{y^n} \ln \frac{g^{(k)}(y^n)}{p_\epsilon(y^n)} \leq \ln N.$$

Para el segundo, vemos que

$$\sup_{y^n} \ln \frac{\sup_{\mathcal{F}_k} f(y^n)}{g^{(k)}(y^n)} \leq \max_{i=1,..,N} \sup_{y^n} \ln \frac{\sup_{\mathcal{F}_i} f(y^n)}{g^{(i)}(y^n)} = \max_{i=1,...,N} V_n(\mathcal{F}_i).$$

Por lo tanto

$$V_n(p_\epsilon, \mathcal{F}) \leq \ln N + \max_{i=1,...,N} V_n(\mathcal{F}_i).$$

Para finalizar, observando que el diámetro de cada subconjunto $\mathcal{F}_i$ es a lo sumo 2ϵ, aplicamos el Lema 4.7 a cada uno de ellos obteniendo así el resultado deseado

$$V_n(p_\epsilon, \mathcal{F}) \leq \ln N + \max_{i=1,...,N} 24 \int_0^\epsilon \sqrt{\ln N(\mathcal{F}_i, \delta)} d\delta \leq \ln N(\mathcal{F}, \epsilon) + 24 \int_0^\epsilon \sqrt{\ln N(\mathcal{F}, \delta)} d\delta.$$

□

Cabe mencionar, que para el Teorema 4.10 ha sido necesario que existan los recubrimientos finitos de $\mathcal{F}$ para la métrica en la que estamos trabajando. Dado que la métrica d que hemos definido en 4.10.1 hace uso del logaritmo de las predicciones de los expertos, es necesario que ningún $f_t(j|y^{t-1})$ tome el valor cero. Si la clase con la que estamos trabajando no cumple esta condición es necesario hacer uso de la siguiente propiedad. Otra vez nos centramos el caso en que $m = 2$ donde el resultado se puede extender fácilmente al caso general $m > 2$.

Lema 4.8. *Sea $m = 2$, y dada la clase de expertos $\mathcal{F}$. Definiendo la clase $\mathcal{F}^{(\delta)}$ como el conjunto de todos los expertos $f^{(\delta)}$ de la forma*

$$f_t^{(\delta)}(1|y^{t-1}) = \tau_\delta(f_t(1|y^{t-1}))$$

donde

$$\tau_\delta(x) = \begin{cases} \delta & \text{si } x < \delta \\ x & \text{si } x \in [\delta, 1-\delta] \\ 1-\delta & \text{si } x > 1-\delta \end{cases}$$

para algún $0 < \delta < 1/2$ fijo. Se tiene entonces que

$$V_n(\mathcal{F}) \leq V_n(\mathcal{F}^{(\delta)}) + 2n\delta.$$

De esta forma, si queremos obtener una cota para $V_n(\mathcal{F})$ primero calculamos una para la clase truncada $\mathcal{F}^{(\delta)}$ gracias al Teorema 4.10 y luego elegimos la δ que optimice la desigualdad del Lema 4.8.

Demostración. Primero, tenemos que para cualquier secuencia y^n y cualquier $f \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}
\ln f_n(y^n) &= \sum_{t=1}^{n} \ln f_t(y_t|y^{t-1}) \\
&\leq \sum_{t: f_t^{(\delta)}(y_t|y^{t-1}) < 1-\delta} \ln f_t^{(\delta)}(y_t|y^{t-1}) + \sum_{t: f_t^{(\delta)}(y_t|y^{t-1}) = 1-\delta} \ln 1 \\
&\leq \sum_{t: f_t^{(\delta)}(y_t|y^{t-1}) < 1-\delta} \ln f_t^{(\delta)}(y_t|y^{t-1}) + \sum_{t: f_t^{(\delta)}(y_t|y^{t-1}) = 1-\delta} (\ln(1-\delta) + 2\delta) \\
&\leq \sum_{t=1}^{n} (\ln f_t^{(\delta)}(y_t|y^{t-1}) + 2\delta) \\
&= \ln f_t^{(\delta)}(y^n) + 2n\delta.
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la concavidad de $\ln 1 \leq \ln(1-\delta) + \delta/(1-\delta)$ con $0 < \delta < 1/2$. Por lo tanto, para cualquier pronosticador $\widehat{p}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{L}(y^n) - \inf_{f \in \mathcal{F}} L_f(y^n) &= -\ln \widehat{p}_n(y^n) + \sup_{f \in \mathcal{F}} \ln f_n(y^n) \\
&\leq -\ln \widehat{p}_n(y^n) + \sup_{f^{(\delta)} \in \mathcal{F}^{(\delta)}} \ln f_n^{(\delta)}(y^n) + 2n\delta \\
&= \widehat{L}(y^n) - \inf_{f^{(\delta)} \in \mathcal{F}^{(\delta)}} L_{f^{(\delta)}}(y^n) + 2n\delta.
\end{aligned}$$

$\square$

5

Inversión secuencial

En este último capítulo vamos a mostrar la aplicación de lo expuesto hasta ahora al ámbito de gestión de carteras. Para ello nos encontramos en la siguiente situación.

- El mercado viene representado por m activos, que varían su valor a lo largo de un periodo de tiempo que generalmente se mide en días, aunque estos se pueden tomar mas cortos o más largos.
- El inversor va a realizar operaciones a lo largo de n periodos.
- El inversor distribuye su capital a invertir reuniendo así un conjunto de activos que conforman lo que llamamos *cartera*.
- En esta explicación no consideramos la posibilidad de que el inversor sea capaz de vender a la baja ni de endeudarse.

Para modelar el problema hacemos uso de lo siguiente.

- Un vector del mercado $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m)$ representa la relación entre el precio de apertura y el de cierre de cada activo.
- El comportamiento del mercado a lo largo de n periodos viene dado por el vector $\mathbf{x}^n = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$, de forma que la componente j del elemento $\mathbf{x}_t$ representa el factor por el que aumenta la inversión en el activo j el periodo t.

En este modelo, el inversor realiza una inversión inicial en cada activo representada por las fracciones $Q_1, ..., Q_m$ de forma que el capital al final del periodo de inversión es $\sum_{i=1}^{m} x_i Q_i$.

Aquí, una estrategia de inversión Q para n periodos consiste en una secuencia de funciones $\mathbf{Q}_1, ..., \mathbf{Q}_n$, tal que $\mathbf{Q}_t : \mathbb{R}_+^{t-1} \to \mathcal{D}$ siendo $\mathcal{D}$ el símplex probabilístico en $\mathbb{R}^m$. El componente $Q_{i,t}(\mathbf{x}^{t-1})$ del vector $\mathbf{Q}_t(\mathbf{x}^{x-1})$ representa la fracción del capital invertida en el activo i al comienzo del periodo t teniendo en cuenta el comportamiento del mercado hasta el momento $\mathbf{x}^{t-1}$. Utilizamos la expresión

$$S_n(Q, x^n) = \prod_{t=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,t} Q_{i,t}(\mathbf{x}^{t-1}) \right)$$

para lo que vamos a denominar el *factor de riqueza* de la estrategia de inversión Q tras n periodos de negociación.

5.1 Selección de cartera

Presentamos para empezar las siguientes estrategias de inversión mas simples.

Compra y espera

Consiste, como su nombre indica, en la compra única de los activos antes del primer periodo de inversión y no volver a realizar ninguna operación. Por lo tanto, el inversor distribuye su capital inicial de acuerdo con la distribución dada por $\mathbf{Q}_1 \in \mathcal{D}$, de forma que el factor de riqueza después de n periodos es

$$S_n(Q, x^n) = \sum_{i=1}^{m} Q_{j,1} \prod_{t=1}^{n} x_{j,t}.$$

Lógicamente, el factor de riqueza será lo mayor posible si la distribución inicial concentra el capital sobre el activo que ha obtenido el mejor rendimiento a lo largo de todo el tiempo de inversión.

Rebalanceo de carteras

En esta estrategia, el inversor redistribuye al principio de cada periodo el capital total de forma que este quede dividido de acuerdo a una distribución fijada previamente. Aunque simple, el rebalanceo de carteras requiere de una supervisión activa de la cartera, al contrario que la estrategia de compra y espera en la que una vez hecha la inversión inicial, el inversor se puede olvidar de ella. La estrategia B viene dada a partir del vector de probabilidades $\mathbf{B} = (B_1, ..., B_m) \in \mathcal{D}$ de forma que $\mathbf{Q}_t(\mathbf{x}^{t-1}) = \mathbf{B}$ para todo t, sea cual sea el comportamiento previo del mercado. Para esta estrategia, el factor de riqueza tras n periodos es

$$S_n(\mathbf{B}, \mathbf{x}^n) = \prod_{t=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{i,t} B_i \right)$$

Para exponer las ventajas de esta estrategia, si nos encontrásemos frente a un mercado que presentase la secuencia $(1, 1/2), (1, 2), (1, 1/2), (1, 2)...$, una estrategia de compra y espera no lograría ninguna ganancia sobre la inversión. Sin embargo, bajo esta estrategia se logra un factor de riqueza que aumenta a razón de $(9/8)^{n/2}$ de forma que a la larga se logra un aumento exponencial del capital.

5.2 El factor de riqueza minimax

Como hemos comentado, el inversor trata de alcanzar una riqueza próxima a la obtenida por la mejor de una serie de estrategias de inversión sea cual sea el comportamiento del mercado. Para proceder con la comparación entre la estrategia que estemos usando y aquellas frente a las que la comparamos, definimos, dada la clase de estrategias de inversión $\mathcal{Q}$, el peor factor de riqueza logarítmica posible de la estrategia de inversión P a partir de la expresión

$$W_n(P, \mathcal{Q}) = \sup_{\mathbf{x}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ln \frac{S_n(Q, \mathbf{x}^n)}{S_n(P, \mathbf{x}^n)},$$

donde el inversor quiere encontrar la estrategia que minimice dicho factor. El factor de riqueza logarítmica minimax es entonces el mejor de los peores factores de riqueza logarítmica posibles que puede alcanzar cualquier estrategia de inversión P, es decir

$$W_n(\mathcal{Q}) = \inf_P W_n(P, \mathcal{Q}).$$

Presentamos un ejemplo. En el caso en el que el inversor compite frente a un número finito de N estrategias $Q^{(1)}, ..., Q^{(N)}$, un planteamiento sencillo consiste en dividir el capital inicial en N partes iguales, e invertir cada una de acuerdo con cada estrategia, de manera que el factor de riqueza obtenido por dicha estrategia es

$$S_n(P, \mathbf{x}^n) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_n(Q^{(i)}, \mathbf{x}^n),$$

pudiendo entonces acotarse el peor factor de riqueza logarítmica posible por

$$\begin{aligned} W_n(P, \mathcal{Q}) &= \sup_{\mathbf{x}^n} \ln \frac{\max_{i=1,...,N} S_n(Q^{(i)}, \mathbf{x}^n)}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_n(Q^{(j)}, \mathbf{x}^n)} \\ &\leq \sup_{\mathbf{x}^n} \ln \frac{\max_{i=1,...,N} S_n(Q^{(i)}, \mathbf{x}^n)}{\frac{1}{N}\max_{j=1} S_n(Q^{(j)}, \mathbf{x}^n)} = \ln N. \end{aligned}$$

5.3 Predicción e inversión.

Recordando lo expuesto en el capítulo anterior, observamos que el problema de la inversión secuencial y el de la predicción están relacionados, pues al fin y al cabo, la manera en la que un inversor decide cómo distribuir sus inversiones es a través de la confianza que este tenga en el éxito de dicha inversión. El inversor entonces hará uso de pronosticadores que le indiquen en la medida de lo posible cómo repartir el capital a invertir a partir a las probabilidades de éxito que prevén de que la inversión en cada activo resulte en una maximización de dicho capital.

Lo primero que observamos es que cualquier estrategia de inversión Q sobre m activos se puede utilizar para definir un pronosticador sobre los elementos $y_t \in \mathcal{Y} = \{1, ..., m\}$ de una secuencia $y^n \in \mathcal{Y}^n$ con vectores de probabilidad $\widehat{\mathbf{p}}_t \in \mathcal{D}$.

Definición 5.1. Llamamos *vector de mercado Kelly* a aquellos vectores de mercado $\mathbf{x}$ que tienen solo una componente igual a 1 y el resto son nulas.

Para generar los pronosticadores mencionados, primero vamos a restringirnos a los vectores de mercado Kelly. Sean $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ vectores de mercado Kelly, donde denotamos al elemento no nulo de cada vector $\mathbf{x}_t$ por y_t. Definimos entonces el pronosticador f como

$$f_t(y|y^{t-1}) = Q_{y,t}(\mathbf{x}^{t-1})$$

donde decimos que el pronosticador f es el inducido por la estrategia de inversión Q. Este pronosticador se puede entender como un experto simulado. Sea $\mathbf{x}^n$ una secuencia de vectores de mercado Kelly dados por la secuencia de resultados y^n, haciendo abuso de notación vamos a escribir $S_n(Q, y^n)$ como $S_n(Q, \mathbf{x}^n)$. Está claro que si f es el pronosticador inducido por la estrategia Q, entonces en este caso $S_n(Q, y^n) = f_n(y^n)$.

Para relacionar entonces el arrepentimiento de los pronosticadores visto hasta ahora con el factor de riqueza, hacemos uso de la pérdida logarítmica, que como habíamos mencionado en el capítulo previo nos iba a ser útil en esta aplicación. Siendo entonces la pérdida logarítmica $l(\widehat{\mathbf{p}}_t, y_t) = -\ln \widehat{p}_t(y_t|y^{t-1})$, tenemos que el arrepentimiento frente al pronosticador de referencia f es

$$\widehat{L}_n - L_{f,n} = \ln \frac{f_n(y^n)}{\widehat{p}_n(y^n)} = \ln \frac{Q(y^n)}{P(y^n)}$$

donde Q y P son las estrategias de inversión inducidas por f y por $\widehat{p}$.

Lema 5.1. *Sea $\mathcal{Q}$ una clase de estrategias de inversión, y $\mathcal{F}$ designa a la clase de pronosticadores que se obtienen de las estrategias de $\mathcal{Q}$, entonces el arrepentimiento minimax*

$$V_n(\mathcal{F}) = \inf_{p_n} \sup_{y^n} \sup_{f \in \mathcal{F}} \ln \frac{f_n(y^n)}{p_n(y^n)}$$

verifica que $W_n(\mathcal{Q}) \geq V_n(\mathcal{F})$

Demostración. Sea P cualquier estrategia de inversión y p su pronosticador, entonces

$$\sup_{\mathbf{x}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ln \frac{S_n(Q, \mathbf{x}^n)}{S_n(P, \mathbf{x}^n)} \geq \max_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ln \frac{S_n(Q, y^n)}{S_n(P, y^n)} = \max_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{f \in \mathcal{F}} \ln \frac{f_n(y^n)}{p_n(y^n)} = V_n(p, \mathcal{F}) \geq V_n(\mathcal{F}).$$

□

Curiosamente, el problema de la inversión no es más difícil que el de predicción. Es más vamos a ver que en ciertos casos estos son equivalentes en el aspecto minimax.

Dado el pronosticador p, definimos la estrategia de inversión P como

$$P_{j,t}(\mathbf{x}^{t-1}) = \frac{\sum_{y^{t-1} \in \mathcal{Y}^{t-1}} p_t(j|y^{t-1}) p_{t-1}(y^{t-1}) \left(\prod_{s=1}^{t-1} x_{y_s,s} \right)}{\sum_{y^{t-1} \in \mathcal{Y}^{t-1}} p_{t-1}(y^{t-1}) \left(\prod_{s=1}^{t-1} x_{y_s,s} \right)}.$$

Los factores $\prod_{t=1}^{n} x_{y_t,t}$ se pueden entender como el resultado que se obtendría si una estrategia invirtiera todo su capital en el periodo t al activo y_t-ésimo. Dada esta definición queda claro que tanto p como P se inducen el uno del otro.

Teorema 5.1. *Sea P una estrategia de inversión inducida por el pronosticador p, y $\mathcal{Q}$ una clase de estrategias de inversión cualquiera. Entonces, para cualquier secuencia del mercado $\boldsymbol{x}^n$,*

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ln \frac{S_n(Q, \boldsymbol{x}^n)}{S_n(P, \boldsymbol{x}^n)} \leq \max_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ln \frac{\prod_{t=1}^{n} Q_{y_t,t}(\boldsymbol{x}^{t-1})}{p_n(y^n)}.$$

Para probar esto, veamos previamente los siguientes lemas.

Lema 5.2. *Sea $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_n$ series no negativas de números. Entonces*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \leq \max_{j=1,...,n} \frac{a_j}{b_j}$$

donde definimos $0/0 = 0$.

Demostración. Dado que

$$b_i \max_{j=1,\dots,n} \frac{a_j}{b_j} \geq a_i$$

podemos comprobar fácilmente que

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\max_{j=1,\dots,n} \frac{a_j}{b_j} \sum_{i=1}^n b_i} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 \max_{j=1,\dots,n} \frac{a_j}{b_j} + \dots + b_n \max_{j=1,\dots,n} \frac{a_j}{b_j}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{a_1 + \dots + a_n} = 1.$$

□

Lema 5.3. *El factor de riqueza que alcanza la estrategia de inversión Q se puede escribir como*

$$S_n(Q, \boldsymbol{x}^n) = \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \left(\prod_{t=1}^n x_{y_t,t} \right) \left(\prod_{t=1}^n Q_{y_t,t}(\boldsymbol{x}^{t-1}) \right).$$

Si la estrategia de inversión P es la inducida por el pronosticador p_n, entonces

$$S_n(P, \boldsymbol{x}^n) = \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \left(\prod_{t=1}^n x_{y_t,t} \right) p_n(y^n).$$

Demostración. Dada la definición del factor riqueza

$$\begin{aligned}
S_n(Q, \mathbf{x}^n) &= \prod_{t=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{j,t} Q_{j,t}(\mathbf{x}^{t-1}) \right) \\
&= \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \left(\prod_{t=1}^n x_{y_t,t} Q_{y_t,t}(\mathbf{x}^{t-1}) \right) \\
&= \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \left(\prod_{t=1}^n x_{y_t,t} \right) \left(\prod_{t=1}^n Q_{y_t,t}(\mathbf{x}^{t-1}) \right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, si la estrategia de inversión es la inducida por el pronosticador p

$$\begin{aligned}
S_n(P, \mathbf{x}^n) &= \prod_{t=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{j,t} P_{j,t}(\mathbf{x}^{t-1}) \right) \\
&= \prod_{t=1}^n \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{y^{t-1} \in \mathcal{Y}^{t-1}} p_t(j|y^{t-1}) x_{j,t} \left(\prod_{s=1}^{t-1} x_{y_s,s} \right)}{\sum_{y^{t-1} \in \mathcal{Y}^{t-1}} p_{t-1}(y^{t-1}) \left(\prod_{s=1}^{t-1} x_{y_s,s} \right)} \\
&= \prod_{t=1}^n \frac{\sum_{y^t \in \mathcal{Y}^t} \left(\prod_{s=1}^t x_{y_s,s} \right) p_t(y^t)}{\sum_{y^{t-1} \in \mathcal{Y}^{t-1}} \left(\prod_{s=1}^{t-1} x_{y_s,s} \right) p_{t-1}(y^{t-1})} \\
&= \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \left(\prod_{t=1}^n x_{y_t,t} \right) p_n(y^n),
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos tomado el denominador igual a 1 para $t = 1$. □

Demostración Teorema 5.1. Fijada una secuencia del mercado $\mathbf{x}^n$ y una estrategia de referencia $Q' \in \mathcal{Q}$. Sea $S_n(y^n, \mathbf{x}^n) = \prod_{t=1}^n x_{y_t,t}$. Entonces, dadas las expresiones presentadas en el Lema 5.3 tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{S_n(Q', \mathbf{x}^n)}{S_n(P, \mathbf{x}^n)} &= \frac{\sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} S_n(y^n, \mathbf{x}^n) \left(\prod_{t=1}^n Q'_{y_t,t}(\mathbf{x}^{t-1}) \right)}{\sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} S_n(y^n, \mathbf{x}^n) p_n(y^n)} \\
&\leq \max_{y^n : S_n(y^n, \mathbf{x}^n) > 0} \frac{S_n(y^n, \mathbf{x}^n) \prod_{t=1}^n Q'_{y_t,t}(\mathbf{x}^{t-1})}{S_n(y^n, \mathbf{x}^n) p_n(y^n)} \qquad \text{(por el Lema 5.2)} \\
&= \max_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \frac{\prod_{t=1}^n Q'_{y_t,t}(\mathbf{x}^{t-1})}{p_n(y^n)} \\
&\leq \max_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\prod_{t=1}^n Q_{y_t,t}(\mathbf{x}^{t-1})}{p_n(y^n)}.
\end{aligned}$$

□

Definición 5.2. Dada una estrategia de inversión Q, decimos que esta es *estática* si $\mathbf{Q}_t(\mathbf{x}^{t-1}) = \mathbf{Q}_t \in \mathcal{D}$ para cada $t = 1, .., n$. Es decir, la distribución del capital en cada momento no depende del comportamiento previo del mercado.

Dado este resultado, se deduce entonces el siguiente teorema que nos muestra la relación entre el factor de riqueza minimax y el arrepentimiento minimax de los pronosticadores.

Teorema 5.2. *Sea $\mathcal{Q}$ una clase de estrategias de inversión estáticas, y sea $\mathcal{F}$ la clase de los pronosticadores que se obtienen de las estrategias de $\mathcal{Q}$. Entonces*

$$W_n(\mathcal{Q}) = V_n(\mathcal{F}).$$

Es mas, la estrategia de inversión óptima minimax viene definida por

$$P^*_{j,t}(\mathbf{x}^{t-1}) = \frac{\sum_{y^{t-1} \in \mathcal{Y}^{t-1}} p^*_t(j|y^{t-1}) p^*_{t-1}(y^{t-1}) \left(\prod_{s=1}^{t-1} x_{y_s,s} \right)}{\sum_{y^{t-1} \in \mathcal{Y}^{t-1}} p^*_{t-1}(y^{t-1}) \left(\prod_{s=1}^{t-1} x_{y_s,s} \right)},$$

donde p^* es el pronosticador de la máxima probabilidad normalizada

$$p^*_n(y^n) = \frac{\sup_{Q \in \mathcal{Q}} \prod_{t=1}^n Q_{y_t,t}}{\sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \prod_{t=1}^n Q_{y_t,t}}.$$

Demostración. Gracias al Lema 5.1 tenemos que $W_n(\mathcal{Q}) \geq V_n(\mathcal{F})$. Probemos entonces la otra desigualdad. Por el Teorema 4.1 habíamos visto que el pronosticador de la máxima probabilidad normalizada p^* es óptimo minimax para la clase $\mathcal{F}$, es decir

$$\max_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \ln \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\prod_{t=1}^n Q_{y_t,t}}{p^*_n(y^n)} = V_n(\mathcal{F}).$$

Sea P^* la estrategia de inversión que se obtiene a partir del pronosticador minimax p^* para $\mathcal{Q}$. Por el Teorema 5.1 deducimos que

$$W_n(\mathcal{Q}) \leq \sup_{\mathbf{x}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ln \frac{S_n(Q, \mathbf{x}^n)}{S_n(P^*, \mathbf{x}^n)} \leq \max_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ln \frac{\prod_{t=1}^n Q_{y_t,t}}{p^*_n(y^n)} = V_n(\mathcal{F}).$$

□

Si volvemos a la estrategia de inversión de rebalanceo de carteras, del Teorema 5.2 junto a la extensión al caso general que mostramos tras el Teorema 4.2, obtenemos que el factor de riqueza logarítmica minimax sigue un comportamiento que toma la expresión:

$$W_n(\mathcal{Q}) = \frac{m-1}{2}\ln n + \ln\frac{\Gamma(1/2)^m}{\Gamma(m/2)} + o(1).$$

Esto nos muestra que el factor de riqueza que alcanza la estrategia de inversión óptima minimáx dada por el Teorema 5.2 se queda a un factor $n^{(m-1)/2}$ de la mejor estrategia de carteras rebalanceadas posible sea cual sea el comportamiento del mercado.

5.4 La cartera universal

Como ya mencionamos en el capítulo anterior, la solución minimax no es alcanzable en la práctica, por lo que vamos a tratar de explorar otras formas de inversión basadas en los pronosticadores mixtos.

Por simplificar, vamos a restringirnos a la clase de carteras rebalanceadas, ya que por lo argumentado, estas muestran ser un buen candidato dada la aleatoriedad del comportamiento del mercado. Cada estrategia Q viene entonces determinada por un vector $\mathbf{B} = (B_1, ..., B_m)$. La estrategia de la *cartera universal* que aquí presentamos viene dada por:

$$P_{j,t}(\mathbf{x}^{t-1}) = \frac{\int_{\mathcal{D}} B_j S_{t-1}(\mathbf{B}, \mathbf{x}^{t-1})\mu(\mathbf{B})\mathrm{d}\mathbf{B}}{\int_{\mathcal{D}} S_{t-1}(\mathbf{B}, \mathbf{x}^{t-1})\mu(\mathbf{B})\mathrm{d}\mathbf{B}} \tag{5.4.1}$$

para $j = 1, ..., m$ y $t = 1, ..., n$, donde μ representa una función de densidad sobre $\mathcal{D}$. Es decir, la cartera universal es una ponderación de las estrategias de $\mathcal{Q}$, que se pesan según su rendimiento previo. Esta estrategia de inversión, no es ni mas ni menos que la que se obtiene a partir del pronosticador mixto, ya sea el de Laplace si μ se trata de la función de densidad normal, o el de Krichervsky-Trofimov si es la de Dirichlet(1/2,...,1/2).

El factor de riqueza que se obtiene a través de esta estrategia es simplemente la media ponderada de las que han obtenido cada estrategia individualmente. Esto se ve fácilmente a partir de

$$\begin{aligned}
S_n(P, \mathbf{x}^n) &= \prod_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{j,t}P_{j,t}(\mathbf{x}^{t-1}) \\
&= \prod_{t=1}^{n}\frac{\int_{\mathcal{D}}\sum_{j=1}^{m} x_{j,i}B_j S_{t-1}(\mathbf{B}, \mathbf{x}^{t-1})\mu(\mathbf{B})\mathrm{d}\mathbf{B}}{\int_{\mathcal{D}} S_{t-1}(\mathbf{B}, \mathbf{x}^{t-1})\mu(\mathbf{B})\mathrm{d}\mathbf{B}} \\
&= \prod_{t=1}^{n}\frac{\int_{\mathcal{D}} S_t(\mathbf{B}, \mathbf{x}^{t})\mu(\mathbf{B})\mathrm{d}\mathbf{B}}{\int_{\mathcal{D}} S_{t-1}(\mathbf{B}, \mathbf{x}^{t-1})\mu(\mathbf{B})\mathrm{d}\mathbf{B}} \\
&= \int_{\mathcal{D}} S_n(\mathbf{B}, \mathbf{x}^n)\mu(\mathbf{B})\mathrm{d}\mathbf{B}
\end{aligned}$$

debido a que el producto es telescópico con $S_0 \equiv 1$. Si aproximamos la integral por una suma de Riemann vemos que

$$S_n(P, \mathbf{x}^n) \approx \sum_i Q_i S_n(\mathbf{B}_i, \mathbf{x}^n),$$

donde siendo Δ_i los elementos de una partición finita del símplex $\mathcal{D}$, asumimos que $\mathbf{B}_i \in \Delta_i$ y $Q_i = \int_{\Delta_i}\mu(\mathbf{B})\mathrm{d}\mathbf{B}$. Por lo tanto, la estrategia divide el capital inicial en las estrategias de carteras rebalanceadas $\mathbf{B}_i$ de acuerdo a las proporciones Q_i. Es decir, lo que hace esta estrategia es básicamente aplicar una estrategia de compra y espera sobre todas las estrategias de rebalanceo de cartera.

Teorema 5.3. *Sea μ la función de densidad uniforme sobre el símplex $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^m$, entonces el factor de riqueza que alcanza la cartera universal cumple que*

$$\sup_{x^n} \sup_{B \in \mathcal{D}} \ln \frac{S_n(B, x^n)}{S_n(P, x^n)} \leq (m-1)\ln(n+1).$$

En el caso en que la función de densidad sea la de Dirichlet(1/2,...,1/2),

$$\sup_{x^n} \sup_{B \in \mathcal{D}} \ln \frac{S_n(B, x^n)}{S_n(P, x^n)} \leq \frac{m-1}{2} \ln n + \ln \frac{\Gamma(1/2)^m}{\Gamma(m/2)} + \frac{m-1}{2} \ln 2 + o(1).$$

Vemos que con la segunda opción se obtiene un factor de riqueza logarítmico en el peor de los casos que se queda solo a una constante de la estrategia óptima minimáx.

Demostración. Cada estrategia de inversión de rebalanceo de cartera dada por $\mathbf{B}$ viene dada a partir del pronosticador constante $p^{\mathbf{B}}$, que asigna la probabilidad

$$p_n^{\mathbf{B}}(y^n) = B_1^{n_1} \cdots B_m^{n_m}$$

a cada secuencia y^n en el que la frecuencia del resultado j es n_j ($j = 1, ..., m$). Por el Lema 5.3 tenemos que el factor de riqueza obtenido por dicha estrategia es

$$S_n(\mathbf{B}, \mathbf{x}^n) = \sum_{y^n} \left(\prod_{t=1}^{n} x_{y_t,t} \right) p_n^{\mathbf{B}}(y^n).$$

Dado que como hemos dicho, el factor de riqueza que alcanza la cartera universal es la media ponderada de los que obtiene cada estrategia de $\mathcal{Q}$, tenemos que

$$\begin{aligned} S_n(P, \mathbf{x}^n) &= \int_{\mathcal{D}} S_n(\mathbf{B}, \mathbf{x}^n) \mu(\mathbf{B}) \mathrm{d}\mathbf{B} \\ &= \sum_{y^n} \left(\prod_{t=1}^{n} x_{y_t,t} \right) \int_{\mathcal{D}} p_n^{\mathbf{B}}(y^n) \mu(\mathbf{B}) \mathrm{d}\mathbf{B}. \end{aligned}$$

Es decir, que la estrategia de la cartera universal P viene dada por el pronosticador mixto

$$p_n(y^n) = \int_{\mathcal{D}} p_n^{\mathbf{B}}(y^n) \mu(\mathbf{B}) \mathrm{d}\mathbf{B}.$$

Por último, debido al Teorema 5.1,

$$\sup_{\mathbf{x}^n} \sup_{\mathbf{B} \in \mathcal{D}} \ln \frac{S_n(\mathbf{B}, \mathbf{x}^n)}{S_n(P, \mathbf{x}^n)} \leq \max_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{\mathbf{B} \in \mathcal{D}} \ln \frac{p_n^{\mathbf{B}}(y^n)}{p_n(y^n)}.$$

Esta cota, que consiste en el peor arrepentimiento logarítmico posible para el pronosticador mixto, ya la habíamos estudiado en el capítulo anterior.

El primero de los resultados lo obtenemos si trabajamos con la función de densidad normal μ, y aplicamos el Teorema 4.4 si $m = 2$ o el 4.5 para su extensión a $m \geq 2$. El segundo lo obtenemos si trabajamos con la función de densidad de Dirichlet(1/2,...,1/2), y aplicamos las cotas obtenidas en la Sección 4.7. □

5.5 La estrategia de inversión EG

Dada la expresión que toma la estrategia de la cartera universal, la integral sobre un espacio símplex de dimensión m crea complicaciones debido a que su coste computacional crece exponencialmente. Es por esto que vamos a tratar de presentar otra estrategia que no presente dicho problema, y que además su coste computacional es lineal con m. A esta estrategia la llamamos *estrategia de inversión EG*, que invierte en cada periodo t a partir de la distribución dada del vector $\mathbf{P}_t = (P_{1,t}, ..., P_{m,t})$, empezando con $\mathbf{P}_1 = (1/m, ..., 1/m)$ y definiéndose de forma recursiva,

$$P_{i,t} = \frac{P_{i,t-1} \exp(\eta(x_{i,t-1}/(\mathbf{P}_{t-1} \cdot \mathbf{x}_{t-1}))}{\sum_{j=1}^{m} P_{j,t-1} \exp(\eta(x_{j,t-1}/(\mathbf{P}_{t-1} \cdot \mathbf{x}_{t-1}))}$$

para $i = 1, ..., m$ y $t = 2, 3, ...$ Esto resulta ser un caso particular del pronosticador que hace uso del gradiente de la pérdida

$$P_{i,t} = \frac{P_{i,t-1} \exp(\eta \nabla l_{t-1}(\mathbf{P}_{t-1})_i)}{\sum_{j=1}^{m} P_{j,t-1} \exp(\eta \nabla l_{t-1}(\mathbf{P}_{t-1})_j)}$$

donde la función de pérdida es $l_{t-1}(\mathbf{P}_{t-1}) = -\ln \mathbf{P}_{t-1} \cdot \mathbf{x}_{t-1}$.

Teorema 5.4. *Suponiendo que existen dos constantes positivas tales que para todos los componentes de los vectores de mercado, $c < x_{i,t} < C$. Entonces el peor factor de riqueza logarítmica posible de la estrategia de inversión EG con $\eta = (c/C)\sqrt{(8 \ln m)/n}$ está acotado por*

$$\frac{\ln m}{\eta} + \frac{n\eta}{8}\frac{C^2}{c^2} = \frac{C}{c}\sqrt{\frac{n}{2}\ln m}.$$

Demostración. El peor factor de riqueza logarítmica posible es

$$\max_{\mathbf{x}^n} \max_{\mathbf{B} \in \mathcal{D}} \ln \frac{\prod_{t=1}^{n} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}_t}{\prod_{t=1}^{n} \mathbf{P}_t \cdot \mathbf{x}_t},$$

donde si usamos $\ln(1 + u) \leq u$, entonces

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\prod_{t=1}^{n} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}_t}{\prod_{t=1}^{n} \mathbf{P}_t \cdot \mathbf{x}_t} &= \sum_{t=1}^{n} \ln \left(1 + \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{P}_t) \cdot \mathbf{x}_t}{\mathbf{P}_t \cdot \mathbf{x}_t}\right) \\
&\leq \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{(B_i - P_{i,t}) x_{i,t}}{\mathbf{P}_t \cdot \mathbf{x}_t} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} B_j \frac{x_{i,t}}{\mathbf{P}_t \cdot \mathbf{x}_t} - \sum_{i=1}^{m} P_{i,t} \frac{x_{i,t}}{\mathbf{P}_t \cdot \mathbf{x}_t} \right).
\end{aligned}$$

Usando la notación

$$l'_{i,t} = \frac{C}{c} - \frac{x_{i,t}}{\mathbf{P}_t \cdot \mathbf{x}_t}$$

por las hipótesis tenemos que $l'_{i,t} \in [0, C/c]$ y podemos reescribir la expresión como

$$\ln \frac{\prod_{t=1}^{n} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}_t}{\prod_{t=1}^{n} \mathbf{P}_t \cdot \mathbf{x}_t} \leq \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} P_{i,t} l'_{i,t} - \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} B_i l'_{i,t}.$$

Dado que esto es una expresión lineal de $\mathbf{B}$, alcanza un máximo en alguno de los extremos del símplex $\mathcal{D}$, por lo tanto

$$\max_{\mathbf{B}\in\mathcal{D}} \ln \frac{\prod_{t=1}^{n} \mathbf{B}\cdot\mathbf{x}_t}{\prod_{t=1}^{n} \mathbf{P}_t\cdot\mathbf{x}_t} \leq \sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} P_{i,t} l'_{i,t} - \min_{j=1,\ldots,m} \sum_{t=1}^{n} l'_{j,t}.$$

No olvidemos que

$$P_{i,t} = \frac{w_{i,t-1}}{W_{t-1}} = \frac{\exp(\eta \sum_{s=1}^{t-1}(x_{i,s}/\mathbf{P}_s\cdot\mathbf{x}_s))}{\sum_{j=1}^{m}\exp(\eta\sum_{s=1}^{t-1}(x_{j,s}/\mathbf{P}_s\cdot\mathbf{x}_s))} = \frac{\exp(-\eta\sum_{s=1}^{t-1} l'_{i,s})}{\sum_{j=1}^{m}\exp(-\eta\sum_{s=1}^{t-1} l'_{j,s})}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ son las predicciones del pronosticador de peso ponderado exponencialmente aplicado a la función de pérdida lineal que toma valores en $[0, C/c]$. Entonces, el arrepentimiento

$$\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} P_{i,t} l'_{i,t} - \min_{j=1,\ldots,m} \sum_{t=1}^{n} l'_{j,t}$$

se puede acotar gracias al Teorema 2.2 reescalando la función de pérdida. □

Mencionar que en el caso de no conocer los valores de c y C, se puede hacer uso de los pronosticadores dependientes del tiempo.

5.6 Inversión con información adicional

Al igual que desarrollamos en la Sección 4.9, cabe la posibilidad de querer hacer uso de información adicional a la hora de considerar las estrategias de inversión, y no solo basarnos en los resultados previos del mercado y comparar entre estrategias de una clase dada. Es posible por ejemplo en la situación en la que nos encontramos, que el precio de un activo o algún suceso político o social afecte directa o indirectamente al de otro, por lo que cabe considerar esa información adicional de la que disponemos.

El modelo entonces es el siguiente. Antes de realizar sus inversiones en un periodo t, el inversor tiene acceso a la información adicional z_t que proviene de un conjunto $\mathcal{Z} = \{1, \ldots, K\}$. Una estrategia de inversión con información adicional es una secuencia de funciones $\mathbf{Q}_t : \mathbb{R}_+^{t-1} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{D}$, $t = 1, \ldots, n$. De esta forma, en el momento t tras ver la información adicional z_t la estrategia conforma la cartera dada por $\mathbf{Q}_t(\mathbf{x}^{t-1}, z_t)$. Si empezamos con una unidad de capital, tras n periodos de inversión el capital acumulado (o factor de riqueza) pasa a ser

$$S_n(Q, \mathbf{x}^n, z^n) = \prod_{t=1}^{n} \mathbf{x}_t \cdot \mathbf{Q}_t(\mathbf{x}^{t-1}, z_t).$$

Como clase de referencia frente a la que comparamos nuestra estrategia de inversión consideramos la clase de estrategias de inversión estáticas. Sean $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_K$ bases de clases de estrategias de inversión estáticas, y sean $Q^{(1)} \in \mathcal{Q}_1, \ldots, Q^{(K)} \in \mathcal{Q}_K$ estrategias arbitrarias. Las clases de estrategias de inversión que consideramos vienen expresadas por

$$\mathbf{Q}_t(\mathbf{x}^{t-1}, z_t) = \mathbf{Q}^{z_t}_{\overline{n}_{z_t}}$$

donde $\mathbf{Q}_t^j \in \mathcal{D}$ denota a la cartera de la estrategia $Q^{(j)} \in \mathcal{Q}_j$ en el periodo t siendo $\overline{n}_j$ la longitud de la secuencia de periodos $s < t$ tales que $z_s = j$ para $j = 1, \ldots, K$. Es decir, que la estrategia frente a la que nos comparamos es la que asigna la estrategia $Q^{(j)}$ cuando aparece la información adicional j.

Continuando con la aplicación de la Sección 4.9, tomamos las clases de pronosticadores estáticos $\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_k$ inducidos por las estrategias de inversión $\mathcal{Q}_1, ..., \mathcal{Q}_k$. Sean $q_n^{(1)}, ..., q_n^{(K)}$ los pronosticadores que alcanzan el peor arrepentimiento posible de cada clase, es decir

$$V_n(q_n^{(i)}, \mathcal{G}_j) = \sup_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{g^{(j)} \in \mathcal{G}_j} \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{g_t^{(j)}(y_t)}{q_t^{(j)}(y_t|y^{t-1})}.$$

Entonces, si definimos el pronosticador con información adicional

$$p_t(y|y^{t-1}, z_t) = q_{t_{z_t}}^{(z_t)}(y|\overline{y}_{z_t}^t)$$

inducimos finalmente la estrategia de inversión con información adicional $\mathbf{P}_t(\mathbf{x}^{t-1}, z_t)$ donde sus componentes vienen dados por

$$P_{j,t}(\mathbf{x}^{t-1}, z_t) = \frac{\sum_{y^{t-1} \in \mathcal{Y}^{t-1}} p_s(j|y^{s-1}, z_s) \prod_{s=1}^{t-1}(x_{y_s,s} p_s(y_s|y^{s-1}, z_s))}{\sum_{y^{t-1} \in \mathcal{Y}^{t-1}} \prod_{s=1}^{t-1}(x_{y_s,s} p_s(y_s|y^{s-1}, z_s))}. \tag{5.6.1}$$

Teorema 5.5. *Para cualquier secuencia de información adicional $z_1, ..., z_n$, la estrategia de inversión dada por 5.6.1 presenta un factor de riqueza logarítmico en el peor de los casos acotado por*

$$\sup_{x^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ln \frac{S_n(Q, x^n, z^n)}{S_n(P, x^n, z^n)} \leq \sum_{j=1}^{K} V_{\bar{n}_j}(q_n^{(j)}, \mathcal{G}_j).$$

Demostración. Aplicando el Teorema 5.1

$$\sup_{\mathbf{x}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ln \frac{S_n(Q, \mathbf{x}^n, z^n)}{S_n(P, \mathbf{x}^n, z^n)} \leq \max_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ln \frac{\prod_{t=1}^{n} Q_{y_t,t}(\mathbf{x}^{t-1}, z^n)}{p_n(y^n, z^n)}.$$

Este término se puede reescribir gracias a la notación que hemos utilizado hasta ahora como

$$\max_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{Q_{y_t,t}(\mathbf{x}^{t-1}, z^n)}{p_n(y^n, z^n)} = \max_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{f_t(y_t|y^{t-1}, z_t)}{p_t(y_t|y^{t-1}, \bar{y}_{z_t}^t)}.$$

Y gracias a que por el Lema 4.9

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{f_t(y_t|y^{t-1}, z_t)}{p_t(y_t|y^{t-1}, \bar{y}_{z_t}^t)} \leq \sum_{j=1}^{K} V_{\bar{n}_j}(q^{(j)}, \mathcal{G}_j)$$

se deduce la expresión deseada teniendo en cuenta que $q_n^{(1)}, ..., q_n^{(K)}$ son los pronosticadores que alcanzan el peor arrepentimiento posible de cada clase. □

Si las clases base son todas clases de rebalanceo de carteras y los pronosticadores $q^{(j)}$ son pronosticadores mixtos, entonces el pronosticador toma la forma

$$P_{j,t}(\mathbf{x}^{t-1}, z_t) = \frac{\int_{\mathcal{D}} B_j S_{\overline{n}_{z_t}}(\mathbf{B}, \overline{\mathbf{x}}_{z_t}^{t-1}) \mu(\mathbf{B}) d\mathbf{B}}{\int_{\mathcal{D}} S_{\overline{n}_{z_t}}(\mathbf{B}, \overline{\mathbf{x}}_{z_t}^{t-1}) \mu(\mathbf{B}) d\mathbf{B}} \tag{5.6.2}$$

para $j = 1, ..., m$ y $t = 1, ..., n$, donde $\overline{\mathbf{x}}_j^{t-1}$ es la subsucesión de la sucesión del comportamiento del mercado $\mathbf{x}^{t-1}$ dada por los momentos $s < t$ donde $z_s = j$. En este caso, si combinamos el Teorema 5.5 con el 5.3 llegamos al corolario siguiente.

Corolario 5.1. *Dado el pronosticador definido por 5.6.2 y trabajando con la función de densidad de Dirichlet*$(1/2, ..., 1/2)$*. Sea* $\mathcal{Q}$ *la clase de estrategias de inversión con información adicional tales que las clases base* $\mathcal{Q}_1, ..., \mathcal{Q}_K$ *coinciden todas con la clase de rebalanceo de carteras. Entonces, sea cual sea la secuencia de información adicional, el factor de riqueza logarítmico en el peor de los casos respecto a la clase* $\mathcal{Q}$ *cumple*

$$\sup_{\boldsymbol{x}^n} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ln \frac{S_n(Q, \boldsymbol{x}^n, z^n)}{S_n(P, \boldsymbol{x}^n, z^n)} \leq \frac{K(m-1)}{2} \ln \frac{n}{K} + K \ln \frac{\Gamma(1/2)^m}{\Gamma(m/2)} + \frac{K(m-1)}{2} \ln 2 + o(1).$$

5.7 Conclusiones

Se han expuesto a lo largo de este último capítulo, diversas estrategias de inversión, en las cuales hemos logrado acotar de una forma u otra los factores de riqueza en el peor de los casos, incluso para cuando hemos hecho uso de información adicional a la hora de realizar las inversiones. Cabe observar cómo los resultados a los que se ha llegado recogen algunas de las ideas principales de la inversión a largo plazo cuando uno quiere evitar las pérdidas en la medida de lo posible, como es la diversificación. También se ha visto que las estrategias que mejor rendimiento obtienen a la larga son una especie de carteras rebalanceadas. Dadas las expresiones de las estrategias de inversión a las que se han llegado, uno se pregunta si es posible que tras programar alguna de estas estrategias, se obtienen buenos resultados en la práctica.

Hoy en día existen muchas empresas que se dedican a este cometido, las cuales tratan de ganar al mercado (i.e, obtener rentabilidades superiores a las del mercado en su totalidad), alocando el capital del que disponen según sus estudios de los riegos y de los potenciales beneficios.

Como hemos visto en varios de los resultados a los que hemos llegado, para ser capaz de realizar estos estudios muchas veces nos es necesario estimar una cota para los valores que van a tomar los activos, o hacer ciertas suposiciones sobre el comportamiento que se espera de los resultados, y es aquí, donde el estadístico Nassim Taleb [8] expone los límites en nuestra capacidad de predicción, ya que son aquellos sucesos que no se ajustan a esos esquemas que tenemos formados, los que más repercusiones tienen y los que denomina "Cisnes Negros". También expone las barreras con las que nos encontramos a la hora de basar nuestras predicciones del futuro en el pasado, ya sea por la dificultad a la hora de entender las verdaderas relaciones causa-efecto de nuestro entorno, o por la auténtica aleatoriedad de lo que nos rodea. Muchas veces, las estrategias más simples obtienen mejores resultados que aquellas excesivamente sofisticadas. Es por esto que si han de usarse este tipo de estrategias en el mundo real, se ha de proceder con cautela.

Bibliografía

[1] N. Cesa-Bianchi y G. Lugosi. *Prediction, learning, and games*. Cambridge University Press, 2006.

[2] V.Vovk. A game of prediction with expert advice. *Journal of Computer and System Sciences*. 56(2):153–173, 1998.

[3] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York, 1995.

[4] J. Galambos. *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. R.E. Kreiger, Malabar, FL,1987.

[5] Q. Xie y A. Barron. Asymptotic minimax loss for data compression, gambling, and prediction. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46:431–445, 2000.

[6] F.M.J. Willems, Y.M. Shtarkov, y T.J. Tjalkens. The context-tree weighting method: Basic properties. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41:653–664, 1995.

[7] R.M. Dudley. Central limit theorems for empirical measures. *Annals of Probability*, 6:899–929, 1978.

[8] N. N. Taleb, *The Black Swan*. Penguin Books, 2008.