Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Algunos problemas lineales de interpolación en clases de funciones diferenciables o analíticas

Autor: Roberto Lobón Vecín

Tutor/es: Javier Sanz Gil

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi familia por haberme dado la oportunidad de poder estudiar esta carrera y por haberme apoyado en cada momento que lo necesitaba.
También me gustaría mencionar a todas las nuevas amistades que hice en esta ciudad, con los cuales viví momentos increibles que nunca olvidaré. Al igual que los que siempre han permanecido a mi lado, ayudándome en todo lo que les fuese posible.
Por último, agradecer a mi tutor Javi Sanz por su implicación en el trabajo y por estar siempre dispuesto a ayudarme en las posibles dudas que haya tenido durante el trabajo.

Introducción

La memoria que presentamos tiene como objetivo la demostración de tres resultados clásicos del Análisis Funcional o Asintótico, los cuales son el Teorema de Borel, el Teorema de Ritt y la solución del problema de momentos de Stieltjes en el espacio de funciones de decrecimiento rápido con soporte contenido en $(0, \infty)$. A su vez, también probaremos que estos tres teoremas de sobreyectividad son equivalentes y daremos un marco general, en el contexto de la teoría de los espacios de Fréchet, que permitirá obtener estos tres resultados como casos particulares de un teorema de solubilidad de problemas de momentos generalizados. Este último se puede entender como una versión del teorema clásico del teorema de sobreyectividad de Eidelheit.

En este trabajo, se usan en gran medida los contenidos de las asignaturas "*Variable Compleja*" destacando las desigualdades de Cauchy para las derivadas, mencionadas en la proposición 2.12, el Teorema de Weierstrass, citado en el teorema 2.21 o el Teorema de holomorfía bajo el signo integral, que se usa en el teorema 2.28. Otra asignatura con gran importancia en la memoria es "*Análisis Matemático*", donde los contenidos de esta materia están presentes en el Teorema de Leibniz que podemos ver en el teorema 3.7 y el criterio M de Weierstrass, usado por ejemplo en el teorema 1.7. También se usa en la sección 4.2 que ciertos espacios que se imparten en la asignatura de "*Introducción a los espacios de Funciones*" son de Banach. Por último, es muy recomendable haber cursado la asignatura "*Funciones Generalizadas y sus aplicaciones*", ya que en esta materia se da lo que es el espacio de Schwartz, el espacio de funciones test, de distribuciones y de distribuciones temperadas, que serán de gran importancia en el capítulo 3 y el 4.

Esta memoria se divide en cuatro capítulos, cuyo contenido pasamos a describir. En el primero, se da una demostración del Teorema de Borel, para el cual la referencia fue el libro de C. Zuily, [4]. Este resultado prueba que cualquier serie de potencias centrada en 0, por simplicidad, es serie de Taylor de una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ adecuada.

En el segundo capítulo, se define lo que es el desarrollo asintótico de una función holomorfa en un abierto conexo de manera que 0 está en la frontera de este. Tras presentarse las propiedades más relevantes de este concepto, se demuestra el Teorema de Ritt, que dado un sector cualquiera del plano complejo con vértice en 0 garantiza la existencia de funciones holomorfas en el mismo y con desarrollo asintótico en 0 arbitrariamente prefijado. A su vez, también se demuestra que el Teorema de Borel presentado en el capítulo anterior y el Teorema de Ritt son equivalentes. En este capítulo, se usa el libro de R. B. Ash y W. P. Novinger [8] para todo lo relacionado a los resultados teóricos de Variable Compleja. El texto de R. Remmert [9] ha servido para elaborar todo lo que atañe al desarrollo asintótico de una función y sus propiedades, la prueba del Teorema de Ritt y cómo de este se puede deducir el teorema de Borel. Por último, se ha utilizado el libro de F. W. J. Olver [5] para probar el Teorema de Borel a partir del Teorema de Ritt.

En el tercer capítulo, se define la transformada de Fourier, se presenta el problema de momentos en intervalos generales de la recta y el problema de momentos de Stieltjes en el espacio de funciones de decrecimiento rápido con soporte contenido en $(0, \infty)$. A continuación, se resuelve el problema de momentos de Stieltjes en el subespacio del espacio de Schwartz formado por las funciones con soporte contenido en $(0, \infty)$, utilizando en el razonamiento el Teorema de Ritt. Por último, es sencillo deducir el Teorema de Borel a partir del problema de momentos de Stieltjes en el subespacio previamente mencionado, concluyendo con uno de los objetivos de la memoria. No se presenta una solución independiente del Problema de Momentos de Stieltjes porque la prueba que conocemos, que se puede encontrar en el artículo de A. J. Durán [1], resulta algo artificial, pero este problema será resuelto en el marco general expuesto en el siguiente capítulo. En este capítulo hemos usado el texto de J. Chung, S.-Y. Chung y D. Kim [6] para probar un lema que usaremos en la demostración de que la solución al Problema de Momentos de Stieltjes implica el Teorema de Ritt, para la cual seguimos el argumento de A. L. Durán y R. Estrada [2].

En el último capítulo se comienza presentando conceptos y algunos resultados relacionados con espacios vectoriales topológicos , donde fue de gran utilidad el libro de J. Horváth [7]. A continuación, se presentan un tipo particular de espacios vectoriales topológicos, los espacios de Fréchet, dando algunos ejemplos. Una vez presentados estos, añadimos algunos conceptos que se utilizarán en la prueba de la versión del teorema de Eidelheit y tras este damos algunos corolarios que se deducen de este resultado y concluimos probando el Teorema de Borel y resolviendo el problema de momentos de Stieltjes en el espacio de funciones de decrecimiento rápido con soporte contenido en $(0, \infty)$ a partir de este. En esta última sección, se sigue principalmente el artículo de S. A. Shkarin [10].

Capítulo 1

Teorema de Borel

En este capítulo abordaremos el primero de los tres resultados que probaremos. Este teorema es debido a Émile Borel (1871-1956) y para ello empezaremos definiendo una serie de conceptos que necesitaremos para entender el enunciado y la demostración de este.

Notación 1.1. Denotaremos por Ω a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.2. El soporte de una función continua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ está definido como

$$\operatorname{sop}(f) = cl_\Omega(\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}),$$

donde cl_Ω significa que se toma la adherencia en Ω.

Definición 1.3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Se define $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ como el espacio de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ y su soporte es compacto.

Ahora con estos dos conceptos estamos en condiciones de enunciar el Teorema de Borel, comenzando con un lema previo que necesitaremos en la demostración de este teorema.

Notación 1.4. Denotaremos por $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lema 1.5. *Sean $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de números complejos y $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con $sop(\varphi) \subseteq [-2, 2]$ tal que $\varphi \equiv 1$ si $|x| < 1$. Entonces existe una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ de números reales tal que si*

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

entonces para cada $0 \leq k \leq n - 1$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n}.$$

Demostración. Para probarlo utilizaremos la fórmula de Leibniz para las derivadas:

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}. \tag{1.1}$$

Sea k, $0 \leq k \leq n-1$, por (1.1) y la Regla de la Cadena se tiene que :

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(x) &= \frac{a_n}{n!}(x^n \varphi(\lambda_n x))^{(k)} = \frac{a_n}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x^n)^{(j)} \varphi^{(k-j)}(\lambda_n x) = \\ &= \frac{a_n}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n(n-1)\dots(n-j+1) x^{n-j} \lambda_n^{k-j} \varphi^{(k-j)}(\lambda_n x). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Como $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq [-2,2]$, entonces $\varphi^{(k-p)}(\lambda_n x) \equiv 0$ si $|\lambda_n x| > 2$, es decir, si $|x| > \frac{2}{|\lambda_n|}$ se deduce que $f_n^{(k)}(x) = 0$.

Entonces, se tiene lo siguiente:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| = \sup_{|x| \leq \frac{2}{|\lambda_n|}} |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{|a_n|}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-j)!} (\frac{2}{|\lambda_n|})^{n-j} |\lambda_n|^{k-j} \sup_{y\in[-2,2]} |\varphi^{(k-j)}(y)|. \tag{1.3}$$

Sea

$$M_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{y\in[-2,2]} |\varphi^{(j)}(y)|.$$

Como $M_n \geq \sum_{j=0}^{k} \sup_{y\in[-2,2]} |\varphi^{(j)}(y)|$, (1.3) queda así:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leq |a_n| \frac{M_n}{|\lambda_n|^{n-k}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{2^{n-j}}{(n-j)!}. \tag{1.4}$$

Para las siguientes desigualdades, nos basaremos en que $0 \leq k \leq n-1$.

1. $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ para j, $0 \leq j \leq k$.
   Como $j!$ y $(k-j)!$ son mayores o iguales que 1 entonces $\binom{k}{j} \leq k!$ y como $k \leq n-1$, $\binom{k}{j} \leq k! \leq (n-1)!$
2. Si $0 \leq j \leq n$, $\frac{2^{n-j}}{(n-j)!} \leq 2^{n-j}$.
3. Si suponemos que $|\lambda_n| \geq 1$ y $k \leq n-1$, se tiene que $|\lambda_n|^{n-k} \geq |\lambda_n|$ por lo que $\frac{1}{|\lambda_n|^{n-k}} \leq \frac{1}{|\lambda_n|}$.

Usando estas desigualdades en (1.4), obtenemos que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{|a_n| M_n \cdot 2^n \cdot n!}{|\lambda_n|}.$$

Si tomamos $|\lambda_n| \geq \text{máx}(1, |a_n|M_n \cdot 4^n \cdot n!)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, tenemos que si $0 \leq k \leq n-1$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n}. \tag{1.5}$$

$\square$

Observación 1.6. La existencia de una función φ que verifique las condiciones del lema anterior viene garantizada por el Lema de Urysohn en la versión $\mathscr{C}^\infty$. No obstante, vamos a dar un ejemplo:
Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

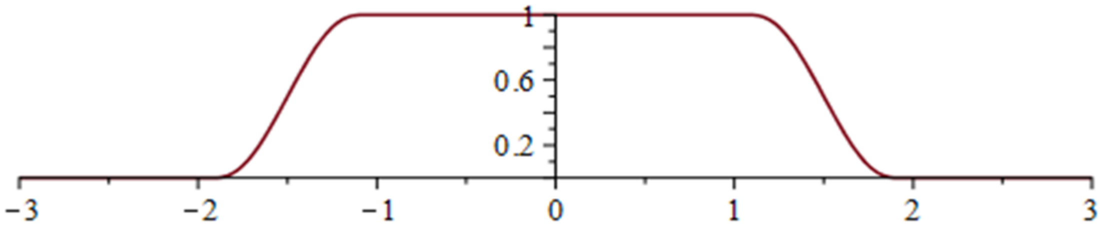
Observemos que f es continua en $x = 0$ y $e^{\frac{-1}{x}}$ tiene todas las derivadas laterales por la derecha nulas en $x = 0$, por lo que, como consecuencia directa del teorema del valor medio, se deduce que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ y que todas sus derivadas sucesivas evaluadas en 0 son nulas.
Ahora consideramos $g(x) = f(x+1)f(1-x)$ que es de clase $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ por ser producto de funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$. Además, g es no negativa en $\mathbb{R}$ ya que f es no negativa en $\mathbb{R}$. Una vez que tenemos g, definamos h como:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt.$$

Se tiene que como $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $h \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
Denotemos por A al área encerrada bajo la gráfica de g. Observemos que como $g(t) = 0$ si $|t| \geq 1$, entonces $h(x) = A$ si $x \geq 1$ y $h(x) = 0$ si $x \leq -1$.
Sea $F(x) = h(x+2)h(2-x)$, que es de clase $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ por el mismo motivo por el que g pertenece a $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Nótese que como $h(x) = 0$ si $x \leq -1$, se tiene que $F(x) = 0$ si $x \geq 3$ o $x \leq -3$ y como $h(x) = A$ si $x \geq 1$ tenemos que $F(x) = A^2$ si $x+2 \geq 1$ y $2-x \geq 1$, es decir, si $-1 \leq x \leq 1$.
Para conseguir la función deseada haremos un cambio de variable afín que consiste en trasladar afínmente el intervalo $(-3,-1)$ al $(-2,-1)$, el intervalo $(1,3)$ al $(1,2)$ y dividir todo entre A^2 para que en $[-1,1]$ valga 1. Es decir, consideramos la siguiente función definida a trozos:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2, \\ \frac{F(2x+1)}{A^2} & \text{si } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{F(x)}{A^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{F(2x-1)}{A^2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } 2 \leq x. \end{cases} \tag{1.6}$$

Esta función cumple todas las características que buscábamos y su gráfica tiene el siguiente aspecto:



Teorema 1.7 (de Borel). *Sea* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de números complejos. Entonces existe una función* $f \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ *tal que* $f^{(n)}(0) = a_n,$ *para todo* $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Si definimos f_n como en el lema anterior, tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalmente en $\mathbb{R}$, ya que hemos visto que si $k = 0,$ se tiene que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq 2^{-n}$, por lo que por el criterio M de Weierstrass se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Sea $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
Además también se tiene que si $k \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ converge normalmente en $\mathbb{R}$ ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n^{(k)}(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n^{(k)}(x).$$

Como en el segundo sumatorio, $k \leq n-1$, se tiene que $|f_n^{(k)}(x)| \leq 2^{-n}$ para todo $n \geq k+1$ y para cada $x \in \mathbb{R}$, luego $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ converge normalmente en $\mathbb{R}$ y por el criterio M de Weiertrass, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.
Por el teorema de derivación de series funcionales, $f \in \mathscr{C}^{k}(\mathbb{R})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo que $f \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ y $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$.
Calculemos $f^{(k)}(x)$ y evaluémoslo en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n^{(k)}(x) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{n!}(x^n\varphi(\lambda_n x))^{(k)} \\ + \frac{a_k}{k!}(x^k\varphi(\lambda_k x))^{(k)} + \sum_{n=k+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{a_n}{n!}\binom{k}{j}(x^n)^{(j)}\lambda_n^{k-j}\varphi^{(k-j)}(\lambda_n x). \end{aligned}$$

Si $n \geq k+1$ y $k \geq j$, entonces $n \geq j+1$, luego se tiene que $(x^n)^{(j)}$ evaluada en 0 es 0, para todo $n \geq k+1$, $j \leq k$, por lo que el tercer sumatorio se anula en $x = 0$. Llamemos $R(x)$ al tercer sumatorio, se tiene que $R(0) = 0$ y

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}\left[a_0\varphi(\lambda_0 x) + \ldots + \frac{a_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}\varphi(\lambda_{k-1}x)\right] + \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{a_k}{k!}x^k\varphi(\lambda_k x)\right] + R(x). \quad (1.7)$$

Sea $0 \leq j \leq k-1$, veamos que $\left.\frac{d^k}{dx^k}\left[x^j\varphi(\lambda_j x)\right]\right|_{x=0} = 0$.
Usando la fórmula de Leibniz se tiene que

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[x^j\varphi(\lambda_j x)\right] = \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(x^j)^{(l)}\lambda_j^{k-l}\varphi^{(k-l)}(\lambda_j x).$$

Evaluamos esta expresión en 0. Para ver el resultado lo dividiremos en dos casos:

1. Si $l < k$, entonces $\varphi^{(k-l)} \equiv 0$ si $|x| < 1$, ya que $\varphi \equiv 1$ si $|x| < 1$, por lo que $\varphi^{(k-l)}(0) = 0$.

2. Si $l = k$, se tiene que $\left.(x^j)^{(k)}\right|_{x=0} = \left.j(j-1)\ldots(j-k+1)x^{j-k}\right|_{x=0} = 0$ debido a que $j \leq k-1$.

Entonces obtenemos que para todo $j, 0 \leq j \leq k-1$, $\left.\frac{d^k}{dx^k}\left[x^j\varphi(\lambda_j x)\right]\right|_{x=0} = 0$, luego (1.7) evaluada en 0 queda así:

$$f^{(k)}(0) = \left.\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{a_k}{k!}x^k\varphi(\lambda_k x)\right]\right|_{x=0}.$$

Para acabar la demostración del teorema de Borel, veamos que $\left.\frac{a_k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left[x^k\varphi(\lambda_k x)\right]\right|_{x=0} = a_k$.
Usando de nuevo la fórmula de Leibniz, se tiene que:

$$\left.\frac{a_k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left[x^k\varphi(\lambda_k x)\right]\right|_{x=0} = \left.\frac{a_k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(x^k)^{(j)}\lambda_k^{k-j}\varphi^{(k-j)}(\lambda_k x)\right|_{x=0}. \quad (1.8)$$

Para evaluar (1.8) en $x = 0$, lo haremos en función del valor de j:

1. Si $j < k$, $k - j \geq 1$, por lo que $\varphi^{(k-j)} \equiv 0$ si $|x| < 1$ luego $\varphi^{(k-j)}(0) = 0$.

2. Si $j = k$, se tiene lo siguiente:

$$\left.\binom{k}{k}(x^k)^{(k)}\varphi(\lambda_k x)\right|_{x=0} = k(k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot \left.\varphi(\lambda_k x)\right|_{x=0},$$

como $\varphi \equiv 1$ si $|x| < 1$ entonces $\varphi(0) = 1$, por lo que (1.7) evaluada en 0 queda de la siguiente manera:

$$f^{(k)}(0) = \frac{a_k}{k!}k! = a_k,$$

quedando probado el resultado. □

Capítulo 2

Teorema de Ritt

El concepto de desarrollo asintótico de una función holomorfa en un punto de la frontera de su abierto de definición trata de dar sentido preciso a la posibilidad de aproximar dicha función en la cercanía del punto por las sumas parciales de una serie de potencias, incluso aunque dicha serie tenga radio de convergencia nulo.
Tras estudiar las principales propiedades de este concepto, este capítulo se dedicará a obtener el Teorema de Ritt, que asegura la posibilidad de construir funciones en sectores cualesquiera del plano complejo con desarrollo asintótico arbitrariamente prefijado en su vértice. Finalmente, se probará que este resultado y el Teorema de Borel, visto en el primer capítulo, son equivalentes.

2.1. Desarrollo asintótico de una función

En esta sección, G será un abierto conexo de $\mathbb{C}$ de manera que 0 es un punto de la frontera de G. La elección del punto se hace por conveniencia y no supone restricción alguna para los problemas que discutiremos.

Notación 2.1. En este capítulo, denotaremos por ∂G a la frontera de G.
Denotaremos por $\mathcal{H}(G)$ al espacio de las funciones complejas holomorfas en G.

Definición 2.2. Se dice que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es un desarrollo asintótico de una función $f \in \mathcal{H}(G)$ en $0 \in \partial G$ si para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que:

$$\lim_{z\to 0}(f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k) z^{-n} = 0. \tag{2.1}$$

En este caso, escribiremos $f \sim_G \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Observación 2.3. En la definición anterior, el límite anterior se puede escribir así: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z \in B(0,\delta) \cap G$, entonces $|f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k| < \varepsilon |z|^n$. Este hecho, relativo a la uniformidad del límite independientemente de la manera en que el punto se aproxime a 0, tendrá especial importancia en la observación 2.10.

Proposición 2.4. *Si $f \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, entonces $f + g \sim_G \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) z^n$. Además, si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda f \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n z^n$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}_0$, tenemos lo siguiente:

1. $\lim_{z\to 0} \frac{(f+g)(z) - \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) z^k}{z^n} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{z^n} + \lim_{z\to 0} \frac{g(z) - \sum_{k=0}^{n} b_k z^k}{z^n} = 0$, ya que $f \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Por lo que $f + g \sim_G \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) z^n$.

2. $\lim_{z\to 0} \frac{\lambda f(z) - \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k z^k}{z^n} = \lambda \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{z^n} = 0$, ya que $f \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Por lo que $\lambda f \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n z^n$.

$\square$

Notación 2.5. Denotaremos por $\mathscr{A}(G)$ al espacio vectorial formado por las funciones holomorfas en G que tienen desarrollo asintótico en 0.

Observación 2.6. Por el resultado anterior, tenemos que la aplicación $c_n : \mathscr{A}(G) \to \mathbb{C}$ definida como $c_n(f) = a_n$, si $f \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, es lineal para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Proposición 2.7. *Si $f \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, entonces $f \cdot g \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, siendo $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$, con $n \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. De (2.1), se tiene que $f \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es equivalente a que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, existe $f_n \in \mathcal{H}(G)$ tal que $\lim_{z\to 0, z\in G} f_n(z) = 0$ y $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + f_n(z) z^n$. Análogamente, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, existe $g_n \in \mathcal{H}(G)$ tal que $\lim_{z\to 0, z\in G} g_n(z) = 0$ y $g(z) =$

$\sum_{k=0}^{n} b_k z^k + g_n(z) z^n$.
Por lo tanto, multiplicando estas dos expresiones, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} f(z) \cdot g(z) &= (\sum_{k=0}^{n} a_k z^k)(\sum_{k=0}^{n} b_k z^k) + z^n (g_n(z) \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + f_n(z) \sum_{k=0}^{n} b_k z^k + f_n(z) g_n(z) z^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}) z^k + z^n (g_n(z) \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + f_n(z) \sum_{k=0}^{n} b_k z^k + f_n(z) g_n(z) z^n \\ &+ \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=k}^{n} a_j b_{n+k-j}) z^k) = \sum_{k=0}^{n} (\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}) z^k + z^n h_n(z), \end{aligned}$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $h_n(z) \to 0$ si $z \to 0, z \in G$ y se verifica que $h_n \in \mathcal{H}(G)$. Por lo tanto, $f \cdot g \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}) z^n$. □

Proposición 2.8. *Una función $f \in \mathcal{H}(G)$ tiene como máximo un desarrollo asintótico $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en 0, el cual viene dado por las siguientes fórmulas recursivas:*

$$a_0 = \lim_{z \to 0} f(z); \qquad a_n = \lim_{z \to 0} z^{-n} (f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k), \qquad n > 0. \tag{2.2}$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}(G), 0 \in \partial G$ y supongamos que $f \sim_G \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, es decir para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se verifica (2.1).

1. Si $n = 0$,
$$0 = \lim_{z \to 0} (f(z) - a_0) = \lim_{z \to 0} (f(z)) - a_0 \Rightarrow a_0 = \lim_{z \to 0} f(z).$$

2. Si $n > 0$,
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{z \to 0} (f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k) z^{-n} = \lim_{z \to 0} (f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k - a_n z^n) z^{-n} \\ &= \lim_{z \to 0} (f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k) z^{-n} - a_n \Rightarrow a_n = \lim_{z \to 0} (f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k) z^{-n}, \end{aligned}$$

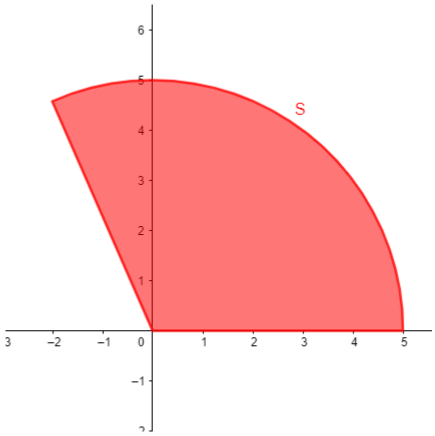
por lo que hemos probado la relación de recurrencia y que en caso de existir un desarrollo asintótico, este viene dado como se dice en el enunciado.
Por la unicidad del límite y por (2.2) tenemos la unicidad de los desarrollos asintóticos. □

Un tipo especial de abiertos conexos G que verifican que el $0 \in \partial G$ son los denominados como sectores circulares, los cuales procedemos a definir a continuación:

Definición 2.9. Sean $0 < r \leq \infty$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$. Se define el sector circular, o simplemente sector acotado, de radio r y ángulos α, β como:

$$S = S(r, \alpha, \beta) := \{z = |z|e^{i\theta} : 0 < |z| < r, \alpha < \theta < \beta\}.$$

Por ejemplo, $S(5, 0, \frac{2\pi}{3})$ es de la siguiente forma:

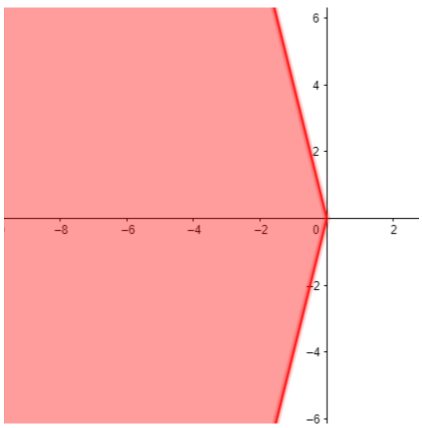


Si r=∞, entonces el sector circular también se llama sector no acotado.

Observación 2.10. La existencia de desarrollos asintóticos de una función f depende básicamente de la región G en la que estemos trabajando.
Por ejemplo, sea $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$, $z \neq 0$, que está claro que pertenece a $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$:

1. La función f no tiene desarrollo asintótico en 0 si tomamos $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. Por el contrario, si definimos $W_\eta := S(\infty, \frac{\pi}{2} + \eta, \frac{3\pi}{2} - \eta)$, $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, entonces $f \sim_{W_\eta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, donde $a_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.
   Observemos que W_η tiene la siguiente forma:



3. Si $\eta = 0$, entonces de nuevo f no admite desarrollo asintótico.

Veámoslo:

Demostración. 1. Basta observar que como f tiene una singularidad esencial en 0, no existe el límite de f cuando z tiende a 0, por lo tanto no se verifica lo indicado en la proposición 2.8. Por lo tanto, f no tiene desarrollo asintótico en $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. Sea η con $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$. Como $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, entonces $f \in \mathcal{H}(W_\eta)$.
   Por la proposición 2.8, tenemos que, en caso de que f tenga desarrollo asintótico se tiene que verificar que

$$a_0 = \lim_{z\to 0} f(z), \qquad a_n = \lim_{z\to 0} z^{-n}(f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k).$$

   Probemos que $a_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$ por inducción sobre n.

   a) Si $n = 0$, $a_0 = \lim_{z\to 0} \exp(\frac{1}{z}) = \lim_{r\to 0^+} \exp(\frac{1}{re^{i\theta}})$, $\frac{\pi}{2} + \eta < \theta < \frac{3\pi}{2} - \eta$.
   Veamos que se cumple que $\lim_{r\to 0^+} |\exp(\frac{1}{re^{i\theta}})| = 0$ uniformemente con respecto de θ en $(\frac{\pi}{2} + \eta, \frac{3\pi}{2} - \eta)$:

$$\lim_{r\to 0^+} |\exp(\frac{1}{re^{i\theta}})| = \lim_{r\to 0^+} \exp(\Re(\frac{1}{re^{i\theta}})) = \lim_{r\to 0^+} \exp(\frac{\Re(e^{-i\theta})}{r}).$$

   Observemos que $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$, luego $\Re(e^{i\theta}) = \Re(e^{-i\theta})$. Luego como $\frac{\pi}{2} + \eta < \theta < \frac{3\pi}{2} - \eta$, se tiene que $\Re(e^{i\theta}) = \cos(\theta) < \cos(\frac{\pi}{2} + \eta) < 0$.
   Entonces, $\exp(\frac{\Re(e^{-i\theta})}{r}) \leq \exp(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\eta)}{r})$ para cada $\theta \in (\frac{\pi}{2} + \eta, \frac{3\pi}{2} - \eta)$ y por el criterio del Sandwich, $\lim_{r\to 0^+} \exp(\frac{\Re(e^{-i\theta})}{r}) = 0$ uniformemente con respecto de θ en $(\frac{\pi}{2} + \eta, \frac{3\pi}{2} - \eta)$.

   b) Supongamos que $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$, veamos que $a_n = 0$. Tenemos que

$$a_n = \lim_{z\to 0} z^{-n}(\exp(\frac{1}{z}) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k) = \lim_{z\to 0} z^{-n} \exp(\frac{1}{z}) = \lim_{r\to 0^+} r^{-n} e^{-in\theta} \exp(\frac{1}{re^{i\theta}}),$$

   $\frac{\pi}{2} + \eta < \theta < \frac{3\pi}{2} - \eta$.
   Veamos que se verifica que $\lim_{r\to 0^+} |r^{-n} e^{-in\theta} \exp(\frac{1}{re^{i\theta}})| = \lim_{r\to 0^+} r^{-n} |\exp(\frac{e^{-i\theta}}{r})| = 0$ uniformemente con respecto de θ en $(\frac{\pi}{2} + \eta, \frac{3\pi}{2} - \eta)$.
   Haciendo las mismas operaciones que en a), tenemos que para cada $\theta \in (\frac{\pi}{2} + \eta, \frac{3\pi}{2} - \eta)$, $r^{-n} \exp(\frac{\Re(e^{i\theta})}{r}) \leq r^{-n} \exp(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\eta)}{r})$.

Como $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{-n}\exp(\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}+\eta)}{r}) = \lim\limits_{s\to\infty} s^n \exp(\cos(\dfrac{\pi}{2}+\eta)s) = 0$, tomando $s = \frac{1}{r}$, por el criterio del Sandwich tenemos que $\lim\limits_{r\to 0^+} r^{-n}\exp(\dfrac{\Re(e^{i\theta})}{r}) = 0$, uniformemente con respecto de θ en $(\frac{\pi}{2}+\eta, \frac{3\pi}{2}-\eta)$, es decir $a_n = 0$.

Por lo que por inducción se tiene que $a_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

3. Veremos que cuando $\eta = 0$, no se cumple ni siquiera que exista $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$.
Por la definición del límite, tenemos que probar que dado $1 > \varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que para todo $z \in B(0,r) \cap S(\infty, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ se verifica que $|f(z)| < \varepsilon$.
Sea $z = |z|e^{i\theta}$, se tiene que $|f(z)| = |\exp(\frac{1}{z})| = \exp(\Re(\frac{1}{z})) = \exp(\frac{\cos(\theta)}{|z|})$, luego para todo θ, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$:
$$|f(z)| < \varepsilon \Leftrightarrow \exp(\frac{\cos(\theta)}{|z|}) < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\cos(\theta)}{|z|} < \ln(\varepsilon) \Leftrightarrow |z| < \frac{\cos(\theta)}{\ln(\varepsilon)}. \tag{2.3}$$
Como $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, se tiene que $-1 \leq \cos(\theta) < 0$, pudiéndonos acercar a 0 todo lo que se quiera, por lo que no podemos encontrar un $r > 0$ que satisfaga (2.3) simultáneamente para cada $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.
Entonces no existe $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ y concluimos que f no tiene desarrollo asintótico en $S(\infty, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

□

2.2. Derivación de los desarrollos asintóticos

El objetivo de esta sección es establecer la estabilidad del desarrollo asintótico con respecto a la derivación, siempre y cuando se reduzca el sector de definición de la función derivada a un subsector propio del original. Este resultado será de utilidad más adelante.

Definición 2.11. Sean $S = S(r,\alpha,\beta)$ y $T = S(r,\gamma,\delta)$ dos sectores circulares en 0. Diremos que T es un subsector propio de S si $\{z = |z|e^{i\theta} : 0 < |z| \leq r, \gamma \leq \theta \leq \delta\} \subseteq S$. Si T es un subsector propio de S, lo denotaremos por $T \preceq S$.

Proposición 2.12 (Desigualdades de Cauchy para las derivadas). *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $f \in \mathcal{H}(U)$. Si $\bar{B}(z_0, r) \subseteq U$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que:*
$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup\{|f(w)| : |w - z_0| = r\}.$$

Lema 2.13. *Sean S y T dos sectores circulares de manera que $T \preceq S$. Supongamos que $g \in \mathcal{H}(S)$ verifica que $\lim\limits_{z\to 0, z\in S} g(z) = 0$. Entonces $\lim\limits_{z\to 0, z\in T} zg'(z) = 0$.*

Demostración. Sea r el radio del sector S. Entonces existe un $a > 0$ tal que para cada $z_0 \in T \cap B(0, \frac{r}{2})$ se tiene que $\bar{B}(z_0, a|z_0|) \subseteq S$. Esto se justificará en la observación 2.14. Por la Desigualdad de Cauchy para n=1, se tiene que

$$|g'(z_0)| \leq \frac{1}{a|z_0|} \sup\{|g(w)| : w \in S(z_0, a|z_0|)\},$$

es decir, para cada $z_0 \in T \cap B(0, \frac{r}{2})$, se tiene que:

$$a|z_0 g'(z_0)| \leq \sup\{|g(w)| : w \in S(z_0, a|z_0|)\}. \tag{2.4}$$

Como a es constante y por hipótesis $\lim\limits_{z \to 0, z \in S} g(z) = 0$, entonces se tiene que: $\lim\limits_{z \to 0, z \in T} \sup\{|g(w)| : w \in S(z, a|z|)\} = 0$, luego, por (2.4), $\lim\limits_{z \to 0, z \in T} zg'(z) = 0$. $\square$

Observación 2.14. Podemos calcular una constante a que verifique lo pedido en el anterior lema. Observemos que si encontramos un valor $a > 0$ tal que se verifique que $\bar{B}(z_0, a|z_0|) \subseteq S$ para los $z_0 = Re^{i\theta}$ tales que $R = \frac{r}{2}$, $\theta = \gamma$ o $\theta = \delta$ bastaría ya que si se cumplen para estos, para el resto también.

1. Si $\theta = \delta$, consideramos una bola de radio $a|z_0|$ de manera que a se coge para que sea tangente a la recta con ecuación $\theta = \beta$. Entonces, trazamos una perpendicular que pase por z_0. Luego tenemos un triángulo rectángulo con un ángulo de $\beta - \delta$ cuyo cateto opuesto mide $a|z_0|$ y la hipotenusa $|z_0|$, por lo que tenemos que $a < |\sin(\beta - \delta)|$.

2. Si $\theta = \gamma$, con una construcción análoga al caso 1, tenemos que $a < |\sin(\gamma - \alpha)|$

3. Si $R = \frac{r}{2}$, entonces también se tiene que cumplir que $a < \frac{r}{2}$ ya que en caso contrario, $\bar{B}(z_0, a|z_0|) \nsubseteq S$.

Por lo tanto, si cogemos un $a > 0$ que verifique que $a < \text{mín}\{|\sin(\beta - \delta)|, |\sin(\gamma - \alpha)|, \frac{r}{2}\}$, cumpliríamos lo pedido.

Teorema 2.15. *Sea $f \in \mathcal{H}(S)$ siendo $S = S(r, \alpha, \beta)$ un sector circular que verifica que $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Supongamos que $f \sim_S \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, entonces $f' \sim_T \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ para cada sector circular $T \preceq S$.*

Demostración. Como $f \sim_S \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, se puede deducir despejando de (2.1) que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ existe $f_n \in \mathcal{H}(S)$ tal que $\lim\limits_{z \to 0, z \in S} f_n(z) = 0$ y que $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k + f_n(z) z^n$.

Derivando esta expresión obtenemos que $f'(z) = \sum_{k=1}^{n} ka_k z^{k-1} + g_n(z)z^{n-1}$, donde $g_n(z) = zf_n'(z) + nf_n(z)$.

Como $\lim_{z\to 0, z\in S} f_n(z) = 0$, por el lema anterior tenemos que dado T un sector circular, con $T \preceq S$, $\lim_{z\to 0, z\in T} zf_n'(z) = 0$, por lo que $\lim_{z\to 0, z\in T} g_n(z) = 0$. Por lo tanto, concluimos que $f' \sim_T \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$. □

Corolario 2.16. *Sea $f \in \mathcal{H}(S)$ siendo S un sector circular tal que $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, entonces*

$$\lim_{z\to 0, z\in T} f^{(k)}(z) = k! a_k \tag{2.5}$$

para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y $T \preceq S$.

Demostración. Aplicando k veces el teorema anterior tenemos que

$$f^{(k)}(z) \sim_T \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1)a_n z^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} b_{n-k} z^{n-k}.$$

Por lo tanto, $\lim_{z\to 0, z\in T} f^{(k)}(z) = b_0 = k! a_k$. □

2.3. Teorema de Ritt

En esta sección veremos que, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es una serie de potencias arbitraria y S es un sector circular, podemos construir una función f de manera que $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

La idea de esta construcción es reemplazar la serie de potencias dada por una serie funcional que tenga la siguiente forma:

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z) z^n. \tag{2.6}$$

donde será de gran ayuda elegir los factores $f_n(z)$ de manera que:

- La serie (2.6) debe converger normalmente en los compactos de S.
- Fijado $n \in \mathbb{N}_0$, $\lim_{z\to 0} f_n(z) = 1$.

Comenzaremos probando un resultado auxiliar.

Lema 2.17. *Sea $w \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(w) > 0$, entonces $|1 - e^{-w}| \leq |w|$.*

Demostración. Sea $\gamma = [0, w]$ el segmento con punto origen 0 y punto final w y $f(z) = e^{-z}$, entonces por la regla de Barrow, $\int_\gamma f(z)dz = -(e^{-w} - 1) = 1 - e^{-w}$.
Se tiene que $|f(z)| \leq 1$ para cada $z \in \gamma^*$, por lo que:

$$|1 - e^{-w}| = |\int_\gamma f(z)dz| \leq \mathrm{long}(\gamma) = |w|.$$

□

Notación 2.18. Denotaremos a $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ como $\mathbb{C}^-$.

Veremos en el siguiente lema que las funciones f_n que buscamos son:

$$f_n(z) := 1 - \exp(\frac{-b_n}{\sqrt{z}}),$$

de manera que $b_n > 0$ y $\sqrt{z} = \exp(\frac{\log(z)}{2}) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^-)$, donde en log se toma la rama principal.

Lema 2.19. *Sea $S := S(r, -\pi + \varphi, \pi - \varphi)$, $0 < \varphi < \pi$ un sector circular en 0. Entonces la función $h(z) := 1 - \exp(\frac{-b}{\sqrt{z}})$, $b > 0$, es holomorfa en $\mathbb{C}^-$ y verifica lo siguiente:*

1. *Para cada $z \in S$ se tiene que*
$$|h(z)| \leq \frac{b}{|\sqrt{z}|}. \tag{2.7}$$

2. *Para cada $m \in \mathbb{N}_0$*
$$\lim_{z \in S, z \to 0} z^{-m}(1 - h(z)) = 0. \tag{2.8}$$

Demostración. La función h es holomorfa en $\mathbb{C}^-$ ya que $\sqrt{z}$ lo es y a continuación la componemos con $\frac{-b}{z}$ y $\exp(z)$, que son holomorfas en $\mathbb{C}^-$ y $\mathbb{C}$, respectivamente.
Sea $z \in S$, $z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $|\theta| < \pi - \varphi$ entonces $\frac{|\theta|}{2} < \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$. Como $\varphi > 0$, se tiene que $\frac{|\theta|}{2} < \frac{\pi}{2}$.
Dado que

$$w = \frac{b}{\sqrt{z}} = b \cdot \exp(\frac{-\log(z)}{2}) = b \cdot \exp(\frac{-\ln(|z|) + i\theta}{2}) = b \cdot \exp(\frac{-\ln(|z|)}{2}) \exp(\frac{i\theta}{2}),$$

se deduce que

$$\Re(w) = b \cdot \exp(\frac{-\ln(|z|)}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) > 0.$$

Por el lema anterior, se tiene que $|h(z)| = |1 - \exp(\frac{-b}{\sqrt{z}})| \leq \frac{b}{|\sqrt{z}|}$ para cada $z \in S$.
Por último, $z^{-m}(1 - h(z)) = z^{-m} \exp(\frac{-b}{\sqrt{z}})$, por lo que

$$|z^{-m}(1 - h(z))| = |z|^{-m} \exp(-b\Re(\frac{1}{\sqrt{z}})).$$

Como $z = |z|e^{i\theta}$, entonces $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{\frac{i\theta}{2}}$, lo que implica que:

$$|z|^{-m}\exp(-b\Re(\frac{1}{\sqrt{z}})) = |z|^{-m}\exp(\frac{-b}{\sqrt{|z|}}\Re(\exp(\frac{-i\theta}{2}))) = |z|^{-m}\exp(\frac{-b}{\sqrt{|z|}}\cos(\frac{\theta}{2})). \quad (2.9)$$

Observemos que si $|\theta| < \pi - \varphi$, se tiene que $\frac{|\theta|}{2} < \frac{\pi-\varphi}{2}$ luego como la función coseno es decreciente en $(0, \frac{\pi-\varphi}{2})$ y además es par, $\cos(\frac{\theta}{2}) = \cos(\frac{|\theta|}{2}) > \cos(\frac{\pi-\varphi}{2}) = \sin(\frac{\varphi}{2}) > 0$, por lo que debido a que $b > 0$, de (2.9) se deduce que:

$$|z|^{-m}\exp(\frac{-b}{\sqrt{|z|}}\cos(\frac{\theta}{2})) \leq |z|^{-m}\exp(\frac{-b}{\sqrt{|z|}}\sin(\frac{\varphi}{2})). \quad (2.10)$$

Para acabar, sea $t = \frac{b}{\sqrt{|z|}}$, entonces se tiene que si $z \to 0$, $t \to \infty$ por lo que para cada $m \in \mathbb{N}_0$, $b^{-2m}\lim_{t\to\infty} t^{2m}e^{-t\sin(\frac{\varphi}{2})} = 0$, ya que $\sin(\frac{\varphi}{2}) > 0$. Y por lo tanto, de aquí se deduce que $\lim_{z\in S, z\to 0} z^{-m}(1 - h(z)) = 0$. □

Definición 2.20. Un sector circular $S = S(r, \alpha, \beta)$ se llama propio si $\beta - \alpha < 2\pi$.

A continuación, vamos a enunciar el conocido como teorema de Weierstrass que vamos a usar en el teorema 2.22 y en el teorema 4.47.

Teorema 2.21 (De Weierstrass). *Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en Ω tal que $f_n \to f$ uniformemente en los compactos de Ω. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y además para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente en los compactos de Ω.*

Ahora estamos en condiciones de exponer y demostrar el resultado central de esta sección.

Teorema 2.22 (Teorema de Ritt). *Si S es un sector circular propio, entonces para cada serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ existe una función $f \in \mathcal{H}(S)$ tal que $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

Demostración. Para empezar, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $S = S(r, -\pi+\varphi, \pi-\varphi)$ con $0 < \varphi < \pi$, ya que si $z \to e^{i\gamma}z$ rota el sector S en un sector S^* y tengo una función $f^* \in \mathcal{H}(S^*)$ que satisface que $f^* \sim_{S^*} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\gamma n} z^n$ entonces $f(z) = f^*(e^{-i\gamma}z)$ cumple que $f \in \mathcal{H}(S)$ y además $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Veámoslo:

Como $f^* \sim_{S^*} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\gamma n} z^n$, tenemos que por (2.1) para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se cumple que $\lim_{z\to 0}(f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k e^{i\gamma k} z^k)z^{-n} = 0$. Nótese que como $f(z) = f^*(e^{-i\gamma}z)$, se tiene que $f(e^{i\gamma}z) =$

$f^*(z)$, luego si denoto $y = e^{i\gamma}z$, obtenemos que para cada $n \in \mathbb{N}_0$:

$$0 = \lim_{z\to 0}(f(e^{i\gamma}z) - \sum_{k=0}^{n} a_k e^{i\gamma k} z^k) z^{-n} = \lim_{y\to 0} \frac{f(y) - \sum_{k=0}^{n} a_k y^k}{y^n e^{-in\gamma}}.$$

Por lo tanto, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\lim_{y\to 0} \frac{f(y) - \sum_{k=0}^{n} a_k y^k}{y^n} = 0$, es decir, llegamos a que $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

A su vez también podemos suponer que S es un sector no acotado, es decir, que $r = \infty$, ya que si se cumple en $S = S(\infty, \alpha, \beta)$, se va a cumplir en cualquier $T = S(r, \alpha, \beta)$, $r < \infty$, ya que $T \subseteq S$.

Si $n \in \mathbb{N}_0$, entonces sea:

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{|a_n| n!} & \text{si } a_n \neq 0, \\ 0 & \text{si } a_n = 0. \end{cases}$$

Definamos ahora $f_n(z) := 1 - \exp(\frac{-b_n}{\sqrt{z}})$ y sea $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z) z^n$.

Por (2.7), se tiene que

$$|a_n f_n(z) z^n| \leq |b_n a_n z^{n-\frac{1}{2}}|, \; z \in S. \tag{2.11}$$

Notese que por la definición de b_n, tenemos que $|b_n a_n| \leq \frac{1}{n!}$, luego de (2.11) deducimos que $|a_n f_n(z) z^n| \leq |\frac{z^n}{n!}||z|^{-1/2}$.

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge normalmente en los compactos de $\mathbb{C}$, la serie que define a f converge normalmente en los compactos de S, ya que si K es un compacto contenido en S, existen $N > 0$ y $M > N$ tales que para cada $z \in K$, se tiene que $N \leq |z| \leq M$, por lo que $\frac{1}{\sqrt{M}} \leq |z|^{-1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$, y de aquí se deduce la convergencia normal de f en K.

Entonces por el criterio M de Weiestrass, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(z) z^n$ converge uniformemente hacia f en los compactos de S y como $f_n \in \mathcal{H}(S)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, por el teorema 2.21 se tiene que $f \in \mathcal{H}(S)$.

Para acabar, veamos que se cumple (2.1) para f y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Sea $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que :

$$\begin{aligned} z^{-n}(f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k) &= z^{-n}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(z) z^k) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k) \\ &= -\sum_{k=0}^{n} a_k (1 - f_k(z)) z^{-(n-k)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k f_k(z) z^{k-n}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

El primer sumando de (2.12) converge hacia 0 cuando z converge a 0 a través de S porque es una suma finita y cada sumando cumple (2.8). Para la segunda suma, tenemos que para cada $z \in S, |z| < 1$, se tiene que :

$$|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k f_k(z) z^{k-n}| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k f_k(z) z^{k-n}| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |z|^{k-n-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{|z|}}{1 - \sqrt{|z|}},$$

donde en la última igualdad hemos usado que la serie es una serie geométrica, luego esta suma también converge a 0 si z converge a 0 a través de S, por lo que se cumple (2.1) para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y concluimos que $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. $\square$

Una vez demostrado el Teorema de Ritt, vamos a dar una demostración del Teorema de Borel, presentado anteriormente, a partir del Teorema de Ritt, pero antes vamos a demostrar un lema que usaremos en dicha prueba:

Lema 2.23. *Sea $I = (-r, r)$, con $0 < r < \infty$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y sean $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas, de manera que u es derivable en $I \setminus \{0\}$ y se cumple que $u' = v$ en $I \setminus \{0\}$. Entonces u es derivable en 0 y $u'(0) = v(0)$.*

Demostración. Empecemos la demostración observando que $\lim_{h \to 0^+} u'(h) = \lim_{h \to 0^+} v(h) = v(0)$ y $\lim_{h \to 0^-} u'(h) = \lim_{h \to 0^-} v(h) = v(0)$.

Por lo tanto si $x > 0$, se tiene que por el Teorema del valor medio, $\frac{u(x) - u(0)}{x} = u'(\eta_x) = v(\eta_x)$, donde $\eta_x \in (0, x)$, luego si $x \to 0^+$, llegamos a que $\eta_x \to 0$, por lo que $u'(0^+) = v(0)$. Análogamente, si $x < 0$ se llega a que $u'(0^-) = v(0)$, por lo tanto u es derivable en 0 y $u'(0) = v(0)$. $\square$

Corolario 2.24 (Teorema de Borel). *Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales e $I = (-r, r)$, $0 < r < \infty$ un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces existe una función $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. *g es analítica en $I \setminus \{0\}$, es decir, g se puede expresar como una serie de potencias en un entorno de cada punto de $I \setminus \{0\}$.*

2. $g \in \mathscr{C}^\infty(I)$ *y* $g^{(n)}(0) = a_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Sea S un sector circular de radio r que contenga a $I \setminus \{0\}$. Por el Teorema de Ritt, existe $f \in \mathcal{H}(S)$ de manera que $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.
Sea $g(x) = \Re(f(x)), x \in I \setminus \{0\}$. Como f es analítica en S, g es analítica en $I \setminus \{0\}$ y por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ existe $g^{(n)} : I \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Sea $n \in \mathbb{N}_0$ entonces como $a_n \in \mathbb{R}$ se tiene que por (2.5):

$$\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = n! \frac{a_n}{n!} = a_n.$$

Por lo que podemos extender $g^{(n)}$ a una función continua definida en I con llegada en $\mathbb{R}$ asignándole el valor a_n en $x = 0$. Por lo tanto, por el lema 2.23, como $g^{(n)}$ es la derivada de $g^{(n-1)}$ en $I \setminus \{0\}$, entonces $g^{(n)}$ también es la derivada de $g^{(n-1)}$ en 0. Luego $g^{(n)}$ es la n-ésima derivada de g en I, por lo que como $g^{(n)}(0) = a_n$, queda probado el teorema. □

Observación 2.25. Este resultado se puede extender al caso en el que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sea una sucesión de números complejos tomando las sucesiones $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ definidas como la parte real e imaginaria de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ respectivamente. Por el resultado anterior, hemos probado que existen $g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifican las tesis del teorema previo. Basta considerar la función $f = g + ih$.

Una vez demostrado el Teorema de Borel a partir del Teorema de Ritt, vamos a demostrar que son equivalentes, pero para ello haremos dos reducciones al problema planteado:

1. Como hicimos en la demostración del Teorema de Ritt, podemos trabajar con sectores cuyo semieje de simetría sea el semieje real positivo.

2. Además vamos a ver en el siguiente lema que si probamos que se cumple el Teorema de Ritt en un sector adecuado entonces se cumple para cualquier sector cuyo semieje de simetría sea el semieje real positivo.

Lema 2.26. *Si el Teorema de Ritt se verifica para el sector* $S = S(\infty, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$*, entonces se verifica para cualquier sector de* $\mathbb{C}$ *con vértice en el origen.*

Demostración. Por hipótesis, se tiene que dada una sucesión cualquiera de números complejos $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ existe $f \in \mathcal{H}(S)$ tal que $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{2n}$.
Sea $T = S(\infty, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Definimos $F : T \to \mathbb{C}$ como $F(z) = f(\sqrt{z})$, donde en $\sqrt{z}$ se toma la rama principal, la cual es holomorfa en T. Observemos que si $z \in T$, $\sqrt{z} \in S$, por lo tanto

F está bien definida y $F \in \mathcal{H}(T)$.

Ahora veamos que para cada $m \in \mathbb{N}_0$ se cumple que $\displaystyle\lim_{z\to 0, z\in T} \frac{F(z) - \sum_{k=0}^{m} a_k z^k}{z^m} = 0$:

$$\lim_{z\to 0, z\in T} \frac{F(z) - \sum_{k=0}^{m} a_k z^k}{z^m} = \lim_{z\to 0, z\in T} \frac{f(\sqrt{z}) - \sum_{k=0}^{m} a_k (\sqrt{z})^{2k}}{(\sqrt{z})^{2m}}.$$

Nótese que si $z \in T$, $w = \sqrt{z} \in S$, por lo tanto el límite anterior es

$$\lim_{w\to 0, w\in S} \frac{f(w) - \sum_{k=0}^{m} a_k w^{2k}}{w^{2m}} = 0,$$

ya que $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{2n}$. Por lo tanto, $F \sim_T \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
Ahora bien, si $U = S(\infty, -\pi, \pi)$ repitiendo el razonamiento anterior en el caso de T y U, tenemos que existe $G \in \mathcal{H}(U)$ de manera que $G \sim_U \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y por lo tanto, concluimos que para cualquier sector circular W se cumple el Teorema de Ritt ya que $W \subseteq U$. De hecho, basta con tomar la restricción en W de la función que obtenemos al aplicar el teorema en U. □

Por lo tanto, ahora nos queda verificar que se cumple el Teorema de Ritt en $S = S(\infty, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ si suponemos que el Teorema de Borel es cierto. Para este último paso, necesitaremos el Teorema de holomorfía bajo el signo integral, que pasamos a enunciar. La demostración de este resultado se basa en el Teorema de Leibniz, que hemos incluido en el teorema 3.7 y en las condiciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 2.27 (**De holomorfía bajo el signo integral**). *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $E \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto medible-Lebesgue. Sea $F : \Omega \times E \to \mathbb{C}$ tal que:*

1. *Para cada $z \in \Omega$, la función $y \in E \mapsto F(z, y) \in \mathbb{C}$ es integrable en E.*
2. *Para cada $y \in E$, la función $z \in \Omega \mapsto F(z, y) \in \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω.*
3. *Existe $g \in L^1(E)$ tal que $|F(z, y)| \leq g(y)$ para cada $z \in \Omega$ y para cada $y \in E$.*

Entonces la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida como $f(z) = \int_E F(z, y)dy$ es holomorfa en Ω y para cada $z \in \Omega$, $f'(z) = \int_E \frac{\partial F}{\partial z}(z, y)dy$.

Teorema 2.28. *Si suponemos que el Teorema de Borel es cierto, se verifica el Teorema de Ritt para $S = S(\infty, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.*

Demostración. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Por el Teorema de Borel, existe una función f definida en $\mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$ de manera que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $f^{(n)}(0) = a_n$.
Podemos suponer también que f es de soporte compacto ya que si no lo es, trabajamos con $\tilde{f}$, la función que se obtiene al multiplicar f por una función meseta como la descrita en la observación 1.6.
Entonces la función definida para cada $z \in S$ por $t \in (0, \infty) \mapsto e^{-tz} f(t)$ es integrable-Lebesgue en $(0, \infty)$, ya que f es de soporte compacto y para cada $z \in S$ fijo la función $e^{-tz} f(t)$ es continua en $\mathbb{R}$. Es sencillo comprobar que para cada $z \in S$ y $t > 0$, se tiene que $|e^{-tz} f(t)| \leq |f(t)|$, que es integrable en $(0, \infty)$ al ser continua y de soporte compacto.
Además, sea $\varphi : S \times (0, \infty) \to \mathbb{C}$ definida como $\varphi(z, t) = e^{-tz} f(t)$, tenemos que φ es continua en $S \times (0, \infty)$ y para cada $t \in (0, \infty)$, $\varphi_t(z) = \varphi(z, t)$ es holomorfa en S al serlo la exponencial. Por lo tanto, por el teorema 2.27,

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-tz} f(t) dt$$

es holomorfa en S.
A continuación, probaremos tres resultados que usaremos más adelante:

1. Para cada $z \in S$, se verifica que $\frac{\Re(z)}{|z|} \geq \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ya que si $z = re^{i\theta} \in S$, entonces $|z| = r$ y $\Re(z) = r\cos(\theta)$. Por lo que, como la función coseno es par y es decreciente en $[0, \frac{\pi}{4})$ se tiene que $\frac{\Re(z)}{|z|} = \cos(\theta) \geq \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Probaremos por inducción que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $\int_0^{\infty} e^{-tz} t^n dt = \frac{n!}{z^{n+1}}$.

   a) Si $n = 0$, $\int_0^{\infty} e^{-tz} dt = \frac{e^{-tz}}{-z}\Big|_{t=0}^{t\to\infty} = \frac{1}{z}$, donde se ha utilizado que para cada $z \in S$, se tiene que $\Re(z) > 0$.

   b) Supongamos que para $n \in \mathbb{N}_0$ se verifica que $\int_0^{\infty} e^{-tz} t^n dt = \frac{n!}{z^{n+1}}$, probémoslo para n+1. Integrando por partes se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-tz} t^{n+1} dt &= \frac{t^{n+1} e^{-tz}}{-z}\Big|_{t=0}^{t\to\infty} + \frac{n+1}{z} \int_0^{\infty} e^{-tz} t^n dt \\ &= \frac{n+1}{z} \int_0^{\infty} e^{-tz} t^n dt = \frac{n+1}{z} \frac{n!}{z^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}.\end{aligned}$$

   Por lo tanto, hemos probado por inducción que $\int_0^{\infty} e^{-tz} t^n dt = \frac{n!}{z^{n+1}}$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

3. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Como f es de soporte compacto, tenemos que existen $M, N \in \mathbb{R}$ tales que si $x \notin [M, N]$ $f(x) = 0$, por lo tanto, $f^{(n)}(x) = 0$ si $x \notin [M, N]$. Además, puesto

que $f \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, por el Teorema de Weierstrass, existe una constante K_n tal que $|f^{(n)}(x)| \leq K_n$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Por el Teorema de Taylor, tenemos que si $t \in \mathbb{R}$ y η está entre 0 y t entonces:

$$|f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k| = |\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} t^{n+1}| \leq \frac{K_{n+1}}{(n+1)!} |t|^{n+1} = L_{n+1}|t|^{n+1}.$$

Por lo tanto, como consecuencia de estos tres resultados tenemos que si $z \in S$ y $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$\left| F(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^{k+1}} \right| = \left| \int_0^{\infty} e^{-tz}(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-tz}||f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k| dt,$$

aplicando 3 a la última integral y a continuación aplicando 2 tenemos que:

$$\int_0^{\infty} |e^{-tz}||f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-t\Re(z)} L_{n+1} t^{n+1} dt = L_{n+1} \frac{(n+1)!}{(\Re(z))^{n+2}}.$$

Además, por 1 se tiene que $\frac{1}{\Re(z)} \leq \frac{\sqrt{2}}{|z|}$, por lo tanto se tiene que:

$$\left| F(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^{k+1}} \right| \leq L_{n+1} \frac{(n+1)!}{(\Re(z))^{n+2}} \leq \frac{(n+1)! L_{n+1} (\sqrt{2})^{n+2}}{|z|^{n+2}} = \frac{H_{n+1}}{|z|^{n+2}}. \tag{2.13}$$

Probaremos que la función $G : S \to \mathbb{C}$ definida como $G(z) = \frac{1}{z} F(\frac{1}{z})$, con $z \in S$, es la función que buscábamos. Observemos que si $z \in S$, $\frac{1}{z} \in S$ ya que si $\frac{-\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ es un argumento de z, entonces $\frac{-\pi}{4} < -\theta < \frac{\pi}{4}$ es un argumento de $\frac{1}{z}$. Por lo que G está bien definida y es holomorfa en S. Para acabar, veamos que $G \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Sea $z \in S$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Por (2.13), se tiene lo siguiente:

$$\left| G(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| = \frac{1}{|z|} \left| F(\frac{1}{z}) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(\frac{1}{z})^{k+1}} \right| \leq \frac{1}{|z|} \frac{H_{n+1}}{|\frac{1}{z}|^{n+2}} = H_{n+1}|z|^{n+1}.$$

Por lo tanto, tenemos que $\left| \frac{G(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{z^n} \right| \leq H_{n+1}|z|$, luego por el criterio del Sandwich, $\lim_{z \to 0, z \in S} \frac{G(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{z^n} = 0$, y de aquí concluimos que $G \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. $\square$

Capítulo 3

Problema de Momentos de Stieltjes en el espacio de Schwartz

En este capítulo, describiremos el problema de momentos en su forma general, y el de Stieltjes en particular, limitándonos a su solución en el espacio de las funciones de decrecimiento rápido con soporte en $(0, \infty)$. De hecho, probaremos que la resolución del problema de momentos de Stieltjes mencionado equivale a los Teoremas de Borel y Ritt presentados en los dos primeros capítulos.
Comenzaremos definiendo qué es el momento n-ésimo de una función.

Definición 3.1. Dada una función ϕ, se define el momento n-ésimo de la función ϕ en el intervalo I, $n \in \mathbb{N}_0$, como:

$$\int_I x^n \phi(x) dx, \tag{3.1}$$

siempre que dicha integral exista y sea finita.

También necesitaremos la definición de la transformada de Fourier de una función ϕ:

Definición 3.2. Para una función $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, se define su transformada de Fourier, denotada como $\widehat{\phi}$ o $\mathscr{F}(\phi)$, como

$$\widehat{\phi}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} \phi(x) dx, \quad u \in \mathbb{R}.$$

El problema de momentos consiste en lo siguiente: dada una sucesión $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos, encontrar una función ϕ de manera que las anteriores integrales existan y verifiquen que:

$$\int_I x^n \phi(x) dx = \mu_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.2}$$

A continuación definiremos el conocido como espacio de Schwartz o espacio de funciones de decrecimiento rápido y un subespacio de este:

Definición 3.3. Se define el espacio de Schwartz como

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall m, n \in \mathbb{N}_0, \lim_{|x|\to\infty} x^n f^{(m)}(x) = 0\}.$$

A su vez, trabajaremos con el siguiente subespacio de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{S}(0,\infty) = \{\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) : \phi(x) = 0, \forall x \leq 0\}.$$

Proposición 3.4. *$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ si y solo si para cada $m, n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que* $\sup\{|x^n f^{(m)}(x)| : x \in \mathbb{R}\} = M_{n,m} < \infty$.

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$, como $\lim_{|x|\to\infty} x^n f^{(m)}(x) = 0$, fijado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $|x| > N$, entonces $|x^n f^{(m)}(x)| < \varepsilon$.

Además, como $[-N, N]$ es compacto y $x^n f^{(m)}(x)$ es continua en $[-N, N]$, existe $K > 0$ tal que si $x \in [-N, N]$, entonces $|x^n f^{(m)}(x)| < K$, luego para cada $x \in \mathbb{R}$, $|x^n f^{(m)}(x)| < \max\{\varepsilon, K\} < \infty$.

$\Leftarrow$) Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$. Se tiene que si $x \neq 0$, entonces

$$|x^n f^{(m)}(x)| = \frac{|x^{n+2} f^{(m)}(x)|}{|x|^2} \leq \frac{M_{n+2,m}}{|x|^2}, \tag{3.3}$$

que tiende a 0 cuando $|x| \to \infty$, por lo que $\lim_{|x|\to\infty} x^n f^{(m)}(x) = 0$.

□

Observación 3.5. Nosotros nos centraremos en el problema de momentos en el caso en el que $I = (0, \infty)$ y en el que $\phi \in \mathscr{S}(0, \infty)$, que es lo que se conoce como Problema de Momentos de Stieltjes en el espacio de funciones de decrecimiento rápido con soporte contenido en $(0, \infty)$. Observemos que como $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces por (3.3), se deduce que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, el momento n-ésimo está bien definido.

Empezaremos dando una prueba de que suponiendo cierto el Teorema de Ritt, podemos resolver el Problema de Momentos de Stieltjes en el espacio de funciones de decrecimiento rápido con soporte contenido en $(0, \infty)$. Para ello, recordaremos una serie de resultados vistos en el grado.

Teorema 3.6 (**De continuidad bajo el signo integral**). *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ y $E \subseteq \mathbb{R}^m$ y sea $F : \Omega \times E \to \mathbb{C}$ tal que:*

1. *Para cada $x \in \Omega$, la función $y \in E \mapsto F(x, y) \in \mathbb{C}$ es integrable en E.*
2. *Para cada $y \in E$, la función $x \in \Omega \mapsto F(x, y) \in \mathbb{C}$ es continua en Ω.*

3. *Existe $g \in L^1(E)$ tal que $|F(x,y)| \leq g(y)$ para cada $x \in \Omega$ y para cada $y \in E$.*

Entonces la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida como $f(x) = \int_E F(x,y)dy$ es continua en Ω.

Teorema 3.7 (De Leibniz). *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^d$ y $E \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto medible-Lebesgue. Sea $F : \Omega \times E \to \mathbb{C}$ tal que:*

1. *Para cada $x \in \Omega$, la función $y \in E \mapsto F(x,y) \in \mathbb{C}$ es integrable en E.*

2. *Para cada $y \in E$, la función $x \in \Omega \mapsto F(x,y) \in \mathbb{C}$ admite derivada parcial j-ésima para un j fijo.*

3. *Existe $g \in L^1(E)$ tal que $|\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y)| \leq g(y)$ para cada $x \in \Omega$ y para cada $y \in E$.*

Entonces la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida como $f(x) = \int_E F(x,y)dy$ admite derivada parcial j-ésima en Ω y para cada $x \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_E \frac{\partial F}{\partial x_j}(x,y)dy$.

El siguiente resultado caracteriza las transformadas de Fourier de las funciones del espacio $\mathscr{S}(0,\infty)$.

Lema 3.8. *ψ es la transformada de Fourier de una función $\phi \in \mathscr{S}(0,\infty)$ si y solo si $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, ψ se puede extender a una función Ψ continua en $H = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}$, analítica en $U = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ y que verifica que $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty, z\in H} \Psi(z) = 0$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que ψ es la transformada de Fourier de una función $\phi \in \mathscr{S}(0,\infty)$. Entonces, se tiene que $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ya que $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Como ψ es la transformada de Fourier de ϕ, es decir, $\psi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)e^{ixt}dt = \int_0^{\infty} \phi(t)e^{ixt}dt$, vamos a extender ψ de la siguiente manera:
Si $z \in H$, entonces definimos $\Psi(z) := \displaystyle\int_0^{\infty} \phi(t)e^{izt}dt$. Sea $F : H \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ definida como $F(z,t) = \phi(t)e^{izt}$, entonces se tiene lo siguiente:

1. Para cada $z \in H$, $|F(z,t)| = |\phi(t)|e^{-\Im(z)t} \leq |\phi(t)|$ para cada $t \geq 0$. Observemos que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, luego la función $t \in [0,\infty) \mapsto F(z,t)$ es integrable en $[0,\infty)$.

2. Para cada $t \geq 0$, la función $z \in H \mapsto F(z,t)$ es continua en H y es holomorfa en U al serlo la función $f(z) = e^{izt}$.

Luego por los teoremas 3.6 y 2.27, se tiene que Ψ es continua en H y holomorfa en U. Además, se puede ver fácilmente que Ψ extiende a ψ. Para probar que la función Ψ tiende hacia 0 en H , lo haremos distinguiendo casos:

1. Si $z = x \in \mathbb{R}$, entonces $\Psi(x) = \psi(x) = \widehat{\phi}(x)$ y por el lema de Riemann-Lebesgue, tenemos que $\lim_{|x|\to\infty} \Psi(x) = 0$.

2. Sea $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ y sea $S = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon)\}$. Si $z = |z|e^{i\theta} \in S$, tenemos que $\Im(z) = |z|\sin(\theta) \geq |z|\sin(\varepsilon) > 0$, luego $|e^{izt}| \leq e^{-|z|\sin(\varepsilon)t}$. Por lo tanto, usando la notación de la proposición 3.4, llegamos a que:

$$\Big| \int_0^\infty \phi(t)e^{izt}dt \Big| \leq M_{0,0} \int_0^\infty e^{-|z|\sin(\varepsilon)}dt = \frac{M_{0,0}}{|z|\sin(\varepsilon)} \to 0 \text{ si } |z| \to \infty.$$

3. Sea $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ y sea $T = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) \in (0, \varepsilon]\}$. Si $z = x + iy \in T$, entonces:

$$\Psi(x+iy) = \int_0^\infty \phi(t)e^{izt}dt = \int_0^\infty \phi(t)e^{-yt}e^{ixt}dt = \mathscr{F}(\phi(t)e^{-yt})(x). \tag{3.4}$$

Llamando $\phi_y(t) = \phi(t)e^{-yt}$, tenemos que $\Psi(x+iy) = \mathscr{F}(\phi_y)(x)$. Como tanto ϕ como la función $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-yt}$ pertenecen a $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\phi_y \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, luego $\phi_y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ y ϕ_y, $\phi_y' \in L^1(\mathbb{R})$, por lo tanto de las propiedades de la transformada de Fourier, se tiene que:

$$\mathscr{F}(\phi_y')(x) = -ix\mathscr{F}(\phi_y)(x). \tag{3.5}$$

Puesto que $|\mathscr{F}(\phi_y')(x)| = \Big| \int_0^\infty \phi_y'(t)e^{ixt}dt \Big| \leq \int_0^\infty |\phi_y'(t)|dt \leq \|\phi_y'\|_1$ y $\phi_y'(t) = \phi'(t)e^{-yt} - y\phi(t)e^{-yt}$, se deduce que:

$$|\mathscr{F}(\phi_y')(x)| \leq \|\phi'(t)e^{-yt}\|_1 + \|y\phi(t)e^{-yt}\|_1 \leq \|\phi'(t)\|_1 + \|\phi(t)\|_\infty. \tag{3.6}$$

Por lo tanto, como $z = |z|e^{i\theta} \in T$, se tiene que $x = \Re(z) = |z|\cos(\theta) \geq |z|\cos(\varepsilon) > 0$, luego utilizando (3.4)-(3.6), obtenemos que:

$$|\Psi(z)| = |\mathscr{F}(\phi_y)(x) = \frac{|\mathscr{F}(\phi_y')(x)}{x} \leq \frac{\|\phi'(t)\|_1 + \|\phi(t)\|_\infty}{|z|\cos(\varepsilon)} \to 0 \text{ si } |z| \to \infty. \tag{3.7}$$

4. Sea $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ y sea $V = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) \in [\pi - \varepsilon, \pi)\}$, razonando de manera análoga al apartado 3 llegamos a la misma conclusión.

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty, z\in H} \Psi(z) = 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces se tiene que ψ, $\widehat{\psi} = \phi \in L^1(\mathbb{R})$, por lo que por el Teorema de Inversión, podemos expresar ϕ como $\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}\psi(t)dt$. Por lo tanto, tenemos que probar que $\phi \in \mathscr{S}(0, \infty)$.
Puesto que $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces se tiene que $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, luego basta probar que $\phi(x) = 0$ si $x < 0$. Además, como ψ se puede extender a una función Ψ continua en

H y analítica en U, tenemos que $e^{-ixz}\Psi(z)$ es holomorfa en U, luego su integral en cualquier curva cerrada contenida en U es 0, por lo tanto para cada $R, \varepsilon > 0$, se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} e^{-ixz}\Psi(z)dz = -\int_{[-R+i\varepsilon,R+i\varepsilon]} e^{-ixz}\Psi(z)dz, \tag{3.8}$$

siendo $\Gamma_{R,\varepsilon}(t) = i\varepsilon + Re^{it}$, con $0 \leq t \leq \pi$.
Si $\Gamma_R(t) = Re^{it}$, con $0 \leq t \leq \pi$, tenemos que $\Gamma_{R,\varepsilon} \to \Gamma_R$ uniformemente en $[0,\pi]$ cuando $\varepsilon \to 0^+$. Además, puesto que Ψ es continuo en H, Ψe^{-ixz} es uniformemente continuo en $\overline{B}(0,R+1)\cap H$ y a su vez, se tiene que para cada $\varepsilon \in (0,1)$, $\Gamma^*_{R,\varepsilon} \subseteq \overline{B}(0,R+1)\cap H$. Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} e^{-ixz}\Psi(z)dz = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} e^{-ixz}\Psi(z)dz \tag{3.9}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{[-R+i\varepsilon,R+i\varepsilon]} e^{-ixz}\Psi(z)dz = -\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{-ixz}\Psi(z)dz, \tag{3.10}$$

luego si $R \to \infty$, de (3.9) se deduce lo siguiente:

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}\Psi(t)dt = -\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} e^{-ixz}\Psi(z)dz.$$

Calculemos este último límite. Observemos que si $R > 0$, como Γ_R es un compacto contenido en H y Ψ es continua ahí, existe $M_R \geq 0$ tal que $|\Psi(z)| \leq M_R$ para cada $z \in \Gamma^*_R$. Luego parametrizando $\int_{\Gamma_R} e^{-ixz}\Psi(z)dz$, tenemos lo siguiente:

$$\Big|\int_{\Gamma_R} e^{-ixz}\Psi(z)dz\Big| = \Big|\int_0^{\pi} e^{-ixRe^{it}}\Psi(Re^{it})Rie^{it}dt\Big| \leq RM_R\int_0^{\pi} e^{xR\sin(t)}dt. \tag{3.11}$$

Nótese que la función seno tiene simetría axial con respecto a la recta $x = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto, de (3.11) se deduce que la última integral es igual a $2\int_0^{\pi/2} e^{xR\sin(t)}dt$. Observemos que como la función seno es cóncava en $[0,\frac{\pi}{2}]$, entonces $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ para cada $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, por lo tanto como $x \leq 0$, se tiene que:

$$\Big|\int_{\Gamma_R} e^{-ixz}\Psi(z)dz\Big| \leq 2RM_R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2Rtx/\pi}dt = 2RM_R\frac{\pi(e^{Rx}-1)}{2Rx} = M_R\frac{-\pi(1-e^{Rx})}{x}.$$

Puesto que $x \leq 0$, se tiene que $M_R\frac{-\pi(1-e^{Rx})}{x} \leq \frac{-\pi M_R}{x}$, y como se verifica que Ψ tiende a 0 si $|z| \to \infty$, con $z \in H$, entonces se tiene que $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$, por lo que $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} e^{-ixz}\Psi(z)dz = 0$ y llegamos a que si $x \leq 0$, $\phi(x) = 0$.

□

Teorema 3.9. *Si suponemos que el Teorema de Ritt es cierto, el problema de momentos tiene siempre solución.*

Demostración. Empezaremos viendo una simplificación del problema inicial:
Supongamos que se verifica que para una sucesión cualquiera $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ el problema de momentos tiene solución $\phi \in \mathscr{S}(0,\infty)$.
Sea ψ la transformada de Fourier de ϕ, es decir, $\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu}\phi(x)dx$ y sea $F : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{C}$ definida como $F(u,x) = e^{ixu}\phi(x)$, que es medible en $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ al ser continua. Veamos que se puede aplicar el Teorema 3.7 a la función ψ definida como $\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u,x)dx$:

1. Sea $u \in \mathbb{R}$, vamos a probar que $x \in \mathbb{R} \mapsto F(u,x) = e^{ixu}\phi(x)$ es integrable en $\mathbb{R}$. Observemos que $\int_{-\infty}^{\infty} |e^{ixu}\phi(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|dx$, luego como $\phi \in \mathscr{S}(0,\infty)$, se tiene que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ y por lo tanto concluimos que $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|dx < \infty$.

2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(u) = F(u,x)$ es derivable hasta orden n, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(u) = (ix)^n e^{ixu}\phi(x)$.

3. Además $|f^{(n)}(u)| = |x|^n|\phi(x)|$ y como $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para $N > 1$ cualquiera, existe $C > 0$ tal que $|x|^n|\phi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^N} =: g(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Dado que $N > 1$, $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Por lo tanto, por el teorema 3.7, para todo $n \in \mathbb{N}$, ψ es n veces derivable y $\psi^{(n)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} i^n x^n e^{ixu}\phi(x)dx$, luego:

$$\psi^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n \phi(x)dx = i^n \mu_n. \tag{3.12}$$

Se deduce entonces que resolver (3.2) es equivalente a encontrar una función ψ que sea la transformada de Fourier de una función $\phi \in \mathscr{S}(0,\infty)$ y que verifique (3.12).
Construyamos dicha función. Sea $G(z) = \exp((1-i)(z+i)^{\frac{1}{2}})$, con $(z+i)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{|z+i|}e^{i\frac{Arg(z+i)}{2}}$, donde la rama del logaritmo se elige de manera que $Arg(z+i) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, ya que así se garantiza que $G(z) \to 0$ si $|z| \to \infty$, $z \in \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}$.
Como G es holomorfa en $C = \mathbb{C} \setminus \{ci : c \leq -1\}$ y $G(z) \neq 0$ para cada $z \in C$, se tiene que $H = \frac{1}{G}$ es holomorfa en C y por lo tanto es analítica en C. Luego existen $a_0, a_1, ... \in \mathbb{C}$ tales que $\frac{1}{G(z)} = a_0 + a_1 z + ...$ si $|z| < 1$, donde $a_n = \frac{H^{(n)}(0)}{n!}$, con $n \in \mathbb{N}_0$.
Sean $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $S = S(\infty, -\delta, \pi+\delta)$ y para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!}\mu_k a_{n-k}$. Por el Teorema de Ritt, existe una función F holomorfa en S tal que $F \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Sea $\Psi(z) = F(z)G(z)$,

que es holomorfa en S al serlo F y G.
Observemos que $F \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, por lo que por la definición de b_n, tenemos que $F \sim_S (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \mu_n}{n!} z^n)$. Además, se tiene que $F = \Psi H$, luego como a lo sumo hay un único desarrollo asintótico y $H \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, se tiene, por la proposición 2.7, que $\Psi \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \mu_n}{n!} z^n$.
Si llamamos ψ a la restricción de Ψ en el eje real, por el lema anterior tenemos que ψ es la transformada de Fourier de una función que pertenece a $\mathscr{S}(0,\infty)$. Veamos que ψ verifica (3.12): por (2.5) y como Ψ es analítica, tenemos que $i^n \mu_n = \frac{n! i^n \mu_n}{n!} = \lim_{z \to 0, z \in S} \Psi^{(n)}(z) = \Psi^{(n)}(0) = \psi^{(n)}(0)$. $\square$

A continuación, vamos a probar que si el problema de momentos tiene solución, también es cierto el teorema de Borel, y por lo tanto concluiríamos que los tres teoremas presentados hasta el momento son equivalentes.

Teorema 3.10. *Si el Problema de Momentos tiene solución, se verifica el Teorema de Borel.*

Demostración. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. Como el Problema de Momentos tiene solución, para la sucesión $\{\frac{a_n}{i^n}\}_{n=0}^{\infty}$ existe $\phi \in \mathscr{S}(0,\infty)$ que verifica que $\int_0^{\infty} \phi(x) x^n dx = \frac{a_n}{i^n}$.
Si consideramos la función Ψ definida como $\Psi(u) = \int_0^{\infty} \phi(x) e^{ixu} dx$, sabemos que verifica que $\Psi^{(n)}(0) = i^n \frac{a_n}{i^n} = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Además, como $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, se tiene que $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, luego $\Psi \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, por lo que el Teorema de Borel es cierto. $\square$

Capítulo 4

Problema de Momentos Generalizado

En este capítulo, presentaremos un teorema que da un enfoque general a los tres teoremas previamente presentados, finalizando el capítulo viendo que estos no son más que un caso particular de dicho teorema.
Para ello, introduciremos lo que son los espacios vectoriales topológicos, los espacios vectoriales topológicos localmente convexos y los espacios de Fréchet.

4.1. Espacios vectoriales topológicos

En esta sección, presentaremos el concepto de espacio vectorial topológico y un tipo particular de espacio vectorial topológico, que es el espacio vectorial topológico localmente convexo.

Definición 4.1 (**Espacio vectorial topológico**)**.** Un espacio vectorial topológico X sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, que en nuestro caso será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ que también es un espacio topológico en el que la operación suma y producto por un escalar, definidas como $(x, y) \in X \times X \mapsto x + y \in X$ y $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X \mapsto \lambda \cdot x \in X$ respectivamente, son continuas, considerando en $X \times X$ y $\mathbb{K} \times X$ la topología producto.

Observación 4.2. Como la suma en un espacio vectorial topológico es continua, tenemos que las traslaciones son continuas, y como la inversa de una traslación es una traslación, se tiene que las traslaciones son homeomorfismos.
Por lo tanto, solo con estudiar el sistema fundamental de entornos del 0 nos sirve, ya que trasladando esta base de entornos conseguimos un sistema fundamental de cualquier punto.

Definición 4.3. Un espacio vectorial topológico X es localmente convexo si el 0 admite un sistema fundamental de entornos convexos.

Definición 4.4. Sea $\{p_i\}_{i\in I}$ una familia de seminormas en X, siendo X un espacio vectorial e I un conjunto de índices no vacío.
La topología generada por $\{p_i\}_{i\in I}$ en X es aquella que tiene como sistema fundamental de entornos del 0 a los conjuntos de la forma $\{V_{J,\varepsilon}\}_{J\subseteq I,\varepsilon>0}$, de manera que J es finito, definidos como

$$V_{J,\varepsilon} = \{x \in X : p_j(x) < \varepsilon, \forall j \in J\}.$$

Observación 4.5. Esta topología es la menos fina que hace continuas a las seminormas de la familia $\{p_i\}_{i\in I}$. Además, considerando la topología anterior, se tiene que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a x si y solo si para cada $i \in I$, $p_i(x_n - x) \to 0$ si $n \to \infty$.

Proposición 4.6. *Sea X un espacio vectorial topológico. Entonces X es localmente convexo si y solo si existe una familia $\{p_i\}_{i\in I}$ de seminormas en X que generan la topología de X.*

Demostración. Se puede ver en el libro de J. Horváth [7] en las páginas 89 y 95. □

Notación 4.7. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A \subseteq X$, denotaremos por λA al siguiente conjunto: $\{\lambda \cdot x : x \in A\}$.

A continuación, vamos a dar una definición y una proposición que nos indicará cómo garantizar si un espacio localmente convexo es de Hausdorff. Esto será realmente útil en la sección 4.2.

Definición 4.8. Se dice que una familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i\in I}$, definidas en un espacio vectorial X, es separada si para cada $x \in X \setminus \{0\}$, existe $i \in I$ tal que $p_i(x) \neq 0$. Observemos que esto es equivalente a que si para cada $i \in I$, $p_i(x) = 0$, entonces $x = 0$.

Teorema 4.9. *Un espacio localmente convexo X es de Hausdorff si su topología puede generarse por una familia $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i\in I}$ separada de seminormas.*

Demostración. Sean $x, y \in X$, con $x \neq y$. Como $\mathcal{P}$ es separada, existen $i \in I$ y $\varepsilon > 0$ tales que $p_i(x - y) = 2\varepsilon$.
Sean $V_x := \{u \in X : p_i(x-u) < \varepsilon\}$ y $V_y := \{u \in X : p_i(y-u) < \varepsilon\}$. Se puede ver fácilmente que $V_x = x + \varepsilon U$ y $V_y = y + \varepsilon U$, siendo $U = \{u \in X : p_i(u) < 1\}$. Puesto que la topología de X está generada por $\mathcal{P}$, se deduce que U es un entorno de 0, luego V_x y V_y son entornos de x y de y respectivamente.
Además, son disjuntos ya que si $u \in V_x \cap V_y$, entonces:

$$p_i(x - y) \leq p_i(x - u) + p_i(y - u) < 2\varepsilon,$$

llegando a un absurdo. □

Definición 4.10. Sea X un espacio vectorial.

1. Se dice que un conjunto $A \subseteq X$ es absorbente si para cada $x \in X$, A absorbe a $\{x\}$, es decir, para cada $x \in X$ existe $r > 0$ tal que $x \in cA$ para cada $c \in \mathbb{K}$, $|c| \geq r$.
2. Se dice que un conjunto $C \subseteq X$ es equilibrado si $aC \subseteq C$ para cada $a \in \mathbb{K}$, $|a| \leq 1$.
3. Se dice que un conjunto $T \subseteq X$, con X un espacio vectorial topológico, es un tonel si es cerrado, convexo, equilibrado y absorbente.
4. Se dice que un espacio vectorial topológico es un espacio tonelado si cumple que todo tonel es un entorno del 0.

Definición 4.11. Diremos que una familia de seminormas $\mathcal{P}$ de un espacio vectorial X es saturada si para cualquier subfamilia finita $\{p_i\}_{i\in I}$ de seminormas de $\mathcal{P}$, se tiene que $\max p_i \in \mathcal{P}$.

A continuación, vamos a dar una serie de resultados relativos a la continuidad de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales topológicos. Serán especialmente útiles el corolario 4.15 y el corolario 4.17, los cuales caracterizan los funcionales lineales continuos.

Proposición 4.12. *Sean X, Y espacios vectoriales topológicos y sea $f : X \to Y$ una aplicación lineal. Entonces, f es continua en X si es continua en 0.*

Demostración. Sea W un entorno de 0 en Y, como f es continua en 0, se tiene que $f^{-1}(W)$ es un entorno de 0 en X. Pero entonces, para cada $a \in X$, se tiene que $f(a) + W$ es un entorno de $f(a)$ en Y y $f^{-1}(f(a) + W) \supseteq a + f^{-1}(W)$, que es un entorno de a. En conclusión, f es continua. $\square$

Proposición 4.13. *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo cuya topología está generada por una familia saturada $\{q_i\}_{i\in I}$ de seminormas continuas de X y sea Y otro espacio vectorial topológico localmente convexo cuya topología está generada por una familia de seminormas continuas $\{r_l\}_{l\in L}$ de Y. Entonces, una aplicación lineal $f : X \to Y$ es continua en X si y solo si para cada r_l existe una seminorma q_i y $M > 0$ tal que $r_l(f(x)) \leq M q_i(x)$ para cada $x \in X$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Supongamos que para cada r_l, existen $M > 0$ y q_i que verifican lo supuesto. Sea W un entorno del 0 en Y, entonces al estar Y generado por una familia de seminormas, W contiene a un conjunto de la forma:

$$A_{n,\varepsilon} = \{y : r_{l_k}(y) < \varepsilon, 1 \leq k \leq n\}.$$

Entonces, para cada $1 \leq k \leq n$, existen $M_k > 0$ y q_{i_k} tales que $r_{l_k}(f(x)) \leq M_k q_{i_k}(x)$ para cada $x \in X$. Sea $V = \{x : q_{i_k}(x) < \frac{\varepsilon}{M_k}, 1 \leq k \leq n\}$, al generar $\{q_i\}_{i \in I}$ la topología de X, V es un entorno abierto de 0.

Concluyamos probando que $V \subseteq f^{-1}(W)$ y con esto tendríamos que f es continua en 0, y por la proposición anterior, f sería continua en X. Sea $x \in V$, $r_{l_k}(f(x)) \leq M_k q_{i_k}(x) < \varepsilon$, luego $f(x) \in A_{n,\varepsilon} \subseteq W$ y por lo tanto, $x \in f^{-1}(W)$.

$\Rightarrow$) Supongamos que f es continua en X. Sea $l \in L$, entonces $V = \{y \in Y : r_l(y) < 1\}$ es un entorno del 0 y debido a que f es continua, $f^{-1}(V) = W = \{x \in X : f(x) \in V\} = \{x \in X : r_l(f(x)) < 1\}$ es un entorno del 0. Como X está generado por $\{q_i\}_{i \in I}$, existe $J \subseteq I$ finito y $\gamma > 0$ tal que $A_{J,\gamma} \subseteq W$, siendo $A_{J,\gamma} = \{x \in X : q_j(x) < \gamma$ para cada $j \in J\}$.

Puesto que $\{q_i\}_{i \in I}$ es saturada, $Q = \max_{j \in J} q_j \in \{q_i\}_{i \in I}$ y además, dado que para cada $j \in J$, $q_j(x) < \gamma$ se tiene que $Q(x) < \gamma$, entonces por la definición de Q se tiene que $\{x \in X : Q(x) < \gamma\} \subseteq A_{J,\gamma} \subseteq W$. Puesto que tanto r_l como Q son seminormas y f es lineal, $r_l(f(x)) \leq \frac{1}{\gamma} Q(x)$ para cada $x \in X$.

□

Notación 4.14. Se denota al espacio de funciones $f : X \to \mathbb{K}$ lineales y continuas en X como X'.

Corolario 4.15. *$f \in X'$ si y solo si existen una seminorma continua q en X y $M > 0$ tal que para cada $x \in X$, $|f(x)| \leq Mq(x)$.*

Demostración. Basta aplicar la proposición anterior ya que $\mathbb{K}$ es un espacio normado. □

Notación 4.16. Sean p una seminorma continua en X, $a \in X$ y $r > 0$, denotaremos por $B_p(a, r) = \{x \in X : p(x - a) < r\}$, y $\bar{B}_p(a, r) = \{x \in X : p(x - a) \leq r\}$.

Corolario 4.17. *Sea $f : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal. Entonces $f \in X'$ si y solo si existe una seminorma continua q en X tal que $f(\bar{B}_q(0, 1))$ está acotada.*

Demostración. $\Rightarrow$) Es consecuencia del corolario 4.15.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in \bar{B}_q(0, 1)$. Entonces observemos que si $x \in X$, $q(x) \neq 0$, se tiene que $\frac{x}{q(x)} \in \bar{B}_q(0, 1)$, por lo que $|f(\frac{x}{q(x)})| \leq M$, es decir como f es lineal, $|f(x)| \leq Mq(x)$.

Además, si $q(x) = 0$, tenemos que probar que $f(x) = 0$. Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in \bar{B}_q(0, 1)$ ya que $q(\lambda x) = 0$. Entonces, $|\lambda f(x)| = |f(\lambda x)| \leq M$, luego como λ es arbitario, lo anterior solo es posible si $f(x) = 0$. Por lo tanto, $f \in X'$.

□

Definición 4.18. Sea f un funcional lineal y p una seminorma continua en X, se dice que f es p-acotado si
$$p^*(f) := \sup\{|f(x)| : p(x) < 1\} < \infty.$$

Observación 4.19. Observemos que $p^*(f) = \sup\{|f(x)| : p(x) \leq 1\}$ ya que si $x \in \bar{B}_p(0,1)$, entonces sea $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión creciente tal que $1 > \lambda_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y que converge a 1, consideramos $x_n = \lambda_n x$, con $n \in \mathbb{N}_0$. Por lo tanto, se deduce que $x_n \to x$ y para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $p(x_n) = \lambda_n p(x) \leq \lambda_n < 1$, y además se tiene que $f(x_n) = \lambda_n f(x) \to f(x)$. Luego $|f(x)| \leq \sup\{|f(x_n)| : n \in \mathbb{N}_0\} \leq p^*(f)$.

Observación 4.20. A partir de la observación 4.19 y el corolario 4.17, se puede deducir que $f \in X'$ si y solo si existe una seminorma continua q en X tal que f es q-acotado.

Definición 4.21. Un espacio seminormado (X,q) es un par formado por un espacio vectorial X y una seminorma q continua en X, considerando la estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo cuya topología es la generada por q en X.

Lema 4.22. *Sea* (X,q) *un espacio vectorial topológico seminormado y sea* $f : X \to \mathbb{K}$ *una aplicación lineal. Entonces* $f \in X'$ *si y solo si* $\ker(f)$ *es cerrado.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si f es continua, entonces $\ker(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ es cerrado en X.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\ker(f)$ es cerrado.

a) Si $\ker(f) = X$, entonces $f \equiv 0$, por lo que $f \in X'$.

b) Si $\ker(f) \neq X$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \ker(f)$, por lo que $A = x_0 + \ker(f) = \{x \in X : f(x) = f(x_0)\}$ es cerrado en X. Observemos que $0 \notin A$ ya que $f(0) = 0 \neq f(x_0)$, luego como A es cerrado en X, existe $r > 0$ tal que $\bar{B}_q(0,r) \cap A = \varnothing$.
Veamos que si $x \in \bar{B}_q(0,r)$, entonces $|f(x)| \leq |f(x_0)|$. Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existe $x \in \bar{B}_q(0,r)$ tal que $|f(x)| > |f(x_0)| > 0$. Sea $y = \frac{xf(x_0)}{f(x)} \in X$, se tiene que $q(y) = q(x)\frac{|f(x_0)|}{|f(x)|} \leq r$ ya que $x \in \bar{B}_q(0,r)$ y $\frac{|f(x_0)|}{|f(x)|} < 1$, y además, se verifica que $f(y) = \frac{f(x)f(x_0)}{f(x)} = f(x_0)$, por lo que $y \in \bar{B}_q(0,r) \cap A$, llegando a un absurdo.
Por lo tanto, $|f(x)| \leq |f(x_0)|$ para cada $x \in \bar{B}_q(0,r)$, y como f es lineal, se tiene que $|f(x)| \leq \frac{1}{r}|f(x_0)|$ para cada $x \in \bar{B}_q(0,1)$, es decir, $f(\bar{B}_q(0,1))$ es acotada y por el corolario 4.17, tenemos que $f \in X'$.

□

Lema 4.23. *Sea (X, q) un espacio vectorial topológico seminormado. Si H es un hiperplano, es decir un subespacio propio y maximal de X, entonces H es cerrado o denso en X.*

Demostración. Como $H \subseteq \overline{H}$ y tenemos que $\overline{H}$ es un hiperplano de X, entonces tenemos que o $H = \overline{H}$ o $X = \overline{H}$, es decir o H es cerrado o es denso. □

Lema 4.24. *Sea (X, q) un espacio vectorial topológico seminormado. Entonces, una aplicación lineal no nula $f : X \to \mathbb{K}$ no es continua si y solo si* $\ker(f)$ *es denso en X.*

Demostración. Si f es lineal y $f \neq 0$, entonces $\ker(f)$ es un hiperplano de X, luego por el lema 4.22 y por el lema 4.23 se tiene que f no es continua si y solo si $\ker(f)$ no es cerrado si y solo si $\ker(f)$ es denso en X. □

Ahora a partir de este resultado, probaremos un lema que usaremos en el teorema 4.55:

Lema 4.25. *Sea (X, q) un espacio vectorial topológico seminormado. Entonces una aplicación lineal no nula $f : X \to \mathbb{K}$ no es continua si y solo si para cada $\alpha \in \mathbb{K}$, el conjunto $f^{-1}(\{\alpha\})$ es denso en X.*

Demostración. $\Leftarrow$) Basta con tomar $\alpha = 0$ y aplicar el lema 4.24.

$\Rightarrow$) Si f no es continua , al ser f no idénticamente nula y lineal se tiene que $f(X) = \mathbb{K}$, por lo que dado $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = \alpha$.
Al no ser f continua, por el lema 4.24 se tiene que $\ker(f)$ es denso en X, por lo que dados $x \in X$ y $r > 0$, tenemos que $B_q(x - x_0, r) \cap \ker(f) \neq \varnothing$. Entonces, existe $y \in B_q(x - x_0, r) \cap \ker(f)$, por lo que $y + x_0 \in B_q(x, r) \cap f^{-1}(\alpha)$, y de aquí se deduce que $f^{-1}(\alpha)$ es denso en X.

□

4.2. Espacios de Fréchet

Un tipo de espacios localmente convexos que merece la pena destacar son los espacios de Fréchet, que son un tipo particular de espacio metrizable, que será definido a continuación. Nosotros daremos la definición de espacio metrizable, de completitud en estos espacios, de espacio de Fréchet y proporcionaremos unos ejemplos que se usarán más adelante.

Definición 4.26. Se dice que un espacio vectorial topológico X es metrizable si existe una métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que induce la topología de X.

Observación 4.27. Obviamente un espacio vectorial topológico metrizable siempre es de Hausdorff.

A continuación, daremos una caracterización de los espacios localmente convexos metrizables.

Proposición 4.28. *Un espacio localmente convexo X es metrizable si y solo si es de Hausdorff y su topología está generada por una familia numerable de seminormas.*

Demostración. Se puede encontrar en el libro de J. Horváth [7] en las páginas 110-116. $\square$

Observación 4.29. Si X es metrizable, entonces existe una familia numerable $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ de seminormas continuas en X que generan la topología de X. Podemos suponer que la familia $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente, es decir que $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$ para cada $x \in X$, ya que la familia $\{\widetilde{p_n}\}_{n=0}^{\infty}$ definida como $\widetilde{p_n}(x) := \max\{p_j(x) : j \leq n\}$ lo es y genera la misma topología que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ahora introduciremos el concepto de completitud en espacios vectoriales metrizables, el cual se puede presentar en términos secuenciales.

Definición 4.30. Sea X un espacio vectorial metrizable y sea $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ una familia numerable de seminormas que generan la topología de X.
Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de X es de Cauchy en X si para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $p_k(x_n - x_m) < \varepsilon$ para cada $n, m \geq n_0$.
Se dice que X es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente hacia un elemento de X.

Proposición 4.31. *Si X es un espacio metrizable completo y $A \subseteq X$ es cerrado, entonces A es completo.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy de elementos de A, entonces es una sucesión de Cauchy en X, por lo tanto como X es completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Pero como A es cerrado, se tiene que $x \in A$, concluyendo que A es completo. $\square$

Definición 4.32. Un espacio vectorial topológico localmente convexo X se dice que es un espacio de Fréchet si:

1. X es de Hausdorff.

2. Su topología está generada por una familia numerable de seminormas p_k, $k \in \mathbb{N}$.

3. X es completo con respecto a la familia numerable de seminormas.

Observación 4.33. Se tiene que cada espacio de Banach es un espacio de Fréchet, ya que en este caso tenemos que la topología está generada por una única seminorma, es de Hausdorff por el teorema 4.9 y es completo.

Veamos a continuación unos ejemplos que usaremos más adelante.

Lema 4.34. *Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $P_n(f) = \sup\{|x^j f^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, es una familia numerable de seminormas en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ que verifican que $\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) : P_n(f) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. 1. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned} P_n(\lambda f) &= \sup\{|x^j \lambda f^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq n\} \\ &= |\lambda| \sup\{|x^j f^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq n\} = |\lambda| P_n(f). \end{aligned}$$

2. Sean $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned} P_n(f+g) &= \sup\{|x^j (f^{(k)}(x) + g^{(k)}(x))| : x \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq n\} \\ &\leq \sup\{|x^j f^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq n\} \\ &+ \sup\{|x^j g^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq n\} = P_n(f) + P_n(g). \end{aligned}$$

□

Observación 4.35. Además, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, P_n es una norma ya que si $P_n(f) = 0$, entonces se tiene que para cada $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = 0$, por lo que $f \equiv 0$.

Proposición 4.36. *El espacio de Schwartz, $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, dotado de la topología generada por la familia de seminormas $\{P_n\}_{n=1}^\infty$, es un espacio de Fréchet.*

Demostración. Empecemos observando que por la observación anterior, la familia de seminormas $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ es separada, luego por el teorema 4.9, $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ es de Hausdorff.
Solo nos falta probar que el espacio $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ es completo con respecto a la familia numerable de seminormas que definimos en el lema 4.34.
Sea $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\sup\{|x^l (f_k^{(r)}(x) - f_j^{(r)}(x))| : x \in \mathbb{R}, 0 \leq l \leq n, 0 \leq r \leq n\} < \varepsilon$, si $j, k \geq j_0$. En particular, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sup\{|f_k^{(r)}(x) - f_j^{(r)}(x)| : x \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq n\} < \varepsilon$, si $j, k \geq j_0$, luego para cada $m \in \mathbb{N}_0$, $\|f_k^{(m)} - f_j^{(m)}\|_\infty < \varepsilon$ si $j, k \geq j_0$.
Observemos que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}_0$, $f^{(m)} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, por lo tanto

tenemos que para cada $m \in \mathbb{N}_0$, $\{f_k^{(m)}\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$. Como $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach, para cada $m \in \mathbb{N}_0$, existe $g_m \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ tal que $\{f_k^{(m)}\}_{k=0}^{\infty}$ converge uniformemente hacia g_m en $\mathbb{R}$.
Tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $f_k(x+t) - f_k(x) = \displaystyle\int_0^t f_k'(x+s)ds$, luego si $k \to \infty$, por el teorema de la convergencia dominada obtenemos que $g_0(x+t) - g_0(x) = \displaystyle\int_0^t g_1(x+s)ds$,. Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que $g_0' = g_1$. Supongamos que para $r \in \mathbb{N}_0$, $g_0^{(r)} = g_r$, probémoslo para $r+1$:
$f_k^{(r)}(x+t) - f_k^{(r)}(x) = \displaystyle\int_0^t f_k^{(r+1)}(x+s)ds$, por lo que si $k \to \infty$ obtenemos por el teorema de la convergencia dominada que $g_r(x+t) - g_r(x) = \displaystyle\int_0^t g_{r+1}(x+s)ds$, luego por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que $g_r' = g_{r+1}$, y aplicando la hipótesis de inducción concluimos que $g_0^{(r+1)} = g_{r+1}$.
Probemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n(f_k - g_0) \to 0$ si $k \to \infty$ y que $g_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Sea $n \in \mathbb{N}$, como $\sup\{|x^l(f_k^{(r)}(x) - f_j^{(r)}(x))| : x \in \mathbb{R}, 0 \leq l \leq n, 0 \leq r \leq n\} < \varepsilon$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ y para cada $0 \leq l \leq n$, $0 \leq r \leq n$, $|x^l(f_k^{(r)}(x) - f_j^{(r)}(x))| < \varepsilon$, luego si $j \to \infty$ tenemos que para cada $x \in \mathbb{R}$ y para cada $0 \leq l \leq n$, $0 \leq r \leq n$,

$$|x^l(f_k^{(r)}(x) - g_0^{(r)}(x))| = |x^l(f_k^{(r)}(x) - g_r(x))| \leq \varepsilon.$$

Se deduce de aquí que $f_k - g_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, luego como $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial, se tiene que $g_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y además, $P_n(f_k - g_0) \leq \varepsilon$, por lo que $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge a g_0 en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. □

Definición 4.37. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define el espacio D_n como el espacio de las funciones $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tales que $\operatorname{sop}(f) \subseteq [-n, n]$.

Proposición 4.38. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, D_n es cerrado en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $f \in \overline{D_n}$, entonces existe $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ de elementos de D_n tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $P_m(f_k - f) < \varepsilon$ para cada $k \geq k_0$. Como esta convergencia implica la convergencia puntual, se tiene que el límite de funciones con soporte en $[-n, n]$ también tiene soporte contenido en este mismo intervalo, por lo que $f \in D_n$. □

Corolario 4.39. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, D_n, dotado de la topología inducida por la generada por la familia de seminormas $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, es un espacio de Fréchet.*

Demostración. El resultado es cierto ya que al ser D_n cerrado en $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ y $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ completo, entonces por la proposición 4.31, D_n es completo. □

Definición 4.40. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Se denota por $\mathscr{E}(\Omega)$ al conjunto de funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$ en Ω.
Además, diremos que una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ de elementos de $\mathscr{E}(\Omega)$ converge hacia φ en $\mathscr{E}(\Omega)$ si $\{D^\alpha\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente hacia $D^\alpha\varphi$ en los compactos de Ω para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

En nuestro caso particular, nos restringiremos al caso en el que $n = 1$ y $\Omega = \mathbb{R}$, aunque el razonamiento se puede generalizar a cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$ considerando una sucesión expansiva de compactos para ducho abierto.

Observación 4.41. Razonando como en el lema 4.34, la aplicación $P_{k,n} : \mathscr{E}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida como $P_{k,n}(f) = \sup\{|f^{(k)}(x)| : x \in [-n,n]\}$, $f \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$, es claramente una seminorma para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$.
En la definición 4.40, hemos definido la topología de $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ secuencialmente como la de la convergencia uniforme de la función y sus derivadas en los compactos de $\mathbb{R}$. Esta definición es equivalente a la convergencia en la topología generada en $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ por la familia de seminormas $\{P_{k,n}\}_{k\in\mathbb{N}_0,n\in\mathbb{N}}$.

Notación 4.42. Denotaremos por $\|f(x)\|_{\infty,[-n,n]}$ a $\sup\{|f(x)| : x \in [-n,n]\}$

Teorema 4.43. *$\mathscr{E}(\mathbb{R})$, dotado de la topología generada por $\{P_{k,n}\}_{k\in\mathbb{N}_0,n\in\mathbb{N}}$, es un espacio de Fréchet.*

Demostración. Empecemos observando que la familia de seminormas $\{P_{k,n}\}_{k\in\mathbb{N}_0,n\in\mathbb{N}}$ es separada, ya que si $f \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ verifica que $P_{k,n}(f) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = 0$ para cada $x \in [-n,n]$, por lo que $f \equiv 0$, luego por el teorema 4.9, $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ es de Hausdorff.
Probemos que $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ es completo para la familia numerable de seminormas definidas en el lema anterior.
Sea $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\mathscr{E}(\mathbb{R})$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}_0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $P_{k,n}(f_j - f_l) < \varepsilon$ para cada $j, l \geq j_0$. En otras palabras, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\|f_j^{(k)} - f_l^{(k)}\|_{\infty,[-n,n]} < \varepsilon$ para cada $j, l \geq j_0$. Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $\{f_j^{(k)}\}_{j=0}^\infty$ es de Cauchy en $\mathscr{C}([-n,n]) = \mathscr{BC}([-n,n])$, el espacio de las funciones continuas y acotadas en $[-n,n]$.
Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{BC}([-n,n])$ es un espacio de Banach, se tiene que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $f_{k,n} \in \mathscr{C}([-n,n])$ tal que $\{f_j^{(k)}\}_{j=0}^\infty$ converge uniformemente a $f_{k,n}$ en $[-n,n]$.
Sea $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, definida como $f_k(x) := \lim\limits_{j\to\infty} f_j^{(k)}(x) = f_{k,n}(x)$ si $x \in [-n,n]$ y como $f_{k,n}$ es continua en $[-n,n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $k \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $f_k \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$

para cada $k \in \mathbb{N}_0$.

Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$f_j^{(k)}(x) - f_j^{(k)}(0) = \int_0^x f_j^{(k+1)}(t)dt. \tag{4.1}$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada, se tiene, haciendo que $j \to \infty$ en (4.1), que: $f_k(x) - f_k(0) = \int_0^x f_{k+1}(t)dt$, luego por el Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $f_k'(x) = f_{k+1}(x)$. Por recurrencia, llegamos a que $f_0^{(k)}(x) = f_k(x)$, y de aquí se deduce que $f_0 \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$.

Por último, si $k \in \mathbb{N}_0$ y si $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} P_{k,n}(f_j - f_0) &= \sup\{|f_j^{(k)}(x) - f_0^{(k)}(x)| : x \in [-n,n]\} = \sup\{|f_j^{(k)}(x) - f_k(x)| : x \in [-n,n]\} \\ &= \sup\{|f_j^{(k)}(x) - f_{k,n}(x)| : x \in [-n,n]\} < \varepsilon, \forall j \geq j_0. \end{aligned}$$

Luego $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ converge a f_0 en $\mathscr{E}(\mathbb{R})$. □

Para el último ejemplo de espacio de Fréchet que vamos a presentar, vamos a demostrar primero un resultado, semejante al que asegura la existencia de una sucesión expansiva de compactos para un abierto de $\mathbb{R}^n$, pero considerando ahora los sectores que definimos en la definición 2.9.

Proposición 4.44. *Si $S = S(r, \alpha, \beta)$ es un sector circular, entonces existe una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ de sectores circulares tales que:*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\overline{T_n} \setminus \{0\} \subseteq T_{n+1}$.*
2. *$\cup_{n=1}^\infty T_n = S$.*

Demostración. Como $r \in (0, \infty]$, existe una sucesión $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ estrictamente creciente que converge a r, como por ejemplo $r_n = n$ en el caso de que $r = \infty$ o $r_n = r - \frac{r}{2n}$ si $r < \infty$.

A su vez, también podemos definir una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ estrictamente decreciente que converge hacia α y una sucesión $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ estrictamente creciente que converge hacia β, de manera que $\beta > \beta_1 > \alpha_1 > \alpha$. Estas sucesiones se pueden definir así: $\beta_n = \beta - \frac{\beta - \beta_1}{n}$ y $\alpha_n = \alpha + \frac{\alpha_1 - \alpha}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto si tomamos los sectores circulares $T_n = S(r_n, \alpha_n, \beta_n)$, tenemos la sucesión buscada. □

Lema 4.45. *Sea S un sector circular y sea $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión expansiva de sectores circulares, que puede estar definida como hicimos en la demostración de la proposición 4.44, entonces la aplicación $P_n : \mathscr{A}(S) \to \mathbb{R}$ definida como $P_n(f) = \sup\limits_{z \in T_n, m \leq n} \dfrac{|f(z) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k z^k|}{|z|^m}$, $f \in \mathscr{A}(S)$, con $f \sim_S \sum\limits_{n=0}^\infty a_n z^n$, es seminorma para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Vamos a utilizar la linealidad del desarrollo asintótico, que hemos probado en la proposición 2.4.

1. Sean $f, g \in \mathscr{A}(S)$, con $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, entonces:

$$
\begin{aligned}
P_n(f+g) &= \sup_{z \in T_n, m \le n} \frac{|f(z)+g(z)-\sum_{k=0}^{m-1}(a_k+b_k)z^k|}{|z|^m} \\
&\le \sup_{z \in T_n, m \le n} \frac{|f(z)-\sum_{k=0}^{m-1} a_k z^k|}{|z|^m} + \sup_{z \in T_n, m \le n} \frac{|g(z)-\sum_{k=0}^{m-1} b_k z^k|}{|z|^m} \\
&= P_n(f)+P_n(g).
\end{aligned}
$$

2. Sean $f \in \mathscr{A}(S)$, con $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:

$$
P_n(\lambda f) = \sup_{z \in T_n, m \le n} \frac{|\lambda f(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda a_k z^k|}{|z|^m} = |\lambda| P_n(f).
$$

□

Para probar que $\mathscr{A}(S)$ es un espacio de Fréchet, vamos a probar previamente un resultado que nos dice que las aplicaciones definidas en la observación 2.6 son continuas, y usaremos el Teorema de Weierstrass, que ya enunciamos en el teorema 2.21.

Teorema 4.46. *La aplicación $c_n : \mathscr{A}(S) \to \mathbb{K}$ definida como $c_n(f) = a_n$ con $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es lineal y continua para cada $n \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Como en la observación 2.6 ya probamos que es lineal, solo nos falta probar que es continua. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Supongamos que $f_k \sim_S \sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j} z^j$ y que converge a $f \sim_S \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$ en $\mathscr{A}(S)$, es decir, para cada $m \in \mathbb{N}$, fijado $\varepsilon > 0$, existe $k_0(m,\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ tal que $P_m(f_k - f) < \varepsilon$ para cada $k \ge k_0(m,\varepsilon)$.
Basta ver que, si se dan estas condiciones, entonces $|a_{k,n} - b_n| < \varepsilon$ para cada $k \ge k_0(n+1,\varepsilon)$, puesto que se satisface que $|c_n(f_k) - c_n(f)| = |a_{k,n} - b_n|$. Por la proposición 2.8, se tiene que

$$
\lim_{z \to 0} \frac{f_k(z) - f(z) - \sum_{j=0}^{n-1}(a_{k,j} - b_j) z^j}{z^n} = a_{k,n} - b_n,
$$

por lo tanto,

$$
\lim_{z \to 0} \frac{|f_k(z) - f(z) - \sum_{j=0}^{n-1}(a_{k,j} - b_j) z^j|}{|z|^n} = |a_{k,n} - b_n|.
$$

Entonces por el criterio secuencial, se tiene que para cualquier sucesión $\{z_l\}_{l=0}^{\infty}$ de elementos de T_n que converge hacia 0, tenemos que la sucesión $\{\frac{|f_k(z_l)-f(z_l)-\sum_{j=0}^{n-1}(a_{k,j}-b_j)z_l^j|}{|z_l|^n}\}_{l=0}^{\infty}$ converge hacia $|a_{k,n}-b_n|$, luego se deduce que para cada $k \geq k_0(n+1,\varepsilon)$:

$$|a_{k,n}-b_n| \leq \sup\{\frac{|f_k(z_l)-f(z_l)-\sum_{j=0}^{n-1}(a_{k,j}-b_j)z_l^j|}{|z_l|^n} : l \in \mathbb{N}_0\}$$
$$\leq \sup_{z\in T_{n+1}, m\leq n+1} \frac{|f_k(z)-f(z)-\sum_{j=0}^{m-1}(a_{k,j}-b_j)z^j|}{|z|^m} = P_{n+1}(f_k-f) < \varepsilon.$$

□

Teorema 4.47. *$\mathscr{A}(S)$, dotado de la topología generada por la familia de seminormas $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en el lema 4.45, es un espacio de Fréchet.*

Demostración. Empecemos observando que la familia de seminormas $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ es separada ya que si $f \in \mathscr{A}(S)$ verifica que $P_n(f)=0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(z)=0$ para cada $z \in T_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como T_n es un abierto de S con puntos de acumulación y $f \in \mathcal{H}(S)$, por el principio de los ceros aislados $f \equiv 0$ en S, luego por el teorema 4.9, $\mathscr{A}(S)$ es de Hausdorff.

Solo nos falta probar que $\mathscr{A}(S)$ es completo. Sea $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathscr{A}(S)$, de manera que $f_k \sim_S \sum_{r=0}^{\infty} a_{k,r}z^r$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, fijado $\varepsilon > 0$, existe $K_0(n,\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ tal que $P_n(f_k-f_j) < \varepsilon$ para cada $k,j \geq K_0(n,\varepsilon)$. En particular, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{z\in T_n}|f_k(z)-f_j(z)| < \varepsilon$ para cada $k,j \geq K_0(n,\varepsilon)$.

Sea F un compacto contenido en S y sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de sectores circulares como la construida en la proposición 4.44, entonces como $S = \cup_{n=1}^{\infty}T_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F \subseteq T_n$ para cada $n \geq n_0$, y de aquí se deduce que $\sup_{z\in F}|f_k(z)-f_j(z)| < \varepsilon$ para cada $k,j \geq K_0(n_0,\varepsilon)$.

Puesto que para cada $k \in \mathbb{N}_0$ $f_k \in \mathcal{H}(S)$, obtenemos que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $f_k \in \mathscr{C}(F) = \mathscr{BC}(F)$, al ser F compacto, por lo tanto tenemos que $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{BC}(F)$, que es de Banach, luego existe $f_F \in \mathscr{BC}(F)$ tal que $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge uniformemente a f_F en F y como la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, se tiene que $\lim_{k\to\infty} f_k(z) = f_F(z)$ para cada $z \in F$.

Vamos a definir $f : S \to \mathbb{C}$ de la siguiente forma: si $z \in S$, existe $F \subseteq S$ compacto tal que $z \in F$, luego definimos $f(z) := f_F(z)$. Observemos que por la unicidad del límite, tenemos que f está bien definida y además, se tiene que $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge uniformemente hacia f en los compactos de S, ya que si F es un compacto de S tenemos que para cada $k \geq K_0(n_0,\varepsilon)$:

$$\sup_{z\in F}|f_k(z)-f(z)| = \sup_{z\in F}|f_k(z)-f_F(z)| < \varepsilon.$$

Entonces, por el teorema 2.21, $f \in \mathcal{H}(S)$ y $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente en los compactos de S. Veamos que $f \in \mathscr{A}(S)$. Por la proposición 2.8, tenemos que para cada $r \in \mathbb{N}_0$:

$$b_r = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{r-1} b_j z^j}{z^r} = \lim_{z\to 0} \lim_{m\to\infty} \frac{f_m(z) - \sum_{j=0}^{r-1} a_{m,j} z^j}{z^r} = \lim_{m\to\infty} a_{m,r}.$$

Por lo que, si vemos que $\{a_{m,r}\}_{m=0}^{\infty}$ es convergente para cada $r \in \mathbb{N}_0$, tenemos que los b_r existen y son finitos y $f \in \mathscr{A}(S)$. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n(f_k - f_j) < \varepsilon$ para cada $k, j \geq K_0(n, \varepsilon)$, luego como c_r es continua para cada $r \in \mathbb{N}_0$, tenemos que $|a_{k,r} - a_{j,r}| < \varepsilon$ para cada $k, j \geq K_0(r+1, \varepsilon)$, es decir, para cada $r \in \mathbb{N}_0$, tenemos que $\{a_{m,r}\}_{m=0}^{\infty}$ es de Cauchy, obteniéndose que para cada $r \in \mathbb{N}_0$, $\{a_{m,r}\}_{m=0}^{\infty}$ es convergente. Por lo tanto, $f \in \mathscr{A}(S)$, ya que $f \sim_S \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

Sean $n \in \mathbb{N}$, $z \in T_n$ y $m \leq n$, se tiene que :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|f_k(z) - f(z) - \sum_{j=0}^{m-1} (a_{k,j} - b_j) z^j|}{|z|^m} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{|f_k(z) - f(z)| + \sum_{j=0}^{m-1} |a_{k,j} - b_j||z|^j}{|z|^m} = 0,$$

deduciéndose que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} P_n(f_k - f) = 0$, es decir $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge hacia f en $\mathscr{A}(S)$, y por lo tanto $\mathscr{A}(S)$ es completo. $\square$

4.3. Problema de Momentos Generalizado

El problema que vamos a tratar a lo largo de esta sección es el siguiente:
Dado un espacio vectorial topológico X localmente convexo sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, ya sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funcionales de X' y $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión numérica cualquiera, nuestro objetivo es ver si existe $x \in X$ tal que $f_n(x) = c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En caso de que siempre exista tal x, diremos que el problema de momentos generalizado asociado a $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es resoluble.

Observación 4.48. Como en principio $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ puede ser una sucesión cualquiera, tenemos que suponer que $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de elementos linealmente independientes, ya que si tenemos una relación de dependendencia lineal entre algunas de las f_n y el problema de momentos generalizado asociado a $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es resoluble, entonces tendremos una relación de dependencia lineal entre los c_n, impidiendo que la sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ sea arbitraria.

Definición 4.49. Una sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números estrictamente positivos se dice que es una *mayorante* para una sucesión de funcionales lineales $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ si para cada $x \in X$, se tiene que:

$$\sup\{|f_n(x)| c_n^{-1} : n \in \mathbb{N}_0\} < \infty.$$

Observación 4.50. Esta definición es equivalente a que para cada $x \in X$ exista $M_x \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M_x c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Lema 4.51. *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo y tonelado. Son equivalentes:*

1. $\Phi = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$*,* $f_n \in X'$ *para cada* $n \in \mathbb{N}_0$*, tiene una mayorante,*
2. *Existe una seminorma* p *continua en* X *tal que* f_n *es* p*-acotado para cada* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Demostración. 2 $\Rightarrow$ 1) Supongamos que existe una seminorma continua p tal que f_n es p-acotado para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Sea $c_n := p^*(f_n) = \sup\{|f_n(x)| : x \in \bar{B}_p(0,1)\}$, con $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Si $x \in X$, con $p(x) = 0$, ya probamos en el corolario 4.17 que $f_n(x) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.
2. Si $x \in X$, con $p(x) > 0$, entonces $p(\frac{x}{p(x)}) \leq 1$, luego para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $|f_n(\frac{x}{p(x)})| \leq c_n$, por lo que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ obtenemos que $|f_n(x)| \leq c_n p(x)$.

Por lo tanto, por la observación 4.50 llegamos a que Φ tiene una mayorante.

1 $\Rightarrow$ 2) Supongamos que Φ tiene una mayorante $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. Sea

$$B := \{x \in X : |f_n(x)| \leq c_n, \forall n \in \mathbb{N}_0\} = \cap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}([-c_n, c_n]), \tag{4.2}$$

que es cerrado ser la intersección de conjuntos cerrados (observemos que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ al ser f_n continua, $f_n^{-1}([-c_n, c_n])$ es cerrado). Veamos que B es un tonel:

1. Sean $x, y \in B$ y sea $t \in [0,1]$, $|f_n(tx + (1-t)y)| = |tf_n(x) + (1-t)f_n(y)| \leq t|f_n(x)| + (1-t)|f_n(y)| \leq tc_n + (1-t)c_n = c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, por lo tanto $tx + (1-t)y \in B$, es decir, B es convexo.
2. Sea $a \in \mathbb{K}$, $|a| \leq 1$, se tiene que $aB = \{ax : x \in B\}$. Sea $x \in B$, se tiene que $|f_n(ax)| = |a||f_n(x)| \leq |f_n(x)| \leq c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, luego $ax \in B$, por lo que B es equilibrado.
3. Sea $x \in X$. Como Φ tiene una mayorante, existe $M_x > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, se verifica que $|f_n(x)| \leq M_x c_n$. Por lo tanto, si $|c| \geq M_x$, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $|f_n(x)| \leq |c|c_n$, luego $\frac{x}{|c|} \in B$, es decir, $x \in |c|B$ y B es absorbente.

Por lo tanto, B es un tonel y como X es un espacio tonelado, B es un entorno del 0. Sea $p_B : X \to [0, \infty)$ el funcional de Minkowski de B definido de la siguiente manera: $p_B(x) := \inf\{r \in \mathbb{R}, r > 0 : x \in rB\}$. Observemos que como B es un tonel, este ínfimo existe y es finito. Veamos que p_B es seminorma:

1. $p_B(x) \geq 0$ para cada $x \in X$ por la definición de p_B.
2. Sean $x, y \in X$, $p_B(x+y) = \inf\{r \in \mathbb{R}, r > 0 : x + y \in rB\} \leq \inf\{r \in \mathbb{R}, r > 0 : x \in rB\} + \inf\{r \in \mathbb{R}, r > 0 : y \in rB\} = p_B(x) + p_B(y)$.
3. Sea $x \in X$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $p_B(\lambda x) = \inf\{r \in \mathbb{R}, r > 0 : \lambda x \in rB\}$. Como $\lambda x \in rB$, entonces por (4.2), para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $|f_n(\lambda x)| \leq r c_n$, luego $|f_n(x)| \leq \frac{r}{|\lambda|} c_n$, por lo tanto $x \in \frac{r}{|\lambda|} B$. Luego se tiene que si $R = p_B(\lambda x)$, entonces $\frac{R}{|\lambda|} = p_B(x)$, es decir, $p_B(\lambda x) = |\lambda| p_B(x)$.

Por lo tanto, p_B es una seminorma continua, ya que B es un entorno de 0 (basta observar que para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $p_B^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$ contiene por definición al conjunto εB, que es un entorno de 0). Sea $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $p_B^*(f_n) = \sup\{|f_n(x)| : x \in B_p(0,1)\} = \sup\{|f(x)|$:existe $r \in \mathbb{R}, 0 < r < 1, x \in rB\}$. Como B es equilibrado, $rB \subseteq B$, por lo tanto $p_B^*(f_n) \leq \sup\{|f_n(x)| : x \in B\}$. Además, por (4.2) se tiene que $|f_n(x)| \leq c_n$ para cada $x \in B$, luego $p_B^*(f_n) \leq c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

□

Notación 4.52. Dado un conjunto $A \subseteq X$ numerable, se define el espacio generado por A, que denotaremos por $\langle A \rangle$, como el conjunto: $\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k : n \in \mathbb{N}, a_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$.

Definición 4.53. Si $M = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión linealmente independiente de elementos de un espacio lineal, entonces una sucesión en bloque de M se define como:

$$y_k = \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_k^j x_j,$$

donde $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una subsucesión de los números naturales.

Lema 4.54. *Sea $\Phi = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión linealmente independiente. Supongamos que existe una sucesión linealmente independiente $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de $\Lambda = \langle \Phi \rangle$ con una mayorante $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. Entonces existe una sucesión en bloque de la sucesión Φ que tiene una mayorante.*

Demostración. Como $g_n \in \Lambda$, entonces $g_n = \sum_{j=m_n}^{M_n} \mu_j^n f_j$ donde $\mu_{m_n}^n$ y $\mu_{M_n}^n$ no son nulos. Se tiene que, realizando un proceso similar a la eliminación Gaussiana, podemos coger una subsucesión $\{g_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ de $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ de manera que la sucesión $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida como $h_k = g_{n_k} - \sum_{j=0}^{k-1} \rho_j^k g_{n_j}$ tiene la siguiente forma:

$$h_k = \sum_{j=p_k}^{q_k} \theta_j^k f_j,$$

donde $\theta_{p_k}^k$ y $\theta_{q_k}^k$ son no nulos y donde las sucesiones $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ son estrictamente crecientes. Además, podemos escoger una subsucesión $\{h_{k_l}\}_{l=0}^{\infty}$ de $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ de manera que se cumpla que $p_{k_{l+1}} > q_{k_l}$ para cada $l \in \mathbb{N}_0$. A su vez, se tiene que para cada $l \in \mathbb{N}_0$, $h_{k_l} \neq 0$ ya que si fuese 0, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ no sería linealmente independiente, entonces $\{h_{k_l}\}_{l=0}^{\infty}$ es una sucesión en bloque de Φ.
Acabemos la demostración probando que esta subsucesión tiene como mayorante a $\{d_{n_l}\}_{l=0}^{\infty}$, definida como $d_{n_l} = c_{n_{k_l}} + \sum_{j=0}^{k_l-1} |\rho_j^{k_l}| c_{n_j}$. Recordemos que $h_{k_l} = g_{n_{k_l}} - \sum_{j=0}^{k_l-1} \rho_j^{k_l} g_{n_j}$, entonces $|h_{k_l}(x)| \leq |g_{n_{k_l}}(x)| + \sum_{j=0}^{k_l-1} |\rho_j^{k_l}||g_{n_j}(x)|$. Si $x \in X$, se tiene que:

$$\sup_{l\in\mathbb{N}_0}\{|h_{k_l}(x)|d_{n_l}^{-1}\} \leq \sup_{l\in\mathbb{N}_0}\{|g_{n_{k_l}}(x)|d_{n_l}^{-1}\} + \sum_{j=0}^{k_l-1} |\rho_j^{k_l}| \sup_{l\in\mathbb{N}_0}\{|g_{n_j}(x)|d_{n_l}^{-1}\} \tag{4.3}$$

Observemos que para cada $l \in \mathbb{N}_0$, $d_{n_l} \geq c_{n_{k_l}}$ y para todo $j = 0, 1, ..., k_l - 1$, $d_{n_l} \geq |\rho_j^{k_l}| c_{n_j}$, luego (4.3) queda así:

$$\sup\{|h_{k_l}(x)|d_{n_l}^{-1} : l \in \mathbb{N}_0\} \leq \sup\{|g_{n_{k_l}}(x)|c_{n_{k_l}}^{-1} : l \in \mathbb{N}_0\} + \sum_{j=0}^{k_l-1} \sup\{|g_{n_j}(x)|c_{n_j}^{-1} : l \in \mathbb{N}_0\},$$

y como $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene como mayorante a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, concluimos. □

Teorema 4.55. *Sea X un espacio de Fréchet y sea $\Phi = \{f_n\}$ una sucesión de elementos de X'. Son equivalentes:*

1. *El problema de momentos generalizado asociado a Φ es resoluble.*

2. *Para cada sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números positivos, existe $x \in X$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $f_n(x) \neq 0$ y $|f_{n+1}(x)f_n^{-1}(x)| \geq c_n$.*

3. *La sucesión Φ es linealmente independiente y ninguna sucesión en bloque tiene una mayorante.*

4. *La sucesión Φ es linealmente independiente y ninguna sucesión linealmente independiente de elementos de $\Lambda = \langle \Phi \rangle$ tiene una mayorante.*

5. *Existe una sucesión creciente de seminormas $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, es decir, $p_{n+1}(x) \geq p_n(x)$ para cada $x \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}_0$, que definen la topología en X, y tal que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, f_n es p_{n+1}-acotado pero no es p_n-acotado.*

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$) Sean $b_0 = 1$ y $b_n = \prod_{j=0}^{n-1} c_j$ para $n \geq 1$. Por 1, existe un $x \in X$ tal que $f_n(x) = b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, luego $|f_{n+1}(x) f_n^{-1}(x)| = c_n$.

$2 \Rightarrow 3$) Tenemos que probar la independencia de Φ, es decir, que ningún funcional de la siguiente forma es nulo:

$$g = f_n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j f_j.$$

Aplicando 2 con la sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida como $c_j = 1$, $j = 0, ..., n-1$ y $c_n = c = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} |\lambda_j|$ tenemos que existe $x \in X$ tal que $|f_j(x)| \geq |f_{j-1}(x)|$ si $1 < j < n$, $f_0(x) = 1$ y además $|f_n(x)| \geq c|f_{n-1}(x)|$. Entonces, por la segunda desigualdad triangular:

$$|g(x)| = |f_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j f_j(x)| \geq \left| |f_n(x)| - \sum_{j=0}^{n-1} |f_j(x)||\lambda_j| \right|.$$

Como para todo j, $0 \leq j < n$, se tiene que $|f_j(x)| \leq |f_{n-1}(x)| \leq c^{-1}|f_n(x)|$, entonces se tiene que :

$$|g(x)| \geq \left| |f_n(x)| c^{-1} (c - \sum_{j=0}^{n-1} |\lambda_j|) \right| = |f_n(x)| c^{-1},$$

por la definición de c. Como $|f_n(x)| \geq c|f_0(x)|$, se tiene que $|g(x)| \geq c|f_0(x)|c^{-1} = |f_0(x)| = 1$, por lo tanto $g \neq 0$.

Razonemos por reducción al absurdo para probar la segunda parte. Supongamos que existe una sucesión en bloque que tiene una mayorante $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, es decir, existen dos sucesiones estrictamente crecientes de números naturales, $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$, que verifican que la sucesión $g_k = \sum_{j=n_k}^{m_k} \lambda_j f_j$ tiene una mayorante. Observemos que se tiene que cumplir que $n_k \leq m_k \leq n_{k+1}$ y supondremos que $\lambda_j \in \mathbb{K}$, $\lambda_{m_k} \lambda_{n_k} \neq 0$ y que la sucesión $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ es creciente. Para $m_{k-1} < j < n_k$, ponemos $\lambda_j = 0$.

Sea $b_n = 1$ si $n \neq m_k - 1$ y sea $b_n = 1 + 2c_{n+1}|\lambda_{n+1}^{-1}|(n+1) + 2|\lambda_{n+1}^{-1}| \sum_{j=0}^{n} |\lambda_j|$ si $n = m_k - 1$.

Nótese que si $n = m_k - 1$ entonces $n+1 = m_k$, luego $\lambda_{n+1} \neq 0$. Por 2, existe $x \in X$ tal que $f_0(x) = 1$ y $|f_{n+1}(x)| \geq b_n |f_n(x)|$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, luego tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}|g_k(x)| &= |\lambda_{m_k} f_{m_k}(x) + \sum_{j=n_k}^{m_k-1} \lambda_j f_j(x)| \geq |\lambda_{m_k} f_{m_k}(x)| - |\sum_{j=n_k}^{m_k-1} \lambda_j f_j(x)| \\ &\geq |\lambda_{m_k}||f_{m_k}(x)| - \sum_{j=n_k}^{m_k-1} |\lambda_j||f_j(x)|.\end{aligned}$$

Observemos que $|f_j(x)| \leq b_j^{-1}|f_{j+1}(x)| \leq b_j^{-1} b_{j+1}^{-1} \dots b_{m_k-1}^{-1} |f_{m_k}(x)|$, y como el único que es distinto de 1 es b_{m_k-1}, se tiene que $|f_j(x)| \leq b_{m_k-1}^{-1}|f_{m_k}(x)|$, por lo que:

$$|g_k(x)| \geq |\lambda_{m_k}||f_{m_k}(x)| - b_{m_k-1}^{-1}|f_{m_k}(x)| \sum_{j=n_k}^{m_k-1} |\lambda_j|.$$

Dado que $b_{m_k-1} \geq 2|\lambda_{m_k}|^{-1} \sum_{j=n_k}^{m_k-1} |\lambda_j|$, tenemos que $-b_{m_k-1}^{-1} \geq -\frac{1}{2}|\lambda_{m_k}| \frac{1}{\sum_{j=n_k}^{m_k-1}|\lambda_j|}$, luego se deduce que:

$$|g_k(x)| \geq \frac{1}{2}|\lambda_{m_k}||f_{m_k}(x)| \geq \frac{1}{2}|\lambda_{m_k}| b_{m_k-1} |f_{m_k-1}(x)|.$$

Puesto que $b_{m_k-1} \geq 2 c_{m_k} m_k |\lambda_{m_k}|^{-1}$, se tiene lo siguiente:

$$|g_k(x)| \geq c_{m_k} m_k |f_{m_k-1}(x)| \geq k c_k |f_{m_k-1}(x)| \geq k c_k b_{m_k-2} \dots b_0 \geq k c_k,$$

lo que contradice que $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ sea una mayorante de $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$.

$3 \Rightarrow 4$) Supongamos que no se cumple 4, entonces existe una sucesión linealmente independiente de elementos de $\Lambda = \langle \Phi \rangle$ que tiene una mayorante, y por el lema 4.54, existe una sucesión en bloque de Φ que tiene una mayorante, luego tampoco se verifica 3.

$4 \Rightarrow 5$) Sea $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión creciente de seminormas que generan la topología de X, que sabemos que existe tal sucesión por la observación 4.29. Por 4 y por el lema 4.51, se tiene que $\Lambda_n = \{f \in \Lambda : f \text{ es } q_n\text{-acotada}\}$ es un subespacio vectorial de Λ de dimensión finita, ya que si no lo fuese entonces encontraríamos una sucesión de elementos de Λ de manera que sea q_n-acotada, y por el lema 4.51, esta sucesión tendría una mayorante, en contra de 4.
Como la sucesión $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ es creciente, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\Lambda_n \subseteq \Lambda_{n+1}$. Para cada $f \in \Lambda$, tenemos que $f \in X'$ y por el corolario 4.15, tenemos que existe una seminorma Q continua en X que verifica que f es Q-acotado, y existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $Q(x) \leq q_k(x)$ para cada $x \in X$. Por lo tanto, f es q_k-acotado y $f \in \Lambda_k$. Entonces, se tiene que $\Lambda = \cup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$.
Sea m_n el mínimo número natural que verifica que $\Lambda_n \subseteq \langle f_0, f_1, ..., f_{m_n} \rangle$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $\Lambda_n \subseteq \Lambda_{n+1}$, por lo que $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente y $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \infty$. Podemos

suponer, recurriendo a una subsucesión de $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$, que la sucesión $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ es estrictamente creciente.

Pongamos $m_{-1} := 0$, $q_{-1}(x) = 0$ para cada $x \in X$, y supongamos que $m_0 > 1$.

Definamos la sucesión $\{p_m\}_{m=0}^{\infty}$ de seminormas como:

$$p_0(x) = 0; \quad p_m(x) = q_{n-1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} |f_j(x)|, \quad x \in X, \tag{4.4}$$

si $m_{n-1} < m \leq m_n$ y $m \geq 1$. Claramente, $\{p_m\}_{m=0}^{\infty}$ es creciente.

Efectivamente, para cada $m \in \mathbb{N}$, p_m es seminorma ya que para cada $x, y \in X$ y $c \in \mathbb{K}$:

1. $p_m(x+y) = q_{n-1}(x+y) + \sum_{j=0}^{m-1} |f_j(x+y)| \leq q_{n-1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} |f_j(x)| + q_{n-1}(y) + \sum_{j=0}^{m-1} |f_j(y)| = p_m(x) + p_m(y)$.

2. $p_m(cx) = q_{n-1}(cx) + \sum_{j=0}^{m-1} |f_j(cx)| = |c|(q_{n-1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} |f_j(x)|) = |c| p_m(x)$.

Como la topología de X es generada por $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $p_m \geq q_n$ si $m > m_n$ por (4.4), se tiene que también es generada por $\{p_m\}_{m=0}^{\infty}$. A su vez, también se deduce de (4.4) que $|f_m(x)| \leq p_{m+1}(x)$ para cada $x \in X$ y por lo tanto, f_m es p_{m+1}-acotada.

Probemos por reducción al absurdo que f_m no es p_m-acotada. Si f_m fuese p_m-acotada, entonces existiría $c \geq 0$ tal que para cada $x \in X$, $|f_m(x)| \leq c \cdot p_m(x) = c(q_{n-1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} |f_j(x)|)$.

Pero entonces existen λ_0, ..., $\lambda_{m-1} \in \mathbb{K}$ tales que $f = f_m + \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j f_j$ es q_{n-1}-acotado. Entonces $f \in \Lambda_{n-1} \subseteq \langle f_0, ..., f_{m_{n-1}} \rangle$, pero como $m > m_{n-1}$, entramos en contradicción con respecto a la independencia lineal de Φ.

$5 \Rightarrow 1$) Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathbb{K}$. Tenemos que probar que existe $x \in X$ tal que $f_n(x) = c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Por 5, existe una sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ creciente de seminormas de X que define la topología de X de manera que f_n no es p_n-acotado pero es p_{n+1}-acotado para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Vamos a probar por inducción que podemos elegir una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de X que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\forall i \leq j, f_i(\sum_{k=0}^{j} x_k) = c_i. \tag{4.5}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0, p_k(x_k) \leq 2^{-k}. \tag{4.6}$$

Como f_0 no es continua en (X, p_0), por el lema 4.25, tenemos que existe $x_0 \in X$ tal que $f_0(x_0) = c_0$ y que verifica que $p_0(x_0) \leq 2^0$. Por inducción, supongamos que $n \geq 1$ y que

existen $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ que verifican (4.5) y (4.6). Vamos a construir x_n.
Como $f = f_n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j f_j$ no es continua en (X, p_n) para cada $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ al no serlo f_n, entonces f no es continua en $H = \cap_{j=0}^{n-1} \ker(f_j)$, luego como en H, $f = f_n$, f_n no es continua en (H, p_n). Por el lema 4.25, tenemos que existe $x_n \in H$ tal que $f_n(x_n) = c_n - f_n(\sum_{j=0}^{n-1} x_j)$ y que verifica que $p_n(x_n) \leq 2^{-n}$. Entonces llegamos a que x_0,x_1,...,x_n satisfacen las condiciones (4.5) y (4.6) ya que como $x_n \in H$, entonces si $j < n$, $f_j(x_n) = 0$.
Además, por la monotonía de $\{p_m\}_{m=0}^{\infty}$ se tiene que para cada $k \geq n$, $p_n(x_k) \leq p_k(x_k) \leq 2^{-k}$ y por lo tanto, tenemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge en X. Sea $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, por la condición (4.5) y por la continuidad de f_n tenemos que $f_n(x) = c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, por lo que el problema de momentos es resoluble. $\square$

Ahora una vez probado el teorema, vamos a demostrar una serie de resultados que se deducen de este:

Corolario 4.56. *Sea X un espacio de Fréchet, $\Phi = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X'. Son equivalentes:*

1. *Φ no tiene una mayorante.*
2. *Existe una subsucesión de la sucesión Φ para la cual el problema de momentos generalizado asociado es resoluble.*
3. *Existe una sucesión en bloque de la sucesión Φ para la cual el problema de momentos generalizado asociado es resoluble.*
4. *Para cada seminorma continua p en X, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que f_n no es p-acotado.*

Demostración. $1 \Leftrightarrow 4$) Se deduce del lema 4.51, ya que 1 y 4 son las negaciones de las dos equivalencias de este lema.

$2 \Rightarrow 3$) Está claro, ya que una subsucesión es una sucesión en bloque simplemente tomando $a_k^j = 0$ para cada $j \neq n_k$ y $a_k^{n_k} = 1$ si $k \in \mathbb{N}_0$.

$3 \Rightarrow 1$) Probémoslo por contrarrecíproco. Supongamos que Φ tiene una mayorante, entonces cualquier sucesión en bloque de una sucesión en bloque, S, de Φ tiene una mayorante, por lo tanto no se verifica la condición 3 del teorema anterior para S, luego el problema de momentos generalizado asociado a S no es resoluble, entonces no se verifica 3.

$1 \Rightarrow 2$) Sea $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión creciente de seminormas que definen la topología de X. Vamos a probar por inducción la existencia de dos sucesiones estrictamente crecientes $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números naturales tales que f_{k_n} no es p_{m_n}- acotado y es $p_{m_{n+1}}$-acotado.

Tomamos $m_0 = 1$, como Φ no tiene una mayorante, por el lema 4.51 se tiene que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que f_{k_0} no es p_{m_0}-acotado. Supongamos que para cada $j \leq n-1$ existen m_j y k_j que verifican lo pedido. Como $f_{k_{n-1}}$ es continua, por la observación 4.20, existe $m_n > m_{n-1}$ tal que $f_{k_{n-1}}$ es p_{m_n}-acotado. Aplicando otra vez el lema 4.51, llegamos a que existe $k_n > k_{n-1}$ tal que f_{k_n} no es p_{m_n}-acotado.

Luego por inducción, hemos probado que es cierto, y si aplicamos el teorema 4.55 a la sucesión $\{f_{k_n}\}_{n=0}^{\infty}$, que verifica 5, llegamos a que esta subsucesión de Φ verifica que es linealmente independiente y que el problema de momentos generalizado asociado a $\{f_{k_n}\}_{n=0}^{\infty}$ es resoluble.

$\square$

Corolario 4.57. *Sea X un espacio de Fréchet y sean $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones de elementos de X' tales que $\{f_n - g_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene una mayorante y se verifica que el problema de momentos generalizado asociado a $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es resoluble. Entonces el problema de momentos generalizado asociado a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ es resoluble si y solo si la sucesión $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ es linealmente independiente.*

Demostración. $\Rightarrow$) Como el problema de momentos asociado a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ es resoluble, por el teorema 4.55, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ es linealmente independiente.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ es linealmente independiente. Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existe una sucesión en bloque de $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$, $w_k = \displaystyle\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_k^j g_j$, que tiene una mayorante.

Como $\{f_n - g_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene una mayorante, cualquier sucesión en bloque de $\{f_n - g_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene una mayorante, por lo que $y_k = \displaystyle\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_k^j (f_j - g_j)$ tiene una mayorante. Probemos que $z_k = y_k + w_k = \displaystyle\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_k^j f_j$ tiene una mayorante:

Como las sucesiones $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ tienen una mayorante, existen sucesiones $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ de números positivos tales que para cada $x \in X$, se tiene que existen $M_x, N_x > 0$ tales que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $|y_k(x)| \leq M_x c_k$ y $|w_k(x)| \leq N_x d_k$, luego para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $|z_k(x)| \leq |y_k(x)| + |w_k(x)| \leq M_x c_k + N_x d_k \leq \text{máx}\{M_x, N_x\}(c_k + d_k)$.

Por lo tanto, $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ tiene como mayorante a $\{c_k + d_k\}_{k=0}^{\infty}$. Sin embargo, como es una sucesión en bloque de $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, llegaríamos, por el teorema 4.55, a que el problema de momentos generalizado asociado a $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ no sería resoluble, llegando a un absurdo. $\square$

Corolario 4.58. *Sea X un espacio de Fréchet, $g_1, ..., g_m \in X'$ y sea $\Phi = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión para la cual el problema de momentos generalizado es resoluble. Entonces si $\Pi = \Phi \cup \{g_1, ..., g_m\}$ es linealmente independiente, el problema de momentos generalizado asociado a Π es resoluble.*

Demostración. Si el problema de momentos generalizado asociado a Π no fuese resoluble, por la equivalencia $1 \Leftrightarrow 3$ en el teorema 4.55, existiría una sucesión en bloque, S, de Π con una mayorante. Si tomamos los términos de S que no involucren a los $\{g_1, ..., g_m\}$, tendríamos una sucesión en bloque de Φ que tiene una mayorante. Por lo tanto, el problema de momentos generalizado asociado a Φ no sería resoluble, llegando a un absurdo. $\square$

4.4. Aplicaciones del Teorema

En esta sección daremos una prueba alternativa, basada en el estudio de problemas de momentos genralizados, de dos de los tres teoremas presentados en los otros capítulos, en concreto, del Teorema de Borel y del Problema de Momentos de Stieltjes en $\mathscr{S}(0, \infty)$.

Notación 4.59. Denotaremos como Ω a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.60. Se define el espacio de las funciones test, $\mathcal{D}(\Omega)$, como

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : f \in \mathscr{C}_c^{\infty}(\Omega, \mathbb{C})\}.$$

A continuación, nos limitaremos a definir la topología de $\mathcal{D}(\Omega)$ secuencialmente.

Definición 4.61. Diremos que la sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge hacia f en $\mathcal{D}(\Omega)$, si existe $K \subseteq \Omega$ compacto tal que $\text{sop}(f_n) \subseteq K$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, y además $D^{\alpha} f_n \longrightarrow D^{\alpha} f$ uniformemente en K para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Definición 4.62. Una distribución es una aplicación $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal y continua, es decir, un elemento del dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$. El espacio de las distribuciones se representa por $\mathcal{D}'(\Omega)$.
El dual topológico de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ se puede identificar con un subespacio de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, y por ello recibe el nombre de espacio de distribuciones temperadas.

Notación 4.63. Se define el orden de $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, que denotaremos por $|\alpha|$, como $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Definición 4.64. Dada una distribución T, se define su derivada de orden $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, que se denota como $D^\alpha T$, como $D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi)$.

Definición 4.65. Se define el orden de una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, que denotaremos por $\sigma(T)$, como el menor $m \in \mathbb{N}_0$ que verifica que para cada K compacto, existe $M > 0$ tal que para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\mathrm{sop}(\varphi) \subseteq K$, se tiene que $|T(\varphi)| \leq M \sup\{|D^\alpha \varphi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq m\}$.

Lema 4.66. *Sea $\{g_m\}_{m=0}^\infty$ una sucesión de elementos de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ y pongamos $\sigma_m := \sigma(g_m)$, $m \in \mathbb{N}_0$. Si se tiene que $\sup\limits_{m \in \mathbb{N}_0} \sigma_m = \infty$, entonces $\{g_m\}_{m=0}^\infty$ no tiene una mayorante.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que $\{g_m\}_{m=0}^\infty$ es una sucesión de distribuciones temperadas que verifican que $\sup\{\sigma_m : m \in \mathbb{N}_0\} = \infty$ y que tiene una mayorante. Pasando a una subsucesión adecuada si es preciso, no es restricción suponer que para la sucesión $\{g_m\}_{m=0}^\infty$ se tiene que $\{\sigma_m\}$ tiende hacia ∞.
Como $\{g_m\}_{m=0}^\infty$ tiene una mayorante, por el lema 4.51 y como la sucesión de seminormas definida en el lema 4.34 es creciente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que g_m es P_{n_0}-acotado para cada $m \in \mathbb{N}_0$. Sea $C_m = \sup\{|g_m(f)| : P_{n_0}(f) \leq 1\}$, $m \in \mathbb{N}_0$, se tiene que:

1. Por la observación 4.35, si $P_{n_0}(f) = 0$, entonces $f = 0$.

2. Si $P_{n_0}(f) > 0$, se tiene que $|g_m(f)| = |g_m(\dfrac{f}{P_{n_0}(f)})| P_{n_0}(f) \leq C_m P_{n_0}(f)$.

Por lo tanto, para cada $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ y para cada $m \in \mathbb{N}_0$, $|g_m(f)| \leq C_m P_{n_0}(f)$.
Sea K un compacto de $\mathbb{R}$, entonces existe $M > 1$ tal que si $x \in K$, $|x| \leq M$. Sea $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, con $\mathrm{sop}(f) \subseteq K$. Puesto que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} |g_m(f)| &\leq C_m P_{n_0}(f) = C_m \sup\{|x^j f^{(k)}(x)| : x \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n_0, 0 \leq k \leq n_0\} \\ &\leq C_m M^{n_0} \sup\{|f^{(k)}(x)| : x \in K, 0 \leq k \leq n_0\}. \end{aligned}$$

Luego $\sigma_m \leq n_0$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$, en contra de que $\sup\limits_{m \in \mathbb{N}_0} \sigma_m = \infty$. □

Teorema 4.67. *Sean $\Phi = \{f_n\}_{n=0}^\infty$ una sucesión de elementos de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ y $\sigma_n = \min\{\sigma(f_n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j f_j) : \lambda_j \in \mathbb{K}\}$. Si $\sigma_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces el problema de momentos generalizado asociado a Φ es resoluble.*

Demostración. Veamos que podemos aplicar el lema 4.66 a una sucesión en bloque de $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.
Sea $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en bloque de $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida como $g_k := f_{n_k} + \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k-1} a_k^j f_j$, entonces por la propia definición de σ_{n_k}, se tiene que $\sigma_{n_k} \leq \sigma(g_k)$. Como $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, llegamos a que $\sup\{\sigma(g_k) : k \in \mathbb{N}_0\} = \infty$. Entonces, por el lema 4.66, $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ no tiene una mayorante y aplicando el teorema 4.55, llegamos a que el problema de momentos generalizado asociado a Φ es resoluble. $\square$

Corolario 4.68. *Sea $\Phi = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ tal que $\{\sigma(f_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es estrictamente creciente. Entonces el problema de momentos generalizado asociado a Φ es resoluble.*

Demostración. Sea $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en bloque de $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, entonces también tenemos que $\{\sigma(g_k)\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, luego se tiene que $\sup\{\sigma(g_k) : k \in \mathbb{N}_0\} = \infty$. Por lo tanto, $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ no tiene una mayorante, luego por el teorema 4.55 tenemos que el problema de momentos generalizado asociado a Φ es resoluble. $\square$

Ahora daremos una prueba del teorema 1.7, donde lo podremos ver como un caso particular del problema de momentos generalizado en el que estamos trabajando.

Corolario 4.69 (Teorema de Borel). *Para cualquier sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos, existe $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ tal que $f^{(n)}(0) = c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Hemos visto en la proposición 4.36 que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ era un espacio de Fréchet.
Sea $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de distribuciones temperadas, donde $g_n : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ está definida como $g_n(\varphi) = \varphi^{(n)}(0)$. Veamos que verifica las hipótesis del corolario anterior.
Observemos que $g_0 = \delta_0$ y que se tiene que $g_n = (-1)^n \delta_0^{(n)}$. Además, también se verifica que $\sigma(g_0) = 0$, ya que para cada compacto K y para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, con $\operatorname{sop}(\varphi) \subseteq K$, se tiene que $|\delta_0(\varphi)| = |\varphi(0)| \leq \sup\{|\varphi(x)| : x \in K\}$. Análogamente, probamos por inducción que $\sigma(g_n) = n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, por lo tanto, la sucesión $\{\sigma(g_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es estrictamente creciente, y por el corolario anterior, el problema de momentos generalizado asociado a $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ es resoluble. $\square$

Por lo tanto, puesto que $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, obtenemos una versión refinada del teorema clásico de Borel.
Ahora presentaremos unos resultados con los que obtendremos que el Problema de Momentos de Stieltjes admite solución en el espacio de funciones de Schwartz con soporte en $(0, \infty)$.

Notación 4.70. $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Teorema 4.71. *Sea $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones localmente integrables, $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ que verifican lo siguiente:*

1. $\lim\limits_{t\to\infty} |G_{n+1}(t)G_n^{-1}(t)| = \infty$, *siendo* $G_n(t) = \displaystyle\int_0^t g_n(s)ds$.

2. *Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que* $\limsup\limits_{t\to\infty} G_k(t)t^{-n} = 0$ *y* $\lim\limits_{t\to\infty} G_n(t)t^{-k} = \infty$.

Entonces el problema de momentos generalizado asociado a la sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{S}'(0,\infty)$ definida como $f_n(\varphi) = \displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(t)g_n(t)dt$, con $n \in \mathbb{N}_0$, es resoluble.

Demostración. Veamos que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, f_k está bien definida. Sea $\varphi \in \mathscr{S}(0,\infty)$.

$$\int_0^{\infty} \varphi(t)g_k(t)dt = \varphi(t)G_k(t)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi'(t)G_k(t)dt. \tag{4.7}$$

Observemos que $G_k(0) = 0$ y que por 2, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)G_k(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)t^nG_k(t)t^{-n} = 0$. A su vez, tenemos que $\int_0^{\infty} \varphi'(t)G_k(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{\varphi'(t)t^{n+2}G_k(t)t^{-n}}{t^2}dt$, y por 2 y como $\varphi \in \mathscr{S}(0,\infty)$, para $\varepsilon > 0$ fijo, existe $M > 0$ tal que $|G_k(t)t^{-n}| < \varepsilon$ y $|\varphi'(t)t^{n+2}| < \varepsilon$ si $t > M$, luego si $t > M$, $\frac{\varphi'(t)t^{n+2}G_k(t)t^{-n}}{t^2} < \frac{\varepsilon^2}{t^2}$, por lo tanto por el criterio de comparación, tenemos que $\displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(t)g_k(t)dt < \infty$, luego f_k está bien definida.
Ahora probemos que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $f_n \in \mathscr{S}'(0,\infty)$. Sea $n \in \mathbb{N}_0$, es claro que f_n es lineal. Por (4.7), tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{\infty} \varphi(t)g_k(t)dt\Big| &\leq \int_0^{\infty} |\varphi'(t)|G_k(t)dt = \int_0^{M} |\varphi'(t)|G_k(t)dt + \int_M^{\infty} |\varphi'(t)|G_k(t)dt \\ &\leq P_1(\varphi)\int_0^{M} G_k(t)dt + P_{n+2}(\varphi)\int_M^{\infty} \frac{G_k(t)t^{-n}}{t^2}dt \\ &\leq P_1(\varphi)G_k(M)M + P_{n+2}(\varphi)\int_M^{\infty} \frac{\varepsilon}{t^2}dt \leq (G_k(M)M + \int_M^{\infty} \frac{\varepsilon}{t^2}dt)P_{n+2}(\varphi).\end{aligned}$$

Luego por el corolario 4.15, f_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}_0$.
Por el teorema 4.55, basta probar que cualquier sucesión $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida como $\mu_k = f_{n_k} - \displaystyle\sum_{j=0}^{n_k-1} \lambda_j^k f_j$ no tiene una mayorante para cualquier sucesión $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ de números naturales y para cada $\lambda_j^k \in \mathbb{K}$. Como vimos en el lema 4.34, la familia de seminormas $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ define la topología de $\mathscr{S}$, luego definen la de $\mathscr{S}(0,\infty)$, por lo tanto por el lema 4.51, basta con probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $k \in \mathbb{N}_0$ tal que μ_k no es P_n-acotado.
Razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que todos los μ_k están P_n-acotados, para algún $n \in \mathbb{N}$. Considerando 2 con $n+1$, tengo que existe un $k \in \mathbb{N}_0$ tal

que $\limsup_{t\to\infty} G_m(t)t^{-n-1} = \infty$, donde $m = n_k$ y, por 1, se tiene que si $j > l$, entonces $\lim_{t\to\infty} \frac{G_j(t)}{G_l(t)} = \infty$. Por lo tanto, se tiene que $\lim_{t\to\infty} \frac{G_l(t)}{G_j(t)} = 0$. Luego, fijado $\varepsilon = 1 > 0$, se tiene que para cada $j = 0...m-1$, existe $N_j > 0$ tal que $\frac{G_j(t)}{G_m(t)} \leq \frac{1}{2m\lambda_j^k}$ si $t > N_j$.
Por lo tanto, si $T > \max\{1, N_0, ..., N_{m-1}\}$, se tiene que si $t > T$:

$$2|\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^k \frac{G_j(t)}{G_m(t)}| \leq 1,$$

por lo que se tiene lo siguiente:

$$2|\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^k G_j(t)| \leq G_m(t). \tag{4.8}$$

Integrando por partes de un modo análogo a como hicimos en (4.7), llegamos a que

$$\mu_k = -\int_0^\infty (G_m(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^k G_j(t))\varphi'(t)dt = \eta(\varphi) + \psi(\varphi),$$

con $\eta(\varphi) = -\int_T^\infty (G_m(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^k G_j(t))\varphi'(t)dt$ y $\psi(\varphi) = -\int_0^T (G_m(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^k G_j(t))\varphi'(t)dt$.
Veamos que ψ está P_n-acotado. Sea $\varphi \in \mathscr{S}(0,\infty)$, $P_n(\varphi) < 1$, entonces se tiene que:

$$|\psi(\varphi)| \leq \int_0^T |(G_m(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^k G_j(t))||\varphi'(t)|dt \leq \int_0^T (G_m(t) + \sum_{j=0}^{m-1} |\lambda_j^k| G_j(t))|\varphi'(t)|dt, \tag{4.9}$$

luego como $P_n(\varphi) < 1$, se tiene que $|\varphi'(t)| < 1$ para cada $t \in [0,T]$. Además, para cada $t \in [0,T]$ se tiene que para cada $j = 0,...,m$, $G_j(t) \leq G_j(T)$, por lo tanto (4.9) queda acotada por:

$$\int_0^T (G_m(T) + \sum_{j=0}^{m-1} |\lambda_j^k| G_j(T))dt = T(G_m(T) + \sum_{j=0}^{m-1} |\lambda_j^k| G_j(T)) < \infty,$$

por lo que ψ está P_n-acotado, lo que implica que η está P_n-acotado.
Sean $x, y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ tales que $x(t) \geq 0$ para cada $t \geq 0$, $x^{(j)}(0) = 0$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$, $x(t) = t^{-n}$ si $t > 1$, $y(t) = 1$ si $t < 1$ e $y(t) = 0$ si $t > 2$. Sea $u > 0$, consideramos $y_u(t) = x(t)y(\frac{t}{u})$, con $t \geq 0$. Como η es P_n-acotada, entonces la sucesión $\{\eta(y_{n_k})\}_{k=0}^\infty$ es acotada. Observemos que si $u > T$, como y'_u no cambia de signo en $[T,\infty)$ y como $\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^k G_j(t) \leq |\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^k G_j(t)|$, se tiene lo siguiente:

$$|\eta(y_u)| = \Big| \int_T^\infty (G_m(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^k G_j(t))y'_u(t)dt\Big| \geq \Big| \int_T^\infty (G_m(t) - |\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^k G_j(t)|)y'_u(t)dt\Big|.$$

Por (4.8), obtenemos que:

$$|\eta(y_u)| \geq \frac{1}{2}\Big|\int_T^{\infty} G_m(t)y_u'(t)dt\Big|.$$

Como y es decreciente, tenemos que $y_u'(t) < 0$, luego $\displaystyle\int_T^{\infty} G_m(t)y_u'(t)dt < 0$, por lo tanto $\Big|\displaystyle\int_T^{\infty} G_m(t)y_u'(t)dt\Big| = -\displaystyle\int_T^{\infty} G_m(t)y_u'(t)dt = \displaystyle\int_T^{\infty} G_m(t)(-y_u'(t))dt$.
Observemos que $y_u'(t) = x'(t)y(\frac{t}{u}) + x(t)y'(\frac{t}{u})\frac{1}{u} \leq x'(t) = \frac{-n}{t^{n+1}}$ ya que $y(\frac{t}{u}) \leq 1$, $0 \leq x(t) \leq 1$ y $-1 \leq y'(\frac{t}{u})\frac{1}{u} \leq 0$, luego:

$$|\eta(y_u)| \geq \frac{n}{2}\int_T^{\infty} \frac{G_m(t)}{t^{n+1}}dt. \tag{4.10}$$

Como $\displaystyle\limsup_{t\to\infty} \frac{G_m(t)}{t^{n+1}} = \infty$, existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $G_m(t) > t^{n+1}$ para cada $t > t_0$, por lo que si $\tau = \max\{T, t_0\}$, se tiene que $G_m(t) > t^{n+1}$ para cada $t > \tau$. Entonces, existe una sucesión $\{t_q\}_{q=1}^{\infty}$ estrictamente creciente de elementos de $[T, \infty)$ tal que $G_m(t_q) > t_q^{n+1}$, para cada $q \in \mathbb{N}$. Si $q \in \mathbb{N}$ y $u \geq 2t_q$, por (4.10) se tiene que:

$$|\eta(y_u)| \geq \frac{n}{2}\int_{t_q}^{2t_q} \frac{G_m(t)}{t^{n+1}}dt \geq \frac{t_q^{n+1}}{2}\int_{t_q}^{2t_q} \frac{n}{t^{n+1}}dt \geq \frac{t_q^{n+1}}{2}\frac{t_q}{2^{n+1}t_q^{n+1}} = 2^{-n-2}t_q,$$

luego si $q \to \infty$, $2^{-n-2}t_q \to \infty$, y tenemos que $\{\eta(y_u)\}_{u>0}$ no está acotada, llegando a un absurdo. Por lo tanto, concluimos que existe algún μ_k que no está P_n-acotado para ningún $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolario 4.72. *Sea $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$, $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una sucesión de funciones localmente integrables tales que:*

1. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g_{n+1}(t)g_n^{-1}(t) = \infty$ *para cada $n \in \mathbb{N}_0$.*
2. *Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g_n(t)t^{-k} = \infty$ y $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g_k(t)t^{-n} = 0$*

Entonces el problema de momentos generalizado asociado a la sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{S}'(0,\infty)$ definida como $f_n(\varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(t)g_n(t)dt$, con $n \in \mathbb{N}_0$, es resoluble.

Demostración. Fijado $M > 0$, como $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g_{n+1}(t)g_n^{-1}(t) = \infty$, se tiene que existe $N > 0$ tal que si $t > N$, $g_{n+1}(t)g_n^{-1}(t) > M$, es decir si $t > N$, $g_{n+1}(t) > Mg_n(t)$. Por la monotonía de la integral, tenemos que si $G_n(t) = \displaystyle\int_0^t g_n(s)ds$, entonces para $t > N$, $G_{n+1}(t) > MG_n(t)$, por lo que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} G_{n+1}(t)G_n^{-1}(t) = \infty$.
Sea $k \in \mathbb{N}_0$, por 2, tenemos que existe $N > 0$ tal que si $t > N$, entonces $g_n(t) > Mt^k$. Por la monotonía de la integral, se tiene que si $t > N$, $G_n(t) > M\displaystyle\int_0^t s^k ds = \frac{M}{k+1}t^{k+1}$, es decir

si $t > N$, $G_n(t)t^{-(k+1)} > \frac{M}{k+1}$, por lo que $\lim\limits_{t\to\infty} G_n(t)t^{-(k+1)} = \infty$.
Observemos que como $G_{n+1}(t) > MG_n(t)$, entonces $\lim\limits_{t\to\infty} G_{n+1}(t)t^{-(k+1)} = \infty$. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$\lim_{t\to\infty} G_{n+1}(t)t^{-k} = \lim_{t\to\infty} t\cdot G_{n+1}(t)t^{-(k+1)} = \infty.$$

Además, se tiene que fijado $\varepsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que si $t > K$, entonces $g_k(t) < \varepsilon t^n$, luego por la monotonía de la integral se tiene que si $t > K$, $G_k(t) < \varepsilon \int_0^t s^n ds = \dfrac{\varepsilon}{n+1} t^{n+1}$, luego tenemos que $G_k(t)t^{-(n+1)} < \frac{\varepsilon}{n+1}$, es decir, $\lim\limits_{t\to\infty} G_k(t)t^{-(n+1)} = 0$. Por lo tanto, se verifican las condiciones del teorema anterior y concluimos que el problema de momentos generalizado asociado a $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es resoluble. $\square$

Ahora resolveremos el problema de momentos de Stieltjes en $\mathscr{S}(0,\infty)$ viéndolo como un caso particular de este corolario.

Corolario 4.73 (**Problema de momentos**). *Dada una sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos, existe una función $\varphi \in \mathscr{S}(0,\infty)$ tal que $\int_0^\infty \varphi(t)t^n dt = c_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior a la sucesión de funciones localmente integrables $\{t^n\}_{n=0}^{\infty}$, ya que son funciones positivas en $\mathbb{R}_+$ y además, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, basta tomar $k+1$ como n para que se cumpla la condición 2 del corolario. $\square$

Bibliografía

[1] A. J. Durán, *"The Stieltjes Moments Problem For Rapidly Decreasing Functions"*, Proceedings Of The American Mathematical Society, Vol. 107, no. 3, November 1989.

[2] A. L. Durán, R. Estrada, *"Strong Moment Problems for Rapidly Decreasing Smooth Functions"*, Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 120, No. 2 (Feb., 1994), pp. 529-534.

[3] A. Lastra, *"Operadores de extensión y casianaliticidad en clases ultraholomorfas de Carleman. Aplicación al problema de momentos de Stieltjes en espacios de Gelfand-Shilov"*, Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid, España, 2009.

[4] C. Zuily, *"Problems in distributions and partial differential equations "*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Hermann, Paris, 1988.

[5] F. W. J. Olver, *"Asymptotics and Special Functions"*, Academic Press, N.Y., 1974.

[6] J. Chung; S.-Y. Chung; D. Kim ,*"Every Stieltjes moment problem has a solution in Gel'fand-Shilov spaces"*, J. Math. Soc. Japan 55 (2003), no. 4, 909–913.

[7] J. Horváth, *"Topological vector spaces and distributions. Vol. I."*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Ontario, 1966.

[8] R. B. Ash; W. P. Novinger, *"Complex variables"*, Academic Press, New York-London, 1971.

[9] R. Remmert, *"Theory of complex functions"*, Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.

[10] S. A. Shkarin, *"Moments Problem in Frechet Spaces"*, Math. Notes **54** (1993), 739-746.

[11] W. Wasow, *"Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations"*, Dover Publications Inc., New York, 1987.