Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Frames en Espacios de Hilbert

Autor: Ignacio Guerra Sevillano

Tutor: Félix Galindo Soto

En primer lugar, me gustaría agradecer a Félix Galindo su enorme implicación en la tutorización de este trabajo. Gracias por tus numerosas y valiosas correcciones, sugerencias e ideas.

También me gustaría agradecer a mis padres su paciencia infinita y su apoyo constante durante toda mi etapa académica, que ha sido vital para lograr mis objetivos.

Finalmente, quiero dedicar muy especialmente este trabajo a mi abuela Encarna, con todo mi cariño y admiración.

Valladolid, 23 de junio de 2022

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

La gran evolución tecnológica que el mundo ha vivido desde mediados de siglo XX y principios del siglo XXI no es fruto del azar. Una de las principales consecuencias de los conflictos bélicos acaecidos durante los dos últimos siglos es la aceleración del progreso científico. Y como todo progreso transversal, este tampoco hubiera sido posible sin el creciente desarrollo de todas las áreas de la matemática moderna. El interés continuo por mejorar las comunicaciones humanas ha dado lugar a notables avances en la Teoría de la Señal y muy en particular en el Análisis Armónico o de Fourier y en el Análisis no Armónico.

El concepto de *frame* fue introducido por primera vez en 1952, a tráves del artículo original de R. J. Duffin y A. C. Schaeffer sobre series de Fourier no armónicas [1], es decir, en el estudio de series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-i\lambda_n t},$$

donde los λ_n no son todos enteros. Duffin y Schaeffer demostraron que para una función $g \in L^2(-\pi, \pi)$ y una sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ con ciertas propiedades de separación, existen constantes positivas A y B independientes de la función tales que

$$A \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{i\lambda_n t} dt|}{\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt} \leq B.$$

A la familia de funciones $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ la denominaron entonces *frame*, a causa de las anteriores desigualdades. No obstante, no ha sido hasta los años 80 cuando se ha visto a los *frames* como una herramienta extremamente útil en el procesamiento de señales. En consecuencia, numerosos estudios se empezaron a redactar en torno a la generalización de la definición y teoría de *frames* para espacio vectoriales y espacios de Hilbert arbitrarios.

Por la riqueza que ofrece un espacio de Hilbert, el presente trabajo se centra exclusivamente en estos espacios. Un *frame* en un espacio de Hilbert puede verse como una estructura que generaliza la noción de base de Schauder a familias que pueden ser linealmente dependientes, es decir, un vector del espacio puede representarse como una combinación (infinita o no) de elementos del *frame*, y no necesariamente de manera única. Esto último es la principal diferencia con una base usual de un espacio de Hilbert. La motivación principal de obtener una familia que cumpla estas propiedades son diversas:

- En ciertas situaciones es conveniente tener un vector escrito de distintas formas o incluso con más vectores de los requeridos. Tener distintas representaciones puede resultar muy ventajoso en algunas aplicaciones.

- En la práctica puede ser extremadamente difícil encontrar una base, de forma que se parte de un sistema generador del espacio y se van eliminando vectores del sistema hasta conseguir un conjunto linealmente independiente. Esto, de nuevo, puede ser una ardua tarea en la práctica o incluso imposible en espacios de dimensión infinita.

- Los *frames* son estructuras muy estables mediante transformaciones y, bajo actuación de un operador acotado sobreyectivo, conservan la propiedad característica de un *frame*. En cambio para conservar una base ortonormal, tan solo los operadores unitarios son capaces de transformar la base ortonormal en otra base ortonormal.

- Una base ortonormal o incluso una base por sí sola son ya estructuras muy restrictivas. Si además se desea que la base cumpla alguna propiedad adicional, en muchas ocasiones resultará imposible. Es por ello que es necesario poseer una herramienta como un *frame* que permita actuar de forma similar a una base pero que sea mucho más flexible en caso de requerir condiciones extra.

El objetivo principal del trabajo es proporcionar una recopilación de los resultados básicos de la teoría de *frames* en espacios de Hilbert desde un punto de vista del Análisis Funcional. También se pretende profundizar en las relaciones entre los *frames*, las bases ortonormales y las bases de Riesz. Además, aunque históricamente los *frames* se han desarrollado en espacios de Hilbert separables y las principales referencias bibliográficas definen a un *frame* como una familia numerable, se ha querido generalizar la definición a familias de cardinal arbitrario. En consecuencia, las definiciones y resultados aparecen de forma natural en términos de sumabilidad y familias sumables.

Desde un prisma teórico, los operadores acotados juegan un fuerte papel en la descripción de los distintos resultados y propiedades de *frames*. En el capítulo 1 se introducen algunos resultados sobre operadores acotados, que serán una herramienta fundamental en el análisis del resto de capítulos, y que no se encuentran entre los contenidos del Grado en Matemáticas.

El grueso del trabajo se encuentra en el capítulo 2 donde se presenta la definición de *frame* y sus primeras propiedades en un espacio de Hilbert cualquiera. Los resultados mostrados, extraídos en su mayoría del maravilloso libro de O.Christensen [2], han sido modificados para *frames* de cardinal no necesariamente numerable.

Más adelante, en el capítulo 3, se introducen las bases de Riesz y se describen las relaciones existentes con las bases de Schauder y los *frames*. Además, se prueban diversas caracterizaciones en torno a las bases de Riesz y se estudian las condiciones para que un *frame* contenga una base de Riesz, lo que da lugar a la definición de *frame* de Riesz. Como aplicación, en dicho capítulo se muestra como las bases de Riesz están conectadas con el problema clásico de momentos.

Por último, el capítulo 4 se centra en un espacio de Hilbert concreto, $L^2(\mathbb{R})$, y en particular en el estudio de los *frames* de traslaciones, que son familias que tienen la misma estructura funcional. En él, se define la función característica de traslación, que cobra importancia a la hora de describir las características de una familia de funciones de traslaciones equiespaciadas. Finalmente, se demuestra mediante las densidades de Beurling, la imposibilidad de tener un *frame* de traslación en el espacio completo $L^2(\mathbb{R})$.

CAPÍTULO 1

OPERADORES EN ESPACIOS DE HILBERT

El objetivo de este capítulo es presentar algunos resultados sobre operadores de frecuente uso en espacios de Hilbert, que no forman parte de los contenidos que se estudian en el Grado de Matemáticas de la Universidad de Valladolid, y que serán utilizados a lo largo del resto de capítulos. En concreto, en la sección 1.1 se introducen los operadores adjuntos y autoadjuntos así como sus principales propiedades. Seguidamente, se proporcionan un par de resultados respecto a operadores invertibles y unitarios en la sección 1.2. Más adelante, se definen los operadores positivos y el operador raíz en la sección 1.3, que serán fundamentales para trabajar con *frames* cuando se defina el operador de *frame*. Por último, en la sección 1.4 se generaliza la inversa de un operador que no es estrictamente invertible mediante la pseudo-inversa de un operador y sus relaciones con las proyecciones ortogonales.

Las proposiciones y teoremas de este capítulo corresponden a resultados clásicos de Análisis Funcional. En particular, se han seguido [3], [4], [5] y [6] entre otros.

De ahora en adelante $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert y consideraremos que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es lineal en la primera entrada y que la topología de $\mathcal{H}$ es la usual asociada a un espacio normado.

1.1. Operadores adjuntos y autoadjuntos.

Sean $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ dos espacios de Hilbert y sea $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un operador lineal acotado. Para un $y \in \mathcal{H}_2$ fijo, definimos el siguiente funcional lineal sobre $\mathcal{H}_1$: $s_y(x) = \langle Tx, y\rangle$. Observemos que s_y es lineal por ser T y el producto escalar lineales. Además, s_y es acotado ya que es composición de dos aplicaciones continuas. Por el teorema de representación de Riesz existe un único $z \in \mathcal{H}_1$ tal que $s_y(x) = \langle x, z\rangle$, es decir, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$.

Definición 1.1.1. *Dado $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un operador lineal acotado, se define su* operador adjunto $T^* : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ *como el operador que envía cada $y \in \mathcal{H}_2$ al único punto $z \in \mathcal{H}_1$ que cumple que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$.*

A raíz de la definición anterior, el operador adjunto de T es el operador T^* que verifica que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$; donde ya se ha omitido el espacio al que corresponde cada producto interno.

Las demostraciones que se presentan en toda esta sección siguen el desarrollo descrito en [3].

Proposición 1.1.2. *Sea $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un operador lineal acotado. Su operador adjunto T^* es un operador lineal acotado.*

Demostración. Dados y_1, $y_2 \in \mathcal{H}_2$ y $x \in \mathcal{H}_1$ se tiene que

$$\langle x, T^*y_1\rangle = \langle Tx, y_1\rangle, \qquad \langle x, T^*y_2\rangle = \langle Tx, y_2\rangle.$$

Sumando ambas expresiones obtenemos que

$$\langle x, T^*y_1 + T^*y_2\rangle = \langle Tx, y_1 + y_2\rangle.$$

Como consecuencia de la unicidad indicada en la definición 1.1.1 se concluye que $T^*(y_1 + y_2) = T^*y_1 + T^*y_2$. Con el mismo razonamiento, si $\alpha \in \mathbb{C}$, $y \in \mathcal{H}_2$:

$$\langle x, \alpha T^*y\rangle = \langle Tx, \alpha y\rangle,$$

lo que implica que $T^*(\alpha y) = \alpha T^*y$.

Para la acotación, si $y \in \mathcal{H}_2$, utilizando la definición de operador adjunto:

$$\|T^*y\|^2 = \langle T^*y, T^*y\rangle = \langle y, TT^*y\rangle \leq \|y\|\|TT^*y\| \leq \|y\|\|T\|\|T^*y\|.$$

Si $T^*y \neq 0$, se tiene que $\|T^*y\| \leq \|y\|\|T\|$. Si $T^*y = 0$ es trivial que también se cumple la desigualdad, luego se tiene la acotación para todo $y \in \mathcal{H}_2$. $\square$

Definición 1.1.3. *Se dice que un operador lineal acotado $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es* autoadjunto *si su operador adjunto coincide con el propio operador, es decir, si $T = T^*$.*

A continuación se muestran unas propiedades de utilidad de los operadores adjuntos.

Proposición 1.1.4. *Sean $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, $S : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, $T_1 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_2$, $T_2 : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}$ operadores lineales acotados. Se cumple que:*

1. $(T^*)^* = T$.
2. *Si* $\alpha \in \mathbb{C}$ *entonces* $(T + \alpha S)^* = T^* + \alpha^* S^*$, *donde* α^* *es el conjugado de* α.
3. $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$.
4. $\|T^*\| = \|T\|$ *y* $\|TT^*\| = \|T\|\|T^*\|$.
5. *Si* T *admite operador inverso acotado entonces* T^* *también y* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
6. $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T^*)^\perp$ *y* $\mathrm{Ker}(T)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(T^*)}$.

Demostración.

1. Basta observar que
$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle (T^*)^* x, y\rangle$$
para todo $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$, luego $T = (T^*)^*$.
2. Es directo, pues:
$$\begin{aligned}\langle x, (T + \alpha S)^* y\rangle &= \langle (T + \alpha S)x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle + \alpha\langle Sx, y\rangle \\ &= \langle x, T^* y\rangle + \langle x, \alpha^* S^* y\rangle = \langle x, (T^* + \alpha^* S^*)y\rangle\end{aligned}$$
para todo $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$.
3. Por un lado se tiene que $\langle T_1 x, y\rangle = \langle x, T_1^* y\rangle$, mientras que por otro $\langle T_2 x, y\rangle = \langle x, T_2^* y\rangle$. Todo ello implica que
$$\langle T_1 T_2 x, y\rangle = \langle T_2 x, T_1^* y\rangle = \langle x, T_2^* T_1^* y\rangle$$
para todo $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$, de donde se deduce el resultado.
4. Para cada x en $\mathcal{H}_1$ con $\|x\| \le 1$ tenemos la siguiente cadena de desigualdades,
$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^* Tx, x\rangle \le \|T^* Tx\|\|x\| \le \|T^* T\| \le \|T^*\|\|T\|.$$
Por tanto,
$$\|T\|^2 \le \|T^* T\| \le \|T^*\|\|T\|. \tag{1.1}$$
Cancelando $\|T\|$ en lo anterior, llegamos a $\|T\| \le \|T^*\|$. Razonando de la misma manera pero con T^* en vez de T se obtiene que $\|T^*\| \le \|(T^*)^*\| = \|T\|$ y entonces se da la igualdad $\|T\| = \|T^*\|$. En consecuencia, todas las desigualdades de (1.1) son igualdades y se tiene que $\|TT^*\| = \|T\|\|T^*\|$.
5. Puesto que $TT^{-1} = Id_{\mathcal{H}_2}$ y $T^{-1}T = Id_{\mathcal{H}_1}$, tomando adjuntos en ambas igualdades se llega a que $T^*(T^{-1})^* = Id_{\mathcal{H}_1}^* = Id_{\mathcal{H}_1}$ y $(T^{-1})^* T^* = Id_{\mathcal{H}_2}^* = Id_{\mathcal{H}_2}$.
6. Si $x \in \mathrm{Ker}(T)$, entonces $Tx = 0$, luego para todo $y \in \mathcal{H}_2$: $\langle T^* y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = 0$. Esto implica que $x \in \mathrm{Im}(T^*)^\perp$.

   Veamos la otra contención. Sea $x \in \mathrm{Im}(T^*)^\perp$. Si $y \in \mathrm{Im}(T^*)$ entonces existe $z \in \mathcal{H}_1$ tal que $y = T^* z$. Como $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in \mathrm{Im}(T^*)$ se tiene que $\langle x, T^* z\rangle = 0$ para todo $z \in \mathcal{H}_1$, es decir, $\langle Tx, z\rangle = 0$ para todo $z \in \mathcal{H}_1$. De aquí se concluye que ha de ser $Tx = 0$ y por tanto $x \in \mathrm{Ker}(T)$. En conclusión, $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T^*)^\perp$.

   Por otro lado, de la igualdad anterior se concluye que
$$\mathrm{Ker}(T)^\perp = \mathrm{Im}(T^*)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}(T^*)}.$$

□

Para operadores autoadjuntos tenemos otra forma de calcular la norma de un operador como muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.1.5. *Si T es un operador autoadjunto entonces*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| .$$

Demostración. Sea $M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Si $\|x\| = 1$, entonces $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|T\|$; luego $M \leq \|T\|$.

Por otro lado, si $\|x\| = \|y\| = 1$, entonces:

$$\begin{aligned}\langle T(x+y), x+y\rangle &= \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle y, T^*x\rangle + \langle Ty, y\rangle. \\ \langle T(x-y), x-y\rangle &= \langle Tx, x\rangle - \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle \\ &= \langle Tx, x\rangle - \langle Tx, y\rangle - \langle y, T^*x\rangle + \langle Ty, y\rangle.\end{aligned}$$

Como $T = T^*$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle T(x+y), x+y\rangle &= \langle Tx, x\rangle + 2\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle. \\ \langle T(x-y), x-y\rangle &= \langle Tx, x\rangle - 2\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle.\end{aligned}$$

Restando ahora las dos ecuaciones anteriores,

$$4\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle.$$

Puesto que $|\langle Tz, z\rangle| \leq M\|z\|^2$ para todo z en $\mathcal{H}$, utilizando la regla del paralelogramo:

$$4\mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle \leq M(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4M.$$

Ahora, si $\langle Tx, y\rangle = e^{i\theta}|\langle Tx, y\rangle|$, entonces sustituyendo en la desigualdad anterior x por $e^{-i\theta}x$ resulta que $|\langle Tx, y\rangle| \leq M$ si $\|x\| = \|y\| = 1$. Tomando por último $y = Tx/\|Tx\|$ (si $Tx \neq 0$; si no, es trivial) se llega a que $\|Tx\| \leq M$ si $\|x\| = 1$. Por tanto, $\|T\| \leq M$, que es la otra desigualdad que se quería probar. □

Hasta ahora hemos visto las principales propiedades de los operadores adjuntos. De aquí al final de la sección demostraremos que la imagen de un operador T de $\mathcal{H}$ en sí mismo es cerrada equivale a que la imagen de su operador adjunto también sea cerrada. Para ello, utilizamos la siguiente proposición, demostrada en [7].

Proposición 1.1.6. *Sea $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un operador acotado. El operador T es sobreyectivo si, y sólo si, T^* está acotado por abajo, es decir, si existe $k > 0$ tal que*

$$k\|x\| \leq \|T^*x\|$$

para todo $x \in \mathcal{H}_2$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{H}_2$ y que T no está acotado por abajo. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}_2$ tal que $\|T^*x_n\| < \|x_n\|/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = nx_n/\|x_n\|$, y veamos que la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente acotada. Sea $F : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional continuo cualquiera. Por el teorema de representación de Riesz, existe $y \in \mathcal{H}_2$ tal que $Fv = \langle v, y\rangle$ para todo $v \in \mathcal{H}_2$. Ahora, como T es sobreyectivo por hipótesis, existe $x \in \mathcal{H}_1$ tal que $Tx = y$. Entonces:

$$|Fy_n| = |\langle y_n, y\rangle| = |\langle T^*y_n, x\rangle| \leq \|T^*y_n\|\|x\| \leq \|x\|,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es débilmente acotada en $\mathcal{H}_2$. Del teorema de Banach-Steinhaus, se deduce que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $\mathcal{H}_2$, pero por cómo se han definido los y_n, resulta que $\|y_n\| = n$, lo cual contradice que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sea acotada. En consecuencia, T^* esta acotado por debajo.

Para la otra implicación, supongamos ahora que

$$k\|x\| \leq \|T^*x\|$$

para todo $x \in \mathcal{H}_2$ y cierta constante $k > 0$. Veamos primero que $\mathrm{Im}(T^*)$ es cerrada en $\mathcal{H}_1$. Si $(T^*x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a $y \in \mathcal{H}_1$, entonces de la desigualdad

$$k\|x_n - x_m\| \leq \|T^*x_n - T^*x_n\|$$

con n,$m \in \mathbb{N}$, se deduce que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Por ser $\mathcal{H}_2$ un espacio de Hilbert, sea $x \in \mathcal{H}_2$ el límite de dicha sucesión. Entonces $T^*x_n \to T^*x$ si $n \to \infty$. Por la unicidad del límite, $y = T^*x \in \mathrm{Im}(T^*)$ y por tanto $\mathrm{Im}(T^*)$ es cerrado en $\mathcal{H}_1$, luego también es un espacio de Hilbert.

Tomemos $y \in H$. Definimos $G : \mathrm{Im}(T^*) \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$G(T^*w) = \langle w, y\rangle$$

si $w \in \mathcal{H}_2$. El funcional G está bien definido ya que T^* es inyectivo por ser acotado por debajo y además es lineal. También es continuo pues si $z \in \mathrm{Im}(T^*)$ y $z = T^*w$,

$$|Gz| \leq \|w\|\|y\| \leq \frac{1}{k}\|z\|\|y\|.$$

De nuevo por el teorema de representación de Riesz, existe $x \in \mathrm{Im}(T^*)$ de forma que $Gz = \langle z, x\rangle$ para todo $z \in \mathrm{Im}(T^*)$. Luego, para cada $w \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle w, y\rangle = G(T^*w) = \langle T^*w, x\rangle = \langle w, Tx\rangle.$$

Esto último implica que $y = Tx \in \mathrm{Im}(T)$ y por tanto $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{H}_2$. □

La proposición anterior es simétrica con respecto al adjunto, esto es, se pueden intercambiar los papeles de T y T^*.

Lema 1.1.7. *Sea $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un operador continuo. Entonces $\mathrm{Im}(T)$ es cerrado en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, existe $k > 0$ tal que*

$$k\|x\| \leq \|Tx\| \tag{1.2}$$

para todo $x \in \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$.

Demostración. Si $\operatorname{Im}(T)$ es cerrado, definiendo $\tilde{T} : \operatorname{Ker}(T)^{\perp} \longrightarrow \operatorname{Im}(T)$ como $\tilde{T}x = Tx$ para todo $x \in \operatorname{Ker}(T)^{\perp}$, se tiene que $\tilde{T}$ es biyectivo. Por el teorema del isomorfismo, $\tilde{T}^{-1}$ es acotado y en consecuencia existe $k > 0$ tal que $k\|x\| \leq \|Tx\|$ para todo $x \in \operatorname{Ker}(T)^{\perp}$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple que existe $k > 0$ tal que $k\|x\| \leq \|Tx\|$ para todo $x \in \operatorname{Ker}(T)^{\perp}$. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\operatorname{Im}(T)$ donde $y_n = Tx_n$ para ciertos $x_n \in \mathcal{H}_1$, $n \in \mathbb{N}$. Ahora, como $\mathcal{H}_1 = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Ker}(T)^{\perp}$ entonces $x_n = w_n + z_n$ con $w_n \in \operatorname{Ker}(T)$, $z_n \in \operatorname{Ker}(T)^{\perp}$, luego

$$y_n = Tx_n = Tw_n + Tz_n = Tz_n,$$

es decir, podemos escoger $z_n \in \operatorname{Ker}(T)^{\perp}$ tal que $y_n = Tz_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Utilizando la desigualdad (1.2):

$$k\|z_n - z_m\| \leq \|Tz_n - Tz_n\| = \|y_n - y_m\|,$$

luego $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ es también una sucesión de Cauchy y por tanto convergente hacia un $z \in \operatorname{Ker}(T)^{\perp}$. Sea $y = Tz$. Como $Tz_n \to Tz$ si $n \to \infty$, por la unicidad del límite se tiene que $y = Tz \in \operatorname{Im}(T)$ y en consecuencia $\operatorname{Im}(T)$ es cerrado en $\mathcal{H}_2$. □

Teorema 1.1.8. *La imagen de un operador $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ es cerrada en $\mathcal{H}_2$ si, y sólo si, la imagen de T^* es cerrada en $\mathcal{H}_1$.*

Demostración. Supongamos que $\operatorname{Im}(T)$ es cerrado, por el lema anterior se tiene que existe $k > 0$ tal que $k\|x\| \leq \|Tx\|$ para todo $x \in \operatorname{Ker}(T)^{\perp}$.

Como $\operatorname{Ker}(T)^{\perp}$ es cerrado en $\mathcal{H}_1$, $\operatorname{Ker}(T)^{\perp}$ es de Hilbert. Apliquemos entonces la proposición 1.1.6 al operador $T^* : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \operatorname{Ker}(T)^{\perp}$ y veremos como la imagen de T^* es precisamente $\operatorname{Ker}(T)^{\perp}$. Como T está acotado por abajo en $\operatorname{Ker}(T)^{\perp}$ (nos restringimos a este espacio), entonces el operador T^* es sobreyectivo, es decir, se tiene que $\operatorname{Im}(T^*) = \operatorname{Ker}(T)^{\perp}$ y por tanto $\operatorname{Im}(T^*)$ es cerrado.

Para el recíproco el razonamiento es análogo sustituyendo T por T^* y viceversa. □

1.2. Operadores invertibles y operadores unitarios.

El conjunto de operadores lineales acotados sobre $\mathcal{H}$, que se representa por $\mathcal{L}(H)$, es un espacio de Banach. Además, un espacio normado es de Banach si, y sólo si, toda serie absolutamente convergente de elementos del espacio es convergente. Teniendo estos resultados en cuenta, pasamos a probar el siguiente resultado sobre invertibilidad.

Lema 1.2.1 (Lema de Neumann)**.** *Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal acotado tal que $\|T\| < 1$. Entonces $Id - T$ es un operador invertible y $(Id - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.*

Demostración. Consideremos la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k$. Como $\|T\| < 1$, esta serie numérica converge. Por tanto, como $\|T^k\| \leq \|T\|^k$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge en $\mathcal{L}(H)$ hacia un operador S. Basta probar entonces que $S(Id - T) = Id = (Id - T)S$. Ahora,

$$\begin{aligned} S(Id - T) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k (Id - T) &= \sum_{k=0}^{\infty} T^k - \sum_{k=0}^{\infty} T^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} T^k - \sum_{k=1}^{\infty} T^k = T^0 = Id. \end{aligned}$$

De manera análoga se demuestra que $(Id - T)S = Id$. Por tanto, $Id - T$ es invertible y su operador inverso viene dado por S. □

Los operadores unitarios son un tipo de operadores muy especiales en los espacios de Hilbert pues se caracterizan por conservar el producto interno y la norma del espacio. En consecuencia conservan las propiedades topológicas.

Definición 1.2.2. *Un operador acotado $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es* unitario *si $UU^* = U^*U = Id$.*

De la siguiente proposición se deduce que todo operador unitario es una isometría.

Proposición 1.2.3. *Sea $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador acotado. Son equivalentes:*

1. *U es unitario.*
2. *$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo x, $y \in \mathcal{H}$ y U es sobreyectivo.*
3. *$\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$ y U es sobreyectivo.*

Demostración. Si U es unitario entonces es sobreyectivo y:

$$\langle x, y\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle = \langle Ux, Uy\rangle.$$

Luego 1 implica 2.

Recíprocamente, si U conserva el producto escalar, de la primera igualdad anterior se tiene que $\langle x, y\rangle = \langle x, U^*Uy\rangle$ para todo $x \in H$, es decir, $U^*Uy = y$ para todo $y \in \mathcal{H}$. Esto equivale a que $U^*U = Id$. Además, U es biyectivo pues es sobreyectivo por hipótesis y es inyectivo ya que si $Ux = 0$, entonces en particular $\langle x, x\rangle = 0$, lo que implica que $x = 0$. Por tanto U admite inversa y es precisamente U^*. Hasta aquí queda demostrado que 1 es equivalente a 2.

Para la equivalencia de 2 y 3 basta tener en cuenta que el producto escalar determina la norma por definición y que la norma determina también el producto escalar por las identidades de polarización. □

Observe que del punto 3 de la proposición anterior se deduce que la norma de un operador unitario es la unidad. Su operador inverso, que es U^*, tiene norma unidad pues también es un operador unitario.

1.3. Operadores positivos. Operador raíz.

A continuación definiremos los operadores positivos, un tipo de operadores de gran utilidad en Análisis Funcional. Se seguirán y detallarán las demostraciones que se encuentran en [4].

Definición 1.3.1. *Un operador acotado $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es* positivo *si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Es fácil demostrar que esta clase de operadores son autoadjuntos:

Proposición 1.3.2. *Todo operador acotado positivo $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es autoadjunto.*

Demostración. Puesto que T es positivo $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$, luego $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Ahora, utilizando las identidades de polarización:

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle =& \frac{1}{4}\Big(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ &- i\langle T(x+iy), x+iy\rangle + i\langle T(x-iy), x-iy\rangle\Big) \\ =& \frac{1}{4}\Big(\langle x+y, T(x+y)\rangle - \langle x-y, T(x-y)\rangle \\ &- i\langle x+iy, T(x+iy)\rangle + i\langle x-iy, T(x-iy)\rangle\Big) = \langle x, Ty\rangle\end{aligned}$$

para todo x, $y \in \mathcal{H}$, por lo que se deduce que $T = T^*$. □

Los siguientes tres resultados pueden encontrarse en [6].

Lema 1.3.3. *Si U, V son operadores acotados y tal que U es positivo y UV autoadjunto, entonces se verifica que $|\langle UVx, x\rangle| \leq \|V\| \langle Ux, x\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Demostración. Como la desigualdad de Cauchy-Schwarz es cierta para semiproductos internos y $[x, y] := \langle Ux, y\rangle$ es también un semiproducto interno (pues U es positivo) entonces:

$$|\langle Ux, y\rangle| \leq \Big(\langle Ux, x\rangle\langle Uy, y\rangle\Big)^{1/2} \leq \frac{1}{2}\Big(\langle Ux, x\rangle + \langle Uy, y\rangle\Big), \tag{1.3}$$

donde en la última desigualdad se ha usado la propia de la media geométrica y aritmética. Dado $n \in \mathbb{N}$, el operador UV^n es un operador autoadjunto ya que como UV es autoadjunto por hipótesis y U también por ser positivo,

$$\begin{aligned}\langle UV^n x, y\rangle &= \langle V^{n-1}x, UVy\rangle = \langle UV^{n-1}x, Vy\rangle \\ &= \langle V^{n-2}x, UV^2 y\rangle = \ldots = \langle x, UV^n y\rangle.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Además, de (1.3),

$$\begin{aligned}|\langle UV^n x, x\rangle| = |\langle x, UV^n x\rangle| = |\langle Ux, V^n x\rangle| &\leq \frac{1}{2}\Big(\langle Ux, x\rangle + \langle UV^n x, V^n x\rangle\Big) \\ = \frac{1}{2}\Big(\langle Ux, x\rangle + \langle x, UV^{2n}x\rangle\Big) &= \frac{1}{2}\Big(\langle Ux, x\rangle + \langle UV^{2n}x, x\rangle\Big)\end{aligned} \tag{1.5}$$

pues $\langle UV^{2n}x, x\rangle = \langle x, UV^{2n}x\rangle = \langle UV^n x, V^n x\rangle \in \mathbb{R}$ por (1.4). Partiendo ahora de $n = 1$ e iterando las desigualdades en el último sumando de (1.5) se llega a la siguiente desigualdad:

$$|\langle UVx, x\rangle| \leq \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2^n}\Big)\langle Ux, x\rangle + \frac{1}{2^n}\langle UV^{2n}x, x\rangle. \tag{1.6}$$

Si fuera $\|V\| = 1$, entonces como $|\langle UV^{2n}x, x\rangle| \leq \|U\|\|x\|^2$ el último término de (1.6) tiende a cero, luego cuando $n \to \infty$ se cumple que $|\langle UVx, x\rangle| \leq \langle Ux, x\rangle$. Si por el contrario se tuviera que $\|V\| \neq 1$ entonces basta sustituir V por $V/\|V\|$ (si $V \neq 0$) y se tiene la desigualdad del enunciado. □

Proposición 1.3.4. *La composición de dos operadores positivos en $\mathcal{H}$ y que conmutan entre sí es un operador positivo.*

Demostración. Sean U, V positivos tales que $UV = VU$. Si $Id - U$ no fuera positivo basta multiplicar U por $\|U\|^{-1}$ y se tiene que $\langle \|U\|^{-1} Ux, x\rangle \leq \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{H}$; es decir, $Id - \|U\|^{-1} U$ es positivo. Observe también que si fuera $\|U\| > 1$, haciendo $W := U/\|U\|$, tenemos que W es positivo y que $\|W\| = 1$. Luego si el resultado fuera cierto para operadores con norma menor o igual que la unidad, tendríamos que WV es positivo, i.e, UV es positivo.

Supongamos pues, sin pérdida de generalidad, que $Id - U$ es positivo y que $\|U\| \leq 1$. Entonces, utilizando la proposición 1.1.5:

$$\|Id - U\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle (Id - U)x, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |1 - \langle Ux, x\rangle| \leq 1,$$

ya que

$$0 \leq \langle Ux, x\rangle \leq \|U\|\|x\|^2 = \|U\| \leq 1.$$

Como V conmuta con $Id - U$ entonces el operador $V(Id - U)$ es autoadjunto y por el lema anterior: $\langle V(Id - U)x, x\rangle \leq \langle Vx, x\rangle$, es decir, $\langle VUx, x\rangle \geq 0$. □

Corolario 1.3.5. *Sean U, V, W operadores autoadjuntos. Si $V - U$ y W son operadores positivos y W conmuta tanto con U como con V, entonces $W(V - U)$ es positivo.*

Demostración. Es consecuencia directa de la proposición anterior tomando los operadores W y $V - U$. □

Dado un operador acotado T, observe que siempre podemos construir un operador positivo asociado a partir de él, pues si $x \in \mathcal{H}$, entonces $\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$. Para que tenga un comportamiento parecido a T, podríamos pensar en tomar la 'raíz cuadrada' de este operador T^*T. A partir de ahora discutimos la posibilidad de definir esta operación para operadores acotados positivos.

Lema 1.3.6. *El desarrollo en serie de potencias de la función compleja $\sqrt{1-z}$ en torno a 0 converge absolutamente en el disco cerrado de radio 1, cuando se considera la determinación principal de la raíz.*

Además, si los elementos de $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ denotan los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de dicha función, entonces se cumple que:

$$c_0 = 1,\ c_n < 0 \quad \text{si} \quad n \geq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = -1.$$

Demostración. Sea z complejo tal que $|z| < 1$ y sea $g(z) = \sqrt{1-z} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ el desarrollo en serie en torno al origen, donde se considera que la rama de definición de la raíz compleja es la dada por los puntos z que cumplen que $-\pi \leq \operatorname{Arg}(z) < \pi$. Puesto que g es una función holomorfa en el disco abierto unidad, la serie converge absolutamente en ese conjunto. Ahora, la derivada primera de g en 0 es negativa. Además,

$$g^{(n)}(z) = -\frac{(2n-3)\cdots 1}{2^n} \cdot (1-z)^{-(2n-1)/2}$$

para todo $n \geq 2$, luego $g^{(n)}(0) < 0$ para todo $n \geq 1$. Esto implica que todos los coeficientes c_i del desarrollo son negativos, excepto $c_0 = 1$. Supongamos ahora que

$|z| = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{N} |c_n| = 1 - \sum_{n=1}^{N} c_n = 2 - \sum_{n=0}^{N} c_n \\ = 2 - \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \leq 2 - \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 2, \end{aligned}$$

lo que implica que $\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq 2$. Como esto último es cierto para todo $N \in \mathbb{N}$, se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \leq 2$ y en consecuencia la serie converge absolutamente también en la frontera del disco unidad. Utilizando finalmente el teorema de Abel, puesto que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es convergente entonces ha de ser:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 0,$$

i.e., $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -1$. □

Estamos en condiciones de demostrar la existencia de un operador 'raíz cuadrada' asociado a un operador acotado positivo. La presente demostración es ligeramente compleja y la dividiremos en varios pasos.

Teorema 1.3.7. *Todo operador acotado positivo $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ admite un único operador positivo V tal que $V^2 = T$.*

Demostración.

- **Paso 1: Reducción del problema.**
  Basta demostrar el teorema para operadores con $\|T\| \leq 1$. Si suponemos el resultado cierto para operadores con norma menor o igual que la unidad y tuviéramos $\|T\| > 1$, definiendo entonces $S = T/\|T\|$ tenemos que S es positivo y $\|S\| = 1$. Por tanto existiría un único operador acotado W tal que $S = W^2$, luego $T = \|T\| W^2$ y es suficiente con tomar $V = \|T\|^{1/2} W$.

- **Paso 2: Existencia.**
  Sea T positivo con $\|T\| \leq 1$. Por ser positivo es autoadjunto y en consecuencia $Id - T$ es autoadjunto. Por la proposición 1.1.5,

$$\|Id - T\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle (Id - T)f, f \rangle| = \sup_{\|f\|=1} |1 - \langle Tf, f \rangle| \leq 1, \tag{1.7}$$

  ya que

$$0 \leq \langle Tf, f \rangle \leq \|T\| \|f\|^2 = \|T\| \leq 1$$

  si $\|f\| = 1$. Por el lema anterior y como $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es de Banach, la serie

$$1 + c_1(I - T) + c_2(I - T)^2 + \dots$$

converge en norma a un operador acotado V. Previamente a demostrar que $V^2 = T$, observe que si $|z| \leq 1$, puesto que la convergencia de la serie es absoluta, se tiene que:

$$\begin{aligned} 1 - z &= \sqrt{1-z}\sqrt{1-z} \\ &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{j} c_n c_{j-n}\Big) z^j, \end{aligned} \tag{1.8}$$

e igualando coeficientes llegamos a que

$$c_0 = 1, \;\; c_0 c_1 + c_1 c_0 = -1 \;\; \text{y} \;\; \sum_{n=0}^{j} c_n c_{j-n} = 0 \tag{1.9}$$

para todo $j \geq 2$.

Consideramos ahora la familia $\{c_n(Id-T)^n c_m(Id-T)^m\}_{(n,m)\in\mathbb{Z}_+^2}$, que denotaremos por $\mathcal{F}$. Demostraremos que la suma de dicha familia es, por un lado, V^2 y por otro, T. Como la suma de una familia es única se cumplirá lo que buscamos, es decir, que $V^2 = T$.

Dicha familia $\mathcal{F}$ es absolutamente sumable: esto se debe a que

$$\|c_n(Id-T)^n c_m(Id-T)^m\| \leq |c_n||c_m|\|Id-T\|^n \|Id-T\|^m ,$$

y a que la serie de la parte derecha de la siguiente igualdad,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |c_n||c_m|\|Id-T\|^{n+m} = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{j} |c_n|\,|c_{j-n}|\Big)\|Id-T\|^j , \tag{1.10}$$

converge debido a (1.8) (pues los coeficientes son todos negativos excepto c_0 y tomar los términos con valor absoluto no cambia el carácter de la serie). La igualdad en (1.10) se debe a la proposición A.1.10 tomando las familias $\{|c_n|\,|c_{j-n}|\|Id-T\|^j\}_{n=0,\ldots,j}$, $j \in \mathbb{N}$, pues estas son sumables por ser finitas y la suma de todas ellas es sumable pues ya se ha comentado que la serie converge. Puesto que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es de Banach, la familia es sumable.

Si ahora aplicamos el teorema de sumación por paquetes A.1.9 a la familia sumable $\mathcal{F}$, como las familias $\{c_n(Id-T)^n c_m(Id-T)^m\}_{m=0}^{\infty}$ son sumables para cada n y sus sumas son respectivamente $c_n(Id-T)^n V$, entonces se tiene que la familia $\{c_n(Id-T)^n V\}_{n=0}^{\infty}$ es sumable y que su suma coincide con la suma de la familia $\mathcal{F}$. Como sabemos que la suma de $\{c_n(Id-T)^n V\}_{n=0}^{\infty}$ es precisamente V^2 entonces se concluye que la suma de $\mathcal{F}$ es exactamente V^2.

Por otro lado, la familia $\mathcal{F}$ se puede reescribir de la manera que mostramos a continuación: $\{c_n(Id-T)^n c_{j-n}(Id-T)^{j-n}\}_{j\in\mathbb{Z}_+^2, n=0,\ldots j}$ (son los mismos elementos). Si se toma como paquetes los conjuntos con un j fijo, la suma en n es sumable por ser una suma finita y, aplicando de nuevo el teorema A.1.9, se obtiene que la familia $\{\sum_{n=0}^{j} c_n c_{j-n}(Id-T)^j\}_{j=0}^{\infty}$ es sumable. De hecho, utilizando la relación dada en (1.9), la suma de $\{\sum_{n=0}^{j} c_n c_{j-n}(Id-T)^j\}_{j=0}^{\infty}$ es $Id-(Id-T)=T$. Como la suma de una familia es única se concluye finalmente que $V^2=T$.

Paso 3: Positividad.
El operador V es positivo ya que si $\|f\|=1$,

$$\langle Vf,f\rangle = 1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\langle (Id-T)^n f,f\rangle \geq 1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 0,$$

donde se ha utilizado que los c_n con $n\geq 1$ son estrictamente negativos, que la suma de los coeficientes c_n con $n\geq 1$ del lema anterior es -1 y que $0\leq \langle (Id-T)^n f,f\rangle \leq 1$ para todo f con $\|f\|=1$. La primera desigualdad de esto último se debe a que el operador $(Id-T)^n$ es positivo para todo n por ser producto de positivos que trivialmente conmutan (proposición 1.3.4). La segunda desigualdad es consecuencia de que

$$\|(Id-T)^n\| \leq \|Id-T\|^n \leq 1.$$

Si ahora f tiene una una norma arbitraria y es distinto de 0, se tiene que $\langle Vf,f\rangle = \|f\|^2\langle Vg,g\rangle \geq 0$ con $g=f/\|f\|$. Si $f=0$, es obvio que se da la misma desigualdad.

Paso 4: Unicidad.
Si existiera otro operador positivo V' con $(V')^2=T$, entonces como

$$V'T=(V')^3=TV'$$

se tiene que V' conmuta con T y en consecuencia también con V ya que:

$$V'V = V'\sum_{n=0}^{\infty} c_n(Id-T)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n V'(Id-T)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(Id-T)^n V' = VV'.$$

Teniendo en cuenta que los dos primeros sumandos de

$$\begin{aligned}(V-V')V(V-V')+(V-V')V'(V-V') &= (V^2-V'^2)(V-V')\\ &= (T-T)(V-V')=0\end{aligned}$$

son positivos, han de ser entonces igual a cero. El primer sumando es positivo porque como V y $V-V'$ conmutan entonces se puede reescribir como $V(V-V')^2$. Este operador es positivo ya que es producto de dos operadores positivos: V por hipótesis y $(V-V')^2$ por ser el cuadrado de un operador autoadjunto. El segundo sumando se razona igual. Como cada sumando es nulo, la diferencia de ambos también ha de ser nula, es decir, $(V-V')^3=0$. Puesto que $V-V'$ es un operador autoadjunto, aplicando la propiedad 4 de 1.1.4,

$$\|V-V'\|^4 = \|V-V'\|^2\|(V-V')^*\|^2 = \|(V-V')^4\| = 0,$$

y por tanto $V=V'$.

□

Con este resultado, estamos en condiciones de definir el operador raíz de un operador positivo dado.

Definición 1.3.8. *Sea $T:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ un operador positivo. Se define el* operador raíz *asociado a T como el único operador positivo V tal que $V^2=T$ y se escribirá como $T^{1/2}$.*

1.4. Pseudo-inversa.

La mayoría de operadores no son invertibles. No obstante, podemos definir un operador que funcione como un operador inverso por la derecha en un sentido amplio. El siguiente teorema, demostrado en [2], da condiciones sobre la existencia de este tipo de operador inverso por la derecha.

Teorema 1.4.1. *Sean $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. Sea $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un operador acotado cuya imagen es cerrada en $\mathcal{H}_2$. Entonces existe un operador lineal acotado $U^\dagger : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ tal que*

$$UU^\dagger y = y,$$

para todo $y \in \mathrm{Im}(U)$.

Demostración. Sea $\tilde{U}$ la restricción de U al complemento ortogonal de $\mathrm{Ker}(U)$, i.e.,

$$\tilde{U} := U|_{Ker(U)^\perp} \longrightarrow \mathcal{H}_2.$$

Tenga en cuenta que $\tilde{U}$ es lineal y acotada por ser la restricción de un operador lineal y acotado. Además, es un operador inyectivo ya que si $\tilde{U}x = 0$ entonces $x \in \mathrm{Ker}(U) \cap \mathrm{Ker}(U)^\perp = \{0\}$.

Observemos también que el rango de $\tilde{U}$ es el mismo que el de U. Si $y \in \mathrm{Im}(U)$, existe $x \in \mathcal{H}_1$ tal que $Ux = y$. Como $\mathcal{H}_1 = \mathrm{Ker}(U) \oplus \mathrm{Ker}(U)^\perp$ (el núcleo de U es un subespacio cerrado), podemos escribir $x = v + w$ con $v \in \mathrm{Ker}(U)$, $w \in \mathrm{Ker}(U)^\perp$. Por tanto:

$$\tilde{U}w = Uw = Uw + Uv = U(v + w) = Ux = y.$$

Si ahora redefinimos $\tilde{U}$ con llegada en $\mathrm{Im}(U)$, tenemos que $\tilde{U}$ es un operador acotado biyectivo entre espacios de Hilbert, ya que $\mathrm{Im}(U)$ es cerrado por hipótesis. Luego $\tilde{U}$ admite un operador inverso acotado,

$$\tilde{U}^{-1} : \mathrm{Im}(U) \longrightarrow \mathrm{Ker}(U)^\perp.$$

Definiendo ahora $U^\dagger : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ como $U^\dagger y = \tilde{U}^{-1} y$ si $y \in \mathrm{Im}(U)$ y $U^\dagger y = 0$ si $y \in \mathrm{Im}(U)^\perp$, se tiene que $UU^\dagger y = y$ para todo $y \in \mathrm{Im}(U)$. De hecho, como $U^\dagger = \tilde{U}^{-1} \circ P_M$ con $M = \mathrm{Im}(U)$, $U^\dagger$ es un operador lineal y acotado por ser la composición de dos operadores lineales y acotados. Todo esto es consecuencia de que, como $\mathrm{Im}(U)$ es cerrado, $\mathcal{H}_2 = \mathrm{Im}(U) \oplus \mathrm{Im}(U)^\perp$. □

Definición 1.4.2. *Se denomina* pseudo-inversa por la derecha *de un operador acotado U con imagen cerrada al operador $U^\dagger$ construido en el teorema 1.4.1.*

El teorema de la proyección afirma que si E es un espacio prehilbertiano y M un subconjunto completo, convexo y no vacío de E, entonces cada punto de E tiene una única proyección sobre M. Es por ello que todo subconjunto cerrado y convexo M distinto del vacío de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ -en particular cualquier subespacio vectorial cerrado no trivial- admite una única proyección. De esta manera podemos definir el conocido operador proyección ortogonal sobre un subespacio vectorial cerrado M, que denotaremos por P_M.

Definición 1.4.3. *Sea M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. La* proyección ortogonal sobre *M es el operador $P_M : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ definido de tal manera que para cada $x = m + m' \in \mathcal{H}$, con $m \in M$, $m' \in M^\perp$, se tiene que $P_M x = m$.*

Es importante resaltar que toda proyección ortogonal P_M es un operador lineal acotado con $\|P_M\| = 1$ si $M \neq \{0\}$.

Proposición 1.4.4. *Toda proyección ortogonal es un operador lineal autoadjunto.*

Demostración. Sean $x,y \in \mathcal{H}$ y M un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$. Como $P_{M^\perp} = Id - P_M$, se tiene que $\langle P_M x, y - P_M y\rangle = 0 = \langle x - P_M x, P_M y\rangle$ o, equivalentemente, $\langle x, P_M y\rangle = \langle P_M x, P_M y\rangle = \langle P_M x, y\rangle$. Por tanto, $P_M = P_M^*$. □

Proposición 1.4.5. *Sea M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. La pseudo-inversa por la derecha de P_M es exactamente P_M.*

Demostración. En primer lugar note que $\mathrm{Im}(P) = M$ y que $\mathrm{Ker}(P)^\perp = M$. Tomando la notación de la demostración de la construcción del teorema 1.4.1, en el que se construye la pseudo-inversa, se tiene que $\tilde{P} = Id$. Luego $\tilde{P}^{-1} = Id$ y en consecuencia, redefiniendo ahora $\tilde{P}^{-1}$ con valor nulo en $M^\perp$, se tiene que $P_M^\dagger = P_M$. □

Proposición 1.4.6. *Sea $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un operador lineal acotado con imagen cerrada. Entonces:*

1. $\mathrm{Ker}(U^\dagger) = \mathrm{Im}(U)^\perp$.
2. $\mathrm{Im}(U^\dagger) = \mathrm{Ker}(U)^\perp$.
3. *La proyección ortogonal sobre* $\mathrm{Im}(U)$ *es exactamente $UU^\dagger$ y la proyección ortogonal sobre* $\mathrm{Im}(U^\dagger)$ *es exactamente $U^\dagger U$.*

Demostración.

1. Supongamos que $x \in \mathcal{H}_2$ pero $x \notin \mathrm{Im}(U)^\perp$ y demostremos que $x \notin \mathrm{Ker}(U^\dagger)$. Como $\mathcal{H} = \mathrm{Im}(U) \oplus \mathrm{Im}(U)^\perp$ entonces $x = y + z$ con $y \in \mathrm{Im}(U) \setminus \{0\}$, $z \in \mathrm{Im}(U)^\perp$. Si se tuviera que $x \in \mathrm{Ker}(U^\dagger)$ entonces se tendría que $U^\dagger x = 0$ y por tanto llegaríamos a que:
$$0 = UU^\dagger x = UU^\dagger y + UU^\dagger z = y + 0 = y,$$
lo que es absurdo ya que $y \neq 0$ pues $x \notin \mathrm{Im}(U)^\perp$. Luego ha de ser $x \notin \mathrm{Ker}(U^\dagger)$
La otra contención es clara por construcción de $U^\dagger$, pues en el teorema 1.4.1 se extendió con valor 0 a los elementos de $\mathrm{Im}(U)^\perp$. Con esto se demuestra la igualdad.
2. Es prácticamente inmediato: el operador $\tilde{U}^{-1}$ construido en la demostración del teorema 1.4.1 es biyectivo y tiene llegada en $\mathrm{Ker}(U)^\perp$. Como para los elementos fuera de $\mathrm{Ker}(U)^\perp$ se les dio valor nulo por $U^\dagger$, se tiene que $\mathrm{Im}(U^\dagger) = \mathrm{Ker}(U)^\perp$.
3. Basta observar que $UU^\dagger = Id$ en $\mathrm{Im}(U)$, $UU^\dagger = 0$ en $\mathrm{Ker}(U^\dagger) = \mathrm{Im}(U)^\perp$ y que $UU^\dagger$ es una aplicación lineal por ser composición de lineales. Esto es equivalente a la definición de proyección ortogonal sobre $\mathrm{Im}(U)$.
Para la otra afirmación es suficiente con notar que si $x \in \mathrm{Im}(U^\dagger)$, entonces existe $y \in \mathrm{Im}(U)$ tal que $x = U^\dagger y$. Esto se debe a que como $x \in \mathrm{Im}(U^\dagger)$, entonces existe $z \in \mathcal{H}_2$ tal que $x = U^\dagger z$. Ahora, como
$$\mathcal{H}_2 = \mathrm{Im}(U) \oplus \mathrm{Im}(U)^\perp = \mathrm{Im}(U) \oplus \mathrm{Ker}(U^\dagger),$$

se tiene que $z = y + w$ con $y \in \mathrm{Im}(U)$, $w \in \mathrm{Ker}(U^\dagger)$, y $U^\dagger y = U^\dagger z = x$.
Todo esto implica que $Ux = UU^\dagger y = y$. Por tanto:

$$U^\dagger U x = U^\dagger y = x,$$

luego $U^\dagger U = Id$ en $\mathrm{Im}(U^\dagger)$. Si ahora $x \in \mathrm{Im}(U^\dagger)^\perp$, entonces $x \in \mathrm{Ker}(U)$ por el apartado anterior. Luego $U^\dagger U x = 0$ para todo $x \in \mathrm{Im}(U^\dagger)^\perp$ y se concluye de nuevo que $U^\dagger U$ es la proyección sobre $\mathrm{Im}(U^\dagger)$ por ser un operador lineal.

$\square$

CAPÍTULO 2

TEORÍA GENERAL DE FRAMES

Una de las características principales de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es que admite una base de Schauder, y si además $\mathcal{H}$ es separable entonces se puede tomar una base numerable. Un *frame* es un familia que en cierto modo se comporta como una base: todo elemento f en $\mathcal{H}$ se puede escribir como una combinación lineal infinita de elementos del *frame*. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con las bases de Schauder, la expresión en términos del *frame* no es única, es decir, las condiciones sobre un *frame* son más débiles que las de una base. Esto permite dotar de mayor flexibilidad a los *frames* y así resultan de mayor utilidad bajo situaciones en las que no se requiera restringirse a condiciones tan fuertes como las de una base.

En el presente capítulo se hará un estudio de la teoría de *frames* bajo un punto de vista del Análisis Funcional. Puesto que el concepto de *frame* en espacios de Hilbert aparece originalmente en [1] en el estudio de series de Fourier no armónicas, las definiciones clásicas de un *frame* se sitúan en espacios de Hilbert separables. En consecuencia, los *frames* se definen en términos de una familia numerable. Las definiciones y resultados mostrados han sido adaptados de [2] a familias de cardinal arbitrario -numerables y no numerables-. Para ello ha sido necesario apoyarse en resultados relevantes de sumabilidad, mostrados en el apéndice A.1.

En primer lugar, en la sección 2.1 se introducen las definiciones y propiedades fundamentales de un *frame*. También se definen tres operadores que serán usados constantemente a lo largo del trabajo, los operadores de síntesis, análisis y de *frame*. De hecho, estos contienen gran información sobre el *frame* y de ahí su importancia. En la sección 2.2 se muestran resultados relacionados con la construcción de *frames* a partir de operadores acotados y diversas caracterizaciones a través también de operadores acotados y bases ortonormales. Para finalizar el capítulo se dedica la última sección, 2.3, a los *frames* inexactos y a los *frames* duales, donde los primeros toman el papel de *frames* 'redundantes'.

2.1. Frames. Definiciones y propiedades.

En primer lugar, demos la definición de *frame* asociado a un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Definición 2.1.1. *Una familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *de elementos de* $\mathcal{H}$ *es un* frame *en* $\mathcal{H}$ *si existen contantes positivas* A, B *que cumplen que*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \tag{2.1}$$

para todo $f \in \mathcal{H}$. *Las constantes* A,B *se denominan cotas del frame.*

El conjunto de cotas superiores de (2.1) es un conjunto acotado inferiormente y no vacío, en consecuencia admite un inferior B_0. Dicho inferior también cumple (2.1) y por tanto diremos que B_0 es la *cota óptima superior* del *frame*. Análogamente, al supremo A_0 de las cotas inferiores lo llamaremos *cota óptima inferior* del *frame*.

Ejemplo 2.1.2. Observemos que toda base ortonormal $\{u_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{H}$ es un $frame$ en $\mathcal{H}$, ya que $\|f\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle f, u_i\rangle|^2$. Esta última igualdad se conoce como *identidad de Parseval*. De hecho, las cotas del *frame* coinciden y $A = B = 1$. Ahora, no todo *frame* es una base ortonormal pues por ejemplo pueden existir elementos de la familia que no sean ortogonales como veremos.

De hecho, la ortonormalidad de una base garantiza que esta sea un *frame* pues existen bases que no son *frames*. Por ejemplo, si $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es de nuevo una base ortonormal entonces la familia $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\frac{u_k}{k}\}_{k=1}^{\infty}$ también es una base (todo elemento se puede escribir de forma única respecto a estos nuevo elementos) y, además:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle u_n, v_k\rangle|^2 = \frac{1}{n^2},$$

es decir, no existe una constante positiva A que cumpla la definición de *frame*, pues si existiera dicha constante positiva, basta tomar el elemento u_n con n suficientemente grande tal que $1/n^2 < A$.

Por otro lado, las condiciones de cota inferior y cota superior son independientes. Esto significa que dado un espacio $\mathcal{H}$ existen familias que satisfacen la condición superior pero no la inferior y viceversa.

Por ejemplo, si $\{u_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal entonces dado $j \in I$, la familia $\{u_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$ no satisface la condición inferior: basta tomar u_j, que tiene norma uno pero los productos escalares de u_j por los u_i, $i \neq j$, son todos nulos y por tanto no existe una constante positiva A que verifique la desigualdad primera de (2.1). No obstante, sí cumple la condición superior con $B = 1$ para todo $f \in \mathcal{H}$.

En cambio, la familia $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} := \{u_1 + \frac{1}{k}u_k, u_k\}_{k=2}^{\infty}$ verifica la condición inferior con $A = 1$ para todo $f \in \mathcal{H}$. Ahora, si tomamos u_1, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle u_1, f_k\rangle|^2$$

contiene infinitos términos iguales a 1 ya que

$$\langle u_1, u_1 + \frac{1}{k}u_k\rangle = 1$$

para todo $k \geq 2$. Por tanto la serie diverge y no cumple la condición superior.

Definición 2.1.3. *Un frame es* ajustado *si podemos tomar $A = B$ en* (2.1)*. Un frame es* exacto *si al eliminar cualquier elemento del frame deja de ser un frame.*

Todo sistema ortonormal completo de $\mathcal{H}$ es un *frame* ajustado y exacto. En efecto, es ajustado debido a la identidad de Parseval y dada una base ortonormal $\{u_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{H}$, si suprimimos u_k entonces se tiene que

$$A = A\|u_k\|^2 \leq \sum_{i\in I\setminus\{k\}} |\langle u_k, u_i\rangle|^2 = 0,$$

por ser $\{u_i\}_{i\in I}$ un sistema ortonormal, lo que contradice la definición de *frame* en $\mathcal{H}$.

Ejemplo 2.1.4. Sea $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

1) Consideramos la familia $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{u_1, u_1, u_2, u_2, u_3, u_3, \ldots\}$. Esta familia es un *frame* ajustado pero no exacto. En efecto, como se cumple la identidad de Parseval:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f, f_k\rangle|^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f, u_k\rangle|^2 = 2\|f\|^2\,,$$

de donde se deduce que $A = B = 2$. Esta familia no es exacta: si se suprime un término de la familia entonces sigue siendo un *frame*, esta vez con cotas $A = 1$, $B = 2$.

2) Si ahora solo un elemento u_{k_0} estuviera repetido entonces la familia dada por $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{u_1, u_2, .., u_{k_0-2}, u_{k_0-1}, u_{k_0}, u_{k_0}, u_{k_0+1}, u_{k_0+2}, ..\}$ también es un *frame* con cotas $A = 1$, $B = 2$. Esta familia tampoco es exacta pues si se elimina uno de los términos repetidos se tiene que la familia es ahora un sistema ortonormal completo y en consecuencia un *frame*.

3) Si consideramos ahora la familia $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} = \{u_1, \frac{1}{\sqrt{2}}u_2, \frac{1}{\sqrt{2}}u_2, \frac{1}{\sqrt{3}}u_3, \frac{1}{\sqrt{3}}u_3, \frac{1}{\sqrt{3}}u_3, \ldots\}$ entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f, f_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k|\langle f, \frac{1}{\sqrt{k}}u_k\rangle|^2 = \|f\|^2\,,$$

y por tanto se trata de un *frame* ajustado con cota igual a 1. Observemos además que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ no es una base ortonormal.

Definición 2.1.5. *Una familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *de elementos de* $\mathcal{H}$ *diremos que es de* Bessel *si existe una constante positiva* B *tal que*

$$\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \tag{2.2}$$

para todo $f \in \mathcal{H}$.

Es trivial que todo *frame* es una familia de Bessel.

Recordemos que $\ell^2(I)$ representa el conjunto de familias de escalares cuya familia de términos en módulo al cuadrado es sumable. Dicho conjunto dotado de la suma y producto por un escalar habituales tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. En $\ell^2(I)$ se puede definir el siguiente producto interno: si $f = \{f_i\}_{i\in I}$ y $g = \{g_i\}_{i\in I}$ están en $\ell^2(I)$ entonces se define $\langle f, g\rangle = \sum_{i\in I} f_i g_i^*$. Este producto interno da lugar a un espacio de Hilbert.

A continuación introducimos un teorema que será utilizado a lo largo de todo el trabajo. Previamente se prueba el siguiente lema.

Lema 2.1.6. *Sea* $\{f_i\}$ *una familia en* $\mathcal{H}$ *y supongamos que la familia* $\{c_i f_i\}_{i\in I}$ *es sumable para cualquier* $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$. *Entonces el operador* $T : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ *dado por*

$$T\{c_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} c_i f_i \tag{2.3}$$

es un operador lineal acotado.

Su operador adjunto $T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(I)$ *está dado por*

$$T^* f = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I},$$

y, además:

$$\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2 . \tag{2.4}$$

Demostración. El operador T es lineal y además queda bien definido por hipótesis.

Veamos ahora que T es acotado. Para cada $J \subset I$ finito, definamos los operadores $T_J : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ por

$$T_J\{c_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in J} c_i f_i.$$

Estos operadores son lineales por definición y acotados por tratarse de sumas finitas. Además, para cada $c = \{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ se tiene que

$$\sup\{\|T_J(c)\| : J \subset I \text{ finito}\} = \sup\left\{\left\|\sum_{i\in J} c_i f_i\right\| : J \subset I \text{ finito}\right\} < \infty$$

ya que la familia $\{c_i f_i\}_{i\in I}$ es sumable. Aplicando entonces el teorema de Banach-Steinhaus se deduce que existe $M > 0$ tal que $\|T_J\| \leq M$ para todo $J \subset I$ finito.

Sea $c = \{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ fijo. Entonces dado cualquier $J \subset I$,

$$\Big\| \sum_{i\in J} c_i f_i \Big\| = \|T_J(c)\| \leq M\|c\| \,.$$

Por la proposición A.1.5, se tiene que

$$\|T(c)\| = \Big\| \sum_{i\in I} c_i f_i \Big\| \leq M\|c\| \,,$$

es decir, T es acotado. Por ser T acotado, $T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(I)$ es acotado.

Por otro lado,

$$\langle f, T\{c_i\}_{i\in I}\rangle = \Big\langle f, \sum_{i\in I} c_i f_i \Big\rangle = \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle c_i^*.$$

Puesto que

$$\langle T^* f, \{c_i\}_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I} (T^* f)_i c_i^*$$

(donde $(T^*f)_i$ denota la coordenada i-ésima de T^*f), entonces

$$\sum_{i\in I} (T^* f)_i c_i^* = \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle c_i^*$$

para todo $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$, luego ha de ser $(T^*f)_i = \langle f, f_i\rangle$ para todo $i \in I$.

Finalmente, de la acotación de T^* deducimos la desigualdad (2.4):

$$\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 = \|T^* f\|^2 \leq \|T^*\|^2 \|f\|^2 = \|T\|^2 \|f\|^2$$

para todo $f \in \mathcal{H}$. □

Teorema 2.1.7. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de $\mathcal{H}$. Entonces $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de Bessel en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, para toda familia $\{c_i\}_{i\in I}$ en $\ell^2(I)$ se tiene que $\{c_i f_i\}_{i\in I}$ es sumable.*

Demostración. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de Bessel con cota B, y $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ entonces basta con comprobar que $\{c_i f_i\}_{i\in I}$ cumple la condición de Cauchy para la sumabilidad (ver definición A.1.2). Puesto que $\{c_i\}_{i\in I}$ pertenece a $\ell^2(I)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $J_0 \subset I$ finito tal que $\sum_{j\in J} |c_j|^2 < \varepsilon^2/B$, para cada $J \subset I$ conjunto finito tal que $J \cap J_0 = \emptyset$. Ahora,

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{j\in J} c_j f_j \Big\| &= \sup_{\|g\|=1} \Big| \langle \sum_{j\in J} c_j f_j, g\rangle \Big| \leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{j\in J} |c_j \langle f_j, g\rangle| \\ &\leq \Big(\sum_{j\in J} |c_j|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sup_{\|g\|=1} \sum_{j\in J} |\langle f_j, g\rangle|^2 \Big)^{1/2} \leq \sqrt{B} \Big(\sum_{j\in J} |c_j|^2 \Big)^{1/2} < \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde en la segunda desigualdad se ha usado la desigualdad de Hölder. De (2.5) concluimos que $\{c_i f_i\}_{i\in I}$ es sumable.

Para el recíproco basta definir $T : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ como en (2.3) y de la desigualdad (2.4) del lema anterior se deduce que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de Bessel con cota $\|T\|$. □

Observación 2.1.8. Del lema 2.1.6 se deduce que la cota óptima para una familia de Bessel es exactamente $\|T\|^2 = \|T^*\|^2$.

Pasemos a definir los siguientes operadores de interés.

Definición 2.1.9. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *una familia de Bessel.*

El operador de síntesis $T : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ *es el operador lineal definido por*

$$T\{c_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} c_i f_i.$$

El operador de análisis $G : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(I)$ *es el operador lineal definido por*

$$Gf = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}.$$

Observación 2.1.10. Estos operadores recién definidos tienen una relación especial entre sí como se ha visto en el lema 2.1.6: dada una familia de Bessel $\{f_i\}_{i\in I}$, los operadores de síntesis y análisis asociados, T y G, son adjuntos el uno del otro por lo que, de ahora en adelante, escribiremos G como T^*. De hecho, podríamos haber definido solo uno de ellos y definir el otro a partir del lema 2.1.6.

Además, ambos operadores son acotados como se demostró en el lema 2.1.6.

El operador de síntesis esta bien definido por el teorema 2.1.7 y además es lineal. El operador de análisis también está bien definido por ser $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de Bessel.

Probemos ahora que la condición (2.1) de la definición de *frame* es suficiente que se verifique en un conjunto denso de $\mathcal{H}$.

Proposición 2.1.11. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *una familia de elementos de* $\mathcal{H}$ *tal que existen* A*,* B *constantes positivas tales que*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \tag{2.6}$$

para todo f *en un conjunto denso* D *de* $\mathcal{H}$*. Entonces* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es un frame en* $\mathcal{H}$ *con cotas* A*,* B*.*

Demostración. En primer lugar, veamos que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de Bessel que tiene por cota superior B. Si no fuera así, existiría $g \in \mathcal{H}$ tal que

$$\sum_{i\in I} |\langle g, f_i\rangle|^2 > B\|g\|^2 .$$

Por definición de sumabilidad (definición A.1.1), existe un subconjunto finito $J \subset I$ de forma que

$$\sum_{i\in J} |\langle g, f_i\rangle|^2 > B\|g\|^2 .$$

Ahora, ambos lados de esta última desigualdad son aplicaciones continuas sobre g luego existe d perteneciente a D tal que

$$\sum_{i\in J} |\langle d, f_i\rangle|^2 > B\|d\|^2 .$$

Como se trata de una suma de términos positivos,

$$\sum_{i\in I}|\langle d, f_i\rangle|^2 \geq \sum_{i\in J}|\langle d, f_i\rangle|^2 > B\|d\|^2\,,$$

en contra de la hipótesis. Por tanto,

$$\sum_{i\in I}|\langle g, f_i\rangle|^2 \leq B\|g\|^2\,,$$

para todo $g \in \mathcal{H}$ y $\{f_i\}_{i\in I}$ es entonces una familia de Bessel en $\mathcal{H}$. Para la cota inferior, basta reescribir (2.6) como $A\|f\|^2 \leq \|T^*f\|^2$, donde T^* es el operador de análisis de la familia de Bessel $\{f_i\}_{i\in I}$ (luego T^* está bien definido). Esta última desigualdad se cumple para todo f en D pero como de nuevo ambos lados de la desigualdad son aplicaciones continuas sobre f (pues T^* es continuo), se tiene que la desigualdad es válida para todo f en $\mathcal{H}$. □

Definición 2.1.12. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de Bessel. El* operador de frame $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *es el operador definido por*

$$Sf = TT^*f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle f_i.$$

El operador de *frame* S queda definido como la composición de los operadores de síntesis y análisis. Veamos algunas propiedades de este operador.

Proposición 2.1.13. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de Bessel con cota B y operador de frame S. Entonces se cumple que:*

1. *S es un operador positivo, lineal, acotado y $\|S\| \leq B$.*
2. *Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un frame, entonces S es un operador invertible.*

Demostración. Para todas las demostraciones utilizaremos las propiedades de los operadores adjuntos y autoadjuntos, que pueden consultarse en la proposición 1.1.4.

1. S es lineal y acotado por ser composición de operadores lineales y acotados. Además,

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\|\|T^*\| = \|T\|^2 \leq B,$$

como se indicó en la observación 2.1.8. El operador S es positivo ya que

$$0 \leq \sum_{i\in I}|\langle f, f_i\rangle|^2 = \langle Sf, f\rangle, \tag{2.7}$$

2. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame*, por (2.7) y (2.1), se tiene que

$$A\|f\|^2 \leq \langle Sf, f\rangle \leq B\|f\|^2 \tag{2.8}$$

para todo f en $\mathcal{H}$.
Despejando de la segunda desigualdad de (2.8), tenemos que

$$\langle B^{-1}Sf, f\rangle \leq \langle f, f\rangle,$$

es decir,

$$\langle (Id - B^{-1}S)f, f\rangle \geq 0, \tag{2.9}$$

donde Id es el operador identidad. Por otro lado, de la primera desigualdad de (2.8),

$$\frac{A}{B}\|f\|^2 \leq \langle B^{-1}Sf, f\rangle;$$

esto último implica que

$$\|f\|^2 - \langle B^{-1}Sf, f\rangle \leq \|f\|^2 - \frac{A}{B}\|f\|^2 = \frac{B-A}{B}\|f\|^2. \tag{2.10}$$

De (2.9) y (2.10) obtenemos finalmente que:

$$0 \leq \langle (Id - B^{-1}S)f, f\rangle \leq \frac{B-A}{B}\|f\|^2.$$

Como $Id - B^{-1}S$ es autoadjunto, entonces por la proposición 1.1.5:

$$\|Id - B^{-1}S\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle (Id - B^{-1}S)f, f\rangle| \leq \frac{B-A}{B} < 1.$$

Debido al lema 1.2.1 de Neumann, $B^{-1}S$ es invertible, es decir, S es invertible.

□

Hasta aquí se han visto unas propiedades del operador de *frame* pero no realmente su relevancia. Dado un *frame* del espacio, el papel del operador S cobra importancia cuando se quiere descomponer un elemento f de $\mathcal{H}$ como una combinación de infinitos términos de los elementos del *frame*. En el siguiente teorema veremos como un *frame* se puede considerar como una especie de "base ampliada o generalizada".

Teorema 2.1.14 (Teorema fundamental de descomposición)**.** *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *un frame con operador de frame S. Entonces*

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, S^{-1}f_i\rangle f_i = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle S^{-1}f_i,$$

para todo $f \in \mathcal{H}$.

Demostración. Como S es autoadjunto e invertible, entonces su inversa también. Basta entonces notar que, dado $f \in \mathcal{H}$,

$$f = SS^{-1}f = \sum_{i\in I}\langle S^{-1}f, f_i\rangle f_i = \sum_{i\in I}\langle f, S^{-1}f_i\rangle f_i.$$

Para la otra igualdad basta aplicar los operadores S y S^{-1} en orden inverso

$$f = S^{-1}Sf = S^{-1}\Big(\sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle f_i\Big) = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle S^{-1}f_i.$$

□

A los números $\langle f, S^{-1}f_i\rangle$ se les denomina coeficientes del *frame* y a $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ el *frame* dual de $\{f_i\}_{i\in I}$. A partir del teorema fundamental de descomposición podemos demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.1.15. *Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un frame con cota inferior A y cota superior B, la familia $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ es un frame con cotas B^{-1}, A^{-1} y su operador de frame es S^{-1}. Si además A, B son cotas óptimas para $\{f_i\}_{i\in I}$, entonces B^{-1}, A^{-1} son cotas óptimas para $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$.*

Demostración. Para cada f en $\mathcal{H}$,

$$\sum_{i\in I} |\langle f, S^{-1}f_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I} |\langle S^{-1}f, f_i\rangle|^2 \leq B\|S^{-1}f\|^2 \leq B\|S^{-1}\|^2\|f\|^2 .$$

Por tanto, $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ es una familia de Bessel y el operador de frame para esta familia está bien definido. De hecho, si denotamos por $\tilde{S}$ al operador de frame de la familia $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ y utilizamos el teorema fundamental de descomposición:

$$\tilde{S}f = \sum_{i\in I}\langle f, S^{-1}f_i\rangle S^{-1}f_i = S^{-1}\Big(\sum_{i\in I}\langle f, S^{-1}f_i\rangle f_i\Big) = S^{-1}f, \tag{2.11}$$

luego el operador de *frame* para $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ es S^{-1}. Por otro lado, como

$$A\|f\|^2 \leq \langle Sf, f\rangle \leq B\|f\|^2$$

para todo f en $\mathcal{H}$ y puesto que S^{-1} conmuta con S e Id, aplicando el corolario 1.3.5 a los operadores positivos $A^{-1}S^{-1}$ y $S - A\cdot Id$ se llega a que

$$\langle S^{-1}f, f\rangle \leq A^{-1}\|f\|^2$$

para todo f en $\mathcal{H}$. Por otro lado, si se aplica ahora el mismo corolario a los operadores positivos $B^{-1}S^{-1}$ y $B\cdot Id - S$ se obtiene que

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \langle S^{-1}f, f\rangle.$$

Realizando en (2.11) el producto interno por f, todo esto implica finalmente que

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \langle S^{-1}f, f\rangle = \sum_{i\in I} |\langle f, S^{-1}f_i\rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2, \tag{2.12}$$

lo que quiere decir que $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* con cotas B^{-1}, A^{-1}.

Supongamos ahora que A es una cota inferior óptima para $\{f_i\}_{i\in I}$ y C es una cota óptima inferior para $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ tal que $C < A^{-1}$. Razonando como antes, se llega a que $\{f_i\}_{i\in I} = \{(S^{-1})^{-1}S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ tiene como cota inferior C^{-1}, y $C^{-1} > A$. Esto último es absurdo pues A era una cota inferior óptima. Para la cota óptima superior se razona de manera análoga. □

Observación 2.1.16. 1. Del primer punto de la proposición 2.1.13 se deduce que para un *frame* $\{f_i\}_{i\in I}$, su cota óptima superior es exactamente $\|S\|$. En cambio, de la proposición 2.1.15 se tiene que la cota óptima inferior es precisamente $\|S^{-1}\|^{-1}$. Para ello basta notar que la familia $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* con operador de *frame* S^{-1}, luego su cota óptima superior vendrá dada por $\|S^{-1}\|$. Por la proposición 2.1.15, sabemos que la cota óptima inferior de $\{f_i\}_{i\in I}$ debe ser entonces $\|S^{-1}\|^{-1}$.

2. Es interesante señalar que si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame*, entonces $S^{-1}T$ y T^*S^{-1} son los operadores de análisis y de síntesis de $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$, respectivamente. Si se toma una familia $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$, entonces

$$S^{-1}T\{c_i\}_{i\in I} = S^{-1}\Big(\sum_{i\in I} c_i f_i\Big) = \sum_{i\in I} c_i S^{-1} f_i.$$

Por otro lado, si $f \in \mathcal{H}$,

$$T^*S^{-1}f = \{\langle S^{-1}f, f_i\rangle\}_{i\in I} = \{\langle f, S^{-1}f_i\rangle\}_{i\in I},$$

pues S^{-1} es autoadjunto.

Corolario 2.1.17. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame en $\mathcal{H}$. El operador de frame, S, verifica la siguientes desigualdades:*

$$A\|f\| \leq \|Sf\| \leq B\|f\|$$

para todo $f \in \mathcal{H}$

Demostración. La segunda desigualdad es consecuencia directa del apartado 1 de la proposición 2.1.13 pues $\|Sf\| \leq \|S\|\|f\| \leq B\|f\|$ para todo $f \in \mathcal{H}$.

Para la otra desigualdad, basta tener en cuenta que S es invertible y por tanto para cada $f \in \mathcal{H}$ existe $g \in \mathcal{H}$ tal que $g = Sf$, es decir, $f = S^{-1}g$. En consecuencia es suficiente con demostrar que $A\|S^{-1}g\| \leq \|g\|$. Razonando igual que la anterior desigualdad, como S^{-1} también es un operador de *frame* con cota superior A^{-1} se llega al resultado. □

Veamos ahora como los elementos de $\mathcal{H}$ son exactamente límite de elementos de $\operatorname{span}(\{f_i\}_{i\in I})$, donde $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* en $\mathcal{H}$ y la notación span hace referencia al mínimo subespacio vectorial que genera la familia.

Definición 2.1.18. *Una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ se dice que es* completa *si*

$$\overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I}) = \mathcal{H}.$$

Si $\{f_i\}_{i\in I}$ no es completa se dice que es una familia incompleta.

Proposición 2.1.19. *Una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa si, y sólo si, dado la condición $\langle f, f_i\rangle = 0$ para todo $i \in I$ implica que $f = 0$.*

Demostración. Sea $\mathcal{G} := \operatorname{span}\{f_i\}_{i\in I}$.

Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa, entonces $\mathcal{G}$ es denso en $\mathcal{H}$. Sea $f \in \mathcal{H}$ tal que $\langle f, f_i\rangle = 0$ para todo $i \in I$. Ahora, existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{G}$ tal que $f = \lim_{n\to\infty} g_n$. Como $g_n \in \mathcal{G}$,

$$g_n = \sum_{j\in J} c_j f_j$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y tal que J es un conjunto finito que depende de cada $n \in \mathbb{N}$. Por linealidad del producto interno, $\langle f, g_n\rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como el producto interno es continuo, tomando límites en la última igualdad se llega a que $\langle f, f\rangle = 0$, es decir, $f = 0$.

Para el recíproco supongamos que si $\langle f, f_i\rangle = 0$ para todo $i \in I$ entonces $f = 0$. El conjunto $\overline{\mathcal{G}}$ es un subespacio y es cerrado, por tanto $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{G}} \oplus \overline{\mathcal{G}}^{\perp}$. Si $f \in \mathcal{H}$ entonces $f = g + h$, con $g \in \overline{\mathcal{G}}$, $f \in \overline{\mathcal{G}}^{\perp}$. Puesto que la familia $\{f_i\}_{i\in I}$ está contenida en $\overline{\mathcal{G}}$, $\langle h, f_i\rangle = 0$ para todo $i \in I$, lo que implica que $h = 0$ y en consecuencia $f \in \overline{\mathcal{G}}$, i.e., $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{H}$, luego $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa. □

Proposición 2.1.20. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame en $\mathcal{H}$. Entonces se cumple que*

$$\overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I}) = \mathcal{H},$$

es decir, $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa.

Demostración. Si $\langle f, f_i\rangle = 0$ para todo $i \in I$, por la definición de *frame* (2.1),

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 = 0.$$

Como $A > 0$ se llega a que $f = 0$. Por la proposición anterior, $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa. □

Corolario 2.1.21. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame en $\mathcal{H}$.*

1. *Si I es finito entonces* $\dim(\mathcal{H}) < \infty$.
2. *Si I es numerable entonces $\mathcal{H}$ es separable.*

Demostración. 1. Si el conjunto I es finito, $\operatorname{span}(\{f_i\}_{i\in I})$ es cerrado y, utilizando la proposición anterior,

$$\operatorname{span}(\{f_i\}_{i\in I}) = \overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I}) = \mathcal{H};$$

esto significa que $\{f_i\}_{i\in I}$ es un sistema de generadores finito y por tanto podemos extraer una base finita de $\mathcal{H}$.

2. Si I es numerable, de la proposición 2.1.20 se tiene que $\operatorname{span}(\{f_i\}_{i\in I})$ es un conjunto denso en $\mathcal{H}$. Si ahora denotamos por $\mathbb{A}$ al conjunto numerable dado por $\mathbb{A} = \{q_1 + iq_2 : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}$ y a $\operatorname{span}_{\mathbb{A}}(\{f_i\}_{i\in I})$ por las combinaciones lineales de elementos de $\{f_i\}_{i\in I}$ con escalares en $\mathbb{A}$, entonces se tiene que

$$\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{A}}}(\{f_i\}_{i\in I}) = \overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I}) = \mathcal{H},$$

pues $\mathbb{A}$ es denso en $\mathbb{C}$. Como además $\operatorname{span}_{\mathbb{A}}(\{f_i\}_{i\in I})$ es un conjunto numerable por ser exactamente el conjunto de combinaciones lineales finitas de una familia numerable considerando una familia numerable de escalares, se tiene que $\mathcal{H}$ es separable.

□

Proposición 2.1.22. *Sea $\{f_i\}_{i\in}$ una familia de elementos de $\mathcal{H}$. Si $\{f_i\}_{i\in}$ es una familia de Bessel en $\overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I})$, entonces es una familia de Bessel en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Supongamos que $\{f_i\}_{i\in}$ es una familia de Bessel en $\overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I})$ con cota B y sea $f \in \mathcal{H}$. Ahora, como $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I}) \oplus \overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I})^{\perp}$, existen elementos $g \in \overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I})$, $h \in \overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I})^{\perp}$ tales que $f = g + h$. De esta manera se obtiene que

$$\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I} |\langle g, f_i\rangle|^2 \leq B\|g\|^2 \leq B\|f\|^2 .$$

Por tanto, $\{f_i\}_{i\in}$ es una familia de Bessel en todo $\mathcal{H}$. □

A raíz de estos resultados, damos la siguiente definición.

Definición 2.1.23. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia tal que es un frame para $\overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I})$. Entonces se dice que es un* sistema de frame*.*

Hay que destacar que $\overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I})$ es un espacio de Hilbert cuando se considera la restricción del producto interno de $\mathcal{H}$ a dicho espacio. Por tanto siempre que se hable de operador de *frame*, operador de síntesis, operador de análisis etc. de un sistema de *frame* se considera que el dominio y/o espacio de llegada de dichos operadores es $\overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I})$.

Ejemplo 2.1.24. Sea $\{u_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y sea $J\subset I$ un subconjunto propio. La familia $\{u_j\}_{j\in J}$ no puede ser un *frame* para $\mathcal{H}$ pues no es completa. Los productos internos de la definición de *frame* para un u_k con $k\notin J$ son todos nulos por ser un sistema ortonormal. Ahora, $\{u_j\}_{j\in J}$ sí es un *frame* (de hecho, es una base ortonormal) para $\overline{\operatorname{span}}(\{u_j\}_{j\in J})$ luego es un sistema de *frame*.

2.2. Frames y operadores.

Hasta ahora se han visto las propiedades básicas de un *frame* y sus operadores característicos: el operador de síntesis, el operador de análisis y el operador de *frame*. En esta sección trataremos de generar y caracterizar nuevos *frames* y sistemas de *frames* a partir de otros *frames* y bases del espacio $\mathcal{H}$. La generación de nuevos *frames* será realizada en general por transformaciones de operadores acotados como veremos en los próximos resultados.

2.2.1. Construcciones de frames.

Dado un *frame* $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$, podemos construir otros *frames* a partir de operadores acotados U cuya imagen es un subespacio cerrado. Esto último es necesario para que la pseudo-inversa $U^\dagger$ (ver definición 1.4.1) de un operador esté bien definida.

Lema 2.2.1. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia completa y $U:\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_2$ un operador acotado. Entonces se tiene que:*

$$\overline{\operatorname{span}}(\{Uf_i\}_{i\in I})=\overline{\operatorname{Im}(U)}. \tag{2.13}$$

Demostración. Puesto que U es acotado,

$$\overline{\operatorname{span}}(\{Uf_i\}_{i\in I})\supset U(\overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I}))=U(\mathcal{H}_1)=\operatorname{Im}(U).$$

Como además $\overline{\operatorname{span}}(\{Uf_i\}_{i\in I})\subset\overline{\operatorname{Im}(U)}$, se da la igualdad (2.13). □

Proposición 2.2.2. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame en $\mathcal{H}$ con cotas A, B y sea $U:\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_2$ un operador acotado cuya imagen es cerrada. En estas condiciones, $\{Uf_i\}_{i\in I}$ es un sistema de frame con cotas $A\|U^\dagger\|^{-2}$, $B\|U\|^2$ respectivamente.*

Demostración. La familia $\{Uf_i\}_{i\in I}$ es de Bessel pues, dado $f \in \mathcal{H}_1$,

$$\sum_{i\in I} |\langle f, Uf_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I} |\langle U^* f, f_i\rangle|^2 \leq B\|U^* f\|^2 \leq B\|U^*\|^2\|f\|^2 = B\|U\|^2\|f\|^2 ;$$

donde en la primera desigualdad se ha usado que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de Bessel. Por otro lado, si $g \in \operatorname{span}(\{Uf_i\}_{i\in I})$ entonces existe $f \in \operatorname{span}(\{f_i\}_{i\in I})$ tal que $g = Uf$. Como $UU^\dagger = Id$ en $\operatorname{Im}(U)$ y el operador $UU^\dagger$ es autoadjunto por ser una proyección ortogonal sobre $\operatorname{Im}(U)$ (proposición 1.4.6),

$$g = Uf = (UU^\dagger)^* Uf = (U^\dagger)^* U^* Uf,$$

luego

$$\begin{aligned} \|g\| &\leq \|(U^\dagger)^*\|^2 \|U^* Uf\|^2 \\ &\leq \frac{\|(U^\dagger)^*\|^2}{A} \sum_{i\in I} |\langle U^* Uf, f_i\rangle|^2 = \frac{\|(U^\dagger)\|^2}{A} \sum_{i\in I} |\langle g, Uf_i\rangle|^2 . \end{aligned}$$

Queda así demostrado el resultado para todo $g \in \operatorname{span}(\{Uf_i\}_{i\in I})$. Por la proposición 2.1.11 se concluye para todo $g \in \overline{\operatorname{span}}(\{Uf_i\}_{i\in I})$. □

Proposición 2.2.3. *Si en las condiciones de la proposición anterior además U es un operador sobreyectivo entonces $\{Uf_i\}_{i\in I}$ es un frame en $\mathcal{H}_2$ con cotas $A\|U^\dagger\|^{-2}$, $B\|U\|^2$ respectivamente.*

Demostración. Puesto que $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* en $\mathcal{H}_1$, $\overline{\operatorname{span}}(\{f_i\}_{i\in I}) = \mathcal{H}_1$ por la proposición 2.1.20. Ahora, utilizando el lema 2.2.1, como U es sobreyectivo se da la igualdad $\overline{\operatorname{span}}(\{Uf_i\}_{i\in I}) = \mathcal{H}_2$ y basta aplicar la proposición anterior. □

Corolario 2.2.4. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame en $\mathcal{H}_1$ con cotas A, B. Si U es un operador lineal acotado de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$, entonces $\{Uf_i\}_{i\in I}$ es un frame en $\mathcal{H}_2$ si, y sólo si, existe una constante $k > 0$ de forma que*

$$\|U^* f\|^2 \geq k\|f\|^2 , \tag{2.14}$$

para todo $f \in \mathcal{H}_2$.

Demostración. Si $\{Uf_i\}_{i\in I}$ es un *frame* en $\mathcal{H}_2$ con cotas $0 < C \leq D$ y $f \in \mathcal{H}_2$, entonces

$$C\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, Uf_i\rangle|^2 \leq D\|f\|^2 .$$

Como $\{f_i\}_{i\in I}$ es también un *frame*,

$$C\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, Uf_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I} |\langle U^* f, f_i\rangle|^2 \leq B\|U^* f\|^2,$$

y basta tomar $k = C/B > 0$.

Para el recíproco, basta tener en cuenta que la condición (2.14) implica que U es sobreyectivo por la proposición 1.1.6. De la proposición anterior se deduce el resultado. □

Corolario 2.2.5. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *un frame en* $\mathcal{H}_1$. *Si* U *es un operador lineal acotado de* $\mathcal{H}_1$ *en* $\mathcal{H}_2$ *cuya imagen es cerrada, entonces* $\{Uf_i\}_{i\in I}$ *es un frame en* $\mathrm{Im}(U)$ *si, y sólo si, se cumple que*

$$\|U^* f\|^2 \geq k\|f\|^2 , \tag{2.15}$$

para todo $f \in \mathrm{Im}(U)$.

Demostración. La demostración es exactamente igual que la anterior. Observe que $\mathrm{Im}(U)$ es un espacio de Hilbert por ser un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_2$. □

Podemos particularizar la proposición 2.2.2 para operadores unitarios, como muestra el siguiente corolario.

Corolario 2.2.6. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *un sistema de frame con cotas* A, B *y* $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ *un operador unitario. Entonces* $\{Uf_i\}_{i\in I}$ *es un sistema de frame con mismas cotas* A, B.

Demostración. Basta tener en cuenta que la imagen de un subespacio cerrado por un operador unitario U es un subespacio cerrado. Además, como el operador inverso de U coincide con la pseudo inversa de U y $\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$, basta aplicar la proposición 2.2.2.

□

Hasta ahora hemos visto como construir frames a partir de operadores acotados con imagen cerrada. Además, en cierta manera podíamos elegir el tamaño de las cotas en función de la norma del operador en cuestión. El teorema que se muestra a continuación utiliza el operador raíz (véase teorema 1.3.8) para la construcción de un *frame* ajustado a partir del inverso de su operador de *frame*, S^{-1}. El operador S^{-1} es un operador positivo como vimos en las proposiciones 2.1.13 y 2.1.15. Por tanto está bien definida su raíz, que denotaremos por $S^{-1/2}$.

Teorema 2.2.7. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *un frame en* $\mathcal{H}$ *con operador de frame* S. *Entonces* $\{S^{-1/2}f_i\}_{i\in I}$ *es un frame ajustado con cota igual a 1, y*

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, S^{-1/2}f_i\rangle S^{-1/2}f_i,$$

para todo $f \in \mathcal{H}$.

Demostración. Puesto que $S^{-1/2}$ conmuta con S^{-1} entonces también conmuta con S pues:

$$S^{-1/2}S = (SS^{-1})S^{-1/2}S = SS^{-1}S^{-1/2}S = SS^{-1/2}(S^{-1}S) = SS^{-1/2}.$$

Luego para cada $f \in \mathcal{H}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} f = S^{-1}Sf = S^{-1/2}SS^{-1/2}f &= S^{-1/2}\Big(\sum_{i\in I}\langle S^{-1/2}f, f_i\rangle f_i\Big) \\ = \sum_{i\in I}\langle S^{-1/2}f, f_i\rangle S^{-1/2}f_i &= \sum_{i\in I}\langle f, S^{-1/2}f_i\rangle S^{-1/2}f_i. \end{aligned}$$

Realizando ahora el producto escalar por f en ambos lados de la última ecuación,

$$\|f\|^2 = \sum_{i\in I}\langle f, S^{-1/2}f_i\rangle\langle S^{-1/2}f_i, f\rangle = \sum_{i\in I}|\langle f, S^{-1/2}f_i\rangle|^2, \tag{2.16}$$

de donde se obtiene que $\{S^{-1/2}f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* ajustado con cota igual a la unidad. □

Observación 2.2.8. De hecho, la demostración del anterior teorema nos muestra que si $\{g_i\}_{i\in I}$ es una familia tal que $f = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle g_i$ para todo $f \in \mathcal{H}$, entonces $\{g_i\}_{i\in I}$ es un *frame* ajustado. Basta partir de $f = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle g_i$ y realizar el producto escalar con f, como en (2.16). Es más, el operador del *frame* es el operador identidad y el *frame* dual es la propia familia $\{g_i\}_{i\in I}$.

Otro tipo de operadores interesantes son las proyecciones ortogonales, que juegan un papel muy importante a la hora de buscar distancias mínimas. Los siguientes resultados muestran la relación que tienen las proyecciones ortogonales con un *frame*.

Proposición 2.2.9. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un sistema de frame en $\mathcal{H}$ y sea P la proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado M. Se cumple que:*

1. *Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un frame en $\mathcal{H}$ con cotas A, B, entonces $\{Pf_i\}_{i\in I}$ es un frame en M con mismas cotas A, B.*
2. *Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un frame en M con operador de frame S, entonces la proyección ortogonal sobre M viene dada por*
$$Pf = \sum_{i\in I}\langle f, S^{-1}f_i\rangle f_i,$$
para todo $f \in \mathcal{H}$.

Demostración. 1. Lo demostramos de dos maneras:

a) Observemos en primer lugar que $Pf_i \in M$ para todo $i \in I$. Como $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* en $\mathcal{H}$, $\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i\in I} = \mathcal{H}$. Aplicando entonces el lema 2.2.1, se obtiene que
$$\overline{\operatorname{span}}\{Pf_i\}_{i\in I} = \overline{\operatorname{Im}(P)} = \overline{M} = M.$$
Esto último implica que la familia $\{Pf_i\}_{i\in I}$ genera M.
Ahora, si $f \in M$,
$$\sum_{i\in I}|\langle f, Pf_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I}|\langle Pf, f_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I}|\langle f, f_i\rangle|^2 .$$
De aquí se obtiene que $A\|f\|^2 \le \sum_{i\in I}|\langle f, Pf_i\rangle|^2 \le B\|f\|^2$ para todo $f \in M$.

b) Este resultado también puede verse como un corolario de la proposición 2.2.2, ya que P es un operador acotado con imagen cerrada pues $P(\mathcal{H}) = M$. Además, la pseudo-inversa del operador P es precisamente P (proposición 1.4.5). Como $\|P\| = 1$, se deduce que $\{Pf_i\}_{i\in I}$ es un sistema de *frame* con cotas A, B. Equivalentemente, $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* en M con cotas A, B.

2. Si $f \in \mathcal{H}$ entonces $f = g + h$ con $g \in M$ y $h \in M^\perp$, y como $S^{-1}f_i \in M$ para todo $i \in I$, se tiene que $\langle h, S^{-1}f_i\rangle = 0$ para todo $i \in I$. Puesto que
$$\langle f, S^{-1}f_i\rangle = \langle g, S^{-1}f_i\rangle + \langle h, S^{-1}f_i\rangle = \langle g, S^{-1}f_i\rangle,$$
entonces
$$\sum_{i\in I}\langle f, S^{-1}f_i\rangle f_i = \sum_{i\in I}\langle g, S^{-1}f_i\rangle f_i = g, \tag{2.17}$$
donde en la última igualdad se ha utilizado el teorema fundamental de descomposición (teorema 2.1.14). Como $Pf = g$, se concluye.

□

Proposición 2.2.10. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un sistema de frame en $\mathcal{H}$. La proyección ortogonal P de una familia $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ sobre la imagen del operador de análisis T^* es exactamente*

$$P\{c_i\}_{i\in I} = \left\{\left\langle \sum_{i\in I} c_i S^{-1} f_i, f_j \right\rangle\right\}_{j\in I},$$

donde S es el operador de frame de $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\overline{\text{span}}(\{f_i\}_{i\in I})$.

Demostración. Sea Q el operador definido de $\ell^2(I)$ en $\ell^2(I)$ como $Q := T^*S^{-1}T$. El operador Q es lineal y acotado por ser composición de operadores lineales y acotados.

Además, Q es la identidad en $\text{Im}(T^*)$ ya que si $\{c_i\}_{i\in I} \in \text{Im}(T^*)$, entonces existe $f \in \overline{\text{span}}(\{f_i\}_{i\in I})$ tal que $\{c_i\}_{i\in I} = T^*f$. Con esto se tiene que

$$Q\{c_i\}_{i\in I} = T^*S^{-1}TT^*f = T^*S^{-1}Sf = T^*f = \{c_i\}_{i\in I}.$$

Por otro lado, si $\{c_i\}_{i\in I} \in \text{Ker}(T)$,

$$Q\{c_i\}_{i\in I} = T^*S^{-1}T\{c_i\}_{i\in I} = 0.$$

Esto implica que el operador Q es nulo en $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T^*)^{\perp}$ y en consecuencia Q es exactamente la proyección ortogonal sobre $\text{Im}(T^*)$. Por último, observemos que:

$$\begin{aligned} Q\{c_i\}_{i\in I} = T^*S^{-1}T\{c_i\}_{i\in I} = T^*S^{-1}\Big(\sum_{i\in I} c_i f_i\Big) &= T^*\Big(\sum_{i\in I} S^{-1} f_i\Big) \\ &= \left\{\left\langle \sum_{i\in I} c_i S^{-1} f_i, f_j \right\rangle\right\}_{j\in I}, \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. □

2.2.2. Caracterizaciones de un frame.

Hasta ahora, demostrar que una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ era un *frame* se basaba en comprobar que se trataba de una familia de Bessel y en encontrar una cota inferior $A > 0$ que cumpliera con la definición de *frame*. En este apartado trataremos de dar otras equivalencias de la definición que venimos utilizando.

En esta línea, el siguiente teorema muestra una caracterización sin involucrar las cotas del *frame*.

Teorema 2.2.11. *Una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ es un frame en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, el operador $T : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$, dado por*

$$T(\{c_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} c_i f_i, \tag{2.18}$$

está bien definido y es sobreyectivo.

Demostración. La condición necesaria es inmediata del teorema 2.1.7 puesto que si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame*, en particular es una familia de Bessel. Además, por el segundo punto de la proposición 2.1.13, el operador de *frame* $S = TT^*$ es invertible y por tanto sobreyectivo. Esto conduce a que T es sobreyectivo.

Para la otra implicación, el hecho de que T esté bien definido implica que la familia $\{c_i f_i\}_{i\in I}$ es sumable para cada $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ y por el teorema 2.1.7 resulta que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de Bessel. Además, T es el operador de síntesis de la familia y es un operador lineal y acotado. Falta ver la condición inferior de *frame*. Como T es sobreyectivo, basta aplicar la proposición 2.1.6 para concluir que existe una constante $A > 0$ tal que

$$A\|f\|^2 \leq \|T^* f\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2$$

para todo $f \in \mathcal{H}$. □

Observación 2.2.12. No obstante, podemos intentar buscas una cota inferior concreta para $\{f_i\}_{i\in I}$ pues nos será necesario más adelante. La imagen de T es cerrada y en consecuencia $T^\dagger$ queda bien definido en $\mathcal{H}$. Ahora,

$$f = TT^\dagger f = \sum_{i\in I} (T^\dagger f)_i f_i, \tag{2.19}$$

donde $(T^\dagger f)_i$ denota la coordenada i-ésima de $T^\dagger f$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\|f\|^4 = |\langle f, f\rangle|^2 = |\langle \sum_{i\in I} (T^\dagger f)_i f_i, f\rangle|^2 &\leq \Big(\sum_{i\in I} |(T^\dagger f)_i| \cdot |\langle f_i, f\rangle|\Big)^2 \\ &\leq \Big(\sum_{i\in I} |(T^\dagger f)_i|^2\Big)\Big(\sum_{i\in I} |\langle f_i, f\rangle|^2\Big) = \|T^\dagger f\|^2 \sum_{i\in I} |\langle f_i, f\rangle|^2 \\ &\leq \|T^\dagger\|^2 \|f\|^2 \sum_{i\in I} |\langle f_i, f\rangle|^2,\end{aligned}$$

y se concluye que

$$\|f\|^2 \, \|T^\dagger\|^{-2} \leq \sum_{i\in I} |\langle f_i, f\rangle|^2 = \|T^* f\|^2.$$

Para un sistema de *frame* el resultado anterior es también válido:

Corolario 2.2.13. *Una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ es un sistema de frame si, y sólo si, el operador $T : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ dado por (2.18) está bien definido en $\ell^2(I)$ y tiene imagen cerrada.*

Demostración. La primera implicación es consecuencia del teorema previo teniendo en cuenta por un lado que $\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i\in I}$ es en sí un espacio de Hilbert si se considera como producto interno la restricción de $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ sobre $\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i\in I}$. Por el teorema anterior, la imagen de T es precisamente $\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i\in I}$, que es cerrada en $\mathcal{H}$.

Para la implicación recíproca, si el espacio de llegada de T se reduce a $\operatorname{Im}(T)$, entonces T es sobreyectivo y, por el teorema anterior, $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* en $\operatorname{Im}(T)$, es decir, es un sistema de *frame*.

□

Otra caracterización que utilizaremos en los siguientes capítulos es la siguiente.

Teorema 2.2.14. *Una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ es un frame en $\mathcal{H}$ con cotas A, B si, y sólo si, se cumplen las dos siguientes condiciones:*

1. *$\{f_i\}_{i\in I}$ es completa en $\mathcal{H}$.*

2. *El operador de síntesis T está bien definido sobre $\ell^2(I)$ y existen $A,B > 0$ tales que*

$$A \sum_{i\in I} |c_i|^2 \leq \|T\{c_i\}_{i\in I}\|^2 \leq B \sum_{i\in I} |c_i|^2, \tag{2.20}$$

para todo $\{c_i\}_{i\in I} \in \mathrm{Ker}(T)^\perp$.

Demostración. La condición de que $\{f_i\}_{i\in I}$ sea de Bessel es equivalente a la desigualdad derecha de (2.20) debido al teorema 2.1.7 y, como se indicó en la observación 2.1.8: si $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de Bessel con cota B entonces por dicho teorema el operador T está bien definido, es acotado y como $\|T\| \leq \sqrt{B}$, se tiene la desigualdad. Si suponemos cierta la desigualdad derecha para todo $\{c_i\}_{i\in I} \in \mathrm{Ker}(T)^\perp$ y que T está bien definido, por el teorema 2.1.7 se tiene que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de Bessel; además, $\|T\| \leq \sqrt{B}$, por tanto, B es una cota superior.

Por tanto, supondremos que $\{f_i\}_{i\in I}$ es de Bessel y demostraremos la equivalencia de la condición inferior de *frame* y la desigualdad izquierda del enunciado junto con la completitud de $\{f_i\}_{i\in I}$.

Si $\{f_i\}_{i\in I}$ satisface la condición inferior de la definición de *frame*, entonces $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa en $\mathcal{H}$. Además, por ser $\{f_i\}_{i\in I}$ un *frame* se tiene que $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{H}$, luego $\mathrm{Im}(T^*)$ es cerrado por serlo $\mathrm{Im}(T)$ (ver teorema 1.1.8). Ahora,

$$\mathrm{Ker}(T)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(T^*)} = \mathrm{Im}(T^*).$$

Esto implica que los elementos de $\mathrm{Ker}(T)^\perp$ son exactamente las familias de la forma $\{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}$, con $f \in \mathcal{H}$. Dado $f \in \mathcal{H}$,

$$\left(\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2\right)^2 = |\langle Sf, f\rangle|^2 \leq \|Sf\|^2\|f\|^2 \leq \|Sf\|^2 \frac{1}{A} \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2.$$

De esto último se obtiene la condición inferior de (2.20) pues

$$A \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq \|Sf\|^2 = \|T\{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}\|^2 .$$

Para la otra implicación supongamos ahora que $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa y que se cumple (2.20). Basta probar que $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{H}$ y por el teorema 2.2.11 se obtendrá que $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame*. Puesto que $\mathrm{span}\{f_i\}_{i\in I} \subset \mathrm{Im}(T)$ y $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa, es suficiente con ver que $\mathrm{Im}(T)$ es cerrado. Pero que $\mathrm{Im}(T)$ es cerrado es directo de la condición (2.20) y del lema 1.1.7. Con esto se llega a que T es sobreyectivo, lo que implica que $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame*.

Falta por ver que la cota inferior de la definición de *frame* es precisamente A. Si probamos que $A \leq \|T^\dagger\|^{-2}$ habremos terminado, pues como se indicó en la observación 2.2.12:

$$\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \geq \|T^\dagger\|^{-2}\|f\|$$

para todo $f \in \mathcal{H}$. Puesto que $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{H}$, la pseudo-inversa por la derecha de T está bien definida y, por la proposición 1.4.6, $TT^\dagger$ es la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{H}$ y

$T^\dagger T$ es la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Ker}(T)^\perp$. En consecuencia la desigualdad inferior de (2.20) se traduce en:

$$A\|T^\dagger T\{c_i\}_{i\in I}\|^2 \leq \|TT^\dagger T\{c_i\}_{i\in I}\|^2 = \|T\{c_i\}_{i\in I}\|^2, \tag{2.21}$$

para todo $\{c_i\}_{i\in I} \in \mathrm{Ker}(T)^\perp$.

Como T es sobreyectivo, de la desigualdad anterior se obtiene que:

$$\|T^\dagger f\|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2$$

para todo $f \in \mathcal{H}$, de donde se deduce que $\|T^\dagger\|^2 \leq A^{-1}$, que es lo que queríamos obtener. □

Aunque en el próximo capítulo se estudiará con más detalle las relaciones entre *frames*, bases ortonormales y bases de Riesz, destacamos el siguiente teorema que permite caracterizar *frames* a partir de bases ortonormales.

Teorema 2.2.15. *1. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert y sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal arbitraria en $\mathcal{H}_1$. Si $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ es un operador acotado sobreyectivo, entonces la familia $\{Ue_i\}_{i\in I}$ es un frame en $\mathcal{H}_2$.*

2. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un frame en $\mathcal{H}_2$, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1$, una base ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}_1$ y un operador $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ acotado y sobreyectivo tales que $f_i = Ue_i$ para cada $i \in I$.

Demostración. 1. Sea U un operador acotado y sobreyectivo de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$, y sea $T : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}_2$ el operador definido como:

$$T(\{c_i\}_{i\in I}) := \sum_{i\in I} c_i Ue_i = U\Big(\sum_{i\in I} c_i e_i\Big),$$

i.e., $T = U \circ \Phi^{-1}$, donde $\Phi : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \ell^2(I)$, dado por $\Phi f = \{\langle f, e_i\rangle\}_{i\in I}$ es una isometría lineal sobreyectiva. Se tiene entonces que T es sobreyectivo ya que es composición de dos operadores sobreyectivos. Por el teorema 2.2.11 se concluye que la familia $\{Ue_i\}_{i\in I}$ es un *frame*.

2. Dado un *frame* $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}_2$, sea $\{\delta_i\}_{i\in I}$ la base canónica de $\ell^2(I)$, es decir, los elementos δ_i están dados por $\delta_i := \{\delta_{ik}\}_{k\in I}$ (delta de Kronecker). El operador de síntesis T del *frame* es un operador acotado y sobreyectivo y, además, $T\delta_i = f_i$ para cada $i \in I$.

□

En el último teorema se ha descrito como caracterizar un *frame* a partir de una base ortonormal. Ahora nos preguntamos si es posible caracterizar de alguna forma un *frame* a partir de otro *frame*. La respuesta es afirmativa y de hecho hay diversas maneras.

Ya hemos visto que si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* en $\mathcal{H}$ y tomamos la familia $\{g_i\}_{i\in I}$ dada por $g_i = Uf_i$, entonces el operador U ha de cumplir ciertas condiciones para que $\{g_i\}_{i\in I}$ sea también un *frame*. Si por ejemplo se tuviera que $\mathrm{Im}(U)$ no es un conjunto denso en $\mathcal{H}$ entonces existe un elemento no nulo h tal que $h \in \overline{\mathrm{Im}(U)}^\perp$. Es decir, la familia

$\{g_i\}_{i\in I}$ no es un *frame* ya que no es completa.

En [8], Aldroubi construye nuevos *frames* a partir de otro *frame*, $\{f_i\}_{i\in I}$. En concreto realiza las transformaciones

$$g_j = \sum_{k\in I} u^*_{jk} f_k, \qquad j \in I, \tag{2.22}$$

dando condiciones sobre los escalares $u_{jk} = \langle U\delta_k, \delta_j\rangle$ para que $\{g_i\}_{i\in I}$ sea un *frame*. Aquí, $\{\delta_i\}_{i\in I}$ denota de nuevo la base canónica de $\ell^2(I)$ y U es un operador lineal acotado de $\ell^2(I)$ en $\ell^2(I)$. Los elementos g_j están bien definidos: como $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* y $\{u^*_{jk}\}_{k\in I} \in \ell^2(I)$ entonces basta aplicar el teorema 2.2.11. Observe que efectivamente $\{u^*_{jk}\}_{k\in I} \in \ell^2(I)$ para cada $j \in I$ ya que $\{u_{jk}\}_{k\in I} \in \ell^2(I)$ para cada $j \in I$, pues por la identidad de Parseval,

$$\sum_{k\in I} |\langle U\delta_k, \delta_j\rangle|^2 = \sum_{k\in I} |\langle \delta_k, U^*\delta_j\rangle|^2 = \|U^*\delta_j\|^2.$$

De cara a los siguiente resultados que dan condiciones sobre U para que la familia $\{g_i\}_{i\in I}$ definida en (2.22) sea un *frame*, se introduce la siguiente notación para el operador de análisis $T^*_\Lambda : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(I)$,

$$T^*_\Lambda f = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}, \qquad f \in \mathcal{H}, \tag{2.23}$$

donde $\Lambda = \{f_i\}_{i\in I}$ es *frame* cualquiera prefijado en $\mathcal{H}$. Recordemos que de la definición de *frame* y de T^*_Λ tenemos que para todo $f \in \mathcal{H}$.

$$A\|f\|^2 \le \|T^*_\Lambda f\|^2 \le B\|f\|^2 . \tag{2.24}$$

Veamos pues en qué condiciones la familia $\{g_i\}_{i\in I}$ es un *frame*. De ahora en adelante denotaremos cuando convenga $\{f_i\}_{i\in I}$ por Λ y $\{g_i\}_{i\in I}$ por Γ.

Lema 2.2.16. *Sea U un operador lineal acotado de $\ell^2(I)$ en sí mismo. Para cada $f \in \mathcal{H}$ se cumple que $\{\langle f, g_i\rangle\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ y*

$$\{\langle f, g_i\rangle\}_{i\in I} = UT^*_\Lambda f,$$

para todo $f \in \mathcal{H}$.

Demostración. Es una igualdad de familias en $\ell^2(I)$. Veamos que todas las componentes son iguales. Dado $i \in I$ y $f \in \mathcal{H}$,

$$\langle f, g_i\rangle = \langle f, \sum_{j\in I} u^*_{ij} f_j\rangle = \sum_{j\in I} u_{ij}\langle f, f_j\rangle.$$

Por otro lado,

$$(UT^*_\Lambda f)_i = \langle U\{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in I}, \delta_i\rangle = \langle U\sum_{j\in I}\langle f, f_j\rangle\delta_j, \delta_i\rangle = \sum_{j\in I} u_{ij}\langle f, f_j\rangle,$$

y se tiene la igualdad. $\square$

Teorema 2.2.17. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame en $\mathcal{H}$ y sea U un operador lineal acotado de $\ell^2(I)$ en sí mismo. Entonces la familia $\{g_i\}_{i\in I}$ definida en (2.22) es un frame en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, existe una constante $k>0$ tal que para todo $h\in \mathrm{Im}(T_\Lambda^*)$ se tiene que*

$$\|Uh\|^2 \geq k\|h\|^2 .$$

Demostración. Sea $f\in\mathcal{H}$. De (2.24) y la hipótesis de la condición suficiente se demuestra que $\{g_i\}_{i\in I}$ es un *frame* con cotas Ak y $B\|U\|$:

$$Ak\|f\|^2 \leq k\|T_\Lambda^* f\|^2 \leq \|UT_\Lambda^* f\|^2 \leq \|U\|\|T_\Lambda^* f\|^2 \leq B\|U\|\|f\|^2 \tag{2.25}$$

ya que, por el lema previo,

$$\|UT_\Lambda^* f\|^2 = \|\{\langle f,g_i\rangle\}_{i\in I}\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle f,g_i\rangle|^2 .$$

Para la otra implicación, supongamos ahora que $\{g_i\}_{i\in I}$ es un *frame* con cotas $0<C\leq D$, es decir:

$$C\|f\|^2 \leq \|T_\Gamma^* f\|^2 = \|UT_\Lambda^* f\|^2 \leq D\|f\|^2 . \tag{2.26}$$

Utilizando ahora la desigualdad izquierda de (2.26) y la desigualdad derecha de (2.24) se llega a que:

$$\frac{C}{B}\|T_\Lambda^* f\|^2 \leq \|UT_\Lambda^* f\|^2$$

para todo $f\in\mathcal{H}$, i.e,

$$\frac{C}{B}\|h\|^2 \leq \|Uh\|^2$$

para todo $h\in \mathrm{Im}(T_\Lambda^*)$. Por tanto es suficiente con tomar $k=C/B>0$. □

El recíproco del teorema anterior se puede enunciar de la siguiente manera.

Teorema 2.2.18. *Si $\Gamma=\{g_i\}_{i\in I}$ y $\Lambda=\{f_i\}_{i\in I}$ son frames en $\mathcal{H}$, entonces existe un operador lineal acotado $U:\ell^2(I)\longrightarrow \ell^2(I)$ tal que*

$$g_i = \sum_{j\in I} u_{ij} f_j, \qquad i\in I,$$

con $u_{ij}=\langle U\delta_j,\delta_i\rangle$.

Demostración. Definimos los escalares u_{ij} como

$$u_{ij} = \langle S^{-1}g_i, f_j\rangle,$$

donde S es el operador de *frame* de $\{f_i\}_{i\in I}$. Luego como $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame*, por el teorema fundamental de la descomposición se tiene que

$$g_i = \sum_{j\in I}\langle S^{-1}g_i, f_j\rangle f_j = \sum_{j\in I} u_{ij} f_j .$$

Ahora, por el teorema 2.2.15 existen $V : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ y $W : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ lineales, continuos y sobreyectivos tales que $V\delta_j = f_j$ y $W\delta_j = g_j$ para todo $j \in I$. Entonces, tomando U como $V^*S^{-1}W$ se tiene que:

$$u_{ij} = \langle S^{-1}g_i, f_j\rangle = \langle S^{-1}W\delta_i, V\delta_j\rangle = \langle V^*S^{-1}W\delta_i, \delta_j\rangle = \langle U\delta_i, \delta_j\rangle.$$

Obviamente U es un operador lineal acotado por ser composición de operadores lineales acotados.

□

2.3. Frames inexactos y frames duales.

En el teorema 2.1.14 ya vimos que dado un *frame* $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$, la familia $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ también es un *frame*. Definimos este nuevo *frame* como el *frame* dual de $\{f_i\}_{i\in I}$. Observe que tiene sentido la denominación 'dual' pues el operador de *frame* de $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ es precisamente S^{-1} (proposición 2.1.15), luego el *frame* dual de $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ es $\{f_i\}_{i\in I}$.

No obstante, podemos ampliar la definición de *frame* dual como mostramos.

Definición 2.3.1. *Dado un frame $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$, un* frame dual *de $\{f_i\}_{i\in I}$ es un frame $\{g_i\}_{i\in I}$ que cumple que*

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle f_i, \tag{2.27}$$

para todo $f \in \mathcal{H}$.

Con esta nueva definición, el *frame* dual de otro *frame* dado no tiene porqué ser único. Por tanto, a partir de ahora denominaremos a $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ como el *frame* dual canónico de $\{f_i\}_{i\in I}$.

El objetivo final de este apartado es estudiar qué *frames* tienen varios frames duales y también dar una caracterización general de todos los *frames* duales asociados a un *frame* dado. Previo a ello, introducimos la definición de *frame* inexacto y unos lemas necesarios para este objetivo, pero también útiles en otros aspectos en la teoría de *frames*.

Definición 2.3.2. *Se dice que un frame $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ es* inexacto *si existe una familia $\{c_i\}_{i\in I}$ en $\ell^2(I)$ no nula tal que*

$$0 = \sum_{i\in I} c_i f_i.$$

En el siguiente capítulo veremos el motivo de la denominación de *frame* inexacto, y demostraremos como todo *frame* inexacto no es un *frame* exacto y viceversa.

Este siguiente lema tiene una consecuencia importante en términos métricos: si un elemento f de $\mathcal{H}$ admite varias representaciones de la forma $\sum_{i\in I} c_i f_i$, los coeficientes $\{\langle f, S^{-1}f_i\rangle\}$ son aquellos que tienen norma mínima entre todos las familias $\{c_i\}_{i\in I}$ posibles.

Lema 2.3.3. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *un frame en* $\mathcal{H}$ *y sea* $f \in \mathcal{H}$. *Si* $f = \sum_{i\in I} c_i f_i$ *para ciertos coeficientes* $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$, *entonces:*

$$\sum_{i\in I} |c_i|^2 = \sum_{i\in I} |\langle f, S^{-1} f_i\rangle|^2 + \sum_{i\in I} |c_i - \langle f, S^{-1}\rangle|^2.$$

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{H}$ se escribe como en el enunciado. Reescribiendo los coeficientes como

$$\{c_i\}_{i\in I} = \{c_i - \langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in I} + \{\langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in I},$$

entonces por la hipótesis y el teorema fundamental de descomposición:

$$T\left(\{c_i - \langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} \left(c_i - \langle f, S^{-1} f_i\rangle\right) f_i = 0,$$

o equivalentemente, $\{c_i - \langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in I} \in \mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T^*)^\perp$. Ahora, puesto que

$$\{\langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in I} = \{\langle S^{-1} f, f_i\rangle\}_{i\in I} = T^*(S^{-1} f) \in \mathrm{Im}(T^*),$$

basta utilizar el teorema de Pitágoras:

$$\|\{c_i\}_{i\in I}\|^2 = \|\{\langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in I}\|^2 + \|\{c_i - \langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in I}\|^2,$$

que es exactamente lo que queríamos demostrar. □

Teorema 2.3.4. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *un frame en* $\mathcal{H}$. *Para cada* $j \in I$ *se tiene que la familia* $\{f_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$ *es, o bien un frame, o bien una familia incompleta. En concreto:*

- *Si* $\langle f_j, S^{-1} f_j\rangle \neq 1$, *entonces* $\{f_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$ *es un frame en* $\mathcal{H}$.
- *Si* $\langle f_j, S^{-1} f_j\rangle = 1$, *entonces* $\{f_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$ *es una familia incompleta en* $\mathcal{H}$. *Además,* $\langle f_j, S^{-1} f_i\rangle = 0$ *para todo* $i \neq j$.

Demostración. Sea $j \in I$. Por el teorema fundamental de descomposición,

$$f_j = \sum_{i\in I} \langle f_j, S^{-1} f_i\rangle f_i.$$

Denotemos los escalares $\langle f_j, S^{-1} f_i\rangle$ por c_i. Como también

$$f_j = \sum_{i\in I} \delta_{ji} f_i,$$

entonces por el lema anterior:

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{i\in I} |\delta_{ji}|^2 &= \sum_{i\in I} |c_i|^2 + \sum_{i\in I} |c_i - \delta_{ji}|^2 \\ &= |c_j|^2 + \sum_{i\in I\setminus\{j\}} |c_i|^2 + |c_j - 1|^2 + \sum_{i\in I\setminus\{j\}} |c_i|^2 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ahora, si $c_j = 1$, como la suma en (2.28) es de términos positivos, entonces ha de cumplirse que $\sum_{i\in I\setminus\{j\}} |c_i|^2 = 0$ y por tanto

$$c_i = \langle S^{-1} f_j, f_i\rangle = 0$$

para todo $i \neq j$. Además, como

$$c_j = \langle S^{-1} f_j, f_j \rangle = 1$$

entonces $S^{-1} f_j \neq 0$. De esta forma hemos encontrado un elemento $S^{-1} f_j$ no nulo que es ortogonal a todos los elementos de $\{f_i\}_{i \in I \setminus \{j\}}$.

Si fuera $c_j \neq 1$, como

$$f_j = c_j f_j + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} c_i f_i,$$

entonces

$$f_j = (1 - c_j)^{-1} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} c_i f_i.$$

Utilizando ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\langle f, f_j \rangle|^2 &= \left| (1 - c_j)^{-1} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} c_i \langle f, f_i \rangle \right|^2 \\ &\leq |1 - c_j|^{-2} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} |c_i|^2 \sum_{i \in I \setminus \{j\}} |\langle f, f_i \rangle|^2 = C \sum_{i \in I \setminus \{j\}} |\langle f, f_i \rangle|^2, \end{aligned}$$

donde se ha escrito $C = |1 - c_j|^{-2} \sum_{i \in I \setminus \{j\}} |c_i|^2$. Basta comprobar entonces que $\{f_i\}_{i \in I \setminus \{j\}}$ satisface la definición de *frame*. Sean A y B las cotas inferior y superior de $\{f_i\}_{i \in I}$. Por un lado:

$$\begin{aligned} A\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 &= \sum_{i \in I \setminus \{j\}} |\langle f, f_i \rangle|^2 + |\langle f, f_j \rangle|^2 \\ &\leq (1 + C) \sum_{i \in I \setminus \{j\}} |\langle f, f_i \rangle|^2, \end{aligned}$$

luego la familia satisface la condición inferior con cota $A(1 + C)^{-1}$. Mientras que para la condición superior:

$$\sum_{i \in I \setminus \{j\}} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle f, f_i \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Por tanto, $\{f_i\}_{i \in I \setminus \{j\}}$ es un *frame*. □

Con estos dos resultados demostraremos en la siguiente proposición que todo *frame* inexacto posee varios *frames* duales.

Proposición 2.3.5. *Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ un frame inexacto. Entonces existen frames $\{g_i\}_{i \in I}$, distintos de $\{S^{-1} f_i\}$, tales que $\{g_i\}_{i \in I}$ es un frame dual de $\{f_i\}_{i \in I}$.*

Demostración. Distinguimos dos casos.

Supongamos inicialmente que existe $k \in I$, tal que $f_k = 0$. En este caso se tiene que $S^{-1} f_k = 0$. Definiendo entonces $g_i = S^{-1} f_i$ para todo $i \neq k$ y tomando g_k como cualquier vector no nulo, se tiene que $\{g_i\}_{i \in I}$ satisface la definición de *frame* dual de $\{f_i\}_{i \in I}$ y además es distinto de $\{S^{-1} f_i\}_{i \in I}$.

Si tuviéramos que $f_i \neq 0$ para todo $i \in I$, como $\{f_i\}_{i\in I}$ es inexacto, existe una familia $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I) \setminus \{0\}$ tal que $0 = \sum_{i\in I} c_i f_i$. Puesto que existe $k \in I$ tal que $c_k \neq 0$, podemos establecer la siguiente relación:

$$f_k = \sum_{i\in I\setminus\{k\}} \frac{-c_i}{c_k} f_i. \tag{2.29}$$

Como $\{f_i\}_{i\in I}$ era una familia completa por ser un *frame*, de (2.29) deducimos que $\{f_i\}_{i\in I\setminus\{k\}}$ es también una familia ortogonalmente completa. Por tanto, por el teorema 2.3.4 llegamos a que $\{f_i\}_{i\in I\setminus\{k\}}$ es un *frame* y en consecuencia admite un *frame* dual canónico, que denotamos por $\{g_i\}_{i\in I\setminus\{k\}}$. Definiendo entonces $g_k = 0$, tenemos que la familia $\{g_i\}_{i\in I}$ es un *frame* y cumple (2.27). Además no es la misma familia que $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$, ya que $S^{-1}f_k \neq 0$. □

A continuación mostramos tres lemas de cara a mostrar el resultado fundamental de esta sección.

El primero de ellos muestra como dado un *frame* $\{f_i\}_{i\in I}$, cualquier *frame* dual $\{g_i\}_{i\in I}$ de $\{f_i\}_{i\in I}$ verifica que $\{f_i\}_{i\in I}$ es uno de sus *frames* duales. El resultado es válido para familias de Bessel:

Lema 2.3.6. *Sean $\{f_i\}_{i\in I}$ y $\{g_i\}_{i\in I}$ familias de Bessel en $\mathcal{H}$. Son equivalentes:*

1. $f = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle f_i$ *para todo* $f \in \mathcal{H}$.
2. $f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle g_i$ *para todo* $f \in \mathcal{H}$.
3. $\langle f, g\rangle = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle\langle g_i, g\rangle$ *para todo* $f,g \in \mathcal{H}$.

Si se cumple una de las equivalencias, entonces $\{f_i\}_{i\in I}$ y $\{g_i\}_{i\in I}$ son frames duales el uno del otro en $\mathcal{H}$.

Demostración. Sean T, U los operadores de síntesis de $\{f_i\}_{i\in I}$ y $\{g_i\}_{i\in I}$ respectivamente.

La condición 1 se traduce en que

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle f_i = \sum_{i\in I}(U^*f)_i f_i = T(U^*f),$$

es decir, $TU^* = Id$. De la misma manera, la condición 2 es exactamente lo mismo que escribir $UT^* = Id$. Ahora, estas dos igualdades son equivalentes pues basta tomar adjuntos en una de ellas y se llega directamente a la otra. Por tanto la primera condición es equivalente a la segunda.

Supongamos que se cumple la condición 3. Sea $f \in \mathcal{H}$, puesto que $\{f_i\}_{i\in I}$ es de Bessel, $\{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$. Y como $\{g_i\}_{i\in I}$ también es de Bessel, por el teorema 2.1.7 se tiene que la familia $\{\langle f, f_i\rangle g_i\}_{i\in I}$ es sumable. Ahora, partiendo de la condición 3,

$$\left\langle f - \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle g_i, g\right\rangle = 0$$

para todo g en $\mathcal{H}$. Luego se concluye que $f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle g_i$ para todo $f \in \mathcal{H}$, i.e., la condición 2. Para la otra implicación, basta tomar el producto interno por g en $f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle g_i$ y se llega a la condición 3.

Basta ver que si se cumple alguna de la tres condiciones entonces ambas familias son *frames*. La condición superior ya se cumple por ser ambas familias de Bessel. Para la condición inferior, si se utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz y que una de las familias es de Bessel obtenemos que la otra familia satisface la condición inferior:

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \langle f, f\rangle = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle\langle f_i, f\rangle \\ &\leq \Big(\sum_{i\in I}|\langle f, g_i\rangle|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i\in I}|\langle f_i, f\rangle|^2\Big)^{1/2} \leq \sqrt{B}\|f\|\Big(\sum_{i\in I}|\langle f_i, f\rangle|^2\Big)^{1/2},\end{aligned}$$

donde B es la cota de Bessel de la familia $\{g_i\}_{i\in I}$. Despejando de la anterior desigualdad se llega a que $\{f_i\}_{i\in I}$ cumple la condición inferior con cota B^{-1}:

$$\|f\|^2 B^{-1} \leq \sum_{i\in I}|\langle f_i, f\rangle|^2.$$

La demostración para la familia $\{g_i\}_{i\in I}$ es análoga pero utilizando que $\{f_i\}_{i\in I}$ es de Bessel. □

Lema 2.3.7. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame en $\mathcal{H}$ y sea $\{\delta_i\}_{i\in I}$ la base canónica ortonormal de $\ell^2(I)$. Los frames duales de $\{f_i\}_{i\in I}$ son precisamente las familias $\{g_i\}_{i\in I} = \{V\delta_i\}_{i\in I}$, donde $V : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ is un operador acotado tal que $VT^* = Id$, siendo T el operador de síntesis de $\{f_i\}_{i\in I}$.*

Demostración. Puesto que $VT^* = Id$, V es un operador sobreyectivo, del teorema 2.2.15 se sigue que $\{V\delta_i\}_{i\in I}$ es un *frame*. Además, dado $c = \{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$,

$$Vc = V\Big(\sum_{i\in I} c_i\delta_i\Big) = \sum_{i\in I} c_i V\delta_i.$$

Observe que

$$T^*f = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I},$$

luego

$$f = VT^*f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle V\delta_i.$$

De esta igualdad, por el lema 2.3.6, se deduce que $\{V\delta_i\}_{i\in I}$ es un *frame* dual de $\{f_i\}_{i\in I}$.

Recíprocamente, si $\{g_i\}_{i\in I}$ es un *frame* dual cualquiera de $\{f_i\}_{i\in I}$ con operador de síntesis U, entonces $g_i = U\delta_i$ y como $f = \sum_{i\in I}\langle f, g_i\rangle f_i$, por el lema anterior, $UT^* = Id$, que son las dos condiciones que se quería probar. □

Este último lema ya muestra una caracterización de los *frames* duales de un cierto *frame*. Podemos ir un paso más allá y caracterizar los *frames* duales en términos de familias de Bessel.

Lema 2.3.8. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame con operador de síntesis T. Los operadores acotados U que cumplen que $UT^* = Id$ son precisamente aquellos operadores de la forma*

$$S^{-1}T + W(Id - T^*S^{-1}T),$$

donde $W : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ es un operador acotado.

Demostración. Por un lado,

$$\Big(S^{-1}T + W(Id - T^*S^{-1}T)\Big)T^* = S^{-1}S + W(T^* - T^*S^{-1}S)) = Id + 0 = Id.$$

Por otro, si $UT^* = Id$, tomando $W = U$,

$$S^{-1}T + W(Id - T^*S^{-1}T) = S^{-1}T + U - UT^*S^{-1}T = S^{-1}T + U - S^{-1}T = U,$$

que es lo que se quería demostrar. □

Teorema 2.3.9. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame en $\mathcal{H}$. Los frames duales de $\{f_i\}_{i\in I}$ son exactamente las familias*

$$\{g_i\}_{i\in I} = \Big\{S^{-1}f_i + h_i - \sum_{j\in I}\langle S^{-1}f_i, f_j\rangle h_j\Big\}_{i\in I},$$

donde $\{h_i\}_{i\in I}$ es una familia de Bessel en $\mathcal{H}$.

Demostración. Como consecuencia a los dos lemas anteriores podemos caracterizar todos los *frames* duales de $\{f_i\}_{i\in I}$ por

$$\{g_i\}_{i\in I} = \{S^{-1}T\delta_i + W(Id - T^*S^{-1}T)\delta_i\}_{i\in I}, \tag{2.30}$$

donde T es de nuevo el operador de síntesis de $\{f_i\}_{i\in I}$ y W un operador acotado de $\ell^2(I)$ en $\mathcal{H}$. Que W sea acotado es equivalente a que sea de la forma

$$W\{c_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} c_i h_i, \tag{2.31}$$

siendo $\{h_i\}_{i\in I}$ una familia de Bessel:

Si definimos $h_i = W\delta_i$, $i \in I$, entonces dado $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ se tiene que

$$W\{c_i\}_{i\in I} = W\Big(\sum_{i\in I} c_i\delta_i\Big) = \sum_{i\in I} c_i W\delta_i = \sum_{i\in I} c_i h_i \tag{2.32}$$

y que la familia $\{h_i\}_{i\in I}$ es de Bessel pues

$$\sum_{i\in I} |\langle f, h_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I} |\langle f, W\delta_i\rangle|^2 \le \|f\|^2 \|W\|^2 \sum_{i\in I} \|\delta_i\|^2 = \|f\|^2 \|W\|^2 .$$

Por otro lado, si W es de la forma de (2.31) entonces W es acotado pues $\{h_i\}_{i\in I}$ es de Bessel (teorema 2.1.7 junto con lema 2.1.6).

Por tanto, sustituyendo W en (2.30) por su expresión en (2.32), puesto que $T\delta_i = f_i$ y $T^*S^{-1}f_i = \{\langle S^{-1}f_i, f_j\rangle\}_{j\in I}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\{g_i\}_{i\in I} &= \{S^{-1}f_i + W\delta_i - WT^*S^{-1}T\delta_i\}_{i\in I} \\ &= \Big\{S^{-1}f_i + h_i - \sum_{j\in I}\langle S^{-1}f_i, f_j\rangle h_j\Big\}_{i\in I},\end{aligned}$$

y hemos caracterizado así los *frames* duales de $\{f_i\}_{i\in I}$. □

CAPÍTULO 3

FRAMES Y BASES DE RIESZ

En el anterior capítulo ya se ha visto a través del teorema fundamental de descomposición como un *frame* juega una especie de papel de base ampliada. Si se quiere estudiar más profundamente las relaciones entre bases y *frames*, es interesante introducir las bases de Riesz. Estas bases permiten establecer equivalencias con los *frames* bajo ciertas condiciones, que serán el principal objetivo del capítulo.

En primer lugar, se presentan unas definiciones necesarias para el desarrollo del capítulo. En la sección 3.1 se definen las bases de Riesz y se describen sus principales propiedades. Además, el teorema 3.1.9 ofrece una fuerte caracterización para las bases de Riesz. Al final de la sección se establecen numerosas equivalencias para un *frame*, que permiten establecer las relaciones deseadas entre *frames* y bases de Riesz. Luego, en la sección 3.2, se presentan los *frames* de Riesz. El capítulo termina con el problema de momento en la sección 3.3, donde se muestra una aplicación de las bases de Riesz y *frames* a un problema clásico.

3.1. Bases de Riesz.

Antes de comenzar con los resultados clave de este capítulo, damos las siguientes definiciones que serán utilizadas en el transcurso del mismo.

Definición 3.1.1. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *una familia en* $\mathcal{H}$.

1. $\{f_i\}_{i\in I}$ *es una* base (de Schauder) *en* $\mathcal{H}$ *si, para cada* $f \in \mathcal{H}$ *existe una única familia de escalares* $\{c_i\}_{i\in I}$ *tal que*

$$f = \sum_{i\in I} c_i(f) f_i.$$

2. $\{f_i\}_{i\in I}$ *es* ω-independiente *si cuando se da la igualdad* $\sum_{i\in I} c_i f_i = 0$ *para ciertos escalares* $\{c_i\}_{i\in I}$*, entonces necesariamente se cumple que* $c_i = 0$ *para todo* $i \in I$*.*

3. $\{f_i\}_{i\in I}$ *se dice que tiene una* familia biortogonal *en* $\mathcal{H}$ *si existe una familia* $\{g_i\}_{i\in I}$ *en* $\mathcal{H}$ *tal que*

$$\langle f_i, g_i\rangle = 1 \quad y \quad \langle f_j, g_k\rangle = 0$$

para todo $i, j, k \in I$ *con* $j \neq k$*. Además, se dice que dos familias son* biortogonales *si una de ellas tiene a la otra como familia biortogonal.*

Es inmediato de la definición que si una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ tiene una familia biortogonal $\{g_i\}_{i\in I}$, entonces $\{g_i\}_{i\in I}$ tiene a $\{f_i\}_{i\in I}$ como familia biortogonal.

Supongamos ahora que tenemos una base ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. A partir de dicha base podemos construir otras bases (que no tienen por qué ser ortonormales).

Lema 3.1.2. *Sea* $\{e_i\}_{i\in I}$ *una base ortonormal en* $\mathcal{H}$ *y* $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *un operador acotado biyectivo. Entonces* $\{Ue_i\}_{i\in I}$ *es una base en* $\mathcal{H}$*.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}$. Existe $g \in \mathcal{H}$ tal que $f = Ug$. Por tanto:

$$f = Ug = U\Big(\sum_{i\in I}\langle g, e_i\rangle e_i\Big) = \sum_{i\in I}\langle g, e_i\rangle Ue_i,$$

y esos coeficientes son únicos pues si existiera otra familia $\{c_i(f)\}_{i\in I}$ tal que

$$\sum_{i\in I}\langle g, e_i\rangle Ue_i = \sum_{i\in I} c_i(f) Ue_i$$

entonces se tendría que

$$\sum_{i\in I}\langle g, e_i\rangle e_i = U^{-1}\Big(\sum_{i\in I} c_i(f) Ue_i\Big) = \sum_{i\in I} c_i(f) U^{-1}Ue_i = \sum_{i\in I} c_i(f) e_i$$

y, en consecuencia, $c_i(f) = \langle g, e_i\rangle$ para todo $i \in I$, por ser $\{e_i\}_{i\in I}$ una base. $\square$

De hecho, las bases ortonormales son precisamente aquellas en las que U es además unitario, como se demuestra en [2]. A raíz de este lema definimos el siguiente tipo de bases.

Definición 3.1.3. *Una* base de Riesz *en* $\mathcal{H}$ *es una familia de la forma* $\{Ue_i\}_{i\in I}$*, donde* $\{e_i\}_{i\in I}$ *es una base ortonormal en* $\mathcal{H}$ *y* $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *un operador biyectivo acotado.*

Del primer lema se deduce inmediatamente que toda base de Riesz es también una base, y no sólo eso, sino que también es un *frame* como consecuencia directa de la proposición 2.2.3 pues $\{e_i\}_{i\in I}$ es una también un *frame* y U tiene rango cerrado por ser sobreyectivo. De hecho, note también que toda base ortonormal es una base de Riesz sin más que tomar $U = Id$.

Si se quiere demostrar que una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz a partir de la propia definición entonces ha de encontrar una base ortonormal y un operador biyectivo acotado adecuado. En muchas ocasiones lo más cómodo es acudir a lo más conocido: el espacio $\ell^2(I)$ y su base canónica $\{\delta_i\}_{i\in I}$.

Proposición 3.1.4. *Una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ de elementos de $\mathcal{H}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, existe un operador $V : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ acotado y biyectivo tal que $V\delta_i = f_i$ para cada $i \in I$.*

Demostración. Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal cualquiera de $\mathcal{H}$ y $\{\delta_i\}_{i\in I}$ la base canónica de $\ell^2(I)$. Sabemos que existe una isometría lineal y biyectiva $W : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $W\delta_i = e_i$ para todo $i \in I$.

Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}$, existe un operador acotado biyectivo U tal que $\{f_i\}_{i\in I} = \{Ue_i\}_{i\in I}$. Luego

$$\{f_i\}_{i\in I} = \{Ue_i\}_{i\in I} = \{UW\delta_i\}_{i\in I}$$

y basta tomar $V = UW$.

Por otro lado, si $f_i = V\delta_i$ para todo $i \in I$, siendo V un operador acotado y biyectivo, entonces

$$\{f_i\}_{i\in I} = \{V\delta_i\}_{i\in I} = \{VW^{-1}e_i\}_{i\in I}$$

y puesto que VW^{-1} es un operador biyectivo acotado por ser composición de operadores biyectivos acotados se tiene que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz. □

Veamos ahora como el operador de *frame*, S, de una base de Riesz se puede escribir en función del operador U.

Proposición 3.1.5. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una base de Riesz en $\mathcal{H}$. Supongamos que $\{e_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador biyectivo acotado. Entonces se cumple que*

$$S = UU^*.$$

Demostración. Dado f en $\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} UU^*f = U\Big(\sum_{i\in I}\langle U^*f, e_i\rangle e_i\Big) &= \sum_{i\in I}\langle U^*f, e_i\rangle Ue_i = \sum_{i\in I}\langle f, Ue_i\rangle Ue_i \\ &= \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle f_i = Sf. \end{aligned}$$

□

Al *frame* dual de una base de Riesz $\{f_i\}_{i\in I}$ le llamaremos base de Riesz dual de $\{f_i\}_{i\in I}$. La siguiente proposición demuestra como el dual de una base de Riesz es único y además también constituye una base de Riesz.

Proposición 3.1.6. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una base de Riesz en $\mathcal{H}$. Entonces existe una única familia $\{g_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ tal que*

$$f = \sum_{i\in I} \langle f, g_i\rangle f_i,$$

para todo $f \in \mathcal{H}$. Además, $\{g_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz y las familias $\{f_i\}_{i\in I}$ y $\{g_i\}_{i\in I}$ son biortogonales.

Demostración. Puesto que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz, podemos escribir $\{f_i\}_{i\in I} = \{Ue_i\}_{i\in I}$, siendo U un operador acotado biyectivo y $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal. Dado $f \in \mathcal{H}$,

$$U^{-1}f = \sum_{i\in I} \langle U^{-1}f, e_i\rangle e_i = \sum_{i\in I} \langle f, (U^{-1})^* e_i\rangle e_i.$$

Tomando entonces $g_i = (U^{-1})^* e_i$,

$$f = UU^{-1}f = \sum_{i\in I} \langle f, (U^{-1})^* e_i\rangle Ue_i = \sum_{i\in I} \langle f, g_i\rangle f_i.$$

La familia $\{g_i\}_{i\in I}$ es única por ser $\{f_i\}_{i\in I}$ una base pues si existiera otra familia $\{h_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ tal que $f = \sum_{i\in I}\langle f, h_i\rangle f_i$ para todo $f \in \mathcal{H}$, entonces se tendría que $\langle f, g_i\rangle = \langle f, h_i\rangle$ para todo $f \in \mathcal{H}$, en consecuencia $h_i = g_i$ para todo $i \in I$. Ahora, U^{-1} es acotado por el teorema del isomorfismo, por tanto $(U^{-1})^*$ es acotado y además biyectivo por la propiedad quinta de 1.1.4. De esta forma se concluye que $\{g_i\}_{i\in I}$ es también una base de Riesz.

Por último, para ver que $\{f_i\}_{i\in I}$ y $\{g_i\}_{i\in I}$ son biortogonales basta realizar el siguiente cálculo directo:

$$\langle f_i, g_j\rangle = \langle Ue_i, (U^{-1})^* e_j\rangle = \langle U^{-1}Ue_i, e_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},$$

para cualesquiera $i,j \in I$. □

La demostración de la última proposición muestra como es la familia $\{g_i\}_{i\in I}$. Además, de la demostración también se deduce que si un *frame* es de la forma $\{Ue_i\}_{i\in I}$, entonces su *frame* dual es único y es precisamente $\{(U^{-1})^* e_i\}_{i\in I}$.

Buscamos ahora dar algunas caracterizaciones de una base de Riesz. Puesto que estamos interesados en encontrar las relaciones existentes entre *frames* y bases de Riesz, daremos una caracterización que puede verse como una similitud de la definición de *frame*.

Lema 3.1.7. *Sean $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert, $\{h_i\}_{i\in I}$ una familia completa en $\mathcal{H}_1$ y $\{g_i\}_{i\in I}$ una familia de Bessel en $\mathcal{H}_2$ con cota B. Si existe una constante $A > 0$ tal que*

$$A\sum_{i\in J} |c_i|^2 \le \Big\| \sum_{i\in J} c_i h_i \Big\|^2 \tag{3.1}$$

para cualquier $J \subset I$ finito y sucesión de escalares $\{c_i\}_{i\in I}$. Entonces se verifica que el operador $U : \mathrm{span}\{h_i\}_{i\in I} \longrightarrow \mathrm{span}\{g_i\}_{i\in I}$ definido por

$$U\Big(\sum_{i\in J} c_i h_i\Big) := \sum_{i\in J} c_i g_i$$

(donde J es un conjunto finito), es un operador lineal acotado y tiene una única extensión a un operador acotado de $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$.

Demostración. Observe en primer lugar que si $h \in \operatorname{span}\{h_i\}_{i\in I}$ se puede escribir como $h = \sum_{i\in I} c_i h_i = \sum_{i\in I} b_i h_i$ donde las familias de escalares $\{c_i\}_{i\in I}$ y $\{b_i\}_{i\in I}$ son nulas salvo un número finito de términos. Entonces, por (3.1) se tiene que:

$$0 = \Big\| \sum_{i\in I} c_i h_i - \sum_{i\in I} b_i h_i \Big\|^2 \geq A \sum_{i\in I} |c_i - b_i|^2,$$

luego todos los sumandos han de ser nulos y por tanto $c_i = b_i$ para todo $i \in I$, es decir, h tiene una única representación y por tanto U está bien definido. Por definición, U es lineal y, dado una familia de escalares finita $\{c_i\}_{i\in J}$,

$$\Big\| U\Big(\sum_{i\in J} c_i h_i \Big) \Big\|^2 = \Big\| \sum_{i\in J} c_i g_i \Big\|^2 \leq B \sum_{i\in J} |c_i|^2 \leq \frac{B}{A} \Big\| \sum_{i\in J} c_i h_i \Big\|^2,$$

por tanto U es acotado. Como se verifica que $\operatorname{span}\{h_i\}_{i\in I}$ es denso en $\mathcal{H}$, el operador U tiene un única extensión continua a $\mathcal{H}_1$ con llegada en $\mathcal{H}_2$. □

Lema 3.1.8. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia en $\mathcal{H}$. Si existe una constante $B > 0$ tal que para cualquier familia de escalares $\{c_i\}_{i\in I}$ y cualquier conjunto $J \subset I$ finito se tiene que*

$$\Big\| \sum_{i\in J} c_i f_i \Big\|^2 \leq B \sum_{i\in J} |c_i|^2, \tag{3.2}$$

entonces la familia $\{f_i\}_{i\in I}$ es de Bessel.

Demostración. Sea $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$. Entonces la familia $\{|c_i|^2\}_{i\in I}$ es sumable y en consecuencia verifica la condición de Cauchy para la sumabilidad (apéndice A.1.2). Por la desigualdad (3.2), esto último implica que la familia $\{c_i f_i\}_{i\in I}$ también verifica la condición de Cauchy para la sumabilidad y, como $\mathcal{H}$ es de Banach, se tiene que $\{c_i f_i\}_{i\in I}$ es sumable. Por el teorema 2.1.7, se tiene que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de Bessel. □

Con estos dos lemas, estamos en condiciones de dar la caracterización mencionada.

Teorema 3.1.9. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia en $\mathcal{H}$. Son equivalentes:*

1. *$\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz.*
2. *$\{f_i\}_{i\in I}$ es completa en $\mathcal{H}$ y existen constantes A, $B > 0$ tales que para cualquier familia de escalares $\{c_i\}_{i\in I}$ y cualquier conjunto $J \subset I$ finito:*

$$A \sum_{i\in J} |c_i|^2 \leq \Big\| \sum_{i\in J} c_i f_i \Big\|^2 \leq B \sum_{i\in J} |c_i|^2. \tag{3.3}$$

Demostración. Supongamos que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz, es decir, $\{f_i\}_{i\in I}$ es de la forma $\{Ue_i\}_{i\in I}$ siendo U un operador acotado biyectivo y $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal. Por un lado, $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa ya que como $\{e_i\}_{i\in I}$ es completa y U sobreyectivo entonces se deduce del lema 2.2.1 que

$$\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i\in I} = \overline{\operatorname{span}}(\{Ue_i\}_{i\in I}) = \mathcal{H}.$$

Por otro, dada una familia de escalares $\{c_i\}_{i\in I}$ y un conjunto finito $J \subset I$ cualesquiera,

$$\Big\|\sum_{i\in J} c_i f_i\Big\|^2 = \Big\|U\Big(\sum_{i\in J} c_i e_i\Big)\Big\|^2 \leq \|U\|^2 \Big\|\sum_{i\in J} c_i e_i\Big\|^2 = \|U\|^2 \sum_{i\in J} |c_i|^2.$$

También:

$$\sum_{i\in J} |c_i|^2 = \Big\|\sum_{i\in J} c_i e_i\Big\|^2 = \Big\|U^{-1}\Big(\sum_{i\in J} c_i f_i\Big)\Big\|^2 \leq \|U^{-1}\|^2 \Big\|\sum_{i\in J} c_i f_i\Big\|^2,$$

de donde obtenemos que

$$\|U^{-1}\|^{-2} \sum_{i\in J} |c_i|^2 \leq \Big\|\sum_{i\in J} c_i f_i\Big\|^2 \leq \|U\|^2 \sum_{i\in J} |c_i|^2.$$

Para la otra implicación, observamos primero que la desigualdad derecha de (3.3) implica que $\{f_i\}_{i\in I}$ es de Bessel por el lema 3.1.8. Con esto ya podemos demostrar que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz sin más que aplicar el lema 3.1.7: eligiendo una base ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ podemos extender los operadores U y V tales que $Ue_i := f_i$ y $Vf_i := e_i$ a operadores acotados $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$ en $\mathcal{H}$, respectivamente. Además, $\tilde{V}\tilde{U} = \tilde{U}\tilde{V} = Id$ ya que $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa, luego $\tilde{U}$ es biyectivo y en consecuencia $\{f_i\}_{i\in I}$ una base de Riesz, ya que $f_i = \tilde{U}e_i$ para todo $i \in I$.

$\square$

Si una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ satisface (3.3), se dice que es una base de Riesz con cotas A, B.

La utilidad del último teorema es que ofrece un criterio que permite identificar o descartar si una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ concreta es una base de Riesz o no.

Observación 3.1.10. Del teorema 3.1.9 se deduce que si $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz, entonces se ha de cumplir

$$\sqrt{A} \leq \|f_i\| \leq \sqrt{B},$$

para todo $i \in I$ y para ciertas constantes A, $B > 0$.

Ejemplo 3.1.11. Consideremos la familia numerable $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dada por $f_k = ke_k$, $k \in \mathbb{N}$, siendo $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal. Esta familia es una base pues, dado $f \in \mathcal{H}$,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, e_k\rangle}{k} ke_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, e_k\rangle}{k} f_k.$$

Ahora bien, si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ fuera una base de Riesz entonces por la observación 3.1.10 se tendría que existen A, $B > 0$ tales que

$$\sqrt{A} \leq \|f_k\| = k \leq \sqrt{B}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cuál es absurdo.

Ejemplo 3.1.12. Consideramos la familia $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} = \{e_k + \frac{e_{k+1}}{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, donde $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal del espacio $\mathcal{H}$.

La familia $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es completa ya que dado un $f \in \mathcal{H}$, si $\langle f, u_k \rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces:

$$0 = \langle f, e_k + \frac{e_{k+1}}{k+1} \rangle = \langle f, e_k \rangle + \frac{1}{k+1} \langle f, e_{k+1} \rangle,$$

es decir,

$$\langle f, e_{k+1} \rangle = -(k+1) \langle f, e_k \rangle.$$

De esta manera se obtiene que

$$\langle f, e_k \rangle = (-1)^{k-1} k! \langle f, e_1 \rangle.$$

Ahora, como $\{\langle f, e_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ por ser $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal, entonces se ha de cumplir que $\langle f, e_1 \rangle = 0$, lo que implica que $\langle f, e_k \rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Puesto que $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es completa, ha de ser $f = 0$, es decir, $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una familia completa.

Ahora, dada una familia arbitraria de escalares $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \Big\| &= \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{1}{k+1} e_{k+1} \Big\| \leq \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \Big\| + \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} e_{k+1} \Big\| \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2}\right) \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \Big\| = \frac{3}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde la última desigualdad es debido a que

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} e_{k+1} \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Por otro lado,

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \Big\| \geq \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \Big\| - \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} e_{k+1} \Big\| \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2} \tag{3.5}$$

Juntando (3.4) y (3.5) se llega a que la familia $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ satisface la condición 2 de 3.1.9 con cotas $A = 1/2$ y $B = 3/2$ y por tanto es una base de Riesz.

En realidad, el ejemplo anterior puede deducirse de manera casi inmediata del siguiente resultado de estabilidad de bases, enunciado en [9].

Teorema 3.1.13. *Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una base ortonormal en $\mathcal{H}$ y sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia tal que*

$$\Big\| \sum_{i \in J} c_i (e_i - f_i) \Big\| \leq \lambda \Big(\sum_{i \in J} |c_i|^2 \Big)^{1/2}, \tag{3.6}$$

siendo λ una constante tal que $0 \leq \lambda < 1$, $\{c_i\}_{i \in I}$ una familia de escalares arbitraria y J un conjunto finito cualquiera de I. Entonces $\{f_i\}_{i \in I}$ es una base de Riesz.

Demostración. De la condición (3.6) se tiene que la familia $\{c_i(e_i - f_i)\}_{i\in I}$ es sumable si la familia $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$, ya que cumple la condición de Cauchy para la sumabilidad. Como $\mathcal{H}$ es de Banach, se tiene que $\{c_i(e_i - f_i)\}_{i\in I}$ es sumable.

Definimos ahora el operador lineal $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ como

$$U\Big(\sum_{i\in I} c_i e_i\Big) = \sum_{i\in I} c_i(e_i - f_i).$$

Por el teorema A.1.12 se tiene que U es un operador lineal y continuo. Además, por la proposición A.1.5, se tiene entonces que

$$\Big\|U\Big(\sum_{i\in I} c_i e_i\Big)\Big\| = \Big\|\sum_{i\in I} c_i(e_i - f_i)\Big\| \leq \lambda\Big(\sum_{i\in I} |c_i|^2\Big)^{1/2} = \lambda\Big\|\sum_{i\in I} c_i e_i\Big\|,$$

luego $\|U\| \leq \lambda < 1$. Por tanto, por el lema 1.2.1 se tiene que $Id - U$ es invertible y además, como $(Id - U)e_i = e_i - (e_i - f_i) = f_i$, se concluye que la familia $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz. $\square$

Ejemplo 3.1.14. Volviendo a la familia $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ definida en el ejemplo 3.1.12, se observa que

$$\Big\|\sum_{k\in J} c_k(e_k - u_k)\Big\| = \Big\|\sum_{k\in J} c_k \frac{e_k}{k+1}\Big\| = \sum_{k\in J} \frac{|c_k|^2}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{2}\Big(\sum_{k\in J} |c_k|^2\Big)^{1/2}$$

para cualquier familia $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $J \subset \mathbb{N}$ conjunto finito. Luego $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Riesz.

Si una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ (no necesariamente completa) satisface la cadena de desigualdades (3.3), entonces es una base de Riesz para $\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i\in I}$.

Definición 3.1.15. *Una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ que sea una base de Riesz en $\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i\in I}$ se denomina* sistema de Riesz.

Corolario 3.1.16. *Toda subfamilia de una base de Riesz es un sistema de Riesz.*

Demostración. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz, entonces cumple la condición (3.3), luego cualquier subfamilia $\{f_i\}_{i\in J}$, $J \subset I$, también lo cumplirá y será completa en $\overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i\in J}$, luego de nuevo por el teorema 3.1.9, $\{f_i\}_{i\in J}$ es un sistema de Riesz. $\square$

El siguiente teorema, de gran importancia, recoge las condiciones para que un *frame* sea una base y su relación con las bases de Riesz. Además, muestra como todo *frame* inexacto es equivalente a que no sea exacto. Para una mejor presentación, demostramos previamente la siguiente proposición.

Proposición 3.1.17. *Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un frame exacto en $\mathcal{H}$, entonces $\{f_i\}_{i\in I}$ y $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ son biortogonales y $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un *frame* exacto y $j \in I$. La familia $\{f_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$ no es entonces un *frame* y, por el teorema 2.3.4, se tiene que $\langle f_j, S^{-1}f_i\rangle = \delta_{ji}$, luego son familias biortogonales.

Dado $f \in \mathcal{H}$, por el teorema de descomposición de *frames*: $f = \sum_{i\in I}\langle f, S^{-1}f_i\rangle f_i$. Luego basta demostrar que dicha expansión es única. Si existieran coeficientes c_i tales que $f = \sum_{i\in I} c_i f_i$ entonces

$$\langle f, S^{-1}f_i\rangle = \left\langle \sum_{j\in I} c_j f_j, S^{-1}f_i \right\rangle = \sum_{j\in I} c_j \langle f_j, S^{-1}f_i\rangle = c_i.$$

Por tanto $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base en $\mathcal{H}$. □

Teorema 3.1.18. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame en $\mathcal{H}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz.*
2. *$\{f_i\}_{i\in I}$ es un frame exacto.*
3. *$\{f_i\}_{i\in I}$ y $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ son biortogonales.*
4. *$\{f_i\}_{i\in I}$ tiene una familia biortogonal.*
5. *$\{f_i\}_{i\in I}$ es ω-independiente.*
6. *$\{f_i\}_{i\in I}$ no es inexacto, es decir, si $\sum_{i\in I} c_i f_i = 0$ para alguna familia $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$, entonces $c_i = 0$ para todo $i \in I$.*
7. *$\{f_i\}_{i\in I}$ es una base.*

Demostración. Demostremos por implicaciones todas las afirmaciones hasta tener un diagrama cerrado.

$1 \Leftrightarrow 2$ Toda base de Riesz es un *frame* exacto ya que al quitar el elemento j-ésimo de la familia se tiene que la familia es no es completa pues, usando la proposición 3.1.6 existe una familia $\{g_i\}_{i\in I}$ biortogonal a $\{f_i\}_{i\in I}$ y, por tanto,

$$\langle f_i, g_j\rangle = \delta_{ij},$$

ya que $g_j \neq 0$ para cualquier $j \in I$. Luego por la proposición 2.1.20, se tiene que $\{f_i\}_{i\in I\setminus\{j\}}$ no es un *frame*.
Para el recíproco consideramos $\{\delta_i\}_{i\in I}$, la base canónica de $\ell^2(I)$. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* exacto, entonces por la proposición 3.1.17 $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base en $\mathcal{H}$. Por otro lado, el operador de síntesis $T : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ es acotado y sobreyectivo por ser $\{f_i\}_{i\in I}$ un *frame* (teorema 2.2.11). Además, $T\delta_i = f_i$ y como $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base entonces T es inyectivo (pues la representación en esta base es única) y en consecuencia biyectivo, luego $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz.

$1 \Rightarrow 3$ Es la proposición 3.1.17.

$3 \Rightarrow 4$ Es trivial.

$4 \Rightarrow 5$ Supongamos que para una familia de escalares $\{c_i\}_{i\in I}$ se cumple que

$$\sum_{i\in I} c_i f_i = 0.$$

Sea $\{g_i\}_{i\in I}$ una familia biortogonal a $\{f_i\}_{i\in I}$, es decir, $\langle f_i, g_k\rangle = \delta_{ik}$. Sea $j \in I$ fijo, realizando el producto escalar en ambos lados de la primera igualdad por g_j, se tiene que:

$$0 = \left\langle \sum_{i\in I} c_i f_i, g_j \right\rangle = \sum_{i\in I} c_i \langle f_i, g_j\rangle = c_j.$$

Como esto es cierto para todo $j \in I$, se tiene que $c_j = 0$ para todo $j \in I$, luego $\{f_i\}_{i\in I}$ es ω-independiente. Observe que esta implicación es siempre cierta, independientemente de que $\{f_i\}_{i\in I}$ sea un *frame* o no.

$5 \Rightarrow 6$ También es claro pues si $\{f_i\}_{i\in I}$ es ω-independiente entonces en particular se cumple para cualquier familia de coeficientes en $\ell^2(I)$.

$6 \Rightarrow 1$ Como $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame*, el operador de síntesis $T : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$ es sobreyectivo. Además, si $T\{c_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} c_i f_i = 0$, como $\{f_i\}_{i\in I}$ no es inexacto, ha de ser $c_i = 0$ para todo $i \in I$, luego T es inyectivo y por tanto biyectivo. Como se tiene la relación $T\delta_i = f_i$ para todo $i \in I$, se concluye de la definición de base de Riesz que $\{f_i\}_{i\in I}$ es en efecto una base de Riesz.

$1 \Rightarrow 7$ Es trivial.

$7 \Rightarrow 5$ Toda base es ω-independiente, ya que si

$$\sum_{i\in I} c_i f_i = 0$$

para alguna familia de escalares $\{c_i\}_{i\in I}$, como la familia de escalares nulos también cumple dicha ecuación y la representación es única, se llega a que $c_i = 0$ para todo $i \in I$.

□

En el teorema 2.3.9 obtuvimos una caracterización de todos los *frames* duales de $\{f_i\}_{i\in I}$. Con la notación de dicho teorema, como las familias $\{f_i\}_{i\in I}$ y $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ son biortogonales, sea cual sea la familia de Bessel $\{h_i\}_{i\in I}$ se tiene que

$$\sum_{j\in I} \langle S^{-1}f_i, f_j\rangle h_j = h_i,$$

luego

$$\{g_i\}_{i\in I} = \left\{ S^{-1}f_i + h_i - \sum_{j\in I} \langle S^{-1}f_i, f_j\rangle h_j \right\}_{i\in I} = \{S^{-1}f_i\}_{i\in I}.$$

Además, si $\{e_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador acotado y biyectivo tal que $Ue_i = f_i$ para cada $i \in I$, como por la proposición 3.1.5 sabemos que $S = UU^*$, entonces

$$\{S^{-1}f_i\}_{i\in I} = \{(U^*)^{-1}U^{-1}f_i\}_{i\in I} = \{(U^{-1})^*e_i\}_{i\in I},$$

en coherencia con lo que se menciono en la proposición 3.1.6.

3.2. Frames de Riesz.

El lector puede preguntarse si dado un *frame* $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$, es posible extraer una base del *frame*. La respuesta es en general negativa y se puede encontrar un ejemplo de ello muy elaborado en [10]. No obstante, se pueden dar condiciones sobre $\{f_i\}_{i\in I}$ para que contenga una base de Riesz. En este apartado nos centraremos en esto último.

Definición 3.2.1. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame en $\mathcal{H}$. Se dice que $\{f_i\}_{i\in I}$ es un* frame de Riesz *si toda subfamilia de $\{f_i\}_{i\in I}$ es un sistema de frame y todos ellos con las mismas cotas A, B.*

En el próximo teorema veremos la utilidad de la definición de *frame* de Riesz.

Lema 3.2.2. *Sea $\{c_i\}_{i\in I}$ una familia sumable de números reales no negativos. Sea $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de subconjuntos de I tales que*

1) $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \dots$

2) Existe $C > 0$ tal que $C \leq \sum_{i\in J_n} c_i$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $C \leq \sum_{i\in\cap J_n} c_i$.

Demostración. Basta definir la función de conjunto μ en la σ-álgebra $\mathcal{P}(I)$ como $\mu(M) = \sum_{i\in M} c_i$, para cada $M \in \mathcal{P}(I)$. La función μ así definida es una medida positiva. Por el lema A.2.2:

$$C \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in J_n} c_i = \lim_{n\to\infty} \mu(J_n) = \mu(\cap_{n=1}^{\infty} J_n) = \sum_{i\in\cap J_n} c_i,$$

que es lo que se buscaba probar. □

Una aplicación directa del lema de Zorn basta para demostrar que un *frame* de Riesz contiene una base de Riesz (este es el motivo de la denominación '*frame* de Riesz').

Teorema 3.2.3. *Todo frame de Riesz contiene una base de Riesz.*

Demostración. Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un *frame* de Riesz y sea A la cota inferior común de todos los subsistemas de *frame*. Consideramos el conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ \{f_i\}_{i\in J} \ : \ J \subset I, \ A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in J} |\langle f, f_i\rangle|^2, \ \forall f \in \mathcal{H} \right\}.$$

El conjunto $\mathcal{A}$ es no vacío pues $\{f_i\}_{i\in I} \in \mathcal{A}$, por ser un *frame* en $\mathcal{H}$. Definimos el siguiente orden en $\mathcal{A}$:

$$\{f_i\}_{i\in J} \prec \{f_i\}_{i\in K} \Leftrightarrow K \subset J.$$

Sea entonces una familia totalmente ordenada $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $\mathcal{A}$ y $f \in \mathcal{H}$ arbitrario, de forma que $F_\lambda = \{f_i\}_{i\in J_\lambda}$ con $J_\lambda \subset I$ y por tanto

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in J_\lambda} |\langle f_i, f\rangle|^2.$$

Consideremos el conjunto

$$I_0 = \{i \in I : \langle f, f_i\rangle \neq 0\}.$$

El conjunto I_0 es numerable ya que la familia $\{|\langle f, f_i\rangle|^2\}_{i\in I}$ es sumable (y en consecuencia el cardinal de elementos no nulos de la familia es a lo sumo numerable por la proposición A.1.13). Si definimos ahora los conjuntos $\tilde{J}_\lambda = J_\lambda \cap I_0$, entonces

$$\sum_{i\in\tilde{J}_\lambda} |\langle f_i, f\rangle|^2 = \sum_{i\in J_\lambda} |\langle f_i, f\rangle|^2 \geq A\|f\|^2 . \tag{3.7}$$

Sea ahora $J = \cap_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda \subset I$ y veamos que $\{f_i\}_{i\in J} \in \mathcal{A}$. Nótese que si $\tilde{J} = J \cap I_0$, entonces

$$\sum_{i\in\tilde{J}} |\langle f_i, f\rangle|^2 = \sum_{i\in J} |\langle f_i, f\rangle|^2.$$

Si se tuviera entonces $\tilde{J} = \tilde{J}_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$, se verificaría que $\{f_i\}_{i\in J} \in \mathcal{A}$. Supongamos entonces que $\tilde{J} \neq \tilde{J}_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$ y veamos que existe una sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ en Λ tal que

$$\tilde{J}_{\lambda_n} \supset \tilde{J}_{\lambda_{n+1}}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \quad \text{ y } \quad \bigcap_{n=1}^\infty \tilde{J}_{\lambda_n} = \tilde{J}. \tag{3.8}$$

Sea $\lambda_1 \in \Lambda$ cualquiera, de manera que $\tilde{J}_{\lambda_1} \setminus \tilde{J} = \{k_1, k_2, \ldots, \}$. Este conjunto es no vacío ya que $\tilde{J} \neq \tilde{J}_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Puesto que $\tilde{J} = \cap_{\lambda\in\Lambda}\tilde{J}_\lambda$, existe $\lambda_2 \in \Lambda$ tal que $k_1 \notin \tilde{J}_{\lambda_2}$. Además, por ser F_λ totalmente ordenada, se tiene que $J_{\lambda_2} \subset J_{\lambda_1}$. Equivalentemente, $\tilde{J}_{\lambda_2} \subset \tilde{J}_{\lambda_1}$. Escribamos entonces

$$\tilde{J}_{\lambda_2} \setminus \tilde{J} = \{k_{j_1}, k_{j_2}, \ldots\} \subset \tilde{J}_{\lambda_1} \setminus \tilde{J}. \tag{3.9}$$

Observe que $k_1 \notin \tilde{J}_{\lambda_2} \setminus \tilde{J}$. Procediendo de la misma forma, se puede encontrar $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $k_{j_1} \notin \tilde{J}_{\lambda_3}$ y de manera que $J_{\lambda_3} \subset J_{\lambda_2}$, es decir,

$$k_{j_1} \notin \tilde{J}_{\lambda_3} \setminus \tilde{J} = \{k_{j_1'}, k_{j_2'}, \ldots\} \subset J_{\lambda_2} \setminus \tilde{J}.$$

De esta manera nos aseguramos de que k_1, k_2 no estén en $J_{\lambda_2} \setminus \tilde{J}$ (pues k_{j_1} se puede elegir como k_2 en (3.9) si k_2 sigue estando en $\tilde{J}_{\lambda_2}$). Continuando igual, en el paso n-ésimo habremos eliminado k_n y en consecuencia se tendrá que $\cap_{n=1}^\infty \tilde{J}_{\lambda_n} \setminus \tilde{J} = \emptyset$, es decir,

$$\bigcap_{n=1}^\infty \tilde{J}_{\lambda_n} \subset \tilde{J} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \tilde{J}_\lambda,$$

lo que implica que $\tilde{J} = \cap_{n=1}^\infty \tilde{J}_{\lambda_n}$ y por tanto conseguiremos (3.8).

Con todo lo anterior, nótese que por el lema 3.2.2 y (3.7):

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in\cap\tilde{J}_{\lambda_n}} |\langle f, f_i\rangle|^2 = \sum_{i\in\tilde{J}} |\langle f, f_i\rangle|^2 = \sum_{i\in J} |\langle f, f_i\rangle|^2.$$

Como f era un elemento arbitrario de $\mathcal{H}$, se tiene que $\{f_i\}_{i\in J} \in \mathcal{A}$. Además, como $J \subset J_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$, $\{f_i\}_{i\in J}$ es una cota superior de $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Por el lema de Zorn $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal $\{f_i\}_{i\in H}$.

Veamos pues que $\{f_i\}_{i\in H}$ es una base de Riesz para completar la demostración. La familia $\{f_i\}_{i\in H}$ es un *frame* (la condición inferior la cumple por estar en $\mathcal{A}$ y la superior es directo de que $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* y de que $\{f_i\}_{i\in I} \prec \{f_i\}_{i\in H}$). Por tanto, por el teorema 3.1.18 basta demostrar que $\{f_i\}_{i\in H}$ es un *frame* exacto. Si no fuera así, existiría un elemento f_k, $k \in H$, tal que $\{f_i\}_{i\in H\setminus\{k\}}$ es un *frame*. Pero esto va en contra de que $\{f_i\}_{i\in H}$ es maximal, pues obviamente $H \setminus \{k\}$ está contenido en H. Por tanto, $\{f_i\}_{i\in H}$ es un *frame* exacto y en consecuencia una base de Riesz. □

Como aplicación de este último teorema, se puede demostrar que todo *frame* de Riesz es unión finita disjunta de sistemas de Riesz. A continuación mostramos el resultado, enunciado por primera vez en [11].

Proposición 3.2.4. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame de Riesz en $\mathcal{H}$. Entonces existe una familia finita de conjuntos disjuntos $J_1, \ldots, J_N$ tales que las familias $\{f_i\}_{i\in J_k}$, con $k = 1, \ldots, N$, son sistemas de Riesz y forman una partición de $\{f_i\}_{i\in I}$. Además, se puede tomar $N \leq \frac{B}{A}$, siendo A, B las constantes de la definición de frame de Riesz.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}_1 := \mathcal{H}$ y $\{f_i\}_{i\in I}$ un *frame* de Riesz en $\mathcal{H}_1$. Por el teorema 3.2.3, existe $J_1 \subset I$ tal que $\{f_i\}_{i\in J_1}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}_1$. Considerando ahora el conjunto $I \setminus J_1$, $\{f_i\}_{i\in I\setminus J_1}$ es un *frame* de Riesz en $\mathcal{H}_2 := \overline{\operatorname{span}}\{f_i\}_{i\in I\setminus J_1}$. De nuevo por el teorema 3.2.3 esto implica que $\{f_i\}_{i\in I\setminus J_1}$ contiene una base de Riesz $\{f_i\}_{i\in J_2}$ en $\mathcal{H}_2$. Repitiendo este proceso obtenemos una sucesión de espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2 \supset \mathcal{H}_3 \supset \ldots$ y una sucesión de bases de Riesz $\{f_i\}_{i\in J_k}$ en $\mathcal{H}_k$. Además, los J_k son disjuntos por construcción.

Falta por ver que este proceso es finito, es decir, que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}_{N+1} = \{0\}$. Si en el espacio $\mathcal{H}_N$ existe un elemento no nulo f, como

$$f \in \mathcal{H}_N \subset \mathcal{H}_{N-1} \subset \ldots \subset \mathcal{H}_1$$

y $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame* de Riesz,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in J_k} |\langle f, f_i\rangle|^2,$$

para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$. Por tanto,

$$AN\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{N} \sum_{i\in J_k} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 .$$

Puesto que $f \neq 0$, de la cadena de desigualdades anterior se deduce que ha de ser $N \leq B/A$, luego la familia de conjuntos J_k es finita. □

3.3. Problema de momentos para frames.

Consideramos ahora una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{H}$ y una familia de escalares $\{a_i\}_{i\in I}$ en $\ell^p(I)$. Nos preguntamos si existe $f \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle f, f_i\rangle = a_i, \qquad \forall i \in I. \tag{3.10}$$

Esto es lo que se conoce como un problema de momentos para *frames* de orden p. Nos centraremos en $p = 2$ y veremos que las condiciones de solución de dicho problema tienen relación con las bases de Riesz.

Una rápida comprobación nos da cuenta de que dicho problema no tiene siempre solución: si existen $k,j \in I$ tales que $a_k \neq a_j$ y $f_k = f_j$ entonces es imposible encontrar un f en $\mathcal{H}$ que cumpla (3.10) pues

$$a_k = \langle f, f_k \rangle = \langle f, f_j \rangle = a_j,$$

en contra de que $a_k \neq a_j$. Por tanto la existencia no está asegurada bajo solo estas condiciones. No obstante, en caso de existencia, tenemos una condición para la unicidad:

Proposición 3.3.1. *Supongamos que el problema de momentos* (3.10) *admite solución. Entonces la solución es única si, y sólo si, la familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es completa.*

Demostración. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa y tenemos dos soluciones f, g del problema distintas:

$$\langle f, f_i \rangle = a_i = \langle g, f_i \rangle,$$

para todo $i \in I$. Luego $\langle f - g, f_i \rangle = 0$ para todo $i \in I$. Como $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa, por la proposición 2.1.19 ha de ser $f - g = 0$ y la solución es por tanto única.

Recíprocamente, si $\{f_i\}_{i\in I}$ no fuera completa entonces existe f no nulo tal que $\langle f, f_i \rangle = 0$ para todo $i \in I$. Si g es una solución del problema, i.e, $\langle g, f_i \rangle = a_i$ para todo $i \in I$, entonces $g + f$ es otra solución del problema distinta de g pues

$$\langle g + f, f_i \rangle = \langle g, f_i \rangle = a_i.$$

□

Observe que si la familia $\{f_i\}_{i\in I}$ es un *frame*, el problema de momentos se puede reformular en términos del operador de análisis. En primer lugar, observemos que la unicidad de soluciones es equivalente a la inyectividad del operador T^*. Además, la existencia de soluciones para el problema es equivalente a plantearse si el operador T^* es sobreyectivo. La relación con las bases de Riesz es el siguiente resultado, que se podría añadir perfectamente a las equivalencias del teorema 3.1.18.

Teorema 3.3.2. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *un frame en* $\mathcal{H}$*. Entonces* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es una base de Riesz si, y sólo si, el operador de análisis* T^* *es sobreyectivo.*

Demostración. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz entonces por la proposición 3.1.6 admite una familia biortogonal $\{g_i\}_{i\in I}$ que también es una base de Riesz. Dado $\{a_i\}_{i\in I}$ en $\ell^2(I)$, el teorema 2.1.7 muestra que el elemento $f := \sum_{i\in I} a_i g_i$ está bien definido y además,

$$T^* f = \{\langle f, f_i \rangle\}_{i\in I} = \{a_i\}_{i\in I}.$$

Esto implica que T^* es sobreyectivo.

Por otro lado, si T^* es sobreyectivo entonces $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T^*)^{\perp} = \{0\}$. Esto es, T es inyectivo luego se cumple la condición 6 del teorema 3.1.18 y en consecuencia $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz. □

Si escogemos un *frame* que no sea una base de Riesz entonces por al proposición previa el problema de momentos no tiene por qué tener solución para una familia $\{a_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ dada. Sin embargo, podemos buscar un elemento como mejor aproximación, es decir, un elemento f que minimice $\|a_i - \langle f, f_i\rangle\|^2$.

Teorema 3.3.3. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un frame en $\mathcal{H}$ y sea $\{a_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$. Existe un único elemento f en $\mathcal{H}$ que minimiza*

$$\|\{a_i\}_{i\in i} - \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}\|^2 = \sum_{i\in I} |a_i - \langle f, f_i\rangle|^2.$$

Dicho elemento es exactamente $f = \sum_{i\in I} a_i S^{-1} f_i$.

Demostración. Ya se ha comentado que si T^* es sobreyectivo entonces existe solución. Además, es conocido que la menor distancia entre un punto y un subespacio es precisamente la distancia del punto y de su proyección sobre dicho subespacio. Por tanto, para minimizar (3.3.3) hay que escoger f de forma que $\{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I} = P\{a_i\}_{i\in I}$, donde P denota la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Im}(T^*)$. Ahora, por la proposición 2.2.10,

$$P\{a_i\}_{i\in I} = \left\{\left\langle \sum_{i\in i} a_i S^{-1} f_i, f_j \right\rangle\right\}_{j\in I}.$$

Debido a esta igualdad entonces f ha de ser:

$$f = \sum_{i\in I} a_i S^{-1} f_i.$$

Si existiera un $g \in \mathcal{H}$ distinto de f tal que

$$P\{a_i\}_{i\in I} = \{\langle g, f_i\rangle\},$$

entonces se tendría que $\langle g - f, f_i\rangle = 0$ para todo $i \in I$. Como $\{f_i\}_{i\in I}$ es completa por ser un *frame*, se concluye que debe ser $f = g$. $\square$

CAPÍTULO 4

FRAMES DE TRASLACIONES

Los *frames* han encontrado su aplicación en la teoría de la señal y en concreto en la teoría de ondículas entre otras. Esto hace que tengamos que trabajar con estructuras específicas de *frames*. En el resto de capítulos, el desarrollo se ha llevado a cabo en espacios de Hilbert arbitrarios, pues tan solo interesaba hacer un análisis teórico de los *frames*. En el presente capítulo estudiaremos los *frames* de traslaciones, es decir, las familias de funciones en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma $\{\phi(x - a_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, donde los a_k son constantes reales de traslación.

Comenzaremos con unas definiciones básicas y seguiremos la línea de las demostraciones de [2]. En la sección 4.1 se analizarán los *frames* de traslaciones equiespaciadas, mientras que en la sección 4.2 se probará como una familia de traslaciones arbitrarias puede ser a lo sumo un sistema de *frame*, pero nunca un *frame* en $L^2(\mathbb{R})$.

En todo el capítulo trabajaremos en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Este espacio es separable y admite una base ortonormal numerable, por tanto a partir de ahora los índices pasarán a ser discretos.

4.1. Traslaciones discretas.

Comencemos definiendo algunos operadores de utilidad para nuestro posterior análisis.

Definición 4.1.1. *Se llama el operador* traslación por $a \in \mathbb{R}$ *al operador* $T_a : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$*, que actúa como*

$$(T_a\phi)(x) = \phi(x - a).$$

Se llama el operador modulación por $b \in \mathbb{R}$ *al operador* $E_b : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$*, que actúa como*

$$(E_b\phi)(x) = e^{2\pi ibx}\phi(x).$$

Se define la función de modulación por $b \in \mathbb{R}$ *como la aplicación* $\tilde{E}_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *que actúa como*

$$\tilde{E}_b(x) = e^{2\pi ibx}.$$

De aquí en adelante simplemente escribiremos dichos operadores como $T_a\phi(x)$ y $E_b\phi(x)$. Observe además que $E_b\phi = \tilde{E}_b \cdot \phi$.

Además, tenemos los siguiente resultados para el operador traslación que serán utilizados más adelante:

Proposición 4.1.2. *El operador traslación satisface las siguientes propiedades:*

1. $T_a^* = T_{-a}$ *y* T_a *es invertible con* $T_a^{-1} = T_a^*$*. En particular,* T_a *es unitario.*
2. *Para cada* $\phi \in L^2(\mathbb{R})$*, la aplicación* $y \to T_y\phi$ *es continua de* $\mathbb{R}$ *en* $L^2(\mathbb{R})$*.*

Demostración. 1. Realizando un cambio de variable lineal se tiene que:

$$\langle T_a\phi, \psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-a)\psi^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s)\psi^*(s+a)ds = \langle \phi, T_{-a}\psi\rangle,$$

para todo ϕ, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Por tanto, $\langle \phi, T_a^*\psi\rangle = \langle \phi, T_{-a}\psi\rangle$ para todo $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, lo que implica que $T_a^* = T_{-a}$.
De la propia definición de traslación se obtiene que $T_aT_{-a} = Id = T_{-a}T_a$, luego $T_a^{-1} = T_{-a}$.

2. En primer lugar, demostremos el resultado para una función continua ϕ con soporte compacto. Asumamos que dicho soporte esta contenido en el intervalo $[c, d] \subset \mathbb{R}$.
Sea $y_0 \in \mathbb{R}$. Puesto que ϕ es uniformemente continua por ser continua y tener soporte compacto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|\phi(x-y) - \phi(x-y_0)| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad |y - y_0| \leq \delta.$$

Además, para cada $y \in (y_0 - 1/2, y_0 + 1/2)$ la función

$$\psi(x) = T_y\phi(x) - T_{y_0}\phi(x) = \phi(x-y) - \phi(x-y_0)$$

tiene el soporte contenido en el intervalo compacto $[y_0 - 1/2 + c, d + y_0 + 1/2]$. Luego,

$$\left\|T_y\phi - T_{y_0}\phi\right\| = \left(\int_{y_0-\frac{1}{2}+c}^{y_0+d+\frac{1}{2}} |\phi(x-y) - \phi(x-y_0)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \varepsilon\sqrt{d-c+1},$$

para cada $y \in \mathbb{R}$, con $|y - y_0| \leq \min\{\delta, \frac{1}{2}\}$. Es decir, la aplicación $y \to T_y\phi$ es continua si ϕ es continua y tiene soporte compacto.

Si ϕ es ahora una función arbitraria de $L^2(\mathbb{R})$, puesto que el espacio de las funciones continuas con soporte compacto es denso en $L^2(\mathbb{R})$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua φ con soporte compacto tal que

$$\|\phi - \varphi\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Luego dado $y \in \mathbb{R}$, como T_y es unitario,

$$\left\|T_y\phi - T_y\varphi\right\| = \|\phi - \varphi\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, por la primera parte de la demostración, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\|T_y\varphi - T_{y_0}\varphi\right\| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

si $|y - y_0| \leq \delta$. Con todo esto, se tiene que si $|y - y_0| \leq \delta$:

$$\begin{aligned}
\left\|T_y\phi - T_{y_0}\phi\right\| &= \left\|T_y\phi - T_y\varphi + T_y\varphi - T_{y_0}\varphi + T_{y_0}\varphi - T_{y_0}\phi\right\| \\
&\leq \left\|T_y\phi - T_y\varphi\right\| + \left\|T_y\varphi - T_{y_0}\varphi\right\| + \left\|T_{y_0}\psi - T_{y_0}\phi\right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego la aplicación que envía y en $T_y\phi$ es continua en y_0. Como y_0 era arbitrario, dicha aplicación es continua en $\mathbb{R}$.

□

En esta sección nos centraremos en las familias $\{T_{\lambda_k}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ con $\lambda_k = kb$, siendo b una constante positiva y $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Esto es, consideraremos las familia de traslaciones por puntos equidistantes y estudiaremos bajo qué condiciones dicha familia es un sistema de *frame*. De hecho, caracterizaremos las propiedades de dicha familia a partir de la función introducida en la definición 4.1.3.

Definición 4.1.3. *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ y sea $\hat{\phi}$ su transformada de Fourier. Se define la* función característica de traslación, *$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, como*

$$\Phi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\phi}\Big(\frac{t+k}{b}\Big)\right|^2.$$

El sumatorio en $\mathbb{Z}$ que aparece en la definición corresponde al de una familia sumable. Ahora bien, por ser de índice discreto dicho sumatorio se puede tratar como una serie debido a la proposición A.1.11, pues consta de términos positivos. Por tanto, los resultados clásicos de convergencia siguen siendo válidos.

Lema 4.1.4. *Sean $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función 1-periódica, medible y acotada, y $\beta \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, la función*

$$F(x) = \alpha(x) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta(x - k)$$

está definida casi siempre en $\mathbb{R}$, es 1-periódica, $F \in L^1([0,1])$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\beta(x)dx = \int_0^1 F(x)dx. \tag{4.1}$$

Demostración. Supongamos que α está acotada por M. Como además α es 1-periódica, por el teorema de convergencia monótona,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\alpha(x)| \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\beta(x-k)|dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |\alpha(x)||\beta(x-k)|dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |\alpha(x-k)||\beta(x-k)|dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-k}^{-k+1} |\alpha(s)||\beta(s)|ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(s)||\beta(s)|ds \leq M \int_{\infty}^{\infty} |\beta(s)|ds < \infty,\end{aligned} \tag{4.2}$$

pues $\beta \in L^1(\mathbb{R})$. Como la integral en (4.2) es finita, se deduce que la suma dada por $|\alpha(x)| \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\beta(x-k)|$ toma valor infinito en a lo sumo un conjunto de medida nula, luego F está bien definida para casi todo $t \in [0,1]$ y además, $F \in L^1([0,1])$.

Aplicando el teorema de convergencia dominada y realizando un cambio de variable,

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 \alpha(x) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta(x-k)dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \alpha(x)\beta(x-k)dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-k}^{-(k-1)} \alpha(s+k)\beta(s)ds \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-k}^{-(k-1)} \alpha(s)\beta(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s)\beta(s)ds.\end{aligned}$$

Observe que para afirmar que $F \in L^1([0,1])$ y la igualdad (4.1) basta que α este acotada casi siempre.

Ahora, la función F es 1-periódica por ser producto de dos funciones 1-periódicas ya que:

$$F(x+1) = \alpha(x+1) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta(x+1-k) = \alpha(x) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \beta(x-m) = F(x),$$

donde se ha establecido $m = k-1$. Puesto que F es 1-periódica, F está bien definida casi siempre en todo intervalo $[k, k+1]$, con $k \in \mathbb{Z}$. Como la unión numerable de conjuntos de medida nula es también de medida nula, se tiene que F esta definida casi siempre en $\mathbb{R}$.

□

Proposición 4.1.5. *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ La función característica de traslación, Φ, está bien definida casi siempre. Además, es positiva, 1-periódica y $\Phi \in L^1([0,1])$.*

Demostración. Que Φ es positiva se deduce de la definición. El resto de propiedades son consecuencia directa del lema 4.1.4, pues basta tomar en dicho lema la función α como la aplicación constante igual a 1 (que es trivialmente periódica, medible y acotada) y

$$\beta(t) := \left|\hat{\phi}\left(\frac{t}{b}\right)\right|^2.$$

Observe que $\beta \in L^1(\mathbb{R})$ pues $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$. □

Con estos resultados previos, estamos en condiciones de presentar uno de los resultados principales de la sección. Denotamos también por $\mathcal{F}$ la transformada de Fourier.

Proposición 4.1.6. *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ y $b > 0$. Entonces $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una familia de Bessel con cota B si, y sólo si,*

$$\Phi(t) \leq bB,$$

para casi todo $t \in [0,1]$.

Demostración. Notemos en primer lugar que el operador $T : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{kb}\phi$$

está bien definido en $c_{00}(\mathbb{Z})$, el espacio de todas las familias con un número finito de términos no nulos. Consideremos pues solo este tipo de familias en $\ell^2(\mathbb{Z})$ y el polinomio trigonométrico dado por $p(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikt}$. Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier es una transformación unitaria (debido a la fórmula de *Plancherel*) y la relación $\mathcal{F}(T_{kb}) = E_{-kb}\mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^2 =& \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{kb}\phi\Big\|^2 = \Big\|\mathcal{F}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{kb}\phi\Big)\Big\|^2 = \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k E_{-kb}\mathcal{F}\phi\Big\|^2 \\ =& \int_{-\infty}^{\infty}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikbt}\hat{\phi}(t)\Big|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}|p(bt)|^2\left|\hat{\phi}(t)\right|^2 dt.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Un virtud del lema 4.1.4, como p es 1-periódico, acotado y medible y la función $\beta(x) := |\hat{\phi}(x/b)|^2$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ por estar $\hat{\phi}$ en $L^2(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^2 =& \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty}|p(t)|^2\left|\hat{\phi}\Big(\frac{t}{b}\Big)\right|^2 dt \\ =& \frac{1}{b}\int_0^1 |p(s)|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\phi}\Big(\frac{s+k}{b}\Big)\right|^2 ds = \frac{1}{b}\int_0^1 |p(s)|^2\,\Phi(s)ds.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Si entonces suponemos que se cumple que $\Phi(t) \leq bB$ para casi todo $t \in [0,1]$, se obtiene que, para familias con un número finito de términos no nulos,

$$\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^2 \leq B\int_0^1 |p(t)|^2 dt = B\int_0^1\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikt}\Big|^2 dt = B\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2. \tag{4.5}$$

La desigualdad (4.5) implica que la familia $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es de Bessel por el lema 3.1.8.

Para la implicación contraria, si suponemos que la familia $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es de Bessel, entonces los cálculos hechos hasta (4.4) son ciertos para cualquier familia $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in c_{00}(\mathbb{Z})$. Si la cota de Bessel es B, entonces:

$$\frac{1}{b}\int_0^1 |p(t)|^2\,\Phi(t)dt = \|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^2 \leq B\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 = B\int_0^1 |p(t)|^2 dt, \tag{4.6}$$

para cualquier familia $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in c_{00}(\mathbb{Z})$.

Definimos entonces el operador lineal $S : M \longrightarrow L^2([0,1])$ por $Sp = p\sqrt{\Phi}$, donde M denota el espacio de los polinomios trigonométricos. De (4.6) se deduce que S es un operador continuo en M, con $\|S\| \leq (bB)^{1/2}$, pues se obtiene que

$$\|Sp\|^2 \leq bB\|p\|^2 .$$

Ahora, puesto que M es denso en $L^2([0,1])$, existe una extensión continua de S a $L^2([0,1])$, que denotamos por $\tilde{S}$, con la misma norma. Por densidad, si $\psi \in L^2([0,1])$, entonces existe una sucesión de polinomios trigonométricos $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $p_n \to \psi$ en $L^2([0,1])$ si $n \to \infty$. Por tanto, $(\tilde{S}p_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia $\tilde{S}\psi$ en $L^2([0,1])$. En consecuencia, existe una subsucesión $(p_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge puntualmente c.s. a ψ y $(\tilde{S}p_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge puntualmente c.s. a $\tilde{S}\phi$. Luego, para casi todo $x \in [0,1]$:

$$\tilde{S}\psi(x) = \lim_{k\to\infty} \tilde{S}p_{n_k}(x) = \lim_{k\to\infty} p_{n_k}(x)\sqrt{\Phi(x)} = \psi(x)\sqrt{\Phi(x)}.$$

El hecho de que $\tilde{S}$ sea continuo y de que $\|S\| = \|\tilde{S}\|$ conduce a

$$\int_0^1 |\psi(t)|^2 \, \Phi(t)dt = \|\tilde{S}\psi\|^2 \leq \|\tilde{S}\|^2\|\psi\|^2 \leq bB \int_0^1 |\psi(t)|^2 dt,$$

para todo $\psi \in L^2([0,1])$, lo que implica que $\Big(bB - \Phi(t)\Big) \geq 0$ para casi todo $t \in [0,1]$. Finalmente se tiene que $\Phi(t) \leq bB$ para casi todo $t \in [0,1]$.

$\square$

Proposición 4.1.7. *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ y supongamos que la familia $\{T_k\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una familia de Bessel en $L^2(\mathbb{R})$. Dado $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, la suma $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_kT_k\phi$ converge en $L^2(\mathbb{R})$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\tilde{E}_{-k}$ converge en $L^2([0,1])$ y*

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_kT_k\phi\right) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\tilde{E}_{-k}\right)\hat{\phi}.$$

Demostración. Ambas sumas convergen en sus respectivos espacios por el teorema 2.1.7. La primera por ser $\{T_k\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una familia de Bessel y la segunda por ser $\{\tilde{E}_{-k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una base ortonormal en $L^2([0,1])$.

Usando la linealidad y continuidad de la transformada de Fourier (teorema A.3.2) y utilizando la relación segunda de la proposición A.3.3:

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_kT_k\phi\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\mathcal{F}(T_k\phi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_kE_{-k}\hat{\phi}).$$

Por tanto, tan sólo tenemos que demostrar que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_kE_{-k}\hat{\phi}) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\tilde{E}_{-k}\right)\hat{\phi}.$$

Utilizando la desigualdad triangular en $L^2(\mathbb{R})$, si $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_kE_{-k}\hat{\phi}) - \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\tilde{E}_{-k}\right)\hat{\phi}\right\| &\leq \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_kE_{-k}\hat{\phi}) - \sum_{|k|\leq N}(c_kE_{-k})\hat{\phi}\right\| \\ &\quad + \left\|\left(\sum_{|k|\leq N} c_kE_{-k}\right)\hat{\phi} - \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\tilde{E}_{-k}\right)\hat{\phi}\right\|.\end{aligned}$$

El primer sumando converge a cero si $N \to \infty$, luego nos podemos centrar exclusivamente en el segundo sumando. Ahora, la función $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \tilde{E}_{-k}$ es 1-periódica por ser una serie de exponenciales complejas y tener el factor 2π. Razonando como en el lema 4.1.4, si se considera la función 1-periódica y medible $|\sum_{|k|\leq N} c_k \tilde{E}_{-k} - (\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \tilde{E}_{-k})|^2$ y la función $|\hat{\phi}|^2 \in L^1(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{|k|\leq N} c_k E_{-k}\hat{\phi} - \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \tilde{E}_{-k}\right)\hat{\phi} \right\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{|k|\leq N} c_k E_{-k}\hat{\phi} - \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \tilde{E}_{-k}\right)\hat{\phi} \right|^2 \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{-j}^{-j+1} \left| \sum_{|k|\leq N} c_k E_{-k}\hat{\phi} - \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \tilde{E}_{-k}\right)\hat{\phi} \right|^2 \\
&= \int_0^1 \left| \sum_{|k|\leq N} c_k E_{-k} - \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \tilde{E}_{-k}\right) \right|^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\cdot + j)|^2 \\
&= \int_0^1 \left| \sum_{|k|\leq N} c_k E_{-k}\hat{\phi} - \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \tilde{E}_{-k}\right) \right|^2 \Phi \\
&\leq B \left\| \sum_{|k|\leq N} c_k E_{-k} - \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \tilde{E}_{-k}\right) \right\|^2;
\end{aligned}
$$

donde en la última desigualdad se ha usado el resultado de la proposición 4.1.6 para $b = 1$ y B denota la cota de la familia de Bessel $\{T_k\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Hay que señalar que en el primer término de la fórmula anterior, la norma corresponde a la norma en $L^2(\mathbb{R})$, mientras que en el último término la norma es la asociada a $L^2([0,1])$. □

El siguiente teorema junto con la proposición 4.1.6 muestran diversas caracterizaciones en función de desigualdades e igualdades sobre la función característica de traslación Φ.

Teorema 4.1.8. *Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ y $b > 0$. Para cualquier par de constantes A, $B > 0$, se tienen las siguientes caracterizaciones:*

1. *$\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de frame con cotas A, B si, y sólo si,*

$$bA \leq \Phi(t) \leq bB, \tag{4.7}$$

para casi todo $t \in [0,1] \setminus \mathcal{N}$, donde $\mathcal{N} = \{t \in [0,1] : \Phi(t) = 0\}$.

2. *$\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de Riesz con cotas A, B si, y sólo si,*

$$bA \leq \Phi(t) \leq bB, \tag{4.8}$$

para casi todo $t \in [0,1]$.

3. *$\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en $\overline{\operatorname{span}}\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ si, y sólo si,*

$$\Phi(t) = b,$$

para casi todo $t \in [0,1]$.

Demostración. 1. Probaremos este punto utilizando el teorema 2.2.14 en el espacio $\overline{\text{span}}\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Obviamente $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es completa en ese espacio.
Supongamos entonces que $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es sistema de *frame*. Entonces $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una familia de Bessel en $L^2(\mathbb{R})$ con cota B debido a la proposición 2.1.22 y de la proposición 4.1.6 se deduce que $\Phi(t) \leq bB$ para casi todo punto $t \in [0,1]$. Además, el operador de síntesis de la familia $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ está bien definido y debido a la proposición 4.1.7,

$$\begin{aligned}\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^2 &= \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{kb}\phi\Big\|^2 = \Big\|\mathcal{F}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{kb}\phi\Big)\Big\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikbt}\hat{\phi}(t)\Big|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(bt)|^2 \left|\hat{\phi}(t)\right|^2 dt\end{aligned}$$

para toda familia $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, donde se ha escrito $\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikx}$. Análogamente a la ecuación (4.3) se llega a la igualdad

$$\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^2 = \frac{1}{b}\int_0^1 |\psi(t)|^2\, \Phi(t)dt \tag{4.9}$$

para toda familia $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Esto implica que que $\Theta(\text{Ker}(T)) = M$, con

$$M = \Big\{\psi \in L^2([0,1]) : \psi = 0 \;\text{ en }\; [0,1]\setminus\mathcal{N}\Big\}$$

y $\Theta : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2([0,1])$ la isometría biyectiva dada por

$$\Theta\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikt}.$$

Ahora, dado $\psi \in L^2([0,1])$, se puede escribir $\psi = \psi\cdot\chi_{[0,1]\setminus\mathcal{N}} \oplus \psi\cdot\chi_{\mathcal{N}}$ (χ es la función característica del conjunto en cuestión). En base a esto último se tiene que

$$M^{\perp} = \Big\{\psi \in L^2([0,1]) : \psi = 0 \;\text{ en }\; \mathcal{N}\Big\}.$$

Por tanto,

$$\text{Ker}(T)^{\perp} = \Theta^{-1}(M^{\perp}) = \Big\{\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikt} = 0 \;\text{ en }\; t\in\mathcal{N}\Big\}. \tag{4.10}$$

Una vez hemos llegado a la igualdad (4.10), tomemos $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \text{Ker}(T)^{\perp}$. Se tiene que:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \int_0^1 \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikt}\Big|^2 dt = \int_{[0,1]\setminus\mathcal{N}} \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikt}\Big|^2 dt;$$

usando la ecuación (4.9), la condición izquierda de (2.20) en el teorema 2.2.14 es equivalente a

$$A\int_{[0,1]\setminus\mathcal{N}} \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikt}\Big|^2 dt \leq \frac{1}{b}\int_{[0,1]\setminus\mathcal{N}} \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi ikt}\Big|^2 \Phi(t)dt,$$

para todo $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \text{Ker}(T)^{\perp}$. Esta condición es a su vez equivalente a que

$$A\int_{[0,1]\setminus\mathcal{N}} |\psi(t)|^2 dt \leq \frac{1}{b}\int_{[0,1]\setminus\mathcal{N}} |\psi(t)|^2\Phi(t)dt, \tag{4.11}$$

para todo $\psi \in M^{\perp}$. Por tanto, si $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de *frame*, como se da la igualdad (4.9), se tiene la desigualdad (4.11). De esta desigualdad se deduce que $bA \le \Phi(t)$ para casi todo $t \in [0,1] \setminus \mathcal{N}$, pues la misma condición (4.11) se cumple para cualquier función de $L^2([0,1])$; basta con descomponer una función de $L^2([0,1])$ en M y $M^{\perp}$ (la parte de M se hace nula).
Recíprocamente, si se da la condición (4.7), se deduce que $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una familia de Bessel en $L^2(\mathbb{R})$ por la proposición 4.1.6. Observemos que para probar (4.9) solo hemos usado que $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una familia de Bessel. Entonces de (4.7) se sigue también que para cada $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$,

$$\begin{aligned}\|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^2 = \frac{1}{b}\int_0^1 |\psi(t)|^2\Phi(t)dt &= \frac{1}{b}\int_{[0,1]\setminus\mathcal{N}} |\psi(t)|^2\Phi(t)dt \\ &\ge A\int_{[0,1]\setminus\mathcal{N}} |\psi(t)|^2 dt = A\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2.\end{aligned}$$

En consecuencia $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de *frame*, por el teorema 2.2.14.

2. Probemos en primer lugar que $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ si, y sólo si, $\mathcal{N}$ es de medida nula.
Si $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, entonces el conjunto M del apartado anterior solo contiene también a la función nula c.s. en $[0,1]$. Por tanto, $\mathcal{N}$ ha de ser de medida nula pues de no ser así podríamos obtener una función no nula c.s. en M (dotándola de un valor constante en $\mathcal{N}$ y nula en el resto por ejemplo). Por otro lado, si $\mathcal{N}$ es de medida nula entonces M solo contiene a la función nula c.s. en $[0,1]$ y en consecuencia $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

   Si la familia $\{T_{kb}\Phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de Riesz entonces cumple las desigualdades (3.3) del teorema 3.1.9 para toda sucesión $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in c_{00}(\mathbb{Z})$, es decir, se tiene que:

$$A\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \le \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k f_k \right\|^2 = \|T\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\|^2 \le B\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2, \tag{4.12}$$

   ya que el operador T está bien definido por ser $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ un sistema de Riesz.
Ahora, como $c_{00}(\mathbb{Z})$ es denso en $\ell^2(\mathbb{Z})$, se tiene que dado $c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ existe una sucesión $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $c_{00}(\mathbb{Z})$ que converge a c. Aplicando las desigualdades (4.12) a d_n y tomando límites se tiene que c verifica las desigualdades (4.12) ya que T y la norma son continuos, luego $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ y por tanto $\mathcal{N}$ es de medida nula. Como $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es también un sistema de *frames* (por ser sistema de Riesz) entonces por el apartado 1 se tiene la desigualdad (4.8).

   Recíprocamente, si se cumplen las desigualdades (4.8) entonces $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de *frame* por el punto 1 y además $\mathcal{N}$ es de medida nula. Por tanto, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. Esto último implica por el teorema 2.2.14 que las desigualdades (3.3) se verifican para toda sucesión en $\ell^2(\mathbb{Z})$ y, en particular, para las de $c_{00}(\mathbb{Z})$. En consecuencia, usando el teorema 3.1.9 se llega a que $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de Riesz.

3. Si ahora $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en $\overline{\mathrm{span}}\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ entonces en particular es un sistema de Riesz con mismas cotas $A = B = 1$. Luego del punto 2 se deduce que $\Phi(t) = b$ para casi todo $t \in [0,1]$.

Recíprocamente, si se cumple que $\Phi(t) = b$ para casi todo $t \in [0,1]$, entonces $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de *Riesz* con cotas $A = B = 1$. Por el teorema 3.1.9 se tiene que para cada sucesión de escalares $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ con un número finito de términos no nulos,

$$\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k T_{kb}\phi\Big\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2.$$

Luego en particular se obtiene que $\|T_{kb}\phi\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, se tiene también que

$$\|\psi\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle \psi, T_{kb}\phi\rangle|^2$$

para todo $\psi \in \overline{\text{span}}\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ya que por el punto 1, $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ también es un sistema de *frame* con cotas $A = B = 1$. Por último,

$$1 = \|T_{kb}\phi\|^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\langle T_{kb}\phi, T_{mb}\phi\rangle|^2 = 1 + \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{k\}} |\langle T_{kb}\phi, T_{mb}\phi\rangle|^2,$$

lo que implica que $\langle T_{kb}\phi, T_{mb}\phi\rangle = \delta_{km}$, i.e, $\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en $\overline{\text{span}}\{T_{kb}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

$\square$

Ejemplo 4.1.9. Sea $m \in \mathbb{N}$. Consideremos la función $\phi_m \in L^2(\mathbb{R})$ dada por

$$\phi_m = \overbrace{\chi_{[0,1]} * \dots * \chi_{[0,1]}}^{m+1}.$$

Vamos a construir la función característica de traslación para la familia $\{T_k\phi_m\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y estudiar sus posibles acotaciones.

Como la transformada de Fourier de un producto de convolución es el producto puntual de las transformadas de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ (ver proposición A.3.4) y $\chi_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\hat{\phi}_m = \overbrace{\hat{\chi}_{[0,1]} \cdot \dots \cdot \hat{\chi}_{[0,1]}}^{m+1}$$

y como

$$\hat{\chi}_{[0,1]}(x) = \int_0^1 e^{-2\pi itx}dt = -\frac{1}{2\pi ix}(e^{-2\pi ix} - 1) = \frac{e^{-\pi ix}}{\pi x}\left(\frac{e^{\pi ix} - e^{-\pi ix}}{2i}\right) = e^{-\pi ix}\,\frac{\sin(\pi x)}{\pi x},$$

se tiene que:

$$\hat{\phi}_m(x) = \left(\hat{\chi}_{[0,1]}\right)^{m+1}(x) = e^{-(m+1)\pi ix}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^{m+1}.$$

La función característica de traslación será entonces:

$$\begin{aligned}\Phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}_m(x-k)|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|e^{(m+1)\pi i(x-k)}\right|^2 \left|\frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-k)}\right|^{2(m+1)} \\ &= \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right)^{2(m+1)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^{2(m+1)}},\end{aligned} \tag{4.13}$$

ya que la exponencial de un número imaginario puro tiene módulo unidad y

$$\sin^2(\pi(x-k)) = \sin^2(\pi x - \pi k) = \sin^2(\pi x)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Dado un $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ fijo, la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^2}$ puede calcularse mediante el teorema de los residuos [12]:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^2} = -\pi \mathrm{Res}\Big(\frac{\mathrm{cotg}(\pi z)}{(x-z)^2}, x\Big).$$

La función del residuo tiene un polo de orden 2 en x, luego

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{\mathrm{cotg}(\pi z)}{(x-z)^2}, x\Big) = \lim_{z\to x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} \left((z-x)^2 \ \frac{\mathrm{cotg}(\pi z)}{(x-z)^2} \right) = -\pi\Big(1 + \mathrm{cotg}(\pi x)^2\Big).$$

Por tanto,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^2} = \pi^2\Big(1 + \mathrm{cotg}(\pi x)^2\Big).$$

Razonando de la misma forma tendremos que, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^{2(m+1)}} &= -\pi \frac{1}{(2m+1)!} \lim_{z\to x} \frac{\mathrm{d}^{(2m+1)}}{\mathrm{dz}^{(2m+1)}} \left((z-x)^{2(m+1)} \ \frac{\mathrm{cotg}(\pi z)}{(x-z)^{2(m+1)}} \right) \\ &= \pi^{2(m+1)} p_m(\mathrm{cotg}(\pi x)^2) \end{aligned} \tag{4.14}$$

ya que ahora el polo es de orden $2(m+1)$ y p_m denota un polinomio de grado $m+1$ con coeficientes estrictamente positivos $a_0, a_1 \ldots, a_{m+1}$. Observemos, por ejemplo, que $p_0(t) = 1 + t$. La última igualdad de (4.14) es consecuencia de aplicar el principio de inducción.

Teniendo en cuenta las expresiones (4.13) y (4.14), tenemos que:

$$\Phi(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right)^{2(m+1)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^{2(m+1)}} = \sin^{2(m+1)}(\pi x)\, p_m(\mathrm{cotg}(\pi x)^2).$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, es decir, Φ esta definida en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ es de medida nula, Φ está por tanto definida c.s. en $\mathbb{R}$. Además, Φ es continua y estrictamente positiva en $(0, 1)$ pues por un lado, en $x = 1/2$, $\Phi(1/2) = a_0 > 0$, donde a_0 es el coeficiente independiente de p_m. Para el resto de puntos en $(0, 1)$, $\Phi(x) > 0$, ya que $\sin^{2(m+1)}(\pi x) > 0$ y $p_m(\mathrm{cotg}(\pi x)^2) > 0$ para todo $x \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$, pues los coeficientes de p_m son estrictamente positivos. Por otro lado, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sin^{2(m+1)}(\pi x)\, p_m(\mathrm{cotg}(\pi x)^2) =& a_0 \sin^{2(m+1)}(\pi x) + a_1 \cos^2(\pi x) \sin^{2(m-1)}(\pi x) \\ &+ a_2 \cos^4(\pi x) \sin^{2(m-2)}(\pi x) + \ldots + a_{m+1} \cos^{2(m+1)}(\pi x). \end{aligned}$$

De esta última expresión se deduce que los límites en los extremos de este intervalo existen y son finitos:

$$\lim_{x\to 0} \Phi(x) = a_{m+1}, \qquad \lim_{x\to 1} \Phi(x) = a_{m+1}, \tag{4.15}$$

donde $a_{m+1} > 0$ es el coeficiente de la potencia $(m+1)$-ésima de p_m. Por todo lo anterior, se deduce que Φ está, acotada inferiormente y superiormente en $(0, 1)$ por constantes positivas, es decir,

$$A \leq \Phi(x) \leq B$$

para todo $x \in (0,1)$. Por el teorema 4.1.8, se tiene que Φ verifica el punto 2 de dicho teorema, luego $\{T_k\phi_m\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema de Riesz.

4.2. Traslaciones arbitrarias.

A diferencia del apartado anterior, consideramos ahora familias $\{T_{\lambda_k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ donde $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una familia de números reales cualesquiera. Demostraremos que $\{T_{\lambda_k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ puede ser como mucho un *frame* para un subespacio propio de $L^2(\mathbb{R})$.

Para llegar a ese resultado es necesario dar unas definiciones y un lema previo. Supondremos que I es ahora un conjunto numerable.

Definición 4.2.1. *Sea $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in I}$ una familia en $\mathbb{R}^d$. Diremos que:*

1. $\{\lambda_k\}_{k\in I}$ *es* espaciada *si* $\inf_{j\neq k}|\lambda_j - \lambda_k| > 0$*; si $\delta > 0$ es una constante tal que $|\lambda_j - \lambda_k| \geq \delta$ para todo $j \neq k$ diremos que δ es una* constante de separación.
2. $\{\lambda_k\}_{k\in I}$ *es* relativamente espaciada *si es unión finita de familias espaciadas.*

Por supuesto, si una familia es espaciada es relativamente espaciada, pero el recíproco no es cierto como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.2. La familia dada por $\{k, k+\frac{1}{1+|k|}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ no es espaciada pues dado $\delta > 0$, podemos encontrar un $k_0 \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande en valor absoluto tal que

$$\left|k_0 - \left(k_0 + \frac{1}{1+|k_0|}\right)\right| = \left|\frac{1}{1+|k_0|}\right| < \delta.$$

No obstante, este familia sí es relativamente espaciada pues podemos escribir

$$\left\{k, k+\frac{1}{1+|k|}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \left\{k+\frac{1}{1+|k|}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Ahora, $\mathbb{Z}$ es trivialmente espaciado con constante de separación igual a 1 y el segundo conjunto es espaciado con constante de separación igual a $1/2$.

Además de la definición anterior, también introducimos la siguiente notación. Para cada $x \in \mathbb{R}^d$ y $h > 0$ denotamos por $Q_h(x)$ el cubo semiabierto en $\mathbb{R}^d$ centrado en x y con lados de longitud h, es decir,

$$Q_h(x) = \prod_{j=1}^{d}[x_j - h/2, x_j + h/2),$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

Observe además que para cada $h > 0$,

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} Q_h(hn); \tag{4.16}$$

o lo que es lo mismo, la familia de cubos $\{Q_h(hn)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ es una partición de $\mathbb{R}^d$, donde $\bigsqcup$ representa una unión disjunta.

Por otro lado, sean $\nu^+(h)$ y $\nu^-(h)$ el mayor y el menor número de elementos de Λ que están en un cubo cualquiera de lado h,

$$\nu^+(h) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \#\Big(\Lambda \cap Q_h(x)\Big), \qquad \nu^-(h) = \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \#\Big(\Lambda \cap Q_h(x)\Big).$$

Con todo esta notación, definimos lo que se conoce como *densidades de Beurling*:

Definición 4.2.3. *Las* densidades de Beurling superior e inferior *de una familia $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ con elementos en $\mathbb{R}^d$ son los límites*

$$D^+(\Lambda) = \limsup_{h\to\infty} \frac{\nu^+(h)}{h^d} \quad \text{y} \quad D^-(\Lambda) = \liminf_{h\to\infty} \frac{\nu^-(h)}{h^d}, \tag{4.17}$$

respectivamente.

Si $D^+(\Lambda) = D^-(\Lambda)$ se dice que Λ tiene densidad de Beurling uniforme.

Lema 4.2.4. *Sea $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una familia en $\mathbb{R}^d$. Son equivalentes:*

1. *$D^+(\Lambda) < \infty$.*
2. *Λ es relativamente espaciada.*
3. *Para algún $h > 0$ existe un número natural N_h (que depende de h), tal que cada cubo $Q_h(nh)$, con $n \in \mathbb{Z}$, contiene a lo sumo N_h puntos de Λ, i.e,*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^d} \#\Big(\Lambda \cap Q_h(nh)\Big) < \infty. \tag{4.18}$$

4. *Para todo $h > 0$ existe un número natural N_h (que depende de h), tal que cada cubo $Q_h(nh)$, con $n \in \mathbb{Z}$, contiene a lo sumo N_h puntos de Λ, i.e, se verifica la desigualdad (4.18).*

Demostración.

$1 \Rightarrow 4$ Puesto que el límite superior de (4.17) es finito entonces existe una constante $N \in \mathbb{N}$ y $M \geq 0$ tal que si $h \geq M$ entonces

$$\frac{\nu^+(h)}{h^d} \leq N,$$

es decir,

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^d} \#\Big(\Lambda \cap Q_h(nh)\Big) \leq \nu^+(h) \leq Nh^d \leq Nm^d, \tag{4.19}$$

donde m es un número natural mayor que h. Si $h < M$ entonces los cubos $Q_h(nh)$ son más pequeños y por tanto están contenido en cubos con $h \geq M$; luego

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^d} \#\Big(\Lambda \cap Q_{h_1}(nh_1)\Big) \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}^d} \#\Big(\Lambda \cap Q_{h_2}(nh_2)\Big),$$

donde h_1 es tal que $0 < h_1 < M$ y h_2 tal que $h_2 \geq M$. Basta entonces aplicar la desigualdad (4.19).

$4 \Rightarrow 3$ Trivial.

$3 \Rightarrow 2$ Sea $h > 0$ de forma que satisfaga el punto 3. Veamos como Λ puede ser dividida en un número finito de familias espaciadas con constante de separación h.
Sean $v_1, \ldots, v_{2^d}$ los vértices del cubo unidad $[0,1]^d$. Consideramos también los siguientes conjuntos:

$$Z_j = (2\mathbb{Z})^d + v_j, \qquad j = 1, \ldots, 2^d,$$

donde $2\mathbb{Z}$ denota al conjunto $\{2n : n \in \mathbb{Z}\}$. Estos conjuntos son una partición de $\mathbb{Z}^d$ ya que dado $n = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ se tiene que si n_i, con $i \in \{1, \ldots d\}$, es par (resp. impar), se toma el vértice cuya componente i-ésima es 0 (resp. 1). Sea entonces v_j el vértice tomado para n. Podemos por tanto escribir $n = \hat{n} + v_j$, donde $\hat{n}$ es el vector cuya componente i-ésima es la misma que la componente i-ésima de n si $(v_j)_i = 0$ o $n_i - 1$ si $(v_j)_i = 1$. De esta forma, $n \in Z_j$.
También se tiene que los conjuntos Z_j, $j = 1, \ldots, 2^d$, son disjuntos ya que cada conjunto Z_j contiene a los puntos cuyas componentes tienen la misma paridad (par o impar) que el vértice que lo genera y obviamente no hay dos vértices distintos del cubo unidad cuyas componentes tengan todas la misma paridad.
Como además se cumple (4.16), si definimos los conjuntos

$$B_j = \bigsqcup_{n \in Z_j} Q_h(hn), \qquad j = 1, \ldots, 2^d,$$

entonces se verifica que

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{j=1}^{d} B_j.$$

Fijemos ahora un conjunto B_j. Dados $m, n \in Z_j$, con $m \neq n$, la distancia entre un elemento cualquiera del cubo $Q_h(hn)$ y otro del cubo $Q_h(hm)$ es al menos h. Como por hipótesis cada cubo $Q_h(hn)$ tiene a lo sumo N_h elementos de Λ y, además,

$$\Lambda \cap B_j = \bigsqcup_{n \in Z_j} \Big(\Lambda \cap Q_h(hn)\Big)$$

entonces se concluye que $\Lambda \cap B_j$ se puede dividir en, como mucho, N_h conjuntos que son espaciados con constante de separación h. De esta manera se deduce que Λ puede ser dividida en un número finito de familias espaciadas con constante de separación h, ya que los conjuntos $\Lambda \cap B_j$ forman una partición de Λ. En concreto, Λ se puede dividir en a lo sumo $2^d N_h$ familias equiespaciadas con constante de separación h.

$2 \Rightarrow 1$ Supongamos ahora que Λ puede ser dividida en un número finito de familias espaciadas $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r$ con constantes de separación $\delta_1, \ldots, \delta_r$, respectivamente.
Sea

$$\delta = \min\left\{\frac{\delta_1}{2\sqrt{d}}, \ldots, \frac{\delta_r}{2\sqrt{d}}\right\}.$$

De esta forma, la distancia entre dos puntos cualesquiera en un cubo $Q_\delta(x)$ es menor que $\min\{\delta_1, \ldots, \delta_r\}$, ya que en un cubo de lado δ la máxima distancia se alcanza en la diagonal de vértices opuestos, y esta es exactamente $\sqrt{d}\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_r\}/2$. Por

tanto, $Q_\delta(h)$ contiene como mucho un punto de cada familia Λ_k, es decir, contiene a lo sumo r puntos de Λ.
Ahora, si h es un número real positivo entonces veamos que $Q_{h\delta}(x)$ contiene un número de elementos de Λ menor que $r(h+1)^d$. Un cubo de lado $h\delta$ se puede recubrir con h^d cubos de lado δ si h es un número natural. Si h es un número real entonces el cubo de lado $h\delta$ puede recubrirse con el número natural más cercano a $(h+1)^d$ y que sea menor que este. En consecuencia, $Q_{h\delta}(x)$ contiene un número de elementos de Λ menor que $r(h+1)^d$. Todo esto implica que:

$$D^+(\nu) = \limsup_{h\to\infty} \frac{\nu^+(h)}{h^d} = \limsup_{h\to\infty} \frac{\nu^+(h\delta)}{(h\delta)^d} \leq \limsup_{h\to\infty} \frac{r(h+1)^d}{(h\delta)^d} = \frac{r}{\delta^d} < \infty.$$

□

Vamos ahora con el resultado principal.

Teorema 4.2.5. *Sea $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una familia de elementos en $\mathbb{R}$ y $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Entonces:*

1. *Si $\{T_{\lambda_k}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una familia de Bessel en $L^2(\mathbb{R})$, se cumple que $D^+(\Lambda) < \infty$.*
2. *Si $\{T_{\lambda_k}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ satisface la condición inferior de frame en $L^2(\mathbb{R})$, entonces $D^+(\Lambda) = \infty$.*

Demostración. 1. Por el lema previo, la condición $D^+(\Lambda) < \infty$ es equivalente a que Λ sea relativamente espaciada. Supongamos entonces que Λ no es relativamente espaciada y veamos que no puede ser una familia de Bessel.
Sea L la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por $L(x) = \langle \phi, T_x\phi\rangle$; L es continua por la proposición 4.1.2. Como L es no nula en $x = 0$ (ya que $L(0) = \|\phi\|^2$) existe $h > 0$ tal que

$$\mu := \inf_{x\in[-h,h]} |\langle \phi, T_x\phi\rangle| > 0. \tag{4.20}$$

Sea $N \in \mathbb{N}$. Si Λ no es relativamente espaciada entonces por el lema 4.2.4 existe un intervalo $[a-h, a+h]$, $a \in \mathbb{R}$, que contiene al menos N elementos de Λ. Escribiendo

$$\Lambda_N = \{k \in \mathbb{Z} : \lambda_k \in [a-h, a+h]\} = \{k \in \mathbb{Z} : \lambda_k - a \in [-h, h]\},$$

y utilizando la proposición 4.1.2 y la definición (4.20), se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle T_a\phi, T_{\lambda_k}\phi\rangle|^2 &\geq \sum_{k\in\Lambda_N} |\langle T_a\phi, T_{\lambda_k}\phi\rangle|^2 \\ &= \sum_{k\in\Lambda_N} |\langle \phi, T_{\lambda_k - a}\phi\rangle|^2 \geq N\mu^2 = \frac{N\mu^2}{\|\phi^2\|}\|T_a\phi\|^2,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha utilizado que T_a es unitario. Puesto que $N \in \mathbb{N}$ era arbitrario, de la desigualdad anterior se deduce que $\{T_{\lambda_k}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ no puede ser una familia de Bessel.

2. Supongamos que $D^+(\Lambda) < \infty$ y demostremos que $\{T_{\lambda_k}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ no satisface la condición inferior de *frame* sea cual sea $A > 0$.
   Por el lema 4.2.4, $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una unión finita de conjuntos espaciados, es decir,

$$\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \bigcup_{j=1}^{s} \{\lambda_k\}_{k\in\Lambda_j},$$

donde cada $\{\lambda_k\}_{k\in\Lambda_j}$ es espaciada. Como es una colección finita de conjuntos, elijamos $\delta > 0$ de forma que sea una constante de separación para todas las familias $\{\lambda_k\}_{k\in\Lambda_j}$ y sea $h \in (0, \delta/2)$, $I := [-h, h]$. Si denotamos por χ_I a la función característica en I,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle\chi_I, T_{\lambda_k}\phi\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k\in\Lambda_j} |\langle\chi_I, \chi_I T_{\lambda_k}\phi\rangle|^2 \leq \sum_{j=1}^{s}\sum_{k\in\Lambda_j} \|\chi_I\|^2\, \|\chi_I T_{\lambda_k}\phi\|^2. \tag{4.21}$$

Por como se tomó h, los intervalos $\{I - \lambda_k\}_{k\in\Lambda_j} = \Big\{\{x - \lambda_k \,:\, x \in I\}\Big\}_{k\in\Lambda_j}$ son disjuntos. Definiendo

$$\Delta_j := \bigsqcup_{k\in\Lambda_j} (I - \lambda_k),$$

se obtiene que

$$\sum_{k\in\Lambda_j} \|\chi_I T_{\lambda_k}\phi\|^2 = \sum_{k\in\Lambda_j} \int_I |\phi(x - \lambda_k)|^2 dx = \int_{\Delta_j} |\phi(x)|^2 dx.$$

De (4.21) llegamos a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle\chi_I, T_{\lambda_k}\phi\rangle|^2 \leq \|\chi_I\|^2 \sum_{j=1}^{s} \int_{\Delta_j} |\phi(x)|^2 dx. \tag{4.22}$$

Sea $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente a 0. Aplicaremos para cada $j \in \{1, \dots, s\}$ fijo el teorema de convergencia dominada a las funciones $\psi_n(x) = \chi_{\Delta_{j(n)}}(x)|\phi(x)|^2$, donde

$$\Delta_{j(n)} = \bigcup_{k\in\Lambda_j} ([-h_n, h_n] - \lambda_k).$$

Obviamente $|\psi_n(x)| \leq |\phi(x)|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego son integrables. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{\Delta_{j(n)}}(x)|\phi(x)|^2 = 0, \quad \text{c.s. en } \mathbb{R},$$

de donde se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Delta_{j(n)}} |\phi(x)|^2 dx = 0.$$

Esto implica que, teniendo en cuenta la desigualdad (4.22), $\{T_{\lambda_k}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ no puede tener una cota inferior en $L^2(\mathbb{R})$. De ser así, existiría $A > 0$ tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle\chi_I, T_{\lambda_k}\phi\rangle|^2 \geq A\|\chi_I\|^2 \tag{4.23}$$

para todo intervalo $I = [-h, h]$, pero esto es absurdo pues podemos tomar $I_n = [-h_n, h_n]$ suficientemente pequeño tal que

$$\frac{1}{\|\chi_{I_n}\|^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle\chi_I, T_{\lambda_k}\phi\rangle| \leq \sum_{j=1}^{s} \int_{\Delta_j(n)} |\phi(x)|^2 dx < A,$$

en contra de (4.23).

$\square$

Corolario 4.2.6. *Sea* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *una familia de elementos en* $\mathbb{R}$ *y* $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$*. Entonces* $\{T_{\lambda_k}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *puede ser un frame para a lo sumo un subespacio propio de* $L^2(\mathbb{R})$*.*

Demostración. Directo del teorema anterior: si $\{T_{\lambda_k}\phi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ fuera un *frame* en $L^2(\mathbb{R})$ entonces es una familia de Bessel y también satisface la condición inferior de *frame*, es decir, $D^+(\Lambda) < \infty$ y $D^+(\Lambda) = \infty$, lo que es absurdo. □

Observación 4.2.7. Aunque el teorema 4.2.5 y el corolario 4.2.6 se han demostrado para familias de elementos en $\mathbb{R}$, los resultados siguen siendo válidos en $\mathbb{R}^d$ [13]. No obstante, se han querido dejar así para una mayor claridad.

APÉNDICE A

APÉNDICE

A.1. Sumabilidad

Los resultados que se muestran a continuación han sido en su mayoría extraídos de [14] y de [15].

Sea E un espacio normado.

Definición A.1.1. *Una familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *de elementos de* E *se dice que es* sumable *si existe un elemento* f *de* E *tal que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $J_0 \subset I$ *finito tal que* $\left\|\sum_{i\in J} f_i - f\right\| < \varepsilon$ *para cualquier conjunto* J *finito, con* $J_0 \subset J \subset I$*. En este caso, se dice que* f *es la suma de la familia sumable y se escribirá* $f = \sum_{i\in I} f_i$*. Si* I *es el conjunto vacío entonces por convenio su suma es cero.*

La suma de una familia sumable es única.

Definición A.1.2. *Una familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *de elementos de* E *se dice que* cumple la condición de Cauchy para la sumabilidad *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $J_0 \subset I$ *finito tal que* $\left\|\sum_{i\in J} f_i\right\| < \varepsilon$ *si* $J \subset I$*,* J *finito y* $J \cap J_0 = \emptyset$*.*

Teorema A.1.3. *Sea* E *un espacio de Banach. Una familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *de elementos de* E *es sumable si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy para la sumabilidad.*

Proposición A.1.4. *Sea* E *un espacio normado. Si* $\{f_i\}_{i\in I}$ *y* $\{g_i\}_{i\in I}$ *son familias sumables de elementos de* E *hacia* f *y* g *respectivamente, y* α *y* β *son escalares, entonces la familia* $\{\alpha f_i + \beta g_i\}_{i\in I}$ *es sumable hacia* $\alpha f + \beta g$*.*

Proposición A.1.5. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *una familia sumable. Si para cada* $J \subset I$ *finito se cumple que* $\|\sum_{i\in J} f_i\| \leq M$*, entonces* $\|\sum_{i\in I} f_i\| \leq M$*.*

Proposición A.1.6. *Sean* E *y* F *espacios normados sobre* $\mathbb{C}$ *y* T *una aplicación lineal y continua de* E *en* F*. Si* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es una familia sumable de elementos de* E*, entonces* $\{T(f_i)\}_{i\in I}$ *es sumable en* F *y además,*

$$\sum_{i\in I} T(f_i) = T(\sum_{i\in I} f_i). \tag{A.1}$$

Teorema A.1.7. *El espacio E es de Banach si, y sólo si, toda familia $\{f_i\}_{i\in I}$ de elementos de E absolutamente sumable es sumable.*

Para familias de números reales no negativos la sumabilidad es equivalente a que el conjunto de sumas finitas de dicha familia sea acotado, de manera similar al resultado de sumas parciales para series.

Proposición A.1.8. *Sea $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia de números reales no negativos. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$\{\alpha_i\}_{i\in I}$ es sumable.*
2. *El conjunto de las sumas finitas de elementos de la familia es acotado, es decir,*

$$\sup\Big\{\sum_{i\in J}\alpha_i : J\subset I, J \text{ finito}\Big\}<\infty. \tag{A.2}$$

En ese caso, se tiene que

$$\sum_{i\in I}\alpha_i=\sup\Big\{\sum_{i\in J}\alpha_i : J\subset I, J \text{ finito}\Big\}. \tag{A.3}$$

También incorporamos el siguiente resultado análogo a la fórmula de sumación por paquetes en series.

Teorema A.1.9. *Sea E un espacio de Banach, $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia sumable de elementos de E e $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una partición de I. Si $s_\lambda=\sum_{i\in I_\lambda}f_i$, la familia $\{s_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es sumable y*

$$\sum_{i\in I}f_i=\sum_{\lambda\in\Lambda}\Big(\sum_{i\in I_\lambda}f_i\Big)=\sum_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda. \tag{A.4}$$

Proposición A.1.10. *Sean $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de números reales positivos e $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una partición de I. Si la familia $\{f_i\}_{i\in I_\lambda}$ es sumable hacia s_λ y la familia $\{s_\lambda\}_{\lambda\in\lambda}$ es sumable hacia f, entonces la familia $\{f_i\}_{i\in I}$ es sumable hacia f.*

Proposición A.1.11. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia numerable de elementos de E. La familia $\{f_i\}_{i\in I}$ es absolutamente sumable si, y sólo si, existe una biyección $\sigma:\mathbb{N}\longrightarrow I$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}f_{\sigma(n)}$ es absolutamente convergente.*

Proposición A.1.12. *Sea E un espacio de Banach y F un espacio normado, ambos sobre el mismo cuerpo. Sea $\{T_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones lineales continuas de E en F. Se supone que para cada $f\in E$ la familia $\{T_i(f)\}_{i\in I}$ es sumable. Entonces, el operador T definido para cada $f\in E$ por $T(f)=\sum_{i\in I}T_i(f)$ es lineal y acotado.*

Proposición A.1.13. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia sumable de elemento de E. Entonces $f_i=0$ salvo para un conjunto numerable a lo más de índices.*

A.2. Teoría de la medida

Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ un σ-álgebra de subconjuntos de X. En [5], podemos encontrar la siguiente definición y proposición.

Definición A.2.1. *Una* medida positiva *sobre $\mathcal{A}$ es una función $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ tal que:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *μ es numerablemente aditiva, i.e, para cada sucesión de conjuntos disjuntos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{A}$ cuya unión está en $\mathcal{A}$ y verifica que*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Proposición A.2.2. *Sea μ una medida positiva en $\mathcal{A}$. Si la sucesión de conjuntos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ es descendente, es decir, si*

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

y $\mu(E_1) < \infty$, entonces

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

A.3. Transformada de Fourier

En esta parte, se muestran algunos resultados básicos [5] de la transformada de Fourier usados en el capítulo 4.

Definición A.3.1. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. La* transformada de Fourier *de f es la función dada por*

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ixt}dt,$$

si $x \in \mathbb{R}$.

También se denota a la transformada de Fourier de f como $\mathcal{F}f$.

La transformada de Fourier queda definida para funciones en $L^1(\mathbb{R})$. Ahora, como $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, el siguiente teorema muestra como establecer la transformada de Fourier para funciones en $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema A.3.2. *Para cada función $f \in L^2(\mathbb{R})$, existe una única función $\hat{f}$ que cumple que:*

1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f}$ es la función definida en A.3.1.*
2. *(Ecuación de Plancherel) Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\|f\| = \|\hat{f}\|$, donde la norma es la asociada a $L^2(\mathbb{R})$.*
3. *La aplicación que envía f en $\hat{f}$ es un isomorfismo de espacios de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$.*

Observe como la condición 2 del teorema anterior implica la continuidad de la transformada de Fourier.

Proposición A.3.3. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. *Si $g(t) = f(t)e^{-i\alpha t}$, entonces $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - \alpha)$.*
2. *Si $g(t) = f(t - \alpha)$, entonces $\hat{g}(x) = \hat{f}(x)e^{-i\alpha x}$.*
3. *Si $g(t) = f(t/\alpha)$ y $\alpha > 0$, entonces $\hat{g}(x) = \alpha\hat{f}(\alpha x)$.*

La siguiente proposición muestra como la transformada de Fourier del producto de convolución es el producto puntual de las transformadas de Fourier:

Proposición A.3.4. *Sean f, $g \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $h = f * g$ su producto de convolución. Entonces $h \in L^1(\mathbb{R})$ y se verifica que $\hat{h}(x) = \hat{f}(x)\hat{g}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Tran. Amer. Math. Soc. **72** p. 341-366 (1952).

[2] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases, Applied and Numerical Harmonic Analysis*, Springer Science and Business Media, (2003).

[3] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, Segunda edición, (1990).

[4] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I: Functional Analysis*, Academic Press, (1980).

[5] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Segunda edición, (1991).

[6] H. G. Heuser, *Functional Analysis*, A Wiley-Interscience, (1982).

[7] B.V. Limaye, *Functional Analysis*, New Age International, Tercera edición, (2017).

[8] A. Aldroubi, *Portraits of Frames*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995).

[9] R.M. Young, *An introduction to Nonharmonic Fourier series*, Academic Prees, (1980).

[10] P.G. Casazza, O. Christensen, *Frames and Schauder bases* en *Approximation Theory: In Memory of A. K. Varna*, p. 133-139 (1998).

[11] O. Christensen, A.M. Lidner, *Descompositions of wavelets and Riesz frames into a finite number of linearly independent sets*, Lin. Alg. and Its Appl. (2002).

[12] F. Galindo, J. Gómez, J. Sanz, L. A. Tristán, *Guía Práctica De variable compleja y Aplicaciones*, Universidad de Valladolid, (2019).

[13] O. Christensen, B. Deng, C. Heil, *Density of Gabor Frames*, Appl. Comp. Harm. Anal. **7** (1999).

[14] J.D. Pryce, *Basic Methods of Linear Functional Analysis*, Anchor Press (1973).

[15] G. Choquet, *Topology*, Academic Press, (1966).

ÍNDICE DE NOTACIÓN

$\mathcal{H}$	Espacio de Hilbert
span	Mínimo subespacio vectorial generado
a^*	Complejo conjugado del escalar a
$\ell^2(I)$	Espacio de familias con índices en I cuyo módulo al cuadrado es sumable
$\mathcal{F}\phi$, $\hat{\phi}$	Transformada de Fourier de la función ϕ
χ_A	Función característica del conjunto A
$\#A$	Cardinal del conjunto A
Id	Operador identidad
U^*	Operador adjunto del operador U
$U^\dagger$	Pseudo-inversa del operador U
$U^{1/2}$	Operador raíz del operador U
$U^{-1/2}$	Inverso del operador raíz del operador U
$\mathrm{Ker}(U)$	Núcleo del operador U
$\mathrm{Im}(U)$	Imagen del operador U
P_M	Proyección ortogonal sobre M
$M^\perp$	Conjunto ortogonal al subespacio M
Φ	Función característica de traslación