Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Espacios de Sobolev y la Formulación Variacional de Problemas de Contorno Elípticos en Dimensión N

Autor: Andrés González Lorente

Tutor: Manuel Núñez Jiménez

Índice general

Introducción

Los espacios de Sobolev constituyen una herramienta fundamental en numerosas ramas del Análisis Matemático. En particular la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, tanto lineales como no lineales, se desarrollan de forma esencial en base a estos espacios. La idea que subyace a su construcción es similar a la de los espacios de funciones diferenciables hasta cierto orden, pero en lugar de utilizar la norma del máximo sobre dichas funciones se utilizan normas integrales asociadas a los espacios L^p. Estos espacios son esencialmente más fáciles de manejar y poseen mejores propiedades que los espacios de funciones continuas: en particular los espacios de Sobolev correspondientes a la norma L^2 son espacios de Hilbert, lo que posibilita utilizar todas las herramientas asociadas a la geometría euclídea de estos espacios. El problema que acarrea este enfoque es que la derivación no debe entenderse en el sentido usual de las diferenciales en cada punto, sino en el sentido de las distribuciones, lo que hace necesario utilizar varios teoremas de aproximación por funciones regulares para demostrar los teoremas fundamentales. Los espacios de Sobolev poseen una rica estructura de inclusiones entre sí y con otro tipo de espacios de funciones, una introducción a la cual se realiza en esta memoria. Estos resultados son mucho más fáciles en dimensión uno, pero utilizar dimensiones superiores es fundamental para las ecuaciones en derivadas parciales; por ejemplo para los teoremas elementales de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones elípticas, que se desarrollan en el siguiente texto. Otra ventaja de los espacios de Sobolev es que admiten el producto de funciones, lo que no ocurre con las distribuciones y es fundamental en el estudio de ecuaciones no lineales. Incluso los teoremas básicos de esta teoría requieren una considerable habilidad técnica y el uso de herramientas relativamente avanzadas del Análisis Matemático.

Capítulo 1

Espacios de Sobolev. Definición y propiedades elementales

Recuérdese que dada una función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, se dice que f admite derivadas hasta el orden $m \in \mathbb{N}$ en el sentido de las distribuciones si para todo $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^N$ con $|\alpha| < m$ existe una función $g_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ en Ω tal que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega f\, \partial^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, \varphi,$$

y en este caso se dice que g_α es la derivada en el sentido de las distribuciones de orden α de f, y se escribe $\partial^\alpha f \overset{d}{=} g_\alpha$.

Definición 1.1.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto no vacío y sea $p \in [1, \infty]$. Se define el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ *como:*

$$W^{1,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) \;/\; \forall\, j \leq N\ \exists\, g_j \in L^p(\Omega) \;/\; \partial_j u \overset{d}{=} g_j \Big\}.$$

Se define en $W^{1,p}(\Omega)$ la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \big\| \cdot \big\|_{W^{1,p}(\Omega)} & : & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto \big\|u\big\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \big\|\partial_j u\big\|_{L^p(\Omega)} \end{array}$$

Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, se define el gradiente *de u como:*

$$\nabla u := (\partial_1 u, \partial_2 u, ..., \partial_N u) \in \big(L^p(\Omega)\big)^N.$$

Dada $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_N) \in \big(L^p(\Omega)\big)^N$, se define:

$$\big\|\boldsymbol{v}\big\|_{L^p(\Omega)} := \sum_{j=1}^N \big\|v_j\big\|_{L^p(\Omega)}.$$

Lema 1.2.
Si $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ *es una sucesión en* $W^{1,p}(\Omega)$ *convergente en* $L^p(\Omega)$ *y tal que* $(\nabla u_l)_{l=1}^{\infty}$ *converge en* $\big(L^p(\Omega)\big)^N$*, entonces converge en* $W^{1,p}(\Omega)$*, y su límite es precisamente el límite en* $L^p(\Omega)$*.*

Demostración:
Existen funciones $u \in L^p(\Omega)$, $g_j \in L^p(\Omega)$ para todo $j \leq N$ tales que:

$$\begin{aligned} &u_l \xrightarrow[l\to\infty]{} u \text{ en } L^p(\Omega), \\ &\partial_j u_l \xrightarrow[l\to\infty]{} g_j \text{ en } L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Basta ver que $\partial_j u \stackrel{d}{=} g_j$ para todo $j \leq N$.
Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:
Sea p' el exponente conjugado de p. Aplicando la desigualdad de Hölder:

$$\Big| \int_\Omega (u_l - u)\, \partial_j \varphi \Big| \leq \big\|u_l - u\big\|_{L^p(\Omega)} \big\|\partial_j \varphi\big\|_{L^{p'}(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,$$

$$\Big| \int_\Omega (\partial_j u_l - \partial_j u)\, \varphi \Big| \leq \big\|\partial_j u_l - \partial_j u\big\|_{L^p(\Omega)} \big\|\varphi\big\|_{L^{p'}(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Por lo tanto:

$$\int_\Omega u\, \partial_j \varphi = \lim_{l\to\infty} \int_\Omega u_l\, \partial_j \varphi = -\lim_{l\to\infty} \int_\Omega (\partial_j u_l)\, \varphi = -\int_\Omega g_j\, \varphi.$$

$\square$

Teorema 1.3.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ *abierto no vacío y sea* $p \in [1, \infty]$*. La aplicación* $\big\| \cdot \big\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ *es una norma en* $W^{1,p}(\Omega)$*.*
Además, $\Big(W^{1,p}(\Omega), \big\| \cdot \big\|_{W^{1,p}(\Omega)}\Big)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración:
Las propiedades de las normas de $\big\| \cdot \big\|_{L^p(\Omega)}$ permiten deducir que $\big\| \cdot \big\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ también las verifica.

Veamos que esta norma es completa:
Sea $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\Big(W^{1,p}(\Omega), \big\| \cdot \big\|_{W^{1,p}(\Omega)}\Big)$.
Las sucesiones $(u_l)_{l=1}^{\infty}$, $(\partial_j u_l)_{l=1}^{\infty}$ para todo $j \leq N$ son de Cauchy en $L^p(\Omega)$.
Luego son convegentes.
Por lo tanto, por el lema 1.2, se deduce el resultado. $\square$

Ahora se van a tratar la reflexibilidad y la separabilidad de los espacios de Sobolev:

Lema 1.4.
Todo subespacio cerrado de un espacio de Banach reflexivo es reflexivo.

Demostración:
Sea E un espacio de Banach reflexivo y sea M un subespacio cerrado de E. Si $E = M$ no hay nada que probar; veremos el caso de un subespacio propio. Consideramos las aplicaciones naturales:

$$\begin{array}{rcccccccc} J & : & E & \longrightarrow & E^{**} & & & & \\ & & x & \longmapsto & x^{**}: & E^{*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & & \phi & \longmapsto & \phi(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc} J_M & : & M & \longrightarrow & M^{**} & & & & \\ & & y & \longmapsto & y_M^{**}: & M^{*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & & \psi & \longmapsto & \psi(y) \end{array}$$

Como E es reflexivo, $J(E) = E^{**}$. Se trata de ver que $J_M(M) = M^{**}$.

Sea $a \in M^{**}$:
Definimos $\overline{a} \in E^{**}$:

$$\begin{array}{rcccc} \overline{a} & : & E^{*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \phi & \longmapsto & a(\phi_{|_M}) \end{array}$$

Existe $x \in E$ tal que $\overline{a} = x^{**}$.

Supongamos que $x \notin M$:
Por el teorema D.1 (recordemos que M es cerrado y que entonces por ser subespacio propio no puede ser denso), existe $\phi \in E^{*}$ tal que $\phi(x) \neq 0$ y $\phi \equiv 0$ en M.
Entonces, $\overline{a}(\phi) = a(\phi_{|_M}) = 0$, pero $\overline{a}(\phi) = x^{**}(\phi) = \phi(x) \neq 0$ lo que lleva a contradicción, por tanto $x \in M$.

Veamos que $a = x_M^{**}$:
Para todo $\psi \in M^{*}$:
Por el teorema de Hahn-Banach, existe $\overline{\psi} \in E^{*}$ tal que $\overline{\psi}_{|_M} = \psi$.
Entonces, $a(\psi) = a(\overline{\psi}_{|_M}) = \overline{a}(\overline{\psi}) = x^{**}(\overline{\psi}) = \overline{\psi}(x) = \psi(x) = x_M^{**}(\psi)$. Esto prueba que $J_M(M) = M^{**}$. $\square$

Proposición 1.5.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío.

i) $W^{1,p}(\Omega)$ *es separable para todo* $p \in [1, \infty)$.

ii) $W^{1,p}(\Omega)$ *es reflexivo para todo* $p \in (1, \infty)$.

Demostración:
Tomamos la aplicación:

$$\begin{array}{rcccc} T & : & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Omega) \times \left(L^p(\Omega)\right)^N \\ & & u & \longmapsto & (u, \nabla u) \end{array}$$

Si consideramos en $L^p(\Omega) \times \big(L^p(\Omega)\big)^N$:

$$\big\|(u, \mathbf{v})\big\| := \big\|u\big\|_{L^p(\Omega)} + \big\|\mathbf{v}\big\|_{L^p(\Omega)},$$

que es una norma, T es una isometría. Por lo tanto:

$$T : \Big(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\Big) \longrightarrow \Big(T\big(W^{1,p}(\Omega)\big), \|\cdot\|\Big)$$

es un isomorfismo topológico.

i) Para $p \in [1, \infty)$:
Como $L^p(\Omega) \times \big(L^p(\Omega)\big)^N$ es separable, como puede deducirse del teorema B.4, el subespacio $T\big(W^{1,p}(\Omega)\big)$ es separable. Luego $W^{1,p}(\Omega)$ es separable.

ii) Para $p \in (1, \infty)$:
$L^p(\Omega) \times \big(L^p(\Omega)\big)^N$ es reflexivo. Como $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach, $T\big(W^{1,p}(\Omega)\big)$ es un subespacio cerrado de $L^p(\Omega) \times \big(L^p(\Omega)\big)^N$. Por el lema 1.4, $T\big(W^{1,p}(\Omega)\big)$ es reflexivo. Luego $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo.

□

Antes de continuar, se muestra un resultado sobre extensión de funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ que será de utilidad en diversos puntos.

Proposición 1.6.
Dada $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, sea $\overline{f}$ la extensión de f por 0 a $\mathbb{R}^N$, es decir:

$$\overline{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} . \tag{1.1}$$

Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Sea:

- *O bien $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$.*
- *O bien $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\nabla\theta \in \big(L^\infty(\Omega)\big)^N$ y que cumpla que $Sop(\theta) \subset \mathbb{R}^N \backslash \partial\Omega$.*

En ambos casos, $\overline{\theta\, u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y:

$$\partial_j(\overline{\theta\, u}) = \overline{(\partial_j\theta)\, u + \theta\, \partial_j u}.$$

Demostración:
En ambos casos, $\theta_{|\Omega}\, u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(R^N)$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\theta\, u}\, \partial_j\varphi = \int_\Omega u\, \theta\, \partial_j\varphi = \int_\Omega u\, \partial_j(\theta\, \varphi) - \int_\Omega u\, (\partial_j\theta)\, \varphi.$$

En ambos casos, $(\theta\,\varphi)_{|\Omega} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\theta\, u}\, \partial_j \varphi = \int_\Omega u\, \partial_j(\theta\,\varphi) - \int_\Omega u\,(\partial_j \theta)\,\varphi = -\int_\Omega (\partial_j u)\,\theta\,\varphi - \int_\Omega u\,(\partial_j\theta)\,\varphi$$

$$= -\int_\Omega \big((\partial_j u)\,\theta + u\,\partial_j \theta\big)\,\varphi = -\int_{\mathbb{R}^N} \overline{(\partial_j u)\,\theta + u\,\partial_j\theta}\,\varphi.$$

En ambos casos, $\overline{(\partial_j u)\,\theta + u\,\partial_j\theta} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. □

1.1. Aproximación por funciones test. Consecuencias

Recuérdese que, dados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto no vacío y $p \in [1,\infty)$, el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ (teorema B.2). En esta sección se iniciará el estudio de la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Para concluir dicho estudio serán necesarias herramientas que se desarrollarán posteriormente.

Se comienza con un resultado sobre convoluciones que será de utilidad:

Proposición 1.7.
Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1,\infty]$. Entonces $\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y además:

$$\partial_j(\rho * u) = \rho * \partial_j u.$$

Demostración:
$\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $u, \partial_j u \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
Por tanto, por el teorema de Young (B.1), $\rho * u, \rho * \partial_j u \in L^p(\mathbb{R}^N)$.
Falta ver que $\partial_j(\rho * u) \overset{d}{=} \rho * \partial_j u$.

Caso 1: ρ tiene soporte compacto.
La distribución asociada a ρ tiene soporte compacto. Por lo tanto, por el teorema C.3, la distribución asociada a $\rho * \partial_j u$ está bien definida, y además $\partial_j(\rho * u) \overset{d}{=} \rho * \partial_j u$.

Caso 2: caso general.
Existe una sucesión $(\rho_l)_{l=1}^\infty$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ convergente hacia ρ en $L^1(\mathbb{R}^N)$ por el teorema B.3.
Por el teorema de Young (B.1):

$$\|\rho_l * u - \rho * u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \|\rho_l - \rho\|_{L^1(\Omega)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,$$

$$\begin{aligned} \|\partial_j(\rho_l * u) - \rho * \partial_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \|\rho_l * \partial_j u - \rho * \partial_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\le \|\rho_l - \rho\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\partial_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Por tanto, por el lema 1.2, $(\rho_l * u)_{l=1}^{\infty}$ converge en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, y su límite ha de ser $\rho * u$.
Entonces:

$$\left\|\partial_j(\rho_l * u) - \partial_j(\rho * u)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \left\|\rho_l * u - \rho * u\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Luego $\partial_j(\rho * u) = \rho * \partial_j u$. □

Lema 1.8.
Sea $(f_l)_{l=1}^{\infty}$ una sucesión convergente hacia f en $L^p(\Omega)$. Sea $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\overline{B}(\mathbf{0},1) \prec \zeta \prec B(\mathbf{0},2)$ (para la notación y su significado, ver teorema A.1). Para todo $l \in \mathbb{N}$ sea:

$$\zeta_l(\boldsymbol{x}) := \zeta\Big(\frac{1}{l}\boldsymbol{x}\Big).$$

La sucesión $(\zeta_l\, f_l)_{l=1}^{\infty}$ converge hacia f en $L^p(\Omega)$.

Demostración:
Las funciones ζ_l están acotadas en valor absoluto por 1, tienen norma infinito 1, y además la sucesión converge puntualmente hacia 1.

$$\zeta_l\, f_l - f = \zeta_l\, f_l - \zeta_l\, f + \zeta_l\, f - f;$$

$$\begin{aligned}\left\|\zeta_l\, f_l - f\right\|_{L^p(\Omega)} &\leq \left\|\zeta_l\,(f_l - f)\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\zeta_l\, f - f\right\|_{L^p(\Omega)}\\ &\leq \left\|\zeta_l\right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|f_l - f\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\zeta_l\, f - f\right\|_{L^p(\Omega)}\\ &= \left\|f_l - f\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\zeta_l\, f - f\right\|_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

donde $\left\|f_l - f\right\|_{L^p(\Omega)}$ converge hacia 0 por hipótesis, y $(\zeta_l\, f)_{l=1}^{\infty}$ converge puntualmente hacia f por la convergencia puntual de $(\zeta_l)_{l=1}^{\infty}$ y $|\zeta_l\, f| \leq |f|$; luego por el teorema de la convergencia dominada $\left\|\zeta_l\, f - f\right\|_{L^p(\Omega)}$ converge hacia 0.
Luego $\left\|\zeta_l\, f_l - f\right\|_{L^p(\Omega)}$ converge hacia 0. □

Lema 1.9.
Sea $(v_l)_{l=1}^{\infty}$ una sucesión en $W^{1,p}(\Omega)$ acotada en $L^p(\Omega)$ (en particular si es convergente) tal que $(\partial_j v_l)_{l=1}^{\infty}$ converge hacia w en $L^p(\Omega)$. Sea $(\zeta_l)_{l=1}^{\infty}$ una sucesión construida como en el lema 1.8. Entonces, $(\partial_j(\zeta_l\, v_l))_{l=1}^{\infty}$ converge hacia w en $L^p(\Omega)$.

Demostración:
Aplicando la regla de Leibniz (para producto de función por distribución, teorema C.2) y la proposición 1.7:

$$\partial_j(\zeta_l\, v_l) = (\partial_j \zeta_l)\, v_l + \zeta_l\, \partial_j v_l.$$

Se verifica:

$$\begin{aligned}\left\|\partial_j(\zeta_l\, v_l) - w\right\|_{L^p(\Omega)} &\le \left\|(\partial_j\zeta_l)\, v_l\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\zeta_l\,\partial_j v_l - w\right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \left\|\partial_j\zeta_l\right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|v_l\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\zeta_l\,\partial_j v_l - w\right\|_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

donde $(v_l)_{l=1}^\infty$ es acotada en $L^p(\Omega)$ por hipótesis y:

$$\partial_j\zeta_l(\mathbf{x}) = \frac{1}{l}\,\partial_j\zeta\Big(\frac{1}{l}\mathbf{x}\Big), \tag{1.2}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (1.2) y que $\left\|\zeta_l \cdot \partial_j v_l - w\right\|_{L^p(\Omega)}$ converge hacia 0 por el lema anterior:

$$\left\|\partial_j(\zeta_l\, v_l) - w\right\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{\left\|\partial_j\zeta\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{l} \left\|v_l\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\zeta_l\,\partial_j v_l - w\right\|_{L^p(\Omega)};$$

$$\left\|\partial_j(\zeta_l\, v_l) - w\right\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

□

Teorema 1.10.
Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1,\infty)$. Existe una sucesión en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ convergente hacia u en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración:
Sea $(\rho_l)_{l=1}^\infty$ una sucesión regularizante en $\mathbb{R}^N$ (ver teorema B.2).
Se verifica, por este mismo teorema, que para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$:

$$\rho_l * f \xrightarrow[l\to\infty]{} f \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N),$$

Entonces:

$$\rho_l * u \xrightarrow[l\to\infty]{} u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N),$$

y, por la proposición 1.7:

$$\partial_j(\rho_l * u) = \rho_l * \partial_j u \xrightarrow[l\to\infty]{} \partial_j u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Luego:

$$\rho_l * u \xrightarrow[l\to\infty]{} u \text{ en } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Sea $(\zeta_l)_{l=1}^\infty$ una sucesión construida como en el lema 1.8.
Sea $u_l = \zeta_l\,(\rho_l * u)$; $u_l \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ para todo $l \in \mathbb{N}$.
De los lemas 1.8 y 1.9 se deduce el resultado. □

Para $\Omega \ne \mathbb{R}^N$ no es en general $\mathcal{D}(\Omega)$ denso en $W^{1,p}(\Omega)$.
No obstante, se puede demostrar, bajo determinadas condiciones adicionales del conjunto Ω, que las restricciones de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ a Ω son densas en $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Esto deberá ser demostrado más adelante; de momento se puede probar un resultado más débil, para lo cual se usará la siguiente definición:

Definición 1.11.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Se dice que un conjunto abierto Υ está fuertemente contenido *en Ω; $\Upsilon \subset\subset \Omega$, si es relativamente compacto y $\overline{\Upsilon} \subset \Omega$.*

Teorema 1.12 (Friedrichs).
Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. Existe una sucesión $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que:

- *$(u_{l|_\Omega})_{l=1}^{\infty}$ converge hacia u en $L^p(\Omega)$.*
- *$(\nabla u_{l|_\Upsilon})_{l=1}^{\infty}$ converge hacia $\nabla u_{|_\Upsilon}$ en $\big(L^p(\Upsilon)\big)^N$ para todo $\Upsilon \subset\subset \Omega$.*

Demostración:
Consideramos la extensión $\overline{u}$, como en (1.1).
Sea $(\rho_l)_{l=1}^{\infty}$ una sucesión regularizante en $\mathbb{R}^N$.
Sea $v_l := \rho_l * \overline{u}$ para todo $l \in \mathbb{N}$.

Tenemos que $(v_l)_{l=1}^{\infty}$ converge hacia $\overline{u}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ por el teorema B.2.

Sea una sucesión $(\zeta_l)_{l=1}^{\infty}$ como en el lema 1.8.
Definamos $u_l = \zeta_l\, v_l$; $u_l \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Veamos que $(u_{l|_\Omega})_{l=1}^{\infty}$ converge hacia u en $L^p(\Omega)$:
Por el lema 1.8, $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ converge hacia $\overline{u}$ en $L^p(\Omega)$. Luego:

$$\left\|u_{l|_\Omega} - u\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\|u_l - \overline{u}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Sea $\Upsilon \subset\subset \Omega$. Veamos que $(\partial_j u_{l|_\Upsilon})_{l=1}^{\infty}$ converge hacia $\partial_j u_{|_\Upsilon}$ en $L^p(\Upsilon)$:
Notemos que $\overline{u}$ no pertenece necesariamente a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Por ello utilizaremos una función como en la proposición 1.6 que sea idénticamente igual a 1 en un entorno de $\overline{\Upsilon}$.
Existe $V \subset \Omega$ abierto relativamente compacto tal que $\overline{\Upsilon} \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega$.
Sea $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $\overline{V} \prec \theta \prec \Omega$, que existe en virtud del teorema A.1.

Lema 1.13.
Existe $l_\Upsilon \in \mathbb{N}$ tal que $(\rho_l * \overline{\theta\, u})_{|_\Upsilon} = (\rho_l * \overline{u})_{|_\Upsilon}$ para todo $l \geq l_\Upsilon$.

Demostración:
Para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Upsilon}$:

$$\begin{aligned}\rho_l * \overline{\theta\, u}(\mathbf{x}) - \rho_l * \overline{u}(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_l(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\big(\overline{\theta\, u}(\mathbf{y}) - \overline{u}(\mathbf{y})\big)d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega} \rho_l(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\big((\theta\, u)(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\big)d\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Como $\overline{\Upsilon}$ es compacto, $r := dist(\Upsilon, \Omega \backslash \overline{V}) > 0$.
Existe $l_\Upsilon \in \mathbb{N}$ tal que $Sop(\rho_l) \subset B(\mathbf{0}, r)$ para todo $l \geq l_\Upsilon$.

Para todo $l \geq l_\Upsilon$, para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Upsilon}$ y para todo $\mathbf{y} \in \Omega \backslash \overline{V}$:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq dist(\Upsilon, \Omega \backslash \overline{V}) = r > 0.$$

Entonces, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \notin B(\mathbf{0}, r)$, luego $\rho_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$.
Luego:

$$\rho_l * \overline{\theta\, u}(\mathbf{x}) - \rho_l * \overline{u}(\mathbf{x}) = \int_V \rho_l(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \big(\theta(\mathbf{y})\, u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\big) d\mathbf{y},$$

donde $\theta(\mathbf{y}) = 1$ para todo $\mathbf{y} \in V$.
Por tanto:

$$\rho_l * \overline{\theta\, u}(\mathbf{x}) - \rho_l * \overline{u}(\mathbf{x}) = 0.$$

□

Tenemos por la proposición 1.6 que:

$$\partial_j(\rho_l * \overline{\theta\, u}) = \rho_l * \partial_j(\overline{\theta\, u}) = \rho_l * \overline{\partial_j(\theta\, u)} = \rho_l * \big(\overline{(\partial_j \theta)\, u + \theta\, \partial_j u}\big).$$

Por lo tanto, en Υ, para todo $l \geq l_\Upsilon$:

$$\partial_j v_l = \partial_j(\rho_l * \overline{\theta\, u}) = \rho_l * \partial_j(\overline{\theta\, u}) = \rho_l * \big(\overline{(\partial_j \theta)\, u + \theta\, \partial_j u}\big) = \rho_l * \overline{\partial_j u},$$

ya que $\theta \equiv 1$ en $V \supset \Upsilon$, y por tanto $\partial_j \theta \equiv 0$ en Υ.

Por el teorema B.2:

$$\begin{aligned} \big\|\partial_j v_l - \partial_j u\big\|_{L^p(\Upsilon)} &= \big\|\rho_l * \overline{\partial_j u} - \partial_j u\big\|_{L^p(\Upsilon)} \leq \big\|\rho_l * \overline{\partial_j u} - \partial_j u\big\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \big\|\rho_l * \overline{\partial_j u} - \overline{\partial_j u}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow[l \to \infty]{} 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde hemos usado el lema 1.13.
Entonces, de (1.3), por el lema 1.9, como $(u_{l_{|\Upsilon}})_{l=1}^{\infty}$ converge en $L^p(\Upsilon)$ por ser $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ convergente en $L^p(\Omega)$, $(\partial_j u_{l_{|\Upsilon}})_{l=1}^{\infty}$ converge hacia $\partial_j u_{|\Upsilon}$ en $L^p(\Upsilon)$. □

Ahora se verán tres consecuencias del teorema de Friedrichs de utilidad práctica.

Proposición 1.14 (Diferenciación de un producto).
Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$. Entonces $u\, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y además:

$$\partial_j(u\, v) = \partial_j u\, v + u\, \partial_j v.$$

Demostración:
Como $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$; $u\, v \in L^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $\partial_j u, \partial_j v \in L^p(\Omega)$, deducimos que $u\, v \in L^p(\Omega)$ y $\partial_j u\, v + u\, \partial_j v \in L^p(\Omega)$.

Tenemos que ver que $\partial_j(u\,v) \overset{d}{=} \partial_j u\,v + u\,\partial_j v$.

Para $p \in [1,\infty)$:
Existe sucesiones $(u)_{l=1}^{\infty}, (v)_{l=1}^{\infty}$ verificando las condiciones del teorema de Friedrichs (1.12), que podemos construir como en el proceso de demostración del citado teorema.
Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:
Existe $\Upsilon \subset\subset \Omega$ / $Sop(\varphi) \subset \Upsilon$.
Para todo $l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_{\Upsilon} u_l\,v_l\,\partial_j\varphi &= \int_{\Omega} u_l\,v_l\,\partial_j\varphi = -\int_{\Omega} \partial_j(u_l\,v_l)\,\varphi \\ &= -\int_{\Omega} \big((\partial_j u_l)\,v_l + u_l\,\partial_j v_l\big)\,\varphi = -\int_{\Upsilon} \big((\partial_j u_l)\,v_l + u_l\,\partial_j v_l\big)\,\varphi. \qquad (1.4)\end{aligned}$$

Veamos que:

$$\int_{\Upsilon} u_l\,v_l\,\partial_j\varphi \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_{\Upsilon} u\,v\,\partial_j\varphi : \qquad (1.5)$$

Por la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}\int_{\Upsilon} |u_l\,v_l\,\partial_j\varphi - u\,v\,\partial_j\varphi| &\le \big\|\partial_j\varphi\big\|_{L^{p'}(\Upsilon)} \big\|u_l\,v_l - u\,v\big\|_{L^p(\Upsilon)} \\ &\le \big\|\partial_j\varphi\big\|_{L^{p'}(\Upsilon)} \Big(\big\|u_l\,v_l - u_l\,v\big\|_{L^p(\Upsilon)} + \big\|u_l\,v - u\,v\big\|_{L^p(\Upsilon)}\Big) \\ &\le \big\|\partial_j\varphi\big\|_{L^{p'}(\Upsilon)} \Big(\big\|u_l\big\|_{L^\infty(\Upsilon)} \big\|v_l - v\big\|_{L^p(\Upsilon)} + \big\|v\big\|_{L^\infty(\Upsilon)} \big\|u_l - u\big\|_{L^p(\Upsilon)}\Big),\end{aligned}$$

donde, por la construcción de $(u_l)_{l=1}^{\infty}$, tomada de la demostración del teorema de Friedrichs, $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ está acotada en norma $\|\cdot\|_{L^\infty(\Upsilon)}$, pues:

$$\begin{aligned}|u_l| = |\zeta_l\,(\rho_l * \overline{u})| \le |(\rho_l * \overline{u})| &\le \big\|\rho_l * \overline{u}\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\ &\le \big\|\rho_l\big\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \big\|\overline{u}\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \big\|\overline{u}\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \big\|u\big\|_{L^\infty(\Omega)},\end{aligned}$$

con $u \in L^\infty(\Omega)$ por hipótesis, donde hemos utilizado el teorema de Young (B.1) y el hecho de que $\big\|\rho_l\big\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$.
Por tanto:

$$\int_{\Upsilon} |u_l\,v_l\,\partial_j\varphi - u\,v\,\partial_j\varphi| \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,$$

de donde se deduce (1.5).

Veamos que:

$$\int_{\Upsilon} (\partial_j u_l)\,v_l\,\varphi \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_{\Upsilon} (\partial_j u)\,v\,\varphi : \qquad (1.6)$$

Tenemos:

$$
\begin{aligned}
(\partial_j u_l)\, v_l\, \varphi - (\partial_j u)\, v\, \varphi &= \big((\partial_j u_l)\, v_l - (\partial_j u)\, v\big)\, \varphi \\
&= \big((\partial_j u_l)\, v_l - (\partial_j u)\, v_l + (\partial_j u)\, v_l - (\partial_j u)\, v\big)\, \varphi;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Upsilon |(\partial_j u_l)\, v_l\, \varphi - (\partial_j u)\, v\, \varphi| &\leq \big\|\varphi\big\|_{L^\infty(\Upsilon)} \big\|(\partial_j u_l)\, v_l - (\partial_j u)\, v\big\|_{L^1(\Upsilon)} \\
&\leq \big\|\varphi\big\|_{L^\infty(\Upsilon)} \Big(\big\|(\partial_j u_l)\, v_l - (\partial_j u)\, v_l\big\|_{L^1(\Upsilon)} + \big\|(\partial_j u)\, v_l - (\partial_j u)\, v\big\|_{L^1(\Upsilon)}\Big) \\
&\leq \big\|\varphi\big\|_{L^\infty(\Upsilon)} \Big(\big\|v_l\big\|_{L^{p'}(\Upsilon)} \big\|\partial_j u_l - \partial_j u\big\|_{L^p(\Upsilon)} + \big\|\partial_j u\big\|_{L^p(\Upsilon)} \big\|v_l - v\big\|_{L^{p'}(\Upsilon)}\Big),
\end{aligned}
$$

por la desigualdad de Hölder, donde:

- Por un lado, al igual que antes, podemos deducir que la sucesión $(v_l)_{l=1}^\infty$ está acotada en norma $\big\|\cdot\big\|_{L^\infty(\Upsilon)}$ y por ser Υ acotado, lo está en $\big\|\cdot\big\|_{L^q(\Upsilon)}$ para todo $q \in [1, \infty)$, en particular, en $\big\|\cdot\big\|_{L^{p'}(\Upsilon)}$.
- Por otro lado, como $v \in L^\infty(\Upsilon)$ e Υ es acotado, $v \in L^q(\Upsilon)$ para todo $q \in [1, \infty)$, en particular, $v \in L^{p'}(\Upsilon)$. Por la construcción de $(v_l)_{l=1}^\infty$, tomada de la demostración del teorema de Friedrichs, aplicando el teorema B.2, deducimos que v_l converge hacia v en $L^{p'}(\Upsilon)$.

Entonces:

$$
\int_\Upsilon |(\partial_j u_l)\, v_l\, \varphi - (\partial_j u)\, v\, \varphi| \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,
$$

y se deduce (1.6).

Análogamente:

$$
\int_\Upsilon u_l\, (\partial_j v_l)\, \varphi \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_\Upsilon u\, (\partial_j v)\, \varphi. \tag{1.7}
$$

Tomando en (1.4) los límites (1.5), (1.6) y (1.7):

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u\, v\, \partial_j \varphi = \int_\Upsilon u\, v\, \partial_j \varphi &= \lim_{l\to\infty} \int_\Upsilon u_l\, v_l\, \partial_j \varphi \\
&= -\lim_{l\to\infty} \int_\Upsilon \big((\partial_j u_l)\, v_l + u_l\, \partial_j v_l\big)\, \varphi \\
&= -\int_\Upsilon \big((\partial_j u)\, v + u\, \partial_j v\big)\, \varphi = -\int_\Omega \big((\partial_j u)\, v + u\, \partial_j v\big)\, \varphi.
\end{aligned}
$$

Si $p = \infty$:
Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:
Existe $\Upsilon \subset\subset \Omega$ / $Sop(\varphi) \subset \Upsilon$.
Como $\overline{\Upsilon}$ es compacto, deducimos que $u, v \in W^{1,p}(\Upsilon)$ para todo $p \in [1, \infty)$.
Entonces, obtenemos el resultado por el caso anterior. □

Proposición 1.15 (**Regla de la cadena**).
Sea $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ con $G(0) = 0$ y tal que existe $M > 0$ tal que $|G'(s)| \leq M$ para todo $s \in \mathbb{R}$, y sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$. Entonces, $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ y además:

$$\partial_j(G \circ u) = (G' \circ u)\, \partial_j u.$$

Demostración:
Tenemos que $|G(s)| \leq M\,|s|$ para todo $s \in \mathbb{R}$.
Por tanto, $|G \circ u| \leq M\,|u|$. Luego $G \circ u \in L^p(\Omega)$.
Además, $|(G' \circ u)\, \partial_j u| \leq M\,|\partial_j u|$. Luego $(G' \circ u)\, \partial_j u \in L^p(\Omega)$.
Hay que ver que $\partial_j(G \circ u) \stackrel{d}{=} (G \circ u)\, \partial_j u$.

Para $p \in [1, \infty)$:
Existe una sucesión $(u)_{l=1}^{\infty}$ verificando las condiciones del teorema de Friedrichs.
Igual que con u, $|G \circ u_l| \leq M\,|u_l|$, $|(G' \circ u_l)\, \partial_j u_l| \leq M\,|\partial_j u_l|$.
Luego $(G \circ u_l), (G' \circ u_l)\, \partial_j u_l \in L^p(\Omega)$.
Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:
Existe $\Upsilon \subset\subset \Omega$ / $Sop(\varphi) \subset \Upsilon$.
Para todo $l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_\Upsilon (G \circ u_l)\, \partial_j \varphi &= \int_\Omega (G \circ u_l)\, \partial_j \varphi = -\int_\Omega \partial_j (G \circ u_l)\, \varphi \\ &= -\int_\Omega (G' \circ u_l)\, (\partial_j u_l)\, \varphi = -\int_\Upsilon (G' \circ u_l)\, (\partial_j u_l)\, \varphi. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Veamos que:

$$\int_\Upsilon (G \circ u_l)\, \partial_j \varphi \xrightarrow[l \to \infty]{} \int_\Upsilon (G \circ u)\, \partial_j \varphi, \tag{1.9}$$

o que al menos lo verifica una subsucesión suya:
Por la propiedad de acotación de G':

$$\begin{aligned}|G \circ u_l(\mathbf{x}) - G \circ u(\mathbf{x})| = \Big| \int_{u(\mathbf{x})}^{u_l(\mathbf{x})} G'(s)\, ds \Big| &\leq \int_{u(\mathbf{x})}^{u_l(\mathbf{x})} |G'(s)|\, ds \\ &\leq M\,|u_l(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})|.\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int_\Upsilon |(G \circ u_l)\, \partial_j \varphi - (G \circ u)\, \partial_j \varphi| &\leq \big\|\partial_j \varphi\big\|_{L^{p'}(\Upsilon)} \big\|G \circ u_l - G \circ u\big\|_{L^p(\Upsilon)} \\ &\leq M\, \big\|\partial_j \varphi\big\|_{L^{p'}(\Upsilon)} \big\|u_l - u\big\|_{L^p(\Upsilon)},\end{aligned}$$

de donde se deduce (1.9).

Veamos que:

$$\int_\Upsilon (G' \circ u_l)\,(\partial_j u_l)\,\varphi \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_\Upsilon (G' \circ u_l)\,(\partial_j u)\,\varphi : \tag{1.10}$$

Tenemos:

$$\int_\Upsilon |(G' \circ u_l)\,(\partial_j u_l)\,\varphi - (G' \circ u)\,(\partial_j u)\,\varphi| = \int_\Upsilon |\varphi|\,|(G' \circ u_l)\,\partial_j u_l - (G' \circ u)\,\partial_j u|$$

$$\begin{aligned}
&\le \int_\Upsilon |\varphi|\,|(G' \circ u_l)\,\partial_j u_l - (G' \circ u_l)\,\partial_j u| + \int_\Upsilon |\varphi|\,|(G' \circ u_l)\,\partial_j u - (G' \circ u)\,\partial_j u| \\
&\le \|\varphi\|_{L^\infty(\Upsilon)} \|(G' \circ u_l)\,\partial_j u_l - (G' \circ u_l)\,\partial_j u\|_{L^1(\Upsilon)} \\
&\qquad + \|\varphi\|_{L^\infty(\Upsilon)} \|(G' \circ u_l)\,\partial_j u - (G' \circ u)\,\partial_j u\|_{L^1(\Upsilon)} \\
&\le \|\varphi\|_{L^\infty(\Upsilon)} \|G' \circ u_l\|_{L^{p'}(\Upsilon)} \|\partial_j u_l - \partial_j u\|_{L^p(\Upsilon)} \\
&\qquad + \|\varphi\|_{L^\infty(\Upsilon)} \|(G' \circ u_l) - (G' \circ u)\|_{L^{p'}(\Upsilon)} \|\partial_j u\|_{L^p(\Upsilon)} \\
&\le M\,\big(m(\Upsilon)\big)^{\frac{1}{p'}} \|\varphi\|_{L^\infty(\Upsilon)} \|\partial_j u_l - \partial_j u\|_{L^p(\Upsilon)} \\
&\qquad + \|\varphi\|_{L^\infty(\Upsilon)} \|(G' \circ u_l) - (G' \circ u)\|_{L^{p'}(\Upsilon)} \|\partial_j u\|_{L^p(\Upsilon)},
\end{aligned}$$

por la desigualdad de Hölder y la propiedad de acotación de G'.
Por un lado, $\|\partial_j u_l - \partial_j u\|_{L^p(\Upsilon)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$.
Por otro, por el lema de Riesz-Weyl, existe una subsucesión $(u_{l_k})_{k=1}^\infty$ converge puntualmente casi siempre hacia u. Por lo tanto, por la continuidad de G', $(G' \circ u_{l_k})_{k=1}^\infty$ converge puntualmente casi siempre hacia $G' \circ u$. Como $(G' \circ u_{l_k})_{k=1}^\infty$ está acotada por M en el conjunto acotado Υ, por el teorema de la convergencia dominada, $\|(G' \circ u_{l_k}) - (G' \circ u)\|_{L^{p'}(\Upsilon)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, de lo que se deduce (1.10) para la subsucesión $(u_{l_k})_{k=1}^\infty$.

Tomando en (1.8) los límites (1.9) y (1.10) en la subsucesión $(u_{l_k})_{k=1}^\infty$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (G \circ u)\,\partial_j \varphi = \int_\Upsilon (G \circ u)\,\partial_j \varphi &= \lim_{k\to\infty} \int_\Upsilon (G \circ u_{l_k})\,\partial_j \varphi \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int_\Upsilon (G' \circ u_{l_k})\,\partial_j u_{l_k}\,\varphi = -\int_\Upsilon (G' \circ u)\,\partial_j u\,\varphi \\
&= -\int_\Omega (G' \circ u)\,\partial_j u\,\varphi.
\end{aligned}$$

Si $p = \infty$:
Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:
Existe $\Upsilon \subset\subset \Omega$ / $Sop(\varphi) \subset \Upsilon$.
Como $\overline{\Upsilon}$ es compacto, deducimos que $u \in W^{1,p}(\Upsilon)$ para todo $p \in [1, \infty)$.
Entonces, obtenemos el resultado por el caso anterior. □

Proposición 1.16 (**Fórmula del cambio de variables**).
Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^N$ *dos subconjuntos abiertos y sea* $H : \Omega' \leftrightarrow \Omega$ *un difeomorfismo tal que* $D(H) \in \left(L^\infty(\Omega')\right)^{N\times N}$ *y* $D(H^{-1}) \in \left(L^\infty(\Omega)\right)^{N\times N}$*, donde* $D(H)$ *y* $D(H^{-1})$ *representan las matrices jacobianas de* H *y de* H^{-1} *respectivamente. Sea* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*,* $p \in [1, \infty]$*. Entonces,* $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ *y además:*

$$\partial_j(u \circ H) = \sum_{i=1}^{N} (\partial_i u \circ H)\, \partial_j H_i.$$

Demostración:

Para $p \in [1, \infty)$:
Veamos que $u \circ H \in L^p(\Omega')$:
Por el teorema del cambio de variables:

$$\int_{\Omega'} |u \circ H|^p = \int_\Omega |u|^p \, |\mathcal{J}(H^{-1})| \leq \left\|\mathcal{J}(H^{-1})\right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|u\right\|^p_{L^p(\Omega)} < \infty,$$

donde $\mathcal{J}(H^{-1})$ es el determinante jacobiano de H^{-1}.
Veamos que $(\partial_i u \circ H)\, \partial_j H_i \in L^p(\Omega')$:
Igual que antes, por el teorema del cambio de variables, $\partial_i u \circ H \in L^p(\Omega')$.
Además, $\partial_j H_i \in L^\infty(\Omega')$.
Por lo tanto, $(\partial_i u \circ H)\, \partial_j H_i \in L^p(\Omega')$.

Veamos que $\partial_j(u \circ H) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^N (\partial_i u \circ H)\, \partial_j H_i$:
Existe una sucesión $(u)_{l=1}^\infty$ verificando las condiciones del teorema de Friedrichs.
Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$, existe $\Upsilon' \subset\subset \Omega'$ tal que $Sop(\varphi) \subset \Upsilon'$.
Tengamos en cuenta que como H es un difeomorfismo, $H(\Upsilon') \subset \Omega$ es relativamente compacto.
Para todo $l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_{\Upsilon'} (u_l \circ H)\, \partial_j\varphi &= \int_{\Omega'} (u_l \circ H)\, \partial_j\varphi = -\int_{\Omega'} \partial_j(u_l \circ H)\, \varphi \\ &= -\int_{\Omega'} \sum_{i=1}^N (\partial_i u_l \circ H)\, (\partial_j H_i)\, \varphi = -\int_{\Upsilon'} \sum_{i=1}^N (\partial_i u_l \circ H)\, (\partial_j H_i)\, \varphi. \quad (1.11)\end{aligned}$$

Veamos que:

$$\int_{\Upsilon'} (u_l \circ H)\, \partial_j\varphi \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_{\Upsilon'} (u \circ H)\, \partial_j\varphi : \quad (1.12)$$

Tenemos, por el teorema del cambio de variables:

$$\int_{\Upsilon'} |(u_l \circ H)\, \partial_j\varphi - (u \circ H)\, \partial_j\varphi| = \int_{\Upsilon'} |(u_l \circ H) - (u \circ H)|\, |\partial_j\varphi|$$

$$= \int_{H(\Upsilon')} |u_l - u| \, |\mathcal{J}(H^{-1})| \, |\partial_j \varphi| \leq \left\| \mathcal{J}(H^{-1}) \right\|_{L^\infty(H(\Upsilon'))} \int_{H(\Upsilon')} |u_l - u| \, |\partial_j \varphi|$$

$$\leq \left\| \mathcal{J}(H^{-1}) \right\|_{L^\infty(H(\Upsilon'))} \left\| \partial_j \varphi \right\|_{L^{p'}(H(\Upsilon'))} \left\| u_l - u \right\|_{L^p(H(\Upsilon'))} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

y deducimos (1.12).

Veamos que, para todo $i \leq N$:

$$\int_{\Upsilon'} (\partial_i u_l \circ H) \, (\partial_j H_i) \, \varphi \xrightarrow[l\to\infty]{} \int_{\Upsilon'} (\partial_i u \circ H) \, (\partial_j H_i) \, \varphi : \tag{1.13}$$

Tenemos:

$$\int_{\Upsilon'} |(\partial_i u_l \circ H) \, (\partial_j H_i) \, \varphi - (\partial_i u \circ H) \, (\partial_j H_i) \, \varphi| = \int_{\Upsilon'} |\partial_j H_i| \, |\varphi| \, |(\partial_i u_l \circ H) - (\partial_i u \circ H)|$$

$$\leq \left\| \partial_j H_i \right\|_{L^\infty(\Upsilon')} \int_{\Upsilon'} |\varphi| \, |(\partial_i u_l \circ H) - (\partial_i u \circ H)|$$

$$= \left\| \partial_j H_i \right\|_{L^\infty(\Upsilon')} \int_{H(\Upsilon')} |\varphi| \, |\partial_i u_l - \partial_i u| \, |\mathcal{J}(H^{-1})|$$

$$\leq \left\| \partial_j H_i \right\|_{L^\infty(\Upsilon')} \left\| \mathcal{J}(H^{-1}) \right\|_{L^\infty(H(\Upsilon'))} \int_{H(\Upsilon')} |\varphi| \, |\partial_i u_l - \partial_i u|$$

$$\leq \left\| \partial_j H_i \right\|_{L^\infty(\Upsilon')} \left\| \mathcal{J}(H^{-1}) \right\|_{L^\infty(H(\Upsilon'))} \left\| \varphi \right\|_{L^{p'}(H(\Upsilon'))} \left\| \partial_i u_l - \partial_i u \right\|_{L^p(H(\Upsilon'))},$$

y deducimos (1.13).

Tomando en (1.11) los límites (1.12) y (1.13):

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} (u \circ H) \, \partial_j \varphi = \int_{\Upsilon'} (u \circ H) \, \partial_j \varphi &= \lim_{l\to\infty} \int_{\Upsilon'} (u_l \circ H) \, \partial_j \varphi \\
&= - \lim_{l\to\infty} \int_{\Upsilon'} \sum_{i=1}^{N} (\partial_i u_l \circ H) \, (\partial_j H_i) \, \varphi \\
&= - \int_{\Upsilon'} \sum_{i=1}^{N} (\partial_i u \circ H) \, (\partial_j H_i) \, \varphi = - \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^{N} (\partial_i u \circ H) \, (\partial_j H_i) \, \varphi.
\end{aligned}$$

Si $p = \infty$:
Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$:
Existe $\Upsilon' \subset\subset \Omega'$ / $Sop(\varphi) \subset \Upsilon'$.
Como $\overline{H(\Upsilon')}$ es compacto, $u \in W^{1,p}(H(\Upsilon'))$ para todo $p \in [1, \infty)$.
Entonces, deducimos el resultado del caso anterior. □

1.2. Espacios $W^{m,p}(\Omega)$

Ahora se definirán espacios de Sobolev que incluyan derivadas de orden superior:

Definición 1.17.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío y sea $p \in [1, \infty]$. Se define el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ *como:*

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \;/\; \forall\, \alpha \in {\mathbb{N}_0}^N \;/\; |\alpha| \leq m \;\exists\, g_\alpha \in L^p(\Omega) \;/\; \partial^\alpha u \overset{d}{=} g_\alpha \right\}.$$

Se define en $W^{m,p}(\Omega)$ la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \left\| \cdot \right\|_{W^{m,p}(\Omega)} & : & W^{m,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \sum_{|\alpha| \leq m} \left\| \partial^\alpha u \right\|_{L^p(\Omega)} \end{array}$$

Los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ pueden definirse alternativamente de forma recursiva como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \;/\; \forall\, j \leq N \;\exists\, g_j \in W^{m-1,p}(\Omega) \;/\; \partial_j u \overset{d}{=} g_j \right\}.$$

Esta definición alternativa, unida a las propiedades de los espacios $W^{1,p}(\Omega)$ demostradas anteriormente, permiten demostrar propiedades análogas a para los espacios $W^{m,p}(\Omega)$.

1.3. Los Espacios de Hilbert $H^m(\Omega)$

Al igual que los espacios $L^2(\Omega)$, los espacios de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ pueden dotarse de un producto interno que tenga asociada una norma equivalente a la norma de Sobolev.

Definición 1.18.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío. Se denota $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.
Se define:

$$\begin{array}{rcccl} \left\langle \cdot, \cdot \right\rangle_{H^1(\Omega)} & : & H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (u, v) & \longmapsto & \left\langle u, v \right\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \left\langle \partial_j u, \partial_j v \right\rangle_{L^2(\Omega)} \end{array}$$

$\left\langle \cdot, \cdot \right\rangle_{H^1(\Omega)}$ es un producto escalar en $H^1(\Omega)$, y la norma del espacio de Sobolev $\left\| \cdot \right\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ es equivalente a la asociada a este producto escalar:

$$\left\| u \right\|_{H^1(\Omega)} := \left(\left\| u \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \left\| \partial_j u \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.14}$$

Del mismo modo, se puede definir un producto interno coherente en los espacios $W^{m,2}(\Omega)$:

Definición 1.19.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ *abierto no vacío. Se denota* $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$.
Se define:

$$\begin{array}{rccl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m(\Omega)} & : & H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (u, v) & \longmapsto & \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \end{array}$$

Análogamente, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m(\Omega)}$ es un producto escalar en $H^m(\Omega)$ que tiene por norma asociada:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.15}$$

que es equivalente a la del espacio de Sobolev, $\| \cdot \|_{W^{m,2}(\Omega)}$.

Además de la completitud de la norma de Sobolev se deduce que $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Capítulo 2

Operadores extensión

En el capítulo anterior se anticipó que bajo ciertas condiciones del conjunto Ω se puede aproximar una función de $W^{1,p}(\Omega)$ por restricciones de funciones test en $\mathbb{R}^N$. Para ello, ha de poder extenderse una función de $W^{1,p}(\Omega)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ de forma continua. En este sentido va la siguiente:

Definición 2.1.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ abierto no vacío y sea $p \in [1, \infty]$. Un operador extensión *para $W^{1,p}(\Omega)$ es una aplicación:*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

tal que:

i) $(Pu)_{|\Omega} = u$ *para toda* $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

ii) Existe $C = C(\Omega) > 0$ tal que:

$$\left\| Pu \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\| u \right\|_{L^p(\Omega)},$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

iii) Existe $\overline{C} = \overline{C}(\Omega) > 0$ tal que:

$$\left\| Pu \right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \overline{C} \left\| u \right\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

El próximo objeto de estudio es una condición de existencia de operadores extensión, concretamente la regularidad de la frontera del conjunto Ω. Para formalizar esto, se introduce la siguiente notación:

Definición 2.2. (Notación)
para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ escribimos:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N) = (\mathbf{x}', x_N);\ \mathbf{x}' = (x_1, x_2, ..., x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Se definen los siguientes conjuntos:

- $\mathbb{R}^N_+ := \{\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_N) \ / \ x_N > 0\}$.
- $Q := \{\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_N) \ / \ \|\mathbf{x}'\| < 1, \ |x_N| < 1\} = B_{\mathbb{R}^{N-1}}(\mathbf{0}, 1) \times (-1, 1)$.
- $Q_+ := Q \cap \mathbb{R}^N_+$.
- $Q_0 := \{\mathbf{x} = (\mathbf{x}', 0) \ / \ \|\mathbf{x}'\| < 1\} = B_{\mathbb{R}^{N-1}}(\mathbf{0}, 1) \times \{0\}$.

Definición 2.3.
Se dice que un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto no vacío es de clase $\mathcal{C}^m$ *si para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^N$ con $\mathbf{x} \in U$ y un homeomorfismo $H : \overline{Q} \to \overline{U}$ tales que:*

- $H \in \mathcal{C}^m(Q)$.
- $H^{-1} \in \mathcal{C}^m(U)$.
- $H(Q_+) = U \cap \Omega$.
- $H(Q_0) = U \cap \partial\Omega$.

Se dice que el par (U, H) es una carta local *de $\partial\Omega$. Una familia de cartas locales de $\partial\Omega$ que la recubre es un* atlas *de $\partial\Omega$.*

Lema 2.4 (**Extensión por reflexión**).
Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto de la forma:

$$A = A_0 \times (-R, R),$$

con $A_0 \subset \mathbb{R}^{N-1}$ abierto. Sea:

$$A_+ := A \cap \mathbb{R}^N_+.$$

Para $f : A_+ \to \mathbb{R}$ definamos la extensión por reflexión de u a A:

$$f^{\square}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}', x_N) & x_N > 0 \\ f(\mathbf{x}', -x_N) & x_N < 0 \end{cases}. \tag{2.1}$$

Sea $u \in W^{1,p}(A_+)$. Entonces, $u^{\square} \in W^{1,p}(A)$ y además:

- $\left\|u^{\square}\right\|_{L^p(A)} \leq 2 \left\|u\right\|_{L^p(A_+)}$.
- $\left\|u^{\square}\right\|_{W^{1,p}(A)} \leq 2 \left\|u\right\|_{W^{1,p}(A_+)}$.

Demostración:
Para $f : A_+ \to \mathbb{R}$ definamos la extensión impar a A:

$$f^{\boxminus}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}', x_N) & x_N > 0 \\ -f(\mathbf{x}', -x_N) & x_N < 0 \end{cases}. \tag{2.2}$$

Veamos que $\partial_j u^{\square} \stackrel{d}{=} (\partial_j u)^{\square}$ para todo $j \leq N-1$ y $\partial_N u^{\square} \stackrel{d}{=} (\partial_N u)^{\boxminus}$:
Para ello, usaremos una función $\eta \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$ y:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{1}{2} \\ 1 & t > 1 \end{cases},$$

y definimos, para todo $l \in \mathbb{N}$:

$$\eta_l(t) := \eta(l\, t).$$

Observemos que:

$$\eta_l(t) = \eta(l\, t) \xrightarrow[l \to \infty]{} 1.$$

Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(A)$:
Definamos:

$$\widetilde{\varphi}(\mathbf{x}', x_N) := \varphi(\mathbf{x}', -x_N).$$

Para todo $j \leq N-1$:
Haciendo un cambio de variable:

$$\begin{aligned} \int_A u^{\square}\, \partial_j \varphi &= \int_{A_+} u^{\square}\, \partial_j \varphi + \int_{A \setminus A_+} u^{\square}\, \partial_j \varphi \\ &= \int_{A_+} u\, \partial_j \varphi + \int_{A_+} u\, \partial_j \widetilde{\varphi} = \int_{A_+} u\, \partial_j (\varphi + \widetilde{\varphi}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Notemos que en general $\varphi + \widetilde{\varphi} \notin \mathcal{D}(A_+)$, pues no se anula necesariamente en entornos de puntos de $A_0 \times \{0\} \subset \partial A_+$ pero si definimos:

$$\psi_l(\mathbf{x}', x_N) := \eta_l(x_N)\, (\varphi + \widetilde{\varphi})(\mathbf{x}', x_N),$$

$\psi_l \in \mathcal{D}(A_+)$ para todo $l \in \mathbb{N}$, y por tanto tenemos:

$$\int_{A_+} u\, \partial_j \psi_l = -\int_{A_+} \partial_j u\, \psi_l,$$

donde:

$$\partial_j \psi_l(\mathbf{x}', x_N) = \partial_j \Big(\eta_l(x_N)\, (\varphi + \widetilde{\varphi})(\mathbf{x}', x_N) \Big) = \eta_l(x_N)\, \partial_j (\varphi + \widetilde{\varphi})(\mathbf{x}', x_N).$$

Además, como $\eta_l(t) \xrightarrow[l \to \infty]{} 1$, por el teorema de la convergencia dominada:

$$\begin{aligned} \int_{A_+} u\, \partial_j (\varphi + \widetilde{\varphi}) &= \lim_{l \to \infty} \int_{A_+} u\, \partial_j \psi_l = -\lim_{l \to \infty} \int_{A_+} (\partial_j u)\, \psi_l \\ &= -\int_{A_+} (\partial_j u)\, (\varphi + \widetilde{\varphi}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Encadenando (2.3) y (2.4) y deshaciendo el cambio de variable de antes:

$$\begin{aligned}\int_A u^\square\,\partial_j\varphi &= \int_{A_+} u\,\partial_j(\varphi+\widetilde{\varphi}) = -\int_{A_+}(\partial_j u)\,(\varphi+\widetilde{\varphi})\\ &= -\int_{A_+}(\partial_j u)\,\varphi - \int_{A_+}(\partial_j u)\,\widetilde{\varphi}\\ &= -\int_{A_+}(\partial_j u)^\square\,\varphi - \int_{A\setminus A_+}(\partial_j u)^\square\,\varphi = -\int_A(\partial_j u)^\square\,\varphi.\end{aligned}$$

Para $j=N$:
Haciendo un cambio de variable como antes

$$\begin{aligned}\int_A u^\square\,\partial_N\varphi &= \int_{A_+} u^\square\,\partial_N\varphi + \int_{A\setminus A_+} u^\square\,\partial_N\varphi\\ &= \int_{A_+} u\,\partial_N\varphi - \int_{A_+} u\,\partial_N\widetilde{\varphi} = \int_{A_+} u\,\partial_N(\varphi-\widetilde{\varphi}).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Notemos que $(\varphi-\widetilde{\varphi})(\mathbf{x}',0)=0$ por ser $\varphi-\widetilde{\varphi}$ simétrica impar respecto de $\{x_N=0\}$.

Veamos que existe una constante $M>0$ tal que:

$$\big|(\varphi-\widetilde{\varphi})(\mathbf{x}',x_N)\big| \le M\,|x_N|,$$

para todo $(\mathbf{x}',x_N)\in A$:
Como por la forma del conjunto A el segmento que une $(\mathbf{x}',0)$ con $(\mathbf{x}',x_N)$ está contenido en A, podemos aplicar el teorema del valor medio a estos dos puntos:
Existe $\lambda\in[0,1]$ tal que:

$$(\varphi-\widetilde{\varphi})(\mathbf{x}',x_N)-(\varphi-\widetilde{\varphi})(\mathbf{x}',0) = \partial_N(\varphi-\widetilde{\varphi})(\mathbf{x}',\lambda\,x_N)\,x_N.$$

Sea $M=\sup\big\{|\partial_N(\varphi-\widetilde{\varphi})(\mathbf{x}',\lambda\,x_N)| \;/\; (\mathbf{x}',x_N)\in A,\ \lambda\in[0,1]\big\}$. Entonces:

$$\big|(\varphi-\widetilde{\varphi})(\mathbf{x}',x_N)\big| \le M\,|x_N|.$$

Definamos:

$$\widetilde{\psi}_l(\mathbf{x}',x_N) := \eta_l(x_N)\,(\varphi-\widetilde{\varphi})(\mathbf{x}',x_N);$$

$\widetilde{\psi}_l\in\mathcal{D}(A_+)$ para todo $l\in\mathbb{N}$. Para estas funciones tenemos:

$$\int_{A_+} u\,\partial_N\widetilde{\psi}_l = -\int_{A_+}(\partial_N u)\,\widetilde{\psi}_l,$$

donde:

$$\begin{aligned}\partial_N\widetilde{\psi}_l(\mathbf{x}',x_N) &= \partial_N\Big(\eta(l\,x_N)\,(\varphi-\widetilde{\varphi})(\mathbf{x}',x_N)\Big)\\ &= l\,\eta'(l\,x_N)\,(\varphi-\widetilde{\varphi})(\mathbf{x}',x_N)+\eta(l\,x_N)\,\partial_N(\varphi-\widetilde{\varphi})(\mathbf{x}',x_N).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Veamos que:

$$I_l := \int_{A_+} l\, u(\mathbf{x}', x_N)\, \eta'(l\, x_N)\, (\varphi - \widetilde{\varphi})(\mathbf{x}', x_N)\, d(\mathbf{x}', x_N) \xrightarrow[l\to\infty]{} 0 :$$

Tengamos en cuenta que, como $\eta(l\, x_N) = 0$ para todo $t > 1$, $\eta'(x_N) = 0$ para todo $x_N > \frac{1}{l}$.
Entonces, usando el teorema de Fubini en $A_+ = A_0 \times (0, R)$:

$$\begin{aligned} |I_l| &\leq l \int_0^{\frac{1}{l}} \left(|\eta'(l\, x_N)| \int_{A_0} \left| u(\mathbf{x}', x_N)\, (\varphi - \widetilde{\varphi})(\mathbf{x}', x_N) \right| d\mathbf{x}' \right) dx_n \\ &= l\, M \int_0^{\frac{1}{l}} \left(\eta'(l\, x_N)\, x_N \int_{A_0} \left| u(\mathbf{x}', x_N) \right| d\mathbf{x}' \right) dx_N \\ &\leq M\, \|\eta'\|_\infty \int_0^{\frac{1}{l}} \left(\int_{A_0} \left| u(\mathbf{x}', x_N) \right| d\mathbf{x}' \right) dx_N \xrightarrow[l\to\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Por lo tanto, como $\eta_l(t) \xrightarrow[l\to\infty]{} 1$, aplicando el teorema de la convergencia dominada y teniendo en cuenta (2.6) y (2.7):

$$\begin{aligned} \int_{A_+} (\partial_N u)\, (\varphi - \widetilde{\varphi}) &= \lim_{l\to\infty} \int_{A_+} (\partial_N u)\, \widetilde{\psi}_l = -\lim_{l\to\infty} \int_{A_+} u\, \partial_N \widetilde{\psi}_l \\ &= -\lim_{l\to\infty} I_l - \int_{A_+} u\, \partial_N(\varphi - \widetilde{\varphi}) \\ &= -\int_{A_+} u\, \partial_N(\varphi - \widetilde{\varphi}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Encadenando (2.5) y (2.8) y deshaciendo el cambio de variable de antes:

$$\begin{aligned} \int_A u^{\square}\, \partial_N \varphi = \int_{A_+} u\, \partial_N(\varphi - \widetilde{\varphi}) &= -\int_{A_+} (\partial_N u)\, (\varphi - \widetilde{\varphi}) \\ &= -\int_{A_+} (\partial_N u)\, \varphi + \int_{A_+} (\partial_N u)\, \widetilde{\varphi} \\ &= -\int_{A_+} (\partial_N u)^{\boxminus}\, \varphi - \int_{A \setminus A_+} (\partial_N u)^{\boxminus}\, \varphi = -\int_A (\partial_N u)^{\boxminus}\, \varphi. \end{aligned}$$

Es evidente que $u^{\square}$ extiende a u. Además, como las extensiones de u y de sus derivadas se construyen o bien de forma par o bien de forma impar, es inmediato que:

- $\left\| u^{\square} \right\|_{L^p(A)} \leq 2 \left\| u \right\|_{L^p(A_+)}$.
- $\left\| u^{\square} \right\|_{W^{1,p}(A)} \leq 2 \left\| u \right\|_{W^{1,p}(A_+)}$.

$\square$

En particular, este lema sirve para extender funciones de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, o de $W^{1,p}(Q_+)$ a $W^{1,p}(Q)$.

Teorema 2.5 (Operador extensión).
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto de clase $\mathcal{C}^1$ o bien con frontera $\partial\Omega$ acotada o bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Existe un operador extensión (definición 2.1):

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demostración:
El lema anterior prueba el resultado para $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

Para Ω de clase $\mathcal{C}^1$ con frontera $\partial\Omega$ acotada usaremos particiones de la unidad (ver teorema A.2).
Sea $\{(U_{\mathbf{x}}, H^{\mathbf{x}})\}_{\mathbf{x}\in\partial\Omega}$ un atlas (ver definición 2.3) de $\partial\Omega$.
Como $\partial\Omega$ es acotado, es compacto, y podemos extraer un subatlas finito $\{(U_k, H^k)\}_{k=1}^n = \{(U_{\mathbf{x}_k}, H^{\mathbf{x}_k})\}_{k=1}^n$.
Pongamos $U_0 = \mathbb{R}^N \backslash \partial\Omega$.
Existe una partición de la unidad de $\mathbb{R}^N$ subordinada al recubrimiento $\{U_k\}_{k=0}^n$, es decir, funciones $\{\theta_k\}_{k=0}^n$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ verificando:

- *Sop*$(\theta_k) \subset U_k$ para todo k, $0 \le k \le n$.
- $0 \le \theta_k \le 1$ para todo k, $0 \le k \le n$.
- $\sum_{k=0}^n \theta_k = 1$.

Para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$:
Definamos $u_k = \theta_k \, u$;

$$u = \sum_{k=0}^n \theta_k \, u = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Extendamos u_k:

Extensión de u_0:
Sea $\overline{u_k}$ la extensión de u_0 a $\mathbb{R}^N$ por 0, como en la proposición 1.6:

$$\overline{u_k}(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_k(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases}.$$

$\theta_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y:

$$1 = \sum_{k=0}^n \theta_k; \quad 0 = \sum_{k=0}^n \nabla\theta_k; \quad \nabla\theta_0 = -\sum_{k=1}^n \nabla\theta_k \in \big(L^\infty(\Omega)\big)^N.$$

Además *Sop*$(\theta_0) \subset U_0 = \mathbb{R}^N \backslash \partial\Omega$.
Por tanto, por la citada proposición, $\overline{u_0} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y:

$$\partial_j \overline{u_0} = (\partial_j \theta_0)\, \overline{u} + \theta_0 \, \overline{\partial_j u}.$$

Entonces:

i) $\overline{u_0}$ extiende a u_0 por definición.

ii) $\left\|\overline{u_0}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left\|u_0\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\|u\right\|_{L^p(\Omega)}$ por construcción.

iii) Veamos que existe $\overline{C}_0 > 0$ tal que $\left\|\overline{u_0}\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \overline{C}_0 \left\|u\right\|_{W^{1,p}(\Omega)}$:

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{u_0}\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &= \left\|\overline{u_0}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \sum_{j=1}^{N} \left\|\partial_j \overline{u_0}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \left\|\overline{u_0}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \sum_{j=1}^{N} \Big(\left\|(\partial_j\theta_0)\, \overline{u}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \left\|\theta_0\, \overline{\partial_j u}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \Big) \\
&= \left\|u_0\right\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \Big(\left\|(\partial_j\theta_0)\, u\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\theta_0\, \partial_j u\right\|_{L^p(\Omega)} \Big) \\
&\leq \Big(1 + \sum_{j=1}^{N} \left\|\partial_j\theta_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}\Big) \left\|u\right\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \left\|\partial_j u\right\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \Big(1 + \sum_{j=1}^{N} \left\|\partial_j\theta_0\right\|_{L^\infty(\Omega)}\Big) \left\|u\right\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Extensión de u_k, $1 \leq k \leq n$:
Sea:

$$v_k = u_{|_{U_k \cap \Omega}} \circ H^k : Q_+ \to U_k \cap \Omega \to \mathbb{R}.$$

H^k es un homeomorfismo entre $\overline{U_k}$ y $\overline{Q}$ luego $\overline{U_k}$ ha de ser compacto.
Por tanto, $D(H^k) \in \big(L^\infty(Q)\big)^{N\times N}$ y $D(H^k)^{-1} \in \big(L^\infty(U_k)\big)^{N\times N}$.
Entonces, por la fórmula del cambio de variables (proposición 1.16), se deduce que $v_k \in W^{1,p}(Q_+)$ y:

$$\partial_j v_k = \sum_{i=1}^{N} (\partial_i u_k \circ H^k)\, \partial_j H_i^k.$$

Sea $v_k^\square$ la extensión por reflexión de v_k a Q, según (2.1), y sea:

$$w_k = v_k^\square \circ (H^k)^{-1} : U_k \to Q \to \mathbb{R}.$$

Nuevamente, por la fórmula del cambio de variables, $w_k \in W^{1,p}(U_k)$ y:

$$\partial_j w_k = \sum_{i=1}^{N} (\partial_i v_k^\square \circ (H^k)^{-1})\, \partial_j (H^k)_i^{-1}.$$

Sea $\widehat{u_k}$ la extensión a $\mathbb{R}^N$:

$$\widehat{u_k}(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \theta_k(\mathbf{x})\, w_k(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in U_k \\ 0 & \mathbf{x} \notin U_k \end{array} \right\} = \overline{\theta_k\, w_k}(\mathbf{x}).$$

$\theta_k \in \mathcal{D}(U_k)$. Por tanto, por la proposición 1.6, $\widehat{u_k} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y:

$$\partial_j \widehat{u_k} = (\partial_j \theta_k)\, \overline{w_k} + \theta_k\, \overline{\partial_j w_k}.$$

Entonces:

i) $\widehat{u_k}$ extiende a u_k:
Para todo $\mathbf{x} \in \Omega$:
Si $\mathbf{x} \in U_k$, $(H^k)^{-1}(\mathbf{x}) \in Q_+$;

$$w_k(\mathbf{x}) = (v_k^\square \circ (H^k)^{-1})(\mathbf{x}) = (v_k \circ (H^k)^{-1})(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x});$$

$$\widehat{u_k}(\mathbf{x}) = \theta_k(\mathbf{x})\, w_k(\mathbf{x}) = \theta_k(\mathbf{x})\, u(\mathbf{x}) = u_k(\mathbf{x}).$$

Si $\mathbf{x} \notin U_k$, $\theta_k(\mathbf{x}) = 0$;

$$\widehat{u_k}(\mathbf{x}) = 0 = \theta_k(\mathbf{x})\, u(\mathbf{x}) = u_k(\mathbf{x}).$$

ii) Escribamos la expresión de $\widehat{u_k}$ explícitamente:

$$\widehat{u_k} = \overline{\theta_k \left((u \circ H_k)^\square \circ (H_k)^{-1}\right)}.$$

Vamos a probar que existe $C_k > 0$ tal que $\left\|\widehat{u_k}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_k \left\|u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.
Para $p < \infty$:

$$\begin{aligned}
\left\|w_k\right\|_{L^p(U_k)} &= \left\|v_k^\square \circ (H^k)^{-1}\right\|_{L^p(U_k)} \leq \left\|\mathcal{J}(H^k)^{-1}\right\|_{L^\infty(Q)} \left\|v_k^\square\right\|_{L^p(Q)} \\
&\leq 2 \left\|\mathcal{J}(H^k)^{-1}\right\|_{L^\infty(Q)} \left\|v_k\right\|_{L^p(Q_+)} \\
&= 2 \left\|\mathcal{J}(H^k)^{-1}\right\|_{L^\infty(Q)} \left\|u \circ H_k\right\|_{L^p(Q_+)} \\
&\leq 2 \left\|\mathcal{J}(H^k)^{-1}\right\|_{L^\infty(Q)} \left\|\mathcal{J}H^k\right\|_{L^\infty(U_k \cap \Omega)} \left\|u\right\|_{L^p(U_k \cap \Omega)} \\
&\leq 2 \left\|\mathcal{J}(H^k)^{-1}\right\|_{L^\infty(Q)} \left\|\mathcal{J}H^k\right\|_{L^\infty(U_k \cap \Omega)} \left\|u\right\|_{L^p(\Omega)}; \\
\left\|\widehat{u_k}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \left\|\theta_k\, w_k\right\|_{L^p(U_k)} \leq \left\|\theta_k\right\|_{L^\infty(U_k)} \left\|w_k\right\|_{L^p(U_k)} = \left\|w_k\right\|_{L^p(U_k)} \\
&\leq 2 \left\|\mathcal{J}(H^k)^{-1}\right\|_{L^\infty(Q)} \left\|\mathcal{J}H^k\right\|_{L^\infty(U_k \cap \Omega)} \left\|u\right\|_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema del cambio de variables y el lema de extensión por reflexión (2.4).
Para $p = \infty$:

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{u_k}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &= \left\|\theta_k\, w_k\right\|_{L^\infty(U_k)} \leq \left\|w_k\right\|_{L^\infty(U_k)} = \left\|v_k^\square \circ (H^k)^{-1}\right\|_{L^\infty(U_k)} \\
&= \left\|v_k^\square\right\|_{L^\infty(Q)} \leq 2 \left\|v_k\right\|_{L^\infty(Q_+)} = 2 \left\|u \circ H_k\right\|_{L^\infty(Q_+)} \\
&= 2 \left\|u\right\|_{L^\infty(U_k \cap \Omega)} \leq 2 \left\|u\right\|_{L^\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

iii) Si tenemos en cuenta que en U_k:

$$\partial_j \widehat{u_k} = (\partial_j \theta_k)\, w_k + \theta_k \sum_{s=1}^{N} (\partial_s v_k^{\square} \circ (H^k)^{-1})\, \partial_j (H^k)_s^{-1},$$

y que en $Q_+ = (H^k)^{-1}(U_k \cap \Omega)$:

$$\partial_s v_k = \sum_{r=1}^{N} (\partial_r u \circ H^k)\, \partial_s H_r^k,$$

por un procedimiento análogo al anterior, probamos que existe $\overline{C}_k > 0$ tal que:

$$\left\| \widehat{u_k} \right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \overline{C}_k \left\| u \right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Por tanto, podemos tomar como operador extensión:

$$\begin{array}{rcccl} P & : & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ & & u & \longmapsto & \overline{\theta_0\, u_0} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{\theta_k\, u_k} \end{array}$$

$\square$

Ahora se puede demostrar la densidad de las restricciones de funciones test en $W^{1,p}(\Omega)$, con la hipótesis de regularidad de $\partial\Omega$.

Corolario 2.6 (Densidad).
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto de clase $\mathcal{C}^1$ con frontera acotada. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. Existe una sucesión $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que:

$$u_{l|_\Omega} \xrightarrow[l \to \infty]{} u,$$

en $W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración:
Sea $P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ un operador extensión.
Existe una sucesión $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ convergente hacia Pu en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
Tenemos que $(u_{l|_\Omega})_{l=1}^{\infty}$ converge hacia u en $W^{1,p}(\Omega)$.

$\square$

Capítulo 3

Espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$. Desigualdad de Poincaré

Ya se ha mencionado que en general $\mathcal{D}(\Omega)$ no es denso en $W^{1,p}(\Omega)$. Se estudiarán ahora las adherencias de los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ en los espacios de Sobolev.

3.1. Los Espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definición 3.1.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y sea $p \in [1, \infty)$. Se define el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la adherencia en $W^{m,p}(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$;

$$W_0^{m,p}(\Omega) := Cl_{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}\big(\mathcal{D}(\Omega)\big).$$

Denotamos para los espacios de Hilbert:

$$H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega).$$

Por el teorema 1.10, $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Proposición 3.2.
Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, tal que $Sop(u) \subset \Omega$ es compacto. Entonces, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración:
Sea $\Upsilon \subset\subset \Omega$ tal que $Sop(u) \subset \Upsilon$.
Sea $\theta \in \mathcal{D}(\Upsilon)$ tal que $\theta \equiv 1$ en $Sop(u)$, que existe por la versión $\mathcal{C}^\infty$ del lema de Urysohn (teorema A.1). Tenemos que $u = \theta\, u$.
Sea $(u_l)_{l=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ que verifique las condiciones del teorema de Friedrichs.
Entonces:

- $\theta\, u_{l|_\Omega} \xrightarrow[l\to\infty]{} \theta\, u$ en $L^p(\Omega)$,
- $\nabla(\theta\, u_l)_{|_\Upsilon} \xrightarrow[l\to\infty]{} \nabla(\theta\, u)_{|_\Upsilon} = \nabla u_{|_\Upsilon}$ en $\big(L^p(\Upsilon)\big)^N$,

donde $\theta\, u_l \in \mathcal{D}(\Omega)$ para todo $l \in \mathbb{N}$.
Como $\theta, u \equiv 0$ en $\Omega\backslash\Upsilon$, se deduce que:

$$\nabla(\theta\, u_l) \xrightarrow[l\to\infty]{} \nabla u \;\text{ en }\; \big(L^p(\Omega)\big)^N.$$

Luego:

$$\theta\, u_l \xrightarrow[l\to\infty]{} u \;\text{ en }\; W^{1,p}(\Omega).$$

$\square$

Proposición 3.3.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $p \in [1,\infty)$. Son equivalentes:

a) $u \equiv 0$ *en* $\partial\Omega$.

b) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ *b)*:
Caso 1: $Sop(u)$ es acotado.
Fijemos $G \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$|G(t)| \leq |t|,$$

y:

$$G(t) = \begin{cases} 0 & |t| \leq 1 \\ t & |t| \geq 2 \end{cases}.$$

Para todo $l \in \mathbb{N}$ sea:

$$u_l = \frac{1}{l}\big(G \circ (l\, u)\big).$$

Por la regla de la cadena (proposición 1.15), $u_l \in W^{1,p}(\Omega)$ y:

$$\partial_j u_l = \frac{1}{l}\big(G' \circ (l\, u)\big)\, l\, \partial_j u = \big(G' \circ (l\, u)\big)\, \partial_j u.$$

Como $u \equiv 0$ en $\partial\Omega$, de deduce que:

$$Sop(u_l) \subset \left\{\mathbf{x} \in \Omega \;/\; |u(\mathbf{x})| \geq \frac{1}{l}\right\} \subset Sop(u).$$

Como $Sop(u)$ es acotado, $Sop(u_l)$ es compacto para todo $l \in \mathbb{N}$.

Veamos que $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ converge en $W^{1,p}(\Omega)$:
Tengamos en cuenta que $u_l \leq u$ y $u_l = u$ si $u \geq \frac{2}{l}$. Entonces:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |u_l - u|^p &= \int_{\left\{u<\frac{2}{l}\right\}} |u_l - u|^p \leq \int_{\left\{u<\frac{2}{l}\right\}} |u_l|^p + \int_{\left\{u<\frac{2}{l}\right\}} |u|^p \\ &\leq 2\int_{\left\{u<\frac{2}{l}\right\}} |u|^p \leq 2\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{p}} m\big(Sop(u)\big) \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Por otra parte, para probar la convergencia de las derivadas, tengamos en cuenta que:

$$G'(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & |t| \leq 1 \\ 1 & |t| \geq 2 \end{array}\right. .$$

Como G' es continua, está acotada en el compacto $[-2,2]$. Luego G' está acotada. Por tanto:

$$|\partial_j u_l| \leq \big|G' \circ (l\,u)\big|\,|\partial_j u| \leq \|G'\|_{\infty}\,|\partial_j u|.$$

Además, $(\partial_j u_l)_{l=1}^{\infty}$ converge puntualmente:

- Si $\mathbf{x} \in \Omega$, $u(\mathbf{x}) \neq 0$:
  Existe $l_{\mathbf{x}} \in \mathbb{N}$ tal que $l_{\mathbf{x}}\,|u(\mathbf{x})| > 2$. Para todo $l \geq l_{\mathbf{x}}$:

$$\partial_j u_l(\mathbf{x}) = \big[G' \circ \big(l\,u(\mathbf{x})\big)\big]\,\partial_j u(\mathbf{x}) = \partial_j u(\mathbf{x}).$$

- Si $\mathbf{x} \in \Omega$, $u(\mathbf{x}) = 0$:

$$\partial_j u_l(\mathbf{x}) = G'(0)\,\partial_j u(\mathbf{x}) = 0.$$

Entonces, por el teorema de la convergencia dominada, $(\partial_j u_l)_{l=1}^{\infty}$ converge en $L^p(\Omega)$.
Luego, por el lema 1.2, $(\partial_j u)_{l=1}^{\infty}$ converge en $W^{1,p}(\Omega)$ y ha de hacerlo hacia u.
Notemos que esto implica que el conjunto:

$$\big\{\mathbf{x} \in \Omega \,/\, u(\mathbf{x}) = 0, \nabla u(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}\big\},$$

es de medida nula.

Caso 2: caso general.
Consideramos la sucesión $(\zeta_l)_{l=1}^{\infty}$ definida como en los lemas 1.8 y 1.9. Por estos dos lemas, deducimos que $(\zeta_l\,u)_{l=1}^{\infty}$ converge hacia u en $W^{1,p}(\Omega)$.
Además, $Sop(\zeta_l\,u) \subset \overline{\Omega} \cap \overline{B}(\mathbf{0}, 2l)$ para todo $l \in \mathbb{N}$, y por el caso anterior, $\zeta_l\,u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo $l \in \mathbb{N}$.
Luego $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

$b) \Rightarrow a)$:
Veamos primero que, dada $u \in W_0^{1,p}(Q_+) \cap \mathcal{C}(\overline{Q_+})$, $u \equiv 0$ en Q_0:
Sea $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{D}((Q_+)$ convergente hacia u en $W_0^{1,p}(Q_+)$.
Para todo $(\mathbf{x}', x_N) \in Q_+$:

$$|u_l(\mathbf{x}', x_N)| = \left| \int_0^{x_N} \partial_N u_l(\mathbf{x}', t)\, dt \right| \leq \int_0^{x_N} |\partial_N u_l(\mathbf{x}', t)|\, dt.$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{\|\mathbf{x}'\|<1\}} & \left(\int_0^{\varepsilon} |u_l(\mathbf{x}', x_N)|\, dx_N \right) d\mathbf{x}' \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{\|\mathbf{x}'\|<1\}} \left[\int_0^{\varepsilon} \left(\int_0^{x_N} |\partial_N u_l(\mathbf{x}', t)|\, dt \right) dx_N \right] d\mathbf{x}' \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{\|\mathbf{x}'\|<1\}} \left[\int_0^{\varepsilon} \left(\int_0^{\varepsilon} |\partial_N u_l(\mathbf{x}', t)|\, dt \right) dx_N \right] d\mathbf{x}' \\ & \leq \int_{\{\|\mathbf{x}'\|<1\}} \left(\int_0^{\varepsilon} |\partial_N u_l(\mathbf{x}', t)|\, dt \right) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Veamos ahora los límites del primer y del último término:

$$\begin{aligned} \int_{\{\|\mathbf{x}'\|<1\}} & \left(\int_0^{\varepsilon} |u_l(\mathbf{x}', s) - u(\mathbf{x}', s)|\, ds \right) d\mathbf{x}' \\ & \leq \int_{\{\|\mathbf{x}'\|<1\}} \left(\int_0^{1} |u_l(\mathbf{x}', s) - u(\mathbf{x}', s)|\, ds \right) d\mathbf{x}' \\ & = \int_{Q_+} |u_l - u| \leq \big(m(Q_+)\big)^{\frac{1}{p'}} \big\|u_l - u\big\|_{L^p(Q_+)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned} \int_{\{\|\mathbf{x}'\|<1\}} & \left(\int_0^{\varepsilon} |\partial_N u_l(\mathbf{x}', s) - \partial_N u(\mathbf{x}', s)|\, ds \right) d\mathbf{x}' \\ & \leq \int_{\{\|\mathbf{x}'\|<1\}} \left(\int_0^{1} |\partial_N u_l(\mathbf{x}', s) - \partial_N u(\mathbf{x}', s)|\, ds \right) d\mathbf{x}' \\ & = \int_{Q_+} |\partial_N u_l - \partial_N u| \leq \big(m(Q_+)\big)^{\frac{1}{p'}} \big\|\partial_N u_l - \partial_N u\big\|_{L^p(Q_+)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

por la desigualdad de Hölder, siendo p' el exponente conjugado de p; si $p' = \infty$, $\big(m(Q_+)\big)^{\frac{1}{p'}} = 1$.
Tomando los límites cuando $l \to \infty$ en (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{\|\mathbf{x}'\|<1\}} & \left(\int_0^{\varepsilon} |u(\mathbf{x}', x_N)|\, dx_N \right) d\mathbf{x}' \\ & \leq \int_{\{\|\mathbf{x}'\|<1\}} \left(\int_0^{\varepsilon} |\partial_N u(\mathbf{x}', t)|\, dt \right) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por el teorema fundamental del cálculo integral:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} |u(\mathbf{x}', x_N)|\, dx_N = |u(\mathbf{x}', 0)|,$$

ya que u es continua.
Además:

$$\int_0^{\varepsilon} |u(\mathbf{x}', s)|\, ds \leq \int_0^{1} |u(\mathbf{x}', s)|\, ds,$$

$$\int_0^{\varepsilon} |\partial_N u(\mathbf{x}', s)|\, ds \leq \int_0^{1} |\partial_N u(\mathbf{x}', s)|\, ds,$$

siendo $\int_0^1 |u(\mathbf{x}', s)|\, ds$, $\int_0^1 |\partial_N u(\mathbf{x}', s)|\, ds$ integrables en $\{\|\mathbf{x}'\| < 1\}$ por ser $u, \partial_N u$ integrables en Q_+, ya que $L^p(Q_+) \subset L^1(Q_+)$ por ser Q_+ de medida finita.
Luego, tomando límites cuando $\varepsilon \to 0$ en (3.2), por el teorema de la convergencia dominada:

$$\int_{\{\|\mathbf{x}'\|\}<1} |u(\mathbf{x}', 0)|\, d\mathbf{x}' \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{\|\mathbf{x}'\|\}<1} \left(\int_0^{\varepsilon} |\partial_N u(\mathbf{x}', t)|\, dt\right) d\mathbf{x}' = 0.$$

Por tanto, ha de ser $u(\mathbf{x}', 0) = 0$ para casi todo $\mathbf{x}'$ con $\|\mathbf{x}'\| < 1$.
Como u es continua, ha de ser entonces $u(\mathbf{x}', 0) = 0$ para todo $\mathbf{x}'$ con $\|\mathbf{x}'\| \leq 1$.

Consideremos ahora una función $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:
Sea $\{(U_i, H^i)\}_{i\in I}$ un atlas de $\partial\Omega$. Pongamos $V = \mathbb{R}^N \backslash \partial\Omega$.
Existe una partición de la unidad de $\mathbb{R}^N$ subordinada al recubrimiento $\Gamma = \{V\} \cup \{U_i\}_{i\in I}$, es decir, funciones $\{\vartheta\} \cup \{\theta_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ verificando:

- $Sop(\vartheta) \subset V$, $Sop(\theta_i) \subset U_i$ para todo $i \in I$.
- $0 \leq \vartheta \leq 1, 0 \leq \theta_i \leq 1$ para todo $i \in I$.
- $\vartheta + \sum_{i\in I} \theta_i = 1$.
- Para todo abierto U de la familia Γ, existe a lo sumo una cantidad finita de funciones de la familia $\{\vartheta\} \cup \{\theta_i\}_{i\in I}$ que no se anula en U.

Para todo $\mathbf{y} \in \partial\Omega$:
Existe $i_0 \in I$ tal que $\mathbf{y} \in U_{i_0}$.
Existe $\{\theta_{i_k}\}_{k=1}^n$ tal que $\vartheta + \sum_{k=1}^n \theta_{i_k} \equiv 1$ en U_{i_0}; en $U_{i_0} \cap \Omega$:

$$u = \vartheta\, u + \sum_{k=1}^{n} \theta_{i_k}\, u.$$

Se verifica que $Sop(\vartheta) \subset V = \mathbb{R}^N \backslash \partial\Omega \Rightarrow \vartheta(\mathbf{y})\, u(\mathbf{y}) = 0$ y que para todo k con $1 \leq k \leq n$, $Sop(\theta_{i_k}) \subset U_{i_k}$.
Veamos que $\theta_{i_k}\, u$ se anula en $\mathbf{y}$:
Si $\mathbf{y} \notin U_{i_k}$, $\theta_{i_k}(\mathbf{y})\, u(\mathbf{y}) = 0\, u(\mathbf{y}) = 0$.
Si $\mathbf{y} \in U_{i_k}$:
Veamos que $(\theta_{i_k}\, u) \circ H^{i_k} \in W_0^{1,p}(Q_+)$:
Existe una sucesión $(\phi_l)_{l=1}^{\infty}$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente hacia u en $W^{1,p}(\Omega)$.
$\theta_{i_k}\, \phi_l \in \mathcal{D}(U_{i_k} \cap \Omega)$, pues $Sop(\theta_{i_k}) \subset U_{i_k}$ y $Sop(\phi_l) \subset \Omega$, y por tanto $Sop(\theta_{i_k}) \cap Sop(\phi_l) \subset U_{i_k} \cap \Omega$ es compacto.
Luego $(\theta_{i_k}\, \phi_l) \circ H^{i_k} \in \mathcal{D}(Q_+)$, pues H^{i_k} es un homeomorfismo, y por tanto transforma compactos en compactos.
Además, $\theta_{i_k}\, \phi_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \theta_{i_k}\, u$ en $W^{1,p}(U_{i_k} \cap \Omega)$.
Aplicando la fórmula del cambio de variables (proposición 1.16), y utilizando el teorema del cambio de variables, podemos deducir que $(\theta_{i_k}\, \phi_l) \circ H^{i_k} \xrightarrow[l\to\infty]{} (\theta_{i_k}\, u) \circ H^{i_k}$ en $W^{1,p}(Q_+)$.

Entonces, $(\theta_{i_k}\, u) \circ H^{i_k}$ se anula en Q_0, como demostramos antes.
Por tanto, como $\mathbf{y} \in U_{i_k} \cap \partial\Omega = H^{i_k}(Q_0)$, $(\theta_{i_k}\, u)(\mathbf{y}) = 0$.

Por tanto:

$$u(\mathbf{y}) = \vartheta(\mathbf{y})\, u(\mathbf{y}) + \sum_{k=1}^{n} \theta_{i_k}(\mathbf{y})\, u(\mathbf{y}) = 0.$$

□

3.2. La Desigualdad de Poincaré

Lema 3.4.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto no vacío y sea $p \in [1, \infty)$. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y sea $\overline{u}$ la extensión por cero a $\mathbb{R}^N$ (proposición 1.6). Entonces $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y:

$$\partial_j \overline{u} = \overline{\partial_j u}.$$

Demostración:
Sea $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente hacia u en $W^{1,p}(\Omega)$.
Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{u_l}\, \partial_j \varphi = \int_{\Omega} u_l\, \partial_j \varphi = -\int_{\Omega} (\partial_j u_l)\, \varphi = -\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\partial_j u_l}\, \varphi, \tag{3.3}$$

pues $u_l \in \mathcal{D}(\Omega)$ para todo $l \in \mathbb{N}$.
Pero:

$$\begin{aligned} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} (\overline{u_l} - \overline{u})\, \partial_j \varphi \Big| = \Big| \int_{\Omega} (u_l - u)\, \partial_j \varphi \Big| &\leq \int_{\Omega} |u_l - u|\, |\partial_j \varphi| \\ &\leq \big\| u_l - u \big\|_{L^p(\Omega)} \big\| \varphi \big\|_{L^{p'}(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N}(\overline{\partial_j u_l}-\overline{\partial_j u})\,\varphi\Big| = \Big|\int_{\Omega}(\partial_j u_l-\partial_j u)\,\varphi\Big| \le \int_{\Omega}|\partial_j u_l-\partial_j u|\,|\varphi|$$
$$\le \left\|\partial_j u_l-\partial_j u\right\|_{L^p(\Omega)}\left\|\varphi\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0. \tag{3.5}$$

Por tanto, utilizando en (3.3) los límites (3.4) y (3.5):

$$\int_{\mathbb{R}^N}\overline{u}\,\partial_j\varphi = -\int_{\mathbb{R}^N}\overline{\partial_j u}\,\varphi,$$

luego $\partial_j\overline{u} \overset{d}{=} \overline{\partial_j u}$.
Como $\overline{u},\overline{\partial_j u}\in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\overline{u}\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Teorema 3.5 (**Desigualdad de Poincaré).**
Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ abierto no vacío y acotado y sea $p\in[1,\infty)$. Existe una constante $C=C(\Omega,p)$ tal que:

$$\left\|u\right\|_{L^p(\Omega)} \le C\left\|\nabla u\right\|_{L^p(\Omega)},$$

para toda $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración:
Lo probaremos primero para un caso particular de Ω y luego lo veremos para Ω general:

Caso 1: $\Omega=(-a,a)^N$, $a>0$, es un cubo:
Para toda $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\varphi(\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x}',-a)+\int_{-a}^{x_N}\partial_N\varphi(\mathbf{x}',t)\,dt=\int_{-a}^{x_N}\partial_N\varphi(\mathbf{x}',t)\,dt.$$

Por la desigualdad de Hölder:

$$|\varphi(\mathbf{x})|\le\int_{-a}^{x_N}|\partial_N\varphi(\mathbf{x}',t)|\,dt\le(x_N+a)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{-a}^{x_N}|\partial_N\varphi(\mathbf{x}',t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

siendo p' el exponente conjugado de p.
Entonces:

$$|\varphi(\mathbf{x})|^p\le(x_N+a)^{\frac{p}{p'}}\int_{-a}^{x_N}|\partial_N\varphi(\mathbf{x}',t)|^p\,dt.$$

Por tanto:

$$\int_{(-a,a)^{N-1}}|\varphi(\mathbf{x}',x_N)|^p\,d\mathbf{x}'\le(x_N+a)^{\frac{p}{p'}}\int_{(-a,a)^{N-1}}\left(\int_{-a}^{x_N}|\partial_N\varphi(\mathbf{x}',t)|^p\,dt\right)d\mathbf{x}'$$

$$\le(2a)^{\frac{p}{p'}}\int_{(-a,a)^{N-1}}\left(\int_{-a}^{a}|\partial_N\varphi(\mathbf{x}',t)|^p\,dt\right)d\mathbf{x}'=(2a)^{\frac{p}{p'}}\int_{\Omega}|\partial_N\varphi|^p,$$

aplicando el teorema de Tonelli. Aplicando de nuevo este teorema:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\varphi|^p &= \int_{-a}^{a}\left(\int_{(-a,a)^{N-1}} |\varphi(\mathbf{x}', x_N)|^p \, d\mathbf{x}'\right) dx_N \\ &\leq \int_{-a}^{a}\left((2a)^{\frac{p}{p'}} \int_\Omega |\partial_N \varphi|^p\right) dx_N = (2a)^{1+\frac{p}{p'}} \int_\Omega |\partial_N\varphi|^p.\end{aligned}$$

Luego:

$$\left\|\varphi\right\|_{L^p(\Omega)} \leq (2a)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} \left\|\partial_N\varphi\right\|_{L^p(\Omega)} = 2a\left\|\partial_N\varphi\right\|_{L^p(\Omega)} \leq 2a\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Por densidad, para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\left\|u\right\|_{L^p(\Omega)} \leq 2a\left\|\nabla u\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Caso 2: Ω general:
Sea $\widetilde{\Omega} = (-a,a)^N$ un cubo tal que $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$, que existe porque Ω es acotado.
Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Existe una sucesión $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente hacia u en $W^{1,p}(\Omega)$.
Sea $\overline{u}$ la extensión de u por 0 a $\mathbb{R}^N$, y sea $\overline{u_l}$ lo análogo con u_l.
$\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $\partial_j\overline{u} = \overline{\partial_j u}$ por el lema 3.4.
$\overline{u_l} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ y $\overline{u_l}_{|_{\widetilde{\Omega}}} \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega})$, y $\overline{u_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} \overline{u}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\overline{u_l}_{|_{\widetilde{\Omega}}} \xrightarrow[l\to\infty]{} \overline{u}_{|_{\widetilde{\Omega}}}$ en $W^{1,p}(\widetilde{\Omega})$.
Por tanto, $\overline{u} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $\overline{u}_{|_{\widetilde{\Omega}}} \in W_0^{1,p}(\widetilde{\Omega})$.
Entonces, por el caso anterior:

$$\begin{aligned}\left\|u\right\|_{L^p(\Omega)} &= \left\|\overline{u}\right\|_{L^p(\widetilde{\Omega})} \leq 2a\left\|\nabla\overline{u}\right\|_{L^p(\widetilde{\Omega})} = 2a\sum_{j=1}^{N}\left\|\partial_j\overline{u}\right\|_{L^p(\widetilde{\Omega})} \\ &= 2a\sum_{j=1}^{N}\left\|\overline{\partial_j u}\right\|_{L^p(\widetilde{\Omega})} = 2a\sum_{j=1}^{N}\left\|\partial_j u\right\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

Se cierra esta sección con una adaptación de la desigualdad de Poincaré a las normas de Hilbert de los espacios $H^1(\Omega)$:

Corolario 3.6 (**Desigualdad de Poincaré para el espacio** H^1**).**
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto no vacío y acotado. Existe una constante C_1 tal que:

$$\left\|u\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1\left(\sum_{j=1}^{N}\left\|\partial_j u\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración:
Por la desigualdad de Poincaré, existe una constante $C = C(\Omega, 2)$ tal que:

$$\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)},$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Luego:

$$\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\|\nabla u\right\|_{L^2(\Omega)} = C \sum_{j=1}^{N} \left\|\partial_j u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq NC \left(\sum_{j=1}^{N} \left\|\partial_j u\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\left\|u\right\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\left\|u\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{N} \left\|\partial_j u\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(N^2C^2 \sum_{j=1}^{N} \left\|\partial_j u\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^{N} \left\|\partial_j u\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1 + N^2C^2)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{N} \left\|\partial_j u\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Desigualdades de Sobolev

Este capítulo tratará la posibilidad de sumergir de forma continua los espacios de Sobolev en ciertos espacios L^p. El término "desigualdades de Sobolev" hace referencia a las acotaciones que caracterizan que caracterizan la continuidad de aplicaciones lineales entre espacios normados. Así que bien se podría titular este capítulo "inyecciones continuas".

Los resultados serán válidos para dimensión $N \geq 2$. Para todo $p \in [1, N)$ se denotará p^* al exponente tal que:

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}. \tag{4.1}$$

Lema 4.1 (Gagliardo).
Sea $\{f_i\}_{i=1}^N$ una familia de N funciones de $L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$.
Dado $\mathbf{x} \in R^N$, denotamos:

$$\mathbf{x}_{\wedge i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1},$$

es decir, el resultado de extraerle a $\mathbf{x}$ su i-ésima coordenada.
Sea la función:

$$\begin{array}{rcccl} F_N & : & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \mathbf{x} & \longmapsto & \prod_{i=1}^N f_i(\mathbf{x}_{\wedge i}) \end{array}$$

Entonces, $F_N \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y además:

$$\|F_N\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Demostración:
Inducción sobre N:

Para $N = 2$:

Es cierto por el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |F_2(x_1,x_2)|\,dx_1\,dx_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} |f_1(x_1)\,f_2(x_2)|\,dx_1\,dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_1)|\,dx_1 \int_{\mathbb{R}} |f_2(x_2)|\,dx_2,\end{aligned}$$

Supongámoslo cierto para N.

Para $N+1$:
Tenemos:

$$F_{N+1}(\mathbf{x}, x_{N+1}) = F_N(\mathbf{x}; x_{N+1})\, f_{N+1}(\mathbf{x}),$$

donde:

$$F_N(\mathbf{x}; x_{N+1}) = \prod_{i=1}^{N} f_i(\mathbf{x}_{\wedge i}, x_{N+1}),$$

esto es, la misma función del lema para dimensión $N+1$.

Fijemos $x_{N+1} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |F_{N+1}(\mathbf{x}, x_{N+1})|\,d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^N} |F_N(\mathbf{x}; x_{N+1})|\,|f_{N+1}(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \\ &\leq \left\|f_{N+1}\right\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |F_N(\mathbf{x}; x_{N+1})|^{\frac{N}{N-1}}\,d\mathbf{x} \right)^{\frac{N-1}{N}}, \qquad (4.2)\end{aligned}$$

por la desigualdad de Hölder.
$f_i \in L^N(\mathbb{R}^N)$; $f_i^{\frac{N}{N-1}} \in L^{N-1}(\mathbb{R}^N)$, para todo $i \leq N$.
Por tanto, por la hipótesis de inducción, $F_N(\,\cdot\,; x_N)^{\frac{N}{N-1}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F_N(\mathbf{x}; x_{N+1})|^{\frac{N}{N-1}}\,d\mathbf{x} \leq \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_i(\mathbf{x}_{\wedge i}, x_{N+1})|^N\,d\mathbf{x}_{\wedge i} \right)^{\frac{1}{N-1}}. \quad (4.3)$$

Luego, utilizando (4.3) en (4.2):

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F_{N+1}(\mathbf{x}, x_{N+1})|\,d\mathbf{x} \leq \left\|f_{N+1}\right\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_i(\mathbf{x}_{\wedge i}, x_{N+1})|^N\,d\mathbf{x}_{\wedge i} \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |F_{N+1}(\mathbf{x}, x_{N+1})|\,d\mathbf{x} \right) dx_{N+1} \\ &\leq \left\|f_{N+1}\right\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_i(\mathbf{x}_{\wedge i}, x_{N+1})|^N\,d\mathbf{x}_{\wedge i} \right)^{\frac{1}{N}} dx_{N+1}. \quad (4.4)\end{aligned}$$

Consideremos las funciones:

$$g_i(s) := \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_i(\mathbf{y}, s)|^N \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Como:

$$\int_{\mathbb{R}} |g_i(s)|^N \, ds = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_i(\mathbf{y}, s)|^N \, d\mathbf{y} \right) ds = \int_{\mathbb{R}^N} |f_i|^N,$$

y $f_i \in L^N(\mathbb{R}^N)$, se deduce que $g_i \in L^N(\mathbb{R})$.
Entonces, aplicando la desigualdad de Hölder generalizada (teorema B.5) a las funciones $\{g_i\}_{i=1}^N$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_i(\mathbf{x}_{\wedge i}, x_{N+1})|^N \, d\mathbf{x}_{\wedge i} \right)^{\frac{1}{N}} dx_{N+1} \\
&\leq \prod_{i=1}^{N} \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_i(\mathbf{x}_{\wedge i}, x_{N+1})|^N \, d\mathbf{x}_{\wedge i} \right) dx_{N+1} \right]^{\frac{1}{N}}. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Por tanto, utilizando (4.5) en (4.4):

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |F_{N+1}(\mathbf{x}, x_{N+1})| \, d\mathbf{x} \right) dx_{N+1} \\
&\leq \left\| f_{N+1} \right\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_i(\mathbf{x}_{\wedge i}, x_{N+1})|^N \, d\mathbf{x}_{\wedge i} \right) dx_{N+1} \right]^{\frac{1}{N}} \\
&= \left\| f_{N+1} \right\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f_i(\mathbf{x}_{\wedge i}, x_{N+1})|^N \, d(\mathbf{x}_{\wedge i}, x_{N+1}) \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= \left\| f_{N+1} \right\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \left\| f_i \right\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\left\| F_{N+1} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})} &= \int_{\mathbb{R}^{N+1}} |F_{N+1}(\mathbf{x}, x_{N+1})| \, d(\mathbf{x}, x_{N+1}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |F_{N+1}(\mathbf{x}, x_{N+1})| \, d\mathbf{x} \right) dx_{N+1} \leq \prod_{i=1}^{N+1} \left\| f_i \right\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Utilizando el principio de inducción, queda probado el resultado para todo $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. □

Teorema 4.2 (**Sobolev, Gagliardo, Nirenberg**).
Sea $p \in [1, N)$, y sea p^* dado por (4.1). Existe $C = C(p, N) > 0$ tal que:

$$\left\| u \right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración:
Dividiremos la prueba en tres casos:

Caso 1: $p = 1$ y $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:
En este caso:
$$\frac{1}{p^*} = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}.$$
Tenemos:
$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x})| &= \left| \int_{-\infty}^{x_i} \partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i-1}, \ldots, x_N)\, dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i-1}, \ldots, x_N)|\, dt. \end{aligned} \tag{4.6}$$
Sea:
$$\begin{array}{rccl} f_i & : & \mathbb{R}^{N-1} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \mathbf{x}_{\wedge i} & \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i-1}, \ldots, x_N)\, dt \end{array}$$
Teniendo en cuenta (4.6) para todo $i \leq N$:
$$|u(\mathbf{x})|^N \leq \prod_{i=1}^{N} f_i(\mathbf{x}_{\wedge i});\ |u(\mathbf{x})|^{\frac{N}{N-1}} \leq \prod_{i=1}^{N} f_i(\mathbf{x}_{\wedge i})^{\frac{1}{N-1}}, \tag{4.7}$$
donde $f_i \in L^1(\mathbb{R}^{N-1})$ por pertenecer $\partial_i u \in L^1(\mathbb{R}^N)$; $f_i^{\frac{1}{N-1}} \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$.
Por tanto, aplicando el lema 4.1 a (4.7):
$$\left\| u^{\frac{N}{N-1}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \left\| f_i^{\frac{1}{N-1}} \right\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} = \prod_{i=1}^{N} \left\| f_i \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{\frac{1}{N-1}};$$
$$\left\| u \right\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} = \left\| u^{\frac{N}{N-1}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N-1}{N}} \leq \prod_{i=1}^{N} \left\| f_i \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{\frac{1}{N}},$$
donde:
$$\begin{aligned} \left\| f_i \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |f_i(\mathbf{x}_{\wedge i})|\, d\mathbf{x}_{\wedge i} = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_i u(\mathbf{x})|\, dx_i \right) d\mathbf{x}_{\wedge i} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i u(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = \left\| \partial_i u \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$
Luego:
$$\left\| u \right\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \left\| \partial_i u \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}.$$

Caso 2: $p > 1$ y $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:
Sea $r \geq 1$.
Apliquemos el caso anterior a $|u|^{r-1}\, u$:

$$\big\| |u|^{r-1}\, u \big\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \big\| \partial_i (|u|^{r-1}\, u) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}. \tag{4.8}$$

Por un lado:

$$\big\| |u|^{r-1}\, u \big\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{r\, \frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{N-1}{N}} = \| u \|_{L^{\frac{r\,N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)}^{r}, \tag{4.9}$$

Por otro lado, la función real de variable real $f(t) := |t|^{r-1}\, t$ es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, ya que:

$$f(t) = \begin{cases} t^r & t > 0 \\ (-t)^r & t < 0 \end{cases} \; ; \quad f'(t) = \begin{cases} r\, t^{r-1} & t > 0 \\ r\, (-t)^{r-1} & t < 0 \end{cases} ,$$

con $r > 1$; $r - 1 > 0$, y por tanto f' es también continua en 0.
Por tanto, apliando la regla de la cadena:

$$\partial_i (|u|^{r-1}\, u) = r\, \big(sgn(u)\, u \big)^{r-1}\, \partial_i u = r\, |u|^{r-1}\, \partial_i u. \tag{4.10}$$

Utilizando (4.9) y (4.10) en (4.8):

$$\begin{aligned} \| u \|_{L^{\frac{r\,N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)}^{r} &\leq r \prod_{i=1}^{N} \big\| |u|^{r-1}\, \partial_i u \big\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \\ &\leq r \prod_{i=1}^{N} \big\| u^{r-1} \big\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \big\| \partial_i u \big\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \\ &= r\, \| u \|_{L^{p'\,(r-1)}(\mathbb{R}^N)}^{r-1} \prod_{i=1}^{N} \big\| \partial_i u \big\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde hemos aplicado la desigualdad de Hölder.
Escojamos r tal que:

$$\frac{r\,N}{N-1} = p'\,(r-1),$$

esto es:

$$r \left(p' - \frac{N}{N-1} \right) = p'.$$

Así, el r buscado es:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p^*}\, \frac{N}{N-1},$$

luego:

$$r = p^* \frac{N-1}{N} = \frac{p\,N-p}{N-p}.$$

Es inmediato comprobar que $p^* = \frac{r\,N}{N-1} = p'\,(r-1)$. Por tanto, (4.11) se convierte en:

$$\left\|u\right\|^r_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq r\,\left\|u\right\|^{r-1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^N \left\|\partial_i u\right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)};$$

$$\left\|u\right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{p\,N-p}{N-p} \prod_{i=1}^N \left\|\partial_i u\right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Caso 3: caso general:
Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
Existe una sucesión $(u_l)_{l=1}^\infty$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ convergente hacia u en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
Por los dos casos anteriores, existe una constante $C = C(p,N) > 0$ tal que:

$$\left\|\varphi\right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \prod_{i=1}^N \left\|\partial_i \varphi\right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.12}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Aplicando este resultado a $u_k - u_l$:

$$\left\|u_k - u_l\right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \prod_{i=1}^N \left\|\partial_i (u_k - u_l)\right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

para todos $k, l \in \mathbb{N}$, lo que prueba que la sucesión $(u_l)_{l=1}^\infty$ es de Cauchy en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.
Por lo tanto $(u_l)_{l=1}^\infty$ converge en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Pero como $(u_l)_{l=1}^\infty$ converge hacia u en $L^p(\mathbb{R}^N)$, ha de ser u también su límite en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, por el lema de Riesz-Weyl.
Además, aplicando la desigualdad (4.12) a la sucesión y pasando al límite:

$$\left\|u\right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \prod_{i=1}^N \left\|\partial_i u\right\|^{\frac{1}{N}}_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.13}$$

Por último, tengamos en cuenta que:

$$\prod_{i=1}^N |x_i| \leq \big(\max_{1\leq i\leq N} |x_i|\big)^N \leq \sum_{i=1}^N |x_i|^N.$$

Aplicando esto a (4.13) se obtiene el resultado. □

Corolario 4.3.
Sea $p \in [1, N)$. Entonces, para todo $q \in [p, p^*]$, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ y la inyección es continua, es decir, existe $C = C(p, q, N) > 0$ tal que:

$$\left\|u\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\|u\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración:
Sea $q \in [p, p^*]$.
Para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$:
Por la desigualdad de interpolación (teorema B.6):

$$\left\|u\right\|_{L^q(\Omega)} \leq \left\|u\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|u\right\|_{L^{p^*}(\Omega)}.$$

El resultado se deduce acotando $\left\|u\right\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ por $\left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ según el teorema anterior. $\square$

Teorema 4.4 (caso $p = N$).
Para todo $q \in [N, \infty)$, $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ y la inyección es continua, es decir, existe $C = C(q, N) > 0$ tal que:

$$\left\|u\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\|u\right\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)},$$

para toda $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración:
Para toda $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:
Aplicando el mismo procedimiento que en el caso 2, ecuación (4.11) de la demostración del teorema de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (4.2), como el exponente conjugado de N es $\dfrac{N}{N-1}$:

$$\begin{aligned}
\left\|u\right\|^r_{L^{\frac{r\,N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} &\leq r \left\|u\right\|^{r-1}_{L^{\frac{(r-1)\,N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \left\|\partial_i u\right\|^{\frac{1}{N}}_{L^N(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq r \left\|u\right\|^{r-1}_{L^{\frac{(r-1)\,N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \sum_{i=1}^{N} \left\|\partial_i u\right\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Utilizando que para todos $A, B > 0$, si $r \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^r = \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} A^{r-k}\, B^k \geq r\, A^{r-1}\, B,$$

tenemos:

$$\left\|u\right\|^r_{L^{\frac{r\,N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \left(\left\|u\right\|_{L^{\frac{(r-1)\,N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\partial_i u\right\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \right)^r,$$

por lo que:

$$\|u\|_{L^{\frac{rN}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^{\frac{(r-1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.14}$$

Demostraremos las inclusiones y su continuidad por inducción sobre r, según pertenezca q a cada intervalo de la familia $\left\{\left[\frac{(r-1)N}{N-1}, \frac{rN}{N-1}\right]\right\}_{r=N}^{\infty}$:

Para $k = 0$; $r = N + k = N$; $q \in \left[N, \frac{N^2}{N-1}\right]$:

$$\|u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)},$$

Por (4.14):

$$\|u\|_{L^{\frac{N^2}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)},$$

y por la desigualdad de interpolación (teorema B.6) para $q \in \left(N, \frac{N^2}{N-1}\right)$:

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{\frac{N^2}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)};$$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq 2\,\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}.$$

Supongamos que para $r = N + k$; $q \in \left[\frac{(N+k-1)N}{N-1}, \frac{(N+k)N}{N-1}\right]$, existe una constante $C(q, N) > 0$ tal que:

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C(q, N)\,\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)},$$

para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Para $k + 1$; $r = N + k + 1$; $q \in \left[\frac{(N+k)N}{N-1}, \frac{(N+k+1)N}{N-1}\right]$:
Por (4.14) y por hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{\frac{(N+k+1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} &\leq \|u\|_{L^{\frac{(N+k)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C\Big(\frac{(N+k)N}{N-1}, N\Big)\,\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \left(1 + C\Big(\frac{(N+k)N}{N-1}, N\Big)\right)\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado para $q = \frac{(N+k+1)N}{N-1}$, y por la desigualdad de interpolación, para $q \in \left(\frac{(N+k)N}{N-1}, \frac{(N+k+1)N}{N-1}\right)$:

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^{\frac{(N+k)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{\frac{(N+k+1)N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)},$$

que por la última desigualdad y por la hipótesis de inducción, podemos acotar por $\|u\|_{W^{1,N}(\mathbb{R}^N)}$ multiplicada por una constante apropiada.

Por densidad, podemos acotar de la misma manera cualquier $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$.
$\square$

Teorema 4.5 (Morrey).
Sea $p \in (N, \infty)$. Entonces $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y la inyección es continua. Además, existe $K = K(p, N) > 0$ tal que:

$$|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| \leq K \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{1-\frac{N}{p}},$$

para toda $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, para casi todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$.

Demostraremos primero el siguiente:

Lema 4.6. *Sea Q un cubo abierto cuyas aristas, de longitud r, son paralelas a los ejes coordenados. Sea $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Entonces:*

- *Para todo $\mathbf{x} \in Q$:*

$$|\mu_Q(u) - u(\mathbf{x})| \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1 - \frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.15}$$

  siendo:

$$\mu_Q(u) = \frac{1}{m(Q)} \int_Q u = \frac{1}{r^N} \int_Q u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

  la media de u en Q.

- *Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$:*

$$|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| \leq 2\,\frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1 - \frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.16}$$

Demostración:
Lo probaremos primero para cubos Q que contengan el origen.
Para toda $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:
Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, se define:

$$\begin{array}{rccc} u_{\mathbf{x}} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & u(t\,\mathbf{x}) \end{array}$$

Se tiene:

$$u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{0}) = \int_0^1 \partial_t u_{\mathbf{x}}(t)\, dt,$$

donde:

$$\partial_t u_{\mathbf{x}}(t) = \sum_{j=1}^{N} x_j \, \partial_j u(t\,\mathbf{x}).$$

Por tanto:

$$|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{0})| \leq \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} |x_j| \, |\partial_j u(t\,\mathbf{x})| \, dt \leq r \sum_{j=1}^{N} \int_0^1 |\partial_j u(t\,\mathbf{x})| \, dt.$$

Entonces, utilizando el teorema de Tonelli y el del cambio de variables:

$$\begin{aligned}
|\mu_Q(u) - u(\mathbf{0})| &= \left| \frac{1}{r^N} \int_Q u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{r^N} \int_Q u(\mathbf{0}) \, d\mathbf{x} \right| \\
&= \frac{1}{r^N} \left| \int_Q \big(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{0})\big) \, d\mathbf{x} \right| \leq \frac{1}{r^N} \int_Q |u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{0})| \, d\mathbf{x} \\
&\leq \frac{1}{r^{N-1}} \sum_{j=1}^{N} \int_Q \Big(\int_0^1 |\partial_j u(t\,\mathbf{x})| \, dt \Big) \, d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \Big(\int_Q \sum_{j=1}^{N} |\partial_j u(t\,\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \Big) \, dt \\
&= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \Big(\int_{t\,Q} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{t^N} \, |\partial_j u(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \Big) \, dt. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}
\int_{t\,Q} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{t^N} \, |\partial_j u(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} &\leq \big(m(t\,Q)\big)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{t\,Q} \Big(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{t^N} \, |\partial_j u(\mathbf{y})| \Big)^p \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (t\,r)^{\frac{N}{p'}} \left(\frac{1}{t^N} \int_Q \Big(\sum_{j=1}^{N} |\partial_j u(\mathbf{y})| \Big)^p \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= r^{\frac{N}{p'}} \, t^{-N\left(1 - \frac{1}{p'}\right)} \left(\int_Q \Big(\sum_{j=1}^{N} |\partial_j u(\mathbf{y})| \Big)^p \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= r^{\frac{N}{p'}} \, t^{-\frac{N}{p}} \left(\int_Q \Big(\sum_{j=1}^{N} |\partial_j u(\mathbf{y})| \Big)^p \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

ya que $t\,Q \subset Q$ para todo $t \in (0,1)$, debido a que $0 \in Q$.

Utilizando esto último en (4.17):

$$
\begin{aligned}
|\mu_Q(u) - u(\mathbf{0})| &\leq \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 \Big(\int_{tQ} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{t^N} |\partial_j u(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \Big) \, dt \\
&\leq \frac{r^{\frac{N}{p'}}}{r^{N-1}} \int_0^1 \left[t^{-\frac{N}{p}} \Big(\int_Q \Big(\sum_{j=1}^{N} |\partial_j u(\mathbf{y})| \Big)^p d\mathbf{y} \Big)^{\frac{1}{p}} \right] dt \\
&= \frac{r^{-N\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{r^{N-1}} \int_0^1 t^{-\frac{N}{p}} \, dt \Big(\int_Q \Big(\sum_{j=1}^{N} |\partial_j u(\mathbf{y})| \Big)^p d\mathbf{y} \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{r^{-\frac{N}{p}}}{r^{-1}} \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \Big(\int_Q \Big(\sum_{j=1}^{N} |\partial_j u(\mathbf{y})| \Big)^p d\mathbf{y} \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \Big(\int_Q \Big(\sum_{j=1}^{N} |\partial_j u(\mathbf{y})| \Big)^p d\mathbf{y} \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \sum_{j=1}^{N} \Big(\int_Q |\partial_j u(\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y} \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \sum_{j=1}^{N} \|\partial_j u\|_{L^p(Q)} \leq \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \sum_{j=1}^{N} \|\partial_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&= \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado la desigualdad de Minkowski.
Con esto queda probada (4.15) para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en cubos que lo contienen.

Como las traslaciones $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ conservan la medida y las normas de espacios $L^P(\mathbb{R}^N)$, podemos deducir (4.15) para todo cubo Q de aristas de longitud r paralelas a los ejes coordenados.

Además, para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$:

$$
|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| \leq |u(\mathbf{y}) - \mu_Q(u)| + |\mu_Q(u) - u(\mathbf{x})| \leq 2 \, \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},
$$

con lo que queda probado (4.16). □

Demostración del teorema:
Lo probaremos primero para funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Caso 1: $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$:

Sea Q un cubo de aristas de longitud 1 paralelas a los ejes con $\mathbf{x} \in Q$.
Por (4.15):

$$|\mu_Q(u) - u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned}
|u(\mathbf{x})| &\leq |\mu_Q(u)| + |\mu_Q(u) - u(\mathbf{x})| \leq |\mu_Q(u)| + \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&= \Big| \int_Q u \Big| + \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \int_Q |u| + \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \big(m(Q)\big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_Q |u|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&= \left\|u\right\|_{L^p(Q)} + \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \left\|u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \left\|u\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Además, para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$:
Existe un cubo Q de aristas de longitud $r = 2\left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\right\|$ paralelas a los ejes con $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q$. Por (4.16):

$$|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| \leq \frac{2^{2-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\right\|^{1-\frac{N}{p}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Caso 2: caso general.
Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Sea $(u_l)_{l=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ convergente hacia u en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
Por el lema de Riesz-Weyl, podemos extraer una subsucesión $(u_{l_k})_{k=1}^{\infty}$ puntualmente convergente casi siempre hacia u.
Por el caso anterior, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_{l_k}(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \left\|u_{l_k}\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.18}$$

$$|u_{l_k}(\mathbf{y}) - u_{l_k}(\mathbf{x})| \leq \frac{2^{2-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \left\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\right\|^{1-\frac{N}{p}} \left\|\nabla u_{l_k}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.19}$$

Pasando al límite en (4.18), para casi todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$:

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \left\|u\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \Rightarrow \left\|u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{1-\frac{N}{p}} \left\|u\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

y en (4.19), para casi todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$:

$$|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| \leq \frac{2^{2-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

$\square$

Sea Ω un conjunto de clase $\mathcal{C}^1$ con frontera acotada. Sea un operador extensión:

$$P_p : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

con $\|P_p u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 \|u\|_{L^p(\Omega)}$ y $\|P_p u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
Si dado $q \in [1, \infty]$ se verifica que $\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$ para toda $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, se tiene:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|P_p u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|P_p u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\, C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
Utilizando esto se puede demostrar:

Teorema 4.7.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto de clase $\mathcal{C}^1$ con frontera acotada y sea $p \in [1, \infty)$. Se tiene:

- $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N} > 0$,
- $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *para todo* $q \in [p^*, \infty)$, *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N} = 0$,
- $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N} < 0$,

y las correspondientes inyecciones son continuas.
Además, en este último caso, existe una constante $K = K(p, N) > 0$ tal que para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$|u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| \leq K \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{1-\frac{N}{p}},$$

para casi todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$.

Definiendo por recurrencia, a partir de (4.1), los exponentes:

$$\frac{1}{p^{(k+1)*}} = \frac{1}{p^{k*}} - \frac{1}{N} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}, \tag{4.20}$$

mientras sea $\dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{N} > 0$, se demuestran desigualdades de Sobolev para espacios $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$:

Teorema 4.8.
Sean $m \in \mathbb{N}$ *y* $p \in [1,\infty)$*. Se tiene:*

- $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^{m*}}(\mathbb{R}^N)$*, si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$,
- $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ *para todo* $q \in [p^{m*},\infty)$*, si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$,
- $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$*, si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$,

y las correspondientes inyecciones son continuas.
Además, en este último caso, si $m - \dfrac{N}{p}$ *no es entero y llamamos:*

$$l = \left\lfloor m - \frac{N}{p} \right\rfloor, \ \sigma = m - \frac{N}{p} - l,$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ *denota la parte entera, existe una constante* $K = K(m,p,N) > 0$ *tal que para toda* $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$*:*

$$\left\|\partial^\alpha u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq K \left\|u\right\|_{W^{m,p}(\Omega)},$$

para todo $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^N$ *con* $|\alpha| \leq l$*, y:*

$$|\partial^\alpha u(\mathbf{y}) - \partial^\alpha u(\mathbf{x})| \leq K \left\|u\right\|_{W^{m,p}(\Omega)} \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^\sigma,$$

para casi todos $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$*, para todo* $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^N$ *con* $|\alpha| = l$

$$|\partial^\alpha u(\mathbf{y}) - \partial^\alpha u(\mathbf{x})| \leq K \left\|u\right\|_{W^{m,p}(\Omega)} \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|,$$

para casi todos $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$*, para todo* $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^N$ *con* $|\alpha| < l$*.*

Capítulo 5

Los teoremas de Stampacchia y de Lax-Milgram

Este capítulo está dedicado a dos resultados para espacios de Hilbert arbitrarios, que serán utilizados en la formulación variacional de los problemas elípticos que se tratarán más adelante.

Proposición 5.1.
Sea $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espacio de Hilbert real. Sea* $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *una forma bilineal. Son equivalentes:*

a) *a es continua.*

b) *Existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$|a(x, y)| \leq C \, \|x\| \, \|y\|,$$

para todos $x, y \in H$.

Definición 5.2.
Sea $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espacio de Hilbert real. Se dice que una forma bilineal* $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *es* coerciva *si existe una constante $\alpha > 0$ tal que:*

$$a(x, x) \geq \alpha \, \|x\|^2 = \alpha \, \langle x, x\rangle,$$

para todo $x \in H$.

Lema 5.3.
Sea $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espacio de Hilbert real, sea $K \subset H$ un subconjunto cerrado, convexo y no vacío, y sean $x \in H$, $y \in K$. Son equivalentes:*

a) *y es la proyección ortogonal de x sobre K; $y = P_K(x)$.*

b) *Para todo $z \in K$:*

$$\langle x - y, z - y\rangle \leq 0.$$

Demostración:

$a) \Rightarrow b)$:
Sea $z \in K$.
Para todo $t \in [0,1]$, $v_t := (1-t)\,y + t\,z \in K$, por convexidad de K.
Por la caracterización de proyección ortogonal como elemento que minimiza las distancias; $\|x-y\| = \text{mín}_{v\in K}\{\|x-v\|\}$, para v_t, para todo $t \in (0,1]$ tenemos:

$$\begin{aligned}\langle x-y, x-y\rangle &\le \big\langle x-v_t, x-v_t\big\rangle\\ &= \big\langle x-(1-t)\,y-t\,z, x-(1-t)\,y-t\,z\big\rangle\\ &= \big\langle (x-y)-t\,(z-y), (x-y)-t\,(z-y)\big\rangle\\ &= \langle x-y, x-y\rangle - 2t\,\langle x-y, z-y\rangle + t^2\,\langle z-y, z-y\rangle;\end{aligned}$$

$$0 \le -2t\,\langle x-y, z-y\rangle + t^2\,t\langle z-y, z-y\rangle;$$

$$2\,\langle x-y, z-y\rangle \le t\,\langle z-y, z-y\rangle.$$

Por tanto, haciendo tender $t \to 0$:

$$\langle x-y, z-y\rangle \le 0.$$

$b) \Rightarrow a)$:
Para todo $z \in K$:

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 - \|x-z\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle - \langle x-z, x-z\rangle\\ &= \big\langle (x-y)+(x-z), (x-y)-(x-z)\big\rangle\\ &= \langle 2x-y-z, z-y\rangle\\ &= \langle 2x-y-y-z+y, z-y\rangle\\ &= \langle 2x-2y, z-y\rangle + \langle -z+y, z-y\rangle\\ &= 2\,\langle x-y, z-y\rangle - \langle z-y, z-y\rangle\\ &\le -\langle z-y, z-y\rangle \le 0,\end{aligned}$$

por hipótesis. Por tanto:

$$\|x-y\|^2 \le \|x-z\|^2;\ \|x-y\| \le \|x-z\|,$$

para todo $z \in K$, luego y es la proyección ortogonal de x sobre K.

□

Lema 5.4.
Sea $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *un espacio de Hilbert real y sea* $K \subset H$ *un subconjunto cerrado, convexo y no vacío. La aplicación proyección ortogonal sobre* K*:*

$$P_K : H \longrightarrow K,$$

es no expansiva, es decir:

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\|,$$

para todos $x, y \in H$*.*

Demostración: Por el lema anterior:

$$\begin{aligned} \big\langle x - P_K(x), z - P_K(x)\big\rangle \leq 0, \\ \big\langle y - P_K(y), z - P_K(y)\big\rangle \leq 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in K$. En particular:

$$\begin{aligned} \big\langle x - P_K(x), P_K(y) - P_K(x)\big\rangle \leq 0, \\ \big\langle y - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)\big\rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \big\langle y - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)\big\rangle + \big\langle x - P_K(x), P_K(y) - P_K(x)\big\rangle \\ &= \big\langle y - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)\big\rangle - \big\langle x - P_K(x), P_K(x) - P_K(y)\big\rangle \\ &= \big\langle (P_K(x) - P_K(y)) - (x - y), P_K(x) - P_K(y)\big\rangle \\ &= \big\langle P_K(y) - P_K(x), P_K(x) - P_K(y)\big\rangle - \big\langle x - y, P_K(y) - P_K(x)\big\rangle; \end{aligned}$$

$$\big\langle P_K(x) - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)\big\rangle \leq \big\langle x - y, P_K(x) - P_K(y)\big\rangle;$$

$$\begin{aligned} \|P_K(x) - P_K(y)\|^2 &= \big\langle P_K(x) - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)\big\rangle \\ &\leq \big\langle x - y, P_K(x) - P_K(y)\big\rangle \\ &\leq \|x - y\|\,\|P_K(x) - P_K(y)\|; \end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
Luego, si $\|P_K(x) - P_K(y)\| \neq 0$, podemos cancelarlo:

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\|,$$

y si $\|P_K(x) - P_K(y)\| = 0$:

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| = 0 \leq \|x - y\|.$$

$\square$

Teorema 5.5 (Stampacchia).
Sea $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espacio de Hilbert real y sea $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Sea $K \subset H$ un subconjunto cerrado, convexo y no vacío. Entonces, para cada funcional lineal y continuo $\phi \in H^*$ existe un único elemento $u_0 \in K$ tal que:

$$a(u_0, v - u_0) \geq \phi(v - u_0),$$

para todo $v \in K$.
Además, si a es simétrica, u se caracteriza por:

$$\frac{1}{2}\, a(u_0, u_0) - \phi(u_0) = \min_{v \in K} \Big\{ \frac{1}{2}\, a(v, v) - \phi(v) \Big\}.$$

Demostración:
Existen constantes $C, \alpha > 0$ tales que:

- $|a(x,y)| \leq C\, \|x\|\, \|y\|$, para todos $x, y \in H$.
- $a(x,x) \geq \alpha\, \|x\|^2 = \alpha\, \langle x, x\rangle$, para todo $x \in H$.

Podemos tomar $\alpha < C$.
Por el teorema de representación de Riesz-Fréchet (D.2), existe un único $f \in H$ tal que:

$$\phi(v) = \langle f, v\rangle,$$

para todo $v \in H$. Además, $\|f\| = \|\phi\|$.
Por otra parte, para todo $u \in H$, la aplicación:

$$\begin{array}{rcccl} a_u & : & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & v & \longmapsto & a(u,v) \end{array}$$

es continua por ser a continua. Además, a_u es lineal, pues H es un espacio de Hilbert real.
Entonces, nuevamente por el teorema de representación de Riesz-Fréchet, para todo $u \in H$, existe un único Au tal que:

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle,$$

para todo $v \in H$. Además, $\|Au\| = \|a_u\|$.
Se considera el operador en H:

$$\begin{array}{rcccl} A & : & H & \longrightarrow & H \\ & & u & \longmapsto & Au \end{array}$$

Veamos que A es lineal:
Sean $u_1, u_2 \in H$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Sea $w = A(\lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2)$.
Para todo $v \in H$:

$$\begin{aligned} \langle w, v\rangle &= a(\lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2, v) = \lambda_1\, a(u_1, v) + \lambda_2\, a(u_2, v) \\ &= \lambda_1\, \langle Au_1, v\rangle + \lambda_2\, \langle Au_2, v\rangle = \langle \lambda_1\, Au_1 + \lambda_2\, Au_2, v\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la unicidad en el teorema de representación de Riesz-Fréchet:

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = w = \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2.$$

Además, A verifica:

- Para todo $u \in H$, $\|a_u(v)\| = \|a(u,v)\| \le C\,\|u\|\,\|v\|$ para todo $v \in H$;
$$\|Au\| = \|a_u\| \le C\,\|u\|. \tag{5.1}$$
- Para todo $u \in H$:
$$\langle Au, u\rangle = a(u,u) \ge \alpha\,\|u\|^2. \tag{5.2}$$

En particular, A es continua.

Se trata de buscar $u_0 \in K$ tal que:

$$\langle Au_0, v - u_0\rangle \ge \langle f, v - u_0\rangle,$$

para todo $v \in K$.

Lema 5.6.
Sea $u \in K$. Son equivalentes:

a) $\langle Au, v-u\rangle \ge \langle f, v-u\rangle$ *para todo* $v \in H$*.*

b) $u = P_K(\rho\, f - \rho\, Au + u)$ *para todo* $\rho > 0$*.*

c) Existe $\rho > 0$ *tal que* $u = P_K(\rho\, f - \rho\, Au + u)$*.*

Demostración:
Dados $u \in K$, $\rho > 0$:

$$\begin{aligned}\langle Au, v-u\rangle \ge \langle f, v-u\rangle &\Leftrightarrow \rho\,\langle Au, v-u\rangle \ge \rho\,\langle f, v-u\rangle\\ &\Leftrightarrow \langle \rho\, f - \rho\, Au, v-u\rangle \le 0\\ &\Leftrightarrow \langle \rho\, f - \rho\, Au + u - u, v-u\rangle \le 0,\end{aligned}$$

para todo $v \in K$.
Esto equivale, por el lema 5.3, a que:

$$u = P_K(\rho\, f - \rho\, Au + u).$$

Con todo esto, podemos deducir la equivalencia entre los tres asertos. $\square$

Para todo $\rho > 0$, se considera la aplicación:

$$\begin{array}{cccc} S_\rho & : & H & \longrightarrow & H\\ & & u & \longmapsto & P_K(\rho\, f - \rho\, Au + u)\end{array}$$

Lema 5.7.
Existe $\rho_0 > 0$ tal que la aplicación $S_{\rho_0} : H \longrightarrow H$ es contractiva.

Demostración:
Para todos $x, y \in H$, utilizando el lema 5.4:

$$\begin{aligned}
\|S_\rho(x) - S_\rho(y)\|^2 &= \|P_K(\rho\, f - \rho\, Ax + x) - P_K(\rho\, f - \rho\, Ay + y)\|^2 \\
&\leq \|(\rho\, f - \rho\, Ax + x) - (\rho\, f - \rho\, Ay + y)\|^2 \\
&= \|(x - y) - \rho\,(Ax - Ay)\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 - 2\rho\,\langle x - y, A(x - y)\rangle + \rho^2\,\|A(x - y)\|^2 \\
&\leq \|x - y\|^2 - 2\alpha\rho\,\|x - y\|^2 + C^2\rho^2\,\|x - y\|^2 \\
&= (1 - 2\alpha\rho + C^2\rho^2)\,\|x - y\|^2,
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta (5.1) y (5.2).
Busquemos $\rho_0 > 0$ tal que $1 - 2\alpha\rho_0 + C^2\rho_0^2 < 1$; $2\alpha\rho_0 - C^2\rho_0^2 > 0$.
Tomemos $\rho_0 = \dfrac{\alpha}{C^2}$, con el cual:

$$1 - 2\alpha\rho_0 + C^2\rho_0^2 = 1 - \frac{2\alpha^2}{C^2} + \frac{C^2\alpha^2}{C^4} = 1 - \frac{\alpha^2}{C^2} < 1.$$

$\square$

Hemos encontrado, pues, ρ_0 para el cual S_{ρ_0} es contractiva.
Aplicando el teorema del punto fijo de Banach (D.3), S_{ρ_0} tiene un único punto fijo.
Sea u_0 dicho punto fijo; $u_0 = P_K(\rho_0\, f - \rho_0\, Au_0 + u_0)$. $u_0 \in K$ pues es la proyección ortogonal sobre K de $\rho_0\, f - \rho_0\, Au_0 + u_0$.
Por el lema 5.6, u_0 verifica, para todo $v \in H$:

$$a(u_0, v - u_0) = \langle Au_0, v - u_0\rangle \geq \langle f, v - u_0\rangle = \phi(v - u_0).$$

u_0 es el único que lo verifica, pues si hubiera dos distintos, por el lema 5.6, serían dos puntos fijos distintos de S_{ρ_0}.

Además, si a es simétrica:
a define un producto escalar en H.
Por el teorema de representación de Riesz, existe un único $g \in H$ tal que $\phi(v) = a(g, v)$ para todo $v \in H$. Entonces:

$$a(u_0, v - u_0) \geq \phi(v - u_0) = a(g, v - u_0),$$

para todo $v \in H$. Aplicando entonces el lema 5.3, u_0 es la proyección ortogonal de g sobre K para el producto escalar a, es decir:

$$a(g - u_0, g - u_0) = \min_{v \in K}\{a(g - v, g - v)\}.$$

En otras palabras, u_0 minimiza la función:

$$\begin{array}{rcl} K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & a(v,v) - 2\,a(g,v) + a(g,g) \end{array}$$

Como $a(g,g)$ no depende de v, minimizar la función anterior equivale a minimizar:

$$\begin{array}{rcl} K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\,a(v,v) - a(g,v) = \dfrac{1}{2}\,a(v,v) - \phi(v) \end{array}$$

$\square$

Teorema 5.8 (Lax-Milgram).
Sea $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ un espacio de Hilbert real y sea $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y elíptica. Entonces, para cada funcional lineal y continuo $\phi \in H^*$ existe un único elemento $u_0 \in H$ tal que:

$$a(u_0, v) = \phi(v),$$

para todo $v \in H$.
Además, si a es simétrica, u se caracteriza por:

$$\frac{1}{2}\,a(u_0,u_0) - \phi(u_0) = \min_{v\in H}\Big\{\frac{1}{2}\,a(v,v) - \phi(v)\Big\}.$$

Demostración:
Aplicando el teorema de Stampacchia al propio H, existe un único elemento $u_0 \in H$ tal que:

$$a(u_0, v - u_0) \geq \phi(v - u_0), \tag{5.3}$$

para todo $v \in H$.
Además, si a es simétrica, u se caracteriza por:

$$\frac{1}{2}\,a(u_0,u_0) - \phi(u_0) = \min_{v\in H}\Big\{\frac{1}{2}\,a(v,v) - \phi(v)\Big\}.$$

Veamos que en (5.3) se da la igualdad:
Por el teorema de representación de Riesz-Fréchet, existe un único $f \in H$ tal que $\phi(v) = \langle f, v\rangle$ para todo $v \in H$, y existe un único Au_0 tal que $a(u_0, v) = \langle Au_0, v\rangle$ para todo $v \in H$.
Entonces:

$$\langle Au_0, v - u_0\rangle = a(u_0, v - u_0) \geq \phi(v - u_0) = \langle f, v - u_0\rangle,$$

para todo $v \in H$, y por el lema 5.6:

$$u_0 = P_H(f - Au_0 + u_0) = f - Au_0 + u_0;\; f = Au_0.$$

Por tanto:

$$a(u_0, v - u_0) = \langle Au_0, v - u_0 \rangle = \langle f, v - u_0 \rangle = \phi(v - u_0),$$

para todo $v \in H$.
Esto equivale a que:

$$a(u_0, v) = \phi(v),$$

para todo $v \in H$, ya que H es un espacio vectorial. $\square$

Capítulo 6

Formulación variacional de algunos problemas de contorno elípticos en dimensión N

En este capítulo se presentarán algunos ejemplos de problemas de contorno elípticos, para los cuales se estudiará la existencia y unicidad de *soluciones débiles*.

6.1. El problema de Dirichlet homogéneo para operadores de segundo orden elípticos

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado y no vacío, y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
Se considera el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

Una *solución clásica* de (6.1) es una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ que verifique la ecuación en derivadas parciales y la condición frontera.

Proposición 6.1.
Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$. Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ es una solución clásica de (6.1)*, entonces $u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y verifica:*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración:
Como $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ y Ω es acotado, en particular $u, \partial_j u$ son continuas y acotadas en Ω, y por tanto, $u, \partial_j u \in L^2(\Omega)$; $u \in H^2(\Omega)$.
Además, por ser u continua, $u \in H_0^1(\Omega)$ por la proposición 3.3.

Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \partial_j u \, \partial_j \varphi.$$

Dado que:

$$\int_\Omega \partial_i u \, \partial_j \varphi = -\int_\Omega (\partial_{ij}^2 u) \, \varphi,$$

se tiene:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = -\sum_{j=1}^{N} \int_\Omega (\partial_{jj}^2 u) \, \varphi = -\int_\Omega (\Delta u) \, \varphi = \int_\Omega f \, \varphi.$$

Por densidad, se deduce que:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f \, v,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. □

Esto motiva la siguiente:

Definición 6.2.
Se dice que una función $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil *del problema* (6.1), *con $f \in L^2(\Omega)$, si verifica:*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f \, v,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

En estos términos, el teorema de Lax-Milgram (5.8) permite establecer la existencia y unicidad de soluciones débiles:

Teorema 6.3.
Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$. Existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (6.1), *que está caracterizada por:*

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v),$$

donde:

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla v\|^2 - \int_\Omega f \, v. \tag{6.2}$$

Demostración:
Notemos antes de nada que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, pues es la adherencia de un subespacio del espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$.

Se definen la forma bilineal (simétrica) en $H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{array}{cccc} a & : & H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (v,w) & \longmapsto & \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w \end{array}$$

y la forma lineal:

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & v & \longmapsto & \int_\Omega f\,v \end{array}$$

ϕ es continua por la desigualdad de Hölder:

$$|\phi(v)| \leq \int_\Omega |f\,v| \leq \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|v\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|v\right\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Veamos que a es continua y coerciva:

- Para todas $v,w\in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |a(v,w)| &\leq \int_\Omega |\nabla v\cdot\nabla w| \leq \sum_{j=1}^N \int_\Omega |\partial_j v\,\partial_j w| \\ &= \sum_{j=1}^N \left\|\partial_j v\,\partial_j w\right\|_{L^1(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^N \left\|\partial_j v\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\partial_j w\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^N \left\|\partial_j v\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^N \left\|\partial_j w\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\|v\right\|_{H^1(\Omega)}\left\|w\right\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

- Para toda $v\in H_0^1(\Omega)$:

$$a(v,v) = \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v = \sum_{j=1}^N \int_\Omega (\partial_j v)^2 = \sum_{j=1}^N \left\|\partial_j v\right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

  Por la desigualdad de Poincaré para espacios H^1 (teorema 3.6), existe una constante $C_1>0$ tal que:

$$\left\|w\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1\left(\sum_{j=1}^N \left\|\partial_j w\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

  para toda $w\in H_0^1(\Omega)$.
  Entonces:

$$a(v,v) \geq \frac{1}{{C_1}^2}\left\|v\right\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Por lo tanto, por el teorema de Lax-Milgram, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, y además se caracteriza por minimizar (6.2). $\square$

En la proposición 6.1 se vio que una solución clásica es una solución débil. Surge la cuestión de si una solución débil lo suficientemente regular es una solución clásica. La siguiente proposición responde a esta pregunta.

Proposición 6.4.
Supongamos que $f \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de clase $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ de (6.1)*, entonces es una solución clásica.*

Demostración:
$u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, luego por la proposición 3.3, $u \equiv 0$ en $\partial\Omega$.

Veamos que $-\Delta u = f$:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\, \varphi.$$

Para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.
Entonces, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega f\, \varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \sum_{j=1}^N \int_\Omega \partial_j u\, \partial_j \varphi,$$

donde:

$$\int_\Omega \partial_i u\, \partial_j \varphi = -\int_\Omega (\partial_{ij}^2 u)\, \varphi.$$

Luego:

$$\int_\Omega f\, \varphi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = -\sum_{j=1}^N \int_\Omega (\partial_{jj}^2 u)\, \varphi = -\int_\Omega (\Delta u)\, \varphi.$$

Entonces, por el teorema C.1, $-\Delta u = f$ casi siempre. Y como $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $-\Delta u = f$. $\square$

Se puede abordar un problema elíptico más general:
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado.
Sean $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq N$, funciones de clase $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ que verifiquen la siguiente *condición elíptica*: existe una constante $\alpha > 0$ tal que:

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x})\, z_i\, z_j \geq \alpha\, \|\mathbf{z}\|^2, \tag{6.3}$$

Para todos $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{x} \in \Omega$.
Sea $c_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua en $\overline{\Omega}$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Se considera el problema:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{ij}\,\partial_j u) + c_0\,u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.4}$$

Una *solución clásica* de 6.4 es una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ que verifica la ecuación diferencial y la condición frontera.

Proposición 6.5. *Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$. Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ es una solución clásica de* (6.4)*, entonces $u \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y verifica:*

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i v + \int_\Omega c_0\,u\,v = \int_\Omega f\,v,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración:
Como $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y Ω es acotado, en particular, $u, \partial_j u$ son continuas y acotadas en Ω, y por tanto, $u, \partial_j u \in L^2(\Omega)$; $u \in H^1(\Omega)$.

Además, por ser u continua, $u \in H_0^1(\Omega)$ por la proposición 3.3.
Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i\varphi = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i\varphi = -\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \partial_i(a_{ij}\,\partial_j u)\,\varphi =$$
$$= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{ij}\,\partial_j u)\,\varphi = \int_\Omega (f - c_0\,u)\,\varphi.$$

Como las funciones a_{ij}, c_0 son continuas en el compacto $\overline{\Omega}$, están acotadas. Entonces, podemos aplicar la desigualdad de Hölder y pasar al límite para demostrar que:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i v = \int_\Omega (f - c_0\,u)\,v,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. □

Definición 6.6.
Se dice que una función $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil *del problema* (6.4)*, con $f \in L^2(\Omega)$, si verifica:*

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i v + \int_\Omega c_0\,u\,v = \int_\Omega f\,v,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Se definen la forma bilineal en $H_0^1(\Omega)$:

$$a(v,w) := \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \partial_j v\, \partial_i w + c_0\, v\, w \Big),$$

y la forma lineal en $H_0^1(\Omega)$:

$$\phi(v) := \int_\Omega f\, v.$$

ϕ es continua por la desigualdad de Hölder.

Veamos que a es continua:
Para todas $v, w \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
|a(v,w)| &\leq \int_\Omega \Big| \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \partial_j v\, \partial_i w + c_0\, v\, w \Big| \leq \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega |a_{ij}\, \partial_j v\, \partial_i w| + \int_\Omega |c_0\, v\, w| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^N \left\|a_{ij}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|\partial_j v\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\partial_j w\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + \left\|c_0\right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|v\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|w\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq M \left(\left\|v\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|w\right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^N \left\|\partial_j v\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\partial_j w\right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq M \left\|v\right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \left\|w\right\|_{W^{1,2}(\Omega)},
\end{aligned}$$

utilizando la desigualdad de Hölder, donde:

$$M = \max \left\{ \left\|c_0\right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\} \cup \left\{ \left\|a_{ij}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}_{i,j=1}^N.$$

Como la norma de Sobolev es equivalente a la norma de Hilbert, se deduce la continuidad de a.

Supongamos que $c_0 \geq 0$. Veamos que a es coerciva:
Para toda $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \partial_j v\, \partial_i v + \int_\Omega c_0\, v^2 \geq \int_\Omega \alpha \left\|\nabla v\right\|^2 \\
&= \alpha \sum_{j=1}^N \int_\Omega |\partial_j v|^2 = \alpha \sum_{j=1}^N \left\|\partial_j v\right\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

por la propiedad elíptica (6.3). Por la desigualdad de Poincaré para espacios H^1 (teorema 3.6), existe una constante $C_1 > 0$ tal que:

$$\left\|w\right\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \left(\sum_{j=1}^N \left\|\partial_j w\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

para toda $w \in H_0^1(\Omega)$.
Luego:

$$a(v,v) \geq \alpha \sum_{j=1}^{N} \left\| \partial_j v \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{\alpha}{{C_1}^2} \left\| v \right\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Entonces, igual que para el problema del laplaciano, se puede aplicar el teorema de Lax-Milgram para demostrar la existencia y unicidad de soluciones débiles. Además, si se verifica $a_{ij} = a_{ji}$, la forma bilineal a es simétrica, y por lo tanto se puede caracterizar la solución débil por minimizar el funcional $\frac{1}{2}\, a - \phi$ en $H_0^1(\Omega)$.

Se podría considerar un problema elíptico más general:

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i (a_{ij}\, \partial_j u) + \sum_{j=1}^{N} b_j\, \partial_j u + c_0\, u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{6.5}$$

donde $a_{ij}, b_j, c_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \leq i,j \leq N$ son funciones continuas en $\overline{\Omega}$, con a_{ij} de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$ y verificando la propiedad elíptica (6.3).
Se definen la forma bilineal en $H_0^1(\Omega)$:

$$a(v,w) := \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, \partial_j v\, \partial_i w + \sum_{j=1}^{N} b_j\, \partial_j u\, v + c_0\, v\, w \Big),$$

y la forma lineal en $H_0^1(\Omega)$:

$$\phi(v) := \int_\Omega f\, v.$$

En general, a no es simétrica. Tampoco es en general coerciva. No obstante, existe un resultado que proporciona una condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones, pero para demostrarlo sería necesario el teorema de Rellich-Kondrashov, sobre la compacidad de las inyecciones de espacios de Sobolev en espacios L^p.

6.2. El problema de Dirichlet no homogéneo para operadores de segundo orden elípticos

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado y no vacío, y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Se considera el problema:

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{6.6}$$

Una *solución clásica* de (6.6) es una función $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ que verifique la ecuación en derivadas parciales y la condición frontera.

Supongamos que existe una función $\widetilde{g} \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tal que $\widetilde{g}_{|\partial\Omega} = g$. Se define:

$$\mathcal{K}_{\widetilde{g}} := \left\{ v \in H^1(\Omega) \ / \ v - \widetilde{g} \in H_0^1(\Omega) \right\} = \widetilde{g} + H_0^1(\Omega).$$

El conjunto $\mathcal{K}_{\widetilde{g}}$ no depende de la extensión particular de g:
En efecto, si $\widetilde{h} \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ otra función tal que $\widetilde{h}_{|\partial\Omega} = g$, veamos que $\mathcal{K}_{\widetilde{h}} = \mathcal{K}_{\widetilde{g}}$:
Sea $v \in \mathcal{K}_{\widetilde{g}}$; v es de la forma $v = \widetilde{g} + w$, con $w \in H_0^1(\Omega)$.
Entonces, $v = \widetilde{h} + \widetilde{g} - \widetilde{h} + w$, donde $(\widetilde{g} - \widetilde{h})_{|\partial\Omega} = g - g = 0$ y por tanto, por la proposición 3.3, $\widetilde{g} - \widetilde{h} \in H_0^1(\Omega)$; $\widetilde{g} - \widetilde{h} + w \in H_0^1(\Omega)$. Luego $v \in \widetilde{h} + H_0^1(\Omega) = \mathcal{K}_{\widetilde{g}}$.
Análogamente, se prueba que $\mathcal{K}_{\widetilde{h}} \subset \mathcal{K}_{\widetilde{g}}$.

Concluimos que el conjunto $\mathcal{K}_{\widetilde{g}}$ depende únicamente de g; $\mathcal{K}_{\widetilde{g}} = \mathcal{K}_g$.

Por un procedimiento idéntico al de la proposición 6.1, se concluye la definición apropiada de soluciones débiles para los problemas no homogéneos:

Definición 6.7.
Se dice que una función $u \in \mathcal{K}_g$ es una solución débil *del problema* (6.6) $f \in L^2(\Omega)$, *si verifica:*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v,$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Nótese que el conjunto $\mathcal{K}_g$ es un subconjunto de $H^1(\Omega)$ cerrado, convexo y no vacío, ya que es el trasladado del subespacio cerrado $H_0^1(\Omega)$ por la función $\widetilde{g}$, cuya existencia se supone.

Por el teorema A.3, si la función g es continua en $\partial\Omega$, existe una extensión suya $\widetilde{g}$ a $\mathbb{R}^N$ de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \partial\Omega)$. En particular, como Ω es acotado, esta extensión pertenecerá a $H^2(\Omega)$. En estas condiciones se puede probar la existencia y unicidad de soluciones:

Teorema 6.8.
Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$ y que g es continua en $\partial\Omega$. Existe una única solución débil $u_0 \in \mathcal{K}_g$ del problema (6.6)*, que está caracterizada por:*

$$J(u_0) = \min_{v \in \mathcal{K}_g} J(v),$$

donde:

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega \|\nabla v\|^2 - \int_\Omega f\, v. \tag{6.7}$$

Demostración:
Consideramos el problema homogéneo:

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{u} = f + \Delta\widetilde{g} & \text{en } \Omega \\ \widetilde{u} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.8}$$

Por el teorema 6.3, (6.8) tiene una única solución débil $\widetilde{u}_0 \in H_0^1(\Omega)$, caracterizada por minimizar:

$$\widetilde{J}(\widetilde{v}) := \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla\widetilde{v}\|^2 - \int_\Omega (f + \Delta\widetilde{g})\,\widetilde{v}.$$

Sea $u_0 = \widetilde{u}_0 + \widetilde{g}$; $u_0 \in \mathcal{K}_g$. Se verifica:

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = -\Delta\widetilde{u} - \Delta\widetilde{g} = f + \Delta\widetilde{g} - \Delta\widetilde{g} = f & \text{en } \Omega \\ u_{0|\partial\Omega} = \widetilde{u}_{0|\partial\Omega} + \widetilde{g}_{|\partial\Omega} = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}.$$

Entonces, u_0 es la única solución débil del problema (6.6).
Además, para toda $\widetilde{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$, si llamamos $v = \widetilde{v} + \widetilde{g}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{J}(\widetilde{v}) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla\widetilde{v}\cdot\nabla\widetilde{v} - \int_\Omega (f + \Delta\widetilde{g})\,\widetilde{v} \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(v - \widetilde{g})\cdot\nabla(v - \widetilde{g}) - \int_\Omega (f + \Delta\widetilde{g})\,(v - \widetilde{g}) \\ &= J(v) + \int_\Omega \big(\frac{1}{2}\nabla\widetilde{g}\cdot\nabla\widetilde{g} + \widetilde{g}\,\Delta\widetilde{g} + f\,\widetilde{g}\big) \\ &\quad - \int_\Omega (\widetilde{v} + \widetilde{g})\,\Delta\widetilde{g} - \int_\Omega (\nabla\widetilde{v} + \nabla\widetilde{g})\cdot\nabla\widetilde{g} \\ &= J(v) + \int_\Omega \big(f\,\widetilde{g} - \frac{1}{2}\nabla\widetilde{g}\cdot\nabla\widetilde{g}\big) - \int_\Omega \widetilde{v}\,\Delta\widetilde{g} - \int_\Omega \nabla\widetilde{v}\cdot\nabla\widetilde{g}, \end{aligned}$$

donde:

$$\int_\Omega \widetilde{v}\,\Delta\widetilde{g} = \sum_{j=1}^N \int_\Omega \widetilde{v}\,\partial_{jj}^2\widetilde{g} = -\sum_{j=1}^N \int_\Omega \partial_j\widetilde{v}\,\partial_j\widetilde{g} = -\int_\Omega \nabla\widetilde{v}\cdot\nabla\widetilde{g}.$$

Por tanto:

$$\widetilde{J}(\widetilde{v}) = J(v) + \int_\Omega \big(f\,\widetilde{g} - \frac{1}{2}\nabla\widetilde{g}\cdot\nabla\widetilde{g}\big), \tag{6.9}$$

Veamos que, por densidad, se verifica (6.9) para toda $\widetilde{v} \in H_0^1(\Omega)$, siendo $v = \widetilde{v} + \widetilde{g}$:
Sea $(\widetilde{v}_l)_{l=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente hacia $\widetilde{v}$ en $H^1(\Omega)$. Llamemos $v_l = \widetilde{v}_l + \widetilde{g}$; $(v_l)_{l=1}^\infty$ converge hacia v en $H^1(\Omega)$.

Entonces, utilizando la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \nabla\widetilde{v}_l\cdot\nabla\widetilde{v}_l-\int_\Omega \nabla\widetilde{v}\cdot\nabla\widetilde{v}\right|\\
&\qquad\le \int_\Omega \left|\nabla\widetilde{v}_l\cdot\nabla\widetilde{v}_l-\nabla\widetilde{v}_l\cdot\nabla\widetilde{v}+\nabla\widetilde{v}_l\cdot\nabla\widetilde{v}-\nabla\widetilde{v}\cdot\nabla\widetilde{v}\right|\\
&\qquad\le \int_\Omega \Big(\left|\nabla\widetilde{v}_l\cdot(\nabla\widetilde{v}_l-\nabla\widetilde{v}_l)\right|+\left|(\nabla\widetilde{v}_l-\nabla\widetilde{v}_l)\cdot\nabla\widetilde{v}\right|\Big)\\
&\qquad\le \sum_{j=1}^N\left(\int_\Omega \left|\partial_j\widetilde{v}_l\,(\partial_j\widetilde{v}_l-\partial_j\widetilde{v}_l)\right|+\int_\Omega\left|(\partial_j\widetilde{v}_l-\partial_j\widetilde{v}_l)\,\partial_j\widetilde{v}\right|\right)\\
&\qquad\le \sum_{j=1}^N\Big(\left\|\partial_j\widetilde{v}_l\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\partial_j\widetilde{v}\right\|_{L^2(\Omega)}\Big)\left\|\partial_j\widetilde{v}_l-\partial_j\widetilde{v}\right\|_{L^2(\Omega)}\xrightarrow[l\to\infty]{}0,
\end{aligned}$$

ya que la sucesión $(\partial_j\widetilde{v}_l)_{l=1}^\infty$ está acotada en $L^2(\Omega)$ por ser convergente. Análogamente, se prueba que:

$$\left|\int_\Omega \nabla v_l\cdot\nabla v_l-\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v\right|\xrightarrow[l\to\infty]{}0.$$

También, por la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega (f+\Delta g)\,\widetilde{v}_l-\int_\Omega (f+\Delta g)\,\widetilde{v}\right|\\
&\qquad\le \int_\Omega \left|f+\Delta g\right|\left|\widetilde{v}_l-\widetilde{v}\right|\le \left\|f+\Delta g\right\|_{L^2(\Omega)}\left\|\partial_j\widetilde{v}_l-\partial_j\widetilde{v}\right\|_{L^2(\Omega)}\xrightarrow[l\to\infty]{}0,
\end{aligned}$$

y análogamente:

$$\left|\int_\Omega f\,v_l-\int_\Omega f\,v\right|\xrightarrow[l\to\infty]{}0.$$

Por lo tanto:

$$\widetilde{J}(\widetilde{v}_l)\xrightarrow[l\to\infty]{}\widetilde{J}(\widetilde{v})\ \text{ y }\ J(v_l)\xrightarrow[l\to\infty]{}J(v).$$

Entonces, se deduce (6.9) para $\widetilde{v}$.

Como:

$$\int_\Omega \big(f\,\widetilde{g}-\frac{1}{2}\,\nabla\widetilde{g}\cdot\nabla\widetilde{g}\big),$$

no depende de v, que $\widetilde{u}_0$ minimice $\widetilde{J}$ equivale a que u_0 minimice J.

□

6.3. El problema de Neumann homogéneo para operadores de segundo orden elípticos

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado de clase $\mathcal{C}^1$, y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
Se considera el problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.10}$$

donde $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla u$ es la derivada normal exterior de u en $\partial\Omega$.

Una *solución clásica* de (6.10) es una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ que verifica la ecuación en derivadas parciales y la condición frontera.

Recordemos la identidad de Green:
Dadas $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, se verifica:

$$\int_\Omega (\Delta u)\, v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, v - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v. \tag{6.11}$$

Proposición 6.9.
Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$. Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ es una solución clásica de (6.10), *entonces $u \in H^1(\Omega)$ y verifica:*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v,$$

para toda $v \in H^1(\Omega)$.

Demostración:
Como $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ y Ω es acotado, en particular $u, \partial_j u$ son continuas y acotadas en Ω, y por tanto, $u \in H^1(\Omega)$.

Para toda $v \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$:
Por la fórmula de Green:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\, v &= -\int_\Omega (\Delta u)\, v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, v + \int_\Omega u\, v \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v. \end{aligned}$$

Entonces, para toda $v \in H^1(\Omega)$:
Por el corolario 2.6, existe una sucesión $(v_l)_{l=1}^\infty$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que:

$$\left\| v_{l|_\Omega} - v \right\|_{W^{1,2}(\Omega)} \xrightarrow[l \to \infty]{} 0.$$

Dado que $v_{l|\Omega} \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ para todo $l \in \mathbb{N}$,

$$\Big| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (v_{l|\Omega} - v) \Big| = \Big| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (v_l - v) \Big| \leq \sum_{j=1}^N \int_\Omega |\partial_j u| \, |\partial_j v_l - \partial_j v|$$
$$\leq \sum_{j=1}^N \big\| \partial_j u \big\|_{L^2(\Omega)} \big\| \partial_j v_l - \partial_j v \big\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,$$

$$\Big| \int_\Omega u \, (v_{l|\Omega} - v) \Big| = \Big| \int_\Omega u \, (v_l - v) \Big| \leq \sum_{j=1}^N \big\| u \big\|_{L^2(\Omega)} \big\| v_l - v \big\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,$$

$$\Big| \int_\Omega f \, (v_{l|\Omega} - v) \Big| = \Big| \int_\Omega f \, (v_l - v) \Big| \leq \sum_{j=1}^N \big\| f \big\|_{L^2(\Omega)} \big\| v_l - v \big\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Luego:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u \, v = \lim_{l\to\infty} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v_l + \lim_{l\to\infty} \int_\Omega u \, v_l = \lim_{l\to\infty} \int_\Omega f \, v_l = \int_\Omega f \, v.$$

□

Definición 6.10.
Se dice que una función $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil *del problema* (6.10)*, con $f \in L^2(\Omega)$, si verifica:*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u \, v = \int_\Omega f \, v,$$

para toda $v \in H^1(\Omega)$.

Análogamente al problema de Dirichlet, se demuestra la existencia y unicidad de soluciones débiles por el teorema de Lax-Milgram (5.8):

Teorema 6.11.
Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$. Existe una única solución débil $u \in H^1(\Omega)$ del problema (6.10)*, que está caracterizada por:*

$$J(u) = \min_{v \in H^1(\Omega)} J(v),$$

donde:

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega (\|\nabla v\|^2 + v^2) - \int_\Omega f \, v. \tag{6.12}$$

Demostración:
Se definen en $H^1(\Omega)$:

$$a(v,w) := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w + \int_\Omega v\, w, \quad \phi(v) := \int_\Omega f\, v.$$

ϕ es continua por la desigualdad de Hölder.
a también es continua:
Para todas $v, w \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
|a(v,w)| &\leq \int_\Omega |\nabla v \cdot \nabla w| + \int_\Omega |f\, v| \leq \sum_{j=1}^N \int_\Omega |\partial_j v\, \partial_j w| + \int_\Omega |f\, v| \\
&= \sum_{j=1}^N \|\partial_j v\, \partial_j w\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \|v\, w\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq \sum_{j=1}^N \|\partial_j v\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_j w\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \|v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^N \|\partial_j v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \left(\sum_{j=1}^N \|\partial_j w\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&= \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|w\|_{W^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

a es también simétrica. Veamos que es coerciva:
Para toda $v \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v + \int_\Omega v^2 = \sum_{j=1}^N \int_\Omega (\partial_j v)^2 + \int_\Omega v^2 \\
&= \sum_{j=1}^N \|\partial_j v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} = \|v\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema de Lax-Milgram, existe una única $u \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v,$$

para toda $v \in H^1(\Omega)$, y además se caracteriza por minimizar (6.12). $\square$

Nota: en el problema (6.10) es necesario que aparezca el término u en la ecuación diferencial para que la forma bilineal sea coerciva, ya que al ser el espacio de definición de las soluciones débiles $H^1(\Omega)$, no se puede aplicar la desigualdad de Poincaré. El método es igualmente válido para la ecuación $-\Delta u + \lambda\, u = f$, con $\lambda > 0$.

6.4. El problema biarmónico homogéneo

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado de clase $\mathcal{C}^1$, y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
Se considera el problema:

$$\begin{cases} \Delta(\Delta u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.13}$$

Una *solución clásica* del problema (6.13) es una función $u \in \mathcal{C}^4(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ que verifique la ecuación en derivadas parciales y las condiciones frontera.

En el estudio del problema Dirichlet homogéneo, el espacio apropiado para definir las soluciones débiles era el espacio $H_0^1(\Omega)$, por la caracterización de anulación en la frontera. En los siguientes resultados, además de establecer la igualdad que debe verificar una solución débil, se demostrará que el espacio en donde se verifican las dos condiciones frontera homogéneas (para funciones continuas) es $H_0^2(\Omega)$.

Proposición 6.12.
Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$. Si $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$ es una solución clásica de (6.13), *entonces $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y verifica:*

$$\int_\Omega \Delta u \, \Delta v = \int_\Omega f \, v,$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega)$.

Demostración:
Como $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$ y Ω es acotado, u y sus derivadas parciales hasta el cuarto orden son continuas y acotadas en Ω, por tanto, $u \in H^4(\Omega)$, en particular $u \in H^2(\Omega)$. Por la condición frontera $u = 0$ en $\partial\Omega$, $u \in H_0^1(\Omega)$.

Además, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega f \, \varphi = \int_\Omega \Delta(\Delta u) \, \varphi,$$

donde:

$$\Delta(\Delta u) = \sum_{i=1}^{N} \partial_{ii}^2 \Big(\sum_{j=1}^{N} \partial_{jj}^2 u \Big).$$

Tengamos en cuenta que:

$$\int_\Omega \partial_{ii}^2 \partial_{jj}^2 u \, \varphi = \int_\Omega \partial_{jj}^2 u \, \partial_{ii}^2 \varphi.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\,\varphi &= \int_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial^2_{ii}\,\partial^2_{jj} u\,\varphi = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial^2_{jj} u\,\partial^2_{ii}\varphi \\ &= \int_\Omega \sum_{j=1}^N \partial^2_{jj} u \sum_{i=1}^N \partial^2_{ii}\varphi = \int_\Omega \Delta u\,\Delta\varphi.\end{aligned}$$

Por tanto, para toda $v \in H^2_0(\Omega)$:
Existe una sucesión $(v_l)_{l=1}^\infty$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que:

$$\left\|v_l - v\right\|_{W^{2,2}(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega \Delta u\,\Delta(v_l - v)\Big| &\leq \int_\Omega \Big|\sum_{i=1}^N \partial^2_{ii} u\Big|\,\Big|\sum_{j=1}^N (\partial^2_{jj} v_l - \partial^2_{jj} v)\Big| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_\Omega |\partial^2_{ii} u|\,|\partial^2_{jj} v_l - \partial^2_{jj} v| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^N \left\|\partial^2_{ii} u\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\partial^2_{jj} v_l - \partial^2_{jj} v\right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

$$\Big|\int_\Omega f\,(v_l - v)\Big| \leq \sum_{j=1}^N \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|v_l - v\right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Luego:

$$\int_\Omega \Delta u\,\Delta v = \lim_{l\to\infty} \int_\Omega \Delta u\,\Delta v_l = \lim_{l\to\infty} \int_\Omega f\,v_l = \int_\Omega f\,v.$$

□

Se demostrará ahora que una función de $H^2_0(\Omega)$ lo suficientemente regular y continua en $\overline{\Omega}$ verifica la condición frontera de Neumann homogénea:

Lema 6.13.
Si $u \in H^2_0(\Omega)$, entonces, para todo $j \leq N$, $\partial_j u \in H^1_0(\Omega)$.

Demostración:
Existe una sucesión $(u_l)_{l=1}^\infty$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente hacia u en $H^2(\Omega)$. Veamos que $(\partial_j u_l)_{l=1}^\infty$ converge hacia $\partial_j u$ en $H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\left\|\partial_j u_l - \partial_j u\right\|_{W^{1,2}(\Omega)} &= \left\|\partial_j u_l - \partial_j u\right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\|\partial^2_{ij} u_l - \partial^2_{ij} u\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left\|u - u_l\right\|_{W^{2,2}(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $\partial_j u \in H^1_0(\Omega)$. □

Corolario 6.14.
Si $u \in H_0^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, *entonces,* $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \equiv 0$ *en* $\partial\Omega$.

Demostración:
Se tiene que $\partial_j u \in H_0^1(\Omega)$ para todo $j \leq N$.
Por la proposición 3.3, $\partial_j u \equiv 0$ en $\partial\Omega$ para todo $j \leq N$. Por tanto:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla u \equiv 0,$$

en $\partial\Omega$. □

Por lo tanto, el espacio adecuado para estudiar la existencia y unicidad de soluciones débiles por el teorema de Lax-Milgram es el espacio $H_0^2(\Omega)$.

Definición 6.15.
Se dice que una función $u \in H_0^2(\Omega)$ *es una* solución débil *del problema* (6.13), *con* $f \in L^2(\Omega)$, *si verifica:*

$$\int_\Omega \Delta u \, \Delta v = \int_\Omega f \, v,$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega)$.

Teorema 6.16.
Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$. *Existe una única solución débil* $u \in H_0^1(\Omega)$ *del problema* (6.10), *que está caracterizada por:*

$$J(u) = \min_{v \in H_0^2(\Omega)} J(v),$$

donde:

$$J(v) := \frac{1}{2} \int_\Omega (\Delta v)^2 - \int_\Omega f \, v. \tag{6.14}$$

Demostración:
$H_0^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, pues es la adherencia del subespacio $\mathcal{D}(\Omega)$ del espacio de Hilbert $H^2(\Omega)$.

Definamos en $H_0^2(\Omega)$:

$$a(v, w) := \int_\Omega \Delta v \, \Delta w, \quad \phi(v) := \int_\Omega f \, v.$$

ϕ es continua por la desigualdad de Hölder.

a es simétrica. Veamos que es continua:
Para todas $v, w \in H_0^2(\Omega)$:

$$|a(v, w)| \leq \left| \int_\Omega \Delta v \, \Delta w \right| \leq \left\| \Delta v \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \Delta w \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| v \right\|_{W^{2,2}(\Omega)} \left\| w \right\|_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Veamos que a es coerciva:

Lema 6.17. *Sean* $v, w \in H_0^2(\Omega)$*. Entonces:*

$$\int_\Omega \Delta v\, \Delta w = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \partial_{ij}^2 v\, \partial_{ij}^2 w.$$

Demostración:
Para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \Delta v\, \Delta \varphi = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \partial_{ii}^2 v\, \partial_{jj}^2 \varphi = -\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \partial_i v\, \partial_{ijj}^3 \varphi = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \partial_{ij}^2 v\, \partial_{ij}^2 \varphi.$$

Por tanto, para $w \in H_0^2(\Omega)$:
Existe una sucesión $(w_l)_{l=1}^\infty$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que:

$$\|w_l - w\|_{W^{2,2}(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\Big| \int_\Omega \Delta v\, \Delta(w_l - w) \Big| &\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|w_l - w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|v\|_{W^{2,2}(\Omega)} \|w_l - w\|_{W^{2,2}(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

$$\Big| \int_\Omega \partial_{ij}^2 v\, \partial_{ij}^2 (w_l - w) \Big| \leq \sum_{i,j=1}^{N} \|\partial_{ij}^2 v\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_{ij}^2 w_l - \partial_{ij}^2 w\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0.$$

Luego:

$$\int_\Omega \Delta v\, \Delta w = \lim_{l\to\infty} \int_\Omega \Delta v\, \Delta w_l = \lim_{l\to\infty} \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \partial_{ij}^2 v\, \partial_{ij}^2 w_l = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \partial_{ij}^2 v\, \partial_{ij}^2 w.$$

$\square$

Por lo tanto, para toda $v \in H_0^2(\Omega)$:

$$a(v, v) = \int_\Omega \Delta v\, \Delta v = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \partial_{ij}^2 v\, \partial_{ij}^2 v. \tag{6.15}$$

Lema 6.18.
Existe una constante C^* *tal que para toda* $v \in H_0^2(\Omega)$*:*

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C^* \sum_{i,j=1}^{N} \|\partial_{ij}^2 v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Nota: este resultado permite demostrar una propiedad análoga a la desigualdad de Poincaré para el espacio $H_0^2(\Omega)$. Por un procedimiento recursivo, se demostraría para todos los espacios $H_0^m(\Omega)$, con Ω acotado.

Demostración:
Por la desigualdad de Poincaré para espacios H^1 (teorema 3.6), existe una constante C_1 tal que:

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \left(\sum_{j=1}^{N} \|\partial_j w\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

para toda $w \in H^1_0(\Omega)$.
Entonces, para todo $i \leq N$, por el lema 6.13, $\partial_i v \in H^1_0(\Omega)$. Por tanto:

$$\|\partial_i v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_1^2 \sum_{j=1}^{N} \|\partial^2_{ij} v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{H^2(\Omega)} &= \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} \|\partial^2_{ij} v\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq {C_1}^2 \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{N} \|\partial^2_{ij} v\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq {C_1}^2 \sum_{i=1}^{N} {C_1}^2 \sum_{j=1}^{N} \|\partial^2_{ij} v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{N} \|\partial^2_{ij} v\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= (1 + {C_1}^4) \sum_{i,j=1}^{N} \|\partial^2_{ij} v\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Aplicando este último lema a (6.15), obtenemos:

$$a(v,v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega (\partial^2_{ij} v)^2 = \sum_{i,j=1}^{N} \|\partial^2_{ij} v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{1 + {C_1}^4} \|v\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

Por lo tanto, por el teorema de Lax-Milgram, existe una única $u \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u\, v = \int_\Omega f\, v,$$

para toda $v \in H^1(\Omega)$, y además se caracteriza por minimizar (6.14). □

Apéndice A

Resultados previos sobre la topología de $\mathbb{R}^N$

Teorema A.1 (**Versión $\mathcal{C}^\infty$ del lema de Urysohn**).
Sean $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y $V \subset \mathbb{R}^N$ abierto tales que $K \subset V$. Existe una función $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que:

- $0 \leq \zeta \leq 1$,
- $\zeta \equiv 1$ *en* K,
- $\zeta \equiv 0$ *en* $\mathbb{R}^N \backslash V$.

Se escribe $K \prec \zeta \prec V$.

Teorema A.2 (**Particiones de la unidad**). [3]
Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$ y sea $\Omega = \bigcup_{i\in I} U_i$. Entonces, existe una familia $\{\psi_i\}_{i\in I}$ de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ verificando:

i) $Sop(\psi_i) \subset U_i \ \forall\, i \in I$.

ii) $0 \leq \psi_i \leq 1 \ \forall\, i \in I$.

iii) $\sum_{i\in I} \psi_i = 1$.

iv) La familia de conjuntos $\big\{\{\mathbf{x} \in \Omega \,/\, \psi_i(\mathbf{x}) \neq 0\}\big\}_{i\in I}$ *es localmente finita, es decir, la familia de índices* $\big\{i \in I \,/\, \{\mathbf{x} \in U_i \,/\, \psi_i(\mathbf{x}) \neq 0\}\big\}$ *es finita. Se dice que* $\{\psi_i\}_{i\in I}$ *es una* partición de la unidad *(iii) de* Ω localmente finita *(iv)* subordinada al recubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ *(i).*

Teorema A.3 (**Whitney**). [6]
Sea $F \subset \mathbb{R}^N$ cerrado y sea f una función real definida en F. Si f es continua, existe una extensión $\widetilde{f}$ de f a $\mathbb{R}^N$ continua en $\mathbb{R}^N \backslash F$. De hecho, se puede tomar $\widetilde{f}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^N \backslash F$.

Apéndice B

Resultados previos sobre espacios L^p y sobre convoluciones

Teorema B.1 (Young). [1]
Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1,\infty]$. Entonces, su producto de convolución $f * g$ está bien definido casi siempre en $\mathbb{R}^N$, $f * g \in L^P(\mathbb{R}^N)$, y además:

$$\left\|f * g\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \left\|f\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \left\|g\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Teorema B.2 (Sucesiones regularizantes). [1]
Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \in [1,\infty)$. Sea $(\rho_l)_{l=1}^{\infty}$ una sucesión regularizante*, es decir, una sucesión $(\rho_l)_{l=1}^{\infty}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que:*

- *$Sop(\rho_l) \subset B\big(\mathbf{0}, \frac{1}{l}\big)$,*
- *$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_l = 1$,*

para todo $l \in \mathbb{N}$. Entonces, $(\rho_l * f)_{l=1}^{\infty}$ converge hacia f en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Teorema B.3 (Densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$). [1]
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1,\infty)$.

Teorema B.4 (Separabilidad de $L^p(\Omega)$). [1]
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. $L^p(\Omega)$ es separable para todo $p \in [1,\infty)$.

Teorema B.5 (Desigualdad de Hölder generalizada). [1]
Sean $\{p_i\}_{i=1}^{k}$ exponentes de $[1,\infty]$ tales que:

$$\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \leq 1.$$

Sea $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ *para todo* $i \leq k$ *y sea* $f = \prod_{i=1}^{k} f_i$*. Entonces,* $f \in L^p(\Omega)$ *y:*

$$\left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{k} \left\|f_i\right\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Teorema B.6 (Desigualdad de interpolación). [1]
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto no vacío. Sean* $p, q \in [1, \infty]$ *con* $p < q$ *y sea* $r \in (p, q)$*. Entonces,* $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \subset L^r(\Omega)$*. Además, si* $\lambda \in (0, 1)$ *es tal que:*

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1 - \lambda}{q},$$

entonces, para toda $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$*:*

$$\left\|f\right\|_{L^r(\Omega)} \leq \left\|f\right\|_{L^p(\Omega)}^{\lambda} \left\|f\right\|_{L^q(\Omega)}^{1-\lambda} \leq \left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|f\right\|_{L^q(\Omega)}.$$

Apéndice C

Resultados previos sobre distribuciones

Teorema C.1. [3]
Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*:*

$$\int_\Omega f\,\varphi = 0.$$

Entonces, $f \equiv 0$ *casi siempre.*

Teorema C.2 (**Regla de Leibniz para producto de función por distribución**)**.** [3]
Sean $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *una distribución y sea* $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$*. Entonces:*

$$\partial_j(a\,u) = \partial_j a\,u + a\,\partial_j u.$$

Teorema C.3 (**Derivada distribucional de la convolución**)**.** [3]
Sean $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *dos distribuciones tales que para todo* $K \subset \mathbb{R}^N$ *compacto:*

$$\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in Sop(u) \times Sop(v) \;/\; \mathbf{x}+\mathbf{y} \in K\},$$

es compacto (lo cual ocurre si u o v tiene soporte compacto). Entonces, la convolución de distribuciones $u * v$ *está bien definida, y además, para todo* $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^N$*:*

$$\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v).$$

Apéndice D

Resultados previos sobre espacios métricos, normados y de Hilbert

Teorema D.1 (**Consecuencia del teorema de Hahn-Banach**).
Sea E un espacio normado y sea M un subespacio no denso de E. Sea $x \in E$. Son equivalentes:

a) $x \notin \overline{M}$.

b) Existe un funcional lineal y continuo f sobre E tal que $f(x) \neq 0$ y $f_{|M} \equiv 0$.

Teorema D.2 (**de representación de Riesz-Fréchet**). [1]
Sea H un espacio de Hilbert y sea $\phi \in H^*$ un funcional lineal y continuo. Existe un único $f \in H$ tal que:

$$\phi(x) = \langle f, x \rangle,$$

para todo $x \in H$. Además, $\|f\| = \|\phi\|$.

Teorema D.3 (**del punto fijo de Banach - principio de la contracción**). [5]
Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación contractiva, es decir, tal que existe una constante $c \in (0, 1)$ tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x, y),$$

para todos $x, y \in X$. Entonces, f tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Bibliografía

[1] H. Brezis (2010). *Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*. Springer.

[2] S. Kesavan (2003). *Topics in Functional Analysis and Applications*. New Age International (P) Limited Publishers.

[3] D. Mitrea (2018). *Distributions, Partial Differential Equations and Harmonic Analysis*. Springer.

[4] W. Rudin (1979). *Análisis Real y Complejo*. Alhambra.

[5] W. Rudin (1980). *Principios de Análisis Matemático*. McGraw-Hill.

[6] E.M. Stein (1970). *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press.