



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Teorema de Riemann-Roch para superficies de Riemann compactas

Autor: Juan Marcos Arranz Díez

Tutor: Jorge Mozo Fernández

Índice general

Introducción	1
1. Superficies de Riemann	3
1.1. Definiciones	3
1.2. Propiedades elementales de las aplicaciones holomorfas	9
1.3. El género de una superficie	12
1.4. Curvas algebraicas planas	15
1.5. Haces	26
1.6. Formas diferenciales	30
1.7. Integración de formas diferenciales	40
2. Cohomología	49
2.1. Grupos de cohomología	49
2.2. Lema de Dolbeault	55
2.3. Teorema de finitud	58
2.4. La sucesión exacta de cohomología	68
3. El Teorema de Riemann-Roch	74
3.1. El Teorema de Riemann-Roch	74
3.2. Teorema de Dualidad de Serre	79
A. Resultados topológicos	91
Bibliografía	97

Introducción

La noción del género de una superficie, desde un punto de vista topológico, fue tratada inicialmente por Riemann en 1857 [2]. Este reconoció que dicho número podía ser descrito analíticamente como el número de 1-formas diferenciales linealmente independientes sobre una superficie. Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar la equivalencia entre ambas nociones de género, lo cual lograremos a través de una de las formas más simples del Teorema de Riemann-Roch.

Este teorema es resultado clásico dentro de la teoría de las funciones complejas y la geometría algebraica. Fue planteado originalmente por Bernhard Riemann y su estudiante Gustav Roch dentro del estudio de funciones meromorfas definidas en una superficie con polos en ciertos puntos elegidos, con una primera demostración en 1865 [4]. Desde entonces el teorema ha recibido amplia atención a lo largo de los años, lo que ha permitido otorgarle diferentes interpretaciones generalizaciones por parte de matemáticos como Hirzebruch, Grothendieck, Atiyah y Singer.

En este trabajo presentamos una demostración para el caso de superficies de Riemann compactas. Para ello definiremos y desarrollaremos una serie de conceptos y herramientas que permitirán expresarlo con sencillez e interpretarlo. Algunos de ellos no habían sido definidos cuando el teorema se planteó: por ejemplo, la noción de haz no fue tratada la mitad del siglo XX, casi cien años después de la formulación original. El enfoque que emplearemos será entonces analítico en lugar de un tratamiento desde la geometría algebraica. Como veremos, toda curva algebraica plana puede considerarse como una superficie de Riemann; recíprocamente, existen resultados como el Teorema de Chow [5, pág. 167] que permiten tratar una superficie de Riemann como una variedad algebraica en un espacio proyectivo.

En el primer capítulo introducimos las superficies de Riemann y las herramientas básicas para trabajar con ellas. También presentamos la noción del género de una superficie y las curvas algebraicas planas, que nos ayudarán a interpretar parte del Teorema de Riemann-Roch.

A continuación definimos los grupos de cohomología, en términos de los cuales

enunciaremos el teorema, y probamos varios resultados técnicos que resultarán clave para su demostración.

En el tercer y último capítulo llevamos a cabo la prueba del Teorema de Riemann-Roch seguido por el Teorema de Dualidad de Serre, que ayudará a interpretarlo y enlazarlo con otros resultados vistos a lo largo del trabajo.

El apéndice contiene una serie de definiciones y proposiciones topológicas relativas a la teoría de recubrimientos los cuales no cabe incluir en el cuerpo del texto.

La mayor parte del trabajo se basa en el desarrollo realizado por Forster en *Lectures on Riemann Surfaces* [3], del cual se han incluido las secciones necesarias para demostrar el Teorema de Riemann-Roch junto con consultas complementarias a [9]. La conexión con las curvas algebraicas planas se ha realizado a partir de la obra de Kirwan, *Complex Algebraic Curves* [7] y para algunos resultados puntuales se hace referencia a [5], [6] y [8].

Capítulo 1

Superficies de Riemann

En este capítulo definiremos las superficies de Riemann, las cuales constituyen el objeto principal de esta memoria; concretaremos en qué sentido una función definida sobre ellas puede ser holomorfa o meromorfa y exploraremos algunas propiedades y resultados que se deducen de manera sencilla de estas definiciones. Comentaremos también el sentido topológico del género de una superficie y hablaremos de las curvas algebraicas planas, un caso particular especialmente relevante de superficies de Riemann que permiten enlazar esta noción de género con la que se definirá en el siguiente capítulo. A continuación definiremos el concepto de haz en un espacio topológico, que particularizaremos para las funciones y formas diferenciales definidas en una superficie de Riemann. Por último trataremos la integración de una forma diferencial, asentando así las bases necesarias para demostrar los resultados previos al Teorema de Riemann-Roch.

1.1. Definiciones

La definición de superficie de Riemann es similar a la de una variedad diferenciable, estando ambas descritas por un atlas o un conjunto de cartas locales. De hecho, debido a la identificación $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ y a que toda función holomorfa es diferenciable, las superficies de Riemann son un caso particular de variedades diferenciables de dimensión 2, estudiadas en las asignaturas de “Geometría de Curvas y Superficies” y “Ampliación de Análisis Matemático”. Veamos cómo se realiza esta construcción.

Definición 1.1.1. Una variedad n -dimensional es un espacio topológico X de Hausdorff tal que todo punto $p \in X$ posee un entorno abierto que es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 1.1.2. Sea X una variedad 2-dimensional. Una *carta compleja* en X es un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ de un abierto $U \subset X$ a un abierto $V \subset \mathbb{C}$. Dos cartas complejas $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i, i = 1, 2$ son *holomórficamente compatibles* si la aplicación

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \quad (\text{con } U_1 \cap U_2 \neq \emptyset)$$

es biholomorfa.

Definición 1.1.3. Un *atlas complejo* en X es un conjunto $\mathfrak{U} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ de cartas que son holomórficamente compatibles y recubren X , es decir, $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Dos atlas complejos \mathfrak{U} y \mathfrak{U}' son *analíticamente equivalentes* si toda carta de \mathfrak{U} es holomórficamente compatible con toda carta de \mathfrak{U}' .

Gracias a la definición de carta compleja es fácil ver que esta relación de equivalencia analítica es de equivalencia.

Definición 1.1.4. Una *estructura compleja* en una variedad 2-dimensional es una clase de equivalencia de atlas complejos analíticamente equivalentes.

Definición 1.1.5. Una *superficie de Riemann* es un par (X, Σ) , donde X es una variedad 2-dimensional conexa y Σ es una estructura compleja en X . Habitualmente nos referiremos a una superficie de Riemann simplemente por X cuando el contexto deje claro con qué estructura Σ se trabaja.

Para definir una estructura compleja Σ es suficiente con elegir un atlas complejo en X . Además, toda estructura compleja contiene un único atlas maximal \mathfrak{U}^* : dado un atlas \mathfrak{U} arbitrario en Σ , el atlas maximal \mathfrak{U}^* consiste en todas las cartas complejas en X que son holomórficamente compatibles con todas las cartas de \mathfrak{U} . Cuando hablemos de una carta en una superficie de Riemann (X, Σ) nos referiremos a una que pertenezca al atlas maximal de la estructura compleja Σ .

Ejemplo 1.1.6. Veamos algunos ejemplos de superficies de Riemann:

- El plano complejo \mathbb{C} puede considerarse una superficie de Riemann con un atlas que contiene la aplicación identidad como única carta.
- Si X es una superficie de Riemann e $Y \subset X$ es un subconjunto abierto y conexo, Y obtiene de forma natural una estructura compleja considerando el atlas de todas las cartas $\varphi : U \rightarrow V$ que verifican $U \subset Y$.
- La esfera de Riemann, \mathbb{P}^1 , puede construirse como la compactificación de Alexandroff de \mathbb{C} , $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (∞ es un elemento no contenido en \mathbb{C}), con una topología formada por los abiertos $U \subset \mathbb{C}$ y los conjuntos del tipo $V \cup \{\infty\}$, donde V es el complementario de un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Con esta topología \mathbb{P}^1 es un espacio topológico compacto y de Hausdorff,

y es homeomorfo a la esfera $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. De forma equivalente podría considerarse \mathbb{P}^1 como la recta proyectiva compleja.

Construyamos ahora un atlas. Sean los abiertos

$$U_1 := \mathbb{P}^1 - \{\infty\} = \mathbb{C}, \quad U_2 := \mathbb{P}^1 - \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$$

y definamos $\varphi_1 = \text{id} : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ y

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi_2(z) = \begin{cases} 1/z & \text{para } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{para } z = \infty. \end{cases}$$

Estas aplicaciones son homeomorfismos y prueban que \mathbb{P}^1 es una 2-variedad. Además, como $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ y ambos son conexos, \mathbb{P}^1 también lo es. Basta comprobar que φ_1 y φ_2 son holomórficamente compatibles para que constituyan un atlas. Pero esto es trivial, ya que $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ y

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = 1/z.$$

- El toro también es una superficie de Riemann. Sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Definimos el retículo

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

y diremos que dos números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ son equivalentes módulo Γ si $z_1 - z_2 \in \Gamma$. El conjunto de todas las clases de equivalencia se denota por \mathbb{C}/Γ , y sea $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ la proyección canónica que envía cada elemento en su clase de equivalencia. Con la topología cociente ($U \subset \mathbb{C}/\Gamma$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ es abierto) \mathbb{C}/Γ es un espacio topológico de Hausdorff y la aplicación cociente π es continua. \mathbb{C}/Γ es conexo por serlo \mathbb{C} y también es compacto al estar cubierto por la imagen bajo π del paralelogramo compacto

$$P := \{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \mid \lambda, \mu \in [0, 1]\}.$$

La aplicación π es abierta: dado $V \subset \mathbb{C}$ abierto resulta que

$$\tilde{V} = \pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in \Gamma} (\omega + V)$$

es abierto al ser todos los $\omega + V$ abiertos.

Definamos ahora una estructura compleja en \mathbb{C}/Γ . Sea $V \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que no haya dos puntos de V que sean equivalentes módulo Γ . Entonces $U := \pi(V)$ es abierto y $\pi|_V : V \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Su inversa $\varphi : U \rightarrow V$ es

una carta compleja en \mathbb{C}/Γ . Sea \mathfrak{U} el conjunto de todas las cartas definidas de esta manera y escojamos dos de ellas cualesquiera, $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i, i = 1, 2$ con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Veamos que son holomórficamente compatibles, para lo cual consideramos

$$\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2).$$

Para todo $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ se tiene que $\pi(\psi(z)) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z)$ y por lo tanto $\psi(z) - z \in \Gamma$. Por ser Γ discreto y ψ continua, $\psi(z) - z$ es continua en toda componente conexa de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$, por lo que ψ es holomorfa. De forma análoga se demuestra que ψ^{-1} también es holomorfa, pudiendo así definir una estructura compleja en \mathbb{C}/Γ a partir del atlas \mathfrak{U} .

Para ver que efectivamente \mathbb{C}/Γ es un toro, consideremos la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. La aplicación que envía el punto de \mathbb{C}/Γ representado por $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en

$$(e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\mu}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

es un homeomorfismo $\mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, y por el Teorema A.5 del Apéndice se hereda en $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ una estructura compleja.

Habiendo definido las superficies de Riemann, ahora pasamos a definir funciones en ellas y entre ellas.

Definición 1.1.7. Sea X una superficie de Riemann y sea $Y \subset X$ abierto. Una función $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina *holomorfa* si para toda carta $\varphi : U \rightarrow V$ en X la función

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap Y) \rightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa en el sentido habitual de un abierto en \mathbb{C} . El conjunto de todas las funciones holomorfas en Y se denotará por $\mathcal{O}(Y)$. Es fácil comprobar que $\mathcal{O}(Y)$ tiene estructura de \mathbb{C} -álgebra con la suma y producto de funciones.

En particular, toda carta $\varphi : U \rightarrow V$ en X es holomorfa. Debido al papel que juegan en la definición anterior a una carta φ también la llamaremos coordenada local, y nos referiremos a (U, φ) como un entorno coordenado. En estos casos suele utilizarse la letra z en lugar de φ .

La definición de funciones holomorfas en una superficie de Riemann permite trasladar a estas un gran número de resultados de análisis complejo en \mathbb{C} y estudiadas en la asignatura “Variable Compleja”, pero todas las propiedades traídas desde el plano complejo deben ser invariantes ante transformaciones biholomorfas, o lo que es lo mismo, no deben depender de la carta elegida. El siguiente es uno de estos resultados.

Teorema 1.1.8 (de singularidades evitables de Riemann). *Sea U un abierto de una superficie de Riemann y sea $a \in U$. Supongamos que la función $f \in \mathcal{O}(U - \{a\})$ está acotada en algún entorno de a . Entonces f puede extenderse de forma única a una función $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$.*

Demostración. Tomamos una carta compleja $\varphi : U_1 \rightarrow V_1$ de forma que $U_1 \subset U$ sea un entorno abierto de a en el que además f está acotada. Entonces

$$f \circ \varphi^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

es una función holomorfa y está acotada en el subconjunto $V_1 - \{\varphi(a)\} \subset \mathbb{C}$, luego por el Teorema de singularidades evitables en el plano complejo podemos extender esta función a $g \in \mathcal{O}(V_1)$. Ahora podemos extender f por la función

$$\tilde{f} = g \circ \varphi \in \mathcal{O}(U_1), \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} (g \circ \varphi)(a) & \text{si } z = a \\ f(z) & \text{si } z \in U_1 - \{a\} \end{cases}$$

Esta definición no depende de la elección de carta. □

También es posible definir funciones holomorfas entre dos superficies de Riemann.

Definición 1.1.9. Sean X e Y dos superficies de Riemann. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ se denomina *holomorfa* si para cada par de cartas $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en X y $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ en Y con $f(U_1) \subset U_2$, entonces la aplicación

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V_2$$

es holomorfa en el sentido habitual.

Una función $f : X \rightarrow Y$ es *biholomorfa* si es biyectiva y tanto $f : X \rightarrow Y$ como $f^{-1} : Y \rightarrow X$ son holomorfas. Dos superficies de Riemann son *isomorfas* si existe una aplicación biholomorfa entre ellas.

Teorema 1.1.10 (de Identidad). *Sean X e Y dos superficies de Riemann y $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ dos funciones holomorfas que coinciden en un conjunto $A \subset X$ con un punto de acumulación $a \in X$. Entonces $f_1 = f_2$.*

Demostración. Sea Z el conjunto de puntos $x \in X$ que tienen un entorno abierto W tal que $f_1|_W = f_2|_W$. Por definición Z es abierto.

Veamos que también es cerrado. Sea b un punto de la frontera de Z . Entonces $f_1(b) = f_2(b)$ por ser f_1 y f_2 continuas. Elegimos cartas $\varphi : U \rightarrow V$ en X y

$\psi : U' \rightarrow V'$ en Y con $b \in U$ y $f_i(U) \subset U', i = 1, 2$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que U es conexo. Las aplicaciones

$$g_i := \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V' \subset \mathbb{C}, \quad i = 1, 2$$

son holomorfas. Como $U \cap Z \neq \emptyset$, el Teorema de Identidad para funciones holomorfas en dominios de \mathbb{C} implica que g_1 y g_2 son idénticamente iguales. Entonces $f_1|_U = f_2|_U$, lo que implica que $b \in Z$ y por tanto Z es cerrado. Por ser X conexo, o bien $Z = \emptyset$ o bien $Z = X$. Ahora bien, no puede ocurrir que sea vacío ya que $a \in Z$ usando de nuevo el Teorema de Identidad en \mathbb{C} . Entonces f_1 y f_2 coinciden en X . \square

Definición 1.1.11. Sea X una superficie de Riemann y sea $Y \subset X$ abierto. Una función *meromorfa* en Y es una función holomorfa $f : Y' \rightarrow \mathbb{C}$, donde $Y' \subset Y$ es un abierto tal que:

- (a) $Y - Y'$ contiene únicamente puntos aislados.
- (b) Para cada punto $p \in Y - Y'$ se tiene

$$\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty.$$

Los puntos de $Y - Y'$ se llaman los *polos* de f . El conjunto de todas las funciones meromorfas en Y se denota por $\mathcal{M}(Y)$, que de nuevo posee estructura de \mathbb{C} -álgebra.

Las funciones meromorfas pueden interpretarse como funciones holomorfas que llegan a la esfera de Riemann, y así las consideraremos gracias al siguiente resultado.

Proposición 1.1.12. *Sea X una superficie de Riemann y $f \in \mathcal{M}(X)$. Para cada polo p de f definimos $f(p) := \infty$. Entonces $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ es holomorfa. Recíprocamente, si $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ es holomorfa, entonces f es o bien idénticamente ∞ o bien $f^{-1}(\infty)$ es un conjunto de puntos aislados y $f : X \setminus f^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, es decir, es una función meromorfa en X .*

Demostración.

- (a) Sea $f \in \mathcal{M}(X)$ y sea P el conjunto de polos de f . Entonces f induce una aplicación $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, que en particular será continua. Supongamos que $\varphi : U \rightarrow V, \psi : U' \rightarrow V'$ son cartas en X y \mathbb{P}^1 respectivamente con $f(U) \subset U'$. Queremos demostrar que $g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$ es holomorfa. Como f es holomorfa en $X - P$, se sigue que g es holomorfa en $V - \varphi(P)$. Aplicando el Teorema de singularidades evitables 1.1.8, g es holomorfa en todo V .

(b) El recíproco se sigue del Teorema de Identidad 1.1.10.

□

1.2. Propiedades elementales de las aplicaciones holomorfas

Ahora estudiaremos algunas propiedades topológicas básicas de las funciones holomorfas entre superficies de Riemann y demostraremos a partir de ellas resultados famosos dentro del análisis complejo.

Proposición 1.2.1 (Comportamiento local de las aplicaciones holomorfas). *Sean X e Y superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante. Sea $a \in X$ y $b := f(a)$. Entonces existe un entero $k \geq 1$ y cartas $\varphi : U \rightarrow V$ en X y $\psi : U' \rightarrow V'$ en Y con las siguientes propiedades:*

(a) $a \in U, \varphi(a) = 0$ y $b \in U', \psi(b) = 0$.

(b) $f(U) \subset U'$.

(c) La aplicación $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow V'$ se escribe como

$$F(z) = z^k \quad \text{para todo } z \in V.$$

Demostración. La existencia de cartas $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ (que luego modificaremos para obtener φ) y $\psi : U' \rightarrow V'$ que verifiquen (a) y (b) es trivial. Del Teorema de Identidad 1.1.10 se tiene que

$$f_1 := \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow V' \subset \mathbb{C}$$

es no constante. Como $f_1(0) = 0$ existirá un $k \geq 1$ entero con $f_1(z) = z^k g(z)$, siendo g una función holomorfa que no se anula en un entorno V_1 del cero. Esta función tiene entonces una raíz k -ésima

$$h := \sqrt[k]{g} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

Como $h(0) \neq 0$ la función

$$\alpha : V_1 \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \alpha(z) = zh(z)$$

es, gracias al Teorema de la Función Inversa, localmente biholomorfa en un entorno $V_2 \subset V_1$ del cero. De esta forma, la restricción $\alpha : V_2 \rightarrow V = \alpha(V_2)$ es un biholomorfismo entre V_2 y V , ambos entornos del cero.

Definamos $U = \varphi_1^{-1}(V_2)$. Reemplazando φ_1 por $\varphi = \alpha \circ (\varphi_1|_U) : U \rightarrow V$ obtenemos otra carta que verifica (a) y (b). Entonces la función

$$F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = f_1 \circ \alpha^{-1}$$

cumple que

$$F(z) = f_1(\alpha^{-1}(z)) = f_1(w) = (wh(w))^k = z^k$$

para $z = \alpha(w) = wh(w) \in V$. \square

El número k , que recibe el nombre de *multiplicidad de f en a* , tiene el siguiente significado: para todo entorno U_0 de a existen entornos $U \subset U_0$ de a y W de $b = f(a)$ tales que el conjunto $f^{-1}(y) \cap U$ tiene exactamente k elementos para todo $y \in W - \{b\}$.

Corolario 1.2.2. Sean X e Y superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante. Entonces f es abierta.

Demostración. De la Proposición 1.2.1 se sigue que si U es entorno de un punto $a \in X$ entonces $f(U)$ es entorno de $f(a)$, lo cual implica que f es abierta. \square

Corolario 1.2.3. Sean X e Y superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa e inyectiva. Entonces f es una función biholomorfa de X en Y .

Demostración. Como f es inyectiva, para la descripción local de f dada por el Teorema 1.2.1 siempre se tiene $k = 1$. Entonces la función inversa $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ es holomorfa. \square

Corolario 1.2.4 (Principio del máximo). Sea X una superficie de Riemann y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante. Entonces el valor absoluto de f nunca alcanza su máximo.

Demostración. Supongamos que de hecho existe $a \in X$ tal que

$$R := |f(a)| = \sup\{|f(x)|, x \in X\}.$$

Entonces

$$f(X) \subset K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\},$$

y como $f(X)$ es abierto estará contenido en el interior de K , contradiciendo la suposición de que $f(a) \in \partial K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. \square

Proposición 1.2.5. Sean X e Y superficies de Riemann. Supongamos que X es compacta y que $f : X \rightarrow Y$ es una función holomorfa no constante. Entonces Y es compacta y f es sobreyectiva.

Demostración. El Corolario 1.2.2 afirma que $f(X)$ es abierto. Por ser X compacta también lo es $f(X)$, y en particular es cerrada. Como Y es conexo, los únicos subespacios suyos que son abiertos y cerrados son el vacío y el total. Entonces $f(X) = Y$, por lo que Y es compacta y f es sobreyectiva. \square

Corolario 1.2.6. *Toda función holomorfa en una superficie de Riemann compacta es constante.*

Demostración. Se sigue de 1.2.5 ya que \mathbb{C} no es compacto. \square

Corolario 1.2.7. *Toda función meromorfa en \mathbb{P}^1 es racional, es decir, puede escribirse como el cociente de dos polinomios.*

Demostración. La función f tiene un número finito de polos, pues de no ser así sería idénticamente ∞ . Supongamos que ∞ no es un polo de f . De no ser así, sumando una constante $c \in \mathbb{C}$ adecuada e invirtiendo, $1/(f+c)$ no tendrá un polo en ∞ . Sean a_1, \dots, a_n los polos de f y

$$h_s(z) = \sum_{j=-k_s}^{-1} c_{sj}(z - a_s)^j$$

la parte principal de f en el polo a_s . Entonces $g := f - (h_1 + \dots + h_n)$ es holomorfa en \mathbb{P}^1 y por lo tanto constante debido al Corolario 1.2.6. De esto se sigue que f es una función racional. \square

Veamos ahora dos resultados clásicos del análisis complejo que podemos demostrar de forma sencilla.

Teorema 1.2.8 (de Liouville). *Toda función holomorfa acotada $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es constante.*

Demostración. Por el Teorema de las singularidades evitables de Riemann 1.1.8 podemos continuar a f de forma holomorfa a $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$. Por el Corolario 1.2.6 f es constante. \square

Teorema 1.2.9 (Fundamental del Álgebra). *Sea $n \geq 1$ entero y sea*

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$$

un polinomio con coeficientes en \mathbb{C} . Entonces existe al menos un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$.

Demostración. El polinomio f puede considerarse como una aplicación holomorfa $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ considerando que $f(\infty) = \infty$. Aplicando la Proposición 1.2.5 esta aplicación es sobreyectiva y por lo tanto $0 \in f(\mathbb{C})$. \square

1.3. El género de una superficie

El estudio desarrollado en torno a las superficies, es decir, variedades de dimensión 2, es mucho más amplio que el conocimiento que se posee sobre las variedades de dimensión superior a 2. Uno de los resultados que muestran esta diferencia es el teorema de clasificación de superficies compactas y conexas, que determina cómo construir cualquier superficie de estas características. Acompañando a este teorema es posible definir invariantes que caracterizan a las superficies y permiten determinar de forma sencilla si dos de ellas son homeomorfas.

Teorema 1.3.1 (de clasificación de superficies compactas). *Toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a una de las siguientes superficies:*

- una esfera,
- una suma conexa de toros, o
- una suma conexa de planos proyectivos.

En particular, una superficie orientable nunca puede ser homeomorfa a una suma conexa de planos proyectivos.

Para el caso de las superficies de Riemann, la estructura compleja define una orientación sobre ella. En lo siguiente consideraremos superficies orientables, pero también existen resultados análogos para las no orientables.

La demostración de este teorema queda más allá del objetivo de este trabajo y puede encontrarse en el texto de Massey [8, Teorema 5.1], que asume la existencia de una triangulación. Sin embargo, cabe comentar ciertos aspectos acerca de ella:

- Es ilustrativo describir lo que se considera como la *forma canónica* de una suma conexa de toros, que se resume en la Figura 1.1. Para ello representaremos a dos toros disjuntos τ_1 y τ_2 como cuadrados con sus lados opuestos identificados. A continuación debemos “recortar un agujero” en cada toro, por ejemplo como se muestra en la Figura 1.1 (a). Si c_1 y c_2 son los bordes de estos agujeros nos quedaremos con los pentágonos resultantes de tomar el complementario de la región que delimitan los bordes, tal y como se representa en la Figura 1.1 (b). Por último se identifican los segmentos c_1 y c_2 , obteniendo así el octógono de la Figura 1.1 (c). Este octógono con aristas identificadas a pares y los ocho vértices identificados en un solo punto es la

“forma canónica” de la suma conexa de dos toros. Repitiendo el proceso se demuestra que la suma conexa de n toros es homeomorfa al espacio cociente de un polígono de $4n$ lados cuyas aristas están identificadas a pares de una forma específica.

- Uno de los pasos clave en la demostración del teorema es la *triangulación* de la superficie, que de forma informal podemos definir de la siguiente manera: una triangulación de una superficie compacta S consiste en una familia finita de conjuntos cerrados $\{T_1, \dots, T_n\}$ que recubren S y una familia de homeomorfismos $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i, i = 1, \dots, n$, donde cada T'_i es un triángulo en \mathbb{R}^2 , es decir, es un conjunto compacto de \mathbb{R}^2 cuya frontera está formada por tres segmentos rectos distintos. A los T_i también se los llama triángulos y las imágenes a través de los homeomorfismos de los vértices y aristas de T'_i reciben el mismo nombre. Por último, se requiere que dos triángulos distintos T_i y T_j sean disjuntos, tengan un único vértice en común o compartan una de sus aristas. Se denota por V , E y F a sus conjuntos de vértices, aristas y caras, respectivamente.

El siguiente es uno de los invariantes que caracteriza a una superficie compacta:

Definición 1.3.2. La característica de Euler de una superficie X se define como

$$\chi(X) = |V| - |E| + |F|.$$

Una esfera tiene característica de Euler $\chi = 2$, mientras que para una suma conexa de n toros se tiene $\chi = 2 - 2n$ [8, Proposición 8.1]. Puede demostrarse que el valor de χ depende únicamente de la superficie a la que se refiere y no de la triangulación elegida, por lo que está bien definida y permite determinar si dos superficies son homeomorfas o no.

Para cerrar esta sección definiremos la noción del género de una superficie, lo que informalmente podría considerarse como el número de *agujeros* o *asas* que tiene.

Existen definiciones de género diferentes de la dada a continuación, que es el género topológico. Más adelante daremos otra definición de género, demostrando al final del trabajo que de hecho ambas coinciden.

Definición 1.3.3. Se dice que una superficie compacta y conexa tiene *género* g_τ con valor igual a n si es una suma conexa de n toros o n planos proyectivos. Si es una esfera entonces su género es 0. Para el caso de superficies orientables tenemos la relación

$$g_\tau = \frac{1}{2}(2 - \chi).$$

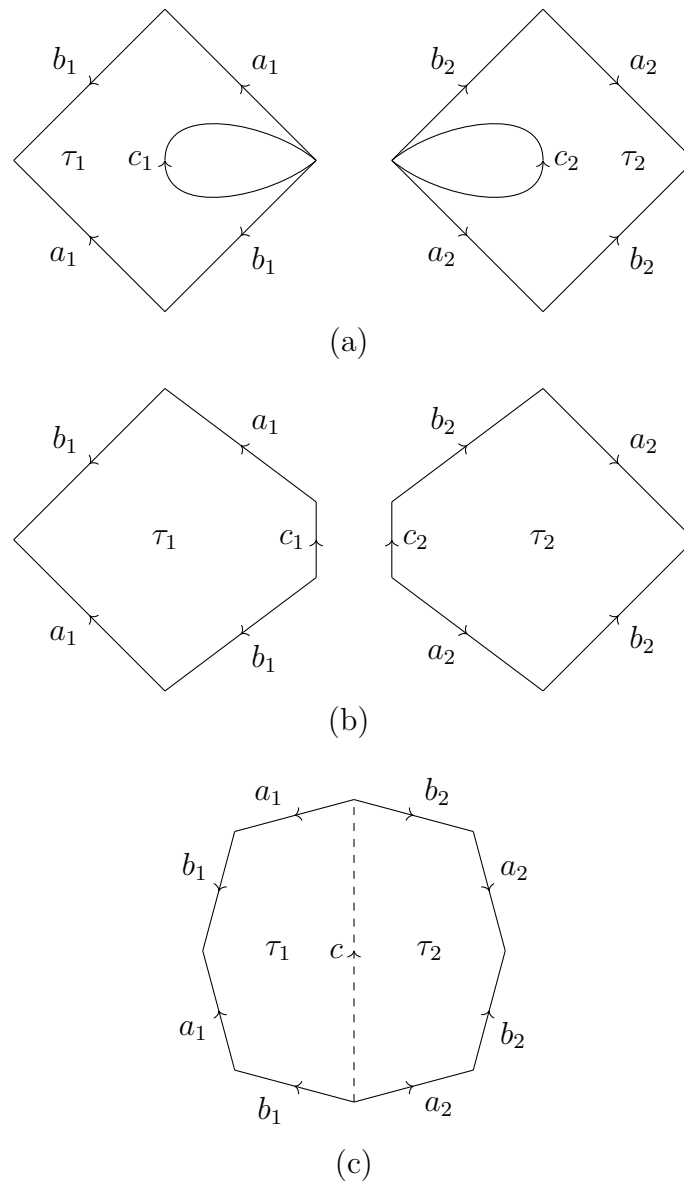


Figura 1.1: Suma conexa de dos toros. (a) Dos toros τ_1 y τ_2 disjuntos. (b) Toros disjuntos con agujeros recortados. (c) Resultado tras pegar.

1.4. Curvas algebraicas planas

Esta sección trata un subconjunto de las llamadas variedades algebraicas, el conjunto de ceros de una colección de polinomios dada. Algunas de las definiciones y resultados aquí mencionados son tratados en la asignatura optativa “Curvas Algebraicas”, que el autor no ha tenido la oportunidad de cursar. Nuestro objetivo aquí es dar las definiciones y demostrar las proposiciones más relevantes dentro de este trabajo; otros resultados, como el clásico Teorema de Bézout, son utilizados sin demostración.

Recordemos que el plano proyectivo complejo \mathbb{P}^2 es el conjunto de subespacios vectoriales de dimensión 1 de \mathbb{C}^3 . Con la notación habitual para espacios proyectivos, escribimos

$$\mathbb{P}^2 = \{[x, y, z] \mid (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 - \{0\}\}.$$

El plano proyectivo recibe una topología cociente inducida por la de $\mathbb{C}^3 - \{0\}$ y con ella resulta ser compacto.

Proposición 1.4.1. *El espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^n es compacto.*

Demostración. Sea

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

la esfera de dimensión real $2n + 1$, que es compacta por ser un conjunto cerrado y acotado de \mathbb{C}^{n+1} . La aplicación

$$\Pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad (z_0, \dots, z_n) \mapsto [z_0, \dots, z_n]$$

restringida a \mathbb{S}^{2n+1} es continua, luego $\Pi(\mathbb{S}^{2n+1})$ es compacto. Para ver que esta restricción es sobreyectiva, consideramos $[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n$, tal que definiendo

$$\lambda = |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 > 0$$

tenemos que $[z_0, \dots, z_n] = [\lambda^{-1/2}z_0, \dots, \lambda^{-1/2}z_n]$ y

$$|\lambda^{-1/2}z_0|^2 + \dots + |\lambda^{-1/2}z_n|^2 = 1,$$

luego $[z_0, \dots, z_n] \in \Pi(\mathbb{S}^{2n+1})$, probando así el resultado. \square

Por otro lado, un polinomio $P(x, y, z)$ es *homogéneo* de grado d si

$$P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definición 1.4.2. Sea $P(x, y, z)$ un polinomio no constante homogéneo con coeficientes complejos sin factores repetidos, es decir, no podemos escribir $P(x, y, z) = (Q(x, y, z))^2 R(x, y, z)$ donde Q y R son polinomios y Q es no constante. Entonces una *curva algebraica proyectiva plana* C definida por $P(x, y, z)$ es

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid P(x, y, z) = 0\}.$$

Esta definición es independiente de la elección de coordenadas (x, y, z) gracias a que P es homogéneo.

Definición 1.4.3. El *grado* de una curva proyectiva en \mathbb{P}^2 es el grado del polinomio homogéneo que la define.

Definición 1.4.4. Un punto $[a, b, c]$ de una curva proyectiva C definida por P se llama *singular* si

$$\frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0.$$

Una curva C se llama *no singular* si no posee ningún punto singular. En particular, C siempre es conexa.

A partir de ahora nos centraremos en curvas algebraicas planas no singulares. Como subconjunto de \mathbb{P}^2 , una curva proyectiva plana hereda su topología y en particular también será compacta. Teniendo esto en cuenta vamos a dotar a estas curvas una estructura de superficie de Riemann.

Proposición 1.4.5. Si C es una curva proyectiva en \mathbb{P}^2 no singular definida por un polinomio $P(x, y, z)$ entonces posee un atlas complejo.

Demostración. Sea $[a, b, c] \in C$, luego $P(a, b, c) = 0$, y supongamos que la derivada $\frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) \neq 0$. Por la relación de Euler para polinomios homogéneos

$$a \frac{\partial P}{\partial x}(a, b, c) + b \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) + c \frac{\partial P}{\partial z}(a, b, c) = 0.$$

Si $a = c = 0$ esto implicaría que $b = 0$, imposible por la definición de \mathbb{P}^2 . Podemos suponer entonces sin pérdida de generalidad que $c \neq 0$. Si d es el grado de P , por ser homogéneo se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(a/c, b/c, 1) = c^{-(d-1)} \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c) \neq 0.$$

El Teorema de la función implícita [5, pág. 19] aplicado a $P(x, y, 1)$ como polinomio con variables x e y dice que existen entornos abiertos V de a/c y W de b/c en \mathbb{C} y una función holomorfa $h : V \rightarrow W$ tal que si $x \in V$ e $y \in W$ entonces

$$P(x, y, 1) = 0 \iff y = h(x).$$

El conjunto

$$\begin{aligned} U &:= \{[x, y, z] \in C \mid z \neq 0, x/z \in V, y/z \in W\} \\ &= \{[x, y, 1] \in C \mid x \in V, y \in W\} \end{aligned}$$

es un entorno abierto de $[a, b, c]$ en C y la aplicación

$$\varphi : U \rightarrow V, \quad \varphi([x, y, z]) = x/z$$

es un homeomorfismo con función inversa $\varphi^{-1}(\xi) = [\xi, h(\xi), 1]$.

De forma similar, elegido $[a, b, c] \in C$ y considerando todas las combinaciones en las que una de las tres derivadas parciales de P son no nulas y una de las tres coordenadas homogéneas a, b o c son no nulas, obtenemos seis homeomorfismos $\varphi : U \rightarrow V$ con U entorno de $[a, b, c]$ y abierto en C y V abierto de \mathbb{C} , tal que $\varphi[x, y, z]$ es uno de

$$\frac{x}{z}, \frac{z}{x}, \frac{y}{z}, \frac{z}{y}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$$

y su inversa es de la forma

$$\xi \mapsto [\xi, h(\xi), 1], [1, h(\xi), \xi], [h(\xi), \xi, 1], [h(\xi), 1, \xi], [\xi, 1, h(\xi)], [1, \xi, h(\xi)]$$

siendo $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa (distinta en cada caso y definida por el Teorema de la función implícita). Esto nos permite obtener un atlas en C formado por las seis cartas anteriores, ya que se verifica que si φ, ψ son dos de estas cartas, tenemos seis combinaciones $\varphi \circ \psi^{-1}$ posibles:

$$\xi \mapsto \xi, \frac{1}{\xi}, h(\xi), \frac{1}{h(\xi)}, \frac{\xi}{h(\xi)}, \frac{h(\xi)}{\xi}.$$

Cada una de estas composiciones está definida en un dominio en el que h es holomorfa y los denominadores no se anulan, por lo que son holomorfas y constituyen un atlas complejo. \square

Para finalizar esta sección probaremos la *fórmula género-grado*, que relaciona el género de una superficie de Riemann definida por una curva algebraica plana con su grado y es un caso particular de la fórmula de Riemann-Hurwitz 3.2.15 que veremos más adelante. La demostración consiste en mostrar que una curva algebraica plana puede considerarse, tras quitar una cantidad finita de sus puntos, como un recubrimiento de la esfera de Riemann \mathbb{P}^1 . Esto permitirá construir una triangulación de la curva a partir de una triangulación dada de la esfera y así una relación entre sus géneros. De forma resumida, tomaremos un punto ajeno a la curva y “proyectaremos” a la curva en $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$ desde él. Resulta que una

recta que pase por este punto cortará a la curva en un total de d puntos (que tendrán la misma proyección en \mathbb{P}^1) salvo en un número finito de ocasiones, donde la recta resultará ser “tangente” a la curva, cortándola en los llamados puntos de ramificación.

Sea C una curva algebraica plana no singular definida por un polinomio homogéneo $P(x, y, z)$ de grado $d > 1$. Aplicando una proyectividad adecuada podemos suponer que $[0, 1, 0] \notin C$, de forma que tenemos una aplicación bien definida

$$\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad \phi[x, y, z] = [x, z].$$

Definición 1.4.6. El índice de ramificación $\nu_\phi[a, b, c]$ de ϕ en un punto $[a, b, c] \in C$ es el orden del cero del polinomio $P(a, y, c)$ cuando $y = b$. El punto $[a, b, c]$ se denomina *punto de ramificación* de ϕ si $\nu_\phi[a, b, c] > 1$.

Es inmediato comprobar que $\nu_\phi[a, b, c] > 0$ si y sólo si $[a, b, c] \in C$ y que $\nu_\phi > 1$ si y sólo si

$$P(a, b, c) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(a, b, c).$$

Como $[0, 1, 0] \notin C$, la ecuación

$$P(x, y, 1) = 0$$

define y como una *función multivaluada* de x de forma que, para cada valor $x \in \mathbb{C}$ tal que $[x, y, 1]$ no sea un punto de ramificación, existen exactamente d valores de y que verifiquen la relación. El valor “ $x = \infty$ ” haría referencia a un punto de ramificación si existe y tal que

$$P(1, y, 0) = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}(1, y, 0).$$

Lema 1.4.7. La imagen inversa $\phi^{-1}([a, c])$ de un punto $[a, c] \in \mathbb{P}^1$ contiene exactamente

$$d - \sum_{p \in \phi^{-1}([a, c])} (\nu_\phi(p) - 1)$$

puntos. En particular tendrá d puntos si y sólo si la imagen inversa no contiene ningún punto de ramificación.

Demostración. Un punto $[a, b, c]$ de C pertenece a $\phi^{-1}([a, c])$ si y sólo si verifica que $P(a, b, c) = 0$. Por suposición $[0, 1, 0] \notin C$ y por tanto $P(0, 1, 0) \neq 0$. Sin

pérdida de generalidad supondremos que $P(0, 1, 0) = 1$, de forma que $P(a, y, c)$ es un polinomio mónico de grado d en y y puede escribirse como

$$P(a, y, c) = \prod_{1 \leq i \leq r} (y - b_i)^{m_i}$$

donde b_1, \dots, b_r son números complejos distintos dos a dos y m_1, \dots, m_r son números naturales tales que

$$m_1 + \dots + m_r = d.$$

Entonces

$$\phi^{-1}([a, c]) = \{[a, b_i, c] \mid 1 \leq i \leq r\}$$

y el índice de ramificación de ϕ en $[a, b_i, c]$ es $\nu_\phi[a, b_i, c] = m_i$, de lo cual se sigue el resultado. \square

Definición 1.4.8. Sea R el conjunto de puntos de ramificación de ϕ . La imagen $\phi(R)$ se denomina *locus de ramificación* de ϕ .

La aplicación $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ recibe el nombre de *recubrimiento ramificado* de \mathbb{P}^1 , pues $\phi : C - R \rightarrow \mathbb{P}^1 - \phi(R)$ resulta ser un recubrimiento de d hojas, donde d es el grado del polinomio que define a la curva C . Los detalles de estas definiciones y afirmaciones pueden consultarse en el apéndice.

Lema 1.4.9. (a) ϕ tiene a lo sumo $d(d-1)$ puntos de ramificación.

(b) Si $\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$ para todo $[a, b, c] \in C$ entonces ϕ tiene exactamente $d(d-1)$ puntos de ramificación.

Demostración. Como C es no singular, es irreducible [7, Corollary 3.10], y como $[0, 1, 0] \notin C$ el coeficiente $P(0, 1, 0)$ de y^d en el polinomio $P(x, y, z)$ es no nulo. Entonces el polinomio homogéneo

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z)$$

no es idénticamente nulo y es de grado $d-1$, luego no puede ser divisible por $P(x, y, z)$. El Teorema de Bézout en su versión débil [7, Teorema 3.9] permite deducir (a) al considerar la curva proyectiva D de grado $d-1$ definida por este polinomio, siendo R la intersección de C y D .

Supongamos ahora que $\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$ para todo $[a, b, c] \in C$. Como consecuencia del Teorema de Bézout en su versión fuerte [7, Corolario 3.25] basta mostrar que si $[a, b, c]$ pertenece a $R = C \cap D$ entonces $[a, b, c]$ es un punto no singular de D y que las tangentes a C y D en $[a, b, c]$ son distintas. De no ser así entonces

$$P(a, b, c) = 0 = P_y(a, b, c)$$

(el subíndice y representa la derivada parcial de P respecto de y) y los vectores que definen a las rectas tangentes en $[a, b, c]$ de D y C respectivamente,

$$u_D = (P_{xy}(a, b, c), P_{yy}(a, b, c), P_{zy}(a, b, c))$$

$$u_C = (P_x(a, b, c), P_y(a, b, c), P_z(a, b, c)),$$

son tales que u_D es o bien nulo o un múltiplo escalar de u_C . Pero entonces

$$P(a, b, c) = 0 = P_y(a, b, c) = P_{yy}(a, b, c)$$

llegando a una contradicción, pues esto implica que $\nu_\phi[a, b, c] > 2$. \square

Lema 1.4.10. *Aplicando una proyectividad adecuada a C podemos suponer que*

$$\nu_\phi[a, b, c] \leq 2$$

para todo $[a, b, c] \in C$.

Demostración. Puede probarse [7, Proposición 3.33] que C tiene un número finito de *puntos de inflexión*, es decir, la matriz hessiana de P tiene determinante nulo en un número finito de puntos. Resulta que el conjunto de puntos de inflexión de C con tangente que contiene a $[0, 1, 0]$ son precisamente aquellos que cumplen $\nu_\phi[a, b, c] > 2$ [7, Observación 4.4(iii)]. Una proyectividad adecuada permite suponer que $[0, 1, 0]$ no pertenece a C ni a las tangentes a C por sus puntos de inflexión. \square

Estos resultados nos permitirán demostrar la fórmula género-grado

$$g_\tau = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Antes de hacerlo debemos dar una definición de triangulación más formal que la vista en la sección anterior. Sean

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 1 \leq 1\},$$

$$\Delta^0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

el triángulo en \mathbb{R}^2 de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$ y su interior, respectivamente.

Definición 1.4.11. Sea C una curva algebraica plana no singular. Una *triangulación* de C está dada por:

- (a) un conjunto finito no vacío V de puntos llamados *vértices*,
- (b) un conjunto finito no vacío E de aplicaciones continuas $e : [0, 1] \rightarrow C$ llamadas *aristas*, y

- (c) un conjunto finito no vacío F de aplicaciones continuas $f : \Delta \rightarrow C$ llamadas *caras*

que verifican las siguientes propiedades:

- (I) $V = \{e(0) \mid e \in E\} \cup \{e(1) \mid e \in E\}$, es decir, los vértices son los extremos de las aristas;
- (II) si $e \in E$ entonces la restricción de e al intervalo abierto $(0, 1)$ es un homeomorfismo a su imagen en C , y esta imagen no contiene puntos de V o de la imagen de otro arista;
- (III) si $f \in F$ entonces la restricción de f a Δ^0 es un homeomorfismo a una componente conexa K_f de $C - \Gamma$, donde

$$\Gamma = \bigcup_{e \in E} e([0, 1])$$

es la unión de las imágenes de las aristas, y si $r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y $\sigma_i : [0, 1] \rightarrow \Delta$ con $i = 1, 2, 3$ están definidas por

$$r(t) = 1 - t, \quad \sigma_1(t) = (t, 0), \quad \sigma_2(t) = (1 - t, t), \quad \sigma_3(t) = (0, 1 - t)$$

entonces o bien $f \circ \sigma_i$ o $f \circ \sigma_i \circ r$ es un arista $e_f^i \in E$ para $i = 1, 2, 3$;

- (IV) la aplicación $f \mapsto K_f$ de F al conjunto de componentes conexas de $C - \Gamma$ es una biyección;
- (V) para todo $e \in E$ hay exactamente una cara $f_e^+ \in F$ tal que $e = f_e^+ \circ \sigma_i$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$ y hay exactamente una cara $f_e^- \in F$ tal que $e = f_e^- \circ \sigma_i \circ r$ para algún $i \in \{1, 2, 3\}$.

Aún necesitamos algunos resultados para demostrar la fórmula género-grado.

Lema 1.4.12. *Sea $\{p_1, \dots, p_r\}$ cualquier conjunto de al menos tres puntos de \mathbb{P}^1 . Entonces existe una triangulación de \mathbb{P}^1 con p_1, \dots, p_r como sus vértices y con $3r - 6$ aristas y $2r - 4$ caras.*

Demostración. Probemos este resultado por inducción en $r \geq 3$. Supongamos que $r = 3$. Identificando $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ podemos encontrar una proyectividad que envíe p_1 a 1, p_2 a $e^{2\pi i/3}$ y p_3 a $e^{4\pi i/3}$ [7, Lema 2.22]. Considerando el círculo unidad, que une a estos tres puntos, encontramos que su exterior junto con el punto ∞ se envían mediante la proyectividad $z \rightarrow 1/z$ al interior del círculo unidad. Como existe un homeomorfismo

$$\Delta \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

que lleva los vértices de Δ a $1, e^{2\pi i/3}$ y $e^{4\pi i/3}$ y envía las aristas de Δ a los segmentos apropiados del círculo unidad, obtenemos así una triangulación de \mathbb{P}^1 con tres aristas y dos caras cuando $r = 3$.

Supongamos ahora que $r > 3$ y hemos construido una triangulación con vértices p_1, \dots, p_{r-1} , $3r - 9$ aristas y $2r - 6$ caras. Si p_r está en el interior de una cara f , es decir, $p_r \in f(\Delta^0)$, podemos añadir tres aristas que unen p_r con los vértices de la cara f , obteniendo así una nueva triangulación con un vértice adicional p_r , tres aristas nuevas y una cara vieja dividida en tres caras nuevas. En el caso de que p_r no esté en el interior de ninguna cara, debe encontrarse en un arista e , es decir, $p_r = e(t)$ para algún $t \in (0, 1)$. Podemos reemplazar e por dos aristas que unen p_r con $e(0)$ y $e(1)$ y añadir dos aristas que unan p_r con el vértice final de las dos caras f_e^+ y f_e^- (estas dos caras son las que comparten a e como arista). Esta nueva triangulación tiene un vértice adicional p_r , dos aristas nuevas y una antigua dividida en dos, y dos caras viejas cada una separada en dos caras nuevas. Esto demuestra el resultado. \square

Proposición 1.4.13. *Sea*

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \mid P(x, y, z) = 0\}$$

una curva algebraica plana no singular que no contiene a $[0, 1, 0]$ y sea el recubrimiento ramificado $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ definido por $\phi[x, y, z] = [x, z]$. Supongamos que (V, E, F) es una triangulación de \mathbb{P}^1 tal que el conjunto de vértices V contiene el locus de ramificación $\phi(R)$ de ϕ . Entonces existe una triangulación $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ de C tal que

$$\tilde{V} = \phi^{-1}(V),$$

$$\tilde{E} = \{\tilde{e} : [0, 1] \rightarrow C \mid \tilde{e} \text{ continua, } \phi \circ \tilde{e} \in E\}$$

y

$$\tilde{F} = \{\tilde{f} : \Delta \rightarrow C \mid \tilde{f} \text{ continua, } \phi \circ \tilde{f} \in F\}.$$

Además si $\nu_\phi(p)$ es el índice de ramificación de ϕ en p y d es el grado de C entonces

$$|\tilde{V}| = d|V| - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1),$$

$$|\tilde{E}| = d|E| \quad y \quad |\tilde{F}| = d|F|.$$

De esta proposición se sigue que la característica de Euler de la curva C está dada por

$$\chi(C) = |\tilde{V}| - |\tilde{E}| + |\tilde{F}| = d\chi(\mathbb{P}^1) - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1).$$

Demostración. Debemos mostrar que \tilde{V} , \tilde{E} y \tilde{F} verifican las propiedades (I) a (V) de la Definición 1.4.11 y que las fórmulas para sus cardinales son correctas.

Resulta que ϕ verifica la Proposición A.21: dadas $f \in F$ y $p \in C$ con $\phi(p) = f(t)$ y $t \in \Delta - \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ entonces existe una única aplicación continua

$$\tilde{f} : \Delta \rightarrow C$$

tal que $\phi \circ \tilde{f} = f$ y $\tilde{f}(t) = p$. Por el Lema 1.4.7 el conjunto $\phi^{-1}(f(t))$ contiene exactamente d puntos de C , de lo que podemos deducir la existencia de d aplicaciones continuas $\tilde{f} : \Delta \rightarrow C$ tales que $\phi \circ \tilde{f} = f$. Esto implica que

$$|\tilde{F}| = d|F|.$$

También podemos deducir que

$$\begin{aligned} C - \phi^{-1}(V) &= \phi^{-1}(\{f(t) \mid f \in F, t \in \Delta, t \neq (0, 0), (1, 0), (1, 1)\}) = \\ &= \{\tilde{f}(t) \mid \tilde{f} \in \tilde{F}, t \in \Delta, t \neq (0, 0), (1, 0), (1, 1)\}. \end{aligned}$$

En particular $G = \bigcup_{\tilde{f} \in \tilde{F}} \tilde{f}(\Delta)$ contiene a $C - \phi^{-1}(V)$ y es por lo tanto denso en C gracias a la finitud de $\phi^{-1}(V)$ demostrada en el Lema 1.4.7. La compacidad de Δ , la continuidad de las \tilde{f} y el número finito de caras implican que G es por definición compacto, luego cerrado en C . Esto implica que $G = C$ y

$$\phi^{-1}(V) = \{\tilde{f}(t) \mid \tilde{f} \in \tilde{F}, t \in \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}\}.$$

Si $\tilde{f} \in \tilde{F}$ entonces $\phi \circ \tilde{f} \in F$ de forma que o bien $\phi \circ \tilde{f} \circ \sigma_i \in E$ o bien $\phi \circ \tilde{f} \circ \sigma_i \circ r \in E$ para $i = 1, 2, 3$, con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, r$ como se definieron en 1.4.11(III). Por lo tanto, si $\tilde{f} \in \tilde{F}$ entonces o bien $\tilde{f} \circ \sigma_i \in \tilde{E}$ o bien $\tilde{f} \circ \sigma_i \circ r \in \tilde{E}$, y

$$\tilde{f}(t) \in \{\tilde{e}(0) \mid \tilde{e} \in \tilde{E}\} \cup \{\tilde{e}(1) \mid \tilde{e} \in \tilde{E}\}$$

si $t \in \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$. Esto nos dice que

$$\phi^{-1}(V) = \{\tilde{e}(0) \mid \tilde{e} \in \tilde{E}\} \cup \{\tilde{e}(1) \mid \tilde{e} \in \tilde{E}\},$$

es decir, la propiedad (I) de 1.4.11 se cumple.

Aplicando de nuevo A.21 se sigue que si $e \in E$ y $p \in C$ con $\phi(p) = e(t)$ para algún $t \in (0, 1)$ entonces existe una única aplicación continua

$$\tilde{e} : [0, 1] \rightarrow C$$

tal que $\phi \circ \tilde{e} = e$ y $\tilde{e}(t) = p$. Además, por A.14 la restricción de \tilde{e} a $(0, 1)$ es un homeomorfismo a su imagen en C . La propiedad (II) se sigue de esta unicidad. También se sigue que

$$\phi^{-1}(\{e(t) \mid e \in E, t \in (0, 1)\}) = \{\tilde{e}(t) \mid \tilde{e} \in \tilde{E}, t \in (0, 1)\}.$$

Por lo tanto, si

$$\Gamma = \bigcup_{e \in E} e([0, 1]) = V \cup \{e(t) \mid e \in E, t \in (0, 1)\}$$

entonces

$$\phi^{-1}(\Gamma) = \phi^{-1}(V) \cup \{\tilde{e}(t) \mid \tilde{e} \in \tilde{E}, t \in (0, 1)\} = \bigcup_{\tilde{e} \in \tilde{E}} \tilde{e}([0, 1]) = \tilde{\Gamma}.$$

Por el Lema 1.4.7 si $t \in (0, 1)$ y $e \in E$ entonces $\phi^{-1}(e(t))$ consiste en exactamente d puntos de C , luego hay exactamente d aplicaciones continuas $\tilde{e} : [0, 1] \rightarrow C$ tales que $\phi \circ \tilde{e} = e$. Entonces

$$|\tilde{E}| = d|E|.$$

Por A.14 si $\tilde{f} \in \tilde{F}$ entonces la restricción de \tilde{f} a Δ^0 es un homeomorfismo a su imagen, que es una componente conexa de $\phi^{-1}(f(\Delta^0))$ donde $f = \phi \circ \tilde{f}$. Como $f(\Delta^0)$ es una componente conexa de $\mathbb{P}^1 - \Gamma$ se sigue que $\tilde{f}(\Delta^0)$ es una componente conexa de

$$\phi^{-1}(\mathbb{P}^1 - \Gamma) = C - \phi^{-1}(\Gamma) = C - \tilde{\Gamma}.$$

Esto demuestra la primera parte de (III), y ya hemos visto que la segunda también se cumple. Por último, (IV) y (V) se siguen fácilmente de la construcción realizada. Solamente falta mostrar que

$$|\tilde{V}| = d|V| - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1),$$

lo cual es consecuencia inmediata del Lema 1.4.7 ya que V contiene a $\phi(R)$. \square

El siguiente resultado tendrá como corolario inmediato la fórmula género-grado.

Teorema 1.4.14. *Sea C una curva algebraica plana no singular de grado d en \mathbb{P}^2 . Si r es un número natural y $r \geq d(d-1)$ y $r \geq 3$ entonces C tiene una triangulación con $rd - d(d-1)$ vértices, $3(r-2)d$ aristas y $2(r-2)d$ caras.*

Demostración. Sea $P(x, y, z)$ un polinomio homogéneo de grado d que defina a C . Por el Lema 1.4.10, tras aplicar una proyectividad adecuada a C podemos asumir

que $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$, $\phi[x, y, z] = [x, z]$ está bien definida, es decir, $[0, 1, 0] \notin C$ y que el índice de ramificación de todo punto $[a, b, c] \in C$ satisface

$$\nu_\phi[a, b, c] \leq 2.$$

Por el Lema 1.4.9 ϕ tiene exactamente $d(d-1)$ puntos de ramificación, es decir, $|R| = d(d-1)$. A partir del Lema 1.4.12 si $r \geq 3$ y $r \geq d(d-1)$ entonces podemos elegir una triangulación (V, E, F) de \mathbb{P}^1 tal que

$$\phi(R) \subset V$$

y $|V| = r$, $|E| = 3r - 6$ y $|F| = 2r - 4$. Por la Proposición 1.4.13 existe una triangulación $(\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{F})$ de C con

$$|\tilde{E}| = d|E| = 3(r-2)d$$

$$|\tilde{F}| = d|F| = 2(r-2)d$$

y

$$|\tilde{V}| = d|V| - \sum_{p \in R} (\nu_\phi(p) - 1).$$

Puesto que $|R| = d(d-1)$ y $\nu_\phi(p) = 2$ para todo $p \in R$ entonces

$$|\tilde{V}| = rd - d(d-1)$$

□

Corolario 1.4.15 (Fórmula género-grado). *La característica de Euler χ y el género g_τ de una curva algebraica plana no singular de grado d están dados por*

$$\chi = d(3-d)$$

y

$$g_\tau = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Demostración. Sustituyendo el número de vértices, aristas y caras de la triangulación se obtiene que

$$\begin{aligned} \chi &= |V| - |E| + |F| = rd - d(d-1) - 3(r-2)d + 2(r-2)d = \\ &= 2d - d(d-1) = d(3-d). \end{aligned}$$

y

$$g_\tau = \frac{1}{2}(2 - \chi) = \frac{1}{2}(2 - d(3-d)) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

□

Ejemplo 1.4.16. Si consideramos el caso de una cúbica, $d = 3$, su género será $g_\tau = 1$, es decir, una curva algebraica plana no singular es topológicamente un toro. Es posible construir explícitamente un homeomorfismo que aquí solamente definiremos y cuyos detalles pueden encontrarse en [7, § 5.1]. La construcción involucra a la conocida como función \wp de Weierstrass asociada a un retículo Γ y es la función meromorfa

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\xi \in \Gamma - \{0\}} \frac{1}{(z - \xi)^2} - \frac{1}{\xi^2}$$

que está bien definida y permite construir un homeomorfismo entre el toro y la cúbica C ,

$$u : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow C, \quad u(z + \Gamma) = \begin{cases} [\wp(z), \wp'(z), 1] & \text{si } z \notin \Gamma, \\ [0, 1, 0] & \text{si } z \in \Gamma. \end{cases}$$

1.5. Hazes

Aquí definiremos el concepto de prehaz y de haz. Podríamos entender un prehaz como una familia de objetos locales, mientras que un haz es una familia de objetos locales que “encajan” para formar un único objeto global. Esto, sin embargo, no será siempre posible: el desarrollo de la teoría de la cohomología en el capítulo 2 dará una manera de medir las “obstrucciones” que impiden formar un elemento global.

Definición 1.5.1. Sea X un espacio topológico y τ su topología, es decir, la familia de los abiertos en X . Un *prehaz* de grupos abelianos en X es un par (\mathcal{F}, ρ) que consiste en

- (1) una familia $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \tau}$ de grupos abelianos y
- (2) una familia $\rho = (\rho_V^U)_{U, V \in \tau, V \subset U}$ de homomorfismos de grupos

$$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

tal que

$$\begin{aligned} \rho_U^U &= \text{id}_{\mathcal{F}(U)} \quad \text{para todo } U \in \tau, \\ \rho_W^V \circ \rho_V^U &= \rho_W^U \quad \text{para } W \subset V \subset U. \end{aligned}$$

Los elementos de los grupos abelianos $\mathcal{F}(U)$ reciben el nombre de *secciones* de \mathcal{F} en U , mientras que los homomorfismos ρ_V^U se llaman *homomorfismos de restricción*, y en vez de $\rho_V^U(f)$ se suele escribir $f|_V$, con $f \in \mathcal{F}(U)$.

De forma análoga a los prehaces de grupos abelianos se pueden definir prehaces de espacios vectoriales, anillos, conjuntos, ...

Por lo general la noción de prehaz no es lo suficientemente fuerte como para deducir resultados importantes en una superficie de Riemann. El haz, sin embargo, sí que lo es. Las condiciones adicionales que le pediremos garantizan que las secciones locales que coinciden en su dominio común se “pegan” para crear una sección global única.

Definición 1.5.2. Un prehaz \mathcal{F} en un espacio topológico X es un *haz* si para todo abierto $U \subset X$ y toda familia de subconjuntos abiertos $U_i \subset U, i \in I$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ se satisfacen las siguientes condiciones, conocidas como los *Axiomas de Haz*:

- (I) Si $f, g \in \mathcal{F}(U)$ son tales que $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ para todo $i \in I$, entonces $f = g$.
- (II) Dados $f_i \in \mathcal{F}(U_i), i \in I$ tales que

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{para todo } i, j \in I,$$

existe un $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo $i \in I$.

Gracias a (I), el elemento f que aparece en (II) es único.

Ejemplo 1.5.3. Veamos algunos ejemplos de haces y prehaces:

- Para todo abierto $U \subset X$ sea

$$\mathcal{C}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es continua}\}$$

el espacio vectorial complejo de funciones continuas en U . El prehaz $\mathcal{C}(U)$ con $U \subset X$ abierto y las restricciones

$$\rho_V^U : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(V), \quad f \mapsto f|_V, V \subset U$$

es un haz.

- Sea X una superficie de Riemann y sea $\mathcal{O}(U)$ el anillo de funciones holomorfas definidas en el abierto $U \subset X$. Con las restricciones habituales $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ para $V \subset U$ se obtiene el haz \mathcal{O} de funciones holomorfas en X . De forma análoga se define el haz \mathcal{M} de funciones meromorfas en X .
- Sea X un espacio topológico y G un grupo abeliano. Para cada abierto $U \subset X$ definamos

$$\mathcal{F}(U) := \{f : U \rightarrow G \mid f \text{ es constante}\}.$$

y $\mathcal{F}(\emptyset) := 0$. Para las restricciones, sea $\rho_V^U = \text{id}_G$ si $V \neq \emptyset$ y ρ_\emptyset^U el homomorfismo nulo. Con esta estructura \mathcal{F} es un prehaz.

Supongamos que G tiene dos elementos distintos g_1 y g_2 y que X tiene dos abiertos disjuntos U_1 y U_2 no vacíos. En este caso \mathcal{F} no es un haz, puesto que no verifica el Axioma de Haz II. Como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ se tiene que $g_1|_{U_1 \cap U_2} = g_2|_{U_1 \cap U_2} = 0$, pero no existe ningún $f \in \mathcal{F}(U_1 \cup U_2)$ tal que $f|_{U_1} = g_1$ y $f|_{U_2} = g_2$.

Podemos modificar ligeramente la construcción para obtener un haz. Consideremos $\mathcal{G}(U)$ el grupo abeliano de todas las aplicaciones localmente constantes $g : U \rightarrow G$. Si U es un abierto conexo no vacío, entonces $\mathcal{G}(U) = G$. Para $V \subset U$ consideremos la restricción habitual $\mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V)$. Entonces \mathcal{G} es un haz en X y suele denotarse por G .

Sea \mathcal{F} un prehaz de conjuntos en un espacio topológico X y un punto $a \in X$. En la unión disjunta

$$\bigsqcup_{U \ni a} \mathcal{F}(U)$$

donde la unión se toma en todos los entornos abiertos U de a , introducimos la relación \sim_a , que además es de equivalencia: dos elementos $f \in \mathcal{F}(U)$ y $g \in \mathcal{F}(V)$ están relacionados $f \sim_a g$ cuando existe un abierto W tal que $a \in W$ y $W \subset U \cap V$ con $f|_W = g|_W$. El conjunto de todas las clases de equivalencia, también llamado límite inductivo, que denotamos por \mathcal{F}_a , se define por

$$\mathcal{F}_a := \varinjlim_{U \ni a} \mathcal{F}(U) := \left(\bigsqcup_{U \ni a} \mathcal{F}(U) \right) / \sim_a .$$

Definición 1.5.4. La fibra \mathcal{F}_a de \mathcal{F} en a es el conjunto de las clases de equivalencia respecto a \sim_a . Si \mathcal{F} es un prehaz de grupos abelianos (resp. de espacios vectoriales, anillos...), entonces la fibra \mathcal{F}_a con la operación definida en las clases de equivalencia por la operación en los representantes es también un grupo abeliano (resp. espacio vectorial, anillo...).

Dado un prehaz \mathcal{F} y un abierto $U \subset X$, denotaremos por

$$\rho_a : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_a$$

a la aplicación que envía $f \in \mathcal{F}(U)$ a su clase de equivalencia módulo \sim_a .

Definición 1.5.5. El germen de f en a , donde $f \in \mathcal{F}(U)$, U abierto, es su clase de equivalencia $\rho_a(f)$.

Ejemplo 1.5.6. Consideremos, por ejemplo, el haz de funciones holomorfas \mathcal{O} en un dominio $X \subset \mathbb{C}$, y sea $a \in X$. Un germen de una función holomorfa $\varphi \in \mathcal{O}_a$ tiene como representante una función holomorfa en un entorno abierto de a , por

lo que tiene una expansión en serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ con un radio de convergencia positivo. Dos funciones holomorfas en entornos de a determinan un mismo germen en a si y sólo si tienen la misma expansión en serie de Taylor en torno a a . Por lo tanto existe un isomorfismo entre la fibra \mathcal{O}_a y el anillo $\mathbb{C}\{z-a\}$ de series de potencias convergentes en $z-a$ con coeficientes complejos. Además, para cualquier germen de función $\varphi \in \mathcal{O}_a$ el valor de la función en este punto, $\varphi(a) \in \mathbb{C}$, no depende de la elección de representante y por tanto está bien definido.

Proposición 1.5.7. *Sea \mathcal{F} un haz de grupos abelianos en el espacio topológico X y sea $U \subset X$ un abierto. Entonces un elemento $f \in \mathcal{F}(U)$ es cero si y sólo si todos los gérmenes $\rho_x(f) \in \mathcal{F}_x, x \in U$, se anulan.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Axioma de Haz I. □

Para terminar este capítulo vamos a definir el espacio topológico asociado a un prehaz. Consideremos X un espacio topológico y \mathcal{F} un prehaz en X . Definimos

$$|\mathcal{F}| := \bigsqcup_{x \in X} F_x$$

la unión disjunta de todas las fibras. Denotaremos por

$$p : |\mathcal{F}| \rightarrow X$$

la aplicación que envía cada elemento $\varphi \in \mathcal{F}_x$ a x . Para definir una topología en \mathcal{F} construiremos una base formada por los conjuntos

$$[U, f] := \{\rho_x(f) \mid x \in U\} \subset |\mathcal{F}|$$

donde $U \subset X$ es abierto y $f \in \mathcal{F}(U)$.

Proposición 1.5.8. *La familia \mathfrak{B} de todos los conjuntos $[U, f]$, donde U es abierto en X y $f \in \mathcal{F}(U)$, es base de una topología en $|\mathcal{F}|$. La proyección $p : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ es un homeomorfismo local.*

Demostración. Para probar que \mathfrak{B} es una base deben verificarse dos condiciones:

- (a) *Todo elemento $\varphi \in |\mathcal{F}|$ pertenece a algún $[U, f]$. Esto es trivial por la definición de $[U, f]$.*
- (b) *Si $\varphi \in [U, f] \cap [V, g]$, entonces existe un $[W, h] \in \mathfrak{B}$ tal que $[W, h] \subset [U, f] \cap [V, g]$. Supongamos que $p(\varphi) = x$. Entonces $x \in U \cap V$ y $\varphi = \rho_x(f) = \rho_x(g)$. Esto implica que existe un entorno abierto $W \subset U \cap V$ de x tal que $h := f|_W = g|_W$, de forma que $\varphi \in [W, h] \subset [U, f] \cap [V, g]$.*

Solamente falta por demostrar que $p : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ es un homeomorfismo local. Sea $\varphi \in |\mathcal{F}|$ y $p(\varphi) = x$. Existe $[U, f] \in \mathfrak{B}$ con $\varphi \in [U, f]$, luego $[U, f]$ es entorno abierto de φ y U es entorno abierto de x . La aplicación $p|_{[U, f]} : [U, f] \rightarrow U$ es biyectiva, continua y abierta gracias a las definiciones. Entonces $p : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ es un homeomorfismo local. \square

Definición 1.5.9. Un prehaz \mathcal{F} en un espacio topológico X satisface el *Teorema de Identidad* si verifica lo siguiente: si $Y \subset X$ es un dominio y $f, g \in \mathcal{F}(Y)$ son elementos tales que para algún $a \in Y$ sus gérmenes $\rho_a(f)$ y $\rho_a(g)$ coinciden, entonces $f = g$.

Esta condición la satisfacen, por ejemplo, los haces \mathcal{O} de funciones holomorfas y \mathcal{M} de funciones meromorfas en una superficie de Riemann X .

Teorema 1.5.10. *Sea X un espacio localmente conexo de Hausdorff y \mathcal{F} un prehaz en X que satisface el Teorema de Identidad. Entonces el espacio topológico $|\mathcal{F}|$ es de Hausdorff.*

Demostración. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in |\mathcal{F}|$ y $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Queremos encontrar entornos disjuntos de estos dos elementos, para lo que distinguiremos dos casos.

Primero supongamos que $x := p(\varphi_1)$ y que $y := p(\varphi_2) \neq x$. Como X es Hausdorff, existen entornos disjuntos U y V de x e y respectivamente. Entonces $p^{-1}(U)$ y $p^{-1}(V)$ son entornos disjuntos de φ_1 y φ_2 respectivamente.

Ahora supongamos que $x := p(\varphi_1) = p(\varphi_2)$. Sean $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ representantes de $\varphi_i \in \mathcal{F}_x$, donde U_i son entornos abiertos de x , para $i = 1, 2$. Sea $U \subset U_1 \cap U_2$ un entorno abierto y conexo de x . Entonces $[U, f_1|U]$ y $[U, f_2|U]$ son entornos abiertos de φ_1 y φ_2 respectivamente. Supongamos que existe $\psi \in [U, f_1|U] \cap [U, f_2|U]$, y sea $y = p(\psi)$. Entonces $\psi = \rho_y(f_1) = \rho_y(f_2)$, luego por el Teorema de Identidad 1.5.9 se sigue que $f_1|U = f_2|U$ y por lo tanto $\varphi_1 = \varphi_2$, llegando así a una contradicción. Entonces $[U, f_1|U]$ y $[U, f_2|U]$ son necesariamente disjuntos, lo que termina la demostración. \square

1.6. Formas diferenciales

En esta sección trabajaremos con la idea de formas diferenciales en superficies de Riemann, que no serán únicamente holomorfas y meromorfas sino también formas diferenciales en el sentido real. Estas últimas se encuentran bien definidas, ya que considerando $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ podemos considerar las cartas complejas como cartas infinitamente diferenciables.

Identificamos los planos real y complejo de la forma $z = x + iy$, siendo x, y las coordenadas reales canónicas. Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}$, denotamos por $\mathcal{E}(U)$ a la \mathbb{C} -álgebra de todas las funciones $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente diferenciables respecto a x e y . Junto a las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ definimos otros dos operadores diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Utilizando esta definición, el espacio vectorial $\mathcal{O}(U)$ de las funciones holomorfas en U , que son aquellas funciones que verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, coincide con el núcleo de la aplicación $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$.

Lema 1.6.1. *Se tiene que*

$$\mathcal{O}(U) = \{f \in \mathcal{E}(U) \mid \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0\}.$$

Demostración. Si $f = u + iv \in \mathcal{E}(U)$, con u y v la parte real e imaginaria respectivamente, se verifica que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u + iv)}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

donde las dos ecuaciones de la derecha son las correspondientes a la parte real e imaginaria de la ecuación de la izquierda. \square

Las cartas complejas nos permiten ahora definir la noción de funciones diferenciables en una superficie de Riemann X . Para cualquier abierto $Y \subset X$ sea $\mathcal{E}(Y)$ el conjunto de todas las funciones $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ tales que para toda carta $z : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ en X con $U \subset Y$ existe una función $\tilde{f} \in \mathcal{E}(V)$ con $f|_U = \tilde{f} \circ z$. Si $\psi : V \rightarrow U$ es la inversa de z , es fácil ver que \tilde{f} está determinada por f , ya que $\tilde{f} = f \circ \psi$. De forma más compacta:

$$\mathcal{E}(Y) = \{f : Y \rightarrow \mathbb{C} \mid f \circ z^{-1} \in \mathcal{E}(V) \text{ para toda carta } z : U \rightarrow V\}.$$

De esta forma podemos construir el haz \mathcal{E} de funciones diferenciables en la superficie de Riemann X (junto con las funciones de restricción naturales). A partir de ahora, por diferenciable nos referiremos a infinitamente diferenciable.

Todo lo anterior nos permite, elegida una carta o entorno coordinado (U, z) de X , definir en la forma obvia los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$$

Sea un punto $a \in X$ y la fibra \mathcal{E}_a compuesta por todos los gérmenes de funciones diferenciables en a . Denotamos por $\mathfrak{m}_a \subset \mathcal{E}_a$ el subespacio vectorial de todos los gérmenes de función que se anulan en a , y por $\mathfrak{m}_a^2 \subset \mathfrak{m}_a$ el subespacio vectorial de esos gérmenes de función que se anulan en orden 2. Por esto último nos referimos al conjunto de los gérmenes $\varphi \in \mathfrak{m}_a$ que pueden representarse por una función f de forma que, respecto a un entorno coordenado $(U, z = x + iy)$ de a , se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0,$$

y las propiedades de las cartas complejas permiten garantizar que la definición es independiente de la elección de z .

Definición 1.6.2. El *espacio cotangente* de X en un punto a es el espacio vectorial cociente

$$T_a^{(1)} := \frac{\mathfrak{m}_a}{\mathfrak{m}_a^2}.$$

Si U es un entorno abierto de a y $f \in \mathcal{E}(U)$, entonces la *diferencial* $d_a f \in T_a^{(1)}$ de f en a es el elemento

$$d_a f := (f - f(a)) \quad \text{mód } \mathfrak{m}_a^2.$$

Por anularse en a , $f - f(a)$ representa un elemento de \mathfrak{m}_a , y por definición su clase de equivalencia módulo \mathfrak{m}_a^2 es $d_a f$.

Proposición 1.6.3. Sea X una superficie de Riemann, $a \in X$ y $(U, z = x + iy)$ un entorno coordenado de a . Entonces los elementos $d_a x$ y $d_a y$ forman una base del espacio cotangente $T_a^{(1)}$. Por otro lado, $\{d_a z, d_a \bar{z}\}$ también es una base de $T_a^{(1)}$. Si f es una función diferenciable en un entorno de a , entonces

$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a) d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a) d_a y = \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_a z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d_a \bar{z}$$

Demostración. Para ver que $d_a x$, $d_a y$ forman una base veremos que son un sistema de generadores y son linealmente independientes. Sea $t \in T_a^{(1)}$ y supongamos que $\varphi \in \mathfrak{m}_a$ es un representante de t . El desarrollo en serie de Taylor de φ alrededor de a puede escribirse

$$\varphi = c_1(x - x(a)) + c_2(y - y(a)) + \psi,$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ y $\psi \in \mathfrak{m}_a^2$. Tomando módulo \mathfrak{m}_a^2 obtenemos

$$t = c_1 d_a x + c_2 d_a y.$$

Veamos ahora que efectivamente son linealmente independientes. De $c_1 d_a x + c_2 d_a y = 0$ se sigue que

$$c_1(x - x(a)) + c_2(y - y(a)) \in \mathfrak{m}_a^2,$$

y realizando derivadas parciales con respecto a x e y se tiene que $c_1 = c_2 = 0$, terminando con esta parte de la demostración.

Sea ahora f diferenciable en un entorno de a . Se tiene

$$f - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x(a)) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y(a)) + g$$

donde g se anula en a en orden 2. Entonces

$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a) d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a) d_a y.$$

De forma similar puede probarse el resultado correspondiente para $\{d_a z, d_a \bar{z}\}$. \square

Acabamos de ver que $T_a^{(1)}$ es un espacio vectorial de dimensión 2 y que el par $\{d_a z, d_a \bar{z}\}$ es una base, donde $a \in X$ y (U, z) es un entorno coordenado. Si ahora tomamos otro entorno coordenado (U', z') de a , hallamos que

$$c := \frac{\partial z'}{\partial z}(a) \neq 0, \quad \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}(a) = \bar{c}, \quad \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z}(a) = 0.$$

Esto implica que $d_a z' = c d_a z$ y $d_a \bar{z}' = \bar{c} d_a \bar{z}$. Por lo tanto, los subespacios vectoriales de dimensión 1 generados por $d_a z$ y $d_a \bar{z}$ son independientes de la elección de (U, z) . Denotaremos a estos subespacios así:

$$T_a^{1,0} := \mathbb{C} d_a z, \quad T_a^{0,1} := \mathbb{C} d_a \bar{z},$$

donde sus elementos son llamados *vectores cotangentes de tipo* $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente. Por construcción, $T_a^{(1)} = T_a^{1,0} \oplus T_a^{0,1}$. Si f es una función diferenciable en un entorno de a , definimos $d'_a f$ y $d''_a f$ como

$$d_a f = d'_a f + d''_a f, \quad d'_a f \in T_a^{1,0}, \quad d''_a f \in T_a^{0,1}.$$

Entonces

$$d'_a f = \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_a z, \quad d''_a f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d_a \bar{z}.$$

Definición 1.6.4. Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X . Una *forma diferencial de grado uno*, o *1-forma*, en Y es una aplicación

$$\omega : Y \rightarrow \bigcup_{a \in Y} T_a^{(1)}$$

con $\omega(a) \in T_a^{(1)}$ para todo $a \in Y$. Si $\omega(a)$ pertenece a $T_a^{1,0}$ o $T_a^{0,1}$ para todo $a \in Y$ diremos que es de tipo $(1, 0)$ o $(0, 1)$ respectivamente.

Ejemplo 1.6.5. Veamos algunos ejemplos de formas diferenciales que se utilizarán en lo que continúa:

- Si $f \in \mathcal{E}(Y)$, se definen las 1-formas

$$(df)(a) := d_a f, \quad (d'f)(a) := d'_a f, \quad (d''f)(a) := d''_a f$$

para todo $a \in Y$. En particular f es holomorfa si y sólo si $d''f = 0$. Si $(U, z = x + iy)$ es una carta compleja entonces cualquier 1-forma en U puede escribirse como

$$\omega = f dx + g dy = \varphi dz + \psi d\bar{z},$$

donde las funciones complejas f, g, φ, ψ definidas en U no son necesariamente continuas.

- Si w es una 1-forma en Y y $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ es una función, entonces la aplicación $(f\omega)(a) := f(a)\omega(a)$ también es una 1-forma en Y .

Definición 1.6.6. Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X . Una 1-forma ω en Y se llama *diferenciable* si, con respecto a toda carta (U, z) , puede escribirse ω como

$$\omega = f dz + g d\bar{z} \quad \text{en } U \cap Y, \text{ donde } f, g \in \mathcal{E}(U \cap Y).$$

Una 1-forma será *holomorfa* si

$$\omega = f dz \quad \text{en } U \cap Y, \text{ donde } f \in \mathcal{O}(U \cap Y).$$

Siguiendo esta definición, para cualquier abierto U de una superficie de Riemann X denotaremos por $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ el espacio vectorial de 1-formas diferenciables y $\mathcal{E}^{1,0}(U)$ y $\mathcal{E}^{0,1}(U)$ serán los subespacios de 1-formas de tipo $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente. El espacio vectorial de las 1-formas holomorfas lo denotamos por $\Omega(U)$. Junto con las restricciones naturales, $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{1,0}, \mathcal{E}^{0,1}$ y Ω son haces de espacios vectoriales sobre X .

Sea Y un abierto de una superficie de Riemann, $a \in Y$ un punto y ω una 1-forma holomorfa en $Y - \{a\}$. Elegimos un entorno coordenado (U, z) de a con $U \subset Y$ y $z(a) = 0$. En $U - \{a\}$ puede escribirse $\omega = f dz$, donde $f \in \mathcal{O}(U - \{a\})$. Escribimos

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

expansión de f en serie de Laurent en torno a a . Cuando $c_n = 0$ para todo $n < 0$, ω puede continuarse de forma holomorfa a todo Y . En este caso a es una *singularidad evitable* de ω . Si existe $k < 0$ tal que $c_k \neq 0$ y $c_n = 0, n < k$, entonces ω tiene un *polo* de orden k en a . Si hay infinitos $n < 0$ con $c_n \neq 0$ se dice que ω tiene una *singularidad esencial* en a .

Definición 1.6.7. El coeficiente c_{-1} recibe el nombre de *residuo* de ω en a y se denota por

$$c_{-1} = \text{Res}_a(\omega).$$

Lema 1.6.8. *El residuo es independiente de la elección de carta (U, z) .*

Demostración. Sea V un entorno abierto de a y g una función holomorfa en $V - \{a\}$. Elegimos un entorno coordenado (U, z) cualquiera de a con $z(a) = 0$ y consideremos

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

la serie de Laurent en torno a a . Entonces

$$dg = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n z^{n-1} \right) dz$$

y el coeficiente de $z^{-1} dz$ es cero, luego no depende de la carta elegida.

Sea ahora φ una función holomorfa en V con un cero de primer orden en a y una carta como antes. Entonces $\varphi = zh$, donde h es holomorfa en a y $h(a) \neq 0$. Entonces $d\varphi = h dz + z dh$ y

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{h dz + z dh}{zh} = \frac{dz}{z} + \frac{dh}{h}.$$

Puesto que $h(a) \neq 0$, la forma diferencial $h^{-1} dh$ es holomorfa en a y tiene residuo cero. Esto implica que

$$\text{Res}_a \left(\frac{d\varphi}{\varphi} \right) = \text{Res}_a \left(\frac{dz}{z} \right) = 1.$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior estamos en condiciones de probar el resultado. Con una carta (U, z) tal que $z(a) = 0$ sea $\omega = f dz$, donde

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Definamos

$$g := \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$$

Entonces $\omega = dg + c_{-1} z^{-1} dz$. Aplicando todo lo anterior se tiene que $\text{Res}_a(\omega) = c_{-1}$ con independencia de la carta elegida. \square

Definición 1.6.9. Una 1-forma ω en un abierto Y de una superficie de Riemann es una forma diferencial *meromorfa* en Y si existe un abierto $Y' \subset Y$ tal que:

- (a) ω es una 1-forma holomorfa en Y' ,
- (b) $Y - Y'$ consiste únicamente en puntos aislados, y
- (c) ω tiene un polo en todo punto $a \in Y - Y'$.

Denotando por $\mathcal{M}^{(1)}(Y)$ el conjunto de todas las 1-formas meromorfas en Y , con las operaciones habituales y las restricciones naturales $\mathcal{M}^{(1)}$ es un haz de espacios vectoriales sobre X . Las 1-formas meromorfas en X también reciben el nombre de *diferenciales abelianas*.

Habiendo definido las formas diferenciales de grado uno pasamos ahora a definir las de grado dos. Para ello es necesario considerar el producto exterior de un espacio vectorial consigo mismo.

Dado V un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , consideramos el *producto exterior* $\Lambda^2 V$, el espacio vectorial cuyos elementos son sumas finitas de elementos de la forma $v_1 \wedge v_2$ con $v_1, v_2 \in V$ y satisfacen las siguientes propiedades, que caracterizan completamente a $\Lambda^2 V$: si $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

- $(v_1 + v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3$,
- $(\lambda v_1) \wedge v_2 = \lambda(v_1 \wedge v_2)$,
- $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$
- Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es base de V , los elementos $e_i \wedge e_j, i < j$ forman una base de $\Lambda^2 V$, que tendrá $\binom{n}{2}$ elementos.

Aplicamos esto al espacio cotangente $T_a^{(1)}$ de una superficie de Riemann X en un punto a . Definimos

$$T_a^{(2)} := \Lambda^2 T_a^{(1)}.$$

Sea (U, z) un entorno coordinado de a con $z = x + iy$. Entonces $d_a x \wedge d_a y$ forma una base de $T_a^{(2)}$, al igual que lo hace $d_a z \wedge d_a \bar{z} = -2i d_a x \wedge d_a y$. En particular $T_a^{(2)}$ tiene dimensión 1.

Definición 1.6.10. Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X . Una *2-forma* en Y es una aplicación

$$\omega : Y \rightarrow \bigcup_{a \in Y} T_a^{(2)},$$

donde $\omega(a) \in T_a^{(2)}$ para todo $a \in Y$. La forma ω se denomina *diferenciable* en Y si para toda carta compleja (U, z) en X puede escribirse

$$\omega = f dz \wedge d\bar{z} \quad \text{con } f \in \mathcal{E}(U \cap Y),$$

donde esto quiere decir que $\omega(a) = f(a) d_a z \wedge d_a \bar{z}$ para todo $a \in U \cap Y$. Denotamos por $\mathcal{E}^{(2)}(Y)$ el espacio vectorial de todas las 2-formas diferenciables en Y .

El siguiente paso es expresar la diferenciación exterior de formas, es decir, operadores que transformen 1-formas en 2-formas. Definimos así tres *derivaciones*

$$d, d', d'' : \mathcal{E}^{(1)}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{(2)}(U)$$

donde U es un abierto de una superficie de Riemann. Localmente una 1-forma diferenciable puede escribirse como una suma finita

$$\omega = \sum_k f_k dg_k,$$

donde las f_k, g_k son funciones diferenciables (por ejemplo, si z es coordenada local, $\omega = f_1 dz + f_2 d\bar{z}$). Definimos

$$d\omega := \sum_k df_k \wedge dg_k,$$

$$d'\omega := \sum_k d'f_k \wedge dg_k,$$

$$d''\omega := \sum_k d''f_k \wedge dg_k.$$

Hay que comprobar que esta definición no depende de la representación $\omega = \sum f_k dg_k$ elegida, lo cual veremos para el operador d (los otros dos casos son similares). Supongamos que $\omega = \sum f_k dg_k = \sum \tilde{f}_j d\tilde{g}_j$ y fijemos un entorno coordenado (U, z) con $z = x + iy$. Queremos probar que $\sum df_k \wedge dg_k = \sum d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j$. Puesto que

$$dg_k = \frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \frac{\partial g_k}{\partial y} dy$$

y la expresión análoga para $d\tilde{g}_j$, por hipótesis se tiene que

$$\sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} = \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x}, \quad \sum_k f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} = \sum_j \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y}.$$

Tomando derivadas parciales respecto a x e y y restando ambas expresiones obtenemos la igualdad

$$\sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} \right).$$

Por otro lado,

$$\sum_k df_k \wedge dg_k = \sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} - \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} \right) dx \wedge dy,$$

con una expresión equivalente para $\sum_j d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j$, y se sigue el resultado buscado.

Veamos ahora algunas propiedades elementales de estos operadores. Sean U un abierto de una superficie de Riemann, $f \in \mathcal{E}(U)$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$. De las definiciones se sigue inmediatamente que:

- (a) $ddf = d'd'f = d''d''f = 0$ (por ejemplo, $ddf = d(1 \cdot df) = d1 \wedge df = 0$),
- (b) $d\omega = d'\omega + d''\omega$,
- (c) $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$, con reglas análogas para d' y d'' .

De (a) y (b) se tiene que

$$0 = (d' + d'')(d' + d'')f = d'd''f + d''d'f \implies d'd''f = -d''d'f.$$

Con respecto a una carta compleja (U, z) , con $z = x + iy$, se tiene

$$d'd''f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy.$$

Una función diferenciable f definida en un abierto de una superficie de Riemann se denomina *armónica* si $d'd''f = 0$.

Definición 1.6.11. Sea Y un abierto de una superficie de Riemann. Una 1-forma diferenciable $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ se denomina *cerrada* si $d\omega = 0$ y *exacta* si existe $f \in \mathcal{E}(Y)$ tal que $\omega = df$.

Como $ddf = 0$, toda forma exacta es cerrada. Sin embargo, el recíproco no es en general cierto.

Teorema 1.6.12. *Sea Y un abierto de una superficie de Riemann. Se verifica que:*

- (a) *Toda 1-forma holomorfa $\omega \in \Omega(Y)$ es cerrada.*

(b) Toda 1-forma cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(Y)$ es holomorfa.

Demostración. Sea ω una 1-forma diferenciable del tipo $(1,0)$. Respecto a un entorno coordenado (U, z) puede escribirse $\omega = f dz$ para alguna función diferenciable f . Entonces

$$d\omega = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

Entonces $d\omega = 0$ es equivalente a $(\partial f / \partial \bar{z}) = 0$ y se sigue el resultado. \square

En particular, si f es armónica, entonces $d'f$ es una 1-forma holomorfa, pues $dd'f = d''d'f = 0$.

Por último, veremos cómo una función holomorfa $F : X \rightarrow Y$ entre dos superficies de Riemann induce un homomorfismo entre formas diferenciales. Para todo abierto $U \subset Y$:

$$F^* : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(F^{-1}(U)), \quad F^*(f) := f \circ F.$$

Podemos generalizar esta idea, obteniendo aplicaciones para formas diferenciales

$$F^* : \mathcal{E}^{(k)}(U) \rightarrow \mathcal{E}^{(k)}(F^{-1}(U)), \quad k = 1, 2.$$

Localmente podemos escribir 1-formas y 2-formas como sumas finitas

$$\sum_j f_j dg_j, \quad \sum_j f_j dg_j \wedge dh_j$$

respectivamente, donde f_j, g_j, h_j son diferenciables. Sean

$$F^* \left(\sum_j f_j dg_j \right) = \sum_j (F^* f_j) d(F^* g_j),$$

$$F^* \left(\sum_j f_j dg_j \wedge dh_j \right) = \sum_j (F^* f_j) d(F^* g_j) \wedge d(F^* h_j).$$

Se comprueba que estas definiciones no dependen de la representación local elegida, y por tanto definen homomorfismos globales únicos como hemos indicado arriba. Para $f \in \mathcal{E}(U)$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ se tiene

- (a) $F^*(df) = d(F^*f), \quad F^*(d\omega) = d(F^*\omega),$
- (b) $F^*(d'f) = d'(F^*f), \quad F^*(d'\omega) = d'(F^*\omega),$
- (c) $F^*(d''f) = d''(F^*f), \quad F^*(d''\omega) = d''(F^*\omega).$

En particular, si $f \in \mathcal{E}(U)$ es armónica, entonces $F^*f = f \circ F \in \mathcal{E}(F^{-1}(U))$ también es armónica, pues $d'd''(F^*f) = d'(F^*d''f) = F^*(d'd''f) = 0$.

1.7. Integración de formas diferenciales

Es posible integrar 1-formas diferenciales a lo largo de una curva. Para las formas cerradas, la integral indefinida a lo largo de una curva en una superficie simplemente conexa estará bien definida. En una situación general, sin embargo, la integración de estas formas no presenta este comportamiento.

Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$. Supongamos que tenemos una curva diferenciable a trozos en X , es decir, tenemos una aplicación continua

$$c : [0, 1] \rightarrow X$$

tal que existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$ y cartas (U_k, z_k) , $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ tales que $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ y las funciones

$$x_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathbb{R}$$

tienen derivadas continuas. La integral de ω a lo largo de c se define como sigue: en U_k podemos escribir $\omega = f_k dx_k + g_k dy_k$, donde las funciones f_k, g_k son diferenciables. Definimos

$$\int_c \omega := \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(c(t)) \frac{dx_k(c(t))}{dt} + g_k(c(t)) \frac{dy_k(c(t))}{dt} \right) dt.$$

Es fácil comprobar que esta definición no depende de la elección de particiones ni de cartas.

Teorema 1.7.1. *Sea X una superficie de Riemann, $c : [0, 1] \rightarrow X$ una curva diferenciable a trozos y $F \in \mathcal{E}(X)$. Entonces*

$$\int_c dF = F(c(1)) - F(c(0)).$$

Demostración. Elegimos una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ y cartas (U_k, z_k) como en la definición. En cada U_k se tiene

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial F}{\partial y_k} dy_k.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_c dF &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(c(t)) \frac{dx_k(c(t))}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y_k}(c(t)) \frac{dy_k(c(t))}{dt} \right) dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{d}{dt} F(c(t)) \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^n (F(c(t_k)) - F(c(t_{k-1}))) = F(c(1)) - F(c(0)). \end{aligned}$$

□

Definición 1.7.2. Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$. Una función $F \in \mathcal{E}(X)$ es una *primitiva* de ω si $dF = \omega$.

Por la Definición 1.6.11 cualquier forma diferencial que tenga primitiva es necesariamente cerrada. Es inmediato que si F es una primitiva entonces $F + c$, $c \in \mathbb{C}$ también lo es. Recíprocamente, dos primitivas difieren en una constante, pues si $dF = 0$, se puede deducir aplicando el teorema anterior que F es una constante.

De este teorema podemos deducir más resultados: conocer la primitiva de una forma diferencial permite calcular cualquier integral de línea, y la integral de una forma diferencial exacta a lo largo de una curva depende únicamente de los puntos inicial y final. Sin embargo, no siempre dispondremos de una de las primitivas de una forma diferencial – puede que ni siquiera exista. Aun así, es posible probar la existencia de primitivas locales.

Sea $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$, donde $r > 0$, un disco abierto centrado en 0 del plano complejo y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$. Podemos escribir

$$\omega = f dx + g dy, \quad f, g \in \mathcal{E}(U),$$

siendo x, y las coordenadas reales habituales en $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Supongamos que $d\omega = 0$, es decir, es cerrada. Puesto que

$$d\omega = df \wedge dx + dg \wedge dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

esto equivale a $(\partial g / \partial x) = (\partial f / \partial y)$. Vamos a demostrar que ω tiene una primitiva F dada por

$$F(x, y) := \int_0^1 (f(tx, ty)x + g(tx, ty)y) dt, \quad \text{para } x, y \in U.$$

F es por definición infinitamente diferenciable. Queremos comprobar que en efecto $dF = \omega$, es decir, $(\partial F / \partial x) = f$ y $(\partial F / \partial y) = g$. Derivando bajo el signo integral:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)tx + \frac{\partial g}{\partial x}(tx, ty)ty + f(tx, ty) \right) dt.$$

Puesto que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}f(tx, ty) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y$$

se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= \int_0^1 \left(t \frac{d}{dt} f(tx, ty) + f(tx, ty) \right) dt = \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (tf(tx, ty)) dt = f(x, y)\end{aligned}$$

De manera similar se halla que $(\partial F/\partial y) = g$, probando así que $dF = \omega$.

Si se da el caso de que ω es holomorfa, escribiendo $w = f dz$ con $f \in \mathcal{O}(U)$, podemos escribir f como su serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

y definiendo

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$$

obtenemos mucho más fácilmente una función $F \in \mathcal{O}(U)$ tal que $dF = \omega$.

De forma global sólo podemos garantizar que la primitiva de una forma diferencial cerrada existe como una función multivaluada.

Teorema 1.7.3. *Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una forma diferencial cerrada. Entonces existe un recubrimiento $p : \hat{X} \rightarrow X$ con \hat{X} conexo y una primitiva $F \in \mathcal{E}(\hat{X})$ de la forma diferencial $p^*\omega$.*

Demostración. Para un abierto $U \subset X$ sea $\mathcal{F}(U)$ el conjunto de todas las funciones $f \in \mathcal{E}(U)$ tales que $df = \omega$ en U . Entonces \mathcal{F} es el haz de primitivas de ω que además satisface el Teorema de Identidad 1.5.9, ya que dos elementos $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(U)$, siendo U un dominio de X , difieren únicamente en una constante.

Consideremos el espacio $p : |\mathcal{F}| \rightarrow X$. Por el Teorema 1.5.10 $|\mathcal{F}|$ es un espacio de Hausdorff. Vamos a probar que $p : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ es un recubrimiento. Para todo $a \in X$ existe, como ya hemos visto, un entorno abierto y conexo U y una primitiva $f \in \mathcal{F}(U)$. Entonces $f + c$ para $c \in \mathbb{C}$ son todas las primitivas de ω en U . Por lo tanto

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{c \in \mathbb{C}} [U, f + c].$$

Los conjuntos $[U, f + c]$ son disjuntos dos a dos y todas las aplicaciones $p|_{[U, f + c]} \rightarrow U$ son homeomorfismos. Esto prueba que $p : |\mathcal{F}| \rightarrow X$ es un recubrimiento.

Sea $\hat{X} \subset |\mathcal{F}|$ una componente conexa. Entonces $p|\hat{X} \rightarrow X$ también es un recubrimiento. Como \hat{X} es un conjunto de gérmenes de función, se puede definir de forma natural una función $F : \hat{X} \rightarrow \mathbb{C}$, $F(\varphi) = \varphi(p(\varphi))$. Se sigue directamente de las definiciones que F es una primitiva de $p^*\omega$. \square

La definición de recubrimiento universal y alguno de sus resultados elementales, utilizados a continuación, pueden consultarse en el Apéndice.

Corolario 1.7.4. *Sea X una superficie de Riemann, $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ su recubrimiento universal y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una forma diferencial cerrada. Entonces existe una primitiva $f \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ de $\pi^*\omega$.*

Demostración. Sea $p : \hat{X} \rightarrow X$ el recubrimiento construido en el Teorema 1.7.3 y sea $F \in \mathcal{E}(\hat{X})$ una primitiva de $p^*\omega$. Como $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ es el recubrimiento universal, existe una aplicación holomorfa que conserva fibras $\tau : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ en el sentido de la Definición A.1. Sea $f := \tau^*F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$. Entonces f es una primitiva de $\tau^*(p^*\omega) = \pi^*\omega$. \square

Corolario 1.7.5. *En una superficie de Riemann X simplemente conexa toda forma diferencial cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ tiene una primitiva $F \in \mathcal{E}(X)$.*

Demostración. Se sigue de 1.7.4, ya que $\text{id} : X \rightarrow X$ es, de acuerdo con el Teorema A.27, el recubrimiento universal. \square

Teorema 1.7.6. *Sea X una superficie de Riemann y $p : \tilde{X} \rightarrow X$ su recubrimiento universal. Sean $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una forma diferencial cerrada y $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ una primitiva de $p^*\omega$. Si $c : [0, 1] \rightarrow X$ es una curva diferenciable a trozos y $\hat{c} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ una elevación de c , entonces*

$$\int_c \omega = F(\hat{c}(1)) - F(\hat{c}(0)) = \int_{\hat{c}} p^*\omega.$$

Demostración. Para toda curva diferenciable a trozos $v : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ y toda forma diferencial $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}$ se tiene debido a las definiciones que

$$\int_v p^*\omega = \int_{p \circ v} \omega.$$

El resultado se sigue del Teorema 1.7.1. \square

Este teorema permite definir la integral de una forma diferencial cerrada a lo largo de una curva $c : [0, 1] \rightarrow X$ cualquiera. La definición no depende de la elección de primitiva F ya que dos primitivas difieren en una constante, que al

restar desaparece. También puede probarse que la definición no depende de la elevación elegida; los detalles de esta afirmación pueden encontrarse en [3, §10.1].

Ahora nos centraremos en la integración de 2-formas diferenciales en el plano complejo. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}$. Entonces ω puede escribirse como

$$\omega = f dx \wedge dy = \frac{i}{2} f dz \wedge d\bar{z}, \quad \text{donde } f \in \mathcal{E}(U).$$

Supongamos que f se anula fuera de un subconjunto compacto de U . Definimos

$$\iint_U \omega := \iint_U f(x, y) dx dy,$$

donde el lado derecho es la integral doble habitual.

Si $\varphi = u + iv : V \rightarrow U$ es un biholomorfismo con otro abierto $V \subset \mathbb{C}$, con las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos el determinante Jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |\varphi'|^2$ y podemos escribir la integral como

$$\iint_U f dx dy = \iint_V (f \circ \varphi) |\varphi'|^2 dx dy.$$

Por otro lado,

$$\varphi^*(dz \wedge d\bar{z}) = d\varphi \wedge d\bar{\varphi} = (\varphi' dz) \wedge (\bar{\varphi}' d\bar{z}) = |\varphi'|^2 dz \wedge d\bar{z}$$

y por tanto $\varphi^*\omega = (f \circ \varphi) |\varphi'|^2 dx \wedge dy$. Esto implica que

$$\int_U \omega = \iint_V \varphi^*\omega.$$

Sea ahora X una superficie de Riemann. El *soporte* de una forma diferencial ω en X se define como el conjunto cerrado

$$\text{Sop}(\omega) := \overline{\{a \in X \mid \omega(a) \neq 0\}}.$$

De forma análoga se define el soporte de una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.

Sea $\varphi : U \rightarrow V$ una carta en X y $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}$ una 2-forma con soporte compacto y contenido en U . Entonces $(\varphi^{-1})^*\omega$ es una forma diferencial con soporte compacto en $V \subset \mathbb{C}$ y podemos definir, con independencia de la carta elegida,

$$\iint_X \omega := \iint_U \omega = \iint_V (\varphi^{-1})^*\omega.$$

Sea ahora $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}$ una forma diferencial arbitraria con soporte compacto. Existen entonces un número finito de cartas $\varphi_k : U_k \rightarrow V_k, k = 1, \dots, n$ tales que

$$\text{Sop}(\omega) \subset \bigcup_{k=1}^n U_k.$$

Podemos encontrar una partición de la unidad, es decir, funciones $f_k \in \mathcal{E}(X)$ que verifican

- (a) $\text{Sop}(f_k) \subset U_k,$
 (b) $\sum_{k=1}^n f_k(x) = 1$ para todo $x \in \text{Sop}(\omega).$

Entonces $f_k \omega$ es una forma diferencial con $\text{Sop}(f_k \omega) \Subset U$ (relativamente compacto en U) y $\omega = \sum_{k=1}^n f_k \omega$. Definimos

$$\iint_X \omega := \sum_{k=1}^n \iint_X f_k \omega.$$

Gracias a las definiciones previas esto tiene sentido y es fácil comprobar la independencia frente a la elección de cartas.

Por último, probaremos un caso especial del Teorema de Stokes en el plano complejo, visto en la asignatura “Ampliación de Análisis Matemático” para superficies orientables, suma de superficies paramétricas con borde correspondientes a dominios de Jordan.

Teorema 1.7.7 (de Stokes). *Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $A \subset U$ un subconjunto compacto con frontera regular ∂A . Entonces para toda forma diferencial $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ se tiene*

$$\iint_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$$

Entendemos que la frontera está orientada de forma que el vector normal a A que apunta hacia fuera y el vector tangente a ∂A forma una base orientada positiva en el plano. Aquí nos centraremos en demostrar el teorema para el caso particular en el que A es un disco o un anillo,

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \varepsilon \leq |z| \leq R\}, \quad 0 < \varepsilon < R.$$

Demostración. Para el anillo, ∂A está formada por las circunferencia $|z| = R$ y $|z| = \varepsilon$ con orientación positiva y negativa respectivamente. Lo que afirma el

teorema es que, si $\omega = f dx + g dy$, entonces

$$\iint_{\varepsilon \leq |z| \leq R} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{|z|=R} (f dx + g dy) - \int_{|z|=\varepsilon} (f dx + g dy).$$

Para probar esto de forma directa, introducimos coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Supongamos que $\omega = g dy$. Entonces $d\omega = (\partial g / \partial x) dx \wedge dy$. Puesto que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

si escribimos $\tilde{g}(r, \theta) := g(re^{i\theta})$ obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_A \omega &= \iint_{\varepsilon \leq |z| \leq R} \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = \iint_{\substack{\varepsilon \leq |z| \leq R \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} \left(\cos \theta \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta} \right) r dr d\theta = \\ &= \iint_{\substack{\varepsilon \leq |z| \leq R \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{g}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{g}) \right) dr d\theta. \end{aligned}$$

Si fijamos $r \in [\varepsilon, R]$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{g}) d\theta = \sin \theta \tilde{g}(r, \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \iint_A d\omega &= \int_0^{2\pi} \cos \theta \left(\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{g}) dr \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \tilde{g}(R\theta) R \cos \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\varepsilon, \theta) \varepsilon \cos \theta d\theta = \int_{|z|=R} g dy - \int_{|z|=\varepsilon} g dy = \int_{\partial A} \omega. \end{aligned}$$

Para el caso $\omega = f dx$ basta considerar el cambio de coordenadas $(x, y) \mapsto (y, -x)$, que tiene jacobiano 1. Con esto el teorema queda probado para el anillo, mientras que para el disco solo se necesita tomar el límite $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Teorema 1.7.8. *Sea X una superficie de Riemann y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ una forma diferencial con soporte compacto. Entonces*

$$\iint_X d\omega = 0.$$

Demostración. Utilizando de nuevo una partición de la unidad podemos escribir $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_n$, donde cada ω_k tiene soporte compacto contenido en una carta.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X = \mathbb{C}$. Tomamos $R > 0$ suficientemente grande para que

$$\text{Sop}(\omega) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}.$$

Entonces

$$\iint_{\mathbb{C}} d\omega = \iint_{|z| \leq R} d\omega = \iint_{|z|=R} \omega = \iint_{|z|=R} 0 = 0.$$

□

Teorema 1.7.9 (del residuo). *Sea X una superficie de Riemann compacta y a_1, \dots, a_n puntos distintos de X . Definamos $X' := X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Entonces para toda 1-forma holomorfa $\omega \in \Omega(X')$ se verifica*

$$\sum_{k=1}^n \text{Res}_{a_k}(\omega) = 0.$$

Demostración. Elijamos entornos coordenados disjuntos (U_k, z_k) de los a_k . Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $z_k(a_k) = 0$ y que $z_k(U_k) \subset \mathbb{C}$ es un disco. Para cada $k = 1, \dots, n$ elegimos una función f_k con soporte compacto $\text{Sop}(f_k) \subset U_k$ tal que existe un entorno abierto $U'_k \subset U_k$ de a_k con $f_k|_{U'_k} = 1$. Definimos $g := 1 - (f_1 + \cdots + f_n)$. Entonces $g|_{U'_k} = 0$ para todo k . De esta forma podemos extender $g\omega$ a a_k asignándole el valor cero, y puede así considerarse un elemento de $\mathcal{E}^{(1)}$. Por el teorema anterior,

$$\iint_X d(g\omega) = 0.$$

Como ω es holomorfa, $d\omega = 0$ en X' . En $U'_k \cap X'$ se tiene que $f_k\omega = \omega$ y por lo tanto $d(f_k\omega) = 0$. Entonces $d(f_k\omega)$ puede considerarse como un elemento de $\mathcal{E}^{(2)}$ cuyo soporte es un conjunto compacto de $U_k - \{a\}$. La igualdad $d(g\omega) = -\sum d(f_k\omega)$ implica que

$$\sum_{k=1}^n \iint_X d(f_k\omega) = 0,$$

luego basta con probar que

$$\iint_X d(f_k\omega) = -2\pi i \text{Res}_{a_k}(\omega).$$

Puesto que el soporte de $d(f_k\omega)$ está contenido en U_k , solo tenemos que integrar en este conjunto. Mediante la carta z_k podemos considerar U_k como el disco unidad. Entonces existen $0 < \varepsilon < R < 1$ tal que

$$\text{Sop}(f_k) \subset \{|z_k| < R\} \quad \text{y} \quad f_k|_{\{|z_k| \leq \varepsilon\}} = 1.$$

En tal caso,

$$\begin{aligned} \iint_X d(f_k\omega) &= \iint_{\varepsilon \leq |z_k| \leq R} d(f_k\omega) = \\ &= \int_{|z_k|=R} f_k\omega - \int_{|z_k|=\varepsilon} f_k\omega = - \int_{|z_k|=\varepsilon} \omega = -2\pi i \text{Res}_{a_k}(\omega). \end{aligned}$$

por el teorema del residuo en \mathbb{C} . □

Corolario 1.7.10. *Toda función meromorfa no constante f en una superficie de Riemann compacta X tiene, contando multiplicidades, tantos ceros como polos.*

Demostración. La forma diferencial $\omega := df/f$ es holomorfa excepto en los ceros y en los polos de f . Si $a \in X$ es un cero de orden m , entonces $\text{Res}_a(\omega) = m$, y si es un polo de orden m , $\text{Res}_a(\omega) = -m$. La afirmación se sigue del teorema del residuo. □

Capítulo 2

Cohomología

En este segundo capítulo desarrollaremos la teoría de la cohomología en el sentido de Čech. Será con este lenguaje con el que podremos expresar ideas como el género de una superficie de Riemann compacta y enunciar el Teorema de Riemann-Roch, entre otros muchos resultados. Comenzaremos definiendo los grupos de cohomología para un haz en un espacio topológico junto con algunas propiedades y resultados básicos. A continuación probaremos dos resultados auxiliares: por un lado, el Lema de Dolbeault permitirá calcular algunos grupos de cohomología; por otro lado, el teorema de finitud permitirá definir el género de una superficie de Riemann constante y demostrará que en ella existen funciones meromorfas no constantes, un hecho nada trivial. Por último estudiaremos sucesiones exactas de haces y la sucesión exacta larga de cohomología, que resultarán ser herramientas imprescindibles para demostrar el Teorema de Riemann-Roch.

2.1. Grupos de cohomología

En esta sección definiremos los grupos de cohomología $H^1(X, \mathcal{F})$, donde \mathcal{F} es un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X . Para ello comenzamos considerando un recubrimiento abierto de X : una familia de abiertos $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ tales que $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Definición 2.1.1. El q -ésimo grupo de cocadenas de \mathcal{F} con respecto a \mathfrak{U} , con $q = 0, 1, 2, \dots$, se define como

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q})$$

Los elementos de $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ se llaman q -cocadenas. Una q -cocadena es entonces una familia $(f_{i_0, \dots, i_q})_{(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}}$ tal que $f_{i_0, \dots, i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q})$ para todos

los $(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}$. Se define una operación suma para q -cocadenas de forma natural, sumando componente a componente.

En ocasiones omitiremos algunos subíndices para lograr mayor claridad: por ejemplo, para una 1-cocadena $(f_{ij})_{i,j \in I}$ podemos escribir (f_{ij}) si no hay confusión respecto al recubrimiento $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$.

Definición 2.1.2. Dados $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ con $q = 0, 1, 2$, se definen los *operadores cofrontera* (gracias a la notación y el contexto sabremos a cuál de los dos nos referimos):

$$\delta : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \quad \delta : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

(a) Para $(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ sea $\delta((f_i)_{i \in I}) = (g_{ij})_{i,j \in I}$ donde

$$g_{ij} := f_i - f_j \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

(b) Para $(f_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ sea $\delta((f_{ij})_{i,j \in I}) = (g_{ijk})$ donde

$$g_{ijk} := f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Estos operadores cofrontera son homomorfismos de grupos. Daremos un nombre concreto a la imagen de uno y al núcleo de otro:

Definición 2.1.3. Sea $Z_1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \ker(C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$. Los elementos de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ son los *1-cociclos*. Una 1-cocadena $(f_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ es un cociclo si y sólo si cumple la *relación de cociclo*:

$$f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \quad \text{en } U_i \cap U_j \cap U_k, \quad \forall i, j, k \in I.$$

La relación de cociclo implica que $f_{ii} = 0$ y que $f_{ij} = -f_{ji}$.

Definición 2.1.4. Sea $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \text{Im}(C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$. Los elementos de $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ se denominan *1-cofronteras*. En particular, toda cofrontera es un cociclo.

Se dice que un 1-cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ *se separa* si y sólo si existe una 0-cocadena $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ tal que $f_{ij} = g_i - g_j$ en $U_i \cap U_j$ para todo $i, j \in I$. Las cofronteras son los cociclos que pueden separarse.

Definición 2.1.5. El grupo cociente

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

es llamado el *primer grupo de cohomología* con coeficientes en \mathcal{F} respecto al recubrimiento \mathfrak{U} . Sus elementos reciben el nombre de *clases de cohomología* y dos cociclos que pertenecen a la misma clase de cohomología se denominan *cohomólogos*. Dos cociclos son cohomólogos si y sólo si su diferencia es una cofrontera.

Para definir grupos de cohomología que dependan únicamente de X y \mathcal{F} y no del recubrimiento elegido tomaremos un límite a partir de recubrimientos cada vez más finos. Decimos que un recubrimiento $\mathfrak{V} = (V_k)_{k \in K}$ es *más fino* que otro recubrimiento \mathfrak{U} , hecho que denotaremos por $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, si cada V_k está contenido en al menos un U_i . Podemos entonces definir una aplicación (que no es única) $\tau : K \rightarrow I$ tal que $V_k \subset U_{\tau k}$ para todo $k \in K$. Empleando esta aplicación podemos definir otra,

$$t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

tal que $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ es enviado a $t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}((f_{ij})) = (g_{kl})$ donde

$$g_{kl} := f_{\tau k, \tau l}|_{V_k \cap V_l} \quad \text{para todo } k, l \in K.$$

Puesto que esta aplicación envía cofronteras en cofronteras, induce de forma natural una aplicación $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ que denotaremos igual.

Lema 2.1.6. *La aplicación*

$$t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

es independiente de la elección de $\tau : K \rightarrow I$.

Demostración. Supongamos que $\sigma : K \rightarrow I$ es otra aplicación tal que $V_k \subset U_{\sigma k}$ para todo $k \in K$. Sea $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ y definamos

$$g_{kl} := f_{\tau k, \tau l}|_{V_k \cap V_l} \quad \text{y} \quad \tilde{g}_{kl} := f_{\sigma k, \sigma l}|_{V_k \cap V_l}.$$

Nuestro objetivo es probar que los cociclos (g_{kl}) y (\tilde{g}_{kl}) son cohomólogos. Puesto que $V_k \subset U_{\tau k} \cap U_{\sigma k}$, podemos definir

$$h_k := f_{\tau k, \sigma k}|_{V_k} \in \mathcal{F}(V_k).$$

En la intersección $V_k \cap V_l$ se tiene

$$\begin{aligned} g_{kl} - \tilde{g}_{kl} &= f_{\tau k, \tau l} - f_{\sigma k, \sigma l} = \\ &= f_{\tau k, \tau l} + f_{\tau l, \sigma k} - f_{\tau l, \sigma k} - f_{\sigma k, \sigma l} = \\ &= f_{\tau k, \sigma k} - f_{\tau l, \sigma l} = h_k - h_l. \end{aligned}$$

Entonces el cociclo $(g_{kl}) - (\tilde{g}_{kl})$ es una cofrontera, como queríamos demostrar. \square

Lema 2.1.7. *La aplicación*

$$t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

es inyectiva.

Demostración. Sea $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ cuya imagen en $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ se separa. Queremos ver que (f_{ij}) también se separa, es decir, que el núcleo de $t_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}$ es trivial.

Supongamos que $f_{\tau k, \tau l} = g_k - g_l$ en $V_k \cap V_l$, donde $g_k \in \mathcal{F}(V_k)$. Entonces en $U_i \cap V_k \cap V_l$ se tiene

$$g_k - g_l = f_{\tau k, \tau l} = f_{\tau k, i} + f_{i, \tau l} = f_{i, \tau l} - f_{i, \tau k}$$

y por tanto $f_{i, \tau k} + g_k = f_{i, \tau l} + g_l$. Aplicando el Axioma de Haz II a la familia de abiertos $(U_i \cap V_k)_{k \in K}$, se obtiene $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tal que

$$h_i = f_{i, \tau k} + g_k \quad \text{en } U_i \cap V_k.$$

Con estos elementos h_i , en $U_i \cap U_j \cap V_k$ se tiene que

$$f_{ij} = f_{i, \tau k} + f_{\tau k, j} = f_{i, \tau k} + g_k - f_{j, \tau k} - g_k = h_i - h_j.$$

Puesto que la elección de k es arbitraria, se sigue del Axioma de Haz I que esta ecuación es válida en $U_i \cap U_j$, es decir, el cociclo (f_{ij}) se separa respecto al recubrimiento \mathfrak{U} . \square

Si consideramos tres recubrimientos abiertos tales que $\mathfrak{W} < \mathfrak{V} < \mathfrak{U}$, entonces $t_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}} \circ t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} = t_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}$. Podemos definir una relación de equivalencia \sim en la unión disjunta de todos los $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ donde \mathfrak{U} recorre todos los recubrimientos abiertos de X : dos clases de cohomología $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ y $\eta \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ son equivalentes si existe un recubrimiento \mathfrak{V} con $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}'$ tal que $t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(\xi) = t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}'}(\eta)$.

Definición 2.1.8. El primer grupo de cohomología de X con coeficientes en el haz \mathcal{F} se define como el límite inductivo

$$H^1(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \left(\bigsqcup_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \right) / \sim.$$

Dados dos elementos $x, y \in H^1(X, \mathcal{F})$ con representantes $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ y $\eta \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ respectivamente, se define la suma en $H^1(X, \mathcal{F})$ de la siguiente forma: si \mathfrak{V} es un refinamiento de \mathfrak{U} y \mathfrak{U}' entonces $x + y \in H^1(X, \mathcal{F})$ se define como la clase de equivalencia de $t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(\xi) + t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}'}(\eta) \in H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$. Esta definición no depende de las elecciones realizadas y otorga a $H^1(X, \mathcal{F})$ la estructura de un grupo abeliano. Si \mathcal{F} es un haz de espacios vectoriales entonces tanto $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ como $H^1(X, \mathcal{F})$ son de forma natural espacios vectoriales.

Del Lema 2.1.7 se sigue que para todo recubrimiento abierto \mathfrak{U} de X la aplicación canónica $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$ es inyectiva. En particular, se tiene que $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ si y sólo si $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ para todo recubrimiento abierto \mathfrak{U} de X .

Teorema 2.1.9. *Sea X una superficie de Riemann y \mathcal{E} el haz de funciones diferenciables en X . Entonces $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$.*

Demostración. Trabajaremos bajo la suposición de que X verifica el segundo axioma de numerabilidad, es decir, su topología posee una base numerable, lo cual es inmediato en el caso de las superficies de Riemann compactas. En realidad esto ocurre para toda superficie de Riemann, como afirma el Teorema de Radó [3, Teorema 23.3].

Sea $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X . Existe una partición de la unidad $(\psi_i)_{i \in I}$, una familia de funciones $\psi_i \in \mathcal{E}(X)$ tal que

- (a) $\text{Sop}(\psi_i) \subset U_i$.
- (b) Todo punto de X tiene un entorno que interseca con un número finito de conjuntos $\text{Sop}(\psi_i)$.
- (c) $\sum_{i \in I} \psi_i = 1$.

Veamos que todo cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$ se separa.

La función $\psi_i f_{ij}$, definida en $U_i \cap U_j$, puede extenderse de forma diferenciable a todo U_i de forma que se anule fuera de su soporte. De esta forma puede considerarse un elemento de $\mathcal{E}(U_i)$. Definamos

$$g_i := \sum_{j \in I} \psi_j f_{ij}.$$

Debido a (b), en el entorno de cualquier punto de U_i esta suma tiene un número finito de términos no nulos y por tanto define un elemento $g_i \in \mathcal{E}(U_i)$. Para $i, j \in I$

$$g_i - g_j = \sum_{k \in I} \psi_k f_{ik} - \sum_{k \in I} \psi_k f_{jk} = \sum_{k \in I} \psi_k (f_{ik} - f_{jk}) = \sum_{k \in I} \psi_k f_{ij} = f_{ij}$$

en $U_i \cap U_j$ y (f_{ij}) es una cofrontera, por lo que $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = 0$. □

De forma similar a este teorema se muestra que en una superficie de Riemann X los primeros grupos de cohomología con coeficientes en los haces $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{1,0}$, $\mathcal{E}^{0,1}$ y $\mathcal{E}^{(2)}$ también son triviales.

Teorema 2.1.10 (Leray). *Sea \mathcal{F} un haz de grupos abelianos en el espacio topológico X y $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X tal que $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ para todo $i \in I$. Entonces*

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Un recubrimiento así recibe el nombre de recubrimiento de Leray (de primer orden) para el haz \mathcal{F} .

Demostración. Basta ver que para todo recubrimiento abierto $\mathfrak{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ con $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ la aplicación $t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ es un isomorfismo. Por el lema 2.1.7 sabemos que es inyectiva.

Sea $\tau : A \rightarrow I$ una aplicación con $V_\alpha \subset U_{\tau\alpha}$ para todo $\alpha \in A$. Debemos probar que dado cualquier cociclo $(f_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ existe un cociclo $(F_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ tal que $(f_{\alpha\beta}) - (F_{\tau\alpha, \tau\beta})$ es un cociclo cohomólogo al cero respecto a \mathfrak{V} . Para cada i , la familia $(U_i \cap V_\alpha)_{\alpha \in A}$ es un recubrimiento abierto de U_i , que denotamos $U_i \cap \mathfrak{V}$. Por hipótesis tenemos que $H^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathcal{F}) = 0$, es decir, existe $g_{i\alpha} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_\alpha)$ tal que

$$f_{\alpha\beta} = g_{i\alpha} - g_{i\beta} \quad \text{en } U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta.$$

En la intersección $U_i \cap U_j \cap V_\alpha \cap V_\beta$ se tiene

$$g_{i\alpha} - g_{j\alpha} = g_{i\beta} - g_{j\beta},$$

luego por el Axioma de Haz II existen elementos $F_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ tales que $F_{ij} = g_{j\alpha} - g_{i\alpha}$ en $U_i \cap U_j \cap V_\alpha$. La cocadena (F_{ij}) verifica la relación de cociclo y por lo tanto está en $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

Sea $h_\alpha := g_{\tau\alpha, \alpha}|_{V_\alpha} \in \mathcal{F}(V_\alpha)$. Entonces en $V_\alpha \cap V_\beta$ se tiene

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} - F_{\tau\alpha, \tau\beta} &= (g_{\tau\beta, \alpha} - g_{\tau\beta, \beta}) - (g_{\tau\beta, \alpha} - g_{\tau\alpha, \alpha}) = \\ &= g_{\tau\alpha, \alpha} - g_{\tau\beta, \beta} = h_\alpha - h_\beta \end{aligned}$$

y por tanto $(f_{\alpha\beta} - F_{\tau\alpha, \tau\beta})$ se separa. \square

Definición 2.1.11. Sea \mathcal{F} un haz de grupos abelianos en el espacio topológico X y $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X . Definimos

$$\begin{aligned} Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= \ker(C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})), \\ B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= 0, \\ H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})/B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Por la definición de δ , una 0-cocadena $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ pertenece a $Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ si y sólo si $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo $i, j \in I$. Por el Axioma de Haz II los elementos f_i se juntan para dar un elemento global $f \in \mathcal{F}(X)$, y existe un isomorfismo natural

$$H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X).$$

Entonces los grupos $H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ son independientes del recubrimiento \mathfrak{U} y puede definirse

$$H^0(X, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(X).$$

Vista esta última definición intentemos mostrar una idea del significado de los grupos de cohomología de Čech. Esta teoría es un instrumento matemático que resulta de gran utilidad a la hora de medir obstrucciones a la extensión de objetos locales. Consideremos, por ejemplo, el problema de Mittag-Leffler: dado un dominio $U \subset \mathbb{C}$, un conjunto discreto de puntos $A = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset U$ y una familia de polinomios en $(z - z_k)^{-1}$ sin término independiente, $P_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}(z - z_k)^{-j}$, quiere hallarse una función meromorfa en U , con polos en A y cuyas partes principales son las descritas por los polinomios anteriores. Si $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento de U con la propiedad de que cada z_k pertenece a un único $U_{i(k)}$, podemos tomar $f_i(z)$ meromorfa en U_i que resuelve nuestro problema.

El conjunto de funciones $\{f_i - f_j\}_{i,j \in I}$ se interpreta como un elemento de $H^1(U, \mathcal{O})$, ya que por definición tienen las mismas partes principales en su dominio de definición común. Si este espacio resulta ser nulo, existirán funciones $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ tales que $g_i - g_j = f_i - f_j$ en cada $U_i \cap U_j$. Entonces $f_i - g_i = f_j - g_j$ se “pegan”, definiendo una función meromorfa f en U que resuelve el problema de Mittag-Leffler.

El conocido teorema de Mittag-Leffler de la variable compleja [1, §6.3.1] puede entonces interpretarse como que $H^1(U, \mathcal{O}) = 0$ para todo abierto $U \subset \mathbb{C}$. Esta interpretación puede trasladarse a otras superficies de Riemann [3, §18], y ello constituye el origen del problema de Riemann-Roch que estamos tratando en esta memoria.

2.2. Lema de Dolbeault

Aquí resolveremos la ecuación diferencial de Cauchy-Riemann para el caso no homogéneo, $(\partial f / \partial \bar{z}) = g$, donde g es una función diferenciable dada en un disco X . Esto se utilizará para probar que el grupo de cohomología $H^1(X, \mathcal{O})$ es el trivial.

Lema 2.2.1. *Para toda función $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ con soporte compacto existe una función $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Demostración. Definimos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Para ver que la integral está bien definida para cada $z \in \mathbb{C}$ la expresaremos en

coordenadas polares alrededor de z , $\zeta = z + re^{i\theta}$, $d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = -2ir dr \wedge d\theta$. Entonces

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{g(z + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} r dr d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R g(z + e^{i\theta}) e^{-i\theta} dr d\theta,$$

donde $R > 0$ suficientemente grande para que $\text{Sop}(g) \subset B(z, R)$. Por lo tanto f está bien definida.

Volviendo a la expresión original realizamos el cambio de variable $w = \zeta - z$, y por ser esta variable muda la renombraremos por ζ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \iint_{B_R(0)} \frac{g(z + w)}{w} dw \wedge d\bar{w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{B_R(0)} \frac{g(z + \zeta)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Debido a la regularidad de la dependencia con z podemos derivar respecto a \bar{z} bajo el signo integral:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{B_R(0)} \frac{\partial g(z + \zeta)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{A_\varepsilon} \frac{\partial g(z + \zeta)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

donde A_ε es el anillo $A_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \varepsilon \leq |\zeta| \leq R\}$, $\varepsilon > 0$. Aplicando la regla de la cadena a

$$\frac{\partial g(z + \zeta)}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial g(z + \zeta)}{\partial \bar{\zeta}}$$

se tiene que, para $\zeta \in A_\varepsilon$,

$$\frac{\partial g(z + \zeta)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\zeta} = \frac{\partial g(z + \zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta} = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{g(z + \zeta)}{\zeta} \right)$$

ya que $(\partial\zeta/\partial\bar{\zeta}) = 0$. Llegamos así a

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{A_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{g(z + \zeta)}{\zeta} \right) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{A_\varepsilon} d\omega$$

con la forma diferencial

$$\omega(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \frac{g(z + \zeta)}{\zeta} d\zeta \in \mathcal{E}^{1,0}(A_\varepsilon).$$

Aplicando el Teorema de Stokes en un disco del plano complejo 1.7.7:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{A_\varepsilon} d\omega = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial A_\varepsilon} \omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\zeta|=\varepsilon} \omega$$

ya que para $|\zeta| = R$ se tiene que $\omega(\zeta) = 0$. Parametrizando la circunferencia de radio ε , $\zeta = \varepsilon e^{i\theta}$, $d\zeta = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i\theta d\theta$ se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = g(z).$$

□

Ahora generalizaremos este resultado para los casos en que g no tenga soporte compacto.

Teorema 2.2.2 (Lema de Dolbeault). *Sea $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} = B_R(0)$, $0 < R \leq \infty$ y $g \in \mathcal{E}(X)$. Entonces existe $f \in \mathcal{E}(X)$ tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Demostración. A partir de ahora abreviaremos $\bar{\partial} := (\partial/\partial \bar{z})$.

Sean $0 < R_0 < R_1 < \dots < R_n < \dots$ una sucesión de radios tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$ y sean $X_n := B_{R_n}(0)$. Para cada n existe una función $\psi_n \in \mathcal{E}(X)$ con soporte compacto $\text{Sop}(\psi_n) \subset X_{n+1}$ y $\psi_n|_{X_n} = 1$. Como las funciones $\psi_n g$ se anulan fuera de X_{n+1} , pueden extenderse por 0 a funciones en todo \mathbb{C} . Por el lema anterior existen funciones $f_n \in \mathcal{E}(X)$ tales que $\bar{\partial} f_n = \psi_n g$ en X . Por inducción vamos a alterar la sucesión (f_n) a otra (\tilde{f}_n) que para todo $n \geq 1$ satisface:

- (a) $\bar{\partial} \tilde{f}_n = g$ en X ,
- (b) $\left\| \tilde{f}_{n+1} - f_n \right\|_{X_{n-1}} \leq 2^{-n}$.

donde $\|f\|_A := \sup_{x \in A} |f(x)|$ es la norma del supremo.

Definimos $\tilde{f}_1 = f_1$. Supongamos que $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ ya están construidas. Entonces $\bar{\partial}(f_{n+1} - \tilde{f}_n) = 0$ en X_n , y por lo tanto $f_{n+1} - \tilde{f}_n$ es holomorfa en X_n . Debido a esto existe un polinomio P , formado por un número finito de términos de la serie de Taylor de esta diferencia, tal que

$$\|f_{n+1} - \tilde{f}_n - P\|_{X_{n-1}} \leq 2^{-n}.$$

Definiendo $\tilde{f}_{n+1} := f_{n+1} - P$, esta función satisface (b). Además, en X_{n+1} se tiene

$$\bar{\partial} \tilde{f}_{n+1} = \bar{\partial} f_{n+1} - \bar{\partial} P = \bar{\partial} f_{n+1} = \psi_{n+1} g = g,$$

luego (a) también se verifica. Como todo punto $z \in X$ está contenido en todos salvo un número finito de X_n , el límite

$$f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(z)$$

existe. En X_n podemos escribir

$$f = \tilde{f}_n + \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k).$$

Para $k \geq n$, las funciones $\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k$ son holomorfas en X_n . Debido a (b), la serie

$$F_n := \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k)$$

converge uniformemente en X_n y es holomorfa en este conjunto. Finalmente, $f = \tilde{f}_n + F_n$ es infinitamente diferenciable en X_n para todo n y por tanto $f \in \mathcal{E}(X)$, además de verificar $\bar{\partial}f = \bar{\partial}\tilde{f}_n = g$ en X_n , concluyendo que $\bar{\partial}f = g$ en todo X . \square

Teorema 2.2.3. *Sea $X = B_R(0)$, $0 < R \leq \infty$. Entonces $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{U} = (U_i)$ un recubrimiento abierto de X y sea $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ un cociclo. Puesto que $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$ y $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$, existe una cocadena $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$ tal que

$$f_{ij} = g_i - g_j \quad \text{en } U_i \cap U_j.$$

Como $\bar{\partial}f_{ij} = 0$, se tiene que $\bar{\partial}g_i = \bar{\partial}g_j$ en $U_i \cap U_j$ y por tanto existe una función global $h \in \mathcal{E}(X)$ con $h|_{U_i} = \bar{\partial}g_i$. Por el Lema de Dolbeault podemos encontrar una función $g \in \mathcal{E}(X)$ tal que $\bar{\partial}g = h$. Definimos

$$f_i := g_i - g.$$

f_i es holomorfa, ya que $\bar{\partial}f_i = \bar{\partial}g_i - \bar{\partial}g = 0$ y entonces $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Como en $U_i \cap U_j$ se tiene que

$$f_i - f_j = g_i - g_j = f_{ij},$$

se concluye que el cociclo f_{ij} se separa. \square

2.3. Teorema de finitud

En esta sección probaremos que para cualquier superficie de Riemann X el grupo de cohomología $H^1(X, \mathcal{O})$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita. Una de las consecuencias importantes de este resultado es la existencia de funciones meromorfas no constantes en cualquier superficie de Riemann compacta.

Definición 2.3.1. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Dada una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(D)$ definimos su *norma* L^2 :

$$\|f\|_{L^2(D)} := \left(\iint_D |f(x+iy)|^2 dx dy \right)^{1/2} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

Denotaremos por $L^2(D, \mathcal{O})$ al espacio vectorial de todas las funciones holomorfas de cuadrado integrable en D , es decir, aquellas con norma L^2 finita.

Si

$$\text{Vol}(D) := \iint_D dx dy < \infty,$$

entonces para toda $f \in \mathcal{O}(D)$ acotada se tiene

$$\|f\|_{L^2(D)} \leq \sqrt{\text{Vol}(D)} \|f\|_D.$$

Dentro de $L^2(D, \mathcal{O})$ podemos definir un producto interno: para $f, g \in L^2(D, \mathcal{O})$ se define

$$\langle f, g \rangle := \iint_D f \bar{g} dx dy \in \mathbb{C}$$

y existe ya que para todo $z \in D$ se cumple $|f(z)\bar{g}(z)| \leq \frac{1}{2}(|f(z)|^2 + |g(z)|^2)$. Con este producto interno tenemos una noción de ortogonalidad en el espacio. Ahora sea $B = B(a, r)$ el disco con centro a y radio $r > 0$.

Proposición 2.3.2. La familia de monomios $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $\psi_n := (z - a)^n$ forma un sistema ortogonal en $L^2(B, \mathcal{O})$ y

$$\|\psi_n\|_{L^2(B)} = \frac{\sqrt{\pi} r^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Con un cambio a coordenadas polares hallamos que

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \iint_B \psi_n \overline{\psi_m} dx dy = \iint_B (z - a)^n (\bar{z} - \bar{a})^m dx dy = \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^r \rho^n e^{in\theta} \rho^m e^{-im\theta} \rho d\rho d\theta = \int_{\rho=0}^r \rho^{n+m+1} d\rho \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta. \end{aligned}$$

La integral en θ se anula cuando $n \neq m$ y vale 2π cuando $n = m$. En este último caso

$$\langle \psi_n, \psi_n \rangle = \|\psi_n\|_{L^2(B)}^2 = 2\pi \frac{r^{2n+2}}{2n+2} = \left(\frac{\sqrt{\pi} r^{n+1}}{n+1} \right)^2.$$

□

Si $f \in L^2(B, \mathcal{O})$ y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

es su serie de Taylor alrededor de a , del teorema de Pitágoras se tiene

$$\|f\|_{L^2(B)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} |c_n|^2. \quad (*)$$

Proposición 2.3.3. Sea $D \subset \mathbb{C}$ abierto, $r > 0$ y

$$D_r := \{z \in \mathbb{C} \mid B(z, r) \subset D\}$$

el conjunto de puntos de D con distancia a la frontera mayor que r . Entonces para todo $f \in L^2(D, \mathcal{O})$ se tiene

$$\|f\|_{D_r} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \|f\|_{L^2(D)}.$$

Demostración. Sea $a \in D_r$ y $f(x) = \sum c_n (z-a)^n$ es la serie de Taylor alrededor de a . Aplicando (*) se obtienen las desigualdades

$$|f(a)| = |c_0| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \|f\|_{L^2(B(a,r))} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \|f\|_{L^2(D)}.$$

Como a es arbitrario se cumple el resultado. □

Corolario 2.3.4. El espacio $L^2(D, \mathcal{O})$ es completo y por lo tanto es un espacio de Hilbert.

Demostración. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^2(D, \mathcal{O})$. La proposición anterior muestra que $(f_n)_n$ también es uniformemente de Cauchy, por lo que converge hacia una función $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ uniformemente en los compactos de D , y en particular f es holomorfa en D . Esto es suficiente para probar que $\|f_n - f\|_{L^2(B)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, es decir, la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en el sentido de $L^2(D, \mathcal{O})$. □

Lema 2.3.5. Sean $D' \subset D$ dos abiertos de \mathbb{C} tal que D' es relativamente compacto respecto de D , lo cual denotaremos por $D' \Subset D$. Dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un subespacio vectorial cerrado $A \subset L^2(D, \mathcal{O})$ de codimensión finita tal que

$$\|f\|_{L^2(D')} \leq \varepsilon \|f\|_{L^2(D)} \quad \text{para todo } f \in A.$$

Demostración. Como $\overline{D'}$ es compacto y está contenido en D , existe $r \geq 0$ y un número finito de puntos $a_1, \dots, a_k \in D$ tales que:

- (a) $B(a_j, r) \subset D$ para $j = 1, \dots, k$,
- (b) $D' \subset \bigcup_{j=1}^k B(a_j, r/2)$

Elijamos n lo suficientemente grande como para que $2^{-n-1}k \leq \varepsilon$. Sea A el conjunto de todas las funciones $f \in L^2(D, \mathcal{O})$ que se anulan en todos los puntos a_j en un orden al menos n . Entonces A es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(D, \mathcal{O})$ de codimensión $\leq kn$. Sea $f \in A$. Entonces f tiene serie de Taylor alrededor de a_j

$$f(z) = \sum_{v=n}^{\infty} c_{vj}(z - a_j)^v.$$

Para cada $\rho \leq r$ se tiene

$$\|f\|_{L^2(B(a_j, \rho))}^2 = \sum_{v=n}^{\infty} \frac{\pi \rho^{2n+2}}{v+1} |c_v|^2$$

y por tanto $\|f\|_{L^2(B(a_j, r/2))} \leq 2^{-n-1} \|f\|_{L^2(B(a_j, r))}$. Empleando (a) y (b) se deduce que

$$\|f\|_{L^2(B(a_j, r))} \leq \|f\|_{L^2(D)} \quad \text{y} \quad \|f\|_{L^2(D')} \leq \sum_{j=1}^k \|f\|_{L^2(B(a_j, r/2))}.$$

Se concluye que

$$\|f\|_{L^2(D')} \leq k 2^{-n-1} \|f\|_{L^2(D)} \leq \varepsilon \|f\|_{L^2(D)}.$$

□

Definición 2.3.6. Sea X una superficie de Riemann y sea una familia finita de cartas $(U_i^*, z_i), i = 1, \dots, n, \mathfrak{U}^* = (U_i^*)_{1 \leq i \leq n}$, tal que $z_i(U_i^*) \subset \mathbb{C}$ es un disco (\mathfrak{U}^* no es necesariamente un recubrimiento). Sean también $U_i \subset U_i^*$ abiertos y $\mathfrak{U} := (U_i)_{1 \leq i \leq n}$. Respecto a estas cartas (U_i^*, z_i) podemos definir las siguientes normas:

$$\|g\|_{L^2(U_i)} := \|g \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i(U_i))}$$

$$\|g\|_{L^2(U_i \cap U_j)} := \|g \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i(U_i \cap U_j))}.$$

Podemos así definir una norma L^2 en los grupos de cocadenas $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ y $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, definidas en $|\mathfrak{U}| := U_1 \cup \dots \cup U_n$ de la siguiente forma:

(a) Para $\eta = (f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ sea

$$\|\eta\|_{L^2(\mathfrak{U})}^2 := \sum_i \|f_i\|_{L^2(U_i)}^2.$$

(b) Para $\xi = (f_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ sea

$$\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})}^2 := \sum_{i,j} \|f_{ij}\|_{L^2(U_i \cap U_j)}^2.$$

El conjunto de cocadenas con norma finita, $C_{L^2}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, es un subespacio vectorial de $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, $q = 0, 1$, y estos subespacios son espacios de Hilbert. Los cociclos de $C_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ forma un subespacio vectorial cerrado que denotaremos por $Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

Si $V_i \in U_i, i = 1, \dots, n$, son abiertos relativamente compactos y $\mathfrak{V} = (V_i)_{1 \leq i \leq n}$, denotaremos este hecho como $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$. Para cualquier cocadena $\xi \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ se tiene $\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} < \infty$. Se sigue del Lema 2.3.5 que dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un subespacio vectorial cerrado $A \subset Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ de codimensión finita tal que

$$\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leq \varepsilon \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})} \quad \text{para todo } \xi \in A.$$

Lema 2.3.7. *Sea X una superficie de Riemann y \mathfrak{U}^* una familia finita de cartas en X como en 2.3.6. Supongamos que tenemos reducciones de \mathfrak{U}^* tal que $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V} \ll \mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para toda $\xi \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ existen elementos $\zeta \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ (δ es el operador cofrontera) y $\eta \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ con*

$$\zeta = \xi + \delta\eta \quad \text{en } \mathfrak{W}$$

y

$$\max\left(\|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})}\right) \leq C \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}.$$

Demostración. Sea $\xi = (f_{ij}) \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$. Olvidándonos por ahora de las normas, primero construiremos $\zeta \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ y $\eta \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ tal que $\zeta = \xi + \delta\eta$ en \mathfrak{W} . Por el Teorema 2.1.9 existe una cocadena $(g_i) \in C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ tal que

$$f_{ij} = g_i - g_j \quad \text{en } V_i \cap V_j.$$

Puesto que $d''f_{ij} = 0$ esto implica que $d''g_i = d''g_j$ en $V_i \cap V_j$, y por tanto existe una forma diferencial $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(|\mathfrak{V}|)$ con $\omega|_{V_i} = d''g_i$. Ya que $|\mathfrak{W}| \Subset |V|$, existe una función $\psi \in \mathcal{E}(X)$ con

$$\text{Sop}(\psi) \subset |\mathfrak{W}| \quad \text{y} \quad \psi|_{|\mathfrak{W}|} = 1.$$

Entonces $\psi\omega$ puede considerarse como un elemento de $\mathcal{E}(|\mathfrak{U}^*|)$. Por el Lema de Dolbeault 2.2.2 existen funciones $h_i \in \mathcal{E}(U_i^*)$ tal que $d''h_i = \psi\omega$ en U_i^* . Como $d''h_i = d''h_j$ en $U_i^* \cap U_j^*$ se sigue que

$$F_{ij} := h_i - h_j \in \mathcal{O}(U_i^* \cap U_j^*).$$

Definamos $\zeta := (F_{ij})|_{\mathfrak{U}}$. Como $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$, se tiene $\zeta \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. En W_i se verifica que $d''h_i = \psi\omega = w = d''g_i$, luego $h_i - g_i$ es holomorfa en W_i . Como también está acotada en W_i se tiene

$$\eta := (h_i - g_i)|_{|\mathfrak{W}|} \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}).$$

Ahora $F_{ij} - f_{ij} = (h_i - g_i) - (h_j - g_j)$ en $W_i \cap W_j$ y por lo tanto

$$\zeta - \xi = \delta\eta \quad \text{en } \mathfrak{W}.$$

Para lograr la restricción deseada en las normas consideramos el espacio de Hilbert

$$H := Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \times Z_{L^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \times C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

con la norma

$$\|(\zeta, \xi, \eta)\|_H := \left(\|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}^2 + \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}^2 + \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})}^2 \right)^{1/2}.$$

Si $L \subset H$ es el subespacio

$$L := \{(\zeta, \xi, \eta) \in H \mid \zeta = \xi + \delta\eta \text{ en } \mathfrak{W}\},$$

por ser cerrado en H también es un espacio de Hilbert.

Con todo lo anterior podemos afirmar que la aplicación lineal continua $\pi : L \rightarrow Z_{L^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$, $(\zeta, \xi, \eta) \rightarrow \xi$ es sobreyectiva. Por el Teorema de Banach, π es abierta. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que para todo $\xi \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ existe $x = (\zeta, \xi, \eta) \in L$ con $\pi(x) = \xi$ y $\|x\|_H \leq C \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}$. Esta constante cumple las condiciones buscadas. \square

Lema 2.3.8. *Bajo las mismas suposiciones que en el lema anterior existe un subespacio vectorial de dimensión finita $S \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ con la siguiente propiedad: para todo $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ existen elementos $\sigma \in S$ y $\eta \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ tal que*

$$\sigma = \xi + \delta\eta \quad \text{en } \mathfrak{W},$$

es decir, la restricción natural $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ tiene imagen de dimensión finita.

Demostración. Sea C la constante del lema anterior y definamos $\varepsilon := 1/(2C)$. Sabemos que existe un subespacio vectorial cerrado de codimensión finita $A \subset Z_{L^2}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ tal que

$$\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq \varepsilon \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})} \quad \text{para todo } \xi \in A.$$

Sea S el subespacio ortogonal complementario de A , es decir, $A \oplus S = Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Sea ahora $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ cualquiera. Como $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{U}$, entonces $M := \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq \infty$. Por el lema anterior existen $\zeta_0 \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ y $\eta_0 \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ tales que

$$\zeta_0 = \xi + \delta\eta_0 \quad \text{en } \mathfrak{W}$$

$$\text{y } \|\zeta_0\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq CM, \|\eta_0\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq CM.$$

Supongamos que $\zeta_0 = \xi_0 + \sigma_0$, $\xi_0 \in A$, $\sigma_0 \in S$ es la descomposición ortogonal. Construiremos por inducción elementos

$$\zeta_v \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}), \quad \eta_v \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}), \quad \xi_v \in A, \quad \sigma_v \in S$$

con las siguientes propiedades:

- (a) $\zeta_v = \xi_{v-1} + \delta\eta_v$ en \mathfrak{W} .
- (b) $\zeta_v = \xi_v + \sigma_v$
- (c) $\|\zeta_v\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq 2^{-v}CM, \|\eta_v\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq 2^{-v}CM$.

Consideremos el paso de v a $v+1$. Como $\zeta_v = \xi_v + \sigma_v$ es una descomposición ortogonal se verifica que $\|\xi_v\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq \|\zeta_v\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq 2^{-v}CM$. Entonces

$$\|\xi_v\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leq \varepsilon \|\xi_v\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leq 2^{-v}\varepsilon CM \leq 2^{-v-1}M.$$

Aplicando de nuevo el lema anterior, existen elementos $\zeta_{v+1} \in Z_{L^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ y $\eta_{v+1} \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ tales que

$$\zeta_{v+1} = \xi_v + \delta\eta_{v+1} \quad \text{en } \mathfrak{W}$$

y

$$\text{máx} \left(\|\zeta_{v+1}\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_{v+1}\|_{L^2(\mathfrak{W})} \right) \leq 2^{-v-1}CM.$$

Ahora se tiene una descomposición ortogonal $\zeta_{v+1} = \xi_{v+1} + \sigma_{v+1}$, donde $\xi_{v+1} \in A$ y $\sigma_{v+1} \in S$, terminando así el paso inductivo.

De la ecuación $\zeta_0 = \xi + \delta\eta_0$, junto con las ecuaciones (a) y (b) hasta $v = k$ se obtiene

$$\xi_k + \sum_{v=0}^k \sigma_v = \xi + \delta \left(\sum_{v=0}^k \eta_v \right) \quad \text{en } \mathfrak{W}. \quad (*)$$

De (b) y (c) se sigue que

$$\text{máx} \left(\|\xi_v\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\sigma_v\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_v\|_{L^2(\mathfrak{W})} \right) \leq 2^{-v}CM.$$

Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$ y las series

$$\sigma := \sum_{v=0}^{\infty} \sigma_v \in S$$

$$\eta := \sum_{v=0}^{\infty} \eta_v \in C_{L^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

convergen. Finalmente de (*) se tiene que $\sigma = \xi + \delta\eta$ en \mathfrak{W} . \square

Sean X un espacio topológico, $Y \subset X$ un subconjunto abierto y \mathcal{F} un haz de grupos abelianos en X . Para todo recubrimiento abierto $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ la familia $\mathfrak{U} \cap Y := (U_i \cap Y)_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de Y y la restricción natural $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{F})$ induce un homomorfismo $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{F})$. Todos los homomorfismo de cada \mathfrak{U} posible dan lugar al homomorfismo de restricción

$$H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{F}).$$

Si tenemos $Y' \subset Y \subset X$ abiertos, claramente la restricción

$$H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(Y', \mathcal{F})$$

es composición de los homomorfismo

$$H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{F}) \quad \text{y} \quad H^1(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(Y', \mathcal{F}).$$

Teorema 2.3.9. *Sea X una superficie de Riemann e $Y_1 \Subset Y_2 \subset X$ son abiertos. Entonces el homomorfismo de restricción*

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O})$$

tiene una imagen de dimensión finita.

Demostración. Existe una familia finita de cartas $(U_i, z_i)_{1 \leq i \leq n}$ en X y conjuntos abiertos y relativamente compactos $W_i \Subset V_i \Subset U_i \Subset U_i^*$ con las siguientes propiedades:

- (a) $Y_1 \subset \bigcup_{i=1}^n W_i =: Y' \Subset Y'' := \bigcup_{i=1}^n U_i \subset Y_2$,
- (b) Todos los $z(U_i^*)$, $z_i(U_i)$ y $z_i(W_i)$ son discos en \mathbb{C} .

Sea $\mathfrak{U} := (U_i)_{1 \leq i \leq n}$, $\mathfrak{W} := (W_i)_{1 \leq i \leq n}$. Aplicando el Lema 2.3.8 la restricción $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ tiene imagen de dimensión finita. Además, por el Teorema 2.2.3, $H^1(U_i, \mathcal{O}) = H^1(W_i, \mathcal{O}) = 0$. Aplicando el Teorema de Leray 2.1.10, $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = H^1(Y'', \mathcal{O})$ y $H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) = H^1(Y', \mathcal{O})$. Como $H^1(Y_2, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O})$ puede factorizarse así:

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y'', \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y', \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O}),$$

queda probado el teorema. □

Corolario 2.3.10. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces*

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty.$$

Demostración. Como X es compacto, puede tomarse $Y_1 = Y_2 = X$ en el teorema anterior. □

Definición 2.3.11. Sea X una superficie de Riemann compacta. El valor

$$g := \dim H^1(X, \mathcal{O})$$

recibe el nombre de *género* de X .

Podría parecer que esta definición de género para una superficie de Riemann compacta cualquiera no está relacionada con el género topológico g_τ d, que hace referencia al número de agujeros o asas que tiene la superficie. Sin embargo, el Teorema de Riemann-Roch nos permitirá demostrar que ambas definiciones coinciden al considerar curvas algebraicas planas.

Para finalizar probaremos que realmente existen funciones meromorfas no constantes en superficies de Riemann compactas (o en conjuntos relativamente compactos de las no compactas). Este no es un resultado trivial – se necesita gran parte del desarrollo aquí realizado para demostrar su existencia. De hecho, este es el mayor obstáculo para la prueba de Riemann-Roch al compararlo con la simplicidad que tiene para curvas proyectivas, donde las restricciones de funciones racionales a la curva definen funciones meromorfas sobre la misma (y son, de hecho, todas las que existen).

Teorema 2.3.12. *Sea X una superficie de Riemann e $Y \Subset X$ es un abierto relativamente compacto. Entonces para todo punto $a \in Y$ existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(Y)$ que tiene un polo en a y es holomorfa en $Y \setminus \{a\}$.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.9

$$k := \dim \operatorname{Im} (H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O})) < \infty.$$

Sea (U_1, z) un entorno coordenado de a con $z(a) = 0$. Definamos $U_2 := X \setminus \{a\}$. Entonces $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ es un recubrimiento abierto de X .

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo, donde horizontalmente se encuentran aplicaciones de restricción y verticalmente las proyecciones al límite inductivo:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O}) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ H^1(X, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(Y, \mathcal{O}) \end{array}$$

Del Lema 2.1.7 se sigue que

$$\pi : H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$$

es inyectivo. Entonces para la restricción horizontal superior

$$\dim \operatorname{Im} (H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})) \leq k.$$

En $U_1 \cap U_2 = U_1 - \{a\}$ las funciones holomorfas

$$\frac{1}{z^j} \in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2), j = 1, \dots, k+1$$

representan $k+1$ cociclos

$$\zeta_j \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}).$$

La condición de finitud implica que las clases de estos cociclos se vuelven linealmente dependientes al restringirlas a Y : existen $c_1, \dots, c_{k+1} \in \mathbb{C}$ no todos nulos y una cocadena $\eta = (f_1, f_2) \in C^0(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$ tal que en $\mathfrak{U} \cap Y$

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j \zeta_j = \delta \eta,$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j \frac{1}{z^j} = f_2 - f_1 \quad \text{en } U_1 \cap U_2 \cap Y.$$

Entonces existe una función $f \in \mathcal{M}(Y)$ que coincide con $f_1 + \sum_{j=1}^{k+1} c_j \frac{1}{z^j}$ en $U_1 \cap Y$ y que es igual a f_2 en $U_2 \cap Y = Y \setminus \{a\}$. Esta es la función buscada. \square

2.4. La sucesión exacta de cohomología

En esta última sección del capítulo trataremos homomorfismos y sucesiones exactas de haces, así como la sucesión exacta larga de cohomología. Los resultados que veremos nos ofrecerán formas de calcular varios grupos de cohomología.

Definición 2.4.1. Sean \mathcal{F} y \mathcal{G} dos haces de grupos abelianos en el espacio topológico X . Un *homomorfismo de haces* $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es una familia de homomorfismos de grupos

$$\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U), \quad U \text{ abierto en } X$$

que son compatibles con los homomorfismos de restricción, es decir, para cada par de abiertos $U, V \subset X$ con $V \subset U$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \text{restr.} & & \downarrow \text{restr.} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

es conmutativo.

El núcleo de un homomorfismo de haces se define de la siguiente manera: para cada U abierto de X sea

$$\mathcal{K}(U) := \ker(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U)).$$

Es fácil ver que la familia de grupos $\mathcal{K}(U)$ junto a las restricciones inducidas por \mathcal{F} forman un haz, \mathcal{K} , que llamamos *núcleo* de α y denotamos por $\mathcal{K} = \ker \alpha$.

Definición 2.4.2. Sea $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un homomorfismo de haces en el espacio topológico X . Por cada $x \in X$ hay un homomorfismo inducido en las fibras

$$\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x.$$

Una sucesión de homomorfismos de haces $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ se llama *exacta* si para cada $x \in X$ la sucesión

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$$

es exacta, es decir, $\ker \beta_x = \text{Im } \alpha_x$. Una sucesión

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \rightarrow \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \mathcal{F}_n, \quad (n > 3)$$

de homomorfismos es exacta si la sucesión

$$\mathcal{F}_k \xrightarrow{\alpha_k} \mathcal{F}_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} \mathcal{F}_{k+2}$$

es exacta para $1 \leq k \leq n - 2$.

Un homomorfismo de haces $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un *monomorfismo* si la sucesión $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ es exacta, y es un *epimorfismo* si $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \rightarrow 0$ es exacta. Una sucesión exacta de la forma $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ se llama *sucesión exacta corta*.

Lema 2.4.3. *Sea $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un monomorfismo de haces en X . Entonces para cada abierto $U \subset X$ la aplicación $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ es inyectiva.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{F}(U)$ y $\alpha_U(f) = 0$. Como $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ es inyectiva para todo $x \in X$, todos los $x \in U$ tienen un entorno abierto $V_x \subset U$ tal que $f|_{V_x} = 0$. Por el Axioma de Haz I se sigue que $f = 0$. \square

Lema 2.4.4. *Sea $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ es una sucesión exacta de haces en el espacio topológico X . Entonces para todo abierto $U \subset X$ la sucesión*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(U)$$

es exacta.

Demostración. La exactitud de $0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U)$ es consecuencia del lema anterior.

Para ver que $\text{Im } \alpha \subset \ker \beta$, sea $f \in \mathcal{F}(U)$ y $g := \alpha(f)$. Como la sucesión de fibras $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ es exacta para todo $x \in U$, se sigue que todo punto $x \in U$ tiene un entorno $V_x \subset U$ tal que $\beta(g)|_{V_x} = 0$. Entonces por el Axioma de Haz I se tiene que $\beta(g) = 0$.

Recíprocamente, sea $g \in \mathcal{G}(U)$ con $\beta(g) = 0$. Como para todo $x \in U$ se tiene que $\ker \beta_x = \text{Im } \alpha_x$, hay un recubrimiento abierto $(V_i)_{i \in I}$ de U y elementos $f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ tal que $\alpha(f_i) = g|_{V_i}$ para todo $i \in I$. En la intersección $V_i \cap V_j$ se tiene que $\alpha(f_i - f_j) = 0$. Entonces el Lema 2.4.3 dice que $f_i = f_j$ en $V_i \cap V_j$. Por el Axioma de Haz II existe un $f \in \mathcal{F}(U)$ con $f|_{V_i} = f_i$ para todo $i \in I$. Como $\alpha(f)|_{V_i} = \alpha(f|_{V_i}) = g|_{V_i}$, se sigue del Axioma de Haz I, aplicado al haz \mathcal{G} , que $\alpha(f) = g$. \square

A continuación vamos a definir varios homomorfismos entre grupos de cohomología. Cualquier homomorfismo $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de haces en el espacio topológico X induce homomorfismos

$$\begin{aligned} \alpha^0 : H^0(X, \mathcal{F}) &\rightarrow H^0(X, \mathcal{G}), \\ \alpha^1 : H^1(X, \mathcal{F}) &\rightarrow H^1(X, \mathcal{G}), \end{aligned}$$

donde α^0 no es sino $\alpha_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$. En el caso de α^1 , el homomorfismo se construye de la siguiente manera. Sea $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X . Consideremos

$$\alpha_{\mathfrak{U}} : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$$

que manda las cocadenas $\xi = (f_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ a las cocadenas

$$\alpha_{\mathfrak{U}}(\xi) := (\alpha(f_{ij})) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}).$$

Esta aplicación lleva cociclos en cociclos y cofronteras en cofronteras, y por tanto induce un homomorfismo

$$\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}).$$

La colección de todos los $\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}}$, donde \mathfrak{U} recorre todos los recubrimientos abiertos de X , induce el homomorfismo α^1 .

Consideremos ahora la sucesión exacta de haces en X

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0.$$

Un *homomorfismo conector*

$$\delta^* : H^0(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

se define de la siguiente forma. Sea $h \in H^0(X, \mathcal{H}) = \mathcal{H}(X)$. Como todos los homomorfismos $\beta_x : \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ son sobreyectivos, existe un recubrimiento abierto $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X y una cocadena $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ tal que

$$\beta(g_i) = h|_{U_i} \quad \text{para todo } i \in I. \quad (1)$$

Por tanto $\beta(g_i - g_j) = 0$ en $U_i \cap U_j$. Por el Lema 2.4.4 existe $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ tal que

$$\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j. \quad (2)$$

En $U_i \cap U_j \cap U_k$ se tiene que $\alpha(f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}) = 0$, y por 2.4.3 $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$, es decir,

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Ahora sea $\delta^*h \in H^1(X, \mathcal{F})$ la clase de cohomología representada por (f_{ij}) . Se comprueba que la definición no depende de las elecciones realizadas.

Teorema 2.4.5 (Sucesión exacta larga de cohomología). *Sea X un espacio topológico. Una sucesión exacta corta de haces en X*

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

induce una sucesión exacta larga entre grupos de cohomología:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} \\ \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathcal{H}) \end{aligned}$$

Demostración.

- (a) La exactitud en $H^0(X, \mathcal{F})$ y $H^0(X, \mathcal{G})$ se sigue del Lema 2.4.4.
- (b) Sea $g \in H^0(X, \mathcal{G})$ y $h := \beta^0(g)$. En la construcción de δ^*h anterior puede elegirse $g_i = g|_{U_i}$. Pero entonces $f_{ij} = 0$ y entonces δ^*h , probando que $\text{Im } \beta^0 \subset \ker \delta^*$.
- (c) Recíprocamente, sea $h \in \ker \delta^*$. Recuperando de nuevo la notación de la construcción anterior podemos representar δ^*h por el cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Como $\delta^*h = 0$ existe una cocadena $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ tal que $f_{ij} = f_i - f_j$ en $U_i \cap U_j$. Definimos $\tilde{g}_i := g_i - \alpha(f_i)$. Entonces $\tilde{g}_i = \tilde{g}_j$ en $U_i \cap U_j$ porque $\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j$. Entonces los \tilde{g}_i son restricciones de algún elemento global $g \in H^0(X, \mathcal{G})$. En U_i se tiene que $\beta(g) = \beta(\tilde{g}_i) = \beta(g_i - \alpha(f_i)) = \beta(g_i) = h$, es decir, $h \in \text{Im } \beta^0$, concluyendo que $\ker \delta^* \subset \text{Im } \beta^0$ y por tanto se tiene la igualdad.
- (d) $\text{Im } \delta^* \subset \ker \alpha^1$ se sigue de (2) en la construcción anterior.
- (e) $\ker \alpha^1 \subset \text{Im } \delta^*$. Sea $\xi \in \ker \alpha^1$ representado por el cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Como $\alpha^1(\xi) = 0$, existe una cocadena $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ tal que $\alpha(f_{ij}) = g_i - g_j$ en $U_i \cap U_j$. Esto implica que

$$0 = \beta(\alpha(f_{ij})) = \beta(g_i) - \beta(g_j) \quad \text{en } U_i \cap U_j.$$

Entonces existe $h \in \mathcal{H}(X) = H^0(X, \mathcal{H})$ tal que $h|_{U_i} = \beta(g_i)$. La construcción anterior muestra que $\delta^*h = \xi$.

- (f) $\text{Im } \alpha^1 \subset \ker \beta^1$. Esto se sigue de que

$$\mathcal{F}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(U_i \cap U_j)$$

es exacta por el Lema 2.4.4.

- (g) $\ker \beta^1 \subset \text{Im } \alpha^1$. Sea $\eta \in \ker \beta^1$ representado por el cociclo $(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, donde $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$. Entonces existe una cocadena $(h_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$ tal que $\beta(g_{ij}) = h_i - h_j$. Para todo $x \in X$ elegimos $\tau x \in I$ con $x \in U_{\tau x}$. Como $\beta_x : \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{H}_x$ es sobreyectivo existe un entorno abierto $V_x \subset U_{\tau x}$ de x

y un elemento $g_x \in \mathcal{G}(V_x)$ tal que $\beta(g_x) = h_{\tau_x}|_{V_x}$. Sea $\mathfrak{V} = (V_x)_{x \in X}$ y $\tilde{g}_{xy} := g_{\tau_x, \tau_y}|_{V_x \cap V_y}$. Entonces $(\tilde{g}_{xy}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ es un cociclo que representa la clase de cohomología η . Definamos $\psi_{xy} := \tilde{g}_{xy} - g_x + g_y$. El cociclo (ψ_{xy}) es cohomólogo a (\tilde{g}_{xy}) y $\beta(\psi_{xy}) = 0$. Entonces existe $f_{xy} \in \mathcal{F}(V_x \cap V_y)$ tal que $\alpha(f_{xy}) = \psi_{xy}$. Puesto que

$$\alpha : \mathcal{F}(V_x \cap V_y \cap V_z) \rightarrow \mathcal{G}(V_x \cap V_y \cap V_z)$$

es inyectivo por el Lema 2.4.3, $(f_{xy}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$. Entonces la clase de cohomología $\xi \in H^1(X, \mathcal{F})$ de (f_{xy}) satisface $\alpha^1(\xi) = \eta$.

□

Teorema 2.4.6. *Sea $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de haces en el espacio topológico X tal que $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$. Entonces*

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}(X)/\beta\mathcal{G}(X).$$

Demostración. Como $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$, por el Teorema 2.4.5 se tiene la sucesión exacta

$$\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

El resultado se sigue del primer teorema de isomorfismos. □

Vamos a describir como es este isomorfismo

$$\Phi : H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(X)/\beta\mathcal{G}(X).$$

Por el Lema 2.4.4 siempre podemos asumir que $\mathcal{F} = \ker \beta$ y $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es la inclusión.

Sea $\xi \in H^1(X, \mathcal{F})$ una clase de cohomología representada por el cociclo $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$. Como $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) = 0$, existe una cocadena $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ tal que $f_{ij} = g_i - g_j$ en $U_i \cap U_j$. Como $\beta(f_{ij}) = 0$, $\beta(g_i) = \beta(g_j)$ coinciden en $U_i \cap U_j$ y existe un elemento global $h \in \mathcal{H}(X)$ con $h|_{U_i} = \beta(g_i)$. Entonces $\Phi(\xi)$ es la clase de h módulo $\beta\mathcal{G}(X)$. El hecho de que Φ es el inverso del isomorfismo $\mathcal{H}(X)/\beta\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{F})$ inducido por la sucesión exacta de cohomología se sigue de (e) de la demostración del Teorema 2.4.5.

Teorema 2.4.7 (de Dolbeault). *Sea X una superficie de Riemann. Existen isomorfismos*

- (a) $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{0,1}(X)/d''\mathcal{E}(X)$,
- (b) $H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X)/d\mathcal{E}^{1,0}(X)$.

Demostración. Buscamos aplicar el teorema anterior a dos sucesiones exactas cortas.

- (a) $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{0,1} \rightarrow 0$. La aplicación $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}$ es la inclusión. Por el Teorema 2.1.9 sabemos que $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$, y gracias al Lema de Dolbeault 2.2.2 tenemos la exactitud.
- (b) $0 \rightarrow \Omega \rightarrow \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \rightarrow 0$. Para ver que $H^1(X, \mathcal{E}^{1,0})$ basta con aplicar el teorema 2.4.5 a la sucesión del apartado anterior. Como $\Omega = \ker \left(\mathcal{E}^{0,1} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \right)$, falta probar que $d : \mathcal{E}^{1,0} \rightarrow \mathcal{E}^{(2)}$ es sobreyectiva. Respecto a una carta (U, z) , se tiene que

$$d(f dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz.$$

Para todo abierto $V \subset U$ tal que $z(V) \subset \mathbb{C}$ es un disco podemos aplicar el Lema de Dolbeault de nuevo para ver que $d : \mathcal{E}^{1,0}(V) \rightarrow \mathcal{E}^{(2)}(V)$ es sobre, y por tanto $d : \mathcal{E}_a^{1,0} \rightarrow \mathcal{E}_a^{(2)}$ es sobreyectiva para todo $a \in X$.

□

Capítulo 3

El Teorema de Riemann-Roch

Habiendo realizado todo el trabajo previo necesario, en este capítulo demostramos finalmente el Teorema de Riemann-Roch. Probaremos también otro resultado, el Teorema de Dualidad de Serre, que nos ayudará a interpretarlo y a conectar las dos definiciones de género que hemos dado a lo largo del texto.

3.1. El Teorema de Riemann-Roch

El Teorema de Riemann-Roch es un resultado fundamental dentro de la teoría de las superficies de Riemann compactas y también en la geometría algebraica. En nuestro caso, establecerá restricciones en el número de funciones meromorfas linealmente independientes que pueden definirse en una superficie de Riemann compacta cuando se dan ciertas restricciones en sus polos.

Definición 3.1.1. Sea X una superficie de Riemann. Un *divisor* de X es una aplicación

$$D : X \rightarrow \mathbb{Z}$$

tal que para cualquier compacto $K \subset X$ existen únicamente un número finito de puntos $x \in K$ tal que $D(x) \neq 0$. Junto a la suma, el conjunto de todos los divisores en X forman un grupo abeliano, que denotaremos por $\text{Div}(X)$. También existe un orden parcial: si $D, D' \in \text{Div}(X)$, decimos que $D \leq D'$ si $D(x) \leq D'(x)$ para todo $x \in X$.

Definición 3.1.2. Sean X una superficie de Riemann y un abierto $Y \subset X$. Para

una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(Y)$ y $a \in Y$ definimos el orden de f en a como

$$\text{ord}_a(f) := \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ es holomorfa y no nula en } a, \\ k & \text{si } f \text{ tiene un cero de orden } k \text{ en } a, \\ -k & \text{si } f \text{ tiene un polo de orden } k \text{ en } a, \\ \infty & \text{si } f \text{ es idénticamente nula en un entorno de } a. \end{cases}$$

Entonces para cualquier función $f \in \mathcal{M}(X) - \{0\}$, la aplicación $x \mapsto \text{ord}_x(f)$ es un divisor en X que recibe el nombre de *divisor de f* y se denotará por (f) .

Definición 3.1.3. Se dice que f un *múltiplo* del divisor D si $(f) \geq D$. En particular, f es holomorfa si y sólo si $(f) \geq 0$.

Para una 1-forma meromorfa $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y)$ podemos definir su orden en $a \in Y$ de la siguiente forma. Elijamos un entorno coordenado (U, z) en a . Entonces en $U \cap Y$ podemos escribir $\omega = f dz$, donde f es una función meromorfa. Definiendo $\text{ord}_a(\omega) := \text{ord}_a(f)$ no hay ambigüedad por la elección de carta. De nuevo, para 1-formas $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) - \{0\}$ la aplicación $x \mapsto \text{ord}_x(\omega)$ es un divisor en X , denotado por (ω) . Para $f, g \in \mathcal{M}(X) - \{0\}$ y $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) - \{0\}$ se tiene:

$$(fg) = (f) + (g), \quad (1/f) = -(f), \quad (f\omega) = (f) + (\omega).$$

Definición 3.1.4. Un divisor $D \in \text{Div}(X)$ se denomina *divisor principal* si existe una función f tal que $D = (f)$. Se dice que dos divisores $D, D' \in \text{Div}(X)$ son *equivalentes* si su diferencia $D - D'$ es un divisor principal. Por un *divisor canónico* nos referimos al divisor (ω) de una 1-forma meromorfa $\omega \in \mathcal{M}^{(1)} - \{0\}$.

Dos divisores canónicos son siempre equivalentes: si $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^{(1)} - \{0\}$ entonces existe una función $f \in \mathcal{M}(X) - \{0\}$ tal que $\omega_1 = f\omega_2$, y entonces $(\omega_1) - (\omega_2) = (f)$.

Definición 3.1.5. Sea X una superficie de Riemann compacta. Para todo $D \in \text{Div}(X)$ sólo existirán un número finito de $x \in X$ con $D(x) \neq 0$, luego podemos definir una aplicación llamada *grado*,

$$\text{deg} : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \text{deg } D := \sum_{x \in X} D(x).$$

Esta aplicación es un homomorfismo de grupos.

En particular, $\text{deg}(f) = 0$ para cualquier divisor principal (f) en una superficie de Riemann compacta de Riemann, ya que por el Corolario 1.7.10 una función meromorfa tiene tantos ceros como polos. Esto implica que divisores equivalentes tienen el mismo grado.

A continuación vamos a definir los haces de funciones meromorfas a los que se referirá el teorema de Riemann-Roch.

Definición 3.1.6. Sea D un divisor en una superficie de Riemann X . Para un abierto $U \subset X$ se define el *haz de funciones meromorfas que son múltiplos de $-D$* ,

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U) \mid (f) \geq -D \text{ en } U\}.$$

Junto con la restricciones naturales \mathcal{O}_D es un haz.

En topología algebraica es habitual denotar a $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ por $\mathcal{L}(D)$ y a su dimensión por $l(D) := \dim \mathcal{L}(D)$, que como veremos a continuación es finita para superficies de Riemann compactas.

En particular, si $D = 0$ se tiene que $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$. Si dos divisores $D, D' \in \text{Div}(X)$ son equivalentes, entonces \mathcal{O}_D y $\mathcal{O}_{D'}$ son isomorfos. Para ver un isomorfismo que los conecta escogemos $\psi \in \mathcal{M}(X) - \{0\}$ tal que $D - D' = (\psi)$. Entonces el homomorfismo de haces inducido por la multiplicación por ψ ,

$$\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D'}, \quad f \mapsto \psi f$$

es un isomorfismo.

Proposición 3.1.7. Sea X una superficie de Riemann compacta y sea $D \in \text{Div}(X)$ un divisor con $\deg D < 0$. Entonces $H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$.

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que existe $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$ con $f \neq 0$. Entonces $(f) \geq -D$ y por lo tanto $\deg(f) \geq -\deg D > 0$. Pero $\deg(f) = 0$ por ser un divisor principal, llegando así a un absurdo. \square

Definición 3.1.8. Sea P un punto de una superficie de Riemann X . Definimos el *haz rascacielos \mathbb{C}_P en X* por

$$\mathbb{C}_P(U) := \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } P \in U, \\ 0 & \text{si } P \notin U, \end{cases}$$

para todo $U \subset X$ abierto y con las restricciones obvias.

Por un lado, es trivial que $H^0(X, \mathbb{C}_P) \cong \mathbb{C}$. Por otro lado, observemos que $H^1(X, \mathbb{C}_P) = 0$: sea $\xi \in H^1(X, \mathbb{C}_P)$ representado por un cociclo en $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_P)$. El recubrimiento \mathfrak{U} tiene un refinamiento $\mathfrak{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ tal que el punto P está contenido en un solo V_α . En tal caso, $Z^1(\mathfrak{V}, \mathbb{C}_P) = 0$ y por lo tanto $\xi = 0$.

Consideremos ahora un divisor arbitrario D de X . Para un punto $P \in X$ denotaremos también por P al divisor que toma valor 1 en P y 0 en el resto de X .

Entonces $D \leq D + P$, de lo cual se construye una inclusión natural $\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D+P}$. Sea (V, z) un entorno coordenado de P en X tal que $z(P) = 0$. Definamos el homomorfismo de haces

$$\beta : \mathcal{O}_{D+P} \rightarrow \mathbb{C}_P$$

de la siguiente manera. Sea $U \subset X$ un subconjunto abierto. Si $P \notin U$, entonces β_U es el homomorfismo nulo. Si $P \in U$ y $f \in \mathcal{O}_{D+P}$ entonces f admite una expansión en serie de Laurent en torno a P , que respecto a la coordenada z es

$$f = \sum_{n=-k-1}^{\infty} c_n z^n$$

donde $k = D(P)$. Definimos

$$\beta_U(f) := c_{-k-1} \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_P(U).$$

Obviamente β es un homomorfismo de haces y $0 \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D+P} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_P \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta. Por el Teorema 2.4.5 esta induce la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \\ & \hspace{15em} (*) \\ &\longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Corolario 3.1.9. Sean $D \leq D'$ divisores en una superficie de Riemann compacta X . Entonces la aplicación de inclusión $\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D'}$ induce un epimorfismo

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow 0.$$

Demostración. Si $D' = D + P$, con P el divisor dado por un punto, por el razonamiento anterior (*) se tiene el resultado. En general, puede escribirse $D' = D + P_1 + \cdots + P_n$ con $P_i \in X$ no necesariamente distintos, y en un número finito de pasos se demuestra la igualdad. \square

Teorema 3.1.10 (de Riemann-Roch). Sea D un divisor de una superficie de Riemann compacta X de género $g = \dim H^1(X, \mathcal{O})$. Entonces los espacios vectoriales $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ y $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ son de dimensión finita y

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D.$$

Demostración. En primer lugar, el resultado se verifica para el divisor $D = 0$, ya que $H^0(X, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(X)$ consiste únicamente de funciones constantes y por lo tanto $\dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$, así como $g = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ por definición.

Supongamos que D es un divisor, $P \in X$ un punto y $D' = D + P$ de forma que el resultado se cumple para uno de los divisores D o D' . Las sucesiones exactas de cohomología (*) pueden separarse en dos sucesiones exactas cortas: si definimos

$$V := \text{Im}(H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow \mathbb{C}), \quad W := \mathbb{C}/V$$

entonces $\dim V + \dim W = 1 = \deg D' - \deg D$ y las sucesiones

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow V \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow W \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow 0$$

son exactas. Por lo tanto todos los espacios vectoriales involucrados poseen dimensión finita y se obtienen las igualdades

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim V,$$

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim W.$$

Sumando ambas ecuaciones y reordenando se llega a

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) - \deg D' &= \\ &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) - \deg D. \end{aligned}$$

Esta ecuación implica que si para uno de los dos divisores el teorema es cierto, también lo es para el otro. Puesto que un divisor cualquiera puede escribirse como

$$D = P_1 + \cdots + P_m - P_{m+1} - \cdots - P_n,$$

con $P_j \in X$ puntos, empezando desde el divisor cero podemos probar en un número finito de pasos que el teorema es cierto para cualquier divisor D . \square

En el caso de trabajar exclusivamente con curvas algebraicas planas no singulares es posible realizar demostración del Teorema de Riemann-Roch sin la necesidad de definir los grupos de cohomología. Esta prueba, que puede encontrarse en [7, §6.3], afirma lo siguiente:

Teorema 3.1.11 (Riemann-Roch, versión geométrica). *Si D es un divisor de una curva algebraica plana no singular C de género (topológico) g_τ en \mathbb{P}^2 y K es un divisor canónico en C , entonces*

$$\dim H^0(C, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(C, \mathcal{O}_{K-D}) = 1 - g_\tau + \deg D.$$

La siguiente sección nos permitirá ver cómo ambos enunciados del teorema son equivalentes, con lo que podremos hallar la igualdad entre ambas definiciones de género.

3.2. Teorema de Dualidad de Serre

Con el Teorema de Dualidad de Serre podemos dar una interpretación a $H^1(X, \mathcal{O}_D)$: su dimensión es igual al máximo número de 1-formas meromorfas linealmente independientes que son múltiplos del divisor D . Con él podremos concluir que las dos definiciones de género de una superficie dadas en este trabajo, tanto el número de *agujeros* como la dimensión del primer grupo de cohomología de funciones holomorfas, son equivalentes: por un lado veremos cómo los enunciados de los Teoremas 3.1.10 y 3.1.11 son equivalentes y por otro lado aplicaremos la fórmula de Riemann-Hurwitz para considerar una superficie de Riemann compacta como un recubrimiento de la esfera de Riemann \mathbb{P}^1 , que es en realidad lo que hicimos para obtener una triangulación de una curva algebraica plana en la Sección 1.4.

Sea X una superficie de Riemann compacta. Por el Teorema de Dolbeault 2.4.7 la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Omega \rightarrow \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \rightarrow 0$$

induce un isomorfismo $H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}/d\mathcal{E}^{1,0}(X)$. Sean $\xi \in H^1(X, \Omega)$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ un representante suyo según el isomorfismo. Definamos la siguiente forma lineal

$$\text{Res}(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \iint_X \omega,$$

que está bien definida gracias al Teorema 1.7.8.

Definición 3.2.1. Dado un recubrimiento $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$, una cocadena $\mu = (\omega_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ recibe el nombre de *distribución de Mittag-Leffler* si las diferencias $\omega_i - \omega_j$ son holomorfas en $U_i \cap U_j$, es decir, $\delta\mu \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega)$. Por $[\delta\mu] \in H^1(X, \Omega)$ denotamos la clase de cohomología de $\delta\mu$.

Dado $a \in X$ vamos a definir el *residuo* de la distribución de Mittag-Leffler $\mu = (\omega_i)$ de la siguiente forma. Elegido $i \in I$ tal que $a \in U_i$ definimos

$$\text{Res}_a(\mu) := \text{Res}_a(\omega_i).$$

Si $a \in U_i \cap U_j$, la diferencia $\omega_i - \omega_j$ es holomorfa, por lo que ω_i y ω_j tienen el mismo residuo en a y $\text{Res}_a(\mu)$ no depende de la elección de i .

Si ahora suponemos que X es compacta sólo habrá un número finito de $a \in X$ con $\text{Res}_a(\mu) \neq 0$. Podemos así definir

$$\text{Res}(\mu) := \sum_{a \in X} \text{Res}_a(\mu).$$

Con el siguiente resultado veremos la relación entre este residuo y la forma lineal Res .

Proposición 3.2.2. *Utilizando la notación anterior,*

$$\text{Res}(\mu) = \text{Res}([\delta\mu]).$$

Demostración. Para calcular $\text{Res}([\delta\mu])$ debemos construir el isomorfismo

$$H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}/d\mathcal{E}^{1,0}.$$

Como $\delta\mu = (\omega_i - \omega_j) \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{1,0})$ y $H^1(X, \mathcal{E}^{1,0}) = 0$, existe una cocadena $(\sigma_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{1,0})$ tal que

$$\omega_i - \omega_j = \sigma_i - \sigma_j \quad \text{en } U_i \cap U_j.$$

Entonces $d(\omega_i - \omega_j) = d''(\omega_i - \omega_j) = 0$ implica que $d\sigma_i = d\sigma_j$ en $U_i \cap U_j$, luego existe una 2-forma global $\tau \in \mathcal{E}^{(2)}$ tal que $\tau|_{U_i} = d\sigma_i$. Esta forma diferencial es representante de $[\delta\mu]$ y

$$\text{Res}([\delta\mu]) = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \tau.$$

Sean $a_1, \dots, a_n \in X$ el número finito de polos de μ y sea $X' = X - \{a_1, \dots, a_n\}$. En $X' \cap U_i \cap U_j$ se tiene $\sigma_i - \omega_i = \sigma_j - \omega_j$. Por lo tanto existe una forma diferencial $\sigma \in \mathcal{E}^{1,0}(X')$ tal que $\sigma = \sigma_i - \omega_i$ en $X' \cap U_i$, y $\tau = d\sigma$ en X' .

Para cada a_k existe un $i(k) \in I$ tal que $a_k \in U_{i(k)}$. Elegimos cartas (V_k, a_k) tal que $V_k \subset U_{i(k)}$ y $z_k(a_k) = 0$; sin pérdida de generalidad podemos asumir que los V_k son disjuntos dos a dos y que $z_k(V_k) \subset \mathbb{C}$ es un disco. Para cada k elegimos una función $f_k \in \mathcal{E}(X)$ tal que $\text{Sop}(f_k) \subset V_k$ y tal que existe un entorno abierto $V'_k \subset V_k$ de a_k con $f_k|_{V'_k} = 1$. Definamos

$$g := 1 - (f_1 + \dots + f_n).$$

Como $g|_{V'_k} = 0$, $g\sigma$ puede extenderse en los puntos a_k con valor cero y puede considerarse un elemento de $\mathcal{E}^{1,0}(X)$. Por el Teorema 1.7.8 se tiene

$$\iint_X d(g\sigma) = 0.$$

En $V'_k - \{a_k\}$ se tiene $d(f_k\sigma) = d\sigma = d(\sigma_{i(k)} - \omega_{i(k)}) = d\sigma_{i(k)}$, y $d(f_k\sigma)$ puede continuarse de forma diferenciable a a_k . Como $f_k\sigma$ se anula en $X' \setminus \text{Sop}(f_k)$, $d(f_k\sigma)$ puede considerarse un elemento de $\mathcal{E}^{(2)}$. Entonces podemos escribir $\tau = d(g\sigma) + \sum_k d(f_k\sigma)$, lo cual implica que

$$\iint_X \tau = \sum_{k=1}^n \iint_X d(f_k\sigma) = \sum_{k=1}^n \iint_{V_k} d(f_k\sigma_{i(k)} - f_k\omega_{i(k)}).$$

De nuevo por el Teorema 1.7.8,

$$\iint_{V_k} d(f_k \sigma_{i(k)}) = 0$$

y al igual que en el Teorema del residuo 1.7.9 se muestra que

$$\iint_{V_k} d(f_k \omega_{i(k)}) = -2\pi i \operatorname{Res}_{a_k}(\omega_{i(k)}).$$

Juntando todo se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_X \tau = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{a_k}(\omega_{i(k)}) = \operatorname{Res}(\mu).$$

□

Sea X una superficie de Riemann compacta. Para cualquier divisor $D \in \operatorname{Div}(X)$ consideramos el haz Ω_D , tal que si $U \subset X$ es abierto entonces

$$\Omega_D(U) := \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U) \mid \operatorname{ord}_x(\omega) \geq -D(x) \forall x \in U\}.$$

En particular $\Omega_0 = \Omega$ es el haz de todas las 1-formas holomorfas.

Sea $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ es una 1-forma meromorfa no trivial en X , por ejemplo $\omega = dg$ con $g \in \mathcal{M}(X)$ es una función meromorfa no constante, y denotemos por K al divisor de ω . Para un divisor $D \in \operatorname{Div}(X)$ cualquiera la multiplicación por ω induce un isomorfismo de haces

$$\mathcal{O}_{D+K} \xrightarrow{\sim} \Omega_D, \quad f \mapsto f\omega.$$

Lema 3.2.3. *Existe un entero $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $D \in \operatorname{Div}(X)$,*

$$\dim H^0(X, \Omega_D) \geq \deg D + k_0.$$

Demostración. Conservando la notación, consideramos ω , K y g el género de X . Definimos $k_0 := 1 - g + \deg K$. Por el Teorema de Riemann-Roch 3.1.10,

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \Omega_D) &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+K}) = \\ &= \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+K}) + 1 - g + \deg(D + K) \geq \\ &\geq \deg D + k_0. \end{aligned}$$

□

Dada X una superficie de Riemann compacta y $D \in \text{Div}(X)$ un divisor, el producto

$$\Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D \rightarrow \Omega, \quad (\omega, f) \mapsto \omega f$$

induce una aplicación

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(X, \Omega).$$

La composición de esta aplicación con la forma lineal $\text{Res} : H^1(X, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ produce una aplicación bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\langle \omega, \xi \rangle := \text{Res}(\omega \xi).$$

Este producto induce una aplicación lineal

$$r_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$

de $H^0(X, \Omega_{-D})$ en el dual de $H^1(X, \mathcal{O}_D)$.

Teorema 3.2.4 (de Dualidad de Serre). *Para cualquier divisor D de una superficie de Riemann compacta X la aplicación*

$$r_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$

es un isomorfismo.

Dividimos la demostración de este teorema en los Lemas 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7 y 3.2.8.

Lema 3.2.5. *La aplicación r_D es inyectiva.*

Demostración. El objetivo es probar que para todo $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ no nulo existe $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ tal que $\langle \omega, \xi \rangle \neq 0$. Sea $a \in X$ tal que $D(a) = 0$ y (U_0, z) un entorno coordenado de a con $z(a) = 0$ y $D|_{U_0} = 0$. En U_0 podemos escribir $\omega = f dz$, $f \in \mathcal{O}(U_0)$, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que f no tiene ceros en $U_0 - \{a\}$. Definimos $U_1 = X - \{a\}$ y $\mathfrak{U} = (U_0, U_1)$. Sea $\eta = (f_0 = 1/(zf), f_1 = 0) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$. Entonces

$$\omega \eta = \left(\frac{dz}{z}, 0 \right) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$$

es una distribución de Mittag-Leffler con $\text{Res}(\omega \eta) = 1$. Además se tiene que $\delta \eta \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$ – denotamos $\xi = [\delta \eta] \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$. Como $\omega \xi = \omega \cdot [\delta \eta] = [\delta(\omega \eta)]$ del Teorema 3.2.2 se sigue

$$\langle \omega, \xi \rangle = \text{Res}(\omega \xi) = \text{Res}([\delta(\omega \eta)]) = \text{Res}(\omega \eta) = 1.$$

□

Ahora nos centraremos en probar su sobreyectividad. Consideremos dos divisores $D, D' \in \text{Div}(X)$ de una superficie de Riemann compacta X con $D' \leq D$. Por el Corolario 3.1.9 la inclusión $0 \rightarrow \mathcal{O}_{D'} \rightarrow \mathcal{O}_D$ induce el epimorfismo

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow 0,$$

que a su vez induce un monomorfismo en los espacios duales, denotado por $i_{D'}^D :$

$$0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \xrightarrow{i_{D'}^D} H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^*.$$

Es fácil comprobar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{i_{D'}^D} & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \\ & & \uparrow r_D & & \uparrow r_{D'} \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{-D}) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{-D'}) \end{array}$$

Lema 3.2.6. Sean $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ y $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D'})$ tal que

$$i_{D'}^D(\lambda) = r_{D'}(\omega).$$

Entonces ω también es un elemento de $H^0(X, \Omega_{-D})$ y $\lambda = r_D(\omega)$.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que ω no es un elemento de $H^0(X, \Omega_{-D})$. Entonces existe $a \in X$ tal que $\text{ord}_a(\omega) < D(a)$. Sea (U_0, z) un entorno coordenado de a con $z(a) = 0$. En U_0 podemos escribir $\omega = f dz, f \in \mathcal{M}(U_0)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U_0 verifica que

$$(a) \quad D|_{U_0 - \{a\}} = 0, \quad D'|_{U_0 - \{a\}} = 0.$$

$$(b) \quad f \text{ no tiene ni ceros ni polos en } U_0 - \{a\}.$$

Definamos $U_1 = X - \{a\}$ y $\mathfrak{U} = (U_0, U_1)$. Sea $\eta = (f_0 = 1/(zf), f_1 = 0)$. Como $\text{ord}_a(\omega) < D(a)$ se tiene también que $\eta \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$. En tal caso

$$\delta\eta \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{D'})$$

Denotemos por ξ' y ξ las clases de cohomología de $\delta\eta$ en $H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$ y $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ respectivamente; en particular $\xi = 0$. Por hipótesis,

$$\langle \omega, \xi \rangle = i_{D'}^D(\lambda)(\xi') = \lambda(\xi) = 0.$$

Por otro lado, como $\omega\eta = ((dz/z), 0)$, se tiene que

$$\langle \omega, \xi' \rangle = \text{Res}(\omega\eta) = 1,$$

llegando así a una contradicción, por lo que $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$. Como $i_{D'}^D = r_{D'}(\omega) = i_{D'}^D(r_D(\omega))$, la igualdad $\lambda = r_D(\omega)$ se sigue de la inyectividad de $i_{D'}^D$. \square

Consideremos ahora dos divisores D, B de una superficie de Riemann compacta X y una función meromorfa $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$. El morfismo de haces

$$\mathcal{O}_{D-B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_D, \quad f \mapsto \psi f$$

induce una aplicación lineal $H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)$ que a su vez induce otra

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*$$

que denotaremos también por ψ . Por definición

$$(\psi\lambda)(\xi) = \lambda(\psi\xi), \quad \text{para } \lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*, \xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}).$$

El diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{\psi} & H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^* \\ r_D \uparrow & & \uparrow r_{D-B} \\ H^0(X, \Omega_D) & \xrightarrow{\psi} & H^0(X, \Omega_{-D+B}) \end{array}$$

conmuta, donde la aplicación indicada por la flecha horizontal de la segunda fila es la multiplicación por ψ . Esto se tiene gracias a que $\langle \psi\omega, \xi \rangle = \langle \omega, \psi\xi \rangle$.

Lema 3.2.7. *Si $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$ no es el elemento cero, entonces*

$$\psi : H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*$$

es inyectiva.

Demostración. Sea $A := (\psi) \geq -B$ el divisor de ψ . La aplicación $\mathcal{O}_{D-B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_D$ factoriza por \mathcal{O}_{D+A} , es decir,

$$\mathcal{O}_{D-B} \rightarrow \mathcal{O}_{D+A} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_D,$$

donde $\mathcal{O}_{D+A} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_D$ es un isomorfismo. Como la aplicación $H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D+A})$ inducida por la inclusión $\mathcal{O}_{D-B} \rightarrow \mathcal{O}_{D+A}$ es un epimorfismo por el Corolario 3.1.9, se sigue que

$$\psi : H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)$$

también es un epimorfismo, obteniendo así la inyectividad para los duales. \square

Ahora estamos en condiciones de probar la sobreyectividad de r_D .

Lema 3.2.8. *La aplicación r_D es sobreyectiva.*

Demostración. Dado $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ queremos probar que $\lambda \in \text{Im } r_D$, para lo cual crearemos un elemento que r_D envíe en λ . Sea P un divisor con $\deg P = 1$ y para cualquier n natural sea

$$D_n := D - nP.$$

Denotemos por $\Lambda \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ el subespacio vectorial de todas las formas lineales $\psi\lambda$, donde $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$. Gracias al Lema 3.2.7 Λ es isomorfo a $H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$, y se sigue del Teorema de Riemann-Roch 3.1.10 que

$$\dim \Lambda \geq 1 - g + n$$

donde g es el género de X . Por el Lema 3.2.3 el subespacio vectorial

$$\text{Im}(r_{D_n}) \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$$

satisface

$$\dim \text{Im}(r_{D_n}) = \dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) \geq n + k_0 - \deg D.$$

Para $n > \deg D$ se tiene $\deg D_n < 0$ y por lo tanto $H^0(X, \mathcal{O}_{D_n}) = 0$. Por Riemann-Roch 3.1.10,

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* = g - 1 - \deg D_n = n + g - 1 - \deg D.$$

Para n suficientemente grande se verifica

$$\dim \Lambda + \dim \text{Im}(r_{D_n}) > \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*,$$

lo cual implica que $\Lambda \cap \text{Im}(r_{D_n}) \neq 0$. Entonces existen $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$ con $\psi \neq 0$ y $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$ con $\psi\lambda = r_{D_n}(\omega)$. Sea $A := (\psi)$, luego $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_A)$, y sea $D' := D_n - A \leq D$. Entonces

$$i_{D'}^D(\lambda) = \frac{1}{\psi}\psi\lambda = \frac{1}{\psi}r_{D_n}(\omega) = r_{D'}\left(\frac{1}{\psi}\omega\right).$$

Solo falta aplicar el Lema 3.2.6 de forma que $\omega_0 := (1/\psi)\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ y $\lambda = r_D(\omega_0)$. \square

Con esto queda demostrado el Teorema de Dualidad de Serre 3.2.4. Una de sus principales aplicaciones es la igualdad

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D}),$$

que permite reescribir el Teorema de Riemann-Roch 3.1.10 como

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) - \dim H^0(X, \Omega_D) = 1 - g - \deg D$$

Si en particular tomamos $D = 0$ obtenemos

$$g = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \Omega),$$

es decir, el género de una superficie de Riemann compacta es igual al máximo número de 1-formas holomorfas linealmente independientes que pueden definirse en ella.

Proposición 3.2.9. *Sea D un divisor en una superficie de Riemann compacta X . Entonces*

$$H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \cong H^1(X, \Omega_D)^*.$$

Demostración. Sea $\omega \in M^{(1)}(X)$ una 1-forma meromorfa no nula en X y sea K su divisor. Hemos visto que multiplicando por esta forma podemos inducir isomorfismos $\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}$ y $\mathcal{O}_{-D} \cong \Omega_{-D-K}$, y aplicando el Teorema de Dualidad de Serre 3.2.4

$$H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \cong H^0(X, \Omega_{-D-K}) \cong H^1(X, \mathcal{O}_{D+K})^* \cong H^1(X, \Omega_D)^*.$$

□

Siguiendo la demostración de esta proposición podemos reescribir una vez más el Teorema de Riemann-Roch para obtener una expresión idéntica a su versión geométrica 3.1.11: considerando que

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{K-D})$$

el Teorema de Riemann-Roch es

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 1 - g + \deg D,$$

y si X es en particular una curva algebraica plana no singular C obtenemos la igualdad de géneros $g = g_\tau$ buscada.

Corolario 3.2.10. *La aplicación*

$$\text{Res} : H^1(X, \Omega) \rightarrow \mathbb{C}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Se deduce tomando $D = 0$ en la Proposición 3.2.9 y observando que $\dim H^1(X, \Omega) = \dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$. □

Veamos algunas consecuencias más de los Teoremas de Riemann-Roch y de Dualidad de Serre.

Proposición 3.2.11. *El divisor de cualquier 1-forma meromorfa no nula ω en una superficie de Riemann compacta de género g verifica*

$$\deg(\omega) = 2g - 2.$$

Demostración. Sea $K = (\omega)$. Por Riemann-Roch

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) = 1 - g + \deg K.$$

Puesto que se tiene $\Omega \cong \mathcal{O}_K$, entonces

$$1 - g + \deg K = \dim H^0(X, \Omega) - \dim H^1(X, \Omega) = g - 1$$

y por lo tanto $\deg K = 2g - 2$. □

Proposición 3.2.12. *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g y un divisor D en X . Si $\deg D > 2g - 2$ entonces*

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0.$$

Demostración. Sea $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) - \{0\}$ y sea $K = (\omega)$ su divisor. El producto por esta forma crea un isomorfismo $\Omega_{-D} \cong \mathcal{O}_{K-D}$, por lo que

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \cong H^0(X, \Omega_{-D}) \cong H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}).$$

Si $\deg D > 2g - 2$ entonces $\deg(K - D) < 0$ debido a la Proposición 3.2.11. Aplicando la Proposición 3.1.7 se concluye que $H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 0$, de lo que se deduce el resultado. □

Corolario 3.2.13. *Sea X una superficie de Riemann compacta y sea \mathcal{M} el haz de funciones meromorfas en X . Entonces*

$$H^1(X, \mathcal{M}) = 0.$$

Demostración. Sea $\xi \in H^1(X, \mathcal{M})$ una clase de cohomología con representante $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$. Tomando refinamientos de \mathfrak{U} puede suponerse sin pérdida de generalidad que el número total de polos de cada f_{ij} es finito. Entonces existe un divisor D con $\deg D > 2g - 2$ tal que $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$. Por la proposición anterior este cociclo es cohomólogo al cero según el haz \mathcal{O}_D , luego también lo es relativo al haz \mathcal{M} . □

Para finalizar demostraremos la fórmula de Riemann-Hurwitz, que permite conectar de manera alternativa el concepto topológico del género con el definido a partir del primer grupo de cohomología.

Definición 3.2.14. Sean X e Y superficies de Riemann compactas y sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante. Para $x \in X$ sea $\nu_f(x)$ la multiplicidad de f en x (cf. Definición A.19). El número

$$b_f(x) := \nu_f(x) - 1$$

se denomina el *orden de ramificación* de f en x . En particular $b_f(x) = 0$ si y sólo si f no está ramificada en x . Como X es compacto existe un número finito de puntos $x \in X$ tales que $b_f(x) \neq 0$. Podemos así definir el *orden total de ramificación* de f ,

$$b(f) := \sum_{x \in X} b_f(x).$$

Teorema 3.2.15 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sea $f : X \rightarrow Y$ un recubrimiento holomorfo de n hojas entre superficies de Riemann compactas X e Y con orden total de ramificación $b = b(f)$. Sea g el género de X y g' el género de Y . Entonces*

$$g = \frac{b}{2} + n(g' - 1) + 1.$$

Demostración. Sea ω una 1-forma meromorfa no idénticamente nula definida en Y . Entonces $\deg(\omega) = 2g' - 2$ y $\deg(f^*\omega) = 2g - 2$. Supongamos que $x \in X$ y $f(x) = y$. Por la Proposición 1.2.1 existen entornos coordenados (U, z) de x y (U', w) de y con $z(x) = 0 = w(y)$ tales que respecto a estas coordenadas podemos escribir f como $w = z^k$, donde $k = \nu_f(x)$. En U' sea $\omega = \psi(w) dw$. Entonces en U se tiene que

$$f^*\omega = \psi(z^k) dz^k = kz^{k-1}\psi(z^k) dz.$$

Esto implica que

$$\text{ord}_x(f^*\omega) = b_f(x) + \nu_f(x) \text{ord}_y(\omega).$$

Puesto que

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \nu_f(x) = n,$$

para todo $y \in Y$ se tiene que

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} b_f(x) + n \text{ord}_y(\omega).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \deg(f^*\omega) &= \sum_{x \in X} \text{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{ord}_x(f^*\omega) = \\ &= \sum_{x \in X} b_f(x) + n \sum_{y \in Y} \text{ord}_y(\omega) = b(f) + n \deg(\omega), \end{aligned}$$

lo que implica que $2g - 2 = b + n(2g' - 2)$ de lo que se deduce la fórmula. \square

Para el caso especial de un recubrimiento de n hojas $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de la esfera de Riemann con orden total de ramificación $b = b(\pi)$, el género de la superficie de Riemann puede expresarse como

$$g = \frac{b}{2} - n + 1.$$

Si recordamos lo visto en la Sección 1.4 dedicada a las curvas algebraicas planas, y en especial la Proposición 1.4.13, habíamos deducido que la característica de Euler de una curva C dada a partir de un polinomio homogéneo de grado d verificaba la relación

$$\chi(C) = d\chi(\mathbb{P}^1) - b = 2d - b,$$

donde utilizamos que $\chi(\mathbb{P}^1) = 2$, lo cual puede verse a partir de una sencilla triangulación de la esfera formada por 3 vértices, 3 aristas y 2 caras. Si ahora calculamos el género topológico

$$g_\tau = \frac{1}{2}(2 - \chi(C)) = \frac{1}{2}(2 - 2d + b) = \frac{b}{2} - d + 1,$$

solamente tenemos que ver que $n = d$ para poder unir las dos definiciones de género.

Proposición 3.2.16. *Una curva algebraica plana no singular C de grado d es un recubrimiento de d hojas de la esfera de Riemann \mathbb{P}^1 .*

Demostración. Suponiendo sin pérdida de generalidad que $[0, 1, 0] \notin C$. De acuerdo con el Corolario A.22 la aplicación

$$\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad \phi[x, y, z] = [x, z]$$

es un recubrimiento de n hojas para cierto $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, siguiendo el Lema 1.4.7 y el Teorema A.20 ϕ toma cada valor $[a, c] \in \mathbb{P}^1$ un total de d veces contando multiplicidades, es decir, es un recubrimiento de d hojas. \square

Con esto hemos concluido una vez más la igualdad de los géneros $g = g_\tau$. Para finalizar veamos cómo la fórmula género-grado 1.4.15 no es sino un caso particular de la fórmula de Riemann-Hurwitz:

Corolario 3.2.17. *El género g de una curva algebraica plana no singular C de grado d es*

$$g = \frac{1}{2}(d - 1)(d - 2).$$

Demostración. De los Lemas 1.4.9 y 1.4.10 podemos suponer que $b = d(d - 1)$. Basta entonces con sustituir b en la fórmula de Riemann-Hurwitz y el recubrimiento $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$:

$$g = \frac{b}{2} - d + 1 = \frac{1}{2} (d^2 - d - 2d + 2) = \frac{1}{2} (d - 1)(d - 2).$$

□

Apéndice A

Resultados topológicos

En este apéndice se recogen resultados de carácter topológico pertenecientes a la teoría de espacios y aplicaciones recubridores que por su naturaleza no resulta adecuado incluirlos en el cuerpo del trabajo. Para la mayoría de ellos consideramos únicamente su enunciado; las demostraciones pueden encontrarse en el libro de Forster [3, §4 y §5] con las excepciones de la Proposición A.21 y el Corolario A.22 que pueden encontrarse en el Apéndice C del libro de Kirwan [7].

En lo que sigue se presupone lo expuesto en las secciones 1.1 y 1.2, es decir, la definición de carta, atlas y superficie de Riemann y las propiedades elementales de funciones holomorfas, en concreto su comportamiento local. Para la Proposición A.21 y el Corolario A.22 resulta necesaria la sección 1.4 para la definición de curva algebraica plana y la aplicación de proyección ϕ .

Definición A.1. Sean X e Y espacios topológicos y $p : Y \rightarrow X$ una aplicación continua. Para $x \in X$ el conjunto $p^{-1}(x)$ recibe el nombre de *fibra de p sobre x* . Si $p : Y \rightarrow X$, $q : Z \rightarrow X$ son continuas, entonces una aplicación $f : Y \rightarrow Z$ *conserva fibras* si $p = q \circ f$. Esto quiere decir que para cualquier $y \in Y$ que pertenezca a la fibra $p^{-1}(x)$ es enviado a un punto que también está en la fibra $q^{-1}(x)$.

Una aplicación $p : Y \rightarrow X$ se denomina *discreta* si la fibra $p^{-1}(x)$ es un conjunto discreto en Y para todo $x \in X$.

Proposición A.2. Sean X e Y superficies de Riemann y $p : Y \rightarrow X$ una función holomorfa no constante. Entonces p es abierta y discreta.

Demostración. Por 1.2.2 p es abierta, y si la fibra de algún punto $a \in X$ no fuese discreta, por el Teorema de Identidad 1.1.10 p sería la función constante igual a a . □

Una función holomorfa $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ o meromorfa $f : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ también puede considerarse como una función holomorfa o meromorfa multivaluada en X . Si $x \in X$ y $p^{-1}(x) = \{y_j, j \in J\}$ entonces los $f(y_j), j \in J$ son los distintos valores de esta función en x , y siempre cabe la posibilidad de que $p^{-1}(x)$ sea un único punto o el conjunto vacío.

Definición A.3. Sean X e Y superficies de Riemann y $p : Y \rightarrow X$ una función holomorfa no constante. Un punto $y \in Y$ es un *punto de ramificación* de p si no existe ningún entorno V de y tal que $p|_V$ sea inyectiva. La función p recibe el nombre de *aplicación holomorfa sin ramificaciones*.

Teorema A.4. Sean X e Y superficies de Riemann. Una función holomorfa no constante $p : Y \rightarrow X$ no tiene puntos de ramificación si y sólo si p es un homeomorfismo local.

Demostración. Supongamos que p no tiene puntos de ramificación y sea $y \in Y$. Entonces y tiene un entorno abierto V tal que $p|_V$ es inyectiva. Como p es continua y abierta, $p|_V$ es un homeomorfismo entre V y $U = p(V)$, un abierto de X .

Recíprocamente supongamos que p es un homeomorfismo local. Entonces para todo $y \in Y$ existe un entorno abierto V de y que p envía de forma homeomorfa a un abierto de X . En particular $p|_V$ es inyectiva, luego y no es un punto de ramificación. \square

Teorema A.5. Sea X una superficie de Riemann, Y un espacio topológico de Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local. Entonces existe una única estructura compleja en Y tal que p es holomorfa.

Demostración. Sea $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ una carta de la estructura compleja de X tal que existe un abierto $U \subset Y$ con $p|_U \rightarrow U_1$ un homeomorfismo. Entonces $\varphi := \varphi_1 \circ p : U \rightarrow V$ es una carta compleja en Y . Sea \mathfrak{U} el conjunto de todas las cartas obtenidas de esta manera. Es fácil ver que estas cartas recubren Y y que son holomórficamente compatibles entre ellas. Dotando a Y de la estructura compleja definida por \mathfrak{U} , p es localmente biholomorfa, luego en particular es holomorfa.

Para probar la unicidad supongamos que \mathfrak{U}' es otro atlas complejo en Y tal que $p : (Y, \mathfrak{U}') \rightarrow X$ es holomorfa y por tanto localmente holomorfa. Entonces la identidad $(Y, \mathfrak{U}) \rightarrow (Y, \mathfrak{U}')$ es localmente biholomorfa, luego es una aplicación biholomorfa. Entonces \mathfrak{U} y \mathfrak{U}' definen la misma estructura compleja. \square

Definición A.6. Sean X, Y y Z espacios topológicos y sean $p : Y \rightarrow X, f : Z \rightarrow X$ continuas. Una *elevación* de f respecto a p es una aplicación continua $g : Z \rightarrow Y$ tal que $f = p \circ g$.

Proposición A.7. Sean X e Y espacios de Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local. Sea X un espacio conexo y $f : Z \rightarrow X$ una aplicación continua. Si $g_1, g_2 : Z \rightarrow Y$ son dos elevaciones de f y $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ para algún $z_0 \in Z$ entonces $g_1 = g_2$.

Proposición A.8. Sean X, Y y Z superficies de Riemann, $p : Y \rightarrow X$ una aplicación holomorfa sin ramificaciones y $f : Z \rightarrow X$ es una función holomorfa cualquiera. Entonces toda elevación $g : Z \rightarrow Y$ de f es holomorfa.

Teorema A.9. Sean X e Y espacios de Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local. Sean $a, b \in X$ y $\hat{a} \in Y$ tal que $p(\hat{a}) = a$. Sea además una aplicación continua $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $A(0, s) = a$ y $A(1, s) = b$ para todo $s \in [0, 1]$. Definamos

$$u_s(t) := A(t, s).$$

Si toda curva u_s tiene una elevación \hat{u}_s con punto inicial \hat{a} entonces \hat{u}_0 y \hat{u}_1 tienen el mismo punto final y son homótopas.

Definición A.10. Sean X e Y dos espacios topológicos. Una *aplicación recubridora* o *recubrimiento* es una aplicación $p : Y \rightarrow X$ que verifica lo siguiente: todo punto $x \in X$ tiene un entorno abierto U tal que su contraimagen puede escribirse como

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

donde los $V_j, j \in J$ son abiertos disjuntos de Y , y todas las aplicaciones $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ son homeomorfismos. En particular p es un homeomorfismo local.

Definición A.11. Una aplicación continua $p : Y \rightarrow X$ verifica la *propiedad de elevación de curvas* si para toda curva $u : [0, 1] \rightarrow X$ y todo punto $y_0 \in Y$ con $p(y_0) = u(0)$ existe una elevación $\hat{u} : [0, 1] \rightarrow Y$ de u tal que $\hat{u}(0) = y_0$.

Proposición A.12. Todo recubrimiento $p : Y \rightarrow X$ de espacios topológicos X e Y verifica la propiedad de elevación de curvas.

Proposición A.13. Sean X e Y espacios de Hausdorff con X conexo por caminos y $p : Y \rightarrow X$ un recubrimiento. Para dos puntos $x_1, x_2 \in X$ cualesquiera los conjuntos $p^{-1}(x_1)$ y $p^{-1}(x_2)$ tienen el mismo cardinal. En particular, si Y es no vacío entonces p es sobreyectiva.

Proposición A.14. Sean X e Y espacios de Hausdorff y sea $p : Y \rightarrow X$ un recubrimiento. Sea Z un espacio topológico simplemente conexo, conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Dada una aplicación continua $f : Z \rightarrow X$, para cada par de puntos $z_0 \in Z$ e $y_0 \in Y$ con $f(z_0) = p(y_0)$ existe una única elevación $\hat{f} : Z \rightarrow Y$ con $\hat{f}(z_0) = y_0$. Si además f es un homeomorfo a su imagen $f(Z)$, entonces F es un homeomorfo a una componente conexa de $p^{-1}(f(Z))$.

Proposición A.15. *Sea X una variedad, Y un espacio de Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local que verifica la propiedad de elevación de curvas. Entonces p es un recubrimiento.*

Definición A.16. Sean X e Y dos espacios localmente compactos, es decir, son espacios de Hausdorff y todo punto posee un entorno compacto. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ entre espacios localmente compactos es *propia* si la contraimagen de todo conjunto compacto también es compacta.

Toda aplicación propia es cerrada, lo cual se deduce de que en un espacio localmente compacto un conjunto es cerrado si y sólo si su intersección con todo conjunto compacto es a su vez compacta. En particular, si X es compacto entonces toda $f : X \rightarrow Y$ es propia.

Lema A.17. *Sean X e Y espacios localmente compactos y $p : Y \rightarrow X$ una aplicación propia y discreta. Entonces se verifica:*

- (a) *Para todo $x \in X$ el conjunto $p^{-1}(x)$ es finito.*
- (b) *Si $x \in X$ y V es un entorno de $p^{-1}(x)$ entonces existe un entorno U de x con $p^{-1}(U) \subset V$.*

Proposición A.18. *Sean X e Y espacios localmente compactos y $p : Y \rightarrow X$ un homeomorfismo local propio. Entonces p es un recubrimiento.*

Consideremos dos superficies de Riemann X e Y y una aplicación $f : X \rightarrow Y$ holomorfa, no constante y propia. A partir de la Proposición 1.2.1 se deduce que el conjunto de puntos de ramificación de f , $A \subset X$, debe ser discreto y cerrado. Gracias a que f es propia, el conjunto $B := f(A)$ es de nuevo discreto y cerrado.

Sea $Y' = Y - B$ y $X' = X - f^{-1}(B) \subset X - A$. Entonces $f|X' \rightarrow Y'$ es un recubrimiento holomorfo propio sin ramificaciones, y por A.18, A.13 y A.17(a) cada valor $c \in Y'$ se toma exactamente un número finito de veces, n . Decimos que esta aplicación tiene n *hojas*. Para extender esta noción a los puntos $b \in B$ debemos tomar en cuenta las multiplicidades.

Definición A.19. Dado $x \in X$ denotamos por $\nu_f(x)$ la multiplicidad (en el sentido de la Proposición 1.2.1) con que f toma los valores $f(x)$ en el punto x . Entonces diremos que f toma en el valor $c \in Y$ en X un total de m veces si

$$m = \sum_{x \in p^{-1}(c)} \nu_f(x).$$

Es fácil comprobar que esta definición coincide para el caso particular visto en la Definición 1.4.6.

Teorema A.20. Sean X e Y superficies de Riemann y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa, no constante y propia. Entonces existe un número natural n tal que f toma cada valor $c \in Y$ un total de n veces contando multiplicidades.

Las aplicaciones holomorfas, no constantes y propias se denominarán *recubrimientos de n hojas*, donde n es el número encontrado en el resultado anterior. Estos recubrimientos pueden tener puntos de ramificación: en el caso de que no tengan ninguno los denominamos *sin ramificaciones*.

Proposición A.21. Sean X e Y espacios de Hausdorff y $p : Y \rightarrow X$ una aplicación continua tal que todo $x \in X$ tiene un entorno abierto U en X tal que cada componente conexa de $p^{-1}(U)$ contiene a lo sumo un punto de $p^{-1}(x)$. Supongamos que Y es compacto y que $V \subset X$ es un abierto tal que $p : p^{-1}(V) \rightarrow V$ es un recubrimiento. Si $f : [0, 1] \rightarrow X$ es continua y $f^{-1}(V)$ contiene el intervalo abierto $(0, 1)$ entonces, dados $\tau \in (0, 1)$ e $y \in Y$ tales que $p(y) = f(\tau)$, existe una única aplicación continua $F : [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $F(\tau) = y$ y $p \circ F = f$.

Este resultado también cierto si sustituimos $[0, 1]$ por Δ y $(0, 1)$ por $\Delta - \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$.

Corolario A.22. Sea C una curva algebraica plana que no contenga al punto $[0, 1, 0]$ y sea $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ dada por

$$\phi[x, y, z] = [x, z].$$

Si R es el conjunto de puntos de ramificación de ϕ entonces

$$\phi : C - R \rightarrow \mathbb{P}^1 - \phi(R)$$

es un recubrimiento y verifica las hipótesis de la Proposición A.21.

Corolario A.23. Sea X una superficie de Riemann compacta. Toda función meromorfa no constante $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ tiene tantos ceros como polos (contando multiplicidades).

Demostración. La aplicación $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ es propia, luego f tomará el valor 0 e ∞ el mismo número de veces. \square

Corolario A.24. Cualquier polinomio de grado d

$$f(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_d \in \mathbb{C}[z]$$

tiene, contando multiplicidades, exactamente d ceros.

Definición A.25. Sean X e Y espacios topológicos conexos y $p : Y \rightarrow X$ un recubrimiento. $p : Y \rightarrow X$ recibe el nombre de *recubrimiento universal* de X si se satisface la siguiente propiedad universal: para toda aplicación recubridora $q : Z \rightarrow X$ con Z conexo y para toda elección de puntos $y_0 \in Y, z_0 \in Z$ con $p(y_0) = q(z_0)$ existe exactamente una aplicación continua que conserva fibras $f : Y \rightarrow Z$ tal que $f(y_0) = z_0$.

Un espacio topológico conexo X tiene salvo isomorfismo un único recubrimiento universal. Conservando la notación, supongamos que $q : Z \rightarrow X$ es también un recubrimiento universal. Entonces existe $g : Z \rightarrow Y$ continua que conserva fibras tal que $g(z_0) = y_0$. Las composiciones $g \circ f : Y \rightarrow Y$ y $f \circ g : Z \rightarrow Z$ son continuas y conservan fibras, verificando además que $g \circ f(y_0) = y_0$ y $f \circ g(z_0) = z_0$. Debido a la condición de universalidad solamente puede existir en cada caso una aplicación continua que conserve fibras y satisfaga estas condiciones. Entonces $g \circ f = \text{id}_Y$ y $f \circ g = \text{id}_Z$. Entonces $f : Y \rightarrow Z$ es un homeomorfismo que conserva fibras.

Teorema A.26. Sean X e Y variedades conexas, Y simplemente conexa y $p : Y \rightarrow X$ un recubrimiento. Entonces p es el recubrimiento universal de X .

Teorema A.27. Sea X una variedad conexa. Entonces existe una variedad conexa y simplemente conexa \tilde{X} y un recubrimiento (universal) $p : \tilde{X} \rightarrow X$.

Bibliografía

- [1] Ash, Robert B. y Novinger, W. Phil. *Complex Variables*. 2004.
- [2] Brieskorn, Egbert y Knörrer, Horst. *Plane Algebraic Curves*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] Forster, Otto. *Lectures on Riemann surfaces*. Springer, 1981.
- [4] Gray, Jeremy J. «The Riemann-Roch theorem and geometry, 1854-1914». En: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Vol. 3. 1998, págs. 811-822.
- [5] Griffiths, Phillip y Harris, Joseph. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, 1974.
- [6] Hatcher, Allen. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [7] Kirwan, Frances. *Complex Algebraic Curves*. Cambridge University Press, 1992.
- [8] Massey, William S. *Introducción a la topología algebraica*. Reverté, 1972.
- [9] Wehler, Joachim. *Riemann Surfaces (Lecture Notes)*. URL: https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~wehler/20190530_RiemannSurfacesScript.pdf (visitado 24-06-2022).