Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Topología diferencial: Introducción y algunas aplicaciones

Autor: Gonzalo Miguel Gómez del Hierro

Tutora: Carolina Ana Núñez Jiménez

Índice general

Agradecimientos

A Ana por haber sido y ser una profesora fantástica y una tutora inmejorable.

A mis padres, a mi hermano y a todas las personas a las que quiero y me han apoyado durante mis estudios. A mis compañeros de clase Álvaro, Ignacio y José por la ayuda que me han dado día a día todo este tiempo.

A Cristina.

Introducción

Poincaré comenzó con el análisis topológico de variedades 3-dimensionales en una serie de artículos sobre *Analysis Situs*, donde inventó algunas de las herramientas básicas de la topología algebraica. Al principio Poincaré usaba métodos puramente diferenciables, pero finalmente se apoyó en gran medida en técnicas combinatorias. Durante los treinta años siguientes, los topólogos se concentraron de manera casi exclusiva en métodos algebraicos y combinatorios.

Aunque ya en 1912 Herman Weyl había definido variedades diferenciables en su libro sobre superficies de Riemann, no sería hasta la publicación de una serie de artículos de Whitney en 1936 que el concepto de variedad diferenciable fuera firmemente establecido como un objeto matemático de gran importancia. Desde ese momento, la topología diferencial ha experimentado un desarrollo rápido, y han aparecido muchas conexiones fructíferas con la topología algebraica y lineal.

Las preguntas que intenta responder la topología diferencial son de carácter global: ¿puede una variedad ser embebida en otra?, ¿si dos variedades son homeomorfas serán necesariamente difeomorfas?, ¿tienen los invariantes topológicos de una variedad alguna propiedad especial?

En este trabajo nos vamos a centrar en variedades diferenciables (con o sin borde) sumergidas en $\mathbb{R}^n$, y se van a recoger como ideas centrales la transversalidad y la aproximación. La transversalidad va a servir para garantizar que la preimagen por una aplicación diferenciable de una subvariedad de otra va a ser de nuevo una variedad, y la aproximación cuándo las condiciones de partida de un problema se van a poder cambiar por unas condiciones *similares* sobre las que podamos trabajar empleando la topología diferencial. Con estas técnicas se van a demostrar una serie de resultados importantes que se pueden obtener como fruto de una teoría subyacente común, mucho más intuitiva que la extremadamente compleja maquinaria matemática de la topología algebraica, la homología y la cohomología. Estos teoremas son, por orden de aparición, *el teorema de clasificación de curvas topológicas y diferenciables*, *el teorema del punto fijo de Brouwer*, *el teorema de invarianza del dominio* y *el teorema de separación de Jordan-Brouwer*.

Los títulos de los capítulos y secciones dan una idea clara del proceso que se sigue para llegar a demostrar esos teoremas partiendo de la construcción de variedades diferenciables. En el capítulo 1 se hace la construcción básica de las variedades diferenciables sumergidas en $\mathbb{R}^n$ y de las herramientas que podemos emplear sobre ellas, es decir, de cómo se extiende a ellas el cálculo diferencial. Se introducen también los conceptos de inmersión y sumersión, que van relacionados con una de las preguntas básicas sobre cómo podemos entender unas variedades dentro de otras.

En el capítulo 2 se desarrolla la noción de transversalidad. También demostramos en este capítulo *el teorema de Sard-Brown*, que se usa para demostrar *el teorema para-*

metrizado de densidad de la transversalidad (que en muchos textos se puede encontrar simplemente como teorema de la transversalidad o *transversality theorem*) y *el teorema de inmersión de Whitney*, que son dos teoremas fundamentales para centrar la utilidad de la transversalidad y acotar la construcción de las variables sumergidas tal como se plantea.

En el capítulo 3 se recopilan algunos resultados relativos a la *aproximación*, exponiendo resultados sobre cómo podemos aproximar funciones dependiendo del espacio en que estén definidas. De gran importancia para poder demostrar el teorema de separación de Jordan-Brouwer es el resultado de aproximación que se da para funciones sin perturbar la transversalidad.

Por último, en el capítulo 4 se recogen los teoremas clásicos ya mencionados. También se mencionan en este capítulo otro par de resultados a los que se puede llegar con técnicas similares a las anteriores, como son *el teorema de la esfera de Brouwer* y *el teorema de Borsuk-Ulam*.

A lo largo del trabajo se enuncian algunos resultados sin demostración. La razón de ello no es la dificultad de las mismas, sino el hecho de que incluirlas alargaría el trabajo más de lo razonable.

La inspiración principal del texto reside en el curso de topología diferencial de Outeruelo, Ruíz y Rojo [1]. En este marco siempre resulta imprescindible mencionar el libro de Milnor [5], cuyo título resume muy bien nuestra intención, que es hacer topología desde el punto de vista diferenciable.

Capítulo 1

Variedades con borde

En física, la aparición de problemas sujetos a ligaduras conduce de manera natural a la necesidad de considerar variedades y extender a ellas el cálculo diferencial clásico.
A lo largo del texto trabajaremos siempre con aplicaciones tan regulares como se quiera, por lo que directamente definiremos como aplicación diferenciable a las aplicaciones de clase $\mathcal{C}^\infty$.

La topología diferencial estudia variedades diferenciables, que son espacios topológicos que localmente son como abiertos de espacios afines n-dimensionales, y aplicaciones diferenciables, buscando y analizando sus propiedades.

En la sección 1.1 se hace un breve recordatorio de conceptos del análisis diferencial en abiertos de $\mathbb{R}^n$, para luego extender la definición de diferenciabilidad a aplicaciones entre conjuntos arbitrarios de espacios afines tipo $\mathbb{R}^n$, así como la noción de difeomorfismo. En la sección 1.2 se introducen las variedades diferenciables, y se definen cuidadosamente el borde y el interior de las mismas, así como la dimensión y codimensión. También se introduce la noción de espacio tangente a una variedad y cómo este está intrínsecamente relacionado con la variedad, pese a que se defina a través de parametrizaciones.

El apartado siguiente (1.3) se dedica al estudio de algunas propiedades topológicas de las variedades, demostrando el teorema de existencia de particiones de la unidad, pasando por el lema de Urysohn y la introducción de ciertas nociones neserias sobre paracompacidad. Se culmina con la demostración del teorema de Tietze diferenciable.

En la sección 1.4 se construye también el fibrado tangente, que es una variedad. Se extiende la noción de aplicación derivada a aplicaciones entre variedades a través de los espacios tangentes, y destaca el teorema de inversión local con borde, que da cuenta de la importancia del borde y de cómo este ha de ser invariante por una aplicación para que pueda ser un difeomorfismo. En los apartados 1.5 y 1.6 se definen, a través de la caracterización de la derivada de una aplicación entre variedades, las inmersiones y las sumersiones, y se construyen sendas formas locales canónicas. Dentro del apartado dedicado a inmersiones, destaca la definición de las inmersiones difeomórficas, noción que coincide con los llamados habitualmente *embeddings* en la literatura matemática en inglés.

1.1. Cálculo diferencial en conjuntos del espacio afín.

Comencemos haciendo un recordatorio de terminología y notaciones del cálculo diferencial en abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{x_0} \in U$ y f una aplicación de A en $\mathbb{R}^n$. Dado un elemento $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, se dice que f admite *derivada direccional en el punto* $\mathbf{x_0}$ *según la dirección* $\mathbf{v}$ si existe y es finito el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(\mathbf{x_0} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x_0})); \tag{1.1.1}$$

dicha derivada direccional se denota como

$$d_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x_0}) \text{ o } D_{\mathbf{v}f(\mathbf{x_0})}$$

Cuando se considera el vector $e_i = (0, ..., \overset{i)}{1}, ..., 0)$ de la base canónica en $\mathbb{R}^m$, la correspondiente derivada direccional recibe el nombre de *derivada parcial de f respecto de la variable* x_i *en el punto* $\mathbf{x_0}$ y se denota por

$$D_i f(\mathbf{x_0}) \ 0 \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x_0})$$

Si la aplicación f admite derivadas parciales respecto de todas las variables en el punto $\mathbf{x_0}$ se dice que la aplicación es *derivable* en dicho punto.

Definición 1.1.2. Dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ y una aplicación $f = (f_1, ..., f_n) : U \to \mathbb{R}^n$, diremos que f es *diferenciable* si todas sus derivadas parciales

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j1} \cdots \partial x_{jk}} : U \to \mathbb{R}$$

existen y son continuas.
Si f es diferenciable, su diferencial (o derivada) en un punto $x \in U$ es una aplicación lineal $Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con matriz en las bases canónicas de ambos espacios:

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

Está noción de diferenciabilidad con la que trabajaremos se extiende a conjuntos arbitrarios.

Definición 1.1.3. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$,$Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos arbitrarios y $f : X \to Y$ una aplicación; se dice que f es *diferenciable* si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U de x en $\mathbb{R}^m$ y una aplicación diferenciable $\overline{f} : U \to \mathbb{R}^n$ de manera que $f|_{X \cap U} = \overline{f}|_{X \cap U}$. Bajo estas condiciones diremos que $\overline{f}$ es una *extensión local* de f.
Denotamos por $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ al conjunto de las aplicaciones diferenciables de X en Y.

Observación 1.1.4. Se verifica además que cuando $f : X \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable, su derivada direccional en el punto $x \in X$ según la dirección $u \in \mathbb{R}^m$ se puede calcular por la fórmula:

$$Df(x)(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}$$

cuando el límite del segundo miembro tenga sentido.

Observación 1.1.5. Si $f : X \to Y$ es una aplicación diferenciable en un punto $x \in \text{Int}X$, tiene sentido la definición de $Df(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de 1.1.2, puesto que dadas dos extensiones locales de f: $\overline{f_1}$ y $\overline{f_2}$, que suponemos definidas en un entorno abierto U de x contenido en X (esto es posible por ser x un punto interior y dado que al restringirnos a abiertos más pequeños la diferenciabilidad se mantiene) entonces necesariamente $\overline{f_1}(y) = \overline{f_2}(y)\ \forall\ y \in U$ y también $D\overline{f}_1(y) = D\overline{f}_2(y)$ luego esto se da para el punto x y tiene sentido definir $Df(x) = D\overline{f}(x)$, siendo $\overline{f}$ cualquier extensión local en x de f.
Teniendo en cuenta la continuidad de las aplicaciones lineales, el argumento anterior se puede generalizar a cualquier punto que sea adherente a $\text{Int}X$.

Proposición 1.1.6. Las propiedades elementales bien conocidas en caso de que X es un abierto de $\mathbb{R}^m$ valen también para X arbitrario.

1. La suma y el producto de funciones diferenciables es diferenciable.

2. La composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable y la diferencial (en caso de tener sentido) se calcula mediante la *regla de la cadena*:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) \tag{1.1.2}$$

   cuando ambas estén definidas.

3. Dado un recubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ y funciones $f_i : X_i \to \mathbb{R}^n$ diferenciables de manera que para cada par de índices $i, j \in I$ se tenga $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$, tiene sentido definir la aplicación $f : X \to \mathbb{R}^n$ dada por $f|_{X_i} = f_i$ y se trata de una aplicación diferenciable.

Definición 1.1.7. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos arbitrarios.

1. Una biyección $f : X \to Y$ es un *difeomorfismo* si tanto f como f^{-1} son diferenciables.

2. Una aplicación $f : X \to Y$ es un *difeomorfismo local en* $x \in X$ si existen entornos abiertos U de x en X y V de $f(x)$ en Y de manera que la restricción $f|_U$ sea un difeomorfismo entre U y V.

Un difeomorfismo local se puede caracterizar a través de la diferencial en el punto. El siguiente resultado es un resultado típico de análisis matemático y no se incluirá su demostración.

Teorema 1.1.8 (de la aplicación inversa)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable y $x \in U$. Entonces f es un difeomorfismo local en x si y solo si la diferencial $Df(x)$ es un isomorfismo lineal.

Obsérvese que el resultado anterior está dado para aplicaciones definidas en abiertos y no bajo la generalización a conjuntos arbitrarios que se ha ido dando a lo largo de la sección.

Por la utilidad que tendrá se introduce la siguiente definición:

Definición 1.1.9. Dadas dos aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $f \circ g = Id_X$, entonces se dice que g *es una inversa por la derecha de* f o que f *es una inversa por la izquierda de* g.

Observación 1.1.10. Sean f y g dos aplicaciones diferenciables. Si g es una inversa por la derecha (resp. izquierda) de f entonces la diferencial de g es una inversa por la derecha (resp. izquierda) de la diferencal de f.

1.2. Variedades diferenciables con borde.

Definición 1.2.1. Sea $\lambda : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ una forma lineal. Llamaremos *semiespacio afin (asociado a λ)* y denotaremos $\mathbb{H}^p$ al conjunto:

$$\mathbb{H}^p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \lambda(\mathbf{x}) \geq 0\}$$

Notemos que dado un semiespacio afín, tendremos que:

$$\operatorname{Int}\mathbb{H}^p = \{\lambda(\mathbf{x}) > 0\};\ \partial\mathbb{H}^p = \{\lambda(\mathbf{x}) = 0\}$$

Nosotros trabajaremos con los semiespacios afines dados por las proyecciones coordenadas (que claramente son formas lineales), es decir, conjuntos del tipo $\mathbb{H}^p = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p : x_i \geq 0\}$.
Claramente $\operatorname{Int}\mathbb{H}^p$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^p$ y $\partial\mathbb{H}^p$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{p-1}$.

Definición 1.2.2. Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ es una *variedad diferenciable* si para cada punto $x \in X$ existe un difeomorfismo $\varphi : A \to U$ de un abierto A de un semiespacio afín $\mathbb{H}^p$ sobre un entorno abierto U de x en X (i.e. X localmente difeomorfo a $\mathbb{H}^p$).
Tal difeomorfismo φ se llama *parametrización (o carta) local de X*, el difeomorfismo inverso φ^{-1} se llama *sistema local de coordenadas de X* y U se llama *dominio de coordenadas.*
Dadas dos parametrizaciones de una misma variedad diferenciable, $\varphi : A \to U$ y $\psi : B \to V$, el difeomorfismo

$$\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$$

se denomina *cambio de coordenadas.*

En otras palabras, una variedad diferenciable es un conjunto localmente difeomorfo a un semiespacio afín. Por otr lado, llamaremos *variedad topológica* a un conjunto localmente homeomorfo a un semiespacio afín.

Observación 1.2.3.

1. Por ser una variedad diferenciable localmente homeomorfa a un semiespacio afín, será localmente compacta y localmente conexa por caminos.
2. Un subconjunto abierto de una variedad es una variedad (sin más que atender a la definición). En particular, las componentes conexas son variedades (las componentes conexas de un conjunto localmente conexo son abiertos en el conjunto).

Lema 1.2.4. Sea W un abierto de $\mathbb{R}^p$, $\lambda : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ una forma lineal no nula, y $f : W \to \mathbb{R}^q$ una aplicación diferenciable cuya imagen está totalmente contenida en $\mathbb{H}^q = \{\lambda \geq 0\} \subset \mathbb{R}^q$. Si $\mathbf{x} \in W$ es tal que $\lambda(f(\mathbf{x})) = 0$, entonces $\lambda \circ Df(\mathbf{x}) \equiv 0$, o lo que es lo mismo: $\operatorname{Im} Df(\mathbf{x}) \subset \operatorname{Ker}\lambda$.

Demostración. En primer lugar, como $Df(\mathbf{x})$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^q$, la condición del enunciado equivale a comprobar que dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ cualquiera, se tiene que $\lambda(Df(\mathbf{x})(\mathbf{u})) = 0$.
Para ello, empleemos la definición de la diferencial en un punto como cociente incremental (esto se puede hacer por ser W un abierto de $\mathbb{R}^p$):

$$Df(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

Como el límite anterior por hipótesis está definido, podemos asegurar que dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ de manera que si $0 < |t| < \delta$, entonces:

$$\left\| Df(\mathbf{x})(\mathbf{u}) - \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} \right\| < \epsilon$$

Fijamos $\epsilon > 0$ y definimos

$$\mathbf{u}_t := \frac{1}{\epsilon} \left(Df(\mathbf{x})(\mathbf{u}) - \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} \right) \in \mathbb{R}^p \text{ para } 0 < |t| < \delta$$

De la desigualdad anterior es claro que $\|\mathbf{u}_t\| < 1$, y además se tiene la siguiente igualdad:

$$t\,(Df(\mathbf{x})(\mathbf{u}) - \epsilon \mathbf{u}_t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})$$

Aplicando el operador λ a ambos lados de la última igualdad, teniendo en cuenta que $\lambda(f(\mathbf{x})) = 0$ por hipótesis, llegamos a:

$$t\,[\lambda(Df(\mathbf{x})(\mathbf{u})) - \epsilon\lambda(\mathbf{u}_t)] = \lambda(f(\mathbf{x} + t\mathbf{u})) \geq 0$$

puesto que por hipótesis $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{H}^q$.
Teniendo en cuenta que λ es una forma lineal, es continua y tiene norma finita y se tiene que $\lambda(\mathbf{u}_t) \leq \|\lambda\|\|\mathbf{u}_t\| \leq \|\lambda\|$.
Entonces:

- Si $t > 0$, $\lambda(Df(\mathbf{x})(\mathbf{u})) \geq \epsilon\lambda(\mathbf{u}_t) \geq -\epsilon\|\lambda\|$.
- Si $t < 0$, $\lambda(Df(\mathbf{x})(\mathbf{u})) \leq \epsilon\lambda(\mathbf{u}_t) \leq \epsilon\|\lambda\|$.

De manera que $|\lambda(Df(\mathbf{x})(\mathbf{u}))| \leq \epsilon\|\lambda\|$ para cualquier $\epsilon > 0$, y entonces necesariamente $\lambda(Df(\mathbf{x})(\mathbf{u})) = 0$. □

A partir de este lema se va a deducir que el borde de una variedad es invariante por parametrizaciones.

Proposición 1.2.5. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable, $\varphi : A \to U$, $A \subset \mathbb{H}^p$, $\psi : B \to V$, $B \subset \mathbb{H}^q$ de X y $a \in U \cap V$. Entonces necesariamente $p = q$ y $\varphi^{-1}(a) \in \partial\mathbb{H}^p$ si y solo si $\psi^{-1}(a) \in \partial\mathbb{H}^q$.

Demostración. Sean $\tilde{A} = \varphi^{-1}(U \cap V)$ y $\tilde{B} = \psi^{-1}(U \cap V)$, y sea el cambio de coordenadas

$$f = \psi^{-1} \circ \varphi : \tilde{A} \xrightarrow{\varphi} U \cap V \xrightarrow{\psi^{-1}} \tilde{B}$$

Como $\tilde{A}$ es un abierto de $\mathbb{H}^p$ no vacío, se tiene que $\operatorname{Int}\tilde{A} \neq \emptyset$ y por ser f un homeomorfismo, $f(\operatorname{Int}\tilde{A}) = \operatorname{Int}\tilde{B}$, y entonces $f|_{\operatorname{Int}\tilde{A}} : \operatorname{Int}\tilde{A} \to \operatorname{Int}\tilde{B}$ es una aplicación diferenciable definida en un abierto de $\mathbb{R}^p$, y necesariamente es un difeomorfismo. En virtud del teorema de la función inversa, la diferencial de $f|_{\operatorname{Int}\tilde{A}}$ en cualquier punto es un isomorfismo de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^q$, y por tanto $p = q$.
Mediante un cambio lineal de coordenadas podemos suponer que $\mathbb{H}^p = \mathbb{H}^q = \{(x_1, .., x_p) \in \mathbb{R}^p : x_1 \geq 0\}$. Entonces $\partial\mathbb{H}^p = \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. Llamemos λ a la forma lineal de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}$ dada por la proyección sobre la primera coordenada.
Veamos que si $\psi^{-1}(a) \in \partial\mathbb{H}^p$ entonces también $\varphi^{-1}(a) \in \partial\mathbb{H}^p$ (la inversa es cierta por simetría).
Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\varphi^{-1}(a) \notin \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$, pero $f(\varphi^{-1}(a)) = \psi^{-1}(a) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$.
Sea $W = \{x_1 > 0\} \cap \tilde{A}$ que es precisamente el interior de $\tilde{A}$ visto como conjunto de $\mathbb{R}^p$, luego es abierto, y por hipótesis contiene a $\varphi^{-1}(a)$. Resulta

$$f(W) \subset f(\tilde{A}) = \tilde{B} \subset \mathbb{H}^p = \{x_1 \geq 0\}$$

y además $\lambda(f(\varphi^{-1}(a))) = \lambda(\psi^{-1}(a)) = 0$. Teniendo en cuenta que la restricción de f a W es una aplicación diferenciable, podemos aplicar el lema anterior para concluir que bajo estas condiciones necesariamente $\operatorname{Im} Df(\varphi^{-1}(a)) \subset \operatorname{Ker}\lambda = \partial\mathbb{H}^p = \{x_1 = 0\} \equiv \mathbb{R}^{p-1}$ en contra de que $Df(\varphi^{-1}(a))$ es un isomorfismo en $\mathbb{R}^p$, llegando a un absurdo y concluyendo por tanto que necesariamente $\varphi^{-1}(a) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. $\square$

En virtud del resultado anterior, la definición siguiente no depende de parametrizaciones y es consistente.

Definición 1.2.6. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable. Se dice que un punto $x \in X$ está en el *interior* (resp. *borde*) de X si para alguna parametrización $\varphi : A \to U$, $A \subset \mathbb{H}^p$ con $x \in U$, $\varphi^{-1}(x)$ no está (resp. $\varphi^{-1}(x)$ está) en la frontera de $\mathbb{H}^p$; el conjunto de esos puntos se denota como $\operatorname{Int}(X)$ (resp. ∂X). Diremos que X es una variedad *sin borde* si $\partial X = \emptyset$; en caso contrario diremos que es una variedad *con borde*.

Corolario 1.2.7. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable.

1. $\operatorname{Int}(X)$ es abierto de X y $\partial X = X \setminus \operatorname{Int}(X)$ es cerrado en X.

2. $\operatorname{Int}(X)$ y ∂X son variedades diferenciables, ambas sin borde.

Demostración. Sea $x \in \operatorname{Int}(X)$. Sea $\varphi : A \to U$, $A \subset \mathbb{H}^p$ una parametrización y $x \in U$. El conjunto $\operatorname{Int}(A) = A \setminus \partial\mathbb{H}^p = \varphi^{-1}(U \cap \operatorname{Int}(X))$ es un abierto de $\mathbb{R}^p$ y la restricción de φ da un difeomorfismo entre $\operatorname{Int}(A)$ y $U \cap \operatorname{Int}(X)$, luego el último es un abierto de X de manera que $x \in U \cap \operatorname{Int}(X) \subset \operatorname{Int}(X)$, y por tanto $\operatorname{Int}(X)$ es abierto en X. Inmediatamente, como $\partial X = X \setminus \operatorname{Int}(X)$, se tiene que es un cerrado en X. Además, $\varphi^{-1}(x) \notin \partial\mathbb{H}^p$.
Ya es conocido que $\operatorname{Int}(X)$ es una variedad (por ser un subconjunto abierto de una) y necesariamente es sin borde.
Asímismo, el borde $\partial A = A \cap \partial\mathbb{H}^p = \varphi^{-1}(U \cap \partial X)$ es un abierto en $\partial\mathbb{H}^p \equiv \mathbb{R}^{p-1}$ y $\varphi|_{\partial A} : \partial A \to U \cap \partial X$ es un difeomorfismo, lo que nos permite concluir que ∂X es una variedad. Para concluir que es además una variedad sin borde basta tener en cuenta que a través de las parametrizaciones de X obtenemos parametrizaciones de ∂X siempre definidas en abiertos de $\partial\mathbb{H}^p$, o lo que es lo mismo, de $\mathbb{R}^{p-1}$, luego ∂X es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^{p-1}$ y por tanto a $\operatorname{Int}\mathbb{H}^{p-1}$. Por tanto ∂X es una variedad sin borde. $\square$

Teorema 1.2.8. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ y $Y \subset \mathbb{R}^n$ variedades diferenciables y $f : X \to Y$ un difeomorfismo. Entonces $f(\partial X) = \partial Y$, y en consecuencia $f(\mathrm{Int}(X)) = \mathrm{Int}(Y)$.

Demostración. Sea $x \in \partial X$ y $\varphi : A \to U$, $A \subset \mathbb{H}^p$, una parametrización de X en x. Entonces $\psi = f \circ \varphi$ es una parametrización de Y en $y := f(x)$. Se sigue $\psi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(f^{-1}(y)) = \varphi^{-1}(x) \in \partial\mathbb{H}^p$ y en consecuencia $f(x) \in \partial Y$. $\square$

Observación 1.2.9. Nuestra definición de aplicación diferenciable $f : X \to Y$ depende de las inclusiones $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$. Sin embargo, para variedades tenemos que f es diferenciable si y solo si para cada $x \in X$ existen parametrizaciones $\varphi : A \to U$ de X y $\psi : B \to V$ de Y con $x \in U$, $f(x) \in V$ y $f(U) \subset V$, de manera que la *expresión local* $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : A \to B$ sea diferenciable.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & V \\
A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi^{-1}\circ f\circ\varphi"] & B \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.2.10. Si $f : X \to Y$ es un difeomorfismo local en $x \in X$ entre dos variedades X e Y, entonces existen parametrizaciones $\varphi : A \to X$ y $\psi : A \to Y$ con mismo dominio de definición, $x \in \varphi(A)$, $f(x) \in \psi(A)$, de manera que la expresión local $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ es la identidad en A.

Demostración. Sea U un entorno abierto de x en X de manera que $f|_U : U \to f(U)$ sea un difeomorfismo ($f(U)$ es un entorno abierto de $f(x)$ en Y). Sea $\varphi : A \to \varphi(A)$ cualquier parametrización de x en X con $\varphi(A) \subset U$, entonces $\psi = f \circ \varphi : A \to f(\varphi(A))$ es una parametrización de x en Y que cumple lo pedido. Además claramente $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ \varphi = \mathrm{Id}_A$. $\square$

El comportamiento del borde es muy relevante en la manipulación de aplicaciones entre variedades, es por ello que se introduce la siguiente definición:

Definición 1.2.11. Se dice que una aplicación entre variedades $f : X \to Y$ conserva el borde en $T \subset X$ si todo punto $x \in T$ tiene un entorno U en X tal que $f(U \cap \partial X) \subset \partial Y$.

Observación 1.2.12. Si $x \in \mathrm{Int}(X)$ entonces existe un entorno abierto U de x en X de manera que $U \cap \partial X = \emptyset$ y $f(U \cap \partial X) = f(\emptyset) = \emptyset \subset \partial Y$, luego f conserva el borde en todo $x \in \mathrm{Int}(X)$.

Introducimos el concepto de dimensión de una variedad:

Definición 1.2.13. (1) Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable, $x \in X$ y $\varphi : A \to U$ una parametrización con $A \subset \mathbb{H}^p$. Se dice entonces que la *dimensión de x en X* es p y se escribe $\dim_x X = p$. Se llama *dimensión de X* y se denota $\dim X$ al máximo de las dimensiones $\dim_x X,\ x \in X$.

(2) Si la dimensión es constante en todo X se dice que X es de *dimensión pura*. Una variedad de dimensión pura 1 se llama *curva* y una de dimensión pura 2 se llama *superficie*.

(3) Si $X \subset Y$ son dos variedades de dimensiones p y q en un punto $x \in X$, denominamos *codimensión de* X *en* Y *en el punto* x al número $\mathrm{codim}_x(Y, X) = p - q$. Si está codimensión es constante se dice que la codimensión es pura y se denota $\mathrm{codim}(Y, X)$. Una variedad $X \subset Y$ de codimensión pura 1 en Y se denomina *hipersuperficie* de Y.

Observación 1.2.14. (1) Según se observa en la demostración 1.2.7, dada $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable, si $x \in \mathrm{Int}(X)$ entonces $\dim_x \mathrm{Int}(X) = \dim_x X$, y si $x \in \partial X$, $\dim_x \partial X = \dim_x X - 1$.

(2) La dimensión de una variedad es localmente constante y por tanto constante en cada componente conexa de la variedad.

(3) Notemos que además directamente de la construcción de la demostración del teorema 1.2.8 se concluye que si $f : X \to Y$ es un difeomorfismo entre dos variedades, entonces $\dim_x X = \dim_{f(x)} Y$ para todo $x \in X$.

Ejemplo 1.2.15. (1) $\mathbb{R}^p$ es una variedad diferenciable sin borde, puesto que es difeomorfo a $\mathrm{Int}\, \mathbb{H}^p$, luego tiene dimensión pura p.

(2) La esfera unidad $\mathbb{S}^p = \{x \in \mathbb{R}^{p+1} : \|x\| = 1\}$ es una variedad diferenciable sin borde. Por ejemplo, usando dos proyecciones estereógraficas (una dejando fuera el polo norte $(1, 0, ..., 0)$ y otra dejando fuera el sur $(-1, 0, ..., 0)$) podemos parametrizar adecuadamente toda la variedad. Las proyecciones estereográficas son definidas con llegada (para el caso de las parametrizaciones obtenidas a partir de ellas será salida) en $\mathbb{R}^p$ que es difeomorfo a $\mathrm{Int}\, \mathbb{H}^p$, luego además es una variedad de dimensión p.

Definición 1.2.16. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable y $x \in X$. Para cualquier parametrización $\varphi : A \to U$ de X, $A \subset \mathbb{H}^p$, con $x \in U$, la imagen de la aplicación lineal $D\varphi(\varphi^{-1}(x)) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ se denomina *espacio tangente a* X *en* x y se denota $T_x X$.

Se hace necesario ahora justificar la validez de la definición anterior comprobando que efectivamente $T_x X$ está definido unívocamente.
Recordemos que por cómo están definidas las parametrizaciones tiene sentido considerar las derivadas de dichas aplicaciones.
Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable, $\varphi : A \to U$ una parametrización, $x \in U$ y $A \subset \mathbb{H}^p$. Veamos en primer lugar que la aplicación lineal $D\varphi(\varphi^{-1}(x)) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ es inyectiva (lo que nos garantizará que $\dim(T_x X) = \dim_x X = p$).
Como la cuestión a tratar es local en x nos bastará con que los dominios de definición de las aplicaciones con las que trabajemos sean entornos en dicho punto (ya que por el carácter local de algunas de las definiciones dadas nos veremos obligados a quizá restringir dichos dominios por no poder asegurar que para todas las aplicaciones valga el mismo).
Sea $\phi = \varphi^{-1} : U \to A$, que es una aplicación diferenciable. Por definición, existirá un entorno abierto de x en $\mathbb{R}^m$, W (con $\tilde{U} = W \cap X \subset U$) de manera que exista una extensión local $\overline{\phi} : W \to \mathbb{R}^p$ cumpliendo que $\overline{\phi}|_{\tilde{U}} = \phi$.
Llamemos $\overline{\varphi}$ a la restricción de φ al conjunto $\tilde{A} = \phi(\tilde{U})$ y notemos que necesariamente tendremos que $D\varphi(\varphi^{-1}(x)) = D\overline{\varphi}(\overline{\varphi}^{-1}(x))$.
En consecuencia la composición $\overline{\phi} \circ \overline{\varphi} : \tilde{A} \to \mathbb{R}^p$ es la inclusión, y aplicando la regla de la cadena para derivar se tiene por tanto que $Id_{\mathbb{R}^p} = D\overline{\phi}(x) \circ D\overline{\varphi}(\overline{\varphi}^{-1}(x))$ es un isomorfismo,

luego necesariamente $D\overline{\varphi}(\overline{\varphi}^{-1}(x))$ es inyectiva.
Sea ahora $\psi : B \to V$ otra parametrización de X en x y consideremos el cambio de coordenadas

$$f = \phi \circ \psi : \psi^{-1}(U \cap V) \to \phi(U \cap V) \tag{1.2.1}$$

que es un difeomorfismo y por tanto sus diferenciales son automorfismos de $\mathbb{R}^m$.
Se abusa de la notación y se llama igual a la restricciones adecuadas de las aplicaciones por aligerarla un poco y porque dónde estén definidas no juega un papel más allá del hecho de que estemos trabajando con entornos del punto x y sus imágenes por las parametrizaciones.
A través de las diferenciales se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^p \arrow[r, "D\psi(\psi^{-1}(x))"] \arrow[d, "Df(\psi^{-1}(x))"'] & \mathbb{R}^m \\
\mathbb{R}^p \arrow[ur, "D\varphi(\varphi^{-1}(x))"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $\varphi \circ f = \psi$, por la regla de la cadena tenemos

$$D\varphi(\varphi^{-1}(x)) \circ Df(\psi^{-1}(x)) = D\psi(\psi^{-1}(x)) \tag{1.2.2}$$

y como $Df(\psi^{-1}(x))$ es un isomorfismo, se concluye que

$$Im\left(D\varphi(\varphi^{-1}(x))\right) = Im\left(D\psi(\psi^{-1}(x))\right)$$

y por tanto el espacio T_xX está bien definido y es un subespacio lineal de dimensión p de $\mathbb{R}^m$.

Dada una carta cualquiera se tiene que $D\psi(\psi^{-1}(x))$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^p$ sobre T_xX.

Proposición 1.2.17 (Producto de variedades)**.** Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ dos variedades diferenciables, una sin borde (que podemos suponer que es Y, ya que la permutación de coordenadas $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo). Entonces $X \times Y \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable, con borde $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y$.
Además, si $(x, y) \in X \times Y$

$$\dim_{(x,y)}(X \times Y) = \dim_x X + \dim_y Y \text{ y } T_{(x,y)}(X \times Y) = T_xX \times T_yY \tag{1.2.3}$$

Demostración. Consideramos sendas cartas locales de X en x, $\varphi : A \to U$ con $A \subset \mathbb{H}^p$; y de Y en y, $\psi : B \to V$ con $B \subset \mathbb{H}^q$. Por las propiedades de las aplicaciones diferenciables, resulta que $\varphi \times \psi : A \times B \to U \times V$ es una parametrización de $X \times Y$ en (x, y), siendo $U \times V$ un entorno abierto en el punto. Teniendo en cuenta que por ser Y una variedad sin borde podemos suponer que B no corta al borde de $\mathbb{H}^q$, entonces podemos tomar $A = W \cap \mathbb{H}^p$ donde W es un abierto de $\mathbb{R}^p$, B un abierto de $\mathbb{R}^q$, y entonces $(A \times B) = (W \times \mathbb{R}^q) \cap \mathbb{H}^{p+q}$ un abierto de $\mathbb{H}^{p+q}$, lo que nos garantiza que entonces $X \times Y$ es una variedad diferenciable de dimensión $p + q = \dim_x X + \dim_y Y$. Estas misma afirmaciones y la construcción de la carta local en (x, y) son suficientes para afirmar que precisamente el borde de $X \times Y$ estará constituido por los puntos de la forma (x, y) con $x \in \partial X$.

Como se tiene que $D(\varphi \times \psi)(\varphi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)) = D\varphi(\varphi^{-1}(x)) \times D\psi(\psi^{-1}(y))$ se siguen las afirmaciones sobre los espacios tangentes (la igualdad de diferenciales es un resultado conocido del cálculo diferencial en abiertos que se puede generalizar sin más a las aplicaciones diferenciables que consideramos nosotros). □

Observación 1.2.18. Notemos que la hipótesis de que una de las variedades no tuviera borde es fundamental para poder afirmar que $X \times Y$ es localmente difeomorfo a un semiespacio $\mathbb{H}^{p+q}$. Si ambas variedades tuvieran borde podríamos afirmar que $X \times Y$ es localmente difeomorfo a un abierto de $\mathbb{H}^p \times \mathbb{H}^q = \{(x_1, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q} : x_1 \geq 0 \text{ y } x_{p+1} \geq 0\}$, lo que no es suficiente para afirmar que es $X \times Y$ sea una variedad diferenciable como las hemos definido.
Es claro también que si ambas variedades no tuvieran borde el producto sería una variedad sin borde (localmente difeomorfo a $\operatorname{Int} \mathbb{H}^{p+q} \equiv \mathbb{R}^{p+q}$).

1.3. Particiones diferenciables de la unidad.

La demostración del siguiente resultado se basa en el astuto empleo de una serie de funciones, llamadas funciones meseta, para realizar una construcción que cumpla con las condiciones buscadas. Por su poco interés conceptual se omitirá dicha demostración, que se puede encontrar en [1, pág 13-14].

Proposición 1.3.1. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto arbitrario. Todo subconjunto cerrado C de X es el conjunto de ceros de una función diferenciable $f : X \to [0, 1]$.

De este resultado se deduce inmediatamente:

Corolario 1.3.2 (Funciones de Urysohn o separantes)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto arbitrario. Dados C y D dos conjuntos cerrados, disjuntos y no vacíos de X, existe una función diferenciable $f : X \to [0, 1]$ de manera que $C = \{f = 0\}$ y $D = \{f = 1\}$.

Demostración. Por el lema anterior existen funciones diferenciables $g, h : X \to [0, 1]$ de manera que C es el conjunto de ceros de g y D de h.
Entonces la función $f = g/(g + h)$ cumple las condiciones del enunciado. Efectivamente es diferenciable puesto que g y h son funciones diferenciables positivas y por hipótesis se tiene que $\{g = 0\} \cap \{h = 0\} = C \cap D = \emptyset$.Además, por ser g y h positivas se tiene que $0 \leq g/(g + h) \leq 1$, y evidentemente f toma el valor 1 en D y 0 en C.
□

1.3.1. Espacios paracompactos.

Se recogen a continuación algunas definiciones y resultados básicos de construcciones topológicas que van a jugar un papel en la demostración del teorema fundamental de esta sección.

Definición 1.3.3. Sea M un espacio topológico. Una familia $\{U_\alpha\}$ de subconjuntos de M es un *recubrimiento* de un conjunto $W \subset M$ si $W \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$. Se dice que es un *recubrimiento abierto* si cada U_α es un abierto de M. Un *subrecubrimiento* es una subfamilia $\{V_\beta\} \subset \{U_\alpha\}$ que verifica la condición de recubrimiento.

Definición 1.3.4. Dado un recubrimiento $\{U_\alpha\}$, un *refinamiento* $\{V_\beta\}$ es un recubrimiento del mismo conjunto de manera que para todo β existe un α de manera que $V_\beta \subset U_\alpha$.

Observemos que un refinamiento no tiene por qué ser un subrecubrimiento.

Definición 1.3.5. Dado un espacio topológico X, se dice que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es *localmente finita en* X si todo punto de X tiene un entorno que solo corta a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

Definición 1.3.6. Se dice que un espacio topológico es *paracompacto* si para todo recubrimiento abierto existe un refinamiento abierto localmente finito.

Teorema 1.3.7. Sea X un espacio topológico localmente compacto, de Hausdorff, y dosnumerable. Entonces X es paracompacto. Es más, todo recubrimiento abierto tiene un refinamiento localmente finito y numerable de conjuntos abiertos con adherencia compacta.

Demostración. En primer lugar probaremos que existe una sucesión $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abiertos que cumplen:

$$\overline{G_n} \text{ es compacto; } \overline{G_n} \subset G_{n+1}; \ X = \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n \tag{1.3.1}$$

Sea $\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para la topología en X compuesta por abiertos con adherencia compacta. Como X cumple 2AN, toda base contiene una base numerable. Así que basta con partir del conjunto de todos los abiertos con adherencia compacata, que son una base por ser X localmente compacto y Hausdorff.

Damos una definición recursiva para los conjuntos de la familia $\{G_n\}$:

Sea $G_1 = B_1$. Supongamos definido

$$G_k = B_1 \cup \cdots \cup B_{j_k} \text{ (en particular } \overline{G_k} \text{ es compacto)}$$

y sea j_{k+1} el menor entero positivo mayor que j_k cumpliendo que

$$\overline{G_k} \subset \bigcup_{m=1}^{j_{k+1}} B_m \,,$$

definimos entonces

$$G_{k+1} = \bigcup_{m=1}^{j_{k+1}} B_m$$

Así se define recursivamente una colección $\{G_n\}$ que cumple las condiciones en el enunciado de 1.3.1.

Observemos que el conjunto $\overline{G_n} \setminus G_{n-1}$ es compacto (cerrado contenido en un compacto) y está contenido en el conjunto abierto $G_{n+1} \setminus \overline{G_{n-2}}$.

Sea $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ un recubrimiento abierto de X. Para cada $n \geq 3$ tomamos un subrecubrimiento finito del recubrimiento abierto del compacto $\overline{G_n} \setminus G_{n-1}$ dado por $\{U_\alpha \cap \big(G_{n+1} \setminus \overline{G_{n-2}}\big) : \alpha \in A\}$, denotémoslo $\{V_{n,i} : i \in J_n\}$, donde J_n es un subconjunto de $\mathbb{N}$ de la forma $\{1, .., j_n\}$. Escojamos aparte un subrecubrimiento finito del recubrimiento abierto $\{U_\alpha \cap G_3 : \alpha \in A\}$ del conjunto compacto $\overline{G_2}$, y denotémoslo $\{V_{2,i} : i \in J_2\}$.

Entonces la familia $\bigcup_{n\geq 2}\{V_{n,i} : i \in J_n\}$ es un refinamiento del recubrimiento $\{U_\alpha\}$ formado por conjuntos abiertos de adherencia compacta (por construcción).

Veamos que además se trata de una familia localmente finita en X y que por tanto X es paracompacto.

Sea $x \in X$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ de manera que $x \in G_k$. Luego G_k es un entorno abierto de x que como máximo podría intersecar a los $V_{n,i}$ para $n \in \{2, .., k+2\}$ (que son una cantidad finita de conjuntos del refinamiento). $\square$

Notemos que la mayor parte de la demostración anterior atañe al objetivo de comprobar la existencia de un refinamiento que cumpla las exigencias finales del lema. Para probar que un conjunto verificando las hipótesis anteriores es paracompacto bastaría con una construcción mucho menos exigente.

Corolario 1.3.8. Una variedad diferenciable $X \subset \mathbb{R}^m$ es paracompacta, y en particular, cualquier subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ es paracompacto

Demostración. X cumple las hipótesis del teorema 1.3.7 por ser localmente difeomorfo a un semiespacio $\mathbb{H}^p$. $\square$

Proposición 1.3.9. Todo espacio de Hausdorff paracompacto X es regular.

Demostración. Sean $a \in X$ y B un conjunto cerrado de X disjunto con a. Para cada $b \in B$, la condición de Hausdorff nos permite elegir un conjunto abierto U_b entorno de b cuya clausura no contenga a a. Consideremos un recubrimiento abierto de X formado por los U_b y el conjunto $X \setminus B$. Por ser X paracompacto, podemos tomar un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{A}$ del anterior que recubra X. Si consideramos la subcolección $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ formada por todos los conjuntos de $\mathcal{A}$ que intersecan a B, entonces $\mathcal{D}$ recubre a B. Por construcción, cada $D \in \mathcal{D}$ está contenido en alguno de los U_b, luego $\overline{D}$ no contiene a a. Sea

$$V = \bigcup_{D\in\mathcal{D}} D$$

entonces V es un conjunto abierto en X que contiene a B. Dado que $\mathcal{D}$ es localmente finita,

$$\overline{V} = \bigcup_{D\in\mathcal{D}} \overline{D}$$

y se tiene que $a \in X \setminus \overline{V}$ que es un abierto disjunto con V. $\square$

Proposición 1.3.10. Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de conjuntos abiertos que recubran X. Entonces existe una familia indexada localmente finita $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de conjuntos abiertos que recubre X y tal que $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$, para cada $\alpha \in J$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ la colección formada por los conjuntos abiertos A tales que $\overline{A}$ está contenido en algún elemento de la colección $\{U_\alpha\}$. La regularidad de X implica que $\mathcal{A}$ recubre X. Dado que X es paracompacto, podemos encontrar un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$. Representemos $\mathcal{B} = \{B_\beta\}_{\beta\in K}$.
Como $\mathcal{B}$ refina $\mathcal{A}$, podemos definir una fución $f : K \to J$ eligiendo, para cada $\beta \in K$ un elemento $f(\beta) \in J$ tal que

$$\overline{B_\beta} \subset U_{f(\beta)}$$

Entonces para cada para cada $\alpha \in J$ definimos $\mathcal{B}_\alpha = \{B_\beta \in \mathcal{B} : f(\beta) = \alpha\}$ y definimos

$$V_\alpha = \bigcup_{B_\beta \in \mathcal{B}_\alpha} B_\beta \text{ (que podría ser vacío).}$$

Como la familia $\mathcal{B}$ es localmente finita, también lo son las $\mathcal{B}_\alpha$, y como por construcción para cada $B_\beta \in \mathcal{B}_\alpha$ se tiene que $\overline{B_\beta} \subset U_\alpha$, entonces

$$\overline{V_\alpha} = \bigcup_{B_\beta \in \mathcal{B}_\alpha} \overline{B_\beta} \subset U_\alpha.$$

Finalmente comprobemos que la familia $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es localmente finita. Sea $x \in X$ y sea un entorno W de x que interseca $\mathcal{B}_\beta$ para una cantidad finita de valores $\beta \in K$, digamos que son $\beta_1, ..., \beta_k$. Entonces W solo puede intersecar a los V_α para $\alpha \in \{f(\beta_1), ..., f(\beta_k)\}$, que son una cantidad finita. □

Definición 1.3.11. Sea X un espacio topológico y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de conjuntos abiertos que recubran X, entonces se dice que una familia localmente finita $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de conjuntos abiertos que recubre X y tal que $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ es un *refinamiento preciso* de la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$.

1.3.2. Teorema de existencia de particiones de la unidad.

Definición 1.3.12 (Partición diferenciable de la unidad)**.** Una partición diferenciable de la unidad en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ es una colección $\{\theta_i : i \in I\}$ (donde I es un conjunto de índices arbitrario) que cumple:

(1) Cada $\theta_i : X \to [0, 1]$ es una función diferenciable.

(2) Los soportes abiertos $\{\theta_i \neq 0\}$(y por tanto sus adherencias en X) son una familia localmente finita en X.

(3) La suma $\sum_{i \in I} \theta_i$ está bien definida y es $\equiv 1$.

Una partición de la unidad $\{\theta_i : i \in I\}$ se dice que está subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ si para todo $i \in I$ existe $\alpha \in A$ de manera que $\overline{\{\theta_i \neq 0\}} \subset U_\alpha$. Diremos que está subordinada al recubrimiento $\{U_i : i \in I\}$ con mismo conjunto de índices si se tiene que $\overline{\{\theta_i \neq 0\}} \subset U_i \ \forall \ i \in I$.

Teorema 1.3.13. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto arbitrario. Todo recubrimiento abierto $\{U_i : i \in I\}$ de X tiene subordinada una partición diferenciable de la unidad con mismo conjunto de índices de manera que a lo sumo una cantidad numerable de ellas no son idénticamente nulas.

Demostración. Teniendo en cuenta que los U_i del recubrimiento son de la forma $\tilde{U}_i \cap X$ donde $\tilde{U}_i$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$, si resolviéramos el problema de encontrar una partición diferenciable de la unidad para el recubrimiento $\{\tilde{U}_i : i \in I\}$ del conjunto $Y = \bigcup_i \tilde{U}_i$, que es un abierto en $\mathbb{R}^m$, las restricciones de los elementos de dicha partición de la unidad serían necesariamente diferenciables y resolverían el problema inicial.
Entonces podemos suponer que los elementos del recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ son abiertos de

$\mathbb{R}^m$ y que X es su unión.
Por el teorema 1.3.7, teniendo en cuenta que X es un abierto de $\mathbb{R}^m$, podemos tomar un refinamiento abierto numerable $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{U_i\}_{i\in I}$ localmente finito en X cuyos elementos tengan clausura compacta. A continuación, en virtud de la proposición 1.3.10, tomamos dos refinamientos precisos sucesivos $\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{W'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Dichos refinamientos precisos son localmente finitos en X. Disponemos entonces de dos recubrimientos abiertos de X ($\{W_k\}$ y $\{W'_k\}$) tales que

$$\overline{W'_k} \subset W_k \subset \overline{W_k} \subset V_k \subset U_{i(k)}$$

para cierto $i(k)$ que elegimos y donde las adherencias son en X. Podría haber más de un U_i que cumpliese la condición, pero para la construcción posterior nos interesa quedarnos con uno fijo. El conjunto $\{i(k) : k \in \mathbb{N}\}$ es numerable.
En esta situación, los cerrados $X \setminus W_k$ y $\overline{W'_k}$ son disjuntos y por el corolario 1.3.2 existe una función separante diferenciable $g_k : X \to [0, 1]$ que toma el valor 0 en $X \setminus W_k$ y 1 en $\overline{W'_k}$. En particular se tiene que $\overline{\{g_k \neq 0\}} = \overline{W_k}$ y esos soportes son una familia localmente finita en X.

Como las propiedades que hemos de comprobar son de carácter local, tomemos $x \in X$ y un entorno abierto W del punto que corte a un número finito de V_k, $\{V_{k_1}, ..., V_{k_s}\}$. Entonces $g|_W = g_{k_1} + \cdots + g_{k_s}$ está bien definida y es diferenciable por ser una suma finita de funciones diferenciables.

Por tanto, la función $g = \sum_k g_k$ está bien definida y es diferenciable, y al ser los $\overline{W'_k}$ un recubrimiento (pues lo eran los W'_k) se tiene que

$$g(x) \geq 1 \ \forall \ x \in X$$

Ahora, para cada $i \in I$ se define la función

$$\theta_i = \sum_{k:i(k)=i} g_k/g : X \to \mathbb{R} \ \ (\theta_i = 0 \text{ si no existe } k \in \mathbb{N} \text{ con } i(k) = i) \tag{1.3.2}$$

Comprobemos que así definidas las funciones $\{\theta_i\}_{i\in I}$ son una partición diferenciable de la unidad adecuada.

(1) Evidentemente $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$.

(2) Si $k \notin \{k_1, ..., k_s\}$ se tiene que $W \subset X \setminus V_k \subset X \setminus W_k$, es decir, $g_k = 0$ en W, tenemos que

$$\theta_i|_W = \sum_{j:i(k_j)=i} g_{k_j}/g$$

está bien definida y es diferenciable.

Veamos que la familia $\{\{\theta_i \neq 0\} : i \in I\}$ es localmente finita en X. De lo anterior se deduce que

$$\{x : \theta_i(x) \neq 0\} \cap W \subset \bigcup_{j:i(k_j)=i} \{x : g_{k_j}(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{j:i(k_j)=i} W_{k_j} \subset W_{k_1} \cup ... \cup W_{ks},$$

que ya demuestra que es localmente finita y que implica

$$\overline{\{x : \theta_i(x) \neq 0\}} \cap W \subset \overline{\bigcup_{j:i(k_j)=i} W_{k_j}} = \bigcup_{j:i(k_j)=i} \overline{W_{k_j}} \subset U_i,$$

de lo que se sigue $\overline{\{\theta_i \neq 0\}} \subset U_i$.

(3) Se tiene que:

$$\sum_i \theta_i = \sum_k g_k/g = g/g = 1$$

puesto que por construcción cada g_k aparece en un único θ_i (el que llamaríamos $\theta_{i(k)}$ siguiendo la notación).

□

Observación 1.3.14. También es cierto que todo recubrimiento $\{U_i : i \in I\}$ de X tiene subordinada una partición diferenciable de la unidad constituida por una colección numerable de funciones de soporte compacto, las $\left\{\frac{g_k}{g}\right\}$ de la demostración anterior. Pero en este caso, el conjunto de índices cambia.

Del teorema anterior se puede deducir el siguiente resultado, que es de gran interés.

Teorema 1.3.15 (Teorema de extensión de Tietze diferenciable)**.** Sea $X \in \mathbb{R}^m$ un conjunto arbitrario y una aplicación diferenciable $f : X \to \mathbb{R}^n$. Existe una aplicación diferenciable $\overline{f} : U \to \mathbb{R}^n$ que está definida en un abierto U de $\mathbb{R}^m$ que contiene a X y que extiende a f, es decir, $\overline{f}|_X = f$.

Demostración. Por definición, X se puede recubrir por abiertos U_i de $\mathbb{R}^m$ de manera que en cada uno esté definida una extensión diferenciable de $f|_{U_i \cap X}$, f_i. El conjunto $U = \bigcup_i U_i$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$ y en él podemos elegir una partición diferenciable de la unidad $\{\theta_i\}$ subordinada al recubrimiento $\{U_i\}$ con mismos índices. La función $\overline{f} = \sum_i \theta_i f_i$ cumple las condiciones del enunciado. □

1.4. Cálculo diferencial en variedades.

Veremos a continuación cómo formar una variedad diferenciable con todos los espacios tangentes a una dada.

Definición 1.4.1. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable (con o sin borde) de dimensión pura p. Se define

$$TX = \{(x,u) \in X \times \mathbb{R}^m : u \in T_xX\} = \bigsqcup_{x \in X} T_xX \subset X \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \qquad (1.4.1)$$

y denotamos $\tau : TX \to X$ la restricción de la proyección $(x,u) \longmapsto x$ a TX.
El par (TX, τ), denotado simplemente como TX, se denomina *fibrado tangente de* X.

La aplicación τ es diferenciable (por ser la restricción de la proyección que es una aplicación diferenciable bien definida en $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$). Notemos además que para cada punto $x \in X$, su fibra es $\tau^{-1}(x) = \{x\} \times T_xX$.

Proposición 1.4.2. Dada una variedad diferenciable $X \subset \mathbb{R}^m$ de dimensión pura p, el fibrado tangente $TX \subset \mathbb{R}^{2m}$ es también una variedad diferenciable de dimensión pura $2p$, con borde

$$\partial(TX) = \tau^{-1}(\partial X) = \{(x,u) \in \partial X \times \mathbb{R}^m : u \in T_xX\} = \bigsqcup_{x \in \partial X} T_xX.$$

Demostración. Para ver que TX es una variedad diferenciable tendríamos que comprobar la existencia de parametrizaciones locales en cualquier punto; pero vamos a ver que a partir de una parametrización de X en x podemos construir una común para todos los puntos de la fibra $\tau^{-1}(x)$ en TX.
Sea $\varphi : A \to U$ una carta local, con $A \subset \mathbb{H}^p$ y $U = \tilde{U} \cap X$ un abierto de X, y sea $\phi = \varphi^{-1}$. Consideramos el abierto $A^* = A \times \mathbb{R}^p$ de $\mathbb{H}^{2p}$ y el abierto $U^* = (U \times \mathbb{R}^m) \cap TX$ de TX. Sea entonces la aplicación

$$\varphi^* : A^* \to U^* \text{ dada por } \varphi^*(a,t) = (\varphi(a), D\varphi(a)(t)) \tag{1.4.2}$$

donde recordemos que $D\varphi(a)$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^p$ en $T_{\varphi(a)}X$. Claramente se trata de una aplicación diferenciable (ambas componentes lo son), y entonces para terminar de probar que en efecto es una carta local para los puntos de la fibra $\tau^{-1}(\varphi(a)) \subset TX$ solo tendríamos que ver que es un difeomorfismo, para lo cual nos queda probar que tiene inversa diferenciable.
Como φ es un difeomorfismo y $D\varphi(a)$ es un isomorfismo podemos concluir que φ^* es biyectiva. Entonces tiene sentido considerar su inversa $\phi^* := (\varphi^*)^{-1}$. Para comprobar que dicha inversa es diferenciable veamos que tiene una extensión diferenciable.
Elijamos una extensión diferenciable $\overline{\phi}$ de ϕ, definida en un abierto W de $\mathbb{R}^m$ con $U \subset W$ (esto se puede hacer gracias al teorema de Tietze 1.3.15). Se sigue que la composición $\overline{\phi} \circ \varphi = Id_{\mathbb{R}^p}|A$, y entonces por la regla de la cadena tenemos la siguiente igualdad en el punto $a \in A$:

$$Id_{\mathbb{R}^p} = D\overline{\phi}(\varphi(a)) \circ D\varphi(a)$$

Entonces $(D\varphi(a))^{-1} = D\overline{\phi}(\varphi(a))$ y si tenemos que para cierto $t \in \mathbb{R}^p$ $D\varphi(a)(t) = z \in \mathbb{R}^m$, necesariamente $D\overline{\phi}(\varphi(a))(z) = t$. En consecuencia, la aplicación

$$\overline{\phi}^* : W \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \text{ dada por } \overline{\phi}^*(x,u) = (\overline{\phi}(x), D\overline{\phi}(x)(u)) \tag{1.4.3}$$

es una extensión diferenciable de la inversa ϕ^* puesto que ambas componentes son diferenciables, está definida en un abierto de $\mathbb{R}^{2m}$ y coincide con ϕ^* en el dominio de definición de esta última, pues $\overline{\phi^*} \circ \varphi^* = \mathrm{Id}_{A^*}$.
Con esto hemos demostrado que efectivamente TX es una variedad diferenciable. El hecho de que sea de dimensión pura $2p$ es una consecuencia de que al ser X de dimensión pura p, todas las cartas locales construidas vienen definidas en abiertos de $\mathbb{H}^p \times \mathbb{R}^p = \mathbb{H}^{2p}$.
Finalmente, notemos que para todas las parametrizaciones locales obtenidas de TX, los puntos con contraimagen en $\partial A^* = \partial A \times \mathbb{R}^p$ son necesariamente aquellos $(x,u) \in U^*$ que verifican que $x \in \partial X$, puesto que φ identifica ∂A con $\partial X \cap U$, y por tanto $\partial(TX) = \tau^{-1}(\partial X)$. □

Observación 1.4.3. En la observación 1.2.9 se expuso que para aplicaciones entre variedades la diferenciabilidad era equivalente a la existencia de expresiones locales diferenciables. Para la aplicación $\tau : TX \to X$, con la notación de la demostración anterior, tenemos:

$$\begin{tikzcd} TX & U^* \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\tau"] & U \arrow[r, hook] & X \\ & A^* \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[r, "\varphi^{-1}\circ\tau\circ\varphi^*"] & A \arrow[u, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

y la localización $\varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi^*$ aplica (a,t) en a (es una proyección) y por tanto diferenciable.

Definición 1.4.4. Dada una variedad diferenciable X, su fibrado tangente (TX, τ) y una aplicación $\xi : X \to \mathbb{R}^m$ que verifique que $\xi(x) \in T_x X$ para cada $x \in X$. Un *campo tangente de X asociado a ξ* es una inversa por la derecha de τ dada por

$$X \to TX : x \mapsto (x, \xi(x)).$$

Diremos que $x \in X$ es un *cero del campo* si se tiene que $\xi(x) = 0$.

Ejemplo 1.4.5. Dada $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad de dimensión pura p, para todo $x \in X$ podríamos tomar $\xi(x) = 0 \ \forall\ x \in X$, y definir a partir de esta el campo tangente que se denomina *campo nulo*.

Proposición 1.4.6. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ dos variedades diferenciables, $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable, $x \in X$ e $y = f(x) \in Y$. Sea también $\overline{f} : U \to \mathbb{R}^n$ una extensión diferenciable de f definida en un entorno abierto U de x en $\mathbb{R}^m$. Entonces:

(1) $D\overline{f}(x)(T_x X) \subset T_y Y$.

(2) La restricción $d_x f : T_x X \to T_y Y$ de $D\overline{f}(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ solo depende de f y no de la extensión $\overline{f}$ elegida.

Demostración. Como $\overline{f}$ es una aplicación diferenciable, es continua, y entonces será posible realizar una elección de entornos U de x en $\mathbb{R}^m$ y V de y en $\mathbb{R}^n$ de manera que tengamos parametrizaciones $\varphi : A \to U \cap X$ con $A \subset \mathbb{H}^p$ y $\psi : B \to V \cap Y$ con $B \subset \mathbb{H}^q$ y se verifique $\overline{f}(U) \subset V$.
Consideramos la expresión local $g = \psi^{-1} \circ \overline{f} \circ \varphi$, que es una aplicación diferenciable, y sea $a \in A$ el único punto tal que $\varphi(a) = x$. Teniendo en cuenta que necesariamente $\overline{f} \circ \varphi = \psi \circ g$, tendremos que dado $z \in T_x X$ existirá un único $t \in \mathbb{R}^p$ de manera que $z = D\varphi(a)(t)$. La situación queda expuesta en los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} U \cap X \arrow[r, "\overline{f}"] & V \cap Y \\ A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} z \in T_x X \arrow[r, "D\overline{f}(x)"] & T_{f(x)} Y \\ t \in \mathbb{R}^p \arrow[u, "D\varphi(a)"] \arrow[r, "Dg(a)"] & \mathbb{R}^q \arrow[u, "D\psi(g(a))"'] \end{tikzcd}$$

Entonces:

$$D\overline{f}(x)(z) = D\overline{f}(\varphi(a))(D\varphi(a)(t)) = D\psi(g(a))(Dg(a)(t)) \tag{1.4.4}$$

y como $g(a) = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(a) = \psi^{-1} \circ f(x) = \psi^{-1}(y)$, se tiene que la segunda parte de la igualdad es un punto de $T_y Y$, como queríamos probar en (1). El hecho de que esta segunda parte de la igualdad no dependa de $\overline{f}$ constituye la prueba de (2). □

Definición 1.4.7. En la situación anterior, la aplicación lineal $d_x f : T_x X \to T_y Y$ se llama *derivada de f en x*.

Observación 1.4.8. (1) Atendiendo a la ecuación 1.4.4 teniendo en cuenta que $a = \varphi^{-1}(x)$, que $g(\varphi^{-1}(x)) = \psi^{-1}(f(x))$ y que $D\varphi(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo, se tiene la igualdad entre aplicaciones siguiente:

$$d_x f = D\psi(\psi^{-1}(f(x))) Dg(\varphi^{-1}(x)) \left(D\varphi(\varphi^{-1}(x)) \right)^{-1} \tag{1.4.5}$$

donde $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$, lo que nos da una expresión para $d_x f$ a partir de cartas locales sin necesidad de tener una extensión de f. Es decir, $d_x f$ es la única aplicación que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} T_x X \arrow[r, "d_x f"] & T_{f(x)} Y \\ \mathbb{R}^p \arrow[u, "D\varphi(\varphi^{-1}(x))"] \arrow[r, "Dg(\varphi^{-1}(x))"'] & \mathbb{R}^q \arrow[u, "D\psi(g(\varphi^{-1}(x)))"'] \end{tikzcd}$$

y eso la define.

(2) Si tomamos $\mathrm{Id}_X : X \to X$, sin más que sustituir en la ecuación 1.4.5 eligiendo ψ, φ iguales, se tiene que $d_x(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{T_x X}$.

(3) La derivada de una aplicación constante $f : x \to y_0$ es nula: $d_x f(u) = 0$, $\forall x \in X$, $\forall u \in T_x X$. Es una consecuencia directa del mismo resultado conocido para aplicaciones entre abiertos de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, teniendo en cuenta que una extensión de f podría ser la aplicación constante definida en todo el espacio, que tiene diferencial nula de manera que su restricción $d_x f$ será necesariamente nula también.

(4) Se cumple la regla de la cadena. Dadas sendas aplicaciones entre variedades: $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y la composición $g \circ f : X \to Z$, se tiene

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)} g \circ d_x f \tag{1.4.6}$$

Veámoslo con mayor detalle.
Consideremos $x \in X$, $y = f(x) \in Y$ y $z = g(y) = g(f(x)) \in Z$. Sean también $\varphi : A \to U$ con $x \in U$, $\psi : B \to V$ con $y \in V$ y $\gamma : C \to W$ con $z \in W$ parametrizaciones locales de manera que tenga sentido el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, "g"] & W \\ A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi^{-1}\circ f\circ\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\gamma^{-1}\circ(f\circ g)\circ\varphi"'] & B \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\gamma^{-1}\circ g\circ\psi"] & C \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

Denotemos $h_1 = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$, $h_2 = \gamma^{-1} \circ g \circ \psi$ y $h = h_2 \circ h_1 = \gamma^{-1} \circ (f \circ g) \circ \varphi$ a las expresiones locales que aparecen en el diagrama y sea $a = \varphi^{-1}(x)$. Entonces, la situación anterior se traslada a las aplicaciones diferenciales de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} T_x X \arrow[r, "d_x f"] & T_y Y \arrow[r, "d_y g"] & T_z Z \\ \mathbb{R}^p \arrow[u, "D\varphi(a)"] \arrow[r, "Dh_1(a)"] \arrow[rr, bend right, "Dh(a)"'] & \mathbb{R}^q \arrow[u, "D\psi(h_1(a))"] \arrow[r, "Dh_2(h_1(a))"] & \mathbb{R}^s \arrow[u, "D\gamma(h(a))"'] \end{tikzcd}$$

De donde se deduce que $d_y g \circ d_x f = D\gamma(h(a)) \circ Dh(a) \circ (D\varphi(a))^{-1}$, y entonces necesariamente se sigue de la observación (1) que $d_y g \circ d_x f = d_x(g \circ f)$.

(5) La derivada de una aplicación diferenciable $h = (f, g) : Z \to X \times Y$ con valores en un producto de variedades es $d_z h = (d_z f, d_z g) : T_z Z \to T_{f(z)} X \times T_{g(z)} Y = T_{h(z)}(X \times Y)$.

Definición 1.4.9. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ dos variedades diferenciables, Y sin borde, y sea $f : X \times Y \to Z$ una aplicación. Para cada $x \in X$ se define la *aplicación parcial o sección de f en x* como $f_x : Y \to Z$ dada por $f_x(y) = f(x, y)$. De la misma manera se define la sección para $y \in Y$ como $f_y : X \to Z$ dada por $f_y(x) = f(x, y)$.

Observación 1.4.10. Notemos que en la definción anterior si f fuera diferenciable entonces se tendría que f_x y f_y serían aplicaciones diferenciables con independencia de los $x \in X$ e $y \in Y$. Basta tener en cuenta que este mismo resultado es ya conocido para aplicaciones definidas en abiertos del espacio global y bastaría con elegir una extensión adecuada de nuestras aplicaciones para poder particularizarlo.

Definición 1.4.11. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ dos variedades diferenciables, Y sin borde, y sea $f : X \times Y \to Z$ una aplicación diferenciable. Las aplicaciones lineales

$$d_x(f_y) : T_x X \to T_{f(x,y)} Z \quad \text{y} \quad d_y(f_x) : T_y Y \to T_{f(x,y)}$$

se denominan *derivadas parciales*, y se denotan respectivamente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Observación 1.4.12. Bajo la definición anterior, se tiene la siguiente igualdad:

$$d_{(x,y)} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(u) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(v)$$

para $(u, v) \in T_{(x,y)}(X \times Y) = T_x X \times T_y Y$. Consideremos cartas locales $\varphi : A \times B \to U \times V$ con $(x, y) \in U \times W$ donde A es un abierto de $\mathbb{H}^p$, B lo es de $\mathbb{R}^q$, U de X y V de Y; y $\psi : C \to W$ cumpliendo que $f(U \times V) \subset W$, con C un abierto de $\mathbb{H}^s$ y W de Z. Denotemos $(a, b) = \varphi^{-1}(x, y)$. Entonces la situación en que nos encontramos queda detallada en los siguiente diagramas:

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "f"] & W \\ A \times B \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "g"'] & C \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "f_y"] & W \\ A \arrow[u, "\varphi_b"] \arrow[r, "g_b"'] & C \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f_x"] & W \\ B \arrow[u, "\varphi_a"] \arrow[r, "g_a"'] & C \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

A través de la observación 1.4.8(1) se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} d_{(x,y)} f(u, v) &= \left(D\gamma(g(a, b)) \circ Dg(a, b) \circ (D\varphi(a, b))^{-1}\right)(u, v), \\ d_x f_y(u) &= \left(D\gamma(g_b(a)) \circ Dg_b(a) \circ (D\varphi_b(a))^{-1}\right)(u), \\ d_y f_x(v) &= \left(D\gamma(g_a(b)) \circ Dg_a(b) \circ (D\varphi_a(b))^{-1}\right)(v), \end{aligned}$$

y tomando una extensión adecuada de g que nos proporciona sendas extensiones de g_a y g_b, como el resultado es conocido para abiertos de $\mathbb{R}^{p+q}$, teniendo en cuenta la igualdad $(D\varphi(a, b))^{-1}(u, v) = ((D\varphi_b(a))^{-1}(u), (D\varphi_a(b))^{-1}(v))$, se tiene que

$$Dg(a, b) \circ (D\varphi(a, b))^{-1}(u, v) = Dg_b(a)((D\varphi_b(a))^{-1}(u)) + Dg_a(b)(D\varphi_a(b))^{-1}(v),$$

de donde se deduce que $d_{(x,y)}(u, v) = d_x f_y(u) + d_y f_x(v)$.

Teorema 1.4.13 (Teorema de inversión local con borde)**.** Una aplicación diferenciable $f : X \to Y$ es un difeomorfismo local en $x \in X$ si y solo si la derivada $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ es un isomorfismo lineal y f conserva el borde.

Demostración. En primer lugar supongamos que f es un difeomorfismo local en $x \in X$. Entonces existen entornos abiertos U de x en X y V de $f(x)$ en Y de manera que $h = f|_U : U \to V$ es un difeomorfismo. Por el teorema de invarianza del borde 1.2.8 tenemos que entonces $h(\partial U) = \partial V$ y como $h(\partial U) = f(\partial X \cap U) = \partial V = \partial Y \cap V$ ya tenemos que bajo estas condiciones f conserva el borde en x.
Por ser h un difeomorfismo, su expresión local en cartas adecuadas también lo es y por construcción también lo será $d_x f$, y necesariamente entonces $d_x f$ es un isomorfismo lineal como queríamos ver.
Veamos a continuación la otra implicación.
Queremos comprobar que dado $x \in X$ y bajo las hipótesis del enunciado, existe un entorno U de x en X y V de $y = f(x)$ en Y de manera que $f|_U : U \to V$ sea un difeomorfismo.
Consideramos sendas parametrizaciones locales en x e y, $\varphi : A \to U$ con $A \subset \mathbb{H}^p$ y U entorno abierto de x en X; y $\psi : B \to V$ con $B \subset \mathbb{H}^q$ y V entorno abierto de y en Y, tales que $f(U) \subset V$. Sea en estas condiciones la expresión local $g = \psi^{-1} \circ (f|_U) \circ \varphi$, que es una aplicación diferenciable y denotemos $a = \varphi^{-1}(x)$ y $b = \psi^{-1}(y)$. Notemos que las hipótesis del enunciado implican que $Dg(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es un isomorfismo lineal (por tanto $p = q$) y que $g(A \cap \partial\mathbb{H}^p) \subset \partial\mathbb{H}^p$.

Distinguiremos dos casos.

(1) Caso en el que $x \notin \partial X$, i.e., $a \notin \partial\mathbb{H}^p$.
Entonces $W = A \setminus \partial\mathbb{H}^p$ es un entorno abierto de a en $\mathbb{R}^p$ y $g|_W : W \to \mathbb{R}^p$ es una aplicación diferenciable definida en un abierto del espacio afín cuya derivada es un isomorfismo lineal, y por el teorema de inversión local 1.1.8 se tiene que existen abiertos $A^* \subset A$ y $B^* \subset B$ de manera que $g|_{A^*} : A^* \to B^*$ es un difeomorfismo. Por tanto la restricción de f a $U^* = \varphi(A^*)$ es un difeomorfismo con llegada en $f(U^*) = \psi(B^*)$, y entonces f es un difeomorfismo local en x.

(2) Caso en el que $x \in \partial X$, i.e., $a \in \partial\mathbb{H}^p$.
Recordemos que podemos suponer que $\mathbb{H}^p = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p : x_1 \geq 0\}$. Por ser g diferenciable podemos elegir una extensión $\overline{g}$ definida en un abierto W de $\mathbb{R}^p$, de manera que $W \cap \mathbb{H}^p \subset A$. Necesariamente $D\overline{g}(a) = Dg(a)$, que es un isomorfismo lineal, y de nuevo por el teorema 1.1.8 se tiene que existe un entorno abierto $\widetilde{W}$ de a en $\mathbb{R}^p$ de manera que $\overline{g}|_{\widetilde{W}}$ es un difeomorfismo y podemos suponer que $D = \overline{g}(\widetilde{W})$ es una bola abierta de centro b y radio $\epsilon > 0$. Sean $A^* = \widetilde{W} \cap \mathbb{H}^p \subset A$ y $B^* = D \cap \mathbb{H}^p \subset B$. Queremos ver que $\overline{g}(A^*) = B^*$ y por tanto g es un difeomorfismo entre A^* y B^*, de manera que f lo sería entre $\varphi(A^*)$ y $\psi(B^*)$.
Observemos que $\widetilde{W} \setminus \partial\mathbb{H}^p$ no es conexo, para lo cual basta ver que

$$\widetilde{W} \setminus \partial\mathbb{H}^p = \left(\widetilde{W} \cap \{x_1 > 0\}\right) \bigcup \left(\widetilde{W} \cap \{x_1 < 0\}\right)$$

es una descomposición en abiertos no vacíos y disjuntos. En consecuencia

$$\overline{g}(\widetilde{W} \setminus \partial\mathbb{H}^p) = D \setminus \overline{g}(\widetilde{W} \cap \partial\mathbb{H}^p)$$

tampoco es conexo. Como dijimos anteriormente, bajo las condiciones del enunciado, se tiene que $g(A \cap \partial\mathbb{H}^p) \subset \partial\mathbb{H}^p$, por lo que $\overline{g}(\widetilde{W} \cap \partial\mathbb{H}^p) = g(\widetilde{W} \cap \partial\mathbb{H}^p) \subset \partial\mathbb{H}^p$; y para desconectar la bola D necesariamente tiene que ser $\overline{g}(\widetilde{W} \cap \partial\mathbb{H}^p) = D \cap \partial\mathbb{H}^p$. Así se tiene que $D \setminus \overline{g}(\widetilde{W} \cap \partial\mathbb{H}^p) = D \setminus \partial\mathbb{H}^p$ tiene dos componentes conexas, y lo mismo tiene $\widetilde{W} \setminus \partial\mathbb{H}^p$. Una de ellas será $\widetilde{W} \cap \mathrm{Int}(\mathbb{H}^p)$. Se sigue que $\overline{g}(\widetilde{W} \cap \mathrm{Int}(\mathbb{H}^p))$ es una componente conexa de $D \setminus \partial\mathbb{H}^p$, y es precisamente $D \cap \mathrm{Int}(\mathbb{H}^p)$, puesto que $\overline{g}(\widetilde{W} \cap \mathbb{H}^p) \subset \mathbb{H}^p$. Por tanto, $\overline{g}(A^*) = \overline{g}(\widetilde{W} \cap \mathbb{H}^p) = D \cap \mathbb{H}^p = B^*$ como queríamos demostrar.

□

Ejemplo 1.4.14. La condición de que f conserve el borde es imprescindible. Por ejemplo, consideremos dos variedades diferenciables X e Y en $\mathbb{R}^n$ de misma dimensión pura p de manera que $X \subset Y$ (podríamos tomar dos bolas concéntricas). Supongamos que $\partial X \not\subset \partial Y$ y sea $a \in \partial X \setminus \partial Y$. Consideremos $f : X \to Y$ la inclusión. Entonces claramente $d_a f$ es un isomorfismo lineal (una extensión es $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ cuya derivada vuelve a ser la identidad) pero claramente, puesto que $a \in \partial X \setminus \partial Y$, f no transforma entornos abiertos de a en X en entornos abiertos de a en Y, ya que no se conserva el borde.

Del teorema 1.4.13 se deduce el siguiente corolario:

Corolario 1.4.15. Sean $X \subset Y$ dos variedades diferenciables de dimensión pura p tales que $\partial X \subset \partial Y$. Entonces X es un subconjunto abierto de Y.

Demostración. Veamos que para cualquier $x \in X$ existe un entorno abierto U de x en Y tal que $U \subset X$. Sea j la inclusión de X en Y.

Por hipótesis se tiene que $\dim_x X = \dim_x Y$. Sea $\varphi : A \to V$ una carta local de Y en x, donde V es un abierto de Y. Entonces $U = V \cap X$ es un abierto de X y la restricción $\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi^{-1}(U) \to U$ es una carta local de X en x. Entonces se tiene que la expresión local de la inclusión $j|_U : U \to V$ es la inclusión $i : \varphi^{-1}(U) \to A$, luego su diferencial es una inyección entre espacios de misma dimensión, y por tanto $d_x(j|_U) : T_x X \to T_x Y$ es un isomorfismo lineal. Además, por hipótesis tenemos que $j(\partial X) \subset \partial Y$ y entonces por el teorema 1.4.13 se tiene que j es un difeomorfismo local en x, y por tanto existen entornos abiertos U de x en X y V de x en Y cumpliendo $j|_U : U \to V$ es un difeomorfismo, luego $U = V \cap X = V$ y por tanto X es abierto en Y. □

1.5. Inmersiones.

La definición que hemos adoptado de variedad es por naturaleza *sumergida*, pues la vemos contenida en $\mathbb{R}^m$. Sin embargo, resulta muy importante analizar los distintos modos en que una variedad está representada dentro de otras y a esto atañe el contenido de la sección.

Definición 1.5.1. Una aplicación diferenciable $f : X \to Y$ es una *inmersión en* $x \in X$ si su derivada $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ es inyectiva. Si esto ocurre para todo punto $x \in X$ decimos que f es una inmersión.

Si f tiene una inversa diferenciable por la izquierda entonces también la tiene su diferencial, y por tanto es inyectiva, con lo que f es una inmersión.

Observación 1.5.2. Notemos que efectivamente para que f pueda ser una inmersión en $x \in X$ necesariamente se debe cumplir $dim_x X \leq dim_{f(x)} Y$.

Proposición 1.5.3. Dadas dos inmersiones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, entonces $g \circ f : X \to Z$ también es una inmersión de X en Z.

Demostración. Por la regla de la cadena, dado $x \in X$, se tiene que $d_x(g \circ f) = d_{f(x)} g \circ d_x f$ que es inyectiva por serlo tanto $d_{f(x)} g$ como $d_x f$. □

Proposición 1.5.4. Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable. Los puntos de X en los que f es una inmersión forman un conjunto abierto en X.

Demostración. Que f sea una inmersión en un punto $x \in X$ es lo mismo que decir que la matriz de la aplicación derivada de f en x es de rango máximo y entonces habrá un entorno abierto U de $x \in X$ de manera que f sea inmersión en todos los puntos de U, es decir, un entorno donde la diferencial de f siempre sea de rango máximo.

Razonando mediante cartas. Dados abiertos $x \in U \subset X$ y $V \subset Y$ de manera que $f(U) \subset V$, y dadas parametrizaciones en estos abiertos, tenemos la siguiente situación, que se traslada también a variedades tangentes:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \\ A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_xX \arrow[r, "d_xf"] & T_{f(x)}Y \\ \mathbb{R}^p \arrow[u, "d_a\varphi"] \arrow[r, "d_ag"'] & \mathbb{R}^q \arrow[u, "d_b\psi"'] \end{tikzcd}$$

donde se han llamado $a = \varphi^{-1}(x)$ y $b = \psi^{-1}(f(x))$. Ahora bien, si tomamos en T_xX y en $T_{f(x)}Y$ bases que sean las imágenes de las bases canónicas en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ a través de los isomorfismos $d_a\varphi$ y $d_b\psi$ respectivamente, se tiene que la matriz de d_xf en esas bases coincide con la matriz jacobiana de g en $\varphi^{-1}(x)$, cuyas entradas son continuas como funciones de U en $\mathbb{R}$. Por tanto, que d_xf sea inyectiva es equivalente a que d_ag lo sea, y como $p < q$, esto es equivalente a que el rango de la matriz sea p, y por tanto a que exista un menor $p \times p$ cuyo determinante sea no nulo. Como dicho determinante también es una función continua de U en $\mathbb{R}$, el hecho de que sea no nulo en $x \in U$ implica que existe un abierto $\widetilde{U} \subset U$ donde se conserva dicha condición. Como el rango no puede ser mayor que p, será p en $\widetilde{U}$ y por tanto f es inmersión en todos los puntos de $\widetilde{U}$. □

Ejemplo 1.5.5. Las inclusiones lineales $f(x_1, ..., x_p) = (x_1, ..., x_p, 0, ..., 0)$ son los ejemplos más sencillos de inmersión.

Teorema 1.5.6 (Forma local canónica de una inmersión con valores interiores)**.** Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable y $a \in X$ tal que $f(a) \in \mathrm{Int}(Y)$. Si f es inmersión en a, existen parametrizaciones $\varphi : A \to U \subset X$ y $\psi : B \to V \subset Y$, A abierto de $\mathbb{H}^p = \{x_1 \geq 0\}$ y B abierto de $\mathbb{R}^q$, de manera que $a \in U$, $f(U) \subset V$ y la expresión local correspondiente tiene la forma:

$$\psi^{-1} f \varphi(x_1, ..., x_p) = (x_1, ..., x_p, 0, ..., 0).$$

Demostración. Por ser f una aplicación diferenciable, existirán parametrizaciones locales en $a \in X$ y $f(a) \in Y$ de manera que el siguiente diagrama tenga sentido:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, shift left, "\gamma^{-1}"] \\ A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\gamma^{-1}f\varphi"] & B \arrow[u, shift left, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

donde A es un abierto de $\mathbb{H}^p$, B es un abierto de $\mathbb{R}^q$ (lo podemos asegurar por ser $f(a) \in \text{Int}(Y)$) y $f(U) \subset V$. Denotemos g a la expresión local de f representada en el diagrama, y sea $\overline{g} : \tilde{A} \to \mathbb{R}^q$ una extensión diferenciable de g definida en un abierto $\tilde{A}$ de $\mathbb{R}^p$ tal que $\tilde{A} \cap \mathbb{H}^p = A$. Entonces la aplicación diferencial de $\overline{g}$ en $\varphi^{-1}(a)$ es inyectiva, puesto que se tiene la igualdad

$$d_{\varphi^{-1}(a)}\overline{g} = d_{f(a)}\gamma^{-1} \circ d_a f \circ d_{\varphi^{-1}(a)}\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$$

y por hipótesis f es una inmersión en a. Esto implica que si tomamos la matriz jacobiana $(\partial\overline{g}_i(\varphi^{-1}(a))/\partial x_j)_{i,j}$ esta tendrá un menor de orden p no nulo. Haciendo una permutación adecuada de las coordenadas de $\mathbb{R}^q$ (permutando las $\overline{g}_i$), lo que se puede hacer puesto que B es un abierto de $\mathbb{R}^q$, podemos suponer que se cumple

$$0 \neq \Delta = det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\overline{g}_1}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(a)) & \cdots & \dfrac{\partial\overline{g}_1}{\partial x_p}(\varphi^{-1}(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\overline{g}_p}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(a)) & \cdots & \dfrac{\partial\overline{g}_p}{\partial x_p}(\varphi^{-1}(a)) \end{pmatrix} \tag{1.5.1}$$

Consideremos ahora la aplicación diferenciable

$$h : \tilde{A} \times \mathbb{R}^{q-p} \to \mathbb{R}^q \text{ dada por } h(x, x') = \overline{g}(x) + (0, x'),$$

cuyo determinante jacobiano en el punto $(\varphi^{-1}(a), 0)$ es

$$0 \neq \Delta = det \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dfrac{\partial\overline{g}_1}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(a)) & \cdots & \dfrac{\partial\overline{g}_1}{\partial x_p}(\varphi^{-1}(a)) & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ \dfrac{\partial\overline{g}_p}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(a)) & \cdots & \dfrac{\partial\overline{g}_p}{\partial x_p}(\varphi^{-1}(a)) & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & * & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right) \tag{1.5.2}$$

Por el teorema de la aplicación inversa, existen entornos abiertos $U_1 \subset \tilde{A} \times \mathbb{R}^{q-p} \subset \mathbb{R}^q$ de $(\varphi^{-1}(a), 0)$ y $V_1 \subset \mathbb{R}^q$ de $h(\varphi^{-1}(a), 0)$ de manera que $h|_{U_1} : U_1 \to V_1$ es un difeomorfismo. Podemos suponer que $V_1 \subset B$, puesto que B es un entorno abierto en $\mathbb{R}^q$ de $g(\varphi^{-1}(a)) = \gamma^{-1}(f(a))$.
Es evidente ahora que $\psi = \gamma \circ h|_{U_1}$ es una parametrización local en $f(a) \in Y$, y por la construcción tendríamos que, en un entorno de $(\varphi^{-1}(a), 0)$ de la forma $U_{11} \times U_{12}$, para todos los puntos del entorno abierto de $\varphi^{-1}(a)$ en $\mathbb{H}^p$, $U_{11} \cap A$, se cumpliría $h(x, 0) = \overline{g}(x) = g(x)$ y entonces $(x, 0) = h^{-1}\gamma^{-1}f\varphi(x) = \psi^{-1}f\varphi(x)$ que es lo que queríamos probar.

□

Ejemplo 1.5.7. La aplicación $f : X = \mathbb{R} \to Y = \mathbb{H}^2$ dada por $t \mapsto (t^2, t)$ es diferenciable y su derivada en $t = 0$, $d_0 f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ será tal que $d_0 f(x) = (0, x)$, siendo por tanto inyectiva, y entonces f es una inmersión en $0 \in X$. Veamos que el hecho de que $f(0) = (0, 0) \notin \operatorname{Int}(\mathbb{H}^2)$ imposibilita la existencia de una expresión local como la del teorema anterior.
Supongamos que sí que existieran cartas locales como en el teorema anterior, es decir, cartas locales $\varphi : A \to U$ donde A es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ (se puede elegir abierto porque $0 \in \operatorname{Int} X = \operatorname{Int} \mathbb{R}$), U es entorno abierto de $0 \in X$, $\psi : B \to V$ donde B es un abierto en $\mathbb{H}^2$, V es un entorno abierto de $(0, 0) \in Y$, de manera que $f(U) \subset V$ y la expresión local g cumple que $g(s) = (s, 0)$ ó $(0, s)$ para cualquier $s \in A$. También, la igualdad $\psi \circ g = f|_U \circ \varphi$ se cumple por construcción de g.
En el caso en que $g(s) = (s, 0)$, como ψ es un difeomorfismo conserva el borde y por tanto

$$\psi(g(A) \setminus \partial\mathbb{H}^2) = \psi(g(A)) \setminus \partial\mathbb{H}^2 = f|_U(\varphi(A)) \setminus \partial\mathbb{H}^2 = f(U) \setminus \partial\mathbb{H}^2.$$

Pero esto es imposible puesto que $g(A) \setminus \partial\mathbb{H}^2 = A \times \{0\}$ es conexo y $f(U) \setminus \partial\mathbb{H}^2$ no lo es (es un trozo de parábola a la que le quitamos el punto $(0, 0)$ de manera que queda dividida en dos trozos que suponen una descomposición del conjunto en abiertos disjuntos). El hecho de que $g(A) \setminus \partial\mathbb{H}^2 = A \times \{0\}$ se sigue de que hemos supuesto que A es un intervalo abierto (a, b), y como $g(A) = A \times \{0\} = (a, b) \times \{0\} \subset \mathbb{H}^2$, se tiene que $(a, b) \subset \{x \geq 0\}$ y por tanto $0 \notin (a, b) = A$, por lo que $g(A) \cap \partial\mathbb{H}^2 = \emptyset$. Llegamos a un absurdo y se concluye que tales cartas locales no pueden existir.

En el caso de que $g(s) = (0, s)$, tendríamos que $f(U) = \psi(g(A)) = \psi(\{0\} \times A) \subset \partial\mathbb{H}^2$, lo cual no es cierto.

Corolario 1.5.8. Sean $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable. Si a tiene un entorno abierto $U \subset X$ tal que la restricción $f|_U : U \to f(U)$ es un difeomorfismo, entonces f es inmersión en a. El recíproco se cumple si $f(a) \in \operatorname{Int}(Y)$.

Demostración. Supongamos que existe U con $a \in U$ tal que $f|_U : U \to f(U)$ es un difeomorfismo. Entonces U es una variedad (por ser abierto de una variedad) y $f(U)$ también lo es (por ser difeomorfo a U), y la derivada $d_a(f|_U) : T_a U \to T_{f(a)} f(U)$ es un isomorfismo lineal. Tenemos que $T_a U = T_a X$ y como la inclusión i de $f(U)$ en Y es una aplicación diferenciable, necesariamente se tiene la siguiente igualdad entre aplicaciones lineales

$$d_a f = d_{f(a)} i \circ d_a(f|_U),$$

y como $d_{f(a)} i$ es una aplicación inyectiva y $d_{f(a)}(f(U))$ hemos visto que es un isomorfismo, tenemos que $d_a f$ es necesariamente una aplicación inyectiva y por tanto f es una inmersión en a.
Recíprocamente, supongamos además que $f(a) \in \operatorname{Int}(Y)$ y f es inmersión en $a \in X$, luego estamos en situación de aplicar el teorema anterior y podemos elegir parametrizaciones locales φ de $a \in X$ y ψ de $f(a) \in Y$ de manera que $g(x) = \psi^{-1} f \varphi(x) = (x, 0)$, y como la aplicación lineal dada por $x \longmapsto (x, 0)$ de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ es un difeomorfismo, $f = \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ será un difeomorfismo entre los abiertos donde estuvieran definidas las cartas locales. □

Ejemplo 1.5.9. Un contraejemplo es la *lemniscata* dada por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right)$. Entonces f es una inmersión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ cuya imagen se muestra en la figura.

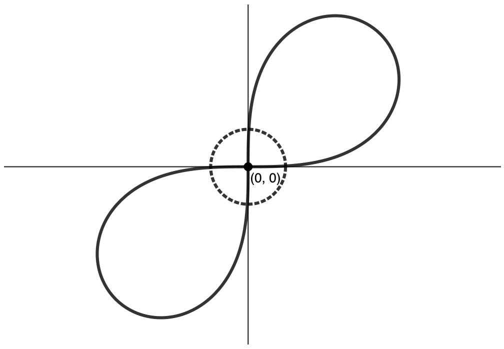


Figura 1.1: Lemniscata.

Se tiene que:

$$\lim_{t\to-\infty} f_1(t) = \lim_{t\to\infty} f_2(t) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = 0^+, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = 0^+.$$

Es claro que f no es homeomorfismo de ningún entorno de $t = 0$ sobre uno de $f(t) = (0, 0)$ en $f(\mathbb{R})$, puesto que en particular ningún entorno suficientemente pequeño de $(0, 0)$ en $f(\mathbb{R})$ es conexo.

Definición 1.5.10. Se dice que una inmersión $f : X \to Y$ es *difeomórfica* cuando es un homeomorfismo sobre su imagen $f(X)$.

Teorema 1.5.11. Una aplicación diferenciable $f : X \to Y$ es una inmersión difeomórfica si y solo si $f : X \to f(X)$ es un difeomorfismo.

Demostración. Que la condición es necesaria es evidente, si es un difeomorfismo en particular será un homeomorfismo, y f será una inmersión sin más que atender al corolario 1.5.8.
Supongamos ahora que f es una inmersión difeomórfica. En particular, $\overline{f} = i \circ f : X \to \mathbb{R}^n$ es también una inmersión, donde i hace referencia a la inclusión de Y en $\mathbb{R}^n$. Por el teorema de la forma local canónica 1.5.6, teniendo en cuenta que $\overline{f}(X) \subset \operatorname{Int} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, tenemos, dado $x \in X$, cartas locales de manera que se da el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\overline{f}|_U"] & V \\ A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi^{-1}(\overline{f}|_U)\varphi"] & B \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

donde A es abierto de $\mathbb{H}^p$, U de X con $x \in U$, B de $\mathbb{R}^n$ y V de $\mathbb{R}^n$. De manera que además la expresión local envía $a \in A$ en $(a, 0) \in B$ y $\overline{f}|_U$ es un difeomorfismo de U en V, lo que se puede asegurar a través del corolario 1.5.8 restringiendo los abiertos de manera adecuada. Ahora bien, como f es un homeomorfismo, es una aplicación abierta y entonces $f(U)$ es un abierto de $f(X)$, y claramente $f(U) \subset V \cap f(X)$. Por ser $f(U)$ un abierto de $f(X)$, existirá un abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ de manera que $f(U) = W \cap f(X)$, luego $V \cap W \cap f(X) = \widetilde{V} \cap f(X)$ es abierto de $f(X)$ y cambiando U por $\widetilde{U} = f^{-1}(\widetilde{V} \cap f(X))$ se tiene que $f(\widetilde{U}) = \widetilde{V} \cap f(X)$, luego podemos suponer que $f(U) = V \cap f(X)$ y se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{f|_U} & f(U) & \xrightarrow{i} & V \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi|_{g(A)}} & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ A & \xrightarrow{g} & g(A) & \xrightarrow{i} & B \end{array}$$

Y por ser φ, g y $\psi|_{g(A)} : g(A) \to f(U)$ difeomorfismos, también $f|_U : U \to f(U)$ es un difeormorfismo. Como $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo, es una aplicación biyectiva, lo que con el resultado local precedente prueba que $f : X \to f(X)$ es un difeomorfismo. □

Corolario 1.5.12. Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable, y supongamos que Y no tiene borde. Entonces:

(1) La aplicación $\Gamma_f : X \to X \times Y$ dada por $\Gamma_f(x) = (x, f(x))$ es una inmersión difeomórfica, y su imagen, el grafo $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, es una variedad diferenciable con borde $\partial G_f = \{(x, f(x)) : x \in \partial X\}$.

(2) La derivada de Γ_f en $x \in X$ es la aplicación:

$$\Gamma_{d_x f} : T_x X \to T_x X \times T_{f(x)} Y \text{ dada por } u \longmapsto (u, d_x f(u)).$$

(3) El espacio tangente al grafo de f es el grafo de la derivada, esto es, la imagen de la aplicación anterior

$$T_{(x,f(x))} G_f = G_{d_x f} = \{(u, d_x f(u)) : u \in T_x X\} \subset T_x X \times T_{f(x)} Y.$$

Demostración. (1) En primer lugar, observemos que eligiendo cartas adecuadas, la derivada de Γ_f en cualquier punto $x \in X$ tiene matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_q}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

por lo que es inyectiva, luego Γ_f es una inmersión de X en $X \times Y$, y evidentemente es un homeomorfismo (su inversa es la proyección sobre la componente en X), luego Γ_f es una inmersión difeomórfica. Por el teorema de invarianza del borde, ya que $\Gamma_f : X \to G_f$ es un difeomorfismo por el teorema anterior, se sigue que $\partial G_f = \Gamma_f(X)$.

(2) Basta con prestar atención a la forma de la matriz jacobiana expuesta antes.

(3) Es trivial, por ser Γ_f un difeomorfismo de X en el grafo, la aplicación es un isomorfismo entre sus espacios tangentes.

$\square$

Corolario 1.5.13 (Parametrizaciones adaptadas)**.** Sean $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ variedades diferenciables, $x \in X \setminus \partial Y$, $\dim_x X = p$. Existe entonces una parametrización $\psi : B \to V$ de Y, B abierto de $\mathbb{R}^q$, con $x \in V$, tal que:

(1) $X \cap V = \psi\,(B \cap (\mathbb{H}^p \times \{0\}))$ si $x \in \partial X$.

(2) $X \cap V = \psi\,(B \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}))$ si $x \notin \partial X$.

Demostración. La inclusión $j : X \to Y$ es una inmersión (su derivada en cualquier punto es la inclusión del espacio tangente a X en el espacio tangente a Y). Además, por hipótesis, $x \notin \partial Y$, luego podemos aplicar el teorema de la forma local canónica 1.5.6, y obtenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \cap V \arrow[r, "j"] & V \\ A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "g"] & B \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

donde $g(x) = (x, 0)$, A es un abierto de $\mathbb{H}^p$, V lo es de Y, y se tiene que $X \cap V = \varphi(A) = j(\varphi(A)) = \psi(g(A))$. Y además, puede que teniendo que reducir B y V:

$$g(A) = \begin{cases} B \cap (\mathbb{H}^p \times \{0\}) & si \quad x \in \partial X, \\ B \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) & si \quad x \notin \partial X. \end{cases}$$

$\square$

1.6. Sumersiones.

Definición 1.6.1. Una aplicación diferenciable $f : X \to Y$ es una *sumersión* en $x \in X$ si su derivada $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ es suprayectiva. Si esto es así para cada punto de un conjunto $C \subset X$, decimos que f es *sumersión en* C, y si $C = X$ decimos simplemente que f es una sumersión.

Si f tiene una inversa diferenciable por la derecha entonces también la tiene su diferencial, y por tanto es sobreyectiva, con lo que f es una sumersión.

A través de la regla de la cadena se ve que la composición de sumersiones es una sumersión, puesto que la composición de aplicaciones lineales suprayectivas sigue siendo suprayectiva.

Observación 1.6.2. Notemos que efectivamente para que f pueda ser una sumersión en $x \in X$ necesariamente se debe cumplir $\dim_x X \geq \dim_{f(x)} Y$.

Proposición 1.6.3. Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable. Los puntos en los que f es una sumersión forman un conjunto abierto.

Demostración. Al igual que en inmersiones, la condición de sumersión pasa por el hecho de que la matriz jacobiana de la aplicación lineal en un punto tenga rango máximo y como esto es una condición abierta se tiene el resultado. □

Ejemplo 1.6.4. Los ejemplos más básicos de sumersiones son las proyecciones lineales $f(x_1, ..., x_p) = (x_1, ..., x_q)$ donde $p \geq q$.

Teorema 1.6.5 (Forma local canónica de una sumersión que conserva el borde)**.** Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable y sea $a \in X$ un punto en el que f conserva el borde (lo que siempre se cumple si $a \in \text{Int}(X)$). Si f es sumersión en a, existen parametrizaciones $\varphi : A \to U \subset X$ y $\psi : B \to V \subset Y$ tales que:

(1) $a \in U$, $f(U) \subset V$.

(2) B es un abierto de $\mathbb{H}^q = \{x_1 \geq 0\}$ y $A = B \times W \subset \mathbb{H}^p = \mathbb{H}^q \times \mathbb{R}^{p-q}$ para cierto abierto W de $\mathbb{R}^{p-q}$.

(3) $\psi^{-1} f \varphi(x_1, ..., x_p) = (x_1, ..., x_q)$.

Demostración. Elegimos parametrizaciones locales en a y $f(a)$ de manera que el siguiente diagrama tenga sentido

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, shift left, "\psi^{-1}"] \\ \widetilde{A} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\psi^{-1} f \gamma"] & \widetilde{B} \arrow[u, shift left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{A}$ es un abierto de $\mathbb{H}^p = \{x_1 \geq 0\}$, $\widetilde{B}$ lo es de $\mathbb{H}^q = \{x_1 \geq 0\}$, $f(U) \subset V$, $q \leq p$ y f conserva el borde en U, i.e., $f(U \cap \partial X) \subset \partial Y$. Denotamos por $g = \psi^{-1} f \gamma$, y sea $\overline{g} : U_1 \to V_1$ una extensión diferenciable de g, donde $U_1 \cap \mathbb{H}^p = \widetilde{A}$ y $V_1 \cap \mathbb{H}^q = \widetilde{B}$. Por la conservación local del borde de f, y teniendo en cuenta que las parametrizaciones locales lo dejan invariante, se tiene que $\overline{g}(U_1 \cap \{x_1 = 0\}) = g(U_1 \cap \{x_1 = 0\}) \subset \partial \mathbb{H}^q = \{x_1 = 0\}$. Denotemos para $x \in \mathbb{R}^p$, $x = (x_1, x')$ donde $x' \in \mathbb{R}^{p-1}$.
Ahora bien, a través de la regla de la cadena, necesariamente se tiene la siguiente igualdad

$$D\overline{g}(\gamma^{-1}(a)) = d_{\gamma^{-1}(a)} g = d_{f(a)} \psi^{-1} \circ d_a f \circ d_{\gamma^{-1}(a)} \gamma : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$$

y por tanto, como f es sumersión en $a \in X$, se tiene que $D\overline{g}(\gamma^{-1}(a))$ es sobre, luego su matriz jacobiana tiene un menor de orden q no nulo.
A través de una permutación de coordenadas en $\mathbb{R}^p$ podremos suponer que dicho menor está formado por las primeras q columnas, teniéndose

$$0 \neq \Delta = det \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{g}_1}{\partial x_1}(\gamma^{-1}(a)) & \cdots & \frac{\partial \overline{g}_1}{\partial x_q}(\gamma^{-1}(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \overline{g}_q}{\partial x_1}(\gamma^{-1}(a)) & \cdots & \frac{\partial \overline{g}_q}{\partial x_q}(\gamma^{-1}(a)) \end{pmatrix} \tag{1.6.1}$$

Estos es porque si $a \in \text{Int}(X) \Rightarrow \gamma^{-1}(a) \in \text{Int}(\tilde{A})$, el borde no juega ningún papel y no hay problema en permutar las coordenadas en $\mathbb{R}^p$. Pero si $a \in \partial X$, entonces sí es importante la precisión en la permutación, pues en la expresión $g(x_1, ..., x_p) = (x_1, ..., x_q)$

debe forzosamente aparecer x_1, que es la forma lineal que define $\mathbb{H}^p$ y $\mathbb{H}^q$. Ahora bien, si $a \in \partial X$ entonces $\gamma^{-1}(a) \in \partial \tilde{A}$, por la invarianza del borde y por tanto $\overline{g}_1(\gamma^{-1}(a)) = 0$. Derivando en $\gamma^{-1}(a) = (0, x')$ se tiene que la primera fila de la matriz jacobiana ha de ser de la forma $\left(\frac{\partial \overline{g}_1}{\partial x_1}(\gamma^{-1}(a)), 0, ..., 0\right)$, dependiendo exclusivamente de la primera coordenada. Luego si prescindiésemos de la primera coordenada (sería prescindir de la primera columna de la matriz jacobiana) el rango es estrictamente menor que q, y entonces para conseguir Δ solamente deben permutarse las variables $x_2, ..., x_p$ de $\mathbb{R}^p$, mientras que x_1 queda fija. A continuación consideremos la aplicación diferenciable

$$h : \widetilde{A} \to \widetilde{B} \times \mathbb{R}^{p-q} \text{ dada por } h(x) = (\overline{g}(x), x_{q+1}, ..., x_p)$$

cuya diferencial $Dh(\gamma^{-1}(a))$, sin más que atender a la definición, tiene matriz jacobiana asociada

$$0 \neq \Delta = det \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial \overline{g}_1}{\partial x_1}(\gamma^{-1}(a)) & \cdots & \frac{\partial \overline{g}_1}{\partial x_q}(\gamma^{-1}(a)) & \\ \vdots & & \vdots & * \\ \frac{\partial \overline{g}_q}{\partial x_1}(\gamma^{-1}(a)) & \cdots & \frac{\partial \overline{g}_q}{\partial x_q}(\gamma^{-1}(a)) & \\ \hline & & & 1 \\ & 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{array} \right) \tag{1.6.2}$$

y es por tanto un isomorfismo lineal. Además, $h(0, x') = (0, y')$, es decir, $h(\partial \widetilde{A}) \subset \partial \left(\widetilde{B} \times \mathbb{R}^{p-q}\right)$, y podemos aplicar el teorema de inversión local para variedades con borde 1.4.13, con lo que h es un difeomorfismo local en $\gamma^{-1}(a)$, luego existe un entorno abierto $A \subset \widetilde{A}$ de $\gamma^{-1}(a)$ y otro $B \times W \subset \widetilde{B} \times \mathbb{R}^{p-q}$ de $g(\gamma^{-1}(a))$ (con W abierto de $\mathbb{R}^{p-q}$) de manera que $h|_A : A \to B \times W$ es un difeomorfismo. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g|_A"] \arrow[d, "h|_A"'] & B \\ B \times W \arrow[ur, "\pi : x \mapsto (x_1, .., x_q)"'] & \end{tikzcd}$$

Como la proyección es una aplicación abierta se tiene que $\pi(B \times W)$ es abierto en $\tilde{B}$, y además tendremos que $\varphi = \gamma \circ (h|_A)^{-1} : B \times W \to \gamma(A)$ es una parametrización local de X en a definida entre abiertos adecuados. Restringiendo las primeras cartas locales a los abiertos adecuados (a partir de la restricción de γ a A podemos adaptar todos los abiertos que intervienen) tendremos que por construcción

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = g \circ h^{-1} = \pi,$$

donde se consideran las restricciones adecuadas de las aplicaciones, como queríamos probar. $\square$

Corolario 1.6.6. Una sumersión que conserva el borde es una aplicación abierta que transforma puntos interiores en puntos interiores.

Demostración. El hecho de transformar punto interiores en puntos interiores es una cuestión local que podemos justificar sin más que tomar parametrizaciones cuya expresión local sea la forma canónica del teorema anterior. Además, que la expresión local sea la proyección implica que es abierta, y entonces necesariamente la sumersión ha de ser abierta. □

Vamos a ver qué podemos alcanzar cuando la sumersión no conserve el borde. Trabajaremos con puntos del borde de la variedad porque recordemos que cualquier aplicación conserva siempre el borde en puntos del interior de la variedad.

Proposición 1.6.7. Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable y sea $a \in \partial X$. Si $f|_{\partial X} : \partial X \to Y$ es sumersión en a, existen parametrizaciones $\varphi : A \to U \subset X$ y $\psi : B \to V \subset Y$ tales que:

(1) $a \in U$, $f(U) \subset V$.

(2) B es un abierto de $\mathbb{R}^q$ y $A = A^* \times B \subset \mathbb{H}^p = \mathbb{H}^{p-q} \times \mathbb{R}^q$ para cierto abierto A^* de $\mathbb{H}^{p-q} = \{x_1 \geq 0\}$.

(3) $\psi^{-1} f \varphi(x_1, ..., x_p) = (x_{p-q+1}, ..., x_p)$.

En este caso $f(a) \in \text{Int}(Y)$.

Demostración. El hecho de que $f(a) \in \text{Int}(Y)$ se sigue del corolario anterior, teniendo en cuenta que $f|_{\partial X}$ es una sumersión en a y ∂X es una variedad sin borde.
Bajo lo anterior, podemos suponer que existen cartas locales en $a \in X$ y $f(a) \in Y$ de manera que el siguiente diagrama conmutativo tenga sentido

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "f|_{U_1}"] & V_1 \arrow[d, shift left, "\psi_1^{-1}"] \\ A_1 \arrow[u, "\varphi_1"] \arrow[r, "\psi_1^{-1}(f|_{U_1})\varphi_1"] & B_1 \arrow[u, shift left, "\psi_1"] \end{tikzcd}$$

donde A_1 es un abierto de $\mathbb{H}^p = \{x_1 \geq 0\}$ y B_1 es un abierto de $\mathbb{R}^q$ (puesto que ya sabemos que $f(a) \in \text{Int}(Y)$). Denotamos g a la expresión local representada en el diagrama y sea $\overline{g} : W \to \mathbb{R}^q$ una extensión diferenciable de g definida en un abierto W de $\mathbb{R}^p$ tal que $W \cap \mathbb{H}^p = A_1$. Entonces, por ser $f|_{\partial X}$ una sumersión en a y teniendo en cuenta que las parametrizaciones locales identifican los bordes, es decir $\varphi_1(\partial A_1) = \partial U_1 = U_1 \cap \partial X$, se tiene que

$$\text{Im}\, D\overline{g}|_{\partial A_1}(a) = D\overline{g}(a)(\{0\} \times \mathbb{R}^{p-1}) = \mathbb{R}^q$$

En consecuencia $p - 1 \geq q$ y la matriz $\left(\dfrac{\partial \overline{g}_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 2 \leq j \leq p}}$ tiene un menor de orden q no nulo. Con una permutación de coordenadas en $\mathbb{R}^p$ que no cambie x_1, es decir, permutando $x_2, ..., x_p$ podemos suponer

$$0 \neq \Delta = det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{g}_1}{\partial x_{p-q+1}}(\varphi_1^{-1}(a)) & \cdots & \dfrac{\partial \overline{g}_1}{\partial x_p}(\varphi_1^{-1}(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \overline{g}_q}{\partial x_{p-q+1}}(\varphi_1^{-1}(a)) & \cdots & \dfrac{\partial \overline{g}_q}{\partial x_p}(\varphi_1^{-1}(a)) \end{pmatrix} \tag{1.6.3}$$

Ahora, consideremos la aplicación diferenciable

$$h : A_1 \to \mathbb{H}^p \text{ dada por } h(x) = (x_1, ..., x_{p-q}, \overline{g}_1(x), ..., \overline{g}_q(x)) = (x', \overline{g}(x)),$$

cuya derivada en $\varphi_1^{-1}(a)$ tiene matriz jacobiana con determinante no nulo tal como se muestra abajo

$$0 \neq \Delta = det \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & \dfrac{\partial \overline{g}_1}{\partial x_{p-q+1}}(\varphi_1^{-1}(a)) & \cdots & \dfrac{\partial \overline{g}_1}{\partial x_p}(\varphi_1^{-1}(a)) \\ & * & & \vdots & & \vdots \\ & & & \dfrac{\partial \overline{g}_q}{\partial x_{p-q+1}}(\varphi_1^{-1}(a)) & \cdots & \dfrac{\partial \overline{g}_q}{\partial x_p}(\varphi_1^{-1}(a)) \end{array}\right) \tag{1.6.4}$$

y por tanto $d_{\varphi_1^{-1}(a)}h$ es un isomorfismo, y como claramente h conserva el borde, estamos en condición de aplicar el teorema de inversión local 1.4.13, por lo que existen entornos C de $\varphi_1^{-1}(a)$ en A_1 y $A = A^* \times B$ de $h(a) = (a', \overline{g}(a))$ en $\mathbb{H}^p$ con $B \subset B_1$, de manera que $h|_C : C \to A$ es un difeomorfismo. Nos encontramos en la situación del siguiente diagrama conmutativo, donde π es la proyección de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^q$ dada por $(x_1, ..., x_p) \mapsto (x_{p-q+1}, ..., x_p)$:

$$\begin{tikzcd}
U = \varphi_1(C) \arrow[r, "f|_U"] & \psi_1(B) = V \\
C \arrow[u, "\varphi_1|_C"] \arrow[r, "g|_C"] \arrow[d, "h|_C"'] & B \arrow[u, "\psi_1|_B"'] \\
A \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi(h(C)) \subset B$ por ser $\pi(h(x)) = \overline{g}(x) \in B$.

Para obtener el resultado basta tomar $\varphi = \varphi_1|_C \circ (h|_C)^{-1}$ y $\psi = \psi_1|_B$. En efecto:

$$\psi^{-1} \circ f|_U \circ \varphi(x) = \pi(x) = (x_{p-q+1}, ..., x_p) \; \forall \, x \in A.$$

$\square$

Capítulo 2

Transversalidad

La simplificación de los problemas a partir de cambiar ligeramente las hipótesis constituye una herramienta fundamental en las matemáticas. Con este objetivo se desarrolla la noción de transversalidad, con cuyo hallazgo en los años cincuenta Thom dió nacimiento a la Topología Diferencial como rama propia de las matemáticas. Durante el capítulo se busca la descripción de variedades como imágenes inversas y en particular mediante ecuaciones implícitas, bien sean globales o locales. En la sección 2.1 se desarrolla este objetivo de construir variedades como contraimágenes empleando sumersiones, y a través de varios resultados se ve bajo qué condiciones se puede asegurar este fin. En la sección 2.2 se aborda el enfoque a través de ecuaciones implícitas, viendo qué condiciones deben cumplir las ecuaciones para que verdaderamente definan una variedad, y qué podemos decir de dicha variedad a través de las ecuaciones, definiendo así el concepto de intersección completa.

En la sección 2.3 se aborda la definición de transversalidad a través de lo visto para sumersiones e intersecciones completas, llegando a una condición necesaria y suficiente para que podamos asegurar que la contraimagen de una variedad es una variedad, y además se construye la forma local de la transversalidad. También se definen, partiendo del concepto de transversalidad previamente definido, nociones de transversalidad entre variedades y aplicaciones, que serán útiles para evaluar la transversalidad de una manera más intuitiva.

En las secciones 2.4 y 2.5 se demuestran el teorema de Sard-Brown y el teorema parametrizado de densidad de la transversalidad, que tiene como consecuencia el lema de posición general, que será de gran utilidad. Como una consecuencia del teorema de Sard-Brown se demuestra en las sección 2.6 el teorema de inmersión de Whitney, que se enlaza con algunos comentarios acerca de cómo podemos equiparar variedades abstractas a variedades sumergidas, siendo entonces estas últimas fundamentalmente todas las que hay.

2.1. Construcción de variedades mediante sumersiones.

Teorema 2.1.1. Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable y $Z \subset Y$ una tercera variedad, de manera que f conserva el borde en $f^{-1}(Z)$ y es sumersión en $f^{-1}(Z)$. Entonces:

(1) $f^{-1}(Z)$ es una variedad con borde y $\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(\partial Z)$.

(2) $T_x f^{-1}(Z) = (d_x f)^{-1}(T_{f(x)}Z)$ para $x \in f^{-1}(Z)$.

(3) $\text{codim}_x(X, f^{-1}(Z)) = \text{codim}_{f(x)}(Y, Z)$ para $x \in f^{-1}(Z)$.

Demostración. Todas las afirmaciones requieren justificaciones de carácter local en X, por definición de variedad, y en Y por continuidad de f. Este carácter local nos permite hacer una simplificación, puesto que en entornos abiertos de cada punto sabemos que hay difeomorfismos con abiertos de semiespacios afines apropiados, de manera que basta razonar a través de una expresión local de f en entornos de cada punto $x \in f^{-1}(Z)$. Es decir, para ver lo que se pide de $f^{-1}(Z)$ basta verlo localmente para subconjuntos de semiespacios afines que sean difeomorfos a subconjuntos de $f^{-1}(Z)$. Dado un punto $x \in f^{-1}(Z)$ podemos restringirnos a un entorno abierto U de $x \in X$ y trabajar en un abierto difeomorfo $A \subset \mathbb{H}^p$ a él, y lo mismo en $f(x) \in Z \subset Y$.
Podemos entonces suponer que X es un abierto de $\mathbb{H}^p = \{x_1 \geq 0\}$ e Y lo es de $\mathbb{H}^q = \{x_1 \geq 0\}$, y que además por el teorema 1.6.5 tengamos que $X = Y \times W$ donde W es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{p-q}$ y que $f(x_1, ..., x_p) = (x_1, ..., x_q)$. De esta manera se tiene inmediatamente que $f^{-1}(Z) = Z \times W$, que es una variedad diferenciable por ser un producto de una variedad Z y una variedad sin borde W, por ser un abierto de $\mathbb{R}^{p-q}$. Además es conocido que en estas circunstancias

$$\partial f^{-1}(Z) = \partial(Z \times W) = (\partial Z) \times W$$

y claramente

$$(\partial Z) \times W = f^{-1}(\partial Z),$$

con lo que ya tenemos probado el primer apartado del teorema.
Ahora bien, de nuevo por resultados conocidos para el producto de variedades, tenemos que

$$T_{(x_1,...,x_p)} f^{-1}(Z) = T_{(x_1,...,x_q)} Z \times T_{(x_{q+1},...,x_p)} W = T_{f(x)} Z \times \mathbb{R}^{p-q}$$

Notemos que la matriz jacobiana de la derivada $d_x f$ tiene la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} Id_{\mathbb{R}^q} & 0 \end{array} \right)_{q \times p}$$

puesto que la derivada de f es de nuevo la propia f, por lo que

$$T_{f(x)} Z \times \mathbb{R}^{p-q} = (d_x f)^{-1}(T_{f(x)} Z)$$

como queríamos probar en el punto (2) del enunciado.
En cuanto a la codimensión, si denotamos $m = \dim_{f(x)} Z$, se tiene que

$$\dim_x f^{-1}(Z) = m + p - q \text{ , y por tanto}$$

$$\text{codim}_x(X, f^{-1}(Z)) = p - (m + (p - q)) = q - m = \text{codim}_{f(x)}(Y, Z)$$

donde recordemos que $p = \dim_x X$ y $q = \dim_{f(x)} Y$ por hipótesis. □

Ejemplo 2.1.2. Consideremos $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, ..., x_{n+1}) = x_1^2 + ... + x_{n+1}^2$, que es claramente diferenciable.

- Sea $a > 0$. Entonces f es una sumersión en todo punto de $f^{-1}(a^2) = \mathbb{S}_a^n$ la esfera de radio a, puesto que todo punto $x \in \mathbb{S}_a^n$ debe tener al menos una coordenada x_i no nula, y por tanto la matriz jacobiana asociada a $d_x f$ que es

$$2(x_1, .., x_i \neq 0, x_{i+1}, ..., x_{n+1})$$

define una sobreyección de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathbb{R}$. Entonces estamos en la situación del teorema anterior (ni $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{R}^{n+1}$ tienen borde que considerar), y tendríamos que $Z = \{a\} \subset \mathbb{R}$ es una variedad de dimensión 0 sin borde, y por tanto $f^{-1}(a^2) = \mathbb{S}_a^n$ es una variedad sin borde de dimensión n, y por el teorema anterior, dado $x \in \mathbb{S}_a^n$ entonces $\mathrm{codim}_x(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}_a^n) = \dim_a \mathbb{R} - \dim_a Z = 1$.

- Ahora si tomamos $0 < a < b$, tendríamos $Z = [a^2, b^2] \subset \mathbb{R}$ una variedad de dimensión pura 1 y con borde $\partial Z = \{a^2, b^2\}$. Entonces por el teorema anterior, $f^{-1}(Z)$, que es la corona circular entre las esferas $\mathbb{S}_a^n$ y $\mathbb{S}_b^n$, es una variedad con borde de dimensión pura $n + 1$ y cuyo borde son precisamente las esferas mencionadas.

- Si en el apartado anterior tomásemos $a = 0$, tendríamos que $f^{-1}(Z)$ es el disco $D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq \|x\| \leq b\}$, que sí es una variedad, pero no lo podemos justificar a través del teorema anterior porque f no es sumersión en $x = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Para solucionar el problema del último apartado del ejemplo nos servimos de la siguiente proposición. Obsérvese que $f^{-1}([0, b^2]) = f^{-1}((-\infty, b^2])$ en el ejemplo.

Proposición 2.1.3. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}$ un valor tal que $f^{-1}(a) \cap \partial X = \emptyset$ y f es sumersión en $f^{-1}(a)$. Entonces $f^{-1}(-\infty, a]$ (resp. $f^{-1}[a, +\infty)$) es una variedad diferenciable de la misma dimensión que X con borde

$$\partial f^{-1}(-\infty, a] = \left(f^{-1}(-\infty, a) \cap \partial X\right) \cup f^{-1}(a)$$

(resp. $\partial f^{-1}[a, +\infty) = (f^{-1}(a, +\infty) \cap \partial X) \cup f^{-1}(a)$).

Demostración. Probamos el enunciado para $(-\infty, a]$, el otro caso es análogo.
El conjunto $f^{-1}(-\infty, a)$ es un abierto de X y por tanto una variedad diferenciable de igual dimensión con borde $f^{-1}(-\infty, a) \cap \partial X$. Ahora bien, dado $x \in f^{-1}(a)$, por hipótesis $x \notin \partial X$ y f es sumersión en x. Bajo estas condiciones podemos de nuevo aplicar el teorema 1.6.5 y hacer las simplificaciones igual que en el anterior teorema. Entonces podemos suponer $Y = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ con $\epsilon > 0$ y $X = (a - \epsilon, a + \epsilon) \times W$ abierto de $\mathbb{R}^p$ (por tanto W abierto de $\mathbb{R}^{p-1}$), y de manera que $f(x_1, ..., x_p) = x_1$. Bajo estas circunstancias, $f^{-1}(a - \epsilon, a] = (a - \epsilon, a] \times W$, que es una variedad diferenciable de dimensión pura p con borde $\{a\} \times W = f^{-1}(a)$. Con esto hemos probado que existe $\epsilon > 0$ de manera que $f^{-1}(a - \epsilon, a]$ es una variedad diferenciable. Juntando esto con el hecho de que también $f^{-1}(-\infty, a)$ es una variedad diferenciable y ambas tienen misma dimensión, se tiene que $f^{-1}(-\infty, a]$ es una variedad diferenciable de dimensión p con borde

$$\partial f^{-1}(-\infty, a] = \left(f^{-1}(-\infty, a) \cap \partial X\right) \cup f^{-1}(a)$$

como queríamos probar. ∎

Como se puede ver en el teorema 2.1.1, la interacción con el borde es fundamental. Resultará útil en el futuro considerar otro escenario para poder construir variedades a través de sumersiones. En esa línea introducimos la siguiente proposición:

Proposición 2.1.4. Sean $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable y $Z \subset Y$ una tercera variedad tal que $\partial Z = \emptyset$ de manera que f es sumersión en $f^{-1}(Z) \backslash \partial X$ y $f|_{\partial X}$ es sumersión en $f^{-1}(Z) \cap \partial X$. Entonces:

(1) $f^{-1}(Z)$ es una variedad con borde y $\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$.

(2) $T_x f^{-1}(Z) = (d_x f)^{-1}(T_{f(x)} Z)$ para $x \in f^{-1}(Z)$.

(3) $\text{codim}_x(X, f^{-1}(Z)) = \text{codim}_{f(x)}(Y, Z)$ para $x \in f^{-1}(Z)$.

Demostración. Como se trata de cuestiones locales en puntos de $f^{-1}(Z)$ basta con hacer los razonamientos en entornos adecuados de los puntos del conjunto. Si $x \in f^{-1}(Z) \cap \text{Int}(X)$ entonces f conserva el borde en un entorno de x en X y basta con aplicar el teorema 2.1.1 para obtener el resultado. Ahora bien, si $x \in f^{-1}(Z) \cap \partial X$, como $f|_{\partial X}$ es sumersión en x por hipótesis, entonces estamos en condiciones de aplicar el resultado 1.6.7, y razonando de manera análoga a como se hizo en la demostración del teorema 2.1.1, podemos suponer entonces que Y es un abierto de $\mathbb{R}^q$, X uno de $\mathbb{H}^p = \{x_1 \geq 0\}$ de la forma $A^* \times Y$ donde A^* es un abierto de $\mathbb{H}^{p-q} = \{x_1 \geq 0\}$ y $f(x_1, ..., x_p) = (x_{p-q+1}, ..., x_p)$ que es la proyección sobre las últimas q coordenadas. Ahora bien, tendremos que $f^{-1}(Z) = A^* \times Z$, luego es una variedad diferenciable con borde por 1.2.17, puesto que $\partial Z = \emptyset$. Además, es conocido que en estas circunstancias

$$\partial f^{-1}(Z) = \partial(A^* \times Z) = \partial A^* \times Z.$$

Notemos que en estas circunstancias Y es un abierto de $\mathbb{R}^q$, luego $\partial Y = \emptyset$, y por tanto $\partial X = \partial A^* \times Y$, de manera que evidentemente

$$\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X.$$

Por otro lado, también de la proposición 1.2.17 es conocido que:

$$T_x f^{-1}(Z) = T_{(x_1,...,x_{p-q})} A^* \times T_{(x_{p-q+1},...,x_p)} Z = \mathbb{R}^p \times T_{f(x)} Z$$

y teniendo en cuenta que además $d_x f = f$, también $\mathbb{R}^p \times T_{f(x)} Z = (d_x f)^{-1}(T_{f(x)} Z)$ y por tanto

$$T_x f^{-1}(Z) = (d_x f)^{-1}(T_{f(x)} Z).$$

Por último, si denotamos $m = \dim_{f(x)} Z$, teniendo en cuenta que

$$\dim_x f^{-1}(Z) = \dim_{(x_1,...,x_{p-q})} A^* + m = (p - q) + m$$

se tiene la conclusión

$$\text{codim}_x(X, f^{-1}(Z)) = p - ((p - q) + m) = q - m = \dim_{f(x)} Y - \dim_{f(x)} Z = \text{codim}_{f(x)}(Y, Z),$$

con lo que finaliza la demostracion, pues queda probado para todo punto de $f^{-1}(Z)$. $\square$

Ejemplo 2.1.5. Consideremos la variedad $X = \mathbb{R} \times [0,1]$, cuyo borde es $\partial X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$, y sea $Y = \mathbb{R}$. Definimos la aplicación

$$f : X \to Y \text{ dada por } f(x,y) = 16\left(x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16}\right)(y - x + 3)\,.$$

Consideramos la variedad $Z = \{0\} \subset Y$, y queremos ver que $f^{-1}(Z)$ es una variedad, que se cumplen las hipótesis del resultado anterior, y que efectivamente $f^{-1}(Z)$ es como dice la proposición.

En primer lugar, $f^{-1}(Z) = f^{-1}(0)$ consiste por un lado en la esfera dada por la ecuación $16\left(x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16}\right) = 0$ y por otro lado en el segmento dado por $(y - x + 3) = 0$, que se ven en la siguiente figura:

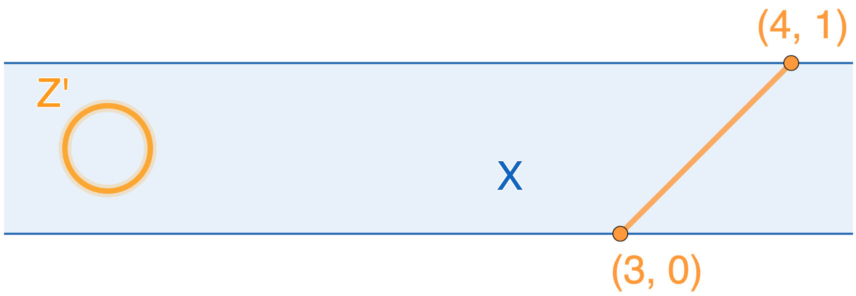


Figura 2.1: Representación de X y $f^{-1}(Z)$, denotado como Z'.

Claramente $f^{-1}(Z)$ es una variedad de dimensión uno cuyo borde consiste en los puntos $(4,1)$ y $(3,0)$. La derivada $d_{(x,y)}f$ no se anula en ningún punto de $f^{-1}(Z)$, puesto que la parte de la esfera y la de la semirrecta no se cortan. Entonces f es una sumersión en todos los puntos de $f^{-1}(Z) \setminus \partial X$. Además,

$$f|_{\partial X} = \begin{cases} (16x^2 + 3)(4 - x) & \text{si} \quad y = 1, \\ (16x^2 + 3)(3 - x) & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

De manera que con un sencillo cálculo se obtiene que $(f|_{\partial X})'(4,1) = -259$ y $(f|_{\partial X})'(3,0) = -259$, luego $f|_{\partial X}$ es sumersión en todos los puntos de $f^{-1}(Z) \cap \partial X$.

Nótese que hemos obtenido una variedad no conexa, una de cuyas componentes tiene borde y otra no, a través de la contraimagen de un punto por una sumersión.

2.2. Intersecciones completas.

En el ejemplo 2.1.2 de la sección anterior hemos visto cómo una sumersión de X en $\mathbb{R}$ nos proporciona hipersuperficies de X a través de las contraimágenes de los puntos de la recta. Esto se puede generalizar a variedades contenidas en X de codimensión mayor como sigue:

Teorema 2.2.1. Sean $f_1, ..., f_k : X \to \mathbb{R}$ aplicaciones diferenciables, y denotemos

$$Z = \{x \in X : f_1(x) = ... = f_k(x) = 0\}.$$

Suponemos:

(a) Las derivadas $d_x f_1, ..., d_x f_k$ son formas lineales independientes para todo $x \in Z \backslash \partial X$.

(b) Las derivadas $d_x(f_1|_{\partial X}), ..., d_x(f_k|_{\partial X})$ son formas lineales independientes para todo $x \in Z \cap \partial X$.

Entonces se cumple:

(1) Z es una variedad con borde $\partial Z = Z \cap \partial X$.

(2) $T_x Z = \mathrm{Ker}(d_x f_1) \cap ... \cap \mathrm{Ker}(d_x f_k)$ para cada $x \in Z$.

(3) $\mathrm{codim}_x(X, Z) = k$ para cada $x \in Z$.

Demostración. Consideramos la aplicación $f = (f_1, ..., f_k) : X \to Y$ con $Y = \mathbb{R}^k$ que es una aplicación diferenciable. Tomemos $W = \{0\} \subset \mathbb{R}^k$, que es una variedad sin borde y de dimensión 0. Por la hipótesis (a) se tiene que necesariamente f es sumersión en $f^{-1}(W) \setminus \partial X$ y por (b) $f|_{\partial X}$ lo es en $f^{-1}(W) \cap \partial X$. Basta aplicar la proposición 2.1.4 para obtener que Z es una variedad diferenciable con borde $\partial Z = Z \cap \partial X$ y verificando $\mathrm{codim}_x(X, Z) = k$ para cada $x \in Z$. Además, para cada $x \in Z$ se tiene que

$$T_x Z = (d_x f)^{-1}(T_{f(x)} W) = (d_x f)^{-1}(T_0\{0\}) = (d_x f)^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(d_x f)$$

y claramente por la definición de f un punto está en su núcleo si y solo si está en todos los núcleos de sus componentes simultáneamente, de manera que

$$\mathrm{Ker}(d_x f) = \mathrm{Ker}(d_x f_1) \cap ... \cap \mathrm{Ker}(d_x f_k)$$

y se tiene lo buscado. □

Definición 2.2.2. Si $Z \subset X$ son dos variedades tales que

$$Z = \{x \in X : f_1(x) = ... = f_k(x) = 0\}$$

para ciertas $f_1, ..., f_k : X \to \mathbb{R}$ diferenciables que cumplan las condiciones (a) y (b) del teorema 2.2.1, decimos que $f_1, ..., f_k$ *son ecuaciones de Z en X*, y que Z es una *intersección completa en X*.

En el caso particular de una hipersuperficie $Z \subset X$ ser intersección completa implica la existencia de una función $f : X \to \mathbb{R}$ diferenciable verificando que f es sumersión en $Z \setminus \partial X$, que $f|_{\partial X}$ lo es en $Z \cap \partial X$ y que además $Z = f^{-1}(0)$. En estas circunstancias se dice que f es una *ecuación global* de Z.

Observación 2.2.3. Localmente, cuando no haya problemas ligados al borde, todas las variedades son intersección completa, y decimos que todas las variedades tienen *ecuaciones locales*. Veamos que dados un par de variedades $Z \subset X$, que suponemos sin borde, entonces para cada $x \in Z$ existe un entorno abierto de x en X de manera que $Z \cap U$ es intersección completa en U. Para ello, aplicamos el corolario 1.5.13 a $Z \subset X$ en x, de manera que tenemos una parametrización adaptada $\varphi : A \to U$, $x \in U$, con $Z \cap U = \varphi(A \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}))$, donde $d = \dim_x Z$.

Entonces las funciones:

$$f_i : U \to \mathbb{R} \text{ dadas por } x \mapsto \varphi^{-1}(x) = (y_1, ..., y_p) \mapsto y_i,\ d < i \leq p$$

son diferenciables y tienen derivadas linealmente independientes (por ser φ un difeomorfismo) y puesto que $Z \cap U = \{x \in U : f_d(x) = ... = f_p(x) = 0\}$, son ecuaciones de $Z \cap U$ en U.

Con este mismo argumento se comprueba que dada una variedad $X \subset \mathbb{R}^n$, en cualquier punto $x \in X$ se tienen ecuaciones locales en $\mathbb{R}^n$, es decir, todos los puntos de la variedad tienen un entorno que es intersección completa en $\mathbb{R}^n$.

En el siguiente teorema, cuya demostración no incluimos (se puede encontrar en [1, Pág. 56]), se expone una situación en la que podemos asegurar la existencia de ecuación global.

Teorema 2.2.4. Sea $Z \subset X$ variedades conexas y sin borde, Z una hipersuperficie cerrada de X. Entonces Z tiene una ecuación global $f : X \to \mathbb{R}$ si y solo si desconecta X. Si este es el caso, se verifica además:

(1) $X \setminus Z$ tiene dos componentes conexas, que son $\{f > 0\}$ y $\{f < 0\}$.

(2) $\overline{\{f > 0\}}$ y $\overline{\{f < 0\}}$ son dos variedades con borde igual a Z.

2.3. Concepto de transversalidad.

En las secciones anteriores hemos visto cómo construir variedades como imágenes inversas de otras variedades. El objetivo ahora trata de hacer una construcción más general que conduzca de manera natural a la definición de tranversalidad.

Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable entre variedades y $Z \subset Y$ una tercera variedad. Supongamos por ahora que ninguna de las variedades tiene borde, puesto que ya quedó claro en resultados anteriores que el borde puede ser problemático. El interés ahora radica en ver bajo qué condiciones $f^{-1}(Z)$ es una variedad, y esto como ya se ha dicho otras veces es un problema local en X e Y.

Notemos que fijado $x \in f^{-1}(Z)$, entonces Z es intersección completa en un entorno abierto V de $f(x)$ en Y, siguiendo el argumento de la observación 2.2.3. Es decir, existe una sumersión $g : V \to \mathbb{R}^k$ de manera que $Z \cap V = g^{-1}(0)$. Entonces, si tomamos $U = f^{-1}(V)$, que es un abierto en X, la aplicación $h = g \circ f|_U : U \to \mathbb{R}^k$ es tal que $f^{-1}(Z) \cap U = f^{-1}(Z \cap V) = f^{-1}(g^{-1}(0)) = h^{-1}(0)$. En estas circunstancias, para poder asegurar que $f^{-1}(Z) \cap U$ es una variedad bastaría con que h fuera una sumersión, es decir, que la aplicación lineal $d_x h = d_{f(x)} g \circ d_x f : T_x X \to T_0 \mathbb{R}^k$ sea suprayectiva, donde notemos que por ser U y V abiertos respectivamente de X e Y se tienen las igualdades $T_x U = T_x X$ y $T_{f(x)} V = T_{f(x)} Y$.
Como hemos visto g es sumersión en $f(x)$ y por tanto $d_{f(x)} g$ es suprayectiva, luego existe un isomorfismo $\tilde{g}$ entre $T_{f(x)} Y / \mathrm{Ker}(d_{f(x)} g)$ y $\mathrm{Im}(d_{f(x)} g) = T_0 \mathbb{R}^k$ de manera que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T_x X \arrow[r, "d_x f"] \arrow[dr, "\overline{d_x f}"'] & T_{f(x)} Y \arrow[r, "d_{f(x)} g"] \arrow[d, "\pi"'] & T_0 \mathbb{R}^k \\
& T_{f(x)} Y / \mathrm{Ker}(d_{f(x)} g) \arrow[ur, "\tilde{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde π es la aplicación de paso al cociente y $\overline{d_x f} = \pi \circ d_x f$.
Entonces está claro que se tiene la igualdad $\tilde{g} \circ \overline{d_x f} = d_{f(x)} g \circ d_x f = d_x h$, luego $d_x h$ será suprayectiva si y solo si lo es $\overline{d_x f}$ (puesto que $\tilde{g}$ es un isomorfismo), es decir, si y solo si

$$T_{f(x)} Y = \mathrm{Ker}(d_{f(x)} g) + \mathrm{Im}(d_x f)$$

Recordemos ahora que en las condiciones expuestas se tiene que $\mathrm{Ker}(d_{f(x)} g) = T_{f(x)}(Z \cap V) = T_{f(x)} Z$ y entonces la condición anterior se puede expresar a través de la siguiente igualdad

$$T_{f(x)} Y = T_{f(x)} Z + d_x f(T_x X). \tag{TR}$$

En conclusión, que se verifique la condición TR implicaría directamente que $f^{-1}(Z) \cap U$ es una variedad, i.e., que $f^{-1}(Z)$ es una variedad en un entorno de x. Consideremos la aplicación lineal inducida por $d_x f$

$$[f] : T_x X/(d_x f)^{-1}(T_{f(x)} Z) \to T_{f(x)} Y/T_{f(x)} Z.$$

Puesto que $(d_x f)^{-1}(T_{f(x)} Z) \subset \mathrm{Ker}(\pi \circ d_x f)$, la aplicación $[f]$, cuya imagen es $(\mathrm{Im}(d_x f) + T_{f(x)} Z)/T_{f(x)} Z$, está bien definida, y $[f]$ es suprayectiva si y solo si $T_{f(x)} Y = \mathrm{Im}(d_x f) + T_{f(x)Z}$, es decir, se cumple TR. En particular, si $[f]$ es isomorfismo se cumple TR. Recíprocamente, supongamos TR, es decir, que h es sumersión en $f^{-1}(Z) \cap U = h^{-1}(0)$. Por el teorema 2.2.1, en este caso se tiene:

$$T_x(f^{-1}(Z)) = \mathrm{Ker}(d_x h) = (d_x h)^{-1}(0) = (d_x f)^{-1}((d_{f(x)} g)^{-1}(0)) = (d_x f)^{-1}(T_{f(x)} Z),$$

donde la última igualdad es consecuencia también del teorema 2.2.1. Y además, de este mismo teorema se deduce que

$$\mathrm{codim}_x(X, f^{-1}(Z)) = k = \mathrm{codim}_{f(x)}(Y, Z)$$

luego, puesto que $[f]$ es suprayectiva, es isomorfismo por igualdad de dimensiones. Así, TR equivale a que $[f]$ sea un isomorfismo.

Definición 2.3.1. Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable y $Z \subset \mathrm{Int}(Y)$ una variedad sin borde. Decimos que f es *transversal a Z en un punto $x \in f^{-1}(Z)$* si se cumple la condición TR anterior. Convenimos además que f es transversal a Z en todo punto $x \notin f^{-1}(Z)$. En ambos casos usamos la notación $f \pitchfork_x Z$

Por la construcción anterior, si f es sumersión en x, entonces $f \pitchfork_x Z$.

Notación 2.3.2. Decimos que f *es transversal a Z en un conjunto $C \subset X$* y escribimos $f \pitchfork_C Z$ cuando $f \pitchfork_x Z$ para todo $x \in C$.
Decimos también que f *es transversal a* Z y escribimos $f \pitchfork Z$ si $f \pitchfork_X Z$

Observemos que para que la condición $f \pitchfork_C Z$ tenga sentido nos valdría con que f fuera diferenciable en un entorno de C.

Como en el caso de inmersiones y sumersiones, la transversalidad se define a través de una condición abierta.

Proposición 2.3.3. Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable y $Z \subset \mathrm{Int}(Y)$ una variedad sin borde. Los puntos de $f^{-1}(Z)$ en los que f es transversal a Z forman un conjunto abierto de $f^{-1}(Z)$.

Demostración. La transversalidad equivale a que la aplicación h definida en la construcción que condujo a la condición TR sea una sumersión, lo que constituye una condición abierta. $\square$

Teorema 2.3.4 (Forma local de la transversalidad)**.** Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable tal que f y $f|_{\partial X}$ son transversales a una variedad sin borde $Z \subset \mathrm{Int}(Y)$ en un punto $a \in f^{-1}(Z)$. Entonces existen parametrizaciones $\varphi : A \to U$ y $\psi : B \to V \subset Y$ tales que:

(1) $a \in U$, $f(U) \subset V$.

(2) A es un abierto de $\mathbb{H}^p = \{x_1 \geq 0\}$ de la forma $A^* \times W$ y B uno de $\mathbb{R}^q$ de la forma $B = B^* \times W$, con $A^* \subset \mathbb{H}^r$, $B^* \subset \mathbb{R}^s$ y $p - r = q - s$.

(3) $Z \cap V = \psi(B \cap (\mathbb{R}^s \times \{0\}))$, $s = \dim_{f(a)} Z$.

(4) $\psi^{-1} f \varphi(x_1, ..., x_p) = (y_1, ..., y_s, x_{r+1}, ..., x_p)$ donde $y_1, ..., y_s$ son funciones de $x = (x_1, ..., x_p)$.

Demostración. Como $Z \subset \mathrm{Int}(Y)$, podemos elegir $\psi' : B' \to V$ una parametrización de Y adaptada a Z en $f(a) \in Z \subset Y$ con B' un abierto de $\mathbb{R}^q$. Se cumple entonces que $\psi'(B' \cap (\mathbb{R}^s \times \{0\})) = Z \cap V$ donde $s = \dim_{f(a)} Z$. Tomemos ahora $(\psi')^{-1} : V \to B' \subset \mathbb{R}^q$ y denotemos $(\psi')^{-1} = (g_1, ..., g_q)$. Entonces se tiene que la aplicación diferenciable $g = (g_{s+1}, ..., g_q) : V \to \mathbb{R}^{q-s}$ es una sumersión (por ser ψ' difeomorfismo) y se verifica por construcción que $Z \cap V = \{g = 0\}$.
Sea $U = f^{-1}(V)$ que es un abierto de X y sea, como en la construcción del inicio de la sección, $h = g \circ f|_U : U \to \mathbb{R}^{q-s}$. Distinguimos dos casos (en todo lo siguiente se sobreentiende que los abiertos se van reduciendo convenientemente):

(1) Si $a \notin \partial X$, como f es transversal a Z, la aplicación h es una sumersión. Entonces por el teorema de la forma local de sumersiones 1.6.5 (que podemos aplicar puesto que $\mathbb{R}^{q-s}$ no tiene borde), existen parametrizaciones $\varphi : A \to U \subset X$ y $\phi : B_2 \to W_2 \subset \mathbb{R}^{q-s}$ con A abierto de $\mathbb{R}^p$ y B_2 de $\mathbb{R}^{q-s}$ y verificándose que $a \in U$, $h(U) \subset W_2$, donde U quizá no sea exactamente el de antes, sino una reducción conveniente, y con expresión local asociada

$$\phi^{-1} h \varphi(x_1, ..., x_p) = (x_{r+1}, ..., x_p) \text{ donde } r = p - (q - s).$$

En el teorema 1.6.5 la expresión local es la proyección sobre las primeras coordenadas, pero por estar trabajando en un punto que no está en el borde, no hay ninguna coordenada privilegiada, y podemos permutarlas para que sea la proyección sobre las últimas coordenadas.

La situación en que nos encontramos se ve representada en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
W_2 & V \arrow[l, "g"'] & U \arrow[l, "f"'] \\
B_2 \subset \mathbb{R}^{q-s} \arrow[u, "\phi"'] & B' \subset \mathbb{R}^q \arrow[u, "\psi'"'] & A \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Reduciendo los abiertos involucrados y teniendo en cuenta cómo se define g a partir de la inversa de ψ', podemos suponer que $B' = B_1 \times W_2$ para cierto abierto $B_1 \subset \mathbb{R}^s$, y definimos una nueva parametrización $\psi : B = B_1 \times B_2 \to V$ de Y adaptada a Z mediante la fórmula

$$\psi(y_1, ..., y_q) = \psi'(y_1, ..., y_s, \phi(y_{s+1}, ..., y_q))$$

Veamos en primer lugar que $Z \cap V = \psi(B \cap (\mathbb{R}^s \times \{0\})) = \psi(B_1 \times \{0\})$, con lo que se tiene (3) del enunciado. Notemos que tal como se han definido, se tiene que $\psi = \psi' \circ (Id_{B_1} \times \phi)$. Como ψ' es una parametrización de Y adaptada a Z, entonces:

$$\begin{aligned} Z \cap V = {} & \psi'((B_1 \times W_2) \cap (\mathbb{R}^s \times \{0\})) = \\ & = \psi'(B_1 \times \{0\}) = \psi((Id_{B_1} \times \phi)^{-1}(B_1 \times \{0\})) = \\ & = \psi(B_1 \times \phi^{-1}(0)). \end{aligned}$$

Se puede suponer que $\varphi^{-1}(a) = 0$, y por tanto $0 = \phi^{-1}h\varphi(\varphi^{-1}(a)) = \phi^{-1}h\varphi(0) = \phi^{-1}(g(f(a)) = \phi^{-1}(0)$, puesto que $f(a) \in Z$ y $Z \cap V = \{g = 0\}$, se tiene que $Z \cap V = \psi(B_1 \times \{0\})$.

Se puede suponer análogamente que $A = A^* \times B_2$ donde A^* es un abierto de $\mathbb{R}^r$, atendiendo a la forma de la expresión local $\phi^{-1}h\varphi$, con lo que se tiene (2).

Operemos para ver que la expresión local $\psi^{-1}f\varphi$ tiene la forma dada en (4). Veamos primero que:

$$\psi^{-1}(u) = (g_1(u), ..., g_s(u), \phi^{-1}(g_{s+1}(u), ..., g_q(u))) = (g_1(u), ..., g_s(u), \phi^{-1}(g(u)))$$

Entonces fácilmente se obtiene:

$$\begin{aligned} \psi^{-1}f\varphi(x_1, ..., x_p) &= (g_1(f(\varphi(x_1, ..., x_p))), ..., g_s(f(\varphi(x_1, ..., x_p))), \phi^{-1}gf\varphi(x_1, ..., x_p)) = \\ &= (y_1, ..., y_s, x_{r+1}, ..., x_p) \end{aligned}$$

donde $y_i = g_i \circ f \circ \varphi$ para $i = 1, ..., s$.

(2) Si $a \in \partial X$, como $f|_{\partial X}$ es transversal a Z, la aplicación $h|_{\partial X}$ es sumersión, y entonces h tiene la forma local descrita en la proposición 1.6.7, es decir, existen parametrizaciones $\varphi : A \to U \subset X$ y $\phi : B_2 \to W_2 \subset \mathbb{R}^{q-s}$, B_2 abierto de $\mathbb{R}^{q-s}$ y $A = A^* \times B_2 \subset \mathbb{H}^p$ para cierto abierto A^* de $\mathbb{H}^r$ (con $r = p - (q - s)$), de manera que $a \in U$, $h(U) \subset W_2$ y la expresión local correspondiente tiene la forma

$$\varphi^{-1}h\varphi(x_1, ..., x_p) = (x_{r+1}, ..., x_p)$$

A partir de este punto el razonamiento es análogo al anterior.

□

Como consecuencia se obtiene que la imagen inversa transversal es una variedad con codimensión y espacios tangentes determinados.

Proposición 2.3.5. Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable y $Z \subset \mathrm{Int}(Y)$ una variedad sin borde. Si f y $f|_{\partial X}$ son transversales a Z, entonces:

(1) $f^{-1}(Z)$ es una variedad con borde $\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$.

(2) $T_x f^{-1}(Z) = (d_x f)^{-1}(T_{f(x)}Z)$ para cada $x \in f^{-1}(Z)$.

(3) $\operatorname{codim}_x(X, f^{-1}(Z)) = \operatorname{codim}_{f(x)}(Y, Z)$ para cada $x \in f^{-1}(Z)$.

Demostración. La condición (2) es ya conocida por ser f transversal a Z. Que sea una variedad es consecuencia directa de que f sea transversal a Z, por la construcción del principio de la sección.

Como se trata de una cuestión local, aplicando el teorema 2.3.4 y bajo las simplificaciones habituales, podemos suponer que X es un abierto de $\mathbb{H}^p$, Y uno de $\mathbb{R}^q$, $Z = Y \cap (\mathbb{R}^s \times \{0\})$ (a través de una parametrización adaptada) y $f(x_1, ..., x_p) = (y_1, ..., y_s, x_{r+1}, ..., x_p)$ con $p - r = q - s$. Entonces claramente $f^{-1}(Z) = X \cap (\mathbb{R}^r \times \{0\})$, lo que nos da de manera evidente los puntos (1) y (3) del enunciado. □

Observación 2.3.6. Consideremos la situación de la proposición anterior. Deducimos que entonces las parametrizaciones proporcionadas por el teorema 2.3.4 son adaptadas tanto en Z como en $f^{-1}(Z)$, lo cual es especialmente interesante para el último, puesto que entonces sabemos que el par $f^{-1}(Z) \subset X$ es localmente difeomorfo al par $\mathbb{H}^r \subset \mathbb{H}^p$, es decir, en un entorno de un punto de Z se puede dar una parametrización en X, definida en un abierto $A \subset \mathbb{H}^p$ de manera que restringiéndola a $A \cap (\mathbb{H}^r \times \{0\})$ sea una parametrización de Z en ese punto.

Proposición 2.3.7. Consideremos dos aplicaciones diferenciables $f : X \to Y$, $g : Y \to W$ y una variedad $V \subset W$. Supongamos que las variedades Y, W y V no tienen borde. Si g es transversal a V, entonces:

(1) $Z = g^{-1}(V) \subset Y$ es una variedad sin borde.

(2) $g \circ f$ es transversal a V si y solo si f es transversal a Z.

Demostración. La primera parte es consecuencia inmediata de la proposición anterior. Para ver el segundo apartado, denotemos $h = g \circ f$ y observemos que las derivadas en los puntos correspondiente bajo las hipótesis del enunciado inducen el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} T_xX/(d_xh)^{-1}(T_{h(x)}V) \arrow[rr, "{[h]}"] \arrow[dr, "{[f]}"'] & & T_{h(x)}W/T_{h(x)}V \\ & T_{f(x)}Y/(d_{f(x)}g)^{-1}(T_{h(x)}V) \arrow[ur, "{[g]}"'] & \end{tikzcd}$$

donde recordemos que por ser g transversal en V se tiene que $(d_{f(x)}g)^{-1}(T_{h(x)}V) = T_{f(x)}Z$ y además también por ser $[g]$ isomorfismo se tiene $(d_xh)^{-1}(T_{h(x)}V) = (d_xf)^{-1}(T_{f(x)}Z)$. Por el diagrama es claro que $[h]$ es isomorfismo si y solo si lo es $[f]$, y por tanto $h \pitchfork_x V$ si y solo si $f \pitchfork_x Z$, lo que concluye la demostración. □

La noción de transversalidad se puede introducir desde otros puntos de vista. En los siguientes apartados, con el objetivo de hacer una presentación simple, supondremos que las variedades no tienen borde, puesto que como hemos venido viendo el borde, si bien no añade dificultad conceptual a los planteamientos, hace necesarias unas construcciones más cuidadosas y la distinción de un mayor número de casos.

2.3.1. Transversalidad de variedades.

Sean X_1, X_2 dos variedades contenidas en una tercera variedad Y, decimos que son transversales en $x \in X_1 \cap X_2$ si se cumple $T_xY = T_xX_1 + T_xX_2$, es decir, si la inclusión $j : X_1 \subset Y$ es transversal a X_2 en x. Denotaremos $X_1 \pitchfork_x X_2$.

Teniendo en cuenta que en estas condiciones además $d_xj : T_xX_1 \to T_xY$ es también la inclusión entre sendos espacios, retomando el resultado 2.3.5, se tiene que $j^{-1}(X_2) = X_1 \cap X_2$ será una variedad si j es transversal a X_2 y además tendremos que:

$$T_x(X_1 \cap X_2) = (d_xj)^{-1}(T_xX_2) = T_xX_1 \cap T_xX_2$$

Y por otro lado, en cuanto a las codimensiones de los espacios considerados, teniendo en cuenta que $\operatorname{codim}_x(Y, X_1) + \operatorname{codim}_x(X_1, X_1 \cap X_2) = \operatorname{codim}_x(Y, X_1 \cap X_2)$ y que $\operatorname{codim}_x(X_1, X_1 \cap X_2) = \operatorname{codim}_x(Y, X_2)$, se tiene que:

$$\operatorname{codim}_x(Y, X_1 \cap X_2) = \operatorname{codim}_x(Y, X_1) + \operatorname{codim}_x(Y, X_2)$$

Por ejemplo, dos hipersuperficies que sean transversales en todos los puntos de su intersección se cortarán a lo largo de una hipersuperficie de ambas.

Recíprocamente, una aplicación $f : X \to Y$ es transversal a $Z \subset Y$ en $x \in f^{-1}(Z)$ si y solo si su grafo G_f lo es a $X \times Z$ en $(x, f(x))$ como variedades contenidas en $X \times Y$, como vamos a ver. Por definición, $G_f \pitchfork_x X \times Z$ si y solo si

$$T_{(x,f(x))}(X \times Y) = T_{(x,f(x))}(X \times Z) + T_{(x,f(x))}G_f$$

y tomando el cociente en ambos lados de la igualdad por $T_{(x,f(x))}(X \times Z)$ lo anterior equivale a

$$T_{(x,f(x))}(X \times Y)/T_{(x,f(x))}(X \times Z) = (T_{(x,f(x))}(X \times Z) + T_{(x,f(x))}G_f)/T_{(x,f(x))}(X \times Z)$$

lo que, teniendo en cuenta que $T_{(x,f(x))}G_f = G_{d_xf} = \{(u, d_xf(u) : u \in T_xX\}$ (1.5.12), es equivalente a:

$$T_{f(x)}Y/T_{f(x)}Z = (d_xf(T_xX) + T_{f(x)}Z)/T_{(f(x)}Z,$$

lo que equivale a

$$T_{f(x)}Y = d_xf(T_xX) + T_{f(x)}Z$$

y por tanto a que $f \pitchfork_x Z$.

Observación 2.3.8. La transversalidad de variedades depende del espacio ambiente en el que estén contenidas. Por ejemplo, dos rectas distintas siempre se cortan transversalmente en $\mathbb{R}^2$, puesto que $\mathbb{R}^2$ siempre se puede obtener a partir de dos vectores no colineales, pero no es así si el espacio ambiente es $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n > 2$.

2.3.2. Transversalidad de aplicaciones.

Si X_1, X_2 e Y son variedades, decimos que dos aplicaciones diferenciables $f_1 : X_1 \to Y$ y $f_2 : X_2 \to Y$ son transversales en un punto $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ tal que $f_1(x_1) = f_2(x_2) = y \in Y$ si se verifica

$$T_yY \times T_yY = d_{x_1}f_1(T_{x_1}X_1) \times d_{x_2}f_2(T_{x_2}X_2) + D$$

donde $D = \{(u,u) : u \in T_yY\}$ es la diagonal de $T_yY \times T_yY$. Equivalentemente diremos que f_1 y f_2 son transversales en $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ tal que $f_1(x_1) = f_2(x_2) = y \in Y$ si la aplicación lineal

$$d_{x_1}f_1 - d_{x_2}f_2 : T_{x_1}X \times T_{x_2}X_2 \to T_yY \tag{2.3.1}$$

es sobreyectiva.

Veamos que f_1 y f_2 son transversales en x si y solo si la aplicación $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y \times Y$ es transversal en x a la diagonal Δ de $Y \times Y$. Teniendo en cuenta que $d_{x_1}f_1(T_{x_1}X_1) \times d_{x_2}f_2(T_{x_2}X_2) = d_{(x_1,x_2)}(f_1 \times f_2)(T_{x_1}X_1 \times T_{x_2}X_2)$ y que claramente para cualquier punto de la diagonal Δ se tiene que $T_{(y,y)}\Delta = D$, se tiene que la definición dada es equivalente evidentemente a que $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y \times Y$ sea transversal en x a la diagonal Δ de $Y \times Y$.

También se tiene que un aplicación $f : X \to Y$ es transversal a una variedad $Z \subset Y$ en $x \in f^{-1}(Z)$ si y solo si f y la inclusión $j : Z \subset Y$ son transversales en $(x, f(x))$. Esto es evidente teniendo en cuenta la expresión 2.3.1. La aplicación lineal

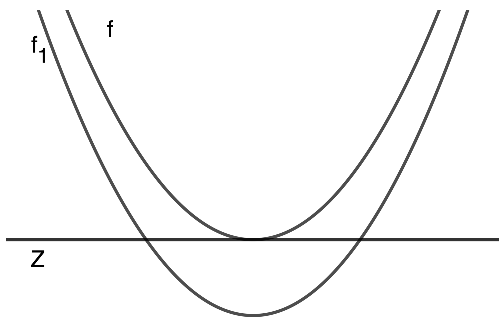
$$d_xf - d_{f(x)}j : T_xX \times T_{f(x)}Z \to T_{f(x)}Y$$

es sobreyectiva si y solo si

$$d_xf(T_xX) + d_{f(x)}j(T_{f(x)}Z) = d_xf(T_xX) + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}Y$$

lo que implica directamente el resultado.

Ejemplo 2.3.9. Una idea que se concretará un poco más adelante con el teorema de densidad de la transversalidad, es que si no hay transversalidad, esta aparece después de un perturbación suficientemente pequeña. Por ejemplo, la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (t, t^2)$ no es transversal a $Z = \{y = 0\}$ en $t = 0$ (puesto que ambas curvas tienen misma variedad tangente, no puedes obtener $\mathbb{R}^2$ a partir de la suma de ambas variedades), pero sí lo es $f_\varepsilon(t) = (t, t^2 - \varepsilon)$ en cualquier punto. De manera más global, f sí es transversal a cualquier traslación de Z que no sea paralela al eje de abscisas. (Situación de la figura 2.3.9)



2.4. Teorema de Sard-Brown.

A continuación vamos a introducir una serie de definiciones y enunciar algunos resultados relativos a aplicaciones propias, que se pueden encontrar en [4, pág 118-121]. Como siempre trabajamos con espacios localmente compactos y Hausdorff se han particularizado algunos resultados a este caso, que es el de nuestro interés.

Definición 2.4.1. Decimos que una aplicación entre espacios topológicos $f : X \to Y$ es *propia* si la contraimagen de cualquier subconjunto compacto de Y es un subconjunto compacto de X.

Definición 2.4.2. Sea X un espacio topológico, decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge hacia infinito* si para todo conjunto compacto $K \subset X$ hay como mucho una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ de manera que $x_n \in K$.

Proposición 2.4.3. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación propia. Entonces f envía cualquier sucesión que diverja hacia infinito en X a una sucesión que diverge hacia infinito en Y.

Proposición 2.4.4. Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces:

(a) Si X es compacto e Y es Hausdorff entonces f es propia.

(b) Si X es dos-numerable y Hausdorff y f envía sucesiones que divergen a infinito en X a sucesiones que divergen a infinito en Y, entonces f es propia.

(c) Si f es cerrada y tiene fibras compactas entonces es propia.

(d) Si Y es Hausdorff y f tiene una inversa continua por la izquierda, entonces f es propia.

Proposición 2.4.5. Sea X un espacio topológico e Y otro que sea localmente compacto y Hausdorff. Entonces si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y propia también es cerrada.

Corolario 2.4.6. Sea f una aplicación continua y propia de un espacio topológico en un espacio localmente compacto y Hausdorff. Entonces si f es biyectiva, es un homeomorfismo.

Para hacer rigurosa la idea de que la transversalidad es la condición más frecuente y que podemos reducirnos a ella necesitamos el *teorema de Sard-Brown*. Para formularlo introducimos la siguiente definición:

Definición 2.4.7. Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable. Un valor regular de f es un punto $y \in Y$ tal que f es sumersión en toda la fibra $f^{-1}(y)$. Convenimos que esto se verifica trivialmente si $y \notin f(X)$. El conjunto de valores regulares de f se denota $VR(f)$. Un punto $y \in Y$ se llama *valor crítico* cuando $y \notin VR(f)$.

Observación 2.4.8. (1) Que un punto $y \in Y$ sea valor crítico implica que existe $x \in f^{-1}(y)$ de manera que $d_x f : T_x X \to T_y Y$ no es sobreyectiva. Tal x se llama *punto crítico de f*.

(2) Si $\dim_x X < \dim_{f(x)} Y$ claramente x es un punto crítico y $f(x)$ un valor crítico.

(3) El conjunto $C(f) \subset X$ de puntos críticos es cerrado en X, puesto que es complementario al conjunto de puntos donde f es sumersión, que sabemos que es un abierto de X. Además $VR(f) = Y \setminus f(C(f))$.

(4) En entornos adecuados de un valor regular una aplicación propia se comporta como un recubrimiento ramificado. Más concretamente, si $f : X \to Y$ es diferenciable, propia y conserva el borde, con X de dimensión pura, e $y \in VR(f)$ es tal que $\dim X = \dim_y Y$, entonces $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_k\}$ y existen entornos V de y en Y, $U_1, ..., U_k$ de $x_1, ..., x_k$ en X, de modo que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $i \neq j$, $f^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ y cada restricción $f|_{U_i} : U_i \to V$ es un difeomorfismo.
En efecto, como f conserva el borde y es sumersión en $f^{-1}(y)$, entonces por el teorema 2.1.1 tenemos que $f^{-1}(y)$ es una variedad (que además es compacta por ser f propia) y que tiene dimensión 0, luego necesariamente se trata de un conjunto finito de puntos de X. Por el teorema de inversión local con borde 1.4.13, que podemos aplicar teniendo en cuenta que por ser f sumersión en $x_1, ..., x_k$ y tener $\dim X = \dim_y Y$ entonces $d_{x_i} f$ es un isomorfismo para $i = 1, ..., k$, se tiene que existen entornos abiertos disjuntos W_i de x_i en X y W de y en Y de manera que $f|_{W_i} : W_i \to W$ es un difeomorfismo, con $i = 1, ..., k$. Por ser f propia es en particular cerrada, y entonces podemos tomar

$$V = W(X \setminus W_1 \cup \cdots \cup W_k); \; U_i = W_i \cap f^{-1}(V)$$

y son abiertos cumpliendo lo pedido.

Definición 2.4.9. Un conjunto X se dice que es un *espacio de Baire* si se satisface la siguiente condición: dada cualquier familia numerable $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados de X, todos ellos con interior vacío, su unión $\bigcup_n A_n$ también tiene interior vacío.

Observación 2.4.10. Obviamente, X es un espacio de Baire si y solo si dada cualquier familia numerable $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos en X, cada uno de los cuales es denso en X, su intersección $\bigcap_n U_n$ es también un conjunto denso en X.

Teorema 2.4.11 (de Baire)**.** Si X es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto entonces X es un espacio de Baire.

Demostración. Supongamos $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ conjuntos abiertos densos en X y veamos que entonces $V = \bigcap_n V_n$ también es denso en X, y por tanto que X es de Baire.
Sea B_0 un conjunto abierto no vacío, arbitrario, de X, queremos ver que entonces $V \cap B_0 \neq \emptyset$ para así comprobar que V es denso. Entonces $B_0 \cap V_1 \neq \emptyset$ por ser V_1 denso. Por ser X localmente compacto y de Hausdorff, podemos elegir un abierto B_1 de manera que $\overline{B_1} \subset B_0 \cap V_1$ y $\overline{B_1}$ sea compacto. De manera recursiva se eligen abiertos B_n para todo $n \in \mathbb{N}$ de manera que $\overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap V_n$ y $\overline{B_n}$ compacto. Entonces tenemos una familia decreciente de conjuntos compactos $\{\overline{B_n}\}_{n \geq 1}$ ($\overline{B_n} \subset \overline{B_{n-1}}$). Consideremos

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$$

Entonces $K \neq \emptyset$ por compacidad. Y la construcción muestra que $K \subset B_0$ y $K \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $K \subset V \cap B_0$ y entonces V es denso y en conclusión X es de Baire. $\square$

Observación 2.4.12. Notemos que las variedades diferenciables con que estamos trabajando son por tanto de Baire.

Definición 2.4.13. Se dice que un conjunto A de X es *residual* cuando contiene una intersección numerable de abiertos densos en X.

Proposición 2.4.14. Si X es un espacio de Baire y A es un conjunto residual en X, entonces A es denso en X.

Demostración. Sean $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de abiertos densos en X tales que $V = \bigcap_n V_n \subset A$, que existe por ser A residual. Entonces por ser X de Baire se tiene que V, y en consecuencia A, es denso en X. $\square$

Teorema 2.4.15 (de Sard-Brown)**.** Sea $f : X \to Y$ una aplicación diferenciable. El conjunto de valores regulares de f es residual, por tanto denso, en Y.

Por ser $VR(f)$ el complementario del conjunto $f(C(f))$, donde $C(f)$ son los puntos críticos de f, el enunciado anterior equivale a decir que $f(C(f))$ está contenido en una unión numerable de conjuntos cerrados de interior vacío.

Veamos que el problema se puede reducir a una cuestión local tanto en X como en Y. Supongamos que para cada $x \in X$ existen entornos abiertos $U \subset X$ de x y $V \subset Y$ de $y = f(x)$ tales que $f(U) \subset V$ y $f(C(f) \cap U)$ está contenido en la unión numerable de ciertos cerrados F_k de interior vacío en V. Por ser V abierto de Y y ser $\mathrm{Int}_V(F_k) = \emptyset$, si tomamos F_k^* la adherencia de F_k en Y, se tiene que $\mathrm{Int}_Y(F_k^*) = \emptyset$. Si ahora tomamos un recubrimiento abierto numerable de X, que se puede tomar por ser X dos-numerable, por abiertos U_n, concluimos que $f(C(f))$ está contenido en la unión numerable de las uniones numerables (por tanto también numerable) de los cerrados de interior vacío $F_{k,n}^*$ correspondientes a U_n.
Entonces comprobar el resultado local en un punto arbitrario $x \in X$ implica el resultado general en X que buscamos.

Como ya es habitual, esta posibilidad de tratar el planteamiento de manera local nos permite simplificar el problema y suponer que $X = U \cap \mathbb{H}^p$ e $Y = V \cap \mathbb{H}^q$ donde U es abierto de $\mathbb{R}^p$ y V lo es de $\mathbb{R}^q$. Además, por ser f diferenciable también podemos suponer que tenemos una extensión $g : U \to \mathbb{R}^q$. Entonces $f(C(f)) \subset g(C(g)) \cap Y$, y el resultado para f se seguiría del resultado para g. Así, trabajando con una extensión g de f definida en un abierto de $\mathbb{R}^p$ (que no tiene borde), es como eludimos realizar consideraciones respecto al borde de X.

Después de las reducciones precedentes, la demostración pertenece en realidad a la teoría de la medida, pues demostraremos lo siguiente:

Proposición 2.4.16. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^p$ y $g : U \to \mathbb{R}^q$ una aplicación diferenciable. Entonces $g(C(g))$ tiene medida nula.

Recordemos que un conjunto de medida nula tiene interior vacío y que la unión numerable de conjuntos de medida nula tiene también medida nula. Ya sabemos que $C(g)$ es un subconjunto cerrado de U, luego por ser U localmente compacto y dos-numerable, se puede tomar $C(g)$ como unión numerable de compactos, y por tanto también $g(C(g))$ es unión numerable de compactos (la imagen de un compacto por una aplicación continua sigue siendo un compacto), cada uno de los cuales tendrá interior vacío por estar contenido en $g(C(g))$ que probaremos de medida nula.

Entonces, bajo los comentarios realizados, si demostramos la proposición 2.4.16 inmediatamente obtendremos el teorema 2.4.15.

Demostración de la proposición 2.4.16. Se razona por inducción sobre $p \geq 0$. Si $p = 0$ o $q = 0$ el resultado es evidente (los conjuntos unipuntuales son de medida nula). De modo que supondremos que $p, q \geq 1$ y cierto el resultado si la dimensión del espacio de salida es $< p$. Denotamos

$$C_i = \{x \in U : \text{todas las derivadas parciales de orden} \leq i \text{ de } g \text{ se anulan en } x\}$$

y tenemos así una sucesión de conjuntos cerrados

$$C(g) \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$$

Son cerrados puesto que si una derivada parcial es no nula en un punto también será no nula en un entorno abierto del mismo.

Demostraremos varias afirmaciones para llegar a la conclusión:

(a) El conjunto $g(C(g) \setminus C_1)$ tiene medida nula.

Observemos que $C(g) \setminus C_1$ es un abierto de $C(g)$. Veremos que cada $a \in C(g) \setminus C_1$ tiene un entorno V en U tal que $g(C(g) \cap V)$ tiene medida nula. Entonces por ser $C(g) \setminus C_1 \subset U \subset \mathbb{R}^p$ dos-numerable podremos recubrirlo por una cantidad numerable de esos entornos V y se seguirá que $g(C(g) \setminus C_1)$ tiene medida nula.

Fijamos entonces $a \in C(g) \setminus C_1$, y una derivada parcial de g que no se anula en a, que podemos suponer es $\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) \neq 0$. Entonces la aplicación diferenciable definida como $h(x) = (g_1(x), x_2, ..., x_p) : U \to \mathbb{R}^p$ es un difeomorfismo local en a por lo anterior. Entonces podríamos trabajar con $h(a)$ en lugar de con a y con $g \circ h^{-1}$ en lugar de con g. Es decir, no perdemos generalidad por suponer que $g_1(x) = x_1$ en un entorno V de a, con lo que g manda cada hiperplano $\{x_1 = t\}$ en sí mismo. Denotamos por f la restricción de g a $V \cap \{x_1 = t\}$. Entonces en cada punto $x = (t, x') \in V$ se tiene

$$Dg(x) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline * & Df(x') \end{array}\right)$$

de donde se deduce que si $Dg(x)$ no es suprayectiva, es decir, $x \in C(g)$, tampoco lo es $Df(x')$ y entonces $x' \in C(f)$. Como lo anterior será válido para cualquier valor de t, obtenemos que dado $x \in C(g) \cap V$, entonces $x' \in C(f)$. Así, para cada t tenemos

$$g(C(g) \cap V \cap \{x_1 = t\}) = g(C(g) \cap V) \cap \{x_1 = t\} \subset f(C(f))$$

y como por hipótesis de inducción en el espacio afín $\{x_1 = t\}$ de dimensión $p - 1$ tenemos que $f(C(f))$ es de medida nula, tenemos que $g(C(g) \cap V) \cap \{x_1 = t\}$ es de medida nula para todo $t \in \mathbb{R}$, y en virtud del teorema de Fubini, esto implica que $g(C(g) \cap V)$ es de medida nula, como queríamos comprobar.

Entonces $g(C(g) \setminus C_1)$ es de medida nula.

(b) Cada conjunto $g(C_i \setminus C_{i+1})$ tiene medida nula.

Haremos igual que antes y comprobaremos que para cada $a \in C_i \setminus C_{i+1}$ existe un entorno V de manera que $g(C_i \cap V)$ tiene medida nula.

Por definición existe una derivada parcial de orden i que denotaremos como w ($w = \frac{\partial g_l}{\partial x_1^{n_1} \cdots \partial x_p^{n_p}}$ con $\sum_k n_k = i$) que se anula en a pero tal que $\frac{\partial w}{\partial x_j}(a) \neq 0$ para cierto $j \in \{1, ..., p\}$. Supongamos que $j = 1$. Notemos que w es una aplicación de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}$. Entonces la aplicación diferenciable definida como $h(x) = (w(x), x_2, ..., x_p)$ es un difeomorfismo local en a puesto que

$$Dh(a) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial w}{\partial x_1}(a) \neq 0 & * \\ \hline 0 & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{p-1}} \end{array} \right).$$

Existe entonces un entorno V de $a = (a_1, ..., a_p)$ en $\mathbb{R}^p$ y W de $h(a) = (0, a_2, ..., a_p)$ en $\mathbb{R}^p$ de manera que $h|_V : V \to W$ es un difeomorfismo. Por definición de C_i se tiene que $w(x) = 0$ para todo $x \in C_i$, y en particular, tendremos que $h(C_i \cap V) \subset \{x_1 = 0\} \subset \mathbb{R}^p$. Entonces tendremos que $C_i \cap V \subset (h|_V)^{-1}(W \cap \{x_1 = 0\})$, luego podemos considerar $f = g \circ (h|_V)|_{W \cap \{x_1 = 0\}}$ que es una aplicación definida en un abierto de un espacio afín de dimensión $< p$ y que verifica que todos los puntos de $h(C_i \cap V)$ están en $C(f)$ (puesto que $C_i \cap V \subset C(g)$). Entonces tenemos que:

$$g(C_i \cap V) = f \circ h(C_i \cap V) \subset f(C(f))$$

y como por hipótesis de inducción tenemos que $f(C(f))$ es de medida nula, $g(C_i \cap V)$ también lo es y se sigue (b).

(c) Si $i > (p/q) - 1$, el conjunto $g(C_i)$ tiene medida nula.

Consideremos un cubo compacto $K \subset U$ de lado $\delta > 0$ y veamos que $f(C_i \cap K)$ tiene medida nula. Recubriendo C_i por una cantidad numerable de cubos como ese se obtiene el resultado.

Por la fórmula de Taylor y la definición de C_i obtendremos

$$g(y) = g(x) + R(x, y), \text{ donde } \|R(x, y)\| \leq c\|y - x\|^{i+1}$$

para $y \in K$, $x \in C_i \cap K$, y $c \in \mathbb{R}$ una constante adecuada que depende de g y del compacto K (sería una cota para lo que se obtendría al sacar factor común $\|y - x\|^{i+1}$ al resto de sumandos del desarrollo de Taylor). Ahora subdividimos el cubo en n^p cubos L de lado δ/n y diagonal $\sqrt{p}\delta/n$, y nos quedamos con los L que cortan a C_i. Para cada uno de ellos elegimos $x_0 \in L \cap C_i$, y a través de la fórmula de Taylor, para cada $y \in L$ se obtiene

$$\|g(x_0) - g(y)\| \leq \|R(x_0, y)\| \leq c\|x_0 - y\|^{i+1} \leq c \left(\frac{\sqrt{p}\delta}{n} \right)^{i+1}$$

puesto que $\frac{\sqrt{p}\delta}{n}$ es una cota para la distancia entre cualquier par de puntos de un cubo L. Denotemos $\rho = c \left(\frac{\sqrt{p}\delta}{n} \right)^{i+1}$.

En virtud de lo anterior se tiene que $g(L)$ está contenido necesariamente en un cubo de centro $g(x_0)$ y lado 2ρ. En consecuencia, $g(C_i \cap K)$ estará contenido en la unión de a lo sumo n^p cubos de lado 2ρ. Entonces el volumen total de $g(C_i \cap K)$ estará acotado por

$$n^p \cdot (2\rho)^q = \left(2c(\sqrt{p}\delta)^{i+1}\right)^q \cdot n^{p-q(i+1)} = \tilde{c} \cdot n^{p-q(i+1)}$$

donde $p - q(i+1) < p - q((p/q) - 1 + 1) = 0$, por lo que $\lim_{n\to\infty} \tilde{c} \cdot n^{p-q(i+1)} = 0$. Entonces tomando n suficientemente grande podemos encontrar una cota del volumen de $g(C_i \cap K)$ tan pequeña como queramos, por lo que se concluye que $g(C_i \cap K)$ es de medida nula y por tanto se tiene (c).

Entonces por (c) podemos claramente elegir un $k \in \mathbb{N}$ de manera que $g(C_k)$ sea de medida nula. Teniendo en cuenta la cadena de contenciones que relaciona $C(g)$ y los C_i se obtiene la siguiente igualdad:

$$C(g) = (C(g) \setminus C_1) \cup (C_1 \setminus C_2) \cup \cdots \cup (C_{k-1} \setminus C_k) \cup C_k$$

y por tanto:

$$g(C(g)) = g(C(g) \setminus C_1) \cup g(C_1 \setminus C_2) \cup \cdots \cup g(C_{k-1} \setminus C_k) \cup g(C_k),$$

por lo que hemos expresado $g(C(g))$ como una unión finita de conjuntos que son de medida nula, y por tanto $g(C(g))$ es de medida nula como queríamos demostrar. □

2.5. Densidad de la transversalidad.

Teorema 2.5.1 (parametrizado de densidad de la transversalidad)**.** Sean B, X e Y variedades diferenciables, B sin borde, y $Z \subset \mathrm{Int}(Y)$ otra variedad diferenciable sin borde, todas de dimensión pura. Sea $F : B \times X \to Y$ una aplicación diferenciable tal que F y $F|_{B\times\partial X}$ son transversales a Z. Denotamos por B_Z al conjunto de los puntos $a \in B$ tales que la aplicación parcial $F_a : X \to Y$ y su restricción $F_a|_{\partial X}$ son transversales a Z. Entonces B_Z es residual, y por tanto denso, en B.

Demostración. Bajo las hipótesis del enunciado es conocido que $B \times X$ es una variedad diferenciable con borde $\partial(B \times X) = B \times \partial X$.

Ahora bien, si $F^{-1}(Z) = \emptyset$, entonces claramente $F_a^{-1}(Z) = \emptyset$ y $(F_a|_{\partial X})^{-1}(Z) = \emptyset$ para todo $a \in B$, y por tanto F_a y $F_a|_{\partial X}$ son transversales a Z para todo $a \in B$, luego $B_Z = B$ y habríamos terminado.

En otro caso, por las hipótesis y en virtud de la proposición 2.3.5, $N = F^{-1}(Z) \subset B\times X$ es una variedad diferenciable con borde $\partial N = N \cap (B \times \partial X)$. Consideremos la aplicación diferenciable $\pi : N \to B$ dada por $\pi(a, x) = a$. Entonces por el teorema de Sard-Brown 2.4.15 es conocido que $VR(\pi)$ de valores regulares de π es residual y por tanto denso en B. Por el mismo motivo tendríamos que $VR(\pi|_{\partial N})$ es residual en B.

Se trata ahora de demostrar que dado $a \in VR(\pi)$, entonces F_a es transversal a Z, y también que dado $a \in VR(\pi|_{\partial N})$ se tiene que $F_a|_{\partial X}$ es transversal a Z.
Sea $a \in VR(\pi)$ y veamos que $f = F_a$ es transversal a Z en un punto $x \in f^{-1}(Z)$.

Denotemos $z = F_a(x) = F(a,x) \in Z$ y sea $g : B \to Y$ la aplicación parcial de F correspondiente a fijar la variable x ($g(b) = F(x,b)$). Es conocido entonces que

$$\begin{aligned} d_{(a,x)}F : T_aB \times T_xX &\to T_zY \\ (\alpha,\beta) &\mapsto d_ag(\alpha) + d_xf(\beta). \end{aligned}$$

Y por ser $F \pitchfork Z$ tenemos:

$$T_zY = T_zZ + d_{(a,x)}F(T_{(a,x)}(B \times X)) = T_zZ + d_ag(T_aB) + d_xf(T_xX)$$

Para ver que f es transversal a Z en x queremos comprobar que se tiene la siguiente igualdad:

$$T_zY = T_zZ + d_xf(T_xX)$$

Se trata pues de estudiar el término $d_ag(T_aB)$. Sea $w \in T_aB$. Por ser a un valor regular de π y como $(a,x) \in N$, entonces $d_{(a,x)}\pi : T_{(a,x)}N \to T_aB$ es sobreyectiva. Entonces existe $(\alpha,\beta) \in T_{(a,x)}N \subset T_aB \times T_xX$ tal que $w = d_{(a,x)}\pi(\alpha,\beta)$. Por ser π lineal, $d_{(a,x)}(\pi) = \pi$, luego $w = \alpha$. Ahora bien, por la proposición 2.3.5 sabemos que en estas circunstancias $T_{(a,x)}N = (d_{(a,x)}F)^{-1}(T_zZ)$ y entonces tenemos que

$$d_{(a,x)}F(w,\beta) = d_ag(w) + d_xf(\beta) \in T_zZ \Rightarrow d_ag(w) \in T_zZ + d_xf(T_xX)\ \forall\, w$$

y por tanto $T_zY = T_zZ + d_ag(T_aB) + d_xf(T_xX) = T_zZ + d_xf(T_xX)$, luego $f = F_a$ es transversal en x a Z para $x \in f^{-1}(Z)$ arbitrario, y por tanto F_a es transversal a Z para cualquier $a \in VR(\pi)$.

Sea ahora $a \in VR(\pi|_{\partial N})$ y veamos que $f = F_a|_{\partial X}$ es transversal a Z en todo punto $x \in f^{-1}(Z) \subset N$ con $x \in \partial X$. Denotemos $z = F_a|_{\partial X}(x) = F|_{\partial X}(a,x) = F(a,x) \in Z$ y $g : B \to Y$ la aplicación parcial de $F|_{B\times\partial X}$ correspondiente a fijar la variable x. Es conocido entonces que

$$\begin{aligned} d_{(a,x)}F|_{B\times\partial X} : T_aB \times T_x\partial X &\to T_zY \\ (\alpha,\beta) &\mapsto d_ag(\alpha) + d_xf(\beta) \end{aligned}$$

Y por ser $F|_{B\times\partial X} \pitchfork Z$ tenemos:

$$T_zY = T_zZ + d_{(a,x)}F|_{B\times\partial X}(T_{(a,x)}(B \times \partial X)) = T_zZ + d_ag(T_aB) + d_xf(T_x\partial X)$$

Sea entonces $w \in T_aB$. Por ser a un valor regular de $\pi|_{\partial N}$ y como $(a,x) \in \partial N = N \cap (B \times \partial X)$, esto implica que $d_{(a,x)}\pi|_{\partial N} : T_{(a,x)}\partial N \to T_aB$ es sobreyectiva. Entonces existe $(\alpha,\beta) \in T_{(a,x)}\partial N \subset T_aB \times T_x\partial X$ de manera que $d_{(a,x)}\pi|_{\partial N}(\alpha,\beta) = w$. De nuevo por ser π la proyección sobre las primeras coordenadas se tiene que necesariamente $\alpha = w$. Ahora bien, es conocido que en estas circunstancias $T_{(a,x)}\partial N = (d_{(a,x)}F|_{B\times\partial X})^{-1}(T_zZ)$ y entonces tenemos que

$$d_{(a,x)}F|_{B\times\partial X}(w,\beta) = d_ag(w) + d_xf(\beta) \in T_zZ \Rightarrow d_ag(w) \in T_zZ + d_xf(T_x\partial X)$$

luego se tiene que $T_zY = T_zZ + d_ag(T_aB) + d_xf(T_x\partial X) = T_zZ + d_xf(T_x\partial X)$, y $f = F_a|_{\partial X}$ es transversal en x a Z para $x \in f^{-1}(Z)$ arbitrario, por tanto $F_a|_{\partial X}$ es transversal a Z. El resultado entonces se tiene para cualquier $a \in VR(\pi|_{\partial N})$.

Ahora bien, claramente por lo anterior tendremos que $VR(\pi) \cap VR(\pi|_{\partial N}) \subset B_Z$, y por ser ambos conjuntos de la parte de la izquierda residuales en B, necesariamente B_Z lo es también. $\square$

Ejemplo 2.5.2. Sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable, y sea $Z \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable sin borde. Consideramos la aplicación $F : \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(a, x) = a + f(x)$, entonces F cumple las condiciones del teorema anterior (en realidad es más que transversal, F es sumersión); y por tanto el conjunto de puntos de $a \in \mathbb{R}^n$ tales que F_a es transversal a Z es denso en $\mathbb{R}^n$. Notemos que F_a es la *traslación* $x \mapsto a + f(x)$.

En partircular, si se toma $f = \mathrm{Id}_X$, se obtiene que casi cualquier traslación $a + X$ es transversal a Z, lo que se conoce como el *lema de posición general*.

2.6. Teorema de inmersión de Whitney.

Con el enfoque dado en este trabajo las variedades ya están sumergidas dentro de un espacio afín. Sin embargo, es interesante poder sumergirlas con la menor codimensión posible, es decir, encontrar el espacio afín más *pequeño* en el que podamos sumergir la variedad. Éste es el objetivo del teorema que ocupa la sección.

El resultado que damos nosotros habla de que exista una inmersión difeomórfica. En este contexto no se puede mejorar la cota, sin embargo, si relajamos la exigencia a la existencia de una inmersión se puede probar que la cota óptima es $2p$, en vez de $2p + 1$. Esta argumentación se puede encontrar en [7, Pág 26-27].

Teorema 2.6.1. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable de dimensión pura p. Existe una inmersión difeomórfica cerrada $f : X \to \mathbb{R}^{2p+1}$.

Demostración. Supongamos primero que $m > 2p + 1$. Consideramos para cada $u = (u_1, ..., u_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, donde $\mathbb{S}^{m-1} = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\| = 1\}$, con $u_m \neq 0, \pm 1$, la proyección paralela siguiente

$$\gamma_u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \text{ dada por } \gamma_u(x) = x + \lambda u,\ \lambda = -x_m/u_m.$$

Identificamos $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ con $\mathbb{R}^{m-1}$. La restricción $g_u = \gamma_u|_X : X \to \mathbb{R}^{m-1}$ es una aplicación diferenciable. Afirmamos:

(1) El conjunto de los u tales que g_u es inyectiva es residual en $\mathbb{S}^{m-1}$.

Consideramos la aplicación

$$\alpha : X \times X \setminus \Delta \to \mathbb{S}^{m-1} \text{ dada por } \alpha(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}$$

donde Δ es la diagonal de $X \times X$. Como γ_u proyecta de manera paralela a u, dos puntos tendrán su misma imagen a través de γ_u cuando el vector que los una sea paralelo a u. Teniendo en cuenta esto, queda claro que las aplicaciones g_u no serán inyectivas precisamente cuando el vector u esté en la imagen de α. Ahora bien, la imagen de α claramente se puede descomponer como sigue

$$\mathrm{Im}\alpha = \alpha(X \times \partial X \setminus \Delta) \cup \alpha(X \times \mathrm{Int}(X) \setminus \Delta)$$

en donde es conocido que $X \times \partial X \setminus \Delta$ y $X \times \mathrm{Int}(X) \setminus \Delta$ son variedades, lo que permite aplicar Sard-Brown. Además $\dim(X \times \partial X) = 2p - 1 < m - 1$ y $\dim(X \times \mathrm{Int}(X)) = 2p < m - 1$, por lo que ningún elemento de la imagen de α puede ser un valor regular ($\dim \mathbb{S}^{m-1} = m-1$). Entonces llegaríamos, aplicando el teorema de Sard-Brown 2.4.15, a que los conjuntos de valores regulares de las restricciones de α son residuales y por tanto también lo es su intersección. Llegamos a que el siguiente conjunto es residual

$$\big(\mathbb{S}^{m-1} \setminus \mathrm{Im}(\alpha|_{X\times\partial X\setminus\Delta})\big) \cap \big(\mathbb{S}^{m-1} \setminus \mathrm{Im}(\alpha|_{X\times\mathrm{Int}(X)\setminus\Delta})\big) = \mathbb{S}^{m-1} \setminus \mathrm{Im}(\alpha).$$

Quitándole al anterior conjunto las intersecciones con los hiperplanos de $\mathbb{R}^m$ dados por $u_m = 0, \pm 1$, se sigue que este último conjunto sigue siendo residual y además coincide con los u tales que g_u es inyectiva.

A continuación construimos el denominado *fibrado tangente unitario*

$$\mathbb{S}X = \{(x,u) \in TX : \|u\| = 1\} = \{(x,u) \in X \times \mathbb{R}^m : u \in T_xX,\ \|u\| = 1\}.$$

Queremos comprobar que $\mathbb{S}X$ es una variedad, para ello consideramos la aplicación

$$\mathcal{Q} : TX \to \mathbb{R} \text{ dada por } \mathcal{Q}(x,u) = \|u\|^2.$$

En esta situación $\mathcal{Q}^{-1}(1) = \mathbb{S}X$, y para ver que $\mathbb{S}X$ es una variedad basta con ver que tanto $\mathcal{Q}$ como $\mathcal{Q}|_{\partial TX}$ son una sumersión en cada punto $(x,u) \in \mathbb{S}X$. Consideramos la aplicación

$$\sigma : (0,2) \to TX \text{ dada por } \sigma(t) = (x, \sqrt{t}u)$$

definida en relación a un punto $(x,u) \in \mathbb{S}X$. Está claro que en estas circunstancias $\mathcal{Q}\circ\sigma = \mathrm{Id}_{(0,2)}$ y por tanto σ es una inversa por la derecha de $\mathcal{Q}$, lo que implica directamente que la derivada de $\mathcal{Q}$ en el punto $(x,u) \in \mathbb{S}X$ admite una inversa por la derecha y por tanto necesariamente es sobreyectiva, es decir, $\mathcal{Q}$ es sumersión en todos los puntos de $\mathbb{S}X$. El mismo argumento vale para probar que $\mathcal{Q}|_{\partial TX}$ es sumersión en todo punto de $\mathbb{S}X \cap \partial TX$, puesto que si $x \in \partial X$, σ toma valores en ∂TX. Como $\{1\} \subset \mathbb{R}$ es una variedad de codimensión 1, se tiene por la proposición 2.1.4 que $\mathbb{S}X$ es una hipersuperficie de TX y su dimensión es $2p-1 < m-1$.

La proyección $\gamma_u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ es inyectiva en un subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^m$ si y solo si $u \notin W$. Por tanto, puesto que d_xg_u es la restricción de γ_u al subespacio T_xX, no será inyectiva cuando $u \in T_xX$, y esto para todo $x \in X$. Es decir, g_u es inmersión, es decir, d_xg_u es inyectiva para todo $x \in X$, si y solo si $u \notin T_xX$ para todo $x \in X$, luego no será inmersión si existe algún $x \in X$ tal que $u \in T_xX$.

En efecto, $g_u(x_1,...,x_m) = (x_1 - \frac{x_m}{u_m}u_1, x_2 - \frac{x_m}{u_m}u_2, ..., x_{m-1} - \frac{x_m}{u_m}u_{m-1})$, y γ_u es una extensión diferenciable de g_u dada por la misma expresión, cuya derivada $D\gamma_u(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-1}$ tiene matriz jacobiana

$$D\gamma_u(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{u_1}{u_m} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{u_2}{u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{u_{m-1}}{u_m} \end{pmatrix},$$

es decir, $D\gamma_u(x)(y) = \gamma_u(y)$ para cualquier $y \in \mathbb{R}^m$ y por tanto $d_xg_u(y) = g_u(y)$ para cualquier $y \in T_xX$, de donde queda claro que $d_xg_u = \gamma_u|_{T_xX}$.

Definimos ahora la aplicación diferenciable

$$\beta : \mathbb{S}X \to \mathbb{S}^{m-1} \text{ dada por } \beta(x,u) = u$$

cuya imagen son precisamente los elementos de $\mathbb{S}^{m-1}$ que están en T_xX para algún $x \in X$. Entonces de lo anterior se sigue que g_u no será inmersión si y solo si $u \in \mathrm{Im}\beta$.

Ahora bien, como $\dim \mathbb{S}X = 2p-1 < m-1 = \dim \mathbb{S}^{m-1}$, tenemos que β no puede ser sumersión en ningún punto, y por el teorema de Sard-Brown, necesariamente $VR(\beta) = \mathbb{S}^{m-1} \setminus \mathrm{Im}\beta$ es residual en $\mathbb{S}^{m-1}$, de donde se deduce:

(2) El conjunto de los u tales que g_u es inmersión es residual en $\mathbb{S}^{m-1}$.

Juntando (1) y (2) queda claro que existen inmersiones inyectivas $g : X \to \mathbb{R}^{m-1}$. Si X fuera compacta, entonces por continuidad también lo sería $g(X)$ y bajo estás condiciones sería $g : X \to g(X)$ un homeomorfismo y en consecuencia g sería una inmersión cerrada (cerrada por compacidad). En este caso la demostración terminaría aquí, puesto que si $m-1 > 2p+1$ podemos simplemente iterar el razonamiento.

Tratemos ahora el caso en que X no es compacta. Primero construiremos una aplicación propia y diferenciable. Es conocido, por la construcción en la demostración del teorema 1.3.7, que podemos tomar un recubrimiento abierto numerable $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de X de manera que $\overline{U_k}$ es compacto para todo k. Tomamos entonces una partición diferenciable de la unidad $\{\theta_k\}$ subordinada a $\{U_k\}$, y definimos $\theta = \sum_k k\theta_k$.

Entonces si $x \notin \overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_k}$

$$\theta(x) = \sum_{l>k} l\theta_l(x) > k \sum_{l>k} \theta_l(x) = k$$

donde la última igualdad es consecuencia de que las θ_l sean una partición de la unidad. Entonces si tomamos una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X que diverja a ∞, podremos asegurar que a partir de un $n_0 \in \mathbb{N}$ todos los x_n estarán fuera de la unión $\overline{U_1}\cup\cdots\cup\overline{U_k}$ (que es un conjunto compacto para cualquier k, y por tanto cerrado y acotado), de manera que $\theta(x_n) > k$. Como esto se puede hacer para cualquier $k \in \mathbb{N}$, tenemos por tanto que la sucesión $\{\theta(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ y por tanto θ es propia.

Además consideramos la *contracción radial*

$$r : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^{m-1} \text{ dada por } r(x) = \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$$

cuya imagen es la bola abierta de radio 1 en $\mathbb{R}^{m-1}$, y consideramos la inmersión inyectiva $g : X \to \mathbb{R}^{m-1}$ ya construida para definir

$$f : X \to \mathbb{R}^m : x \mapsto (r \circ g(x), \theta(x)).$$

Por ser g una inmersión inyectiva y ser r un difeomorfismo está claro que $r \circ g$ sigue siendo una inmersión inyectiva de X en $\mathbb{R}^{m-1}$, lo que implica que f es inmersión inyectiva (puesto que añadir la componente $\theta(x)$ no estropea el rango de la matriz asociada a la derivada) y el hecho de θ sea propia hace directamente que f sea propia (se comprueba inmediatamente que como θ cumple la condición (b) de 2.4.4 entonces también la cumple f).

Entonces $f : X \to f(X) = Y$ es una inmersión biyectiva y propia. Por ser propia, biyectiva y ser $Y \subset \mathbb{R}^m$ localmente compacto y Hausdorff, aplicando el corolario 2.4.6, tenemos que es un homeomorfismo, luego f es una inmersión difeomórfica cerrada, y entonces por el teorema 1.5.11 es un difeomorfismo y por tanto Y es una variedad de dimensión p. Por el mismo argumento podemos encontrar una inmersión inyectiva $h : Y \to \mathbb{R}^{m-1}$, donde h es la proyección paralela a un vector $v = (v', v_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$ con $v_m \neq 0, \pm 1$,. Entonces $h \circ f : X \to \mathbb{R}^{m-1}$ es una inmersión difeomórfica cerrada, lo que concluye la demostración.

Veamos esto último. En efecto, basta ver que $h \circ f : X \to \mathbb{R}^{m-1}$ es propia. Querríamos comprobar que para cualquier sucesión de puntos que diverja a infinito necesariamente la sucesión de imágenes también divergerá a infinito. Teniendo en cuenta que una sucesión diverge a infinito si y solo si no tiene ninguna subsucesión convergente, razonemos por contrarrecíproco y consideremos una sucesión de puntos $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$, cuyas imágenes $h \circ f(x_k)$ convergen en $\mathbb{R}^{m-1}$. Teniendo en cuenta las definiciones involucradas, obtenemos

$$h \circ f(x_k) = r \circ g(x_k) - \frac{1}{v_m}\theta(x_k)v'$$

Como la sucesión $\{r \circ g(x_k)\}$ está contenida en la bola unidad de $\mathbb{R}^{m-1}$, que es acotada, podemos tomar una subsucesión que converja en ese espacio afín, y en consecuencia también convergerá la subsucesión correspondiente de los $\{\frac{1}{v_m}\theta(x_k)v'\}$, y por tanto también la subsucesión de $\{\theta(x_k)\}$. Como ya sabemos que θ es propia, el hecho de que la sucesión $\{\theta(x_k)\}$ tenga una subsucesión convergente, y por tanto no diverja a infinito, implica directamente que la sucesión de los x_k no diverge a infinito, es decir, tenga una subsucesión convergente. Con esto hemos comprobado que efectivamente $h \circ f$ es inmersión inyectiva propia, necesariamente cerrada por 2.4.5, por tanto un homeomorfismo sobre su imagen y en consecuencia una inmersión difeomórfica. □

A partir de este resultado se puede probar que si X es una variedad diferenciable abstracta, entonces X es difeomorfa a una variedad sumergida en un espacio afín, pero con este procedimiento la dimensión que se obtiene de dicho espacio es mucho más alta que el $2 \cdot \dim X + 1$ que da el teorema de Whitney 2.6.1. Se puede encontrar en [1, Pág 77-79].

Capítulo 3

Aproximación

En este capítulo haremos una recopilación de las construcciones y resultados que nos resultarán necesarios para el próximo capítulo que se dedicará a aplicaciones.

El objetivo de los resultados de este capítulo es darnos herramientas para reemplazar los datos de partida por otros *cercanos* de manera que sean diferenciables. Este reemplazo se formaliza por *aproximación*.

En la sección 3.1 se define la topología fuerte, para formalizar esta noción de cercanía. En la sección 3.2 se dan dos teoremas de aproximación para aplicaciones con llegada en un espacio o en una variedad respectivamente. Por último en la sección 3.3 se da un resultado de aproximación de aplicaciones mediante otras que sean homótopas a ellas, manteniendo la transversalidad. No se han incluido aquellas demostraciones que necesitarían de una proposición previa y que harían este trabajo excesivamente extenso.

3.1. Espacios de aplicaciones.

Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos de espacios afines. Denotamos como $\mathcal{C}(X, Y)$ al conjunto de aplicaciones continuas de X en Y.

Definición 3.1.1. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Para cada aplicación continua positiva $\epsilon : X \to \mathbb{R}$ denotamos:

$$B_\epsilon(f) = \{g \in \mathcal{C}(X, Y) : \|g - f\| < \epsilon\},$$

donde $\|g - f\| < \epsilon$ significa que $\|g(x) - f(x)\| < \epsilon(x)$ para todo $x \in X$. Todos estos $B_\epsilon(f)$ forman una base de entornos abiertos de f para una topología en $\mathcal{C}(X, Y)$.

Esta topología se denomina *topología fuerte*; la funciones ϵ se denominan *radios de aproximación*.

La existencia de tal topología se deduce de lo siguiente. En primer lugar, si ϵ_1, ϵ_2 son dos radios de aproximación, entonces claramente $B_{\epsilon_1}(f) \cap B_{\epsilon_2}(f) = B_\epsilon(f)$ donde $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Y si $g \in B_\epsilon(f)$, la aplicación

$$\delta = \epsilon - \|f - g\| : X \to \mathbb{R}$$

es continua y positiva, y claramente se cumple $B_\delta(g) \subset B_\epsilon(f)$.

Si X es compacto, entonces $\operatorname{Im} \epsilon$ tiene mínimo $\epsilon_0 > 0$, y

$$B_\epsilon(f) \supset B_{\epsilon_0}(f) = \{g \in \mathcal{C}(X,Y) : sup\|g - f\| < \epsilon_0\}.$$

Por tanto en este caso, la topología fuerte es la topología definida por la norma del supremo en $\mathcal{C}(X,Y)$.

3.2. Aproximación de aplicaciones.

Definición 3.2.1. Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$, se dice que A es *localmente cerrado* en X si todo elemento de A tiene un entorno V en X tal que $A \cap V$ es cerrado en V.

Proposición 3.2.2. Dado $X \subset \mathbb{R}^m$ localmente cerrado, entonces X es localmente compacto.

Teorema 3.2.3 (Aproximación de aplicaciones con rango en un espacio afín)**.** Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto localmente cerrado, y sea $C \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces, toda aplicación continua $f : X \to \mathbb{R}^n$ cuya restricción a un entorno de C es diferenciable puede aproximarse arbitrariamente en la topología fuerte por aplicaciones diferenciables que coinciden con f en un entorno de C.

En particular, el conjunto de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ de las funciones diferenciable de X en $\mathbb{R}^n$ es denso en $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$.

Demostración. Será f de la forma $f = (f_1, ..., f_n)$ donde las $f_i : X \to \mathbb{R}$ son también funciones continuas que verificarán que su restricción a un entorno de C es diferenciable. Dada cualquier otra aplicación continua $g = (g_1, ..., g_n) : X \to \mathbb{R}^n$ se tiene la acotacíon

$$\|f - g\| \leq \sqrt{n}\, \text{máx}\{|f_1 - g_1|, ..., |f_n - g_n|\}$$

que se deriva de una relación bien conocida entre las normas 2 y 1 en $\mathbb{R}^m$, de manera que para aproximar f basta aproximar cada una de sus componentes. En otras palabras, basta demostrar el resultado para funciones continuas de X en $\mathbb{R}$, así que a partir de ahora suponemos $n = 1$. Sea $\epsilon : X \to \mathbb{R}$ un radio de aproximación.

Por ser $X \subset \mathbb{R}^m$ y localmente cerrado, es localmente compacto, y cada punto $x \in X \setminus C$ tiene un entorno compacto $K_x \subset X \setminus C$ en el que ϵ alcanza extremos. En particular ϵ_{K_x} alcanza su mínimo, al que denotamos por ϵ_x, que es estrictamente positivo. En particular $\epsilon_x \leq \epsilon(x)$. Ahora bien, como $f : X \to \mathbb{R}$ es continua podemos tomar un entorno abierto $U_x \subset K_x \subset X \setminus C$ de x tal que

$$|f(z) - f(x)| < \epsilon_x \leq \epsilon(z) \text{ para todo } z \in U_x.$$

Sea V un entorno abierto de C en el que f es diferenciable (que existe por hipótesis), y sea $\{\theta, \theta_x\}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento formado por V y $\{U_x\}_{x \in X \setminus C}$ de X con mismo conjunto de índices. Definimos

$$h = f\theta + \sum_{x \in X \setminus C} f(x)\theta_x : X \to \mathbb{R},$$

donde notemos que el sumando $f\theta$ es nulo fuera de V, luego como f es diferenciable en V, y las θ y θ_x lo son en X, esto implica que h es una aplicación diferenciable en X, y se verifica

$$
\begin{aligned}
|h(z)-f(z)| &= \left|h(z)-\left(\theta(z)+\sum_{x\in X\setminus C}\theta_x(z)\right)f(z)\right| = \\
&= \left|f(z)\theta(z)+\sum_{x\in X\setminus C}f(x)\theta_x(z)-\left(\theta(z)+\sum_{x\in X\setminus C}\theta_x(z)\right)f(z)\right| = \\
&= \left|\sum_{x\in X\setminus C}\theta_x(z)(f(x)-f(z))\right| \leq \sum_{x\in X\setminus C}\theta_x(z)|f(x)-f(z)| <^* \\
&< \sum_{x\in X\setminus C}\theta_x(z)\epsilon(z) < \epsilon(z)
\end{aligned}
$$

es decir, $h\in B_\epsilon(f)$, donde la desigualdad * se debe a que si $z\notin U_x$ se tiene que $\theta_x(z)=0$.

Además,

$$\bigcup_{x\in X\setminus C}\overline{\{\theta_x\neq 0\}}\subset\bigcup_{x\in X\setminus C}U_x\subset X\setminus C,$$

y como la familia de soportes de los elementos de la partición de la unidad es localmente finita, se tiene que

$$D=\bigcup_{x\in X\setminus C}\overline{\{\theta_x\neq 0\}}$$

es cerrado en X, con lo que $X\setminus D$ es un entorno abierto de C en el que todas las θ_x se anulan, luego en el que $\theta=1$ y $h=f$, con lo que concluye la prueba. □

Una consecuencia del teorema anterior es que para definir la topología fuerte basta considerar radios de aproximación diferenciables, como vemos en la siguiente proposición:

Proposición 3.2.4. Sea $X\subset\mathbb{R}^m$ un conjunto localmente cerrado y sea $\epsilon : X\to\mathbb{R}$ una función continua positiva. Entonces existe una función diferenciable positiva $\eta : X\to\mathbb{R}$ tal que $0<\eta<\epsilon$.

Demostración. Aplicando el teorema a la función $\frac{1}{2}\epsilon$ con radio de aproximación $\frac{1}{2}\epsilon$ y a $C=\emptyset$, obtenemos una función diferenciable $\eta : X\to\mathbb{R}$ tal que

$$\left|\frac{1}{2}\epsilon(x)-\eta(x)\right|<\frac{1}{2}\epsilon(x)\ \text{ para }\ x\in X,$$

y en consecuencia $0<\eta<\epsilon$. □

El teorema anterior se puede extender a funciones con rango en una variedad con borde. Para demostrar dicho resultado se requiere de construcciones que no se incluyen en el texto. La demostración del resultado siguiente se puede encontrar en [1, pág. 102-103].

Teorema 3.2.5 (Aproximación de aplicaciones con rango en una variedad con o sin borde)**.** Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto localmente cerrado e $Y \subset \mathbb{R}^n$ una variedad, posiblemente con borde. Sea $C \subset X$ un subconjunto cerrado. Toda aplicación continua $f : X \to Y$ cuya restricción a un entorno de C es diferenciable puede aproximarse arbitrariamente en la topología fuerte por aplicaciones diferenciables que coinciden con f en un entorno de C.

En particular, el conjunto $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ de la funciones diferenciables de X en Y es denso en $\mathcal{C}(X, Y)$.

3.3. Aproximación y transversalidad.

Para aproximar funciones continuas con condiciones de transversalidad, la transversalidad hay que conseguirla de manera explícita. Esta sección tiene como objetivo demostrar el teorema de aproximación transversal, para cuya demostración necesitaremos valernos del siguiente lema, cuya prueba requiere de construcciones que se escapan del alcance del trabajo.

Lema 3.3.1 (de deformación transversal)**.** Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto localmente cerrado, $Y \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable sin borde y $\gamma : X \to [0, 1]$ una función diferenciable. Sea $f : X \to Y$ una aplicación (*resp. una aplicación propia*) diferenciable. Existe una aplicación diferenciable $F : B \times X \to Y$, donde $B \subset \mathbb{R}^n$ es la bola abierta de centro el origen y radio 1, tal que:

(1) $F(0, x) = f(x)$ para cada $x \in X$.

(2) Las aplicaciones parciales $F_a : X \to Y$, $a \in B$, están arbitrariamente próximas a f para la topología fuerte.

(3) Todas las F_a son homótopas (*resp. propiamente homótopas*) a f por una homotopía (*resp. homotopía propia*) diferenciable.

(4) Si $x \in X$ es tal que $\gamma(x) \neq 0$, la aplicación parcial $F_x : B \to Y$ es una sumersión.

(5) Si $x \in X$ es tal que $\gamma(x) = 0$, entonces se tiene que $F(a, x) = f(x)$ y

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a, x) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial x}(a, x) = d_x f \ \text{ para todo } \ a \in B.$$

En el enunciado anterior se introducen conceptos como homotopía propia o aplicaciones propiamente homótopas, que hacen referencia a situaciones en las que la homotopía entre dos aplicaciones es una aplicación propia.

Observación 3.3.2. Los resultados de aproximación como el 3.3.1 se dan de forma general, pero por conveniencia para la demostración del teorema principal de esta sección, es conveniente recuperar una construcción explícita de la familia de homotopías asociada a las funciones del punto (3) del enunciado. Con la notación del lema anterior, asumimos como cierto que la aplicación diferenciable definida como sigue

$$H_t(x) = F_{ta}(x) = \pi(f(x) + \gamma^2(x)\delta(x)ta)$$

donde $\pi : V \to Y$ es una retracción siendo V localmente cerrado, $Y \subset V$ (verifica que $\pi|_Y = \mathrm{Id}_Y$) y $\delta : X \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable positiva arbitrariamente pequeña, es una homotopía.

Teorema 3.3.3 (de aproximación transversal)**.** Sean X una variedad diferenciable, Y una variedad diferenciable sin borde, y $Z \subset Y$ otra variedad diferenciable sin borde, las tres variedades de dimensión pura. Sea C un subconjunto cerrado de X. Entonces, toda aplicación continua (*resp. propia*) $f : X \to Y$ diferenciable en un entorno de C en el que además f y $f|_{\partial X}$ son transversales a Z, se puede aproximar por aplicaciones diferenciables $g : X \to Y$ tales que:

(1) La aplicación g es homótopa (*resp.* propiamente homótopa) a f.

(2) La aplicación g coincide con f en un entorno de C en X.

(3) Las aplicaciones g y $g|_{\partial X}$ son transversales a Z.

Demostración. En primer lugar, por el teorema de aproximación de aplicaciones con rango en variedades con borde 3.2.5, podemos suponer que f es una aplicación diferenciable. Por hipótesis, existe un entorno abierto V de C en X tal que $f \pitchfork_V Z$ y $f|_{\partial X} \pitchfork_{V\cap\partial X} Z$. Ahora, podemos considerar un entorno U abierto de C tal que $\overline{U} \subset V$ y una función separante $\gamma : X \to [0,1]$ de manera que $\{\gamma = 0\} = \overline{U}$ y $\{\gamma = 1\} = X \setminus V$ (por 1.3.2).

Estamos ahora en condiciones de aplicar el lema 3.3.1 y obtenemos la colección de aplicaciones diferenciables

$$F_a : X \to Y : x \mapsto \pi(f(x) + \gamma^2(x)\delta(x)a),\ a \in B,$$

que aproximan y son homótopas (*resp. propiamente homótopas*) a f. Por construcción de γ, $F_a(x) = f(x)$ para todo $x \in U$. Veamos ahora que $F : B \times X \to Y$ dada por $F(a,x) = F_a(x)$ es transversal a Z. Sea $F(a,x) \in Z$.

- Si $\gamma(x) \neq 0$, directamente del lema 3.3.1[(4)] obtenemos que $F_x : B \to Y$ es sumersión, y por tanto F es transversal a Z en $F^{-1}(F(a,x)) \subset F^{-1}(Z)$.
- Supongamos ahora que $\gamma(x) = 0$. Entonces, por el lema se tiene que $\frac{\partial F}{\partial a}(a,x) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial x}(a,x) = d_x f$, y por tanto $\mathrm{Im}(d_{(a,x)}F) = \mathrm{Im}(d_x f) = E \subset T_{f(x)}Y$, pero como $\gamma(x) = 0$, entonces $x \in \overline{U} \subset V$, y se tiene que

  $$f \pitchfork_x Z \ \text{ y } \ f|_{\partial X} \pitchfork_x Z \,\text{para}\ x \in \partial X.$$

  De esto último y la igualdad entre las imágenes de las diferenciales expuesta antes, se deduce directamente definición de transversalidad que

  $$F \pitchfork_{(a,x)} Z \ \text{ y } \ F|_{B\times\partial X} \pitchfork_{(a,x)} Z \ \text{ para } (a,x) \in B \times \partial X.$$

En estas condiciones podemos aplicar el teorema 2.5.1 a la aplicación F, de manera que los a tales que la aplicación F_a cumple la condición (3) del enunciado son un conjunto residual, por tanto denso, en B. Luego las aplicaciones F_a cumplen la condición (3). La condición (1) es la condición (3) del lema 3.3.1 , y la condición (2) se deduce de la (5) de 3.3.1, pues $F_a = f$ en U. $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones

Este capítulo constituye la culminación del trabajo, demostrando teoremas importantes con las técnicas diferenciables desarrolladas previamente, haciendo aparecer a todos como resultados de una misma teoría subyacente, y no solo como los hallazgos geniales que fueron en su momento.

La sección 4.1 contiene la clasificación topológica y diferenciable de curvas, que, además de ser interesante por sí misma, constituye una parte de los argumentos que prueban el resto de teoremas. En la sección 4.2 se demuestra el teorema del punto fijo de Brouwer, que se usará para probar en la sección 4.3 el teorema de invarianza del dominio, resultado fundamental que implica la invarianza topológica de la dimensión y el borde. La sección 4.4 está dedicada al célebre teorema de separación de Jordan-Brouwer. Por último en la sección 4.5 se hace mención al hecho de que, bajo las herramientas de la topología diferencial, también se pueden demostrar otros resultados como el teorema de la esfera de Brouwer o el teorema de Borsuk-Ulam, a los que no se ha llegado en este trabajo.

4.1. Clasificación de curvas.

Proposición 4.1.1. Sea X una curva conexa. Si X es unión de dos abiertos U, V homeomorfos a $\mathbb{R}$, entonces X es homeomorfa a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{S}^1$.

Demostración. Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}$ y $\psi : V \to \mathbb{R}$ homeomorfismos. Si $U \subset V$ o $V \subset U$, el resultado es obvio. Por tanto, supondremos que $\varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}$ y $\psi(V \cap U) \subset \mathbb{R}$ son abiertos de $\mathbb{R}$ distintos del total. En consecuencia, se pueden tomar como unión disjunta de intervalos abiertos. Supongamos que alguno de esos intervalos es acotado: sea, por ejemplo, (a, b) una componente conexa de $\varphi(U \cap V)$, $a < b$. Por ser una componente conexa, tenemos que necesariamente $[a, b] \cap \varphi(U \cap V) = (a, b)$, y por tanto (a, b) es un cerrado de $\varphi(U \cap V)$. Además, $\varphi^{-1}(a, b) = \varphi^{-1}[a, b] \cap V$, que es un cerrado de V por ser φ un homeomorfismo, y un abierto de U y por tanto de X y de V. En consecuencia, como V es conexo por ser homeomorfo a $\mathbb{R}$, tenemos que $\varphi^{-1}(a, b)$ es abierto y cerrado en V y no vacío, y por tanto $V = \varphi^{-1}(a, b) \subset U$ en contra de la suposición hecha.

En consecuencia, $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ no tienen componentes acotadas. Notemos que $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son homeomorfos, puesto que ambos son homeomorfos a $U \cap V$ (que es un abierto de U y de V). Hay ahora dos posibilidades.

(1) *Los conjuntos $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son conexos.*

Como son conexos, abiertos y no acotados, reparametrizando si es necesario, podemos suponer que

$$\varphi(U \cap V) = (-\infty, a),\ a < 0,$$
$$\psi(U \cap V) = (b, +\infty),\ b > 0.$$

Teniendo en cuenta que la restricción de un homeomorfismo a un abierto sigue siendo un homeomorfismo de dicho abierto en su imagen, se tiene el siguiente diagrama conmutativo (donde no especificamos que cada aplicación sería la restricción adecuada por aligerar la notación):

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] & (b, +\infty) \\ (-\infty, a) \arrow[ur, "\alpha=\psi\circ\varphi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

donde α es un homeomorfismo estrictamente creciente, pues la otra opción es que sea decreciente, y entonces $\lim_{t\to a} \alpha(t) = b$ y se deduciría que $\varphi^{-1}(a) = \psi^{-1}(b) \in U \cap V$, lo que es imposible. Fijado un punto $x_0 \in U \cap V$, $\alpha(\varphi(x_0)) = \psi(x_0)$, y se verifica

$$X = \varphi^{-1}[\varphi(x_0), +\infty) \bigcup \psi^{-1}(-\infty, \psi(x_0)],$$

puesto que si $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ entonces $\psi(x) = \alpha\varphi(x) < \alpha\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, y análogamente

$$\{x_0\} = \varphi^{-1}[\varphi(x_0), +\infty) \bigcap \psi^{-1}(-\infty, \psi(x_0)].$$

Entonces la aplicación

$$h : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) \in [\varphi(x_0), +\infty) & \text{si} \quad x \in \varphi^{-1}[\varphi(x_0), +\infty), \\ \psi(x) + \varphi(x_0) - \psi(x_0) \in (-\infty, \varphi(x_0)] & \text{si} \quad x \in \psi^{-1}(-\infty, \psi(x_0)]. \end{cases}$$

está bien definida pues ambas definiciones coinciden en x_0, es continua por serlo las restricciones y es cerrada por serlo φ y ψ, luego es un homeomorfismo.

(2) *Los conjuntos $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ no son conexos.*

Teniendo en cuenta que no pueden tener componente conexas acotadas, el hecho de que no sean conexos implicará que tendrán únicamente dos componentes conexas, una acotada por la izquierda y otra por la derecha.

Reparametrizando como se hizo antes, podemos suponer que

$$\varphi(U \cap V) = (-\infty, a) \cup (b, +\infty),\ a < 0 < b,$$
$$\psi(U \cap V) = (-\infty, c) \cup (d, +\infty),\ c < 0 < d,$$

con la condición adicional de que $W_1 = \varphi^{-1}(-\infty, a) = \psi^{-1}(d, +\infty)$ (y entonces necesariamente $W_2 = \psi^{-1}(-\infty, c) = \varphi^{-1}(b, +\infty)$). Tenemos entonces dos esquemas análogos a los del caso (1),

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] & (d, +\infty) \\ (-\infty, a) \arrow[ur, "\alpha_1=\psi\circ\varphi^{-1}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W_2 \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] & (-\infty, c) \\ (b, +\infty) \arrow[ur, "\alpha_2=\psi\circ\varphi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

donde α_1 y α_2 son homeomorfismos estrictamente crecientes. Elegimos ahora un punto en cada componente conexa de $U \cap V$:

$$\begin{cases} x_1 \in \varphi^{-1}(-\infty, a) = \psi^{-1}(d, +\infty) \\ x_2 \in \psi^{-1}(-\infty, c) = \varphi^{-1}(b, +\infty) \end{cases}$$

y denotamos $I = \varphi^{-1}[\varphi(x_1), \varphi(x_2)]$ y $J = \psi^{-1}[\psi(x_2), \psi(x_1)]$, que son cerrados en X, y verfican

$$X = I \cup J,$$

puesto que si $\varphi(x) \notin [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]$, o bien $\varphi(x) > \varphi(x_2)$ o bien $\varphi(x) < \varphi(x_1)$. En el primer caso (el otro es análogo), se tiene que $\psi(x_1) > d > c > \alpha_2\varphi(x) = \psi(x) > \alpha_2\varphi(x_2) = \psi(x_2)$, y análogamente

$$\{x_1, x_2\} = I \cap J.$$

Consideremos la unión dsijunta de los segmentos $\varphi(I)$ y $\psi(J)$, $\varphi(I) \sqcup \psi(J)$, y una aplicación

$$q : \varphi(I) \sqcup \psi(J) \to X : y \mapsto \begin{cases} \varphi^{-1}(y) & \text{si} \quad y \in \varphi(I), \\ \psi^{-1}(y) & \text{si} \quad y \in \psi(J). \end{cases}$$

Esta aplicación es continua y sobreyectiva, de un compacto en X Hausdorff, luego es una aplicación cociente. Al pasar al cociente se obtiene el espacio $\mathcal{Q}$, homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ (es tomar la unión disjunta de los intervalos e identificar $\psi(x_1)$ con $\varphi(x_1)$ y $\psi(x_2)$ con $\varphi(x_2)$) y el homeomorfismo $q : Q \to X$, cuyo inverso es el homeomorfismo

$$h : X \to \mathcal{Q} : x \mapsto \begin{cases} [\varphi(x)] & \text{si} \quad x \in I, \\ [\psi(x)] & \text{si} \quad x \in J. \end{cases}$$

□

Observación 4.1.2. Sea X una curva diferenciable con borde. Por definición X es localmente difeomorfo a $\mathbb{H}^1 = [0, +\infty)$. En virtud de esto, dado un punto $x \in \partial X$, podemos tomar una parametrización $\varphi : I \to U$ donde U es un entorno abierto de x en X e $I = [0, a)$ para cierto $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ de manera que $\varphi(\partial I) = \varphi(\{0\}) = \{x\} = \partial U = U \cap \partial X$, por tanto ∂X es discreto.

El mismo razonamiento sirve tomando una curva topológica, es decir, exigiendo solo que sea localmente homeomorfa a un semiespacio de la recta.

Teorema 4.1.3 (de clasificación de curvas topológicas)**.** Una curva conexa es homeomorfa a uno de los siguiente cuatro modelos: $\mathbb{R}$, $[0, 1)$, $[0, 1]$, $\mathbb{S}^1$.

Demostración. Sea X una curva conexa. Vamos a considerar varios casos por separado.

(1) X **es compacta y no tiene borde.**

Gracias a que X es una variedad compacta podemos recubrirla mediante una cantidad finita de imágenes de parametrizaciones $\varphi_i : \mathbb{R} \to U_i$, $i \in \{1, ..., s\}$, definidas en $\mathbb{R}$ por ser X sin borde y ordenadas de manera que $U_{s-1} \cap U_s \neq \emptyset$, lo que es posible por ser X conexa. Por la proposición anterior, 4.1.1, tenemos que $U_{s-1} \cup U_s$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^1$. Si fuera a $\mathbb{R}$ considerar una parametrización

$\psi_{s-1} : \mathbb{R} \to V_{s-1} = U_{s-1} \cup U_s$. Renombramos $U_{s-1} = V_{s-1}$ y $\varphi_{s-1} = \psi_{s-1}$. De nuevo por ser X una curva compacta, conexa y sin borde podemos reordenar los índices $\{1, ..., s-1\}$ para que $U_{s-2} \cap U_{s-1} \neq \emptyset$ y podemos volver a aplicar 4.1.1. Reiterando este procedimiento, en algún momento tiene que ser $U_{i-1} \cup U_i$ homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, puesto que si no fuera así llegaríamos a que X es homeomorfo a $\mathbb{R}$, lo que es absurdo porque X es compacta y $\mathbb{R}$ no. En consecuencia $U_{i-1} \cup U_i$ es abierto, por ser unión de abiertos, y cerrado, por ser homeomorfo a un compacto, en X y por ser X conexo necesariamente en estas circunstancias tendremos que $X = U_{i-1} \cup U_i$, y por tanto X homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

(2) **X no es compacta y no tiene borde.**

Por ser X localmente compacta existe, por la construcción de la demostración de 1.3.7, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de compactos que recubre X y tal que $K_n \subset K_{n+1}$. Ahora, cada K_n se puede recubrir con abiertos $W_1, ..., W_r$ de X homeomorfos a $\mathbb{R}$ por ser X sin borde; y por ser X conexo, podemos añadir abiertos W para poder suponer que los $W_1, ..., W_r$ cumplen que $W_i \cap W_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1, ..., r-1$. Entonces siguiendo la línea de razonamiento del apartado anterior, de manera reiterativa a través de 4.1.1 llegaríamos, por ser X no compacto, a que $U_n = W_1 \cup \cdots \cup W_r$ es un abierto de X homeomorfo a $\mathbb{R}$. Haciendo esto para cada K_n obtenemos una colección de abiertos $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ todos ellos homeomorfos a $\mathbb{R}$. Además necesariamente por ser $K_n \subset U_n$ para cada n y la condición inicial de que $K_n \subset K_{n+1}$ para cada n, necesariamente tendremos que $U_n \cap U_{n+1} \neq \emptyset$. Por inducción entonces se puede probar que $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ dado. Ahora bien, reemplazando U_n por $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos un recubrimiento de X por abiertos $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que $U_n \subset U_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Vamos a construir de manera recursiva un homeomorfismo h de X sobre un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ mediante la definición de las restricciones de h a los abiertos U_n. Sea $\varphi_n : U_n \to \mathbb{R}$ homeomorfismo que existen por construcción. En primer lugar definimos

$$h_1 : \ U_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{R} \xrightarrow{\tau} I_1 \ = (-1, 1)$$

donde $\tau(t) = t/\sqrt{1+t^2}$ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}$ en I_1. Ahora, $\varphi_2(U_1) \subset \mathbb{R}$ será un intervalo (por ser conexo), tal vez infinito, (a, b), $a < b$, y consideramos la aplicación

$$\alpha_1 = \varphi_2 \circ h_1^{-1} : I_1 \to (a, b)$$

que es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos. Ahora bien, ya que α_1 debe ser o creciente o decreciente podemos suponer que es creciente (sino bastaría cambiar φ_2 por $-\varphi_2$), y observemos que también $h_1 = \alpha_1^{-1} \circ \varphi_2|_{U_1}$. Ahora extendemos α_1 a $\alpha_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ donde

$$I_2 = \begin{cases} (-2, 2) & \text{si} \quad a, b \in \mathbb{R}, \\ (-1, 2) & \text{si} \quad a = -\infty,\ b \in \mathbb{R}, \\ (-2, 1) & \text{si} \quad a \in \mathbb{R},\ b = +\infty, \\ (-1, 1) & \text{si} \quad a = -\infty,\ b = +\infty. \end{cases}$$

Por ejemplo, si $a \in \mathbb{R}$, existe $\lim_{t\to a} \alpha_1(t)$ y por lo tanto α_1 se puede extender a un homeomorfismo $\alpha_2 : I_2 \to \varphi_3(U_2)$ y definir el homeomorfismo

$$h_2 = \alpha_2^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 \to I_2$$

que extiende h_1, ya que como α_2 extiende α_1, se tiene $h_2|_{U_1} = \alpha_2^{-1} \circ \varphi_2|_{U_1} = \alpha^{-1} \circ \varphi_2|_{U_1} = h_1$. Reiterando el proceso con $\alpha_3 = \varphi_3 \circ h_2^{-1}$ obtenemos h_3, y así, de manera recursiva, vamos obteniendo h_n para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que se construye $h : X = \bigcup_n U_n \to I = \bigcup_n I_n$ y como $h(x) = h_n(x)$ si $x \in U_n$, se obtiene que I es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

(3) X **tiene exactamente un punto en el borde.**

Sea x_0 ese punto y denotemos $V = \operatorname{Int} X = X \setminus \{x_0\}$. A través del apartado anterior, por ser V una variedad conexa no compacta y sin borde, tenemos que es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Entonces podemos considerar un homeomorfismo $\psi : (-1,1) \to V$. Podemos tomar una parametrización de la forma $\varphi : [0,a) \to U$ con $\varphi(0) = x_0$ y U un abierto de X, y suponer que $\psi^{-1} \circ \varphi : (0,a) \to (-1,1)$ es creciente (si no lo fuera se reemplaza $\psi(t)$ por $\psi(-t)$) y entonces existe $\lim_{t\to 0} \psi^{-1} \circ \varphi(t) = s$. Pero $s > -1$ implicaría $x_0 = \lim_{t\to 0} \varphi(t) \in V$, luego $s = -1$ y ψ se extiende a un homeomorfismo $[-1,1) \to X$ tomando $\psi(x_0) = -1$.

(4) X **tiene al menos dos puntos en el borde.**

Para cada punto $x \in \partial X$ consideramos una parametrización $\varphi_x : [0,a) \to U_x$ con $\varphi_x(0) = x$, y consideramos para el interior de X un recubrimiento numerable por abiertos V homeomorfos a $\mathbb{R}$. Como al menos hay dos puntos $x \neq y$ en el borde, por la conexión de X tenemos una cadena $U_x, V_1, ..., V_r, U_y$ en la que cada dos abiertos consecutivos se cortan y por el caso (3) tenemos dos homeomorfismos

$$\begin{cases} \alpha : U = U_x \cup V_1 \cup \cdots \cup V_r \cup (U_y \setminus \{y\}) \to [0,a), & \alpha(x) = 0, \\ \beta : V = (U_x \setminus \{x\}) \cup V_1 \cup \cdots \cup V_r \cup U_y \to (b,1], & \beta(y) = 1. \end{cases}$$

Ahora bien, el homeomorfismo $\beta \circ \alpha^{-1} : (0,a) \to (b,1)$ es creciente. Si no lo fuera tendríamos que $\lim_{t\to 0} \beta \circ \alpha^{-1}(t) = 1$ y entonces tendríamos que $y = \lim_{t\to 0} \alpha^{-1}(t) = x$ lo cual contradice la hipótesis de que $x \neq y$. Por tanto

$$\lim_{t\to a} \beta \circ \alpha^{-1}(t) = 1$$

y podemos extender α a y tomando $\alpha(y) = a$. Resulta entonces que el conjunto abierto $W = U_x \cup V_1 \cup \cdots \cup V_r \cup U_y$ es homeomorfo a $[0,a]$, luego es compacto, y entonces es cerrado además de abierto en X, y por ser X conexo, necesariamente $W = X$ y en conclusión X es homeomorfo a $[0,a]$.

Con estos cuatro casos cubrimos todas las posibilidades y la demostración queda terminada. $\square$

La demostración anterior es válida para curvas topológicas, que son un conjunto definido a través de condiciones menos exigentes que las que definen a las curvas diferenciables, pero el resultado se puede ampliar a estas últimas.

Teorema 4.1.4 (de clasificación de curvas diferenciables)**.** Una curva diferenciable conexa es difeomorfa a uno de los siguiente cuatro modelos: $\mathbb{R}$, $[0,1)$, $[0,1]$, $\mathbb{S}^1$.

Este resultado se puede demostrar aprovechando el resultado ya probado para curvas topológicas, y usar que las construcciones hechas en esa demostración y el hecho de que ahora las cartas sean diferenciables nos permiten asegurar que los homeomorfismos anteriores serán ahora difeomorfismos locales en todos los puntos salvo a lo sumo una cantidad discreta de ellos. En esos puntos podemos adaptar la definición para lograr que sean difeomorfismos. La idea es *perturbar* los homeomorfismos en esos puntos, mediante el uso de ciertas funciones que se construyen usando las siguientes ideas:

1. Sean $I = [0, 1)$ y $f : I \to I$ un homeomorfismo creciente cuya restricción a $(0, 1)$ sea diferenciable. Entonces existe un difeomorfismo $g : I \to I$ igual a f fuera de un entorno arbitrariamente pequeño de 0.

2. Sean $I = (0, 1)$, $a \in I$ y $f : I \to I$ un homeomorfismo creciente cuya restricción a $I \setminus \{a\}$ es diferenciable, entonces existe un difeomorfismo $g : I \to I$ que coincide con f salvo en un entorno arbitrariamente pequeño de a.

Por otro lado, en [5, pág. 55-57], Milnor hace un desarrollo para obtener una demostración directa del resultado.

Corolario 4.1.5. Dos curvas diferenciables que son homeomorfas son difeomorfas.

Demostración. Notemos que en el corolario anterior no se pide que las curvas sean conexas. Dadas X e Y dos curvas diferenciables y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Cada componente conexa de X será entonces homeomorfa a una componente conexa de Y. Recordemos que las componentes conexas de las curvas siguen siendo curvas diferenciables. Entonces el problema se reduce a ver que dadas dos curvas conexas diferenciables homeomorfas, entonces son difeomorfas. Por ser curvas diferenciables son homeomorfas (y también difeomorfas) o a la esfera o a un intervalo de la recta, y por ser homeomorfas entre sí necesariamente deben ser homeomorfas y por tanto difeomorfas al mismo modelo, y en consecuencia difeomorfas entre sí. □

4.2. Teorema del punto fijo de Brouwer.

La idea fundamental para la demostración dada para el teorema se debe a Hirsch [7, Pág 73].

Teorema 4.2.1 (del punto fijo de Brouwer)**.** Toda aplicación continua del disco cerrado $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, en sí mismo tiene algún punto fijo.

Demostración. El disco $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ es una variedad con borde $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Supongamos que existe una aplicación continua $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ sin puntos fijos. Entonces la función $\alpha : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha(x) = \|f(x) - x\|$ es continua y siempre estrictamente positiva y α tiene un mínimo $\varepsilon > 0$. Nótese además que se tiene

$$\varepsilon \leq \|f(0) - 0\| = \|f(0)\| \leq 1.$$

Por el teorema 3.2.3 aplicado a $(1 - \frac{1}{2}\varepsilon)f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$ y $C = \emptyset$, existe una aplicación diferenciable $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\left\| g(x) - \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) f(x) \right\| < \frac{1}{2}\varepsilon,\ x \in \mathbb{D}^n.$$

Se cumple que $g(\mathbb{D}^n) \subset \mathbb{D}^n$ y g no tiene puntos fijos.

Veamos que dado $x \in \mathbb{D}^n$, entonces $g(x) \in \mathbb{D}^n$:

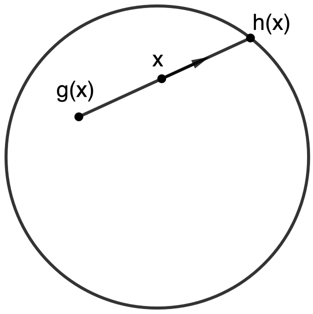
$$\|g(x)\| \leq \left\| g(x) - \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) f(x) \right\| + \left\| \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) f(x) \right\| < \frac{1}{2}\varepsilon + \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) = 1.$$

Por otra parte, si tuviéramos un $x \in \mathbb{D}^n$ tal que $g(x) = x$ tendríamos

$$\begin{aligned}
\varepsilon \leq \alpha(x) &= \|f(x) - x\| = \|f(x) - g(x)\| = \\
&= \left\| f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) f(x) + \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) f(x) - g(x) \right\| \leq \\
&\leq \left\| f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) f(x) \right\| + \left\| \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) f(x) - g(x) \right\| < \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon \|f(x)\| + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

llegando a una contradicción, por tanto g no puede tener puntos fijos.

Dado $x \in \mathbb{D}^n$, se tiene que $g(x)$ es otro punto de $\mathbb{D}^n$ distinto de x. Entonces, si tomamos la semirrecta con origen en $g(x)$ que pase por x, $\{g(x) + \lambda(x - g(x)) \text{ con } \lambda > 0\}$, se tiene que corta a $\mathbb{S}^{n-1}$ en un único punto.



Entonces, para cada $x \in \mathbb{D}^n$ existe $\lambda(x) > 0$ tal que $\|g(x) + \lambda(x)(x - g(x))\|^2 = 1$. Operando explícitamente en la ecuación anterior llegamos se obtiene la ecuación de segundo grado

$$\|x - g(x)\|^2 \lambda(x)^2 + 2\langle g(x), x - g(x)\rangle \lambda(x) + \|g(x)\|^2 - 1 = 0.$$

Que no es una expresión muy intuitiva, pero que tiene la virtud de ser un polinomio cuadrático en $\lambda(x)$, que por razones geométricas tiene una única solución positiva (también tiene una solución negativa, correspondiente al punto donde la semirrecta que va de x a $g(x)$ corta a la esfera).

Por tanto $\lambda(x)$ se calcula con la fórmula de la ecuación de segundo grado y la raíz positiva, lo que prueba que así definida $\lambda : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y entonces, la aplicación

$$h : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n \text{ dada por } h(x) = x + \lambda(x)(x - g(x))$$

es diferenciable.

Además $h|_{\partial\mathbb{D}^n}$ es la identidad, luego $h|_{\mathbb{S}^{n-1}} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ es una sumersión suprayectiva. En virtud del teorema de Sard-Brown 2.4.15 h tiene algún valor regular $a \in \mathbb{S}^{n-1}$, por lo que h es sumersión en el conjunto $h^{-1}(a)$.

Por ser $h|_{\partial\mathbb{D}^n}$ una sumersión en todos sus puntos y puesto que h es sumersión en todos los puntos de $h^{-1}(a)$, el hecho de que $\{a\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ sea una variedad de codimensión $n-1$ implica por la proposición 2.1.4, aplicada a $h : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ y $Z = \{a\}$ que por lo comentado cumplen las hipótesis, que $h^{-1}(a)$ es un variedad con borde $h^{-1}(a) \cap \partial\mathbb{D}^n = \{a\}$ y dimensión 1, es decir, una curva con un único punto en el borde. Además, $h^{-1}(a)$ es una curva compacta ya que es cerrada en $\mathbb{D}^n$. Por el teorema 4.1.3, una curva compacta o bien es homeomorfa a $\mathbb{S}^1$ y no tiene puntos en el borde, o bien es homeomorfa a $[0,1]$ y tiene dos puntos en el borde y entonces llegamos a una contradicción, lo que implica que f ha de tener algún punto fijo. $\square$

4.3. Teorema de invarianza del dominio.

Teorema 4.3.1 (de invarianza del dominio)**.** Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua inyectiva definida en un abierto U de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Entonces $f(U)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y f un homeomorfismo de U sobre $f(U)$.

Demostración. Si probamos que $f(U)$ es un conjunto abierto, entonces inmediatamente f es una aplicación abierta, y por ser continua y abierta se tiene que es un homeomorfismo sobre su imagen.

Veamos entonces que $f(U)$ es abierto. Para ello bastará con probar que si $D \subset U$ es una bola cerrada de centro x_0 y radio r. Entonces $f(x_0)$ es un punto interior de $f(D)$.

Claramente a través de traslaciones podemos suponer que $x_0 = 0$. Supongamos entonces que $f(0)$ no es un punto interior de $f(D)$.

En primer lugar, como D es compacto, por estar trabajando en un espacio de Hausdorff, $f|_D : D \to f(D) = C$ es un homeomorfismo, luego su inversa $g : D \to C \subset \mathbb{R}^n$ es continua. Como C es compacto, por el teorema de extensión de Tietze, g tiene una extensión continua $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y como $G(f(0)) = g(f(0)) = 0$, por continuidad tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\|y - f(0)\| < \delta$, entonces $\|G(y) - G(f(0))\| = \|G(y)\| < \frac{1}{4}r$.

Ahora bien, como $f(0)$ por hipótesis no está en el interior de C, existe un punto $c \notin C$ tal que $\|f(0) - c\| < \frac{1}{2}\delta$, de modo que $f(0)$ no está en el conjunto

$$T = \{y \in C : \|y - c\| \geq \frac{1}{2}\delta\} = C \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus B\left(c, \frac{1}{2}\delta\right)\right)$$

que es compacto (por ser un cerrado de un compacto), y donde $B(c, (1/2)\delta)$ es la bola de centro c y radio $(1/2)\delta$.

Como g es inyectiva y $g(f(0)) = 0$, g no se anula en T y por tanto existe

$$\eta = \min\{r, \|g(y)\| : y \in T\} > 0.$$

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ la esfera $S = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - c\| = \frac{1}{2}\delta\}$ y consideramos el conjunto compacto $K = T \cup S$. Entonces definimos una aplicación continua $\lambda : C \to K$ mediante la fórmula

$$\lambda(y) = \begin{cases} y \in T & \text{si } \|y - c\| \geq \frac{1}{2}\delta \\ c + \frac{1}{2}\delta\frac{y-c}{\|y-c\|} \in S & \text{si } \|y - c\| \leq \frac{1}{2}\delta \end{cases}$$

que está bien definida puesto que $c \notin C$, y ambas definiciones coinciden si $\|y-c\| = \frac{1}{2}\delta$.

Aplicando el teorema de aproximación polinomial de Stone-Weierstass (cuya construcción se puede ver en [6, Pág 330-339]) que daremos por conocido y que se puede aplicar por ser $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, existe una aplicación polinomial $P : K \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|P(y) - G(y)\| \leq \frac{1}{4}\eta \text{ para } y \in K.$$

Puesto que $S \subset K$ es una esfera de dimensión $n-1$, $P|_S : S \to \mathbb{R}^n$ no puede ser una sumersión en ningún punto y por tanto no contiene valores regulares. Del teorema de Sard-Brown se deduce por tanto que $P(S)$ tiene interior vacío, puesto que su interior debería estar contenido en el complementario de $VR(P)$, que es denso en K. Existe entonces un vector $u \notin P(S)$ con $\|u\| < \frac{1}{4}\eta$. Entonces la aplicación $Q = P - u$ no tiene ceros en K, pues si $Q(a) = 0$ para cierto $a \in K$, claramente no puede ser $a \in S$ y entonces tiene que ser $a \in T$. Luego tendríamos $a \in T$ tal que $P(a) = u$, y entonces:

$$\|g(a)\| = \|G(a)\| \leq \|P(a) - G(a)\| + \|P(a)\| \leq \frac{1}{4}\eta + \|u\| < \eta$$

en contra de la definición de η.

Entonces, la aplicación continua $h : C \to Q(K)$ dada por $h = Q \circ \lambda$ no tiene ceros en C. Veamos que esto supone una contradicción. Comprobaremos más adelante que se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|g(y) - h(y)\| \leq r \text{ para todo } y \in C. \tag{4.3.1}$$

Entonces la aplicación continua definida en D dada por $\mu(x) = x - h(f(x))$ tiene llegada en D, pues si $y = f(x) \in C$, de 4.3.1 se sigue que

$$\|\mu(x)\| = \|x - h(f(x))\| = \|g(y) - h(y)\| \leq r \Rightarrow \mu(x) \in D.$$

Como D es homeomorfo a $\mathbb{D}^n$, podemos aplicar el teorema del punto fijo de Brouwer 4.2.1 a la aplicación μ, de manera que existe $a \in D$ verificando $\mu(a) = a$. Entonces:

$$\mu(a) = a - h(f(a)) = a \Rightarrow h(f(a)) = 0$$

y h tiene un cero en $C = f(D)$, llegando así a una contradicción, lo que demostraría el resultado deseado.

Solo nos faltaría ver entonces que efectivamente se tiene la acotación 4.3.1. Vamos a distinguir dos casos.

Si $\|y - c\| \geq \frac{1}{2}\delta$, entonces $\lambda(y) = y \in T$ y se tiene que

$$\begin{aligned}\|g(y) - h(y)\| &= \|g(y) - Q(\lambda(y))\| = \|g(y) - P(y) + u\| \leq \\ &\leq \|g(y) - P(y)\| + \|u\| = \|G(y) - P(y)\| + \|u\| < \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta = \frac{1}{2}\eta < r.\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\|y - c\| \leq \frac{1}{2}\delta$ con lo que $\lambda(y) \in S$, es decir $\|\lambda(y) - c\| = \frac{1}{2}\delta$. Entonces tenemos:

$$\|y - f(0)\| \leq \|y - c\| + \|f(0) - c\| < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$$

$$\|\lambda(y) - f(0)\| \leq \|\lambda(y) - c\| + \|f(0) - c\| < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$$

luego por la continuidad de G y la condición definida al principio se tiene que $\|G(y)\| < \frac{1}{4}r$ y $\|G(\lambda(y))\| < \frac{1}{4}r$. Entonces se deduce

$$\begin{aligned}\|g(y) - h(y)\| = \|g(y) - Q(\lambda(y))\| = \|g(y) - P(\lambda(y)) + u\| = \\ \|g(y) - P(\lambda(y)) + G(\lambda(y)) - G(\lambda(y)) + u\| \leq \\ \leq \|g(y)\| + \|G(\lambda(y)\| + \|P(\lambda(y)) - G(\lambda(y))\| + \|u\| < \\ < \frac{1}{4}r + \frac{1}{4}r + \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta \leq r,\end{aligned}$$

lo que prueba 4.3.1 y concluye la demostración. □

En la demostración precedente, el teorema de extensión de Tietze empleado no es la versión contemplada en el trabajo 1.3.15, sino que se trata de un resultado conocido para espacios normales. Se puede encontrar más contenido sobre ello en [3, Pág 250].

Observación 4.3.2. El teorema también es cierto para $n = 1$, y su demostración solo necesita de razonamientos básicos de topología general, pues basta tener en cuenta que los únicos intervalos de $\mathbb{R}$ que se desconectan al quitar cualquiera de sus puntos son los abiertos.

Observación 4.3.3. Dos consecuencias importantes del resultado anterior son las siguientes:

(1) La dimensión es un invariante topológico.

Si existiera un homeomorfismo h entre sendos abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ con $1 \leq m < n$, la aplicación $H : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} : H(x) \mapsto (h(x), 0)$ sería continua e inyectiva, pero $H(U)$ no es un abierto en $\mathbb{R}^n$, lo cual contradice el resultado anterior.

(2) El borde es un invariante topológico.

Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo entre dos variedades topológicas con borde de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, que tengan la misma dimensión. Considerando parametrizaciones locales de ambas variedades y componiendo con h obtenemos un homeomorfismo l entre abiertos A y B de $\mathbb{H}^p$. Restringiéndonos a $\text{Int}A$ como subespacio de $\mathbb{R}^p$, se tiene $l(\text{Int}A) \subset B$ es abierto de $\mathbb{R}^p$ (por el teorema de invarianza de dominio), luego $l(\text{Int}A) \subset \text{Int}B$, y utilizando la inversa de h se obtiene la otra contención. Como por definición las parametrizaciones locales respetan interiores y borde, se tiene que h conserva el interior de las variedades, y por tanto también el borde (que es el complementario).

4.4. Teorema de separación de Jordan-Brouwer.

El clásico teorema de la curva de Jordan dice que toda curva cerrada en $\mathbb{R}^2$, simple en el sentido de que sea homótopa a $\mathbb{S}^1$, divide el plano en dos trozos, el *interior* y el *exterior* de la curva, lo que resulta algo obvio de manera intuitiva. En esta sección tenemos como objetivo probar un resultado similar pero para hipersuperficies que sean compactas en un ambiente de dimensión arbitraria.

Teorema 4.4.1. Cualquier hipersuperficie compacta y sin borde del espacio afín lo desconecta.

Demostración. Sea $Z \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una variedad compacta y sin borde de dimensión n. Para ver que el conjunto $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Z$ no es conexo bastaría con ver que para una componente conexa Z' de Z se tiene que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Z'$ no es conexo. Teniendo en cuenta esto último, queda claro que podemos suponer Z conexa. El problema ahora se va a centrar en encontrar dos puntos a_0, $a_1 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus Z$ que no estén en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Z$. El planteamiento se hará en varias etapas:

Etapa primera. Existe una recta $l \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que corta transversalmente a Z en una cantidad finita de puntos.

Sea $x \in Z$ y un vector $u \in \mathbb{S}^n$ ortogonal a H, siendo H es espacio tangente afín a Z en x, cuya variedad de dirección es T_xZ. Sea $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to H$ y $\vec{\pi} : \mathbb{R}^{n+1} \to T_xZ$ las proyecciones ortogonales, con lo que $d\pi = \vec{\pi}$. En particular $(d\pi|_Z)_x = \vec{\pi} = (d\pi|_H)_x$ es isomorfismo puesto que $\pi|_H = \mathrm{Id}_H$. Por el teorema de inversión local existen entornos U de x en Z y V de x en H tal que $\pi : U \to V$ es difeomorfismo, y como consecuencia para todo $y \in V$ la recta que pasa por y con dirección u corta a U, luego corta a Z. La recta l paralela a u que pasa por x corta transversalmente a Z en x (claramente $\mathbb{R}^{n+1} = T_xZ \oplus l(u)$ con $l(u)$ la recta vectorial generada por u), pero puede no ser así en otros puntos de $Z \cap l$. Sin embargo, ya se comentó en el apartado de densidad de la transversalidad que *casi cualquier* traslación de l tendrá la propiedad deseada. Entonces, la existencia de un entorno de x en H tal que todas las rectas paralelas a l en dicho entorno cortan a Z, junto con lo expuesto en el ejemplo 2.5.2, garantizan que existe una recta afín paralela a l que corta transversalmente a Z.

Estamos en situación de tomar l que corta transversalmente a Z, y por lo expuesto en el apartado de transversalidad de variedades 2.3.1, se tiene que $Z \cap l$ es una variedad de dimensión 0, es decir, un conjunto de puntos aislados, y que ha de ser finito por la compacidad de Z.

Etapa segunda. Consideramos l como al final de la anterior etapa, es decir, una recta que corta transversalmente a Z en una cantidad finita de puntos. El vector u que habíamos escogido induce en l una orientación. Cada punto $a \in l$ divide la recta en dos rayos, que según la orientación elegida denotamos $(\leftarrow, a)$ y $(a, \rightarrow)$, siendo la primera la semirrecta que se recorre desde a en el sentido contrario al de u y la segunda la que se recorre en el sentido de u. Supongamos ahora que $a \notin Z$, con lo que se puede definir la aplicación diferenciable $f_a : Z \to \mathbb{S}^n : z \mapsto \frac{z-a}{\|z-a\|}$. Esta aplicación es transversal a u, siendo $f_a^{-1}(u) = Z \cap (a, \rightarrow)$. Es claro por la definición de f_a que efectivamente $f_a^{-1}(u) = Z \cap (a, \rightarrow)$. Ahora bien, para ver que f_a es transversal a u podemos probar que para cada $z \in Z \cap (a, \rightarrow)$ la derivada $d_z(f_a) : T_zZ \to T_u\mathbb{S}^n$ es sobreyectiva, y por tanto f_a sumersión en z. Para verlo nótese lo siguiente. La aplicación f_a es de hecho la restricción de otra, $F : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{a\} \to \mathbb{S}^n$, definida mediante la misma fórmula. Atendiendo a dicha fórmula, es claro que la restricción de F a la esfera S de centro a y radio $\|z-a\|$ es un difeomorfismo sobre $\mathbb{S}^n$, luego $d_zF|_{T_zS} : T_zS \to T_{F(z)}\mathbb{S}^n$ es isomorfismo y por ello d_zF debe ser necesariamente sobreyectiva. Por ser l transversal a Z se tiene que $\mathbb{R}^{n+1} = T_zl \oplus T_zZ$, y se sigue que $d_F(\mathbb{R}^{n+1}) = d_z(F|_l)(T_zl) + d_z(F|_Z)(T_zZ)$. Pero

$F|_{(a,\to)}$ es la aplicación constante igual a u, luego $d_z(F|_{(a,\to)}) = 0$, y entonces el hecho de que d_zF sea sobreyectiva implica que también lo es d_zf_a, con lo que termina el argumento.

Etapa tercera. Elegimos $a_0, a_1 \in l \setminus Z$ tales que $a_1 \in (a_0, \to)$ y $Z \cap (a_0, a_1)$, donde (a_0, a_1) es el segmento de l comprendido entre ambos puntos, consista exactamente en un punto. Veamos que a_0, a_1 pertenecen a distintas componentes conexas, con lo que concluye la demostración.

En primer lugar, como $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Z$ es un abierto, también son abiertas todas sus componente conexas, por tratarse de un espacio localmente conexo. Entonces, supongamos que a_0 y a_1 se encuentran en la misma componente conexa U de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Z$. Como U es un abierto conexo afín, se puede tomar un camino que una a_0 y a_1, esto es una aplicacíon $\alpha : [0,1] \to U$ con $\alpha(0) = a_0$ y $\alpha(1) = a_1$ y de forma que α sea afín a trozos, de manera que dicha curva será diferenciable en un entorno de $t = 0, 1$. Definimos a continuación la aplicación continua

$$f : X = [0,1] \times Z \to \mathbb{S}^n : (t, z) \mapsto \frac{z - \alpha(t)}{\|z - \alpha(t)\|},$$

bien definida pues $\alpha(t) \notin Z$ para todo t y que es diferenciable en un entorno en X del cerrado $C = \{0,1\} \times Z$, por construcción de α. Notemos que también X es una variedad por ser Z una variedad sin borde. Queremos aplicar ahora a f el teorema de aproximación transversal 3.3.3. Para ello, analicemos las condiciones de transversalidad. En este caso, por ser $C = \partial X$, solo hace falta considerar la restricción $f|_{\partial X}$ y ver que es transversal a u, puesto que como el espacio tangente a un punto es 0, la condición de transversalidad TR equivale a que $df_{(t,z)}$ sea suprayectiva para todo $(t, z) \in f^{-1}(U) \cap V$, con V un entorno abierto de C en X. Pero si esto pasa en $\{0\} \times Z$, por ser una condición abierta lo tenemos asegurado en $[0, 0 + \epsilon) \times Z$ para cierto $\epsilon > 0$ (Z es compacto), y por lo mismo, si pasa en $\{1\} \times Z$, pasa en $(1 - \epsilon, 1] \times Z$, luego basta con comprobarlo para el borde.

Pero $\partial X = Z_0 \cup Z_1$, siendo $Z_0 = \{0\} \times Z$ y $Z_1 = \{1\} \times Z$, con lo que $f|_{Z_0}$ y $f|_{Z_1}$ se identificarían con f_{a_0} y f_{a_1} como en la segunda etapa, que ya vimos que eran transversales a u. Entonces, por el teorema 3.3.3, se tiene que existe una aplicación $g : X \to Y$ diferenciable que coincide con f sobre C y tal que g y $g|_{\partial X}$ son transversales a u. Entonces, por la proposición 2.3.5 se tiene que $g^{-1}(u)$ es una curva diferenciable, que además es compacta por ser X compacta, con borde:

$$\partial g^{-1}(u) = g^{-1}(u) \cap \partial X = \big(\{0\} \times g_0^{-1}(u)\big) \cup \big(\{1\} \times g_1^{-1}(u)\big)$$

donde $g_0 = g|_{Z_0} = f|_{Z_0} = f_{a_0}$ y $g_1 = g|_{Z_1} = f_{a_1}$.

Por el teorema de clasificación de curvas, si una curva diferenciable es compacta, cada componente conexa será a su vez una curva diferenciable compacta y entonces o bien es difeomorfa a $[0,1]$ o bien lo es a $\mathbb{S}^1$, luego tiene 2 o 0 puntos en el borde respectivamente, de manera que la curva global tiene necesariamente un número par de puntos en el borde. Puesto que $g_i = f_{a_i}$, se deduce que

$$\#(f_{a_0}^{-1}(u)) + \#(f_{a_1}^{-1}(u)) = \#(Z \cap (a_0, \to)) + \#(Z \cap (a_1, \to))$$

es un número par. Ahora bien, habíamos supuesto que $\#(Z \cap (a_0, a_1)) = 1$, y la expresión anterior se puede reescribir como sigue:

$$\#(Z \cap (a_0, \to)) + \#(Z \cap (a_1, \to)) = \#(Z \cap (a_0, a_1)) + 2 \cdot (\#(Z \cap (a_1, \to))) =$$
$$= 1 + 2 \cdot (\#(Z \cap (a_1, \to)))$$

de manera que llegamos a una contradicción. Con esto termina la tercera etapa y con ella la demostración del teorema.

□

Observación 4.4.2. Si en el anterior teorema exigimos que Z sea una hipersuperficie conexa, además de compacta y sin borde, directamente del teorema de ecuación global 2.2.4 se deduce que Z tiene ecuación global y que además $\mathbb{R}^{n+1} \setminus Z$ tiene exactamente dos componentes conexas, y que estas son dos variedades cuya frontera coincide con Z. Además, en estas circunstancias, Z separa el espacio ambiente en *exterior* e *interior*, siendo el interior una variedad acotada de dimensión igual a la del espacio ambiente. Podríamos imaginar una esfera en $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que obviamente cumple lo dicho.

Observación 4.4.3. Existe también un teorema de separación para variedades topológicas, pero requiere de herramientas más avanzadas de topología algebraica ([10]).

4.5. Otros resultados.

A través de la construcción hecha se puede llegar a más resultados sumamente conocidos, y que son habitualmente demostradas usando técnicas la topología algebraica. Algunos de interés son:

Teorema 4.5.1 (De la esfera de Brouwer)**.** Una esfera $\mathbb{S}^p \subset \mathbb{R}^{p+1}$ tiene un campo tangente sin ceros si y solo si p es impar.

El concepto de campo tangente se definió en 1.4.4.

Teorema 4.5.2 (De Borsuk-Ulam)**.** Sea $f : \mathbb{S}^p \to \mathbb{S}^p$ tal que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^p$. Entonces f tiene grado impar, y en particular no es homótopa a una aplicación constante.

Las construcciones necesarias en el marco de la topología diferencial y las pruebas de los resultados precedentes se pueden encontrar en [1, Pág 147-149].

Bibliografía

[1] Enrique Outeruelo, Juan Ángel Rojo, Jesús M. Ruiz, *Topología Diferencial, un curso de iniciación*, Sanz y Torres, 2020.

[2] Frank W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 1983.

[3] James R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, 2002.

[4] John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Springer, 2011.

[5] John W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.

[6] Erdoğan Şuhubi, *Functional Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[7] Morris W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer, 1988.

[8] Victor Guillemin, Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice Hall, 1974.

[9] Nicolas Bourbaki, *General Topology: Chapters 1-4*, Springer Berlin, Heidelberg, 1989.

[10] Marvin Jay Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1981.