



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

El teorema de Poincaré-Hopf

Autor: José Miguel Lendínez Sánchez

Tutora: Carolina Ana Núñez Jiménez

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	3
2.1. Curvas y superficies en \mathbb{R}^3	4
2.2. Aplicaciones diferenciables en superficies	4
2.3. El plano tangente	5
2.4. Aplicación diferencial de una aplicación diferenciable	5
2.5. Variedades diferenciables de \mathbb{R}^n	6
2.6. Orientabilidad	8
2.7. Separación	10
2.8. Particiones de la unidad	11
2.9. Teorema de Sard	12
3. Integración en superficies	13
3.1. Entornos tubulares	14
3.2. Integración en $S \times \mathbb{R}$	20
3.3. Integración en superficies	22
3.4. El teorema de la divergencia	28
4. Índice de campos vectoriales y el teorema de Gauss-Bonnet	37
4.1. El grado de una aplicación entre superficies compactas	38
4.2. Índice de un campo vectorial en un posible cero aislado	47
4.3. El Teorema de Gauss-Bonnet	54
4.4. El índice en coordenadas locales	57
5. El Teorema de Poincaré-Hopf	63
5.1. Símplices en \mathbb{R}^n . Complejos simpliciales	64
5.2. Cadenas y grupos de homología	64
5.3. Invarianza topológica de la característica de Euler-Poincaré	68
5.4. Característica de Euler-Poincaré de una superficie compacta	72
5.5. El campo de Hopf	72
5.6. El teorema de Poincaré-Hopf	76

Capítulo 1

Introducción

El trabajo que aquí se presenta busca, desde un punto de vista principalmente geométrico, ofrecer una vía de demostración de una versión particular del *teorema de Poincaré-Hopf* para el caso de superficies compactas sumergidas en \mathbb{R}^3 . Este resultado es uno de los teoremas más profundos de la geometría de superficies y su importancia reside en la conexión que establece entre la geometría y la topología de las superficies en cuestión. Concretando un poco más, el teorema relaciona los índices de un campo vectorial tangente definido en una superficie compacta, y su característica de Euler-Poincaré, un invariante topológico. El desarrollo que aquí se expone busca distanciarse del tradicional estudio local de las superficies mediante parametrizaciones, resultando un trabajo enmarcado mayormente en el ámbito de la Geometría Diferencial global que se alinea con los objetivos de la geometría moderna. El libro que se ha seguido principalmente es [1] y la estructura que presenta este estudio está influenciada por las ideas exhibidas en [2].

Los aspectos geométricos del resultado se abordan a partir de las nociones básicas de la geometría de superficies en \mathbb{R}^3 , que se recopilan sin demostrar. Una vez se dispone de estos resultados, se construye una teoría de la integración sobre las superficies. Dado el punto de vista global que se pretende aportar al estudio, se evita la forma habitual de definir la integración sobre las superficies a partir de parametrizaciones, acudiendo entonces a conjuntos íntimamente relacionados con las superficies en cuestión, difeomorfos a abiertos en \mathbb{R}^3 , denominados entornos tubulares. Esta manera de construir la integración permite trasladar las propiedades usuales de la teoría de la integración de Lebesgue a las superficies, y culmina con una demostración poco habitual del afamado *teorema de la Divergencia*.

Para finalizar el desarrollo de la parte geométrica de la prueba del *teorema de Poincaré-Hopf* que aquí se expone, se prueba una versión también global del conocido *teorema de Gauss-Bonnet*, alejada de la formulación original en términos de triángulos geodésicos y relacionada con el índice de los ceros de un campo vectorial tangente a la superficie, cuyas propiedades se estudian exhaustivamente.

El carácter topológico del resultado viene dado por la característica de Euler-Poincaré. Se desarrollan las nociones y resultados básicos de la topología algebraica que permiten introducirla a partir de los grupos de homología simplicial. Una vez se prueba su invarianza topológica, se define la característica de Euler-Poincaré para superficies de \mathbb{R}^3 vía triangulaciones.

Una vez ambas partes, la geométrica y la topológica, han sido desarrolladas, se acude a la construcción de un campo vectorial, debida a Heinz Hopf, que permite establecer la relación buscada entre ellas y así culminar la idea de demostración del *teorema de Poincaré-Hopf* desarrollada en [2].

Desde un punto de vista histórico, en este teorema confluyen uno de los resultados más relevantes de la Geometría Diferencial de superficies, el *teorema de Gauss-Bonnet*, resultado cumbre de la dedicación del matemático alemán Carl Friedrich Gauss a este ámbito y la característica de Euler-Poincaré, que proviene de la afamada fórmula de Euler que relaciona el número de caras, vértices y aristas de un poliedro convexo, y que posteriormente Henri Poincaré generalizaría a la noción que aquí se utiliza.

Pese a que este trabajo se limita a abordar el resultado para superficies compactas y conexas sumergidas en \mathbb{R}^3 , el resultado goza de una mayor generalidad, pudiendo enunciarse para variedades M compactas de dimensión arbitraria con y sin borde sumergidas en \mathbb{R}^n .

El trabajo está estructurado de la siguiente manera: en primer lugar, en el *capítulo 2*, se establecen los preliminares geométricos necesarios; en segundo lugar, en el *capítulo 3*, se define la integración en superficies; a continuación, en el *capítulo 4*, se define el grado, el índice de un campo vectorial y a partir de ello se prueba una versión híbrida del *teorema de Gauss-Bonnet* y del *de Poincaré-Hopf*, en la que no interviene la característica de Euler-Poincaré. Por último, en el *capítulo 5*, se introduce la característica de Euler-Poincaré y se concluye la idea de demostración *teorema de Poincaré-Hopf* a partir de indicar la construcción del campo de Hopf.

Capítulo 2

Preliminares

El objetivo de este primer capítulo es presentar las definiciones y resultados básicos necesarios para abordar el desarrollo que se presenta a lo largo de este trabajo.

Las primeras cuatro secciones introducen las nociones fundamentales sobre superficies sumergidas en \mathbb{R}^3 que son, ordenadamente: la definición de superficie y cartas locales, la definición de una estructura diferenciable en ellas, la introducción del plano tangente en un punto de la superficie y, a partir de este último, la definición de la aplicación diferencial.

En la siguiente sección se indica como extender las nociones introducidas anteriormente sobre superficies al caso de variedades diferenciables de dimensión arbitraria sumergidas en espacios euclídeos. Se detallan sólo aquellos resultados que resultan significativos para el estudio.

A continuación se presentan los resultados básicos acerca de dos aspectos topológicos de las superficies, la orientabilidad y la separación. El primero de estos apartados introduce lo que habitualmente se denomina aplicación de Gauss, a partir de la cual, mediante el endomorfismo de Weingarten, se construye la curvatura media y la curvatura de Gauss.

Por último, se introducen algunos conceptos y resultados auxiliares ampliamente utilizados en la topología diferencial, como son las particiones de la unidad y el *teorema de Sard*. El primero es fundamental para ensamblar objetos o propiedades definidos localmente (en este caso a través de cartas locales) en objetos globales, mientras que el segundo se utilizará para lidiar con los valores críticos de las aplicaciones diferenciables entre variedades que aparecen en la integración en superficies.

Los resultados acerca de superficies en \mathbb{R}^3 recopilados en este capítulo se pueden encontrar en [1] y [3]. Para consultar resultados de carácter más general dentro del marco de la topología diferencial se acude a [4] y [5].

2.1. Curvas y superficies en \mathbb{R}^3

Definición 2.1. Una *curva diferenciable* es una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase \mathcal{C}^∞ definida en un intervalo abierto de \mathbb{R} .

Definición 2.2. Un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie diferenciable* en \mathbb{R}^3 si para todo $p \in S$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de p en S y una aplicación diferenciable $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que se verifica:

- (a) $x(U) = V$.
- (b) $x : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo.
- (c) $(dx)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U$.

La aplicación x se denomina *parametrización* o *carta local* en p .

Generalmente nos referiremos a las superficies diferenciables simplemente como superficies.

2.2. Aplicaciones diferenciables en superficies

Definición 2.3. Dada una superficie S y un subconjunto O abierto de \mathbb{R}^n se tiene que:

- (a) Una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es *diferenciable* si para cualquier parametrización (x, U) de la superficie se verifica que $f \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable.
- (b) Una aplicación $O \rightarrow S$ es *diferenciable* si la composición $i \circ f : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la inclusión es diferenciable.
- (c) Dada otra superficie S^* , una aplicación $f : S \rightarrow S^*$ es *diferenciable* si la aplicación $i^* \circ f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable en el sentido de (a), donde i^* es la inclusión $i^* : S^* \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Proposición 2.4. Una aplicación *diferenciable* en cualquiera de los sentidos (a), (b) ó (c) de la definición anterior es necesariamente continua.

Proposición 2.5. Sea O un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 y $f : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable en el sentido habitual. Entonces, dada una superficie $S \subset O$, la aplicación $\tilde{f} = f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable.

Proposición 2.6. La combinación lineal de aplicaciones diferenciables en el sentido de la *definición 2.3* es diferenciable. Dadas dos aplicaciones $f : S_1 \rightarrow S_2$ y $g : S_2 \rightarrow S_3$ donde S_1 , S_2 y S_3 son o bien superficies o bien conjuntos abiertos de espacios euclídeos, la composición $g \circ f : S_1 \rightarrow S_3$ es diferenciable.

Definición 2.7. Una *curva diferenciable en S* es una aplicación $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable.

Definición 2.8. Un *difeomorfismo* entre dos superficies S_1 y S_2 es una aplicación diferenciable $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ en el sentido de la *definición 2.3* (a) tal que su inversa $\phi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ es también diferenciable.

De aquí en adelante no se hace diferenciación entre las aplicaciones diferenciables en el sentido habitual o en el sentido de la *definición 2.3*, se distinguen por el contexto.

2.3. El plano tangente

Definición 2.9. Sea S una superficie y $p \in S$ un punto de ella. Se dice que un vector $v \in \mathbb{R}^3$ es tangente a S en p si existe una curva diferenciable en S , $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ donde $\epsilon > 0$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. El conjunto de todos los vectores tangentes a S en p se denota por $T_p(S)$.

Proposición 2.10. Dada una superficie S y una parametrización $x : U \rightarrow S$ con $p \in x(U)$, entonces

$$T_p(S) = (dx)_{x^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2) \text{ que es, por tanto, un espacio vectorial.}$$

De hecho, si $p = x(q)$, la aplicación $(dx)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p(S)$ es un isomorfismo lineal y si $x = x(u, v)$, entonces $\{x_u(q), x_v(q)\}$ es una base de $T_p(S)$.

2.4. Aplicación diferencial de una aplicación diferenciable

Con la extensión de la noción de diferenciabilidad a funciones sobre superficies sumergidas en \mathbb{R}^3 dada por la *definición 2.3*, es natural introducir su correspondiente aplicación diferencial como se hace a continuación:

Definición 2.11. Sea S una superficie y f una aplicación $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable. Dado un punto $p \in S$ se define $(df)_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}^m$, la *aplicación diferencial de f en p* como sigue. Dado un vector $v \in T_p(S)$, sea α una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces

$$(df)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = (f \circ \alpha)'(0).$$

Proposición 2.12. El vector $(df)_p(v)$ no depende de la curva α escogida en su definición y $(df)_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal.

Proposición 2.13. Sea S una superficie contenida en un conjunto abierto $O \in \mathbb{R}^3$ y $f : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable tal que $\tilde{f} = f|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es su restricción a la superficie. Para todo $p \in S$ se tiene que $(d\tilde{f})_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la restricción de $(df)_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $T_p(S)$.

Proposición 2.14 (Regla de la cadena). Dadas dos aplicaciones diferenciables $f : S_1 \rightarrow S_2$ y $g : S_2 \rightarrow S_3$, donde S_1 , S_2 y S_3 son o bien superficies o bien subconjuntos abiertos de espacios euclídeos, y un punto $p \in S_1$, se tiene que

$$d(g \circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p.$$

Proposición 2.15. Dada una superficie S , se verifican las siguientes propiedades:

- (a) Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable, S es conexa y $(df)_p = 0$ para todo $p \in S$, entonces f es constante.
- (b) Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y en $p \in S$ hay un extremo local de f , entonces p es un punto crítico de f , esto es, $(df)_p = 0$.

Teorema 2.16 (De las funciones inversas). Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable entre superficies y sea $p \in S_1$. Si $(df)_p : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ es un isomorfismo lineal, entonces existe un entorno V_1 de p en S_1 y un entorno V_2 de $f(p)$ en S_2 tal que $f(V_1) = V_2$ y $f|_{V_1} : V_1 \rightarrow V_2$ es un difeomorfismo.

Definición 2.17. Sean S_1 y S_2 dos superficies y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable entre superficies. Si $p \in S_1$ y $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de $T_p(S)$, se define el *valor absoluto del Jacobiano de f en p* como

$$|Jac f|(p) = |(df)_p(e_1) \wedge (df)_p(e_2)|.$$

Proposición 2.18. Sean S_1 y S_2 dos superficies y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable.

- (a) El valor absoluto del Jacobiano de f en un punto p no depende de la base ortonormal de $T_p(S)$ elegida para su cálculo.
- (b) Se tiene que $|Jac f|(p) \neq 0$ si y solo si $(df)_p$ es un isomorfismo.

2.5. Variedades diferenciables de \mathbb{R}^n

Resulta conveniente introducir la noción de variedad diferenciable de dimensión $m \leq n$ sumergida en \mathbb{R}^n , sobre la que se pueden definir, de manera análoga a lo realizado para superficies, los conceptos de aplicación diferenciable, plano tangente y aplicación diferencial¹.

Definición 2.19. Una variedad diferenciable de dimensión m de \mathbb{R}^n es un subespacio no vacío $M \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $m \in M$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$, un entorno abierto V de p en M y una aplicación diferenciable $x : U \rightarrow V$ tal que x verifica las condiciones análogas a las expuestas en la *definición 2.2* para el caso de superficies en \mathbb{R}^3 .

Esta aplicación x se denomina *parametrización* o *carta local* en m .

¹Dado que las definiciones y resultados básicos son análogos a los presentados para el caso de superficies sumergidas en \mathbb{R}^3 , se limitará esta parte a indicarlos brevemente, enunciando formalmente solo aquellos de los que se haga un uso explícito a lo largo del trabajo.

A partir de la noción de parametrización se extienden de manera natural los conceptos y resultados expuestos en la *sección 2.2* al caso de aplicaciones diferenciables en variedades diferenciables de dimensión m en \mathbb{R}^n .

Definición 2.20. Una *curva diferenciable en una variedad diferenciable* M de \mathbb{R}^n es una aplicación $\alpha : I \rightarrow M$ tal que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable en el sentido habitual.

A partir de esta definición se puede introducir el plano tangente a una variedad diferenciable M de \mathbb{R}^n en un punto $m \in M$, adaptando la *definición 2.9* y, de la misma manera, se puede definir la diferencial de una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables por analogía con la *definición 2.11*.

Observación 2.21. *Cualquier abierto* $V \subset \mathbb{R}^n$ *puede entenderse como una variedad diferenciable en* \mathbb{R}^n . *Su plano tangente en cualquier punto* $p \in V$ *es nuevamente* \mathbb{R}^n .

Proposición 2.22. Dadas dos variedades diferenciables M_1 y M_2 de \mathbb{R}^{n_1} y \mathbb{R}^{n_2} con dimensiones m_1 y m_2 respectivamente, el producto $M_1 \times M_2$ es una variedad diferenciable en $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ de dimensión $m_1 + m_2$.

Proposición 2.23. Dadas dos variedades diferenciables M_1 y M_2 de \mathbb{R}^{n_1} y \mathbb{R}^{n_2} , el plano tangente a la variedad $M_1 \times M_2$ de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ en un punto $(p, q) \in M_1 \times M_2$ verifica que

$$T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) = T_p(M_1) \times T_q(M_2).$$

El teorema de las funciones inversas, *teorema 2.16*, también se puede probar para las aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables de \mathbb{R}^n .

Teorema 2.24 (De las funciones inversas). Sean M_1 y M_2 dos variedades diferenciables de \mathbb{R}^{n_1} y \mathbb{R}^{n_2} respectivamente, $f : M_1 \rightarrow M_2$ una aplicación diferenciable, $p \in M_1$ y $q = f(p)$. La aplicación diferencial $(df)_p : T_p(M_1) \rightarrow T_q(M_2)$ es un isomorfismo si y solo si existe un entorno abierto W de p en M_1 tal que $f(W)$ es un entorno abierto de q en M_2 y de modo que $f|_W : W \rightarrow f(W)$ es un difeomorfismo.

La función valor absoluto del Jacobiano (*definición 2.17*) también puede generalizarse para el caso de variedades diferenciables de \mathbb{R}^n .

Definición 2.25. Sea $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ una aplicación diferenciable donde M_1 y M_2 son variedades diferenciables de igual dimensión. Se define la función *valor absoluto del Jacobiano* como la aplicación $|Jac \phi| : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$|Jac \phi|(x) = |\det (d\phi)_x| \quad \text{para todo } x \in M_1,$$

donde $(d\phi)_x$ es la representación matricial correspondiente a la aplicación diferencial asociada a ϕ respecto a bases ortonormales para los planos tangentes a M_1 y M_2 en x y en $\phi(x)$ respectivamente.

2.6. Orientabilidad

Sea S una superficie. Dada una parametrización $x : U \rightarrow S$, la aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$N(p) = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}(x^{-1}(p)),$$

donde $(u, v) = x^{-1}(p)$ y los subíndices denotan la derivación parcial respecto a las respectivas variables, es diferenciable y envía cada punto de S en un vector unitario ortogonal al plano tangente $T_p(S)$ de S en p .

Definición 2.26. Una superficie S es *orientable* si existe una aplicación diferenciable $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que envía cada punto $p \in S$ en un vector no nulo ortogonal al plano tangente de S en p , $T_p(S)$, para todo punto de S . Cualquier aplicación que satisfaga estas condiciones y tal que $\|N(p)\| = 1$ para todo $p \in S$ se denomina *orientación*.

Dado que una orientación N de una superficie S envía cada punto en un vector unitario, es claro que la imagen de esta ha de estar contenida en la esfera \mathbb{S}^2 , es decir, $N(S) \subset \mathbb{S}^2$, lo cual lleva a la siguiente definición:

Definición 2.27. Sea S una superficie orientable cuya orientación viene dada por la aplicación diferenciable $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. La aplicación dada por la restricción del espacio de llegada de esta a la esfera \mathbb{S}^2 ,

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2,$$

se denomina *aplicación de Gauss en S* .

Definición 2.28. Dada una superficie S orientada siendo $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ su correspondiente aplicación de Gauss y $p \in S$ un punto de S :

- (a) Se dice que una base $\{v_1, v_2\}$ del plano tangente $T_p(S)$ está *orientada positivamente* si $\det(v_1, v_2, N(p)) > 0$. Por otra parte, si $\det(v_1, v_2, N(p)) < 0$ entonces se dice que la base está *orientada negativamente*.
- (b) Si S_1 y S_2 son dos superficies orientadas, se dice que un difeomorfismo local $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ *preserva la orientación* si su diferencial en cada punto p de S_1 lleva bases orientadas positivamente de $T_p(S_1)$ en bases orientadas positivamente de $T_{\phi(p)}(S_2)$.
- (c) Dada una aplicación $\phi : S_1 \rightarrow S_2$, entre superficies orientables, se define la aplicación *Jacobiano* de ϕ , $Jac \phi : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$(Jac \phi)(p) = \det((d\phi)_p(e_1), (d\phi)_p(e_2), N_2(\phi(p))).$$

Donde $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de $T_p(S_1)$ y N_2 es una aplicación de Gauss en S_2 .

Proposición 2.29. En las condiciones del punto (c) de la definición anterior, la aplicación $Jac \phi : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Además, si las superficies S_1 y S_2 son conexas y ϕ es un difeomorfismo local, entonces ϕ preserva la orientación si y solo si su Jacobiano es positivo para todo $p \in S_1$.

Proposición 2.30. Dadas dos superficies orientables S_1 y S_2 y una aplicación $\phi : S_1 \rightarrow S_2$, se tiene que la función valor absoluto del Jacobiano de la *definición 2.17* verifica que

$$|\text{Jac } \phi|(p) = |(\text{Jac } \phi)(p)| = |\det((d\phi)_p(e_1), (d\phi)_p(e_2), N_2(\phi(p)))|.$$

Donde $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de $T_p(S)$ y N_2 una aplicación de Gauss en S_2 .

Teorema 2.31. Toda superficie S compacta de \mathbb{R}^3 es orientable.

Vamos a recordar los conceptos de endomorfismo de Weingarten, segunda forma fundamental, curvaturas y direcciones principales, curvatura media y curvatura de Gauss. En primer se tiene el siguiente resultado auxiliar:

Proposición 2.32. Dada una superficie S orientada mediante una aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, la aplicación diferencial de N en un punto $p \in S$, $(dN)_p$, es un endomorfismo en $T_p(S)$, esto es,

$$(dN)_p : T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(\mathbb{S}^2) = T_p(S).$$

Definición 2.33. Dada una superficie orientada S mediante una aplicación de Gauss N , se denomina *endomorfismo de Weingarten* de S en p al endomorfismo $A_p = -(dN)_p : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$.

Definición 2.34. Sea S una superficie orientada por una aplicación de Gauss N . La forma bilineal dada por

$$\begin{aligned} II_p : T_p(S) \times T_p(S) &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \in S, \\ (v, w) &\longmapsto \langle A_p(v), w \rangle, \end{aligned}$$

donde A_p es el endomorfismo de Weingarten de S en p , se denomina *segunda forma fundamental*.

Proposición 2.35. La segunda forma fundamental II_p en un punto p de una superficie orientada S por una aplicación de Gauss N es una forma bilineal simétrica en el plano tangente $T_p(S)$. Equivalentemente, A_p , el endomorfismo de Weingarten de S en p , es un endomorfismo autoadjunto respecto al producto escalar en \mathbb{R}^3 . En particular es diagonalizable y o bien los dos autovalores son distintos en cuyo caso las dos direcciones de autovectores son ortogonales, o bien son iguales en cuyo caso todas las direcciones son autovectores.

Si se cambia la orientación considerada N por $-N$, la segunda forma fundamental asociada a esta nueva orientación en un punto p , que denotamos por \tilde{II}_p , verifica que $\tilde{II}_p = -II_p$.

Definición 2.36. Sea S una superficie orientada y A_p el correspondiente endomorfismo de Weingarten de S en un punto $p \in S$:

- (a) Los autovalores de A_p , que denotamos por $k_1(p)$ y $k_2(p)$ ordenados de forma que $k_1(p) \geq k_2(p)$, se denominan *curvaturas principales de S en p* . Una dirección principal de S en p es una dirección de $T_p(S)$ que es autovector de A_p .

(b) Se define la *curvatura media* de S en p como $H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}$.

(c) Se define la *curvatura de Gauss* de S en p como $K(p) = k_1(p)k_2(p)$.

Proposición 2.37. Dada una superficie S orientada por una aplicación de Gauss N , la curvatura media y la curvatura de Gauss, $H, K : S \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables y satisfacen las siguientes igualdades,

$$H(p) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} (dN)_p, \quad K(p) = \det (dN)_p \quad y \quad H^2(p) - K(p) \geq 0 \text{ para todo } p \in S,$$

donde tr denota la traza.

2.7. Separación

Proposición 2.38. Dado un punto p de una superficie S , existe un entorno abierto W de p en S tal que W es difeomorfo a un abierto O del plano $z = 0$ contenido en \mathbb{R}^3 .

Definición 2.39. Sea C la imagen de una curva diferenciable sin auto-intersecciones y S una superficie. Se dice que C y S intersecan *transversalmente* en un punto $p \in C \cap S$ si el vector tangente a la curva en p no pertenece al plano tangente a la superficie $T_p(S)$ en dicho punto.

Proposición 2.40. Dada una superficie S compacta y un plano $P \subset \mathbb{R}^3$, se tiene para todas las rectas R ortogonales a P que presentan intersecciones transversales con S en todos los puntos de corte, que $R \cap S$ tiene un número finito de puntos.

Los siguientes resultados materializan la idea de que las superficies compactas y conexas en \mathbb{R}^3 dividen el espacio euclídeo en exactamente dos dominios. Puede entenderse como el análogo tridimensional del *teorema de la curva de Jordan*.

Teorema 2.41 (De separación de Jordan-Brouwer). Dada una superficie S compacta y conexa en \mathbb{R}^3 se tiene que $\mathbb{R}^3 \setminus S$ tiene exactamente dos componentes conexas cuya frontera común es la superficie S .

Dada una superficie S que verifica las condiciones del teorema anterior, se tiene que existe una bola B tal que $S \subset B$. De esta manera se puede asegurar que alguna de las dos componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \setminus S$, cuya existencia viene dada por el teorema anterior, es no acotada, mientras que la otra sí lo es. Esto permite introducir las siguientes definiciones:

Definición 2.42. Dada una superficie S compacta y conexa, se denomina *dominio interior* determinado por S a la componente conexa acotada obtenida de la aplicación del *teorema de Jordan-Brouwer* respecto a dicha superficie. El *dominio interior* se suele denotar por Ω .

Definición 2.43. Sea N una orientación de una superficie compacta y conexa S tal que el segmento que comienza en cada $p \in S$ en la dirección de $N(p)$ queda

contenido en el *dominio interior* Ω determinado por S para alguna longitud $\epsilon_p > 0$ suficientemente pequeña. Entonces se denomina a N *orientación interior* o *normal interior* de S . La orientación que resulta de revertir la *normal interior* se denomina *normal exterior* de S .

2.8. Particiones de la unidad

Definición 2.44. Una familia de subconjuntos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de una superficie S es un *recubrimiento* de $W \subset S$ si $W \subset \bigcup U_\alpha$. Se dice que el recubrimiento es *abierto* si cada U_α es abierto. Cualquier familia de conjuntos $\{U_\beta\}_{\beta \in B} \subset \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se denomina *subrecubrimiento* si aún se verifica que para todo $p \in W$ existe algún β tal que $p \in U_\beta$. Un *refinamiento* $\{V_\gamma\}_{\gamma \in G}$ del recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un recubrimiento tal que para cada γ existe un α tal que $V_\gamma \subset U_\alpha$.

Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de subconjuntos de S es *localmente finita* si para todo $p \in S$ existe un entorno W_p de p en S tal que $W_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ solamente para un número finito de $\alpha \in A$.

También será útil en el desarrollo de este estudio introducir el *número de Lebesgue* de un recubrimiento de un espacio métrico compacto a partir del siguiente lema.

Lema 2.45 (Del número de Lebesgue). Dado un espacio métrico (X, d) compacto y un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X , existe un número $\delta > 0$ tal que todo subconjunto de X con diámetro menor que δ está contenido en algún miembro del recubrimiento. Cualquier $\xi \in (0, \delta]$ se denomina *número de Lebesgue* del recubrimiento.

Definición 2.46. Sea X un conjunto arbitrario, dada una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se define su soporte, denotado por $\text{supp } f$, como el conjunto

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Definición 2.47. Una *partición de la unidad* en una superficie S es una familia

$$\{\varphi_i : S \rightarrow \mathbb{R} \mid i \in I\}$$

numerable de funciones tal que:

- (a) La familia de soportes $\{\text{supp } \varphi_i : i \in I\}$ es localmente finita.
- (b) $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$ para todo $p \in S$ y $\varphi_i(p) \geq 0$ para todo $p \in S$ e $i \in I$

Una partición de la unidad $\{\varphi_i : i \in I\}$ está *subordinada* al recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ si para todo $i \in I$ existe un $\alpha \in A$ tal que $\text{supp } \varphi_i \subset U_\alpha$.

Teorema 2.48 (De existencia de particiones de la unidad). Dada una superficie S y un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de S existe una partición de la unidad numerable $\{\varphi_i : i \geq 1\}$ de funciones diferenciables subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, con soporte $\text{supp } \varphi_i$ compacto para todo i .

2.9. Teorema de Sard

En primer lugar se introduce un resultado auxiliar útil en la demostración del teorema, que se enuncia posteriormente.

Proposición 2.49. Sea O un abierto acotado de \mathbb{R}^3 y $f : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable. Sea \mathcal{N} el conjunto de puntos críticos de f . Esto es,

$$\mathcal{N} = \{x \in O \mid |\text{Jac } f|(x) = 0\}.$$

Si K es un compacto de \mathcal{N} , entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un abierto $V_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$$K \subset V_\epsilon \subset O \text{ y } \text{vol } \phi(V_\epsilon) < \epsilon.$$

Teorema 2.50 (De Sard, para funciones entre abiertos de \mathbb{R}^3). Sea $f : U \rightarrow V$ una función diferenciable entre abiertos $U, V \subset \mathbb{R}^3$ y sea \mathcal{N} el conjunto de puntos críticos de f . Entonces, la imagen $f(\mathcal{N})$ tiene *medida de Lebesgue* nula en \mathbb{R}^3 .

Este resultado puede extenderse para el caso de superficies sumergidas en \mathbb{R}^3 , objeto de estudio de este trabajo. Para ello definimos en primer lugar el concepto de subconjunto de medida nula de una superficie S .

Definición 2.51. Un subconjunto A de una superficie S sumergida en \mathbb{R}^3 se dice que tiene medida nula si para toda parametrización $x : U \rightarrow S$ de la superficie, el conjunto $x^{-1}(A)$ es de medida nula en \mathbb{R}^2 .

Teorema 2.52 (De Sard, para funciones entre superficies). Dada una función $f : S_1 \rightarrow S_2$ diferenciable, donde S_1 y S_2 son superficies sumergidas en \mathbb{R}^3 , sea \mathcal{M} el conjunto de puntos críticos de f , esto es,

$$\mathcal{M} = \{p \in S_1 \mid |\text{Jac } f|(p) = 0\}.$$

Entonces, la imagen $f(\mathcal{M})$ tiene *medida nula* como subconjunto de S_2 .

Capítulo 3

Integración en superficies

En este capítulo se construye la integración sobre superficies sumergidas en \mathbb{R}^3 como herramienta necesaria para abordar el teorema que pone título a este trabajo.

La forma habitual de definir la integración sobre este tipo de superficies pasa por acudir a las conocidas propiedades de la integración de Lebesgue en \mathbb{R}^2 y tras pasarlas, vía parametrizaciones, a las superficies. De hecho, esta es la manera en que se construye el cálculo diferencial en las superficies, como se presenta en la *sección 2.4* del capítulo anterior.

Sin embargo, en este estudio se presenta una forma alternativa de abordar la integral sobre superficies S compactas o sobre regiones acotadas de superficies arbitrarias. Este método se lleva a cabo a partir del concepto de *entorno tubular*, que se desarrolla en la *sección 3.1* y se basa en la idea de buscar abiertos acotados de \mathbb{R}^3 formados a partir de “extender” las regiones de las superficies en cuestión en su dirección normal. La integral se construye entonces en dos pasos, en primer lugar trasladando las propiedades de la integral de Lebesgue en \mathbb{R}^3 a productos de la forma $S \times \mathbb{R}$, como se muestra en la *sección 3.2*, y transfiriéndolas posteriormente, *sección 3.3*, a las superficies S .

Por último, se aporta en la *sección 3.4* una prueba del célebre *teorema de la divergencia* (enunciado por primera vez por Lagrange en 1760 y probado a inicios del siglo XIX, en primer lugar por Gauss para algunos casos particulares y posteriormente por Mikhail Ostrogradsky en general), que permite calcular la integral de los campos vectoriales definidos en el dominio interior que determinan las superficies compactas (descrito en la *definición 2.42*) a partir de su valor en la superficie y dependiendo de la orientación empleada, mediante lo que se conoce como flujo del campo a través de la superficie. La prueba que aquí se presenta se basa en una fórmula integral que permite relacionar dos superficies entre sí cuando entre ellas existe una aplicación diferenciable, distanciándose así de otras demostraciones habituales propias del análisis matemático, ver [6], págs. 225-228.

Se toma como referencia principal [1], mientras que para los resultados habituales sobre la integración de Lebesgue en \mathbb{R}^3 se consulta [6].

3.1. Entornos tubulares

Definición 3.1. Dada una superficie S , para cada $\delta > 0$ se denota por $B_\delta(S)$ el conjunto de puntos de \mathbb{R}^3 cuya distancia a la superficie S es menor que δ

$$B_\delta(S) = \{p \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } d(p, S) < \delta\},$$

donde $d(p, S) = \inf_{q \in S} \|p - q\|$.

Proposición 3.2. Sea $S \in \mathbb{R}^3$ una superficie cerrada en \mathbb{R}^3 , y sea $\delta > 0$. Para cada $p \in S$ sea $N_\delta(p)$ el segmento abierto centrado en p y de longitud 2δ ortogonal a S en p . Denotamos

$$N_\delta(S) = \bigcup_{p \in S} N_\delta(p).$$

Entonces $B_\delta(S) = N_\delta(S)$.

Demostración. Sea p un punto de S . Para todo $q \in N_\delta(p)$ se tiene que $d(q, S) \leq \|q - p\| < \delta$. Por tanto, se verifica que $N_\delta(p) \subset B_\delta(S)$ para todo $p \in S$ y en consecuencia $N_\delta(S) \subset B_\delta(S)$.

Para probar la otra contención, dado $q \in B_\delta(S)$, si $q \notin S$ (pues en caso contrario la conclusión es trivial), se toma la función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \|p - q\|$. Esta función alcanza un mínimo en la superficie pues tomando una bola cerrada $\overline{B}(q, r)$ tal que $\overline{B}(q, r) \cap S$ sea distinto del vacío, se tiene que el conjunto $\overline{B}(q, r) \cap S$ es compacto. Para puntos de $S \setminus \overline{B}(q, r)$ es claro que la distancia $\|p - q\| > r$. Por lo tanto la función f , en caso de alcanzar un mínimo, lo alcanza en $\overline{B}(q, r) \cap S$. La existencia de este mínimo esta asegurada puesto que f es continua y por lo tanto $f(\overline{B}(q, r) \cap S)$ es subespacio compacto de \mathbb{R} .

Además, este mínimo ha de estar en una posición tal que la dirección que define $p - q$ coincida con la normal a la superficie en el punto p . Para probar esta afirmación basta tener en cuenta que la aplicación f es diferenciable siempre que $q \notin S$ y alcanza el mínimo en la superficie. De hecho se tiene que para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tomando una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$,

$$(df)_x(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\langle \alpha(t) - q, \alpha(t) - q \rangle^{1/2}) = \frac{\langle \alpha'(0), \alpha(0) - q \rangle}{\langle \alpha(0) - q, \alpha(0) - q \rangle^{1/2}} = \frac{\langle v, x - q \rangle}{\|x - q\|}.$$

En el punto p en el que se alcanza el mínimo de f se verifica $(df)_p = 0$ en virtud a la *proposición 2.15*. Es decir,

$$(df)_p(v) = \frac{\langle v, p - q \rangle}{\|p - q\|} = 0 \text{ para todo } v \in T_p(S).$$

Como $p - q \neq 0$, esto ocurre si y solo si $p - q$ es ortogonal a v para todo $v \in T_p(S)$, es decir, si $p - q$ es ortogonal a S en p .

Por tanto, teniendo en cuenta que q se encuentra en la normal a S en p y que $q \in B_\delta(p)$, se concluye que $q \in N_\delta(p)$, con lo que queda probado que $B_\delta(S) \subset N_\delta(S)$. \square

Este resultado lleva a pensar que tomando radios suficientemente pequeños, se puede describir $B_\delta(S)$ mediante el producto topológico de la superficie con el correspondiente intervalo de \mathbb{R} . Sin embargo, el hecho de que haya auto-intersecciones puede resultar un problema para esta descripción. Para solventar este inconveniente se introduce la noción de *entorno tubular*. En primer lugar se presenta la siguiente aplicación, que permite controlar al mismo tiempo todos los segmentos abiertos normales a la superficie centrados en puntos $p \in S$.

Dada una superficie orientable S , no necesariamente cerrada, en la que se fija una aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, se denota por $F : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la función

$$F(p, t) = p + tN(p), \quad (3.1)$$

que envía cada par (p, t) en un punto a distancia t de p en la dirección del vector normal $N(p)$. Además, se verifica que

$$F(S \times (-\delta, \delta)) = N_\delta(S) = \bigcup_{p \in S} N_\delta(p) \quad \text{para todo } \delta > 0.$$

Definición 3.3 (Entorno tubular). Dada una superficie orientable S , el conjunto $N_\delta(S)$ definido en la *proposición 3.2* se denomina *entorno tubular* si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (a) $N_\delta(S)$ es abierto de \mathbb{R}^3 .
- (b) La aplicación $F : S \times (-\delta, \delta) \rightarrow N_\delta(S)$ definida en (3.1) es un difeomorfismo.

Lema 3.4. Para todo punto p de una superficie S existe un entorno abierto orientable V de p en S y un escalar $\delta > 0$ tal que el conjunto $N_\delta(V)$ es un *entorno tubular de V* .

Demostración. Se evalúa en primer lugar la diferencial de $F : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ en un punto $(p, t) \in S \times \mathbb{R}$. Para ello se toma $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño y una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces, la curva diferenciable $\tilde{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \times \mathbb{R}$ dada por $\tilde{\alpha}(s) = (\alpha(s), t + sa)$ verifica que $\tilde{\alpha}(0) = (p, t)$ y $\tilde{\alpha}'(s) = (v, a)$, luego a partir de los comentarios realizados en la *sección 2.5*, se tiene que

$$\begin{aligned} (dF)_{(p,t)}(v, a) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (F \circ \tilde{\alpha})(s) = \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\alpha(s) + (t + sa)N(\alpha(s))) = v + aN(p) + t(dN)_p(v). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Evaluando en $t = 0$ se tiene que

$$(dF)_{(p,0)}(v, 0) = v \quad y \quad (dF)_{(p,0)}(0, 1) = N(p)$$

para cualquier $v \in T_p(S)$. Por lo tanto, como para cualquier base $\mathcal{B}_{T_p(S)} = \{e_1, e_2\}$ del plano tangente a S en p se tiene que $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, N(p)\}$ es base de \mathbb{R}^3 , se concluye que $(dF)_{(p,0)} : T_p(S) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un isomorfismo lineal. En consecuencia,

el *teorema 2.24* asegura que existe un entorno abierto V de p en S y un $\delta > 0$ tal que $N_\delta(V) = F(V \times (-\delta, \delta))$ es abierto y

$$F|_{V \times (-\delta, \delta)} : V \times (-\delta, \delta) \rightarrow N_\delta(V) \text{ es un difeomorfismo.}$$

Para concluir basta tener en cuenta que cualquier superficie es localmente orientable. \square

Definición 3.5. Se dice que un subconjunto R de un espacio topológico X es *relativamente compacto* si la adherencia de R es compacta en X .

Teorema 3.6 (De existencia de entornos tubulares). Dada una superficie orientable S , sea $\mathcal{R} \subset S$ un subconjunto abierto de S relativamente compacto. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que el conjunto de todos los segmentos de radio ϵ normales a S centrados en los puntos de \mathcal{R} , $N_\epsilon(\mathcal{R})$, es un entorno tubular de la superficie \mathcal{R} .

Demostración. En virtud del *lema 3.4*, se puede tomar para todo $p \in \mathcal{R}$ un $\delta > 0$ y un entorno abierto V de p en S tal que $N_\delta(V)$ es un entorno tubular. Esta familia de abiertos recubre la adherencia $\overline{\mathcal{R}}$. Por la compacidad de $\overline{\mathcal{R}}$, se puede extraer un subrecubrimiento finito $\mathcal{E} = \{V_1, \dots, V_r\}$ de modo que a cada uno de los abiertos V_i le corresponde un $N_{\delta_i}(V_i)$. Se considera entonces

$$0 < \delta_0 = \min \{\delta_1, \dots, \delta_r\}.$$

En esta situación, la aplicación F introducida en (3.1), restringida a $\mathcal{R} \times (-\delta_0, \delta_0)$, es un difeomorfismo local. Se prueba a continuación que existe un número $0 < \epsilon < \delta_0$ tal que la aplicación F restringida a $\mathcal{R} \times (-\epsilon, \epsilon)$ es inyectiva, de modo que los segmentos $N_\epsilon(p)$ no intersecan entre sí para distintos $p \in S$.

Se razona por reducción al absurdo. Se supone que para todo ϵ con $0 < \epsilon < \delta_0$ existen puntos p y q tales que $N_\epsilon(p) \cap N_\epsilon(q) \neq \emptyset$. Esto es, existen sucesiones de puntos $p_n, q_n \in S$ tales que $p_n \neq q_n$ y de modo que

$$N_{1/n}(p_n) \cap N_{1/n}(q_n) \neq \emptyset.$$

Dada la compacidad de $\overline{\mathcal{R}}$, se puede tomar una subsucesión $\{p_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ que converge hacia un punto p . Por otra parte, de la subsucesión $\{q_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ se puede extraer otra $\{q_{n_{k_j}}\}_{n_{k_j} \in \mathbb{N}}$ que converge hacia q . Ahora bien, dado que $\{p_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ converge hacia p , la subsucesión $\{p_{n_{k_j}}\}_{n_{k_j} \in \mathbb{N}}$ convergerá hacia el mismo límite. Se toman entonces ambas $\{p_{n_{k_j}}\}_{n_{k_j} \in \mathbb{N}}$ y $\{q_{n_{k_j}}\}_{n_{k_j} \in \mathbb{N}}$, que convergen respectivamente hacia $p, q \in S$ y que verifican

$$N_{1/n_{k_j}}(p_{n_{k_j}}) \cap N_{1/n_{k_j}}(q_{n_{k_j}}) \neq \emptyset \text{ para todo } n_{k_j} \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Se considera por otra parte una sucesión $r_{n_{k_j}} \in N_{1/n_{k_j}}(p_{n_{k_j}}) \cap N_{1/n_{k_j}}(q_{n_{k_j}})$. En virtud de la desigualdad triangular se tiene que

$$\|p_{n_{k_j}} - q_{n_{k_j}}\| \leq \|p_{n_{k_j}} - r_{n_{k_j}}\| + \|r_{n_{k_j}} - q_{n_{k_j}}\| < 2/n_{k_j} \text{ para todo } n_{k_j} \in \mathbb{N},$$

de modo que ambos límites han de coincidir, esto es, $p = q$. Aplicando el *lema 3.4*

al límite común, se obtiene un entorno V de $p = q$ en S y un número real $\xi > 0$ tal que $N_\xi(V)$ es un entorno tubular. Existe entonces un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_{k_j} \geq n_0$ se tiene que $p_{n_{k_j}}, q_{n_{k_j}} \in V$ y $1/n_{k_j} < \xi$, lo que implica que

$$N_{1/n_{k_j}}(p_{n_{k_j}}) \cap N_{1/n_{k_j}}(q_{n_{k_j}}) \subset N_\xi(p_{n_{k_j}}) \cap N_\xi(q_{n_{k_j}}) = \emptyset,$$

ya que $N_\xi(V)$ es un entorno tubular y entonces la restricción de F a $V \times (-\xi, \xi)$ ha de ser inyectiva. Esto entra en contradicción con la relación (3.3).

De esta manera queda probado que existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$F : \mathcal{R} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N_\epsilon(\mathcal{R})$$

es inyectiva. Junto con el hecho de que dicha aplicación es un difeomorfismo local y que es claramente sobreyectiva, se concluye finalmente que es un difeomorfismo. \square

Corolario 3.7. Dada una superficie S orientable y compacta, existe un $\epsilon > 0$ tal que el subconjunto $B_\epsilon(S)$ es un entorno tubular de S .

Demostración. Basta considerar $\mathcal{R} = S$ en el teorema anterior y tener en cuenta que $N_\epsilon(S) = B_\epsilon(S)$ como se prueba en la *proposición 3.2*. \square

Observación 3.8. *A partir del teorema de existencia de entornos tubulares se puede deducir lo siguiente:*

- (a) *Dada una superficie compacta S , sea $N_\epsilon(S)$ un entorno tubular de esta. El teorema mencionado afirma que la aplicación $F : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N_\epsilon(S)$ dada por $F(p, t) = p + tN(p)$ es un difeomorfismo. Entonces, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, la aplicación, $F_t : S \rightarrow N_\epsilon(S)$ dada por $F_t(p) = F(p, t)$, es un homeomorfismo en su imagen $S_t = F_t(S)$, pues S es compacta y F_t es continua y biyectiva. Por otro lado, si $p \in S$ y $e_1, e_2 \in T_p(S)$ son direcciones principales de S en p (definición 2.36), se tiene que tomando un $\delta > 0$ suficientemente pequeño y curvas $\alpha_i : (-\delta, \delta) \rightarrow S$ tales que $\alpha_i(0) = p$ y $\alpha'_i(0) = e_i$, entonces,*

$$(dF_t)_p(e_i) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} ((F_t \circ \alpha_i)(s)) = e_i + t(dN)_p(e_i) = (1 - tk_i(p))e_i, \quad i = 1, 2.$$

Si se reduce lo suficiente el entorno tubular, esto es, si $\epsilon < 1/k_i$ para $i = 1, 2$ en caso de ser alguno de las $k_i > 0$ (pues en caso contrario no hay problema), entonces F_t tiene diferencial inyectiva y se puede probar que S_t es una superficie difeomorfa a S por F_t , que, en particular, conserva las propiedades topológicas de S (entre las que se destacan la compacidad y la conexión). Un homeomorfismo diferenciable con diferencial inyectiva, como es el caso de F_t , se denomina “embedding” y la imagen de una variedad diferenciable a través de él es otra variedad diferenciable ([5], pág 19).

- (b) *Siguiendo la notación del punto anterior, si en el teorema en cuestión se toma como aplicación de Gauss la normal interior (definición 2.43) y la superficie S involucrada es conexa, entonces se tiene que $V_\epsilon(S) = F(S \times (0, \epsilon)) \subset \Omega$, donde Ω es el dominio interior descrito por S . Además, $V_\epsilon(S)$ es conexo (pues S es conexa y F es continua).*

Definición 3.9. La superficie $S_t = F_t(S)$ introducida en la observación anterior se denomina *superficie paralela* a S a una distancia orientada t .

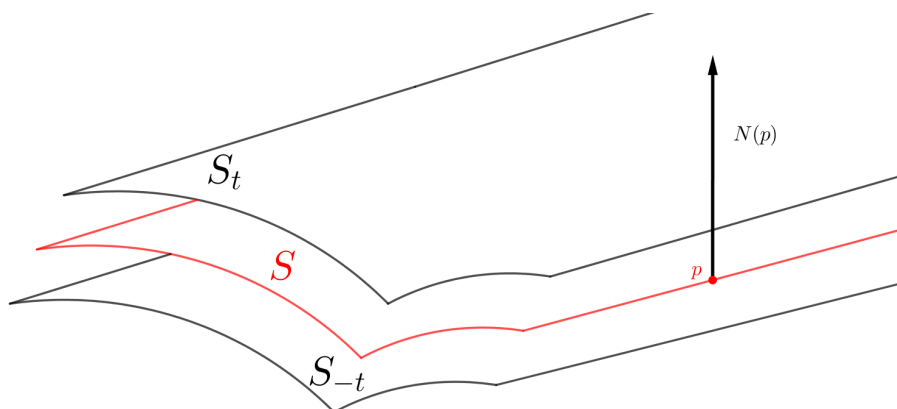


Figura 3.1: Superficies paralelas a S a distancias orientadas t y $-t$.

A continuación se prueba un resultado que resultará útil en la *sección 3.4*. Para ello, se recuerda la *definición 2.39* y la *proposición 2.40*.

Proposición 3.10. Dada una superficie S compacta y un plano P en \mathbb{R}^3 perpendicular a un vector a unitario, se tiene que casi todas las rectas R perpendiculares a P (esto es, todas menos aquellas que intersecan a P en un conjunto de medida nula de P como superficie) cortan transversalmente (*definición 2.39*) a S un número par de veces. Además, en cada uno de estos puntos p_i , $i = 1, \dots, 2k$ se tiene que $\langle N(p_i), a \rangle$ cambia de signo alternativamente al recorrer R en la dirección dada por a .

Demostración. Sea ϕ la restricción a S de la proyección ortogonal $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow P$ dada por

$$\pi|_S(p) = p - \langle p, a \rangle a + ca$$

para algún $c \in \mathbb{R}$, cuya diferencial es la proyección ortogonal sobre el plano de direcciones de P , es decir,

$$(d\phi)_p(v) = v - \langle v, a \rangle a \quad \text{para todo } v \in T_p(S) \text{ y } p \in S.$$

Si R es una recta ortogonal a P y $p \in R \cap S$, entonces R corta a S transversalmente si y solo si $a \notin T_p(S)$, es decir, $\langle N(p), a \rangle \neq 0$.

Se verifica, tomando una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ del plano tangente a S en p , y teniendo en cuenta que la aplicación constante a es una aplicación de Gauss de P , de la *proposición 2.30*, que

$$|\text{Jac } \phi|(p) = |\det(e_1 - \langle e_1, a \rangle a, e_2 - \langle e_2, a \rangle a)| = |\langle N(p), a \rangle|,$$

donde $N(p)$ es el vector normal a $T_p(S)$ en p obtenido a partir de la orientación que describen e_1 y e_2 . Por lo tanto, un punto $x \in P$ es un valor regular de ϕ si todos los puntos p que se proyectan sobre x satisfacen $\langle N(p), a \rangle \neq 0$. De esta afirmación se deduce a partir del *teorema de Sard* para aplicaciones entre superficies que el

conjunto de puntos de P tales que las rectas ortogonales al plano en dichos puntos no intersecan transversalmente a S es de medida nula.

De acuerdo con la *proposición 2.40* se tiene que para toda recta R ortogonal a P que presenta intersecciones transversales con S , $R \cap S$ es finito. Además, es claro que si se eliminan los puntos de intersección entre R y S , los segmentos abiertos resultantes pertenecen o bien a al *dominio interior* Ω determinado por S (ver *definición 2.42*) o bien a su complementario (no acotado). Si se recorre la recta en el sentido definido por a comenzando desde un punto de $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ de modo que se pase por todos los puntos de intersección, es claro que si se avanza lo suficiente se estará de nuevo en $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ en virtud de la acotación de Ω , por lo tanto tiene que haber un número par de puntos de corte en $R \cap S$. Además, en virtud del *teorema de existencia de entornos tubulares* se tiene que existe un $\delta > 0$ tal que $N_\delta(S)$ es un entorno tubular y la aplicación

$$F^{-1} : N_\delta(S) \rightarrow S \times (-\delta, \delta)$$

es un difeomorfismo. En este caso la función F anterior se utiliza tomando como aplicación de Gauss la normal interior (ver *definición 2.43* y (3.1)).

Sea $r : N_\delta(S) \rightarrow (-\delta, \delta)$ la segunda componente de F^{-1} , que envía cada punto $x \in N_\delta(S)$ en su distancia orientada con S . Se considera uno de los puntos de intersección transversal $p_i \in R \cap S$ tal que para un t suficientemente pequeño se tenga que

$$p_i + ta \in \Omega \quad \text{si } t > 0 \quad \text{y} \quad p_i + ta \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \quad \text{si } t < 0,$$

es decir, tal que recorriendo R en el sentido dado por a se tenga que p_i separa dos segmentos de R contenidos respectivamente en $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ y Ω . Esto es, en función de la aplicación r ,

$$r(p_i + ta) > 0 \quad \text{si } t > 0 \quad \text{y} \quad r(p_i + ta) < 0 \quad \text{si } t < 0.$$

donde se tiene que (la desigualdad estricta se debe a que el último término es distinto de cero por ser el corte transversal)

$$0 < \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} r(p_i + ta) = (dr)_{p_i}(a) = \langle N(p_i), a \rangle. \quad (3.4)$$

Vamos a justificar la última igualdad mediante el cálculo de la diferencial de r (que se hace en términos de curvas que pasan por el punto de interés).

Sea $w \in T_p(S)$ y sea $t \in (-\delta, \delta)$. Consideremos la curva en \mathbb{R}^3 dada por $\alpha(s) = p + tN(p) + sw$, que verifica que $\alpha(0) = p + tN(p)$ y $\alpha'(0) = w$. Por tanto, $(dr)_{p+tN(p)}(w) = \beta'(0)$, donde

$$\beta(s) = (F \circ \alpha)(s) = \langle p + tN(p) + sw, N(p) \rangle = t$$

en tanto que $w \perp N(p)$. En consecuencia, $\beta'(0) = 0$ y se verifica para todo $w \in T_p(S)$ que $(dr)_{p+tN(p)}(w) = 0$.

Por otra parte, considerando $\alpha(s) = p + (t+s)N(p)$ y razonando de manera análoga, se obtiene $\beta(s) = t+s$, luego $(dr)_{p+tN(p)}(N(p)) = 1$ que junto con lo anterior implica

que

$$(dr)_{p+tN(p)}(v) = \langle v, N(p) \rangle \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^3.$$

De donde se concluye inmediatamente la igualdad (3.4) buscada.

Para el siguiente punto p_{i+1} de intersección de $R \cap S$ se tiene entonces que

$$p_{i+1} + ta \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \quad \text{si } t > 0 \quad \text{y} \quad p_{i+1} + ta \in \Omega \quad \text{si } t < 0$$

Y de nuevo, en términos de la función r ,

$$r(p_{i+1} + ta) < 0 \quad \text{si } t > 0 \quad \text{y} \quad r(p_{i+1} + ta) > 0 \quad \text{si } t < 0.$$

Procediendo de manera análoga se comprueba que en este caso

$$0 > \langle N(p_{i+1}), a \rangle,$$

culminando así la demostración, pues dados dos puntos consecutivos de intersección transversal se ha probado que el signo de $\langle N(p), a \rangle$ en estos cuando se recorre R en el sentido dado por a va alternándose. \square

3.2. Integración en $S \times \mathbb{R}$

De aquí en adelante se denomina *región* \mathcal{R} de una superficie S orientable a cualquier subconjunto abierto relativamente compacto $\mathcal{R} \subset S$.

Sea O un abierto de \mathbb{R}^3 , \mathcal{R} una región de una superficie S orientable y (a, b) un intervalo de la recta real. En esta sección se consideran difeomorfismos $\phi : O \rightarrow \mathcal{R} \times (a, b)$ relacionados con lo mencionado en la *sección 2.5*. Recordemos que la aplicación diferencial $(d\phi)_x$ de una aplicación de esta naturaleza en un punto $x \in O$ es una aplicación

$$(d\phi)_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\phi_1(x)}S \times \mathbb{R},$$

siendo $\phi_1 = \pi_1 \circ \phi$, donde $\pi_1 : \mathcal{R} \times (a, b) \rightarrow \mathcal{R}$ es la aplicación proyección. A partir de esta aplicación diferencial se introduce en la *definición 2.25* el valor absoluto del Jacobiano de ϕ .

Definición 3.11 (Integración en $S \times \mathbb{R}$). Sea O un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 y $\phi : O \rightarrow \mathcal{R} \times (a, b)$ un difeomorfismo. Se dice que una función $f : \mathcal{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $\mathcal{R} \times (a, b)$ si la aplicación $(f \circ \phi)|Jac \phi|$ es integrable en O en el sentido de Lebesgue. En este caso se denota la integral de f en $\mathcal{R} \times (a, b)$ por

$$\int_{\mathcal{R} \times (a, b)} f = \int_O (f \circ \phi)|Jac \phi|.$$

Observación 3.12. Se puede comprobar mediante el teorema del cambio de variable del cálculo integral que la definición anterior no depende del abierto O ni del difeomorfismo $\phi : O \rightarrow \mathcal{R} \times (a, b)$ escogido.

Observación 3.13. Para toda región \mathcal{R} de una superficie S orientable se tiene del

teorema de existencia de entornos tubulares, teorema 3.6, un difeomorfismo

$$F^{-1} : N_\epsilon(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{R} \times (-\epsilon, \epsilon)$$

entre un abierto $N_\epsilon(\mathcal{R}) \subset \mathbb{R}^3$ y un producto de la forma $\mathcal{R} \times (-\epsilon, \epsilon)$.

Observación 3.14. Dada una región \mathcal{R} de una superficie S orientable y un intervalo abierto (a, b) , las siguientes propiedades básicas de la integral de Lebesgue se extienden de manera natural a la integración en $\mathcal{R} \times (a, b)$.

- (a) Si $f : \overline{\mathcal{R}} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable en $\mathcal{R} \times (a, b)$.
- (b) La integral en $\mathcal{R} \times (a, b)$ es lineal y monótona.
- (c) Los teoremas de convergencia monótona, convergencia dominada y de continuidad y derivabilidad de integrales paramétricas resultan válidos para la integración en $\mathcal{R} \times (a, b)$ bajo condiciones análogas a las requeridas para los mismos resultados en la integración de Lebesgue en \mathbb{R}^3 .

Proposición 3.15. Se verifican además las siguientes propiedades:

- (d) Dada una subregión $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ y una función f integrable en $\mathcal{R} \times (a, b)$ que se anula en $(\mathcal{R} - \mathcal{R}') \times (a, b)$ se tiene que

$$\int_{\mathcal{R}' \times (a, b)} f = \int_{\mathcal{R} \times (a, b)} f.$$

- (e) Dada una región \mathcal{R}' de otra superficie orientable S' y otro intervalo abierto $(a', b') \subset \mathbb{R}$, sea $\psi : \mathcal{R} \times (a, b) \rightarrow \mathcal{R}' \times (a', b')$ un difeomorfismo. Entonces, para cualquier función f diferenciable en $\mathcal{R}' \times (a', b')$ se tiene que

$$\int_{\mathcal{R}' \times (a', b')} f = \int_{\mathcal{R} \times (a, b)} (f \circ \psi) |Jac \psi|.$$

Demostración. En cuanto a la propiedad (d), tomando un abierto O de \mathbb{R}^3 y $\phi : O \rightarrow \mathcal{R} \times (a, b)$ un difeomorfismo se tiene por definición que

$$\int_{\mathcal{R} \times (a, b)} f = \int_O (f \circ \phi) |Jac \phi|.$$

Ahora bien, para $O' = \phi^{-1}(\mathcal{R}' \times (a, b)) \subset O$, ϕ se restringe a un difeomorfismo $\phi' : O' \rightarrow \mathcal{R}' \times (a, b)$. Por lo tanto, dado que f se anula en $(\mathcal{R} - \mathcal{R}') \times (a, b)$, se tiene que $f \circ \phi$ se anula en $O \setminus O'$, pues para todo $x \in O \setminus O'$ se tiene que $\phi(x) \in (\mathcal{R} - \mathcal{R}') \times (a, b)$. Además, es claro que para todo $x \in O'$, puesto que $\phi(x) = \phi'(x)$, $|Jac \phi|(x) = |Jac \phi'|(x)$.

Se verifica entonces la siguiente cadena de igualdades

$$\int_{\mathcal{R} \times (a, b)} f = \int_O (f \circ \phi) |Jac \phi| = \int_{O'} (f \circ \phi') |Jac \phi'| = \int_{\mathcal{R}' \times (a, b)} f,$$

que finaliza la prueba de la propiedad en cuestión.

Para probar la propiedad (e) basta tener en cuenta que dado un difeomorfismo $\phi : O \rightarrow \mathcal{R} \times (a, b)$ y el difeomorfismo $\psi : \mathcal{R} \times (a, b) \rightarrow \mathcal{R}' \times (a', b')$ se tiene que la composición $\psi \circ \phi : O \rightarrow \mathcal{R}' \times (a', b')$ también lo es. En consecuencia

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}' \times (a', b')} f &= \int_O (f \circ (\psi \circ \phi)) |Jac (\psi \circ \phi)| = \\ &= \int_O ((f \circ \psi) \circ \phi) (|Jac \psi| \circ \phi) |Jac \phi| = \int_{\mathcal{R} \times (a, b)} (f \circ \psi) |Jac \psi|, \end{aligned}$$

donde se demuestra la igualdad buscada. \square

Dada una función $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde \mathcal{R} es una región de una superficie, siempre se puede definir la función $\tilde{f} : \mathcal{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{f}(p, t) = f(p)$ para todo $(p, t) \in \mathcal{R} \times (a, b)$.

Esta última idea permite construir de manera sencilla la integración sobre regiones de una superficie orientable S a partir de la integración en $S \times \mathbb{R}$.

3.3. Integración en superficies

Definición 3.16 (Integración en S). Dada una región \mathcal{R} de una superficie orientable S y una función $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es integrable en \mathcal{R} si la función $\tilde{f} : \mathcal{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{f}(p, t) = f(p)$ para todo $(p, t) \in \mathcal{R} \times (0, 1)$ es integrable en $\mathcal{R} \times (0, 1)$. Se asigna en este caso a la integral de f en \mathcal{R} el valor de la integral de \tilde{f} en $\mathcal{R} \times (0, 1)$. Es decir,

$$\int_{\mathcal{R}} f = \int_{\mathcal{R} \times (0, 1)} \tilde{f}.$$

Notación 3.17. De aquí en adelante no se especifica la distinción entre las funciones $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\tilde{f} : \mathcal{R} \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ de la definición anterior, se diferencian a través del contexto.

Observación 3.18. Dada una región \mathcal{R} de una superficie S orientable, algunas de las propiedades básicas de la integral de Lebesgue se extienden de manera natural a la integración en \mathcal{R} a través de las ya destacadas para la integración en $S \times \mathbb{R}$ en la observación 3.14 y en la proposición 3.15 Se concretan algunas de ellas:

- (a) Si $f : \overline{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable en \mathcal{R}
- (b) La integral en \mathcal{R} es lineal y monótona
- (c) Los teoremas de convergencia monótona, convergencia dominada y de continuidad y derivabilidad de integrales paramétricas resultan válidos para la integración en \mathcal{R} bajo condiciones análogas a las requeridas en el marco de la integral de Lebesgue en \mathbb{R}^3 .

- (d) Dada una subregión $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ y una función f integrable en \mathcal{R} que se anula en $(\mathcal{R} - \mathcal{R}')$ se tiene que

$$\int_{\mathcal{R}'} f = \int_{\mathcal{R}} f.$$

- (e) (Teorema del cambio de variable). Dadas dos regiones \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 de dos superficies orientables S_1 y S_2 y un difeomorfismo $\psi : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2$, se tiene para cualquier función $f : \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrable que la aplicación $(f \circ \psi)|\text{Jac } \psi|$ es integrable en \mathcal{R}_1 y se verifica

$$\int_{\mathcal{R}_2} f = \int_{\mathcal{R}_1} (f \circ \psi)|\text{Jac } \psi|.$$

Proposición 3.19. Se verifica además la siguiente propiedad:

- (f) Dada una subregión $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ de \mathcal{R} tal que $\mathcal{R} - \mathcal{R}'$ es una unión finita de curvas y puntos de S , entonces se tiene para toda función integrable que

$$\int_{\mathcal{R}'} f = \int_{\mathcal{R}} f.$$

Demostración. En las condiciones del enunciado es claro que $\mathcal{R}' \times (0, 1) \subset \mathcal{R} \times (0, 1)$ y que ambos conjuntos difieren únicamente en la unión finita de conjuntos de la forma $\{p\} \times (0, 1)$ y $C \times (0, 1)$, siendo respectivamente C y $\{p\}$ un segmento de curva y un punto de \mathcal{R} .

Tomando un difeomorfismo $\phi : O \rightarrow \mathcal{R} \times (0, 1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha : (0, 1) &\longrightarrow \phi^{-1}(\{p\} \times (0, 1)), \\ t &\longmapsto \phi^{-1}(p, t), \end{aligned}$$

es obviamente una curva diferenciable. Por otro lado, a partir de otra curva $\beta : I \rightarrow U \subset C$, definiendo

$$\begin{aligned} x : I \times (0, 1) &\longrightarrow \phi^{-1}(U \times (0, 1)), \\ (s, t) &\longmapsto \phi^{-1}(\beta(s), t), \end{aligned}$$

x resulta una carta local de $\phi^{-1}(C \times (0, 1))$. Como se puede recubrir $\phi^{-1}(C \times (0, 1))$ mediante cartas locales, se deduce que es una superficie.

Es decir, $\phi^{-1}(\{p\} \times (0, 1))$ y $\phi^{-1}(C \times (0, 1))$ son una curva y una superficie en \mathbb{R}^3 respectivamente y basta comprobar que estos tienen medida nula en \mathbb{R}^3 para tener el resultado buscado. Es conocido que las curvas tienen medida nula en \mathbb{R}^3 , luego es suficiente probar lo mismo para el caso de las superficies.

Dado que las superficies heredan el segundo axioma de numerabilidad del espacio euclídeo, se puede tomar un recubrimiento numerable de una superficie S mediante abiertos de la forma que se describe en la *proposición 2.38*. Puesto que estos abiertos son difeomorfos a abiertos del plano $z = 0$ en \mathbb{R}^3 , son de medida nula y así S . □

Definición 3.20. Se define el área de una región \mathcal{R} de una superficie orientable S como la integral de la función idénticamente igual a 1 en \mathcal{R} . Se denota por $A(\mathcal{R})$,

$$A(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} 1.$$

La forma en que se ha construido la integral para regiones \mathcal{R} de superficies S orientables difiere de la manera habitual de hacerlo, acudiendo a las parametrizaciones y basándose en la teoría de integración en \mathbb{R}^2 . Se prueba a continuación que ambos puntos de vista están íntimamente relacionados.

Proposición 3.21. Sea \mathcal{R} una región de una superficie orientable S y sea $x : U \rightarrow x(U)$ una parametrización de S tal que $x(U) \subset \mathcal{R}$ y tal que la diferencia $\mathcal{R} \setminus x(U)$ es una colección finita de puntos y curvas en S . Entonces, para toda función $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{\mathcal{R}} f = \int_U (f \circ x) |x_v \wedge x_u|.$$

Demostración. El conjunto abierto $x(U)$ es relativamente compacto, pues su adherencia en S está contenida en $\overline{\mathcal{R}}$, que es acotado. En consecuencia, tiene sentido hablar de la integral de f en $x(U)$ en el sentido de la *definición 3.16*. Esta integral viene dada por la expresión

$$\int_{x(U)} f = \int_{x(U) \times (0,1)} f.$$

Además, en virtud de la propiedad (e) de la *proposición 3.18* se tiene que, dado que $\mathcal{R} \setminus x(U)$ está formado por una colección finita de puntos y curvas en S ,

$$\int_{\mathcal{R}} f = \int_{x(U)} f.$$

Es claro que la función $\phi : U \times (0,1) \rightarrow x(U) \times (0,1)$ dada por $\phi = x \times id_{(0,1)}$, esto es, $\phi(u, v, t) = (x(u, v), t)$ para todo $(u, v, t) \in U \times (0,1) \in \mathbb{R}^3$ es un difeomorfismo tal que

$$\phi_u = (x_u, 0), \quad \phi_v = (x_v, 0) \quad \text{y} \quad \phi_t = (0, 1).$$

De donde se deduce inmediatamente que el valor absoluto del Jacobiano es

$$|Jac \phi|(u, v, t) = |x_u \wedge x_v|(u, v) \quad \text{para todo } (u, v) \in U \text{ y } t \in (0, 1),$$

y se tiene entonces que

$$\int_{\mathcal{R}} f = \int_{x(U) \times (0,1)} f = \int_{U \times (0,1)} (f \circ \phi) |Jac \phi| = \int_U (f \circ x) |x_u \wedge x_v|.$$

□

Para completar esta relación entre ambas construcciones de la integral (la que

se presenta en este estudio y la habitual a partir de parametrizaciones) se introduce la siguiente partición de la unidad:

Definición 3.22. Dada una región \mathcal{R} de una superficie orientable S se considera un recubrimiento finito de \mathcal{R} mediante conjuntos abiertos de S que se denota por

$$\mathcal{E} = \{V_i, i = 1, \dots, k\}.$$

Se define entonces la función $n : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que envía cada punto $p \in \mathcal{R}$ al número de abiertos de \mathcal{E} a los que p pertenece. A partir de n se introduce la familia de funciones χ_1, \dots, χ_k dadas por

$$\chi_i : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1] \quad \text{con} \quad \chi_i(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin V_i, \\ 1/n(p) & \text{si } p \in V_i, \end{cases} \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k.$$

Observación 3.23. La familia de funciones $\{\chi_i : i = 1, \dots, k\}$ es una partición de la unidad subordinada al recubrimiento \mathcal{E} . Se destaca que las funciones χ_i no son continuas en \mathcal{R} .

Proposición 3.24. Sea \mathcal{R} una región de una superficie orientable S y $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en \mathcal{R} . Sean $x^i : U_i \rightarrow S$, $i = 1, \dots, k$ parametrizaciones de S tal que $x^i(U_i)$ es relativamente compacto para todo $i = 1, \dots, k$ y con $\mathcal{R} \subset x^1(U_1) \cup \dots \cup x^k(U_k)$. Sea $\{\chi_i \mid i = 1, \dots, k\}$ la partición de la unidad de la definición anterior construida sobre el recubrimiento $\{x^i(U_i) \mid i = 1, \dots, k\}$. Entonces

$$\int_{\mathcal{R}} f = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} ((\chi_i f) \circ x^i) |x_u^i \wedge x_v^i|.$$

Demostración. Puesto que $\sum_{i=1}^k \chi_i = 1$, en virtud de la linealidad de la integral se tiene que

$$\int_{\mathcal{R}} f = \int_{\mathcal{R}} \left(\sum_{i=1}^k \chi_i \right) f = \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{R}} \chi_i f.$$

Como las funciones χ_i se anulan en $\mathcal{R} \setminus x^i(U_i)$, aplicando la propiedad (d) de la observación 3.18 puesto que $x^i(U_i)$ es una región de S , se verifica

$$\sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{R}} \chi_i f = \sum_{i=1}^k \int_{x^i(U_i)} \chi_i f.$$

Para concluir basta considerar la proposición 3.21 en cada uno de los sumandos del término derecho de la igualdad. \square

Definición 3.25. Se dice que un subconjunto A de una región \mathcal{R} es de *medida nula* si

$$\int_{\mathcal{R}} \chi_A = 0,$$

donde χ_A es la función característica del subconjunto $A \subset \mathcal{R}$. Dado un subconjunto cualquiera $A \subset S$ se dice que es de *medida nula* si para toda región $\mathcal{R} \subset S$ se tiene que $A \cap \mathcal{R}$ es de medida nula.

Observación 3.26. De la proposición 3.21 se deduce que la definición anterior coincide con la dada en la definición 2.51 para los subconjuntos de medida nula de una superficie S .

La definición habitual del área de una región $\mathcal{R} \subset U$ donde $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ es una parametrización viene dada por

$$A(\mathcal{R}) = \int_{x^{-1}(\mathcal{R})} \|x_u(u, v) \wedge x_v(u, v)\| dudv,$$

donde los subíndices u, v denotan la derivación parcial respecto a las correspondientes variables.

Notación 3.27. En el siguiente teorema, para dejar clara la dependencia de las funciones $f_1 : \mathcal{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con sus variables se denotan por

$$\int_{\mathcal{R} \times (a, b)} f_1(p, t) dp dt \quad \text{y} \quad \int_{\mathcal{R}} f_2(p) dp$$

las respectivas integrales de f_1 en $\mathcal{R} \times (a, b)$ y de f_2 en \mathcal{R} .

Teorema 3.28 (De Fubini, para la integración en superficies). Sea \mathcal{R} una región de una superficie S orientable, (a, b) un intervalo de la recta real y $h : \mathcal{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $\mathcal{R} \times (a, b)$. Entonces se tiene que:

- Para casi todo $t \in (a, b)$, la función $h_t : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_t(p) = h(p, t)$ es integrable en \mathcal{R} y la función definida casi siempre

$$\xi_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \xi_1(t) = \int_{\mathcal{R}} h_t(p) dp$$

es integrable en (a, b) .

- Para casi todo $p \in \mathcal{R}$, la función $h_p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_p(t) = h(p, t)$ es integrable en (a, b) y la función definida casi siempre

$$\xi_2 : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \xi_2(p) = \int_a^b h_p(t) dt$$

es integrable en \mathcal{R} .

Además, se verifica que

$$\int_{\mathcal{R} \times (a, b)} h(p, t) dp dt = \int_a^b \left(\int_{\mathcal{R}} h(p, t) dp \right) dt = \int_{\mathcal{R}} \left(\int_a^b h(p, t) dt \right) dp. \quad (3.5)$$

Demostración. Puesto que $\overline{\mathcal{R}}$ es compacto, existe un recubrimiento abierto finito de \mathcal{R} dado por las imágenes de parametrizaciones $x^i : U_i \rightarrow S$, $i = 1, \dots, k$. Se considera entonces la partición de la unidad introducida en la definición 3.22 subordinada a este recubrimiento, $\{\chi_i \mid i = 1, \dots, k\}$. Dado que esta familia verifica que

$\sum_{i=1}^k \chi_i(p) = 1$ para todo $p \in \mathcal{R}$ y debido a la linealidad de la integral se tiene que

$$\int_{\mathcal{R} \times (a,b)} h(p,t) dp dt = \sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{R} \times (a,b)} \chi_i(p) h(p,t) dp dt.$$

Mediante argumentos análogos a los expuestos en la prueba anterior se llega a

$$\int_{\mathcal{R} \times (a,b)} h(p,t) dp dt = \sum_{i=1}^k \int_{x^i(U_i) \times (a,b)} h(p,t) \chi_i(p) dp dt.$$

Dado que la aplicación $x^i \times id_{(a,b)} : U_i \times (a,b) \rightarrow x^i(U_i) \times (a,b)$ es un difeomorfismo con $|Jac \phi| = |x_u^i \wedge x_v^i|$ para todo $i = 1, \dots, k$, se tiene de la igualdad anterior que, utilizando este difeomorfismo en la definición de la integral en $S \times (a,b)$ y la *proposición 3.24*,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R} \times (a,b)} h(p,t) dp dt &= \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{U_i \times (a,b)} (\chi_i \circ x^i)(u,v) (h \circ (x^i \times id_{(a,b)}))(u,v,t) |x_u^i \wedge x_v^i|(u,v) dudv dt. \end{aligned}$$

Se aplica ahora el *teorema de Fubini* de la integración de Lebesgue a cada sumando de la derecha de la igualdad. Respecto a las variables (u,v) , este afirma que

$$\varphi_t : U_i \rightarrow x^i(U_i) \text{ con } \varphi_t(u,v) = (\chi_i \circ x^i)(u,v) (h \circ (x^i \times id_{(a,b)}))(u,v,t) |x_u^i \wedge x_v^i|(u,v)$$

es integrable en U_i para casi todo $t \in (a,b)$. Por lo tanto, teniendo en cuenta la *proposición 3.21*, h_t es integrable en $x^i(U_i)$ para todo $i = 1, \dots, k$, lo que implica a su vez que, sumando para todos los i , la función h_t es integrable en \mathcal{R} para casi todo t . Por otra parte, también por el *teorema de Fubini* de la integral de Lebesgue en \mathbb{R}^2 , la función $\psi : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida casi siempre dada por

$$\psi(t) = \int_{U_i} \varphi_t(u,v) dudv,$$

es integrable en (a,b) y se da la igualdad:

$$\begin{aligned} \int_{U_i \times (a,b)} (\chi_i \circ x^i)(u,v) (h \circ (x^i \times id_{(a,b)}))(u,v,t) |x_u^i \wedge x_v^i|(u,v) dudv dt &= \\ &= \int_a^b \psi(t) dt = \int_a^b \left(\int_{U_i} \varphi_t(u,v) dudv \right) dt, \end{aligned}$$

lo que, acudiendo a la *proposición 3.24* y sumando para todo $i = 1, \dots, k$ implica que

$$\xi_1(t) = \int_{\mathcal{R}} h_t(p) dp$$

está definida casi siempre y es integrable en \mathcal{R} . De hecho, se obtiene la igualdad

$$\int_{\mathcal{R} \times (a,b)} h(p,t) dp dt = \int_a^b \left(\int_{\mathcal{R}} h(p,t) dp \right) dt.$$

De esta manera queda probado el primer punto de la proposición y la primera igualdad de la relación (3.5). El otro punto y la igualdad que falta se prueban de manera análoga, aplicando el *teorema de Fubini* respecto a la variable t . \square

Ejemplo 3.29 (Volumen encerrado por una superficie paralela). Sea S una superficie compacta orientada por la orientación interior, *definición 2.43*, y $\epsilon > 0$ tal que $N_\epsilon(S)$ es un entorno tubular. Como se menciona en la *observación 3.8*,

$$V_\epsilon(S) = F(S \times (0, \epsilon)) \subset N_\epsilon(S),$$

es un conexo, no corta a S y $V_\epsilon(S) \subset \Omega$. Si se toma un $t \in (0, \epsilon)$ y se denota por Ω_t el dominio interior determinado por la superficie paralela S_t , entonces:

$$\text{vol } \Omega - \text{vol } \Omega_t = \text{vol } V_t(S) = \int_{V_t(S)} 1.$$

Dado que la aplicación $F : S \times (0, \epsilon) \rightarrow V_\epsilon(S)$ de (3.1) es un difeomorfismo, se tiene de la *definición 3.11* que

$$\text{vol } \Omega - \text{vol } \Omega_t = \int_{S \times (0,t)} |\text{Jac } F|.$$

Para todo $(p, t) \in S \times (0, \epsilon)$, del cálculo de $(dF)_{(p,t)}$ en (3.2) y tomando una base ortonormal de direcciones principales (recordamos la *definición 2.36*) en $T_p(S)$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\text{Jac } F|(p, t) &= \det ((dF)_{(p,t)}(e_1, 0), (dF)_{(p,t)}(e_2, 0), (dF)_{(p,t)}(0, 1)) = \\ &= 1 - 2tH(p) + t^2K(p). \end{aligned}$$

Aplicando el *teorema de Fubini* recién probado se tiene finalmente que

$$\begin{aligned} \text{vol } \Omega - \text{vol } \Omega_t &= \int_0^t \left(\int_S (1 - 2tH(p) + t^2K(p)) dp \right) dt = \\ &= tA(S) - t^2 \int_S H + \frac{t^3}{3} \int_S K. \end{aligned}$$

3.4. El teorema de la divergencia

El *teorema de la divergencia* se prueba a partir de la *fórmula del área*, una fórmula integral que “extiende” el *teorema del cambio de variables*, en el que se requiere que el cambio de variables sea un difeomorfismo al caso en que sea una aplicación diferenciable entre superficies.

Recordemos que en el *teorema 2.50* se había definido un punto crítico de $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como un punto $x \in \mathbb{R}^3$ donde $|\text{Jac } \phi|(x) = 0$.

Definición 3.30. Sea O un abierto de \mathbb{R}^3 y $\phi : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable. Se dice que $y \in O$ es un punto regular de ϕ si no es crítico, y se dice que $x \in \mathbb{R}^3$ es un valor regular si y es un punto regular para todo $y \in \phi^{-1}(x)$.

Proposición 3.31. Sea O un abierto acotado de \mathbb{R}^3 , $\phi : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable y $x \in \mathbb{R}^3$ un valor regular de ϕ . Entonces el conjunto de contraímagenes de x por ϕ , $\phi^{-1}(x)$, es finito.

Demostración. Si el conjunto $\phi^{-1}(x)$ no fuese finito, entonces tendría un punto de acumulación en \overline{O} dada la compacidad de este último (por ser cerrado y acotado). En dicho punto se tendría entonces que $\phi(y) = x$ por la continuidad de la función ϕ .

Se toma entonces una sucesión $\{y_k\}$ de puntos distintos de y contenidos en $\phi^{-1}(x)$ que converjan a y . Aplicando el *teorema de las funciones inversas* en y se tienen dos abiertos $U, V \subset \mathbb{R}^3$ tal que $y \in U$ y de modo que la restricción de ϕ a U , $\phi|_U : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo. Como $\{y_k\}$ converge a y , existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_k \in U$ para todo $k \geq k_0$. Pero para estos puntos se tiene que $\phi(y_k) = x = \phi(y)$, lo cual es contradictorio en tanto que $\phi|_U : U \rightarrow V$ es suprayectiva. \square

A partir de este resultado se puede construir una función como la siguiente. Sea O un abierto acotado de \mathbb{R}^3 , $\phi : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable y $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se denota por \mathcal{N} el conjunto de puntos críticos de ϕ contenidos en O . Por tanto, $x \notin \phi(\mathcal{N}) \Rightarrow \phi^{-1}(x)$ es finito.

Se define entonces la aplicación $n(\phi, f) : \mathbb{R}^3 \setminus \phi(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$n(\phi, f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \phi(O). \\ \sum_{p \in \phi^{-1}(x)} f(p) & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Observación 3.32. En las condiciones de los comentarios previos, el teorema de Sard para funciones en \mathbb{R}^3 (teorema 2.50) permite afirmar que el conjunto $\phi(\mathcal{N})$ de la definición anterior es un conjunto de medida nula en \mathbb{R}^3 , luego la aplicación $n(\phi, f)$ está definida casi siempre.

Teorema 3.33 (Fórmula del área). Sea $O \subset \mathbb{R}^3$ un abierto relativamente compacto, ϕ un difeomorfismo $\phi : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ y f una aplicación $f : O \rightarrow \mathbb{R}$. Si el producto $f|Jac \phi| : O \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en O , entonces la función $n(\phi, f)$ definida en (3.6) es integrable en \mathbb{R}^3 y se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\phi, f)(x) dx = \int_O f(x) |Jac \phi|(x) dx.$$

Demostración. En primer lugar se examina el caso en que la aplicación ϕ se extiende diferenciablemente a \overline{O} . Se considera un abierto V relativamente compacto tal que $\overline{O} \subset V$ y de modo que ϕ se pueda extender a una aplicación diferenciable $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se toma otro abierto W de \mathbb{R}^3 tal que $\overline{O} \subset W \subset \overline{W} \subset V$.

Paso 1: Se supone que no hay puntos críticos de ϕ en W .

Se puede aplicar entonces el *teorema de las funciones inversas* a todo $p \in W$, lo que asegura la existencia de entornos U_p de cada punto $p \in W$ tales que

$\phi|_{U_p} : U_p \rightarrow \phi(U_p)$ es un difeomorfismo. De esta manera se tiene que la familia de abiertos $\{U_p\}$ es un recubrimiento abierto del compacto \bar{O} . Sea $\delta > 0$ el número de Lebesgue (*lema 2.45*) del recubrimiento. Se considera entonces un recubrimiento de \bar{O} formado por cubos con interiores disjuntos, dado por $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$, todos ellos con diámetro menor que δ y contenidos en W .

Esta construcción asegura que cada uno de estos cubos está contenido en alguno de los abiertos del recubrimiento, lo que implica que las restricciones $\phi|_{C_i} : C_i \rightarrow \phi(C_i)$, $i = 1, \dots, n$ son difeomorfismos. Además, dado que $f|_{\text{Jac } \phi}$ es, por hipótesis, integrable en O , lo es también en $C_i \cap O$ para todo $i = 1, \dots, n$. En consecuencia, del *teorema del cambio de variable del cálculo integral* se deduce que

$$\int_{\phi(C_i \cap O)} (f \circ \phi^{-1})(y) dy = \int_{C_i \cap O} f(x) |\text{Jac } \phi|(x) dx \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

En este caso se tiene que si $y \in \phi(O)$ pertenece a varios $\phi(C_i \cap O)$, dado que las restricciones $\phi|_{C_i \cap O}$ son difeomorfismos y los $\text{int}(C_i)$ tienen intersección vacía, deben existir tantos $x_i \in \phi^{-1}(y)$ como el número de conjuntos de la forma $\phi(C_i \cap O)$ al que pertenezca y . Por tanto, $n(\phi, f)(y) = (f \circ \phi^{-1})(y)$ si $y \in \phi(C_i \cap O)$, y tomando la integral del término izquierdo de la igualdad anterior y sumando para todo $i = 1, \dots, n$, teniendo en cuenta el hecho de que $n(\phi, f)$ se anula fuera de $\phi(O)$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\phi, f)(y) dy = \sum_{i=1}^n \int_{\phi(C_i \cap O)} (f \circ \phi^{-1})(y) dy = \int_O f(x) |\text{Jac } \phi|(x) dx,$$

que es la igualdad buscada.

Paso 2: La aplicación ϕ tiene puntos críticos. Se recuerda la definición de V y W al inicio de la demostración. Si se considera entonces el conjunto

$$\mathcal{M} = \{p \in V \mid |\text{Jac } \phi|(p) = 0\},$$

es claro que $K = \mathcal{M} \cap \bar{W}$ es un subconjunto compacto de \mathcal{M} . Se toma entonces una sucesión $\{O_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de abiertos tales que $O_{k+1} \subset O_k$ y que verifican ([7], pág. 39. ej 5)

$$K \subset O_k \quad \text{y} \quad \text{Vol}(O_k) \leq \text{Vol}(K) + \frac{1}{k} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Los conjuntos K y O_k satisfacen las hipótesis de la *proposición 2.49*, por lo que existe una sucesión de abiertos V_k para todo $k \in \mathbb{N}$ tales que

$$K \subset V_k \subset \bar{V}_k \subset O_k \quad \text{y} \quad \text{Vol } \phi(V_k) < \frac{1}{k}.$$

Entonces, tomando en este caso el conjunto abierto $W \setminus \bar{V}_k \subset W \setminus K$ para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $O \setminus \bar{O}_k \subset \bar{O} \setminus O_k \Rightarrow \bar{O} \setminus \bar{O}_k \subset \bar{O} \setminus O_k \subset W \setminus \bar{V}_k \subset W \setminus K$. Además, $W \setminus \bar{V}_k$ no tiene puntos críticos, lo que lleva al caso particular probado en el paso 1, que permite asegurar que

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\phi|_{O \setminus \overline{O_k}}, f|_{O \setminus \overline{O_k}})(x) dx = \int_{O \setminus \overline{O_k}} f(x) |Jac \phi|(x) dx. \quad (3.7)$$

Se estudia a continuación la convergencia de ambas integrales cuando $k \rightarrow \infty$.

(1) Para la integral de la parte derecha de la igualdad se tiene que

$$\int_{O \setminus \overline{O_k}} f(x) |Jac \phi|(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) |Jac \phi|(x) \chi_{O \setminus \overline{O_k}}(x) dx$$

Donde las funciones $g_k = f(x) |Jac \phi|(x) \chi_{O \setminus \overline{O_k}}(x)$ son integrables por serlo $f |Jac \phi|$ en O . Como además se verifica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = f(x) |Jac \phi|(x) \chi_{O \setminus K}(x)$$

se tiene en virtud del *teorema de la convergencia dominada* que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{O \setminus \overline{O_k}} f(x) |Jac \phi|(x) dx = \int_{O \setminus K} f(x) |Jac \phi|(x) dx.$$

(2) Para la integral de la izquierda de la igualdad (3.7) basta tener en cuenta que al ser ϕ diferenciable en \overline{O} , de la *proposición 3.31* se tiene que cada valor regular de ϕ tiene un número finito de contraímagenes en O . Por tanto se pueden encontrar índices $k_x \in \mathbb{N}$ para cada $x \in O$ tales que

$$n(\phi|_{O \setminus \overline{O_k}}, f|_{O \setminus \overline{O_k}}) = n(\phi, f)(x) \quad \text{para todo } k \geq k_x,$$

lo que implica que $n(\phi|_{O \setminus \overline{O_k}}, f|_{O \setminus \overline{O_k}})$ converge hacia $n(\phi, f)$. En el caso en que $f > 0$ es claro que la sucesión $n(\phi|_{O \setminus \overline{O_k}}, f|_{O \setminus \overline{O_k}})$ verifica las condiciones del *teorema de la convergencia monótona*, lo que significa que $n(\phi, f)$ es integrable. En caso contrario, basta tener en cuenta que

$$|n(\phi|_{O \setminus \overline{O_k}}, f|_{O \setminus \overline{O_k}})| \leq n(\phi, |f|),$$

donde $n(\phi, |f|)$ resulta integrable por el argumento anterior. Por lo tanto, se puede asegurar que $n(\phi, f)$ es integrable aunque f no sea estrictamente positiva. En consecuencia, para cualquier $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene la convergencia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} n(\phi|_{O \setminus \overline{O_k}}, f|_{O \setminus \overline{O_k}})(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} n(\phi, f)(x) dx.$$

Teniendo en cuenta las convergencias de ambos términos de la igualdad (3.7) se tiene finalmente que:

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\phi, f)(x) dx = \int_{O \setminus K} f(x) |Jac \phi|(x) dx = \int_O f(x) |Jac \phi|(x) dx$$

ya que $|Jac \phi|$ se anula en K , lo cual finaliza la prueba del caso en que ϕ pueda extenderse a la adherencia de O de manera diferenciable.

Para probar el caso general basta tomar una sucesión $\{O_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos tales que $\overline{O_k} \subset O$ y tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol } O_k = \text{vol } O$ y aplicar lo anterior a cada término de la sucesión. La prueba finaliza pasando al límite en las expresiones obtenidas. \square

La fórmula del área puede extenderse en primer lugar a aplicaciones diferenciables $\mathcal{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ y posteriormente a aplicaciones diferenciables entre superficies. Se prueba antes el siguiente lema auxiliar:

Lema 3.34. Dada una región \mathcal{R} de una superficie orientable S , un intervalo de la recta real (a, b) y una aplicación diferenciable $\phi : \mathcal{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, el conjunto

$$\mathcal{N} = \{(p, t) \in \mathcal{R} \times (a, b) \mid |Jac \phi|(p, t) = 0\}$$

verifica que $\phi(\mathcal{N})$ es de medida nula en \mathbb{R}^3 .

Demostración. El *teorema 3.6* asegura la existencia de un abierto O de \mathbb{R}^3 y un difeomorfismo $\psi : O \rightarrow \mathcal{R} \times (a, b)$. Se considera entonces la composición $\phi \circ \psi : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ y se define el conjunto

$$\mathcal{M} = \{x \in O \mid |Jac (\phi \circ \psi)|(x) = 0\}.$$

Es claro que $|Jac (\phi \circ \psi)|(x) = (|Jac \phi| \circ \psi(x)) |Jac \psi|(x)$ para todo $x \in O$ de donde, dado que ψ es un difeomorfismo, es decir, $|Jac \psi|(x) \neq 0$, se tiene que

$$\mathcal{N} = \psi(\mathcal{M}).$$

Por lo tanto, aplicando la versión tridimensional del *teorema de Sard* (*teorema 2.50*) a la aplicación diferenciable $\phi \circ \psi$, se tiene que $\phi \circ \psi(\mathcal{M}) = \phi(\mathcal{N})$ es de medida nula en \mathbb{R}^3 . \square

Teorema 3.35 (Fórmula del área para productos). Sea \mathcal{R} una región de una superficie orientable S , (a, b) un intervalo abierto de la recta real, $\phi : \mathcal{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función diferenciable y $f : \mathcal{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f|Jac \phi|$ es integrable en $\mathcal{R} \times (a, b)$, entonces, la función $n(\phi, f)$ dada por

$$n(\phi, f)(x) = \sum_{(p,t) \in \phi^{-1}(x)} f(p, t)$$

con la convención de que la suma se anula cuando $x \notin \phi(\mathcal{R} \times (a, b))$, está bien definida excepto en un conjunto de medida nula y es integrable. Además su integral verifica

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\phi, f)(x) dx = \int_{\mathcal{R} \times (a, b)} f(p, t) |Jac \phi|(p, t) dp dt.$$

Demostración. La función $n(\phi, f)$ está bien definida por consideraciones análogas a las expuestas en la *proposición 3.31* junto con el hecho de que el conjunto de puntos críticos de la función ϕ es de medida nula en virtud del lema anterior. Tomando en este caso un difeomorfismo (cuya existencia vuelve a estar asegurada por el *teorema de existencia de entornos tubulares*) $\psi : O \rightarrow \mathcal{R} \times (a, b)$ donde O es un abierto

relativamente compacto de \mathbb{R}^3 y aplicando la *fórmula del área* probada en el *teorema 3.33* a la función diferenciable $\phi \circ \psi : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ y a la función $f \circ \psi : O \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_O (f \circ \psi)(x) |Jac(\phi \circ \psi)|(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} n(\phi \circ \psi, f \circ \psi)(x) dx.$$

Ahora bien, se tiene que

$$n(\phi \circ \psi, f \circ \psi)(x) = \sum_{y \in (\phi \circ \psi)^{-1}(x)} f \circ \psi(y) = \sum_{(p,t) \in \phi^{-1}(x)} f(p, t) = n(\phi, f)(x),$$

pues para todo $(p, t) \in \phi^{-1}(x)$, que recordemos es finito, existe un único $y \in (\phi \circ \psi)^{-1}(p, t)$ que verifica $f \circ \psi(y) = f(p, t)$. Se ha de tener en cuenta además que estas funciones $n(\phi \circ \psi, f \circ \psi)$ y $n(\phi, f)$ se anulan respectivamente fuera de $\phi \circ \psi(O)$ y $\phi(\mathcal{R} \times (a, b))$

Se tiene entonces la siguiente cadena de igualdades:

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\phi, f) = \int_{\mathbb{R}^3} n(\phi \circ \psi, f \circ \psi) = \int_O (f \circ \psi) |Jac(\phi \circ \psi)| = \int_{\mathcal{R} \times (a, b)} f |Jac \phi|,$$

donde la última de ellas se debe a la definición de la integral en $\mathcal{R} \times (a, b)$. \square

Teorema 3.36 (Fórmula del área para superficies). Sean \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 dos regiones de superficies orientables, $\phi : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2$ una aplicación diferenciable entre ellas y $f : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f |Jac \phi|$ es integrable en \mathcal{R}_1 . Entonces, la función $n(\phi, f)$ dada por

$$n(\phi, f)(q) = \sum_{p \in \phi^{-1}(q)} f(p)$$

está bien definida para todo $q \in \mathcal{R}_2$ salvo en un conjunto de medida nula y es integrable. Además se verifica

$$\int_{\mathcal{R}_2} n(\phi, f)(q) dq = \int_{\mathcal{R}_1} f(p) |Jac \phi|(p) dp.$$

Demostración. Teniendo en cuenta que por definición

$$\int_{\mathcal{R}_1} f(p) |Jac \phi|(p) dp = \int_{\mathcal{R}_1 \times (0,1)} f(p) |Jac(\phi \times id_{(0,1)})|(p, t) dp dt,$$

se toma la aplicación proyección $\pi_1 : \mathcal{R}_1 \times (a, b) \rightarrow \mathcal{R}_1$ y se reescribe la integral de la derecha como sigue, gracias a que $|Jac(\phi \times id_{(0,1)})|(p, t) = |Jac \phi|(p)$ para todo $(p, t) \in \mathcal{R}_1 \times (0, 1)$,

$$\int_{\mathcal{R}_1} f |Jac \phi| = \int_{\mathcal{R}_1 \times (0,1)} (f \circ \pi_1) |Jac(\phi \times id_{(0,1)})|, \quad (3.8)$$

donde se deja de expresar la dependencia de las funciones que aparecen en la integral con sus variables para no sobrecargar la notación. Tomando un difeomorfismo $\psi : O \rightarrow \mathcal{R}_2 \times (0, 1)$, donde O es un abierto relativamente compacto (cuya existencia

viene asegurada de nuevo por el *teorema 3.6*) y denotando por $\xi : \mathcal{R}_1 \times (0, 1) \rightarrow O$ la composición $\xi = \psi^{-1} \circ (\phi \times id_{(0,1)})$ se tiene la siguiente igualdad a partir de la regla de la cadena

$$|Jac (\phi \times id_{(0,1)})|(p, t) = (|Jac \psi| \circ \xi)(p, t) |Jac \xi|(p, t) \text{ para todo } (p, t) \in \mathcal{R}_1 \times (0, 1),$$

lo que, llevándolo a la expresión (3.8), resulta en

$$\int_{\mathcal{R}_1} f |Jac \phi| = \int_{\mathcal{R}_1 \times (0,1)} (f \circ \pi_1) (|Jac \psi| \circ \xi) |Jac \xi|,$$

que prueba la integrabilidad de $(f \circ \pi_1) (|Jac \psi| \circ \xi) |Jac \xi|$ en $\mathcal{R} \times (0, 1)$. Por tanto, ξ y $(f \circ \pi_1) (|Jac \psi| \circ \xi)$ satisfacen las condiciones del *teorema 3.35*. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}_1} f |Jac \phi| &= \int_{\mathbb{R}^3} n(\xi, (f \circ \pi_1) |Jac \psi| \circ \xi) = \int_{\mathbb{R}^3} n(\xi, (f \circ \pi_1)) |Jac \psi| = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} n(\xi, (f \circ \pi_1)) \circ (\psi^{-1} \circ \psi) |Jac \psi| = \int_{\mathcal{R}_2 \times (0,1)} n(\psi, f \circ \pi_1) \circ \psi^{-1}, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es inmediata a partir de la definición de n y la última se debe la definición de integral en $\mathcal{R}_2 \times (0, 1)$. Para concluir basta tener en cuenta que

$$\int_{\mathcal{R}_2 \times (0,1)} n(\psi, f \circ \pi_1) \circ \psi^{-1} = \int_{\mathcal{R}_2} n(\phi, f),$$

lo cual se deduce de la siguiente igualdad

$$n(\psi, f \circ \pi_1) \circ \psi^{-1}(q, t) = n(\phi, f)(q) \text{ para todo } (q, t) \in \mathcal{R}_2,$$

que se deriva de nuevo sin dificultad a partir de la definición de n . \square

Se introduce a continuación la noción de *campo vectorial* ya sea sobre un abierto de \mathbb{R}^3 o sobre una superficie S , y de su *divergencia*.

Definición 3.37. Dado un subconjunto A de \mathbb{R}^3 se dice que una aplicación (diferenciable) $v : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un *campo vectorial (diferenciable)*.

Dada una superficie S en un espacio euclídeo, toda aplicación $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ (diferenciable) se denomina *campo vectorial (diferenciable) sobre S* . Existen dos casos particulares:

- (a) Se dice que una aplicación $v_t : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un *campo vectorial tangente a S* si para todo $p \in S$ se verifica que $v_t(p) \in T_p(S)$.
- (b) Se dice que una aplicación $v_n : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un *campo vectorial normal a S* si para todo $p \in S$ se verifica que $v_n(p) \perp T_p(S)$.

Definición 3.38. Dado un campo vectorial diferenciable $v : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde A es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^3 , se define la *divergencia de v* como la función

$$div v : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } div v(p) = traza (dv)_p \text{ para todo } p \in A.$$

De aquí en adelante todos los campos vectoriales considerados son diferenciables, aunque no se exprese explícitamente.

Observación 3.39. Dado un subconjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^3$, se considera un campo vectorial $v = (v_1, v_2, v_3) : A \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si se toma la base estándar $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ del espacio \mathbb{R}^3 se verifica que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v(p) &= \operatorname{traza} (dv)_p = \sum_{i=1}^3 \langle (dv)_p e_i, e_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left\langle \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_i}, \frac{\partial v_2}{\partial x_i}, \frac{\partial v_3}{\partial x_i} \right), e_i \right\rangle = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

por lo que la divergencia es obviamente diferenciable.

Teorema 3.40 (De la divergencia). Sea S una superficie compacta y conexa y Ω su dominio interior, definido en 2.42, si $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es campo vectorial diferenciable, entonces

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v = - \int_S \langle v, N \rangle,$$

siendo $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ la orientación interior de S (definición 2.43).

Demostración. Sea P el plano $x = 0$ de \mathbb{R}^3 . Argumentando como en la proposición 3.10, considerando $a = (1, 0, 0)$, se tiene que la aplicación proyección en el plano P , restringida a S , $\pi : S \rightarrow P$, es diferenciable y tiene Jacobiano

$$|\operatorname{Jac} \pi|(p) = |\langle N(p), a \rangle| = |N_1(p)|,$$

donde $N_1 : S \rightarrow \mathbb{R}$ es la primera componente de N . Denotando de manera análoga por v_1 a la primera componente del campo vectorial v , si se considera la función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(p) = (\operatorname{sign} \langle N(p), a \rangle) \langle v, a \rangle = (\operatorname{sign} N_1) v_1, \quad \text{donde } \operatorname{sign} N_1 = \begin{cases} -1 & \text{si } N_1 < 0, \\ 0 & \text{si } N_1 = 0, \\ 1 & \text{si } N_1 > 0, \end{cases}$$

entonces f es integrable en S por ser continua en S , que es compacta. Por lo tanto $f|\operatorname{Jac} \pi| \leq |f|$ también es integrable. Entonces, aplicando el teorema 3.36 se tiene que

$$\int_S v_1 N_1 = \int_S f |\operatorname{Jac} \pi| = \int_P n(\pi, f) = \int_{\mathbb{R}^2} n(\pi, f)(0, y, z) dy dz. \quad (3.9)$$

La contraimagen de cada punto regular $(0, y, z)$ de π será la unión de un número finitos de puntos (x_i, y, z) que resultan la intersección de la recta normal a P que pasa por $(0, y, z)$, que denotamos por $R(y, z)$, con S . Ordenando estos puntos para x crecientes y teniendo en cuenta que en virtud de la proposición 3.10, dos puntos $(x_i, y, z), (x_{i+1}, y, z) \in R(y, z) \cap S$ verifican que $\langle N(x_i, y, z), a \rangle$ y $\langle N(x_{i+1}, y, z), a \rangle$ tienen signos opuestos, se tiene que

$$n(\pi, f)(0, y, z) = - \sum_{i \in \{1, \dots, 2k-1\} \text{ impar}} (v_1(x_{i+1}, y, z) - v_1(x_i, y, z)).$$

Ahora bien, si se extienden las funciones v_1 y $\frac{\partial v_1}{\partial x}$ por cero fuera de Ω , se tiene del *teorema fundamental del cálculo* y de la igualdad anterior que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) dx = -n(\pi, f)(0, y, z).$$

De modo que integrando en \mathbb{R}^2 y aplicando el *teorema de Fubini* de la integral de Lebesgue se tiene de (3.9)

$$-\int_S v_1 N_1 = \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x} dx dy dz. \quad (3.10)$$

Mediante argumentos análogos para las otras dos componentes se pueden obtener las igualdades

$$-\int_S v_2 N_2 = \int_{\Omega} \frac{\partial v_2}{\partial y} dx dy dz \quad y \quad -\int_S v_3 N_3 = \int_{\Omega} \frac{\partial v_3}{\partial z} dx dy dz. \quad (3.11)$$

Para concluir basta sumar las tres igualdades de (3.10) y (3.11) y se obtiene el resultado buscado. \square

Ejemplo 3.41 (Volumen del dominio determinado por una superficie). Dada una superficie compacta S y su dominio interior Ω , se considera el campo identidad $id : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya divergencia es constante e igual a 3. Del *teorema de la divergencia* se tiene que

$$vol \Omega = -\frac{1}{3} \int_S \langle p, N(p) \rangle dp,$$

donde N es la orientación interior de S .

Para el caso concreto de una esfera $\mathbb{S}_r^2(0)$ de radio $r > 0$, la orientación normal interior viene dada por $N(p) = -p/r$ para todo $p \in \mathbb{S}_r^2(0)$, por lo tanto,

$$vol B_r(0) = -\frac{1}{3} \int_{\mathbb{S}_r^2(0)} \langle p, \frac{-p}{r} \rangle dp = \frac{1}{3r} \int_{\mathbb{S}_r^2(0)} \|p\|^2 dp = \frac{r}{3} \int_{\mathbb{S}_r^2(0)} dp = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Capítulo 4

Índice de campos vectoriales y el teorema de Gauss-Bonnet

En este capítulo se busca, a través una versión global del *teorema de Gauss-Bonnet* para superficies compactas, probar que la suma de los índices de cualquier campo tangente en sus ceros aislados en una superficie de este tipo es un valor que no depende del propio campo, sino de la geometría de la superficie a través de su curvatura de Gauss.

Se introduce en primer lugar, en la *sección 4.1*, el grado de una aplicación diferenciable entre superficies compactas orientadas, y se detallan sus principales propiedades, pues a partir de este se define el índice de los campos vectoriales. El grado esencialmente cuenta el número de contraímagenes de un punto por dicha aplicación teniendo en cuenta las orientaciones elegidas en cada una de las superficies consideradas.

Esto permite definir, en la *sección 4.2*, la noción de índice de un campo vectorial tangente a una superficie en un posible cero aislado, esto es, en un punto de S del cual existe un entorno U en S en el cual el campo no se anula. Esta definición se lleva a cabo a través de la extensión del campo tangente a S en un campo definido abierto de \mathbb{R}^3 , de nuevo a partir de los entornos tubulares introducidos anteriormente.

A partir de estas nociones, en la *sección 4.3*, se aborda una versión global del *teorema de Gauss-Bonnet*, que en realidad es una mezcla de dicho teorema y el de *Poincaré-Hopf* y prueba la independencia con el campo de la suma de índices en los ceros aislados de un campo tangente a una superficie. Junto con el *teorema Egregium de Gauss* ([3], pág 234-235), el *teorema de Gauss-Bonnet* es uno de los principales resultados de la geometría diferencial de superficies en \mathbb{R}^3 . Una primera versión del teorema aparece en el notable trabajo sobre geometría diferencial de superficies debido a Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, [8], donde encuentra una relación entre la suma de los ángulos interiores de *triángulos geodésicos* sobre una superficie con la integral de la *curvatura gaussiana* sobre estos. Posteriormente, en 1848, el francés Pierre Ossian Bonnet ampliaría el teorema a regiones limitadas por curvas simples no geodésicas, aunque aún no gozaría de un carácter global como la versión que aquí se expone.

Por último, en la *sección 4.4*, se describe el cálculo del índice de un campo a partir de cartas locales.

El desarrollo que se expone en este capítulo está basado en [1] y [9].

4.1. El grado de una aplicación entre superficies compactas

Recordemos que el Jacobiano de una aplicación $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ entre superficies orientadas (*definición 2.28*),

$$(Jac \phi)(p) = \det ((d\phi)_p(e_1), (d\phi)_p(e_2), N_2(\phi(p))), \quad p \in S_1,$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es una base orientada positivamente de $T_p(S_1)$ y $N_2(\phi(p))$ es un vector normal unitario de S_2 en $\phi(p)$, depende de las orientaciones escogidas. De hecho, si se revierte alguna de las orientaciones (ya sea de S_1 o S_2), entonces $Jac \phi$ cambia de signo. Además,

$$|Jac \phi|(p) \neq 0 \text{ si y solo si } (d\phi)_p \text{ es isomorfismo,}$$

luego si la aplicación $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo,

$$(Jac \phi)(p) \neq 0 \text{ para todo } p \in S_1.$$

Por lo tanto, si la superficie S_1 es conexa, la imagen del jacobiano será un intervalo contenido en \mathbb{R}^+ ó \mathbb{R}^- . Teniendo en cuenta estas consideraciones se introduce el *grado de una aplicación entre superficies compactas*.

Definición 4.1 (Grado de una aplicación entre superficies compactas). Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas orientadas y $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable. Se define el *grado de la aplicación ϕ* como el valor

$$deg \phi = \frac{1}{A(S_2)} \int_{S_1} (Jac \phi).$$

A lo largo de este capítulo se considerará en las superficies compactas la orientación inducida por la normal exterior (*definición 2.43*) salvo que se exprese lo contrario. Además, dado que la *definición 4.1* es aditiva respecto a las componentes conexas, asumiremos que S_1 y S_2 son conexas cuando se hable en esto términos.

Proposición 4.2. Dadas dos superficies S_1, S_2 compactas y $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable entre ellas, entonces:

- (a) Si ϕ es un difeomorfismo y S_1 es conexa, la función Jacobiano $Jac \phi : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene signo constante en S_1 .
- (b) Si ϕ es un difeomorfismo que preserva la orientación, entonces $deg \phi = 1$. Si ϕ revierte la orientación, entonces $deg \phi = -1$.
- (c) Sea S_3 otra superficie compacta, sea además $\psi : S_2 \rightarrow S_3$ una aplicación diferenciable. Si ϕ es un difeomorfismo que preserva la orientación, entonces $deg(\psi \circ \phi) = deg(\psi)$

Demostración. La primera afirmación se deduce de la conexión de S_1 , como se ha probado en los comentarios previos.

En cuanto a la segunda afirmación, para el caso en que ϕ preserve la orientación, se tiene que

$$\deg \phi = \frac{1}{A(S_2)} \int_{S_1} |Jac \phi| = \frac{1}{A(S_2)} \int_{S_2} 1 = 1,$$

donde la igualdad central se debe a la aplicación de la propiedad (e) de la *observación 3.18*, esto es, el *teorema del cambio de variables* de la integración en superficies. El caso en que ϕ revierte la orientación es análogo introduciendo un signo negativo.

Para probar la tercera afirmación, se tiene de la multiplicatividad del Jacobiano que

$$Jac (\psi \circ \phi) = ((Jac \psi) \circ \phi) |Jac \phi|,$$

por tanto, de la definición de grado se verifica que

$$\deg (\psi \circ \phi) = \frac{1}{A(S_3)} \int_{S_1} ((Jac \psi) \circ \phi) |Jac \phi| = \frac{1}{A(S_3)} \int_{S_2} (Jac \psi) = \deg \psi,$$

donde de nuevo se aplica el *teorema del cambio de variables* para la integración en superficies en la última igualdad. \square

Ejemplo 4.3. Sea S una superficie compacta orientada por una aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Para un punto $p \in S$ se toma una base $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(S)$ formada por direcciones principales (*definición 2.36*) y orientada positivamente, entonces se tiene que

$$(Jac N)(p) = \det((dN)_p(e_1), (dN)_p(e_2), N(p)) = k_1(p)k_2(p) \det(e_1, e_2, N(p)) = K(p),$$

donde para la esfera se toma la orientación exterior (*definición 2.43*). Por lo tanto, se tiene de la *definición 4.1* que

$$\deg N = \frac{1}{4\pi} \int_S K(p) dp.$$

Resulta interesante en este punto dotar de un carácter más visual o geométrico a la aplicación *grado* de la *definición 4.1*.

Dadas dos superficies S_1 y S_2 compactas, el grado de una aplicación $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ está relacionado con el número de contraímagenes de cada uno de los puntos regulares de S_2 respecto a ϕ y su comportamiento en relación a las orientaciones puestas en juego.

Concretando un poco más, para cada valor regular $q \in S_2$ respecto a ϕ , se puede probar (dada la compacidad de S_1 y argumentando en torno al *teorema de las funciones inversas* para aplicaciones entre superficies, como en la prueba de la *proposición 3.31*) que el conjunto $\phi^{-1}(q)$ es finito. Por lo tanto, como para todo valor regular q se tiene que

$$p \in \phi^{-1}(q) \Rightarrow (Jac \phi)(p) \neq 0,$$

tiene sentido introducir para cada valor regular q la aplicación dada por:

$$\deg(\phi, q) = \sum_{p \in \phi^{-1}(\{q\})} \begin{cases} +1 & \text{si } (Jac \phi)(p) > 0 \\ -1 & \text{si } (Jac \phi)(p) < 0 \end{cases}, \quad (4.1)$$

definida para todo $q \in S_2$ excepto en los valores no regulares, que es un conjunto de medida nula (*teorema 2.52*).

Se puede observar que esta aplicación relaciona el número de contraímagenes de cada punto regular con su comportamiento respecto a la orientación por medio del Jacobiano de la aplicación ϕ . Esta aplicación se conoce como *grado local* y está íntimamente relacionada con el grado introducido en la *definición 4.1*.

Se define formalmente a continuación.

Definición 4.4 (Grado local de una aplicación entre superficies compactas). Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas y $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable. Si se denota por \mathcal{R} el conjunto de puntos regulares de S_2 respecto a ϕ , entonces, se define el *grado local* de la aplicación diferenciable ϕ como la aplicación definida en 4.1.

La conexión entre la aplicación grado y la aplicación grado local queda patente en la siguiente proposición.

Proposición 4.5. Dadas dos superficies compactas y orientadas S_1 y S_2 y una aplicación diferenciable $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ entre ellas, sea $\mathcal{R} \subset S_2$ el conjunto de valores regulares de ϕ . Entonces \mathcal{R} es abierto, la aplicación grado local $\deg(\phi, -) : \mathcal{R} \subset S_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ es constante en cada componente conexa de \mathcal{R} , integrable en S_2 y se verifica que

$$\deg \phi = \frac{1}{A(S_2)} \int_{S_2} \deg(\phi, q) dq. \quad (4.2)$$

Demostración. Aplicando del *teorema 3.36* a ϕ y a la función idénticamente igual a 1, ya que $1|Jac \phi|$ es integrable por ser S_1 compacta, se tiene que la función $n(\phi, 1)$ (siguiendo la notación del resultado mencionado) es integrable en S_2 . Es claro que

$$|\deg(\phi, q)| \leq \sum_{p \in \phi^{-1}(\{q\})} 1 = n(\phi, 1)(q) \quad \text{para todo } q \in \mathcal{R},$$

luego la aplicación grado local es integrable en S_2 (recordemos que $S_2 \setminus \mathcal{R}$ es de medida nula). De hecho se tiene que $\deg(\phi, q) = n(\phi, SignJac)(q)$ para todo $q \in \mathcal{R}$, donde la función $SignJac : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por

$$SignJac(p) = \begin{cases} +1 & \text{si } (Jac \phi)(p) > 0 \\ 0 & \text{si } (Jac \phi)(p) = 0 \\ -1 & \text{si } (Jac \phi)(p) < 0 \end{cases} \quad \text{para todo } p \in S_1.$$

Una nueva aplicación del *teorema 3.36* a las aplicaciones ϕ y $SignJac : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ lleva

a que

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \deg(\phi, q) &= \int_{S_2} n(\phi, \text{SignJac})(q) = \\ &= \int_{S_1} \text{SignJac}(p) |\text{Jac } \phi|(p) dp = \int_{S_1} (\text{Jac } \phi)(p) dp = A(S_2) \deg \phi \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la *definición 4.1*. De esta manera queda probada la igualdad (4.2) que relaciona las aplicaciones grado y grado local.

Sea $\mathcal{N} \subset S_1$ el conjunto de puntos regulares de ϕ . \mathcal{N} es cerrado (y por tanto compacto al estar contenido en S_1) por ser $\{p \in S_1 \mid d\phi_p \neq 0\}$ abierto. Dado que ϕ es una aplicación continua, $\phi(\mathcal{N})$ es también compacto y por lo tanto $\mathcal{R} = S_2 \setminus \phi(\mathcal{N})$ es abierto.

Veamos que el grado local es localmente constante, y por tanto constante en cada componente conexa. Sea $q \in \mathcal{R}$ un punto regular de ϕ . Su contraimagen es un subconjunto finito de S_1 que se denota por

$$\phi^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}.$$

La aplicación del *teorema de las funciones inversas para aplicaciones entre superficies* permite tomar entornos abiertos U_1, \dots, U_k de p_1, \dots, p_k en S_1 (que de hecho se pueden tomar disjuntos), y entornos V_1, \dots, V_k de q en S_2 tales que las restricciones $\phi|_{U_i} : U_i \rightarrow V_i$ para todo $i = 1, \dots, k$ son difeomorfismos. Se prueba a continuación que existe entonces un abierto $V \subset S_2$ tal que $q \in V \subset V_1 \cap \dots \cap V_k$ y $\phi^{-1}(V) \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$.

En efecto, si no existiera, entonces se podría tomar una sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de S_2 que convergen a q y otra sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en S_1 tales que $\phi(a_n) = q_n$ y $a_n \in S_1 \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_k)$. Como S_1 es compacta, también lo es $S_1 \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_k)$. Por lo tanto, existiría una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ que convergería hacia un punto $a \in S_1 \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_k)$. Sin embargo, esto es imposible, ya que en este caso, dada la continuidad de la aplicación ϕ , se tendría $\phi(a) = q$, pero esto no es consistente con el hecho de que todas las contraimágenes de q , denotadas por p_1, \dots, p_n , pertenecen a $U_1 \cup \dots \cup U_k$.

Entonces, eligiendo V conexo y definiendo $W_i = U_i \cap \phi^{-1}(V)$ para $i = 1, \dots, k$, se tiene que $\phi^{-1}(V) = W_1 \cup \dots \cup W_k$, donde los W_i son disjuntos para todo $i = 1, \dots, k$ y $\phi|_{W_i} : W_i \rightarrow V$ es difeomorfismo para todo $i = 1, \dots, k$.

En consecuencia, cada punto de V tiene k contraimágenes por ϕ , exactamente las mismas que q , y puesto que W_i es conexo para todo $i = 1, \dots, k$ y no contiene puntos críticos, se tiene que el Jacobiano tiene signo constante en cada W_i . Esto significa que $\deg(\phi, -)$ es constante en V luego es constante en cada componente conexa de \mathcal{R} . \square

Observación 4.6. *Sea S_1 es una superficie compacta orientada, sea S_2 una superficie compacta y conexa orientada y sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable, entonces, $\deg(f, y) = \deg f$ para todo $y \in S_2$ valor regular de f . [9], pág. 28.*

El siguiente resultado a probar resulta de crucial importancia para demostrar la versión del *teorema de Gauss-Bonnet* que se presenta en este trabajo. Antes de

enunciarlo y demostrarlo se introduce la noción de *dominio regular* como sigue:

Definición 4.7. Se denomina *dominio regular* de \mathbb{R}^3 a cualquier subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ conexo y acotado tal que su frontera $\partial\Omega$ es una superficie compacta no necesariamente conexa.

Observación 4.8. *En la definición anterior no se requiere que la frontera de Ω sea conexa. Por lo tanto, dadas dos superficies compactas y conexas disjuntas tales que sus dominios interiores verifican $\Omega_2 \subset \Omega_1$, entonces $\Omega = \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}$ es un dominio regular tal que $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$. Tomando por ejemplo S_1 y S_2 dos esferas centradas en el mismo punto tales que el radio de S_1 sea mayor que el de S_2 , entonces el dominio regular que describen es la corteza esférica que ambas delimitan.*

Cabe destacar que el teorema de la divergencia resulta válido para este tipo de dominios, esto es, si $v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial diferenciable entonces

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v = - \int_{\partial\Omega} \langle v, N \rangle,$$

donde la integral en $\partial\Omega$ es la suma de la integral en sus componentes conexas y N es en cada una de ellas una orientación interior al dominio Ω , (que se define de manera análoga al dominio interior descrito por una superficie, introducido en la definición 2.42).

Teorema 4.9. Dado un dominio regular Ω cuya frontera es la unión de k superficies conexas y compactas disjuntas $\partial\Omega = S_1 \cup \dots \cup S_k$, si S' es otra superficie compacta y $\phi : \overline{\Omega} \rightarrow S'$ es una aplicación diferenciable, entonces

$$\operatorname{deg} \phi|_{S_1} + \dots + \operatorname{deg} \phi|_{S_k} = 0,$$

donde para el cómputo del grado se toma cualquier orientación de S' y para cada una de las S_i $i = 1, \dots, k$, una orientación tal que todas se correspondan simultáneamente o bien con la orientación interior respecto al dominio Ω o bien con la exterior.

Demostración. Se toma una orientación cualquiera de S' mediante una aplicación de Gauss $N' : S' \rightarrow \mathbb{S}^2$. Se define a partir de ella un campo vectorial v_ϕ diferenciable en $\overline{\Omega}$ como sigue,

$$v_\phi = (\det(N' \circ \phi, \phi_y, \phi_z), -\det(N' \circ \phi, \phi_x, \phi_z), \det(N' \circ \phi, \phi_x, \phi_y)),$$

donde los subíndices x, y, z , como es habitual, denotan las correspondientes derivadas parciales de $\phi(x, y, z)$. De la *observación 3.39* se tiene que la divergencia del campo v_ϕ es:

$$\operatorname{div} v_\phi = \frac{\partial}{\partial x} \det(N' \circ \phi, \phi_y, \phi_z) - \frac{\partial}{\partial y} \det(N' \circ \phi, \phi_x, \phi_z) + \frac{\partial}{\partial z} \det(N' \circ \phi, \phi_x, \phi_y).$$

Operando y teniendo en cuenta el *teorema de Schwarz* de la igualdad de las derivadas cruzadas se puede comprobar que

$$\operatorname{div} v_\phi = \det((N' \circ \phi)_x, \phi_y, \phi_z) - \det((N' \circ \phi)_y, \phi_x, \phi_z) + \det((N' \circ \phi)_z, \phi_x, \phi_y). \quad (4.3)$$

Ahora bien, si $p \in \bar{\Omega}$, entonces se tiene que

$$\phi_x(p) = (d\phi)_p(e_1), \quad \phi_y(p) = (d\phi)_p(e_2) \quad y \quad \phi_z(p) = (d\phi)_p(e_3),$$

siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base estándar de \mathbb{R}^3 , pertenecen a $T_{\phi(p)}(S')$ mientras que, de la regla de la cadena

$$d(N' \circ \phi)_p = (dN')_{\phi(p)}(d\phi)_p \quad \text{para todo } p \in S',$$

lo cual, dado que $(dN')_{\phi(p)}$ es un endomorfismo en $T_{\phi(p)}(S')$ (de acuerdo con la *proposición 2.32*), implica que los vectores

$$(N' \circ \phi)_{x_i}(p) = (dN')_{\phi(p)}((d\phi)_p(e_i)) \quad \text{para } x_i = x, y, z$$

pertenecen también al plano tangente a S' en $\phi(p)$, $T_{\phi(p)}(S')$.

En consecuencia, cada uno de los siguientes conjuntos de vectores,

$$\{(N' \circ \phi)_x(p), \phi_y(p), \phi_z(p)\}, \{(N' \circ \phi)_y(p), \phi_x(p), \phi_z(p)\} \text{ y } \{(N' \circ \phi)_z(p), \phi_x(p), \phi_y(p)\}$$

son coplanarios, de modo que los determinantes que aparecen en la relación (4.3) son nulos y por lo tanto,

$$\operatorname{div} v_\phi = 0.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $\det(w_1, w_2, w_3) = \langle w_1, w_2 \wedge w_3 \rangle$, se tienen las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} \det(v_\phi, e_1, e_2) &= \langle v_\phi, e_1 \wedge e_2 \rangle = \langle v_\phi, e_3 \rangle = \det(N' \circ \phi, \phi_x, \phi_y), \\ \det(v_\phi, e_1, e_3) &= \langle v_\phi, e_1 \wedge e_3 \rangle = -\langle v_\phi, e_2 \rangle = \det(N' \circ \phi, \phi_x, \phi_z), \\ \det(v_\phi, e_2, e_3) &= \langle v_\phi, e_2 \wedge e_3 \rangle = \langle v_\phi, e_1 \rangle = \det(N' \circ \phi, \phi_y, \phi_z). \end{aligned}$$

Entonces, las siguientes formas bilineales antisimétricas (pues heredan las propiedades del producto vectorial en \mathbb{R}^3),

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \det(v_\phi(p), u, v) \end{aligned} \quad (4.4)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \det((N' \circ \phi)(p), (d\phi)_p(u), (d\phi)_p(v)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

han de ser iguales para todo $p \in \bar{\Omega}$, pues coinciden en la base estándar. Aplicando el *teorema de la divergencia* sobre el dominio regular Ω cuya frontera es $S_1 \cup \dots \cup S_k$ se tiene que

$$\int_{\partial\Omega} \langle v_\phi, N \rangle = \int_{S_1} \langle v_\phi, N_1 \rangle + \dots + \int_{S_k} \langle v_\phi, N_k \rangle = - \int_{\Omega} \operatorname{div} v_\phi = 0, \quad (4.6)$$

donde, como se menciona en el enunciado del teorema (y es necesario para la aplicación del *teorema de la divergencia*), se tiene que cada N_i , $i = 1, \dots, k$ es la orientación de S_i correspondiente de modo que N_i sea interior al dominio Ω . Si para cada $p \in S_i$

se toma una base $\mathcal{B}_i = \{e_1^i, e_2^i\}$ ortonormal orientada positivamente respecto a la orientación dada por N_i del plano tangente $T_p(S_i)$, entonces se tiene de la igualdad de las formas bilineales antisimétricas definidas en (4.4) y (4.5) que,

$$\begin{aligned} \langle v_\phi, N_i \rangle(p) &= \langle v_\phi(p), e_1^i \wedge e_2^i \rangle = \det(v_\phi(p), e_1^i, e_2^i) = \\ &= \det((N' \circ \phi)(p), (d\phi)_p(e_1^i), (d\phi)_p(e_2^i))) = (Jac \phi|_{S_i})(p). \end{aligned}$$

Luego sustituyendo en la relación (4.6) se tiene que,

$$0 = \frac{1}{A(S')} \left(\int_{S_1} (Jac \phi|_{S_1}) + \cdots + \int_{S_k} (Jac \phi|_{S_k}) \right) = deg \phi|_{S_1} + \cdots + deg \phi|_{S_k},$$

tal y como se quería probar. \square

Corolario 4.10. Dada una aplicación diferenciable $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ entre dos superficies compactas y conexas que puede extenderse de manera diferenciable a la adherencia $\overline{\Omega_1}$ del dominio interior determinado por S_1 , entonces $deg \phi = 0$.

Demostración. Basta tener en cuenta que ϕ satisface las condiciones del teorema anterior considerando como dominio regular el dominio interior Ω_1 determinado por la superficie conexas y compacta S_1 . \square

Corolario 4.11. Dadas dos superficies S_1 y S_2 compactas y conexas tales que sus dominios interiores verifican $\Omega_2 \subset \Omega_1$, sea $\Omega = \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}$ y ϕ una aplicación diferenciable $\phi : \overline{\Omega} \rightarrow S'$ con llegada en otra superficie S' , entonces se tiene que

$$deg \phi|_{S_1} = deg \phi|_{S_2},$$

si se toman orientaciones en S_1 y S_2 tales que ambas sean o bien interiores o bien exteriores en relación a sus respectivos dominios interiores Ω_1 y Ω_2 .

Demostración. El conjunto $\Omega = \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}$ es un dominio regular con frontera $S_1 \cup S_2$ como se menciona en la *observación 4.8*. Entonces, la aplicación del *teorema 4.9* lleva a que,

$$deg \phi|_{S_1} + deg \phi|_{S_2} = 0 \Rightarrow deg \phi|_{S_1} = -deg \phi|_{S_2}, \quad (4.7)$$

donde para poder aplicar dicho teorema, se impone que ambas orientaciones sean interiores o exteriores simultáneamente respecto al dominio $\Omega = \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_2}$. Para el caso en que sean interiores, en tanto que por hipótesis $\Omega \subset \Omega_1$, es claro que se tiene que tomar en S_1 la orientación interior respecto a su dominio interior Ω_1 y la exterior en S_2 respecto su dominio interior Ω_2 .

Para satisfacer las condiciones del enunciado de este corolario se debe entonces revertir una de las orientaciones que llevan a la igualdad (4.7), lo que, como se puede deducir de la *definición 4.1*, cambia el signo del grado. En consecuencia, de la relación (4.7) se tiene que, tal y como se quería probar, si se toman ambas orientaciones o bien interiores o bien exteriores (en relación a sus respectivos dominios interiores) se consigue la igualdad buscada, $deg \phi|_{S_1} = deg \phi|_{S_2}$.

(El argumento es análogo en caso de que se tomen ambas orientaciones exteriores respecto a Ω para la aplicación del *teorema 4.9*). \square

Recordamos antes de enunciar el siguiente resultado la *definición 3.9* de superficie paralela.

Lema 4.12. Sea S una superficie. Existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $t \in (0, \epsilon)$ aplicación F_t (descrita en la *observación 3.8*) es un difeomorfismo que conserva la orientación.

Demostración. Sea $p \in S$ y supóngase que F se define utilizando como orientación la interior. En la *observación 3.8* se prueba que si se toma un ϵ suficientemente pequeño entonces $(dF_t)(e_i) = (1 - tk_i(p))e_i \neq 0$, para $i = 1, 2$, donde e_i son las direcciones principales de $T_p(S)$. De hecho, si este es el caso, se tiene que tener que $1 - tk_i(p) > 0$ para todo $t \in (0, \epsilon)$. Es claro entonces que el plano tangente a S_t en $p + tN(p)$ coincide con el plano tangente a p en S , esto es, $T_{p+tN(p)}(S_t) = T_p(S)$, luego el vector normal en un punto $p + tN(p)$ de S_t ha de coincidir con $N(p)$ o $-N(p)$ (si \tilde{N} denota la orientación en S_t , entonces $\tilde{N}(p + tN(p)) = \pm N(p)$). Pero como se elige el vector normal $N(p)$ tal que $p + \xi N(p)$ está en el dominio interior de S , se tiene que tener que $\tilde{N}(p + tN(p)) = N(p)$ pues

$$(p + tN(p)) + \xi \tilde{N}(p + tN(p)) = p + (t + \xi)N(p)$$

está en el dominio interior de S_t .

Por tanto, si $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de direcciones principales orientada positivamente respecto a la orientación interior $N(p)$ en $T_p(S)$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\text{Jac } F_t)(p) &= \det((1 - tk_1)e_1, (1 - tk_2)e_2, \tilde{N}(p + tN(p))) = \\ &= (1 - tk_1)(1 - tk_2)\det(e_1, e_2, N(p)) > 0 \end{aligned}$$

por ser todos los términos positivos, luego F_t conserva la orientación. \square

Lema 4.13 (Invarianza homotópica del grado). Sean S y S' dos superficies compactas, conexas y orientadas y sea $\phi : S \times [a, b] \rightarrow S'$ una aplicación diferenciable, donde $[a, b]$ es un intervalo cerrado de la recta real. Entonces se verifica que

$$\deg \phi_a = \deg \phi_b,$$

donde $\phi_a : S \rightarrow S'$ y $\phi_b : S \rightarrow S'$ son las aplicaciones diferenciables entre S y S' homotópicas a través de ϕ .

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $N_{2\epsilon}(S)$ es un entorno tubular de S y sea $F : S \times (-2\epsilon, 2\epsilon) \rightarrow N_{2\epsilon}(S)$ el difeomorfismo asociado donde se toma el vector normal interior a S . Sea S_ϵ la superficie paralela interior (es decir, a una distancia ϵ respecto a la orientación interior) de S . Si se denota por Ω el dominio interior de S , se tiene que $S_\epsilon \subset \Omega$ y su dominio interior $\Omega_\epsilon \subset \Omega$. Entonces, $\Gamma = \Omega \setminus \overline{\Omega}_\epsilon$ es un dominio regular en \mathbb{R}^3 con frontera $\partial\Gamma = S \cup S_\epsilon$. Se define entonces la aplicación $\psi : \overline{\Gamma} \rightarrow S'$ como,

$$\psi(F(p, t)) = \psi(p + tN(p)) = \phi\left(p, a + (b - a)\frac{t}{\epsilon}\right) \quad \text{para todo } p \in S, t \in [0, \epsilon].$$

Es decir, se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
S \times [0, \epsilon] & \xrightarrow{F} & F(S \times [0, \epsilon]) \subset N_{2\epsilon} \\
id \times \alpha \downarrow & & \downarrow \psi \\
S \times [a, b] & \xrightarrow{\phi} & S'
\end{array}
\quad \text{donde } \alpha(t) = a + (b - a)t/\epsilon.$$

Es claro que ψ es una aplicación diferenciable. Aplicando el *corolario 4.11* a S , S_ϵ , ψ y la superficie S' , se obtiene que

$$\deg \psi|_S = \deg \psi|_{S_\epsilon}$$

si se toman las orientaciones interiores en relación a sus respectivos dominios en S y en S_ϵ . Además, de la definición de la aplicación ψ es claro que

$$\psi|_S = \phi_a \quad \text{y} \quad \psi|_{S_\epsilon} = \phi_b \circ (F_\epsilon)^{-1},$$

donde F_ϵ es la aplicación que envía S en S_ϵ . $F_\epsilon : S \rightarrow S_\epsilon$, que conserva la orientación si ϵ es suficientemente pequeño como se prueba en el lema previo. Entonces, se tiene de la *proposición 4.2* que

$$\deg \phi_a = \deg (\phi_b \circ F_\epsilon^{-1}) = \deg \phi_b,$$

lo cual concluye la demostración. □

Se utilizan estos resultados para probar un afamado teorema de la teoría de superficies sumergidas en \mathbb{R}^3 , conocido como *teorema de la bola peluda de Brouwer*, que resulta un caso particular (interesante desde el punto de vista divulgativo) del teorema más general objetivo de este trabajo.

Teorema 4.14 (De la bola peluda de Brouwer). Todo campo vectorial tangente a la esfera unidad, $v : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, se anula necesariamente en algún punto de esta.

Demostración. Se razona por reducción al absurdo. Se supone que existe un campo vectorial tangente a \mathbb{S}^2 que se denota por w tal que $w(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$. Se define a partir de él un campo vectorial tangente unitario v dado por

$$v = \frac{w}{|w|} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

que cumple $\langle v(p), p \rangle = 0$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$. Se define a partir de v la aplicación ϕ dada por

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{S}^2 \times [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{S}^2, \\
(p, \theta) &\longmapsto p \cos \theta + v(p) \sin \theta,
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

la cual es diferenciable. Además, $\phi_0(p) = p = id_{\mathbb{S}^2}(p)$ y $\phi_\pi(p) = -p = -id_{\mathbb{S}^2}(p)$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$, luego las aplicaciones $id_{\mathbb{S}^2}$ y $-id_{\mathbb{S}^2}$ son homótopas a través de ella. De la invarianza homotópica del grado probada en el lema anterior se tiene que el grado de ambas aplicaciones ha de ser el mismo para cualquier orientación de \mathbb{S}^2 .

Sin embargo, para estas funciones se tiene que el Jacobiano resulta

$$(Jac (id_{\mathbb{S}^2})) (p) = \det (e_1, e_2, N(p)) \quad y \quad (Jac (-id_{\mathbb{S}^2})) (p) = \det (-e_1, -e_2, N(-p)),$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de $T_p(S_1)$ respecto a una aplicación de Gauss N . Teniendo en cuenta que en la esfera se tiene que $N(-p) = -N(p)$ se deduce que

$$(Jac (id_{\mathbb{S}^2})) (p) = 1 \quad y \quad (Jac (-id_{\mathbb{S}^2})) (p) = -1 \quad \text{para todo } p \in T_p(S),$$

luego es inmediato que

$$deg (id_{\mathbb{S}^2}) = 1 \quad y \quad deg (-id_{\mathbb{S}^2}) = -1.$$

Esto es, ambos grados no pueden ser iguales, en contra de lo establecido anteriormente. Por lo tanto, se concluye que no existe ningún campo vectorial diferenciable sin ceros en la esfera unitaria \mathbb{S}^2 . \square

A partir de la aplicación grado se define el *índice de un campo vectorial en un cero aislado* como siguiente noción básica para llegar a abordar la versión del *teorema de Gauss-Bonnet* que se presenta en este estudio.

4.2. Índice de un campo vectorial en un posible cero aislado

En primer lugar se introduce el *índice de un campo vectorial* definido en un abierto $O \subset \mathbb{R}^3$, para posteriormente extender esta noción al caso de campos tangentes sobre superficies.

Definición 4.15 (Índice de un campo vectorial en un posible cero aislado). Sea $O \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $v : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable definido en O .

- (a) Dado un punto $a \in O$ se dice que a es un *posible cero aislado* de v si existe un entorno U de a en O tal que $v(b) \neq 0$ para todo $b \in U \setminus \{a\}$. Se dice que a es un *cero aislado* si es un posible cero aislado tal que $v(a) = 0$.
- (b) Para un posible cero aislado a se puede tomar una esfera centrada en a de radio $r > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $\mathbb{S}_r^2(a) \subset U \setminus \{a\}$, donde v no se anula. Entonces, se define el *índice de v en a* como el valor:

$$i(v, a) = deg \frac{v}{\|v\|} \Big|_{\mathbb{S}_r^2(a)}$$

Proposición 4.16. Dado un abierto $O \subset \mathbb{R}^3$, sea $v : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable. Se verifican las siguientes propiedades:

- (a) El índice de v en un posible cero aislado a no depende del radio $r > 0$ de la esfera $\mathbb{S}_r^2(a)$ centrada en a y contenida en un entorno punteado $U \setminus \{a\}$ donde v no se anula.

(b) Si el campo vectorial v no es nulo en un posible cero aislado a , entonces:

$$i(v, a) = 0$$

Demostración. (a) Para esta primera aseveración basta tener en cuenta que dados dos radios $r_1 > r_2$ tales que $\mathbb{S}_{r_1}^2(a), \mathbb{S}_{r_2}^2(a) \subset U \setminus \{a\}$, donde U es un entorno de a tal que v se anula como mucho en a , la corteza esférica que ambas delimitan $\Omega = B(a, r_1) \setminus \overline{B}(a, r_2)$ es un dominio que junto con la aplicación diferenciable

$$\frac{v}{\|v\|} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{S}^2 \quad (4.9)$$

verifica las hipótesis del *corolario 4.11*.

Como consecuencia de este resultado se tiene entonces que

$$\deg \frac{v}{\|v\|} \Big|_{\mathbb{S}_{r_1}^2(a)} = \deg \frac{v}{\|v\|} \Big|_{\mathbb{S}_{r_2}^2(a)} = i(v, a).$$

(b) Es claro que se puede elegir a de forma que la aplicación descrita en (4.9) se puede extender de manera diferenciable a todo $\overline{B}(r_1, a)$, por lo que se verifican en este caso las hipótesis del *corolario 4.10*. En consecuencia, se tiene que

$$i(v, a) = \deg \frac{v}{\|v\|} \Big|_{\mathbb{S}_{r_1}^2(a)} = 0.$$

□

Definición 4.17. Dado un abierto $O \subset \mathbb{R}^3$ y un campo vectorial $v : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ de modo que $v(a) = 0$ para algún $a \in O$, se dice que v es *un campo vectorial no degenerado en a* si se verifica que la aplicación diferencial $(dv)_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es regular, esto es, si $\det (dv)_a \neq 0$ (si a es un punto regular de v). Además, se dice que v es *no degenerado* si así lo es en cada uno de sus ceros.

Observación 4.18. *En las condiciones de la definición anterior, si v es no degenerado en uno de sus ceros $a \in O$, entonces, el teorema de las funciones inversas asegura la existencia de un entorno U de a en O que es difeomorfo a un entorno de 0 en \mathbb{R}^3 . Esto permite asegurar que para todo $b \in U \setminus \{a\}$ se tiene que $v(b) \neq 0$.*

Probaremos que cuando un campo vectorial sea no degenerado, el índice en un cero aislado cualquiera toma los valores $+1$ o -1 . Para ello se introducen previamente un par de resultados auxiliares.

El primero de ellos, es una observación que resulta útil para el cálculo de índices de campos vectoriales en posibles ceros aislados:

Observación 4.19. *Dada una superficie compacta S y un campo vectorial diferenciable $w : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $w(p) \neq 0$ para todo $p \in S$, entonces se tiene que la aplicación*

$$\frac{w}{\|w\|} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

es diferenciable en S , y por lo tanto tiene sentido considerar su grado. En concreto se tiene que, para todo $v \in T_p(S)$,

$$\left(d \frac{w}{\|w\|}\right)_p(v) = \frac{1}{\|w(p)\|} (dw)_p(v) - cw(p), \quad (4.10)$$

donde

$$c = \frac{\langle (dw)_p(v), w(p) \rangle}{\|w(p)\|^3} \in \mathbb{R}.$$

De esta manera, tomando una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ orientada positivamente y observando que el vector $w(p)/\|w(p)\|$ es el vector normal unitario exterior de \mathbb{S}^2 en el punto $q = w(p)/\|w(p)\| \in \mathbb{S}^2$, se verifica que,

$$\left(\text{Jac} \frac{w}{\|w\|}\right)(p) = \frac{1}{\|w(p)\|^3} \det((dw)_p(e_1), (dw)_p(e_2), w(p))$$

ya que los términos que se corresponden con $-cw(p)$ que aparecen en (4.10) no contribuyen al cálculo del determinante en tanto que se anulan por ser proporcionales a $w(p)$.

En conclusión, se tiene para el grado del campo vectorial normalizado asociado a w ,

$$\deg \left(\frac{w}{\|w\|} \right) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{\|w(p)\|^3} \det((dw)_p(e_1), (dw)_p(e_2), w(p)) dp.$$

Lema 4.20. Dada una matriz A regular de dimensión 3, la aplicación $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $\phi(p) = Ap/\|Ap\|$ es un difeomorfismo. Además se verifica que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\|Ap\|^3} dp = \frac{4\pi}{|\det A|}. \quad (4.11)$$

Demostración. La aplicación ϕ es diferenciable por ser la restricción a la esfera unidad de una aplicación diferenciable en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. De hecho, es un difeomorfismo de inversa ψ dada por

$$\psi(p) = \frac{A^{-1}p}{\|A^{-1}p\|} \quad \text{para todo } p \in \mathbb{S}^2.$$

Teniendo en cuenta que para todo $p \in \mathbb{S}^2$ y $v \in T_p(S)$ se tiene que

$$(d\phi)_p(v) = \frac{Av}{\|Av\|} - cAp \quad \text{donde } c = \frac{\langle Ap, Av \rangle}{\|Ap\|^3} \in \mathbb{R},$$

con argumentos análogos a los de la observación 4.19 se llega a

$$|\text{Jac } \phi|(p) = \frac{1}{\|Ap\|^3} |\det(Ae_1, Ae_2, Ap)| = \frac{|\det A|}{\|Ap\|^3},$$

para una base $\{e_1, e_2\}$ ortonormal de $T_p(\mathbb{S}^2)$ y teniendo en cuenta que si se completa con p , unitario y ortogonal en $p \in \mathbb{S}^2$, se tiene una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

Para concluir basta entonces tener en cuenta que por el *teorema del cambio de variable* para la integración en superficies, mediante el difeomorfismo ϕ se tiene que

$$4\pi = \int_{\mathbb{S}^2} 1 dp = \int_{\mathbb{S}^2} |Jac \phi|(p) dp = |\det A| \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\|Ap\|^3} dp,$$

de donde se concluye inmediatamente la relación (4.11) buscada. \square

Proposición 4.21. Sea $O \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $v : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial no degenerado. El índice $i(v, a)$ del campo en cualquiera de sus ceros $a \in O$ es $+1$ ó -1 dependiendo de si $(dv)_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ conserva o revierte la orientación de \mathbb{R}^3 .

Demostración. Sea a un cero aislado de v y $r > 0$ un número real suficientemente pequeño de modo que $\mathbb{S}_r^2(a)$ es una esfera centrada en a contenida en O tal que v solo se anula en a en el interior de la bola que esta delimita (cuya existencia puede asegurarse en virtud de la *observación 4.18*). A partir de la *observación 4.19* es claro que el índice $i(v, a)$ de v en a puede escribirse como

$$i(v, a) = \deg \left. \frac{v}{\|v\|} \right|_{\mathbb{S}_r^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_r^2(a)} \frac{1}{\|v(p)\|^3} \det((dv)_p(e_1), (dv)_p(e_2), v(p)) dp,$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal orientada positivamente del plano $T_p(\mathbb{S}_r^2(a))$ respecto a la normal exterior.

Considerando el difeomorfismo $\psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2(a)$ dado por $\psi(p) = a + rp$, cuyo jacobiano es r^2 , se tiene del *teorema del cambio de variables* para la integración en superficies (*observación 3.18, (e)*) que

$$i(v, a) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{r^2}{\|v(a + rp)\|^3} \det((dv)_{a+rp}(e_1), (dv)_{a+rp}(e_2), v(a + rp)) dp.$$

Como $v(a) = 0$ y el campo es no degenerado, se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(a + rp) - v(a)}{r} = (dv)_a(p) \neq 0 \quad \text{para todo } p \in \mathbb{S}^2.$$

Esto es, el integrando anterior converge puntualmente hacia la función de \mathbb{S}^2 en \mathbb{R} dada por

$$p \mapsto \frac{1}{\|(dv)_a(p)\|^3} \det((dv)_a(e_1), (dv)_a(e_2), (dv)_a(p)) = \frac{\det(dv)_a}{\|(dv)_a(p)\|^3}.$$

A partir del *teorema de continuidad de las integrales paramétricas* se tiene que

$$i(v, a) = \frac{\det(dv)_a}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{\|(dv)_a(p)\|^3} dp.$$

Y se concluye aplicando la ecuación (4.11) a la aplicación lineal dada por $(dv)_a$

$$i(v, a) = \frac{\det (dv)_a}{4\pi} \frac{4\pi}{|\det (dv)_a|} = \pm 1 \quad \text{dependiendo del signo de } \det (dv)_a.$$

□

Ejemplo 4.22. Sea $v : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial en \mathbb{R}^2 cuyos ceros son todos aislados. El campo $v \times id : V_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ verifica en un punto $q \in V_1$, de acuerdo con la *observación 4.6*, que para un $r > 0$,

$$\begin{aligned} i(v \times id, (q, 0)) &= \deg \left(\frac{v \times id}{\|v \times id\|} \Big|_{\mathbb{S}_r^2(q, 0)} \right) = \\ &= \deg \left(\frac{v \times id}{\|v \times id\|} \Big|_{\mathbb{S}_r^2(q, 0)}, (1, 0, 0) \right) = \deg \frac{v}{\|v\|} \Big|_{\mathbb{S}_r^1(q)}, \end{aligned}$$

suponiendo sin pérdida de generalidad que el campo normalizado tiene como valor regular el $(1, 0, 0)$. El grado que aparece en el último término se corresponde con la definición habitual de grado para una función $f : \mathbb{S}_r^1(q) \rightarrow \mathbb{S}_r^1$ y la última igualdad se debe al hecho de que los términos que relaciona están determinados por las contraímapenas por ambos campos en el punto considerado, que puesto que $(v \times id)(p, t) = (a, 0) \Rightarrow t = 0 \Rightarrow (p, t) \in \mathbb{S}_r^1(q)$, han de coincidir.

Definición 4.23. Sea $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tangente (ver *definición 3.37*) en una superficie S orientada por un campo N . Un punto $a \in S$ se denomina *posible cero aislado* de v si existe un entorno U de a en S tal que $v(b) \neq 0$ para todo $b \in U \setminus \{a\}$. Se dice que a es un *cero aislado* si es un posible cero aislado tal que $v(a) = 0$.

Para un posible cero aislado $a \in S$ se puede tomar una bola $B_r(a)$ suficientemente pequeña tal que esté contenida en un entorno tubular de U . Se define entonces un nuevo campo vectorial w_v en el subconjunto abierto $B_r(a) \subset \mathbb{R}^3$ como

$$w_v(F(p, t)) = w_v(p + tN(p)) = v(p) + tN(p) \quad \text{para todo } p \in U \cap B_r(a), \quad (4.12)$$

donde F es la aplicación descrita en (3.1). El campo $w_v : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable y en caso de anularse en algún punto lo hace en a .

Definición 4.24 (Índice de un campo vectorial tangente a una superficie en un posible cero aislado). Siguiendo la notación de la *definición 4.23* y del comentario previo, se define el índice de un campo vectorial tangente a una superficie S orientada por un campo N en un posible cero aislado a como

$$i(v, a) = i(w_v, a),$$

donde $i(w_v, a)$ responde a la *definición 4.15* para el índice de un campo vectorial definido en un abierto de \mathbb{R}^3 en un posible cero aislado.

Además, se dice que el campo v es *no-degenerado* en el punto a si la aplicación $(dv)_a$ es regular. Si v es *no-degenerado* en todos sus posibles ceros aislados, entonces se dice que v es un campo *no-degenerado*.

Como se define el índice de un campo vectorial tangente a una superficie a partir del índice de un campo definido en un abierto $O \subset \mathbb{R}^3$, se pueden extender de manera natural los resultados obtenidos para este último al caso que ahora se presenta.

De esta manera se tiene que el índice de un campo vectorial tangente a una superficie S en un posible cero aislado no depende del radio r de la bola $B_r(a) \subset U$ elegido en la definición (*proposición 4.16, (a)*).

La afirmación (*b*) de la misma proposición se deriva también de forma inmediata para el caso de un campo vectorial tangente a una superficie S y su índice en un punto $a \in S$ con $v(a) \neq 0$ pero tal que existe un entorno $U \subset S$ tal que v no se anula en U .

Siguiendo estas ideas, se prueba a continuación el análogo a la *proposición 4.21*.

Proposición 4.25. Sea $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tangente a una superficie orientada S . Sea $p \in S$ tal que $v(p) = 0$. Entonces, $(dv)_p$ es un endomorfismo en $T_p(S)$. Si además el campo es *no-degenerado* en p , entonces p es un cero aislado de v y el índice $i(v, p)$ es $+1$ ó -1 de acuerdo con el signo de $\det (dv)_p$.

Demostración. Sea $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ la aplicación de Gauss en S que define su orientación. Para $u \in T_p(S)$ se toma una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = u$ y entonces se tiene que, al ser $v \circ \alpha(t)$ tangente a S para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$,

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle (N \circ \alpha)(t), (v \circ \alpha)(t) \rangle = \langle N(p), (dv)_p(u) \rangle.$$

Luego $(dv)_p(u)$ es ortogonal a $N(p)$ para todo $u \in T_p(S)$, esto es,

$$(dv)_p(T_p(S)) \subset T_p(S),$$

es decir, se puede entender la aplicación $(dv)_p$ como un endomorfismo en $T_p(S)$.

Por otra parte, si $(dv)_p$ es regular se verifica que puesto que se tiene la igualdad $w_v|_{B_r(p) \cap S} = v|_{B_r(p) \cap S}$ (donde w_v es la aplicación definida en la *definición 4.24*), se tiene que

$$(dw_v)_p|_{T_p(S)} = (dv)_p \tag{4.13}$$

y además, derivando respecto a t en $t = 0$ en la expresión

$$w_v(p + tN(p)) = v(p) + tN(p)$$

y aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$(dw_v)_p(N(p)) = N(p). \tag{4.14}$$

De las relaciones (4.13) y (4.14), tomando una base ortonormal orientada positiva-

mente $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(S)$ con respecto a $N(p)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \det(dw_v)_p &= \det((dw_v)_p(e_1), (dw_v)_p(e_2), N(p)) = \\ &= \det((dv)_p(e_1), (dv)_p(e_2)) = \det((dv)_p). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Esta igualdad indica que v es degenerado en un cero aislado p si y solo si w_v es degenerado en el mismo punto p , por lo que, aplicando la *proposición 4.21* se llega a

$$i(v, p) = i(w_v, p) = \begin{cases} +1 & \text{si } (\det (dv)_p) > 0 \\ -1 & \text{si } (\det (dv)_p) < 0 \end{cases},$$

tal y como se quería demostrar. \square

Corolario 4.26. Sea $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tangente a una superficie S compacta y orientada. Si v es no degenerado, entonces tiene un número finito de ceros, son todos aislados, y se verifica que

$$\sum_{p \in S} i(v, p) \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que de la compacidad de S y de la regularidad de $(dv)_p$ en los ceros de v en S se puede deducir, como en la *proposición 3.31*, que el número de ceros de v en p es finito. Además, de la proposición anterior se tiene que en cada uno de estos ceros el índice toma un valor entero, lo cual prueba que la suma de los índices en los ceros aislados ha de ser un entero. \square

Ejemplo 4.27 (Campos conformes en la esfera). Dado un campo unitario $a \in \mathbb{R}^3$, se define una aplicación diferenciable $a^T : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $a^T(p) = a - \langle a, p \rangle p$.

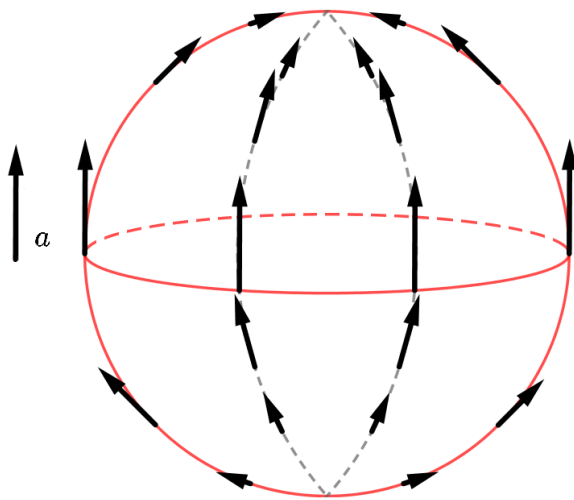


Figura 4.1: Campo conforme a^T en la esfera unidad.

Es claro que para todo $p \in \mathbb{S}^2$ se tiene que $\langle a^T(p), p \rangle = 0$ esto es, a^T es un campo tangente a la esfera unidad. Además, es inmediato que $a^T(a) = a^T(-a) = 0$, es decir, a y $-a$ son ceros de a^T .

De la definición del campo a^T se tiene que, si $p \in \mathbb{S}^2$ y $v \in T_p(\mathbb{S}^2)$, entonces

$$(da^T)_p(v) = -\langle a, v \rangle p - \langle a, p \rangle v,$$

y se tienen para los dos ceros a y $-a$ de a^T que $(da^T)_a(v) = -v$ y $(da^T)_{-a}(v) = v$ para todo $v \in T_a(\mathbb{S}^2) = T_{-a}(\mathbb{S}^2)$, luego ambas aplicaciones lineales $(da^T)_a$ y $(da^T)_{-a}$ conservan la orientación. En consecuencia, el campo a^T es no degenerado y en virtud de la *proposición 4.25* se tiene que

$$i(a^T, a) = 1 \quad y \quad i(a^T, -a) = 1$$

luego la suma de los índices de los ceros del campo a^T en la esfera es exactamente 2.

En este punto se tienen todos los ingredientes para enunciar y demostrar la versión del *teorema de Gauss-Bonnet* que se presenta en este estudio.

4.3. El Teorema de Gauss-Bonnet

Teorema 4.28 (Teorema de Gauss-Bonnet). Dada una superficie S compacta sumergida en \mathbb{R}^3 y un campo $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyos ceros son todos aislados, entonces

$$\int_S K(p) dp = 2\pi \sum_{p \in S} i(v, p), \quad (4.16)$$

donde K es la *curvatura de Gauss* de la superficie S .

Demostración. Como se viene haciendo en este capítulo, dado que ambos términos de la relación (4.16) son aditivos respecto a las componentes conexas de la superficie en cuestión, basta demostrar la proposición para una superficie S conexa.

Para comenzar, como la superficie S es compacta, se deduce del *corolario 4.26* que el número de ceros de v es finito, y se denotan por $\{a_1, \dots, a_k\}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Se considera en S la orientación interior. Sea $\epsilon > 0$ tal que $N_{2\epsilon}(S)$ es un entorno tubular de S . Si se consideran las superficies paralelas S_ϵ y $S_{-\epsilon}$ (respecto a la normal interior de S), es claro que el dominio $\Omega_{2\epsilon} = \Omega_{-\epsilon} - \overline{\Omega_\epsilon}$, siendo $\Omega_{-\epsilon}$ y Ω_ϵ los dominios interiores descritos por $S_{-\epsilon}$ y S_ϵ respectivamente, es un dominio regular (*observación 4.8*). De hecho, es inmediato a partir de la definición de F (3.1) que

$$\Omega_{2\epsilon} = F(S \times (-\epsilon, \epsilon)).$$

Si para cada uno de los ceros aislados de v en S se toma una bola en \mathbb{R}^3 de radio r_i centrada en a_i tal que $B_{r_i}(a_i) \subset \mathbb{R}^3$, de modo que $\overline{B_{r_i}(a_i)} \cap \overline{B_{r_j}(a_j)} = \emptyset$ para $i \neq j$ y que verifiquen $\overline{B_{r_i}(a_i)} \subset \Omega_{2\epsilon}$ para $i = 1, \dots, k$, se tiene que

$$\Omega = \Omega_{2\epsilon} \setminus (\overline{B_{r_1}(a_1)} \cup \dots \cup \overline{B_{r_k}(a_k)})$$

es un dominio regular de frontera $\partial\Omega = S_{-\epsilon} \cup S_\epsilon \cup \mathbb{S}_{r_1}^2(a_1) \cup \cdots \cup \mathbb{S}_{r_k}^2(a_k)$.

Dado que la aplicación $F : S \times (-2\epsilon, 2\epsilon) \rightarrow N_{2\epsilon}(S)$ es un difeomorfismo, tiene sentido definir el campo vectorial w (análogo al descrito en la ecuación (4.12)) dado por

$$w(F(p, t)) = w(p + tN(p)) = v(p) + tN(p) \quad \text{para todo } (p, t) \in S \times (-2\epsilon, 2\epsilon),$$

cuyos ceros coinciden exactamente con los de v . Por lo tanto, dado que el dominio Ω evita dichos ceros (pues se encuentran en el interior de las bolas introducidas anteriormente, que se eliminan del dominio) tiene sentido definir la aplicación

$$\phi = \frac{w}{\|w\|} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^2,$$

y en virtud del *teorema 4.9* se tiene que

$$\sum_{i=1}^k \deg \frac{w}{\|w\|} \Big|_{\mathbb{S}_{r_i}^2(a_i)} + \deg \frac{w}{\|w\|} \Big|_{S_{-\epsilon}} + \deg \frac{w}{\|w\|} \Big|_{S_\epsilon} = 0, \quad (4.17)$$

donde se toman para el cómputo de los grados las orientaciones interiores respecto a Ω en todas las superficies involucradas. Es claro que las orientaciones de las esferas centradas en los ceros a_i con $i = 1, \dots, k$, para ser interiores al dominio Ω , han de ser las respectivas orientaciones exteriores de dichas esferas y lo mismo ocurre para S_ϵ respecto a su dominio interior Ω_ϵ . Para $S_{-\epsilon}$ la orientación considerada se corresponde con la normal interior a su dominio interior $\Omega_{-\epsilon}$. Por lo tanto, si los grados de la relación (4.17) se toman de acuerdo con la normal exterior respecto a los dominios interiores determinados por las superficies compactas que forman la frontera $\partial\Omega$, hay que cambiar la orientación en S_ϵ y se obtiene

$$\sum_{i=1}^k \deg \frac{w}{\|w\|} \Big|_{\mathbb{S}_{r_i}^2(a_i)} = \deg \frac{w}{\|w\|} \Big|_{S_{-\epsilon}} - \deg \frac{w}{\|w\|} \Big|_{S_\epsilon}. \quad (4.18)$$

Ahora bien, se puede observar directamente de la definición del campo w que, para todo $\xi \in (-2\epsilon, 2\epsilon)$ se verifica que

$$w|_{S_\xi} = v \circ F_\xi^{-1} + \xi N \circ F_\xi^{-1} = (v + \xi N) \circ F_\xi^{-1},$$

donde la aplicación $F_\xi : S \rightarrow S_\xi$, como se prueba en el *lema 4.12*, es un difeomorfismo que preserva la orientación. Por tanto, en virtud de la *proposición 4.2*, (c) se tiene que

$$\deg \frac{w}{\|w\|} \Big|_{S_\xi} = \deg \frac{v + \xi N}{\|v + \xi N\|} \quad \text{para todo } \xi \in (-2\epsilon, 2\epsilon) \setminus \{0\}$$

donde se quita el 0 para asegurar que w y $v + \xi N$ no se anulen en S_ξ . Con el objetivo de calcular el grado que aparece en la derecha de la expresión anterior, se acude a la invarianza del grado bajo homotopías (*lema 4.13*). Para ello, dado que no se puede operar en 0, se tienen los siguientes casos en virtud del signo de ξ .

En primer lugar, si $\xi > 0$ se tiene que la aplicación $\phi : S \times [0, 1/\xi] \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$\phi(p, t) = \frac{N(p) + tv(p)}{\|N(p) + tv(p)\|}$$

es una homotopía diferenciable entre $\phi_0 = N$ (por ser unitario) y la aplicación $\phi_{1/\xi} = (v + \xi N)/\|v + \xi N\|$, de donde se tiene que

$$\deg \frac{v + \xi N}{\|v + \xi N\|} = \deg N \quad \text{si } \xi > 0. \quad (4.19)$$

Por otra parte, si $\xi < 0$ se tiene que la aplicación $\psi : S \times [1/\xi, 0] \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$\psi(p, t) = -\frac{N(p) + tv(p)}{\|N(p) + tv(p)\|}$$

es una homotopía diferenciable entre $\psi_0 = -N$ (por ser unitario) y la aplicación $\psi_{1/\xi} = (v + \xi N)/\|v + \xi N\|$, de donde se deduce que

$$\deg \frac{v + \xi N}{\|v + \xi N\|} = \deg (-N) \quad \text{si } \xi < 0. \quad (4.20)$$

Por lo tanto, en virtud del *ejemplo 4.3* se tiene que

$$\deg \frac{w}{\|w\|} \Big|_{S_{-\epsilon}} = -\deg \frac{w}{\|w\|} \Big|_{S_{\epsilon}} = \frac{1}{4\pi} \int_S K(p) dp.$$

Sustituyendo en (4.18),

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K(p) dp = \sum_{i=1}^k \deg \frac{w}{\|w\|} \Big|_{\mathbb{S}_{r_i}^2(a_i)} = \sum_{i=1}^k i(v, a_i),$$

donde la última igualdad se debe a la propia definición del índice de un campo tangente a una superficie en un cero aislado, lo cual concluye la demostración. \square

Corolario 4.29. Sea S una superficie compacta en \mathbb{R}^3 y $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo tangente cuyos ceros son todos aislados. La suma

$$\sum_{p \in S} i(v, p)$$

no depende del campo v tangente a S .

Demostración. La curvatura de Gauss de la superficie es independiente del campo v . Basta aplicar la relación (4.16). \square

4.4. El índice en coordenadas locales

Vamos a abordar en esta sección la forma clásica de definición del índice de un campo en un punto, utilizando cartas locales.

En primer lugar, para un campo diferenciable $w : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $n = 2, 3$ y V es un abierto, si $v_0 \in V$ es un cero aislado, existe un $r > 0$ tal que $w|_{\mathbb{S}_r^{n-1}(v_0)}$ no se anula en ningún punto y entonces se define el índice de w en p como

$$i(w, v_0) = \text{deg} \frac{w}{\|w\|} \Big|_{\mathbb{S}_r^{n-1}(v_0)}, \quad \text{donde} \quad \frac{w}{\|w\|} : \mathbb{S}_r^{n-1}(v_0) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}.$$

Si $n = 3$ la definición del grado es la de la *definición 4.1* y si $n = 2$ el grado se corresponde con la definición habitual para una aplicación $f : \mathbb{S}_r^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, que es la imagen por el homomorfismo inducido $f_* : \pi_1(\mathbb{S}_r^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ del generador de $\pi_1(\mathbb{S}_r^1)$, esto es, el lazo que da una vuelta completa a la circunferencia en sentido antihorario.

Para definir el índice de un campo tangente a una superficie se considera la siguiente situación. Si se tiene un difeomorfismo $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ entre superficies en \mathbb{R}^3 y un campo tangente $v : S_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, se puede definir el campo $v^\phi : S_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$v^\phi(q) = d\phi_{\phi^{-1}(q)}(v(\phi^{-1}(q))) \quad \text{donde} \quad v(\phi^{-1}(q)) \in T_{\phi^{-1}(q)}(S_1), \quad (4.21)$$

que es un campo tangente a S_2 y se prueba que es diferenciable sin más que calcular su expresión en coordenadas locales.

A partir de esta idea se da la definición buscada:

Definición 4.30. Sea S una superficie. Si $\phi : U \subset S \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ es una carta local¹ en un punto $p \in S$ y $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo tangente, se define el índice de v en p como

$$i(v, p) = i(v^\phi, \phi(p)),$$

donde v^ϕ es el campo $v^\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido en (4.21).

Para ver que la definición es consistente basta comprobar que el índice de v en p no depende de la carta local elegida. Ahora bien, dadas dos cartas locales $\phi : U \subset S \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ y $\psi : U \subset S \rightarrow W \subset \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{ccc} & & V \\ & \nearrow \phi & \uparrow \phi \circ \psi^{-1} \\ U & & \\ & \searrow \psi & \\ & & W \end{array}$$

es inmediato que $v^\phi = (v^\psi)^{\phi \circ \psi^{-1}}$ a partir de la regla de la cadena, por lo tanto, basta probar que dado un difeomorfismo $f : W \rightarrow V$ entre abiertos de \mathbb{R}^2 y un campo $w : W \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces

$$i(w, p) = i(w^f, f(p)) \quad (4.22)$$

Para ello, se introduce la siguiente definición:

¹Nos referiremos en esta sección a las cartas locales de esta manera, definidas de S en \mathbb{R}^2 , para alinearnos con las definiciones habituales de la bibliografía referente a este ámbito. Para ajustarlo a nuestra definición bastaría tomar $x = \phi^{-1} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset S$.

Definición 4.31. Sean X, Y abiertos de \mathbb{R}^n . Dos difeomorfismos $f, g : X \rightarrow Y$ se dice que son isótopos si existe una homotopía diferenciable $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ de f en g tal que para todo $t \in [0, 1]$, la aplicación $F_t : X \rightarrow F_t(X)$ es un difeomorfismo ($F_t(X)$ es un abierto de \mathbb{R}^n).

Se prueban los siguientes lemas auxiliares:

Lema 4.32. Toda aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con determinante positivo es isótopa a la identidad.

Demostración. Se supone conocido el hecho de que dadas dos matrices con determinante positivo, siempre hay un camino diferenciable que las une (ver [10], pág. 48, ej. 31), es decir, que el subespacio $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$ de $GL(n, \mathbb{R})$ es conexo por caminos diferenciables.

Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal tal que $L(x) = Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, donde $A \in \mathcal{H}$. Existe entonces, en virtud del comentario anterior, un camino diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $\alpha(0) = id_{\mathbb{R}^n}$ y $\alpha(1) = A$. Se considera entonces la aplicación

$$F : \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (a, t) \longmapsto (\alpha(t))(a),$$

que es diferenciable por serlo α y, puesto que $\det \alpha(t) \neq 0$, F_t es un difeomorfismo para todo t . Además, es claro que $F_0 = id_{\mathbb{R}^n}$ y $F_1 = L$, lo que permite concluir que L e $id_{\mathbb{R}^n}$ son isótopas. \square

Lema 4.33. Todo difeomorfismo $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde U es un abierto convexo de \mathbb{R}^n , que preserve la orientación es isótopo a la identidad.

Demostración. Se prueba en primer lugar que f y $(df)_0$ son isótopas.

Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $f(0) = 0$. La diferencial de f en 0 se puede escribir como $(df)_0(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(tx)/t$. Se define entonces la siguiente aplicación,

$$F : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ dada por } \begin{cases} F(x, t) = f(tx)/t & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ F(x, 0) = (df)_0(x) \end{cases},$$

(donde no hay problemas de definición pues U es convexo) que es una homotopía entre los difeomorfismos f y $(df)_0(x)$. Además, de la definición de F es claro que F_t es un difeomorfismo para todo t . En consecuencia, basta probar que F es diferenciable para deducir que f es isótopa a $(df)_0$.

Por ser f diferenciable y $f(0) = 0$, se tiene en un entorno de 0 que

$$f(x) = x_1 g_1(x) + \cdots + x_n g_n(x),$$

donde g_1, \dots, g_n son las correspondientes aplicaciones diferenciables. Por tanto

$$F(x, t) = x_1 g_1(tx) + \cdots + x_n g_n(tx)$$

para todo $t \in [0, 1]$, luego F es diferenciable y por lo tanto f y $(df)_0$ son isótopas.

Para concluir basta aplicar el lema anterior a $(df)_0$, cuyo determinante es positivo por conservar f la orientación, y tener en cuenta que ser isótopos es una relación de equivalencia. \square

Se prueba en primer lugar el resultado buscado para abiertos de \mathbb{R}^3 , donde v^ϕ se corresponde con el análogo a la definición dada en (4.21).

Lema 4.34. Sea $\phi : O \rightarrow O'$ un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^3 , donde O es además convexo. Entonces, si v es un campo vectorial definido en O y p es uno de sus ceros aislados, se tiene que:

$$i(v, p) = i(v^\phi, \phi(p))$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad se toma $p = 0 \in O$ y $\phi(0) = 0 \in O'$. En primer lugar se prueba el caso en que ϕ preserve la orientación.

De acuerdo con el lema 4.33, ϕ es isótopo a la identidad, esto es, existe una aplicación $F : O \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, tomando como es habitual $F_t(p) = F(p, t)$, verifica:

- $F_0 = id$ y $F_1 = \phi$,
- Para todo t se tiene que $F_t : O \rightarrow F_t(O)$, donde $F_t(O)$ es abierto de \mathbb{R}^3 , es un difeomorfismo
- Para todo t se tiene que $F_t(0) = 0$

Sea $v : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo con un posible cero aislado en un punto p , y sea $v^\phi = d\phi \circ v \circ \phi^{-1}$ el campo asociado en O' . Para cada t se tiene en $F_t(O)$ el campo

$$v_t = v^{F_t} = dF_t \circ v \circ F_t^{-1}, \text{ con } v_0 = v \text{ y } v_1 = v^\phi$$

Si v no se anula en $O \setminus \{0\}$, entonces v_t no se anula en $F_t(O) \setminus F_t(0) = F_t(O) \setminus \{0\}$, luego existe un $r > 0$ tal que $\mathbb{S}_r^2 \subset F_t(O)$. De hecho, se puede suponer este r común a todos los $F_t(O)$ pues como I es compacto, la función continua

$$t \mapsto r_t = d(0, \mathbb{R}^3 \setminus F_t(O)) > 0,$$

alcanza el mínimo que es, por tanto, mayor que cero. En este caso se puede definir la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_r^2 \times I &\longrightarrow \mathbb{S}^2, \\ (p, t) &\longmapsto \frac{v^t}{\|v^t\|}(p), \end{aligned}$$

que es diferenciable por las propiedades de diferenciabilidad de todo lo anterior y es una homotopía entre $v/\|v\|$ y $v^\phi/\|v^\phi\|$, luego ambas han de tener el mismo grado en virtud del lema 4.13 y por tanto $i(v, 0) = i(v^\phi, 0)$.

Para el caso en que el difeomorfismo revierta la orientación basta considerar el caso especial de una reflexión ρ , pues cualquier difeomorfismo que revierte la orientación puede componerse con alguna reflexión adecuada para que así la conserve. En este caso se tiene que al ser una aplicación lineal, $v^\rho = \rho \circ v \circ \rho^{-1}$ y es evidente de la propiedad (c) de la proposición 4.2 que el grado de $v^\rho/\|v^\rho\|$ en la esfera unidad es idéntico al de $v/\|v\|$. \square

Basta acudir al *ejemplo 4.22* para concluir el resultado para abiertos de \mathbb{R}^2 .

Por tanto, la *definición 4.30* es consistente y reduce el cálculo del índice a cartas locales. Para ello, se acude al cálculo en coordenadas como se indica a continuación.

Sea S una superficie compacta y orientada, $p \in S$ un punto de ella y $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tangente. Sea $\phi : U \subset S \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^2$, una carta local en p . Puesto que para todo $p \in U$, $v(p) \in T_p(S)$, en las coordenadas $\{\frac{\partial}{\partial u_1}|_p, \frac{\partial}{\partial u_2}|_p\}$, donde $(u_1, u_2) = \phi(p)$ y $\frac{\partial}{\partial u_i}|_p = (d\phi^{-1})_{(u_1, u_2)}(e_i)$, se tiene que

$$v(p) = \frac{\partial}{\partial u_1} \Big|_p v_1(p) + \frac{\partial}{\partial u_2} \Big|_p v_2(p),$$

donde las funciones $v_1, v_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables (ver [5], pág. 12). Entonces el campo $v^\phi : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de (4.21) resulta, en las coordenadas (u_1, u_2) ,

$$v^\phi(u_1, u_2) = (d\phi)_{\phi^{-1}(u_1, u_2)}(v(\phi^{-1}(u_1, u_2))) = ((v_1 \circ \phi^{-1})(u_1, u_2), (v_2 \circ \phi^{-1})(u_1, u_2)).$$

Se presenta el siguiente diagrama auxiliar, que ayuda a entender la construcción del campo v^ϕ .

$$\begin{array}{ccc} p \in U \subset S & \xrightarrow{v} & \mathbb{R}^3 \\ \phi \downarrow & & \\ \phi(U) \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{v^\phi} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Entonces, para calcular índices $i(v, p)$, se calcula el del campo v^ϕ en $\phi(p)$, donde podemos suponer $\phi(p) = 0$. Esto, en definitiva, se trata de considerar la aplicación

$$f = \frac{v^\phi}{\|v^\phi\|} : \mathbb{S}_r^1 \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

donde $v^\phi : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene componentes $(v_1 \circ \phi^{-1}, v_2 \circ \phi^{-1})$ y calcular su grado, es decir, la imagen por el homomorfismo inducido $f_* : \pi_1(\mathbb{S}_r^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$ del generador $[\alpha]$ de $\pi_1(\mathbb{S}_r^1)$, donde α consiste en dar una vuelta completa en sentido antihorario en \mathbb{S}_r^1 .

Concretamente, existe una única aplicación continua $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(re^{2\pi it}) = e^{2\pi i\theta(t)}$ y $\theta(0) = 0$, y entonces $\deg f = \theta(1)$, es decir, el grado de f coincide con el “número de vueltas que f da a la circunferencia en sentido antihorario”.

Ejemplo 4.35. Para $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dado por $f(p) = p$ se tiene $\sigma(t) = t$, luego $\deg f = \theta(1) = 1$ y es claro a partir de la *figura 4.2* que coincide con que el campo f definido en \mathbb{S}^1 da una vuelta a la circunferencia unidad (en la figura, que aparece en la siguiente página, el módulo de los vectores no está a escala, solo es representativa su dirección y sentido).

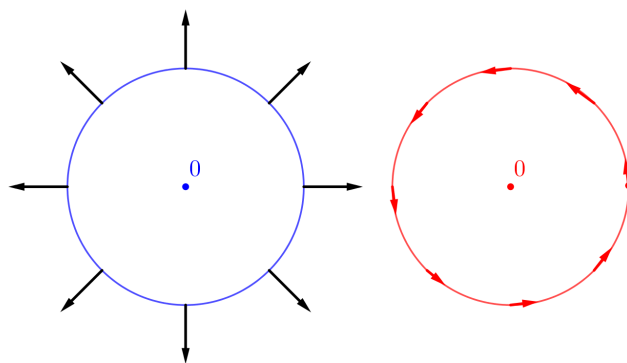


Figura 4.2: Cálculo del índice para una función $f = id : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $deg f = 1$

Se adjuntan dos imágenes más que ilustran el cálculo del índice para campos $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ de diferente naturaleza.

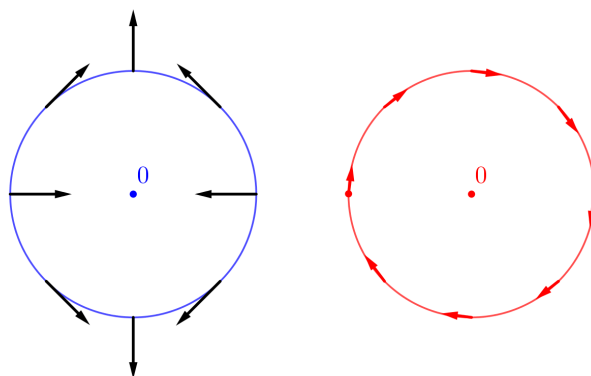


Figura 4.3: Cálculo del índice para un campo $f_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $deg f = -1$.

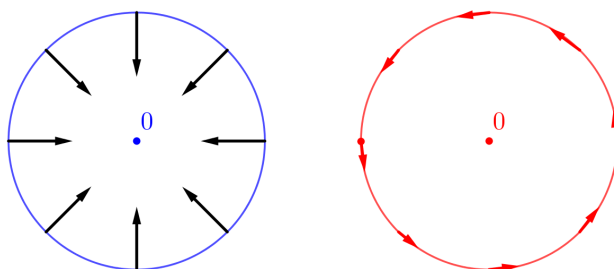


Figura 4.4: Cálculo del índice para un campo $f_3 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $deg f = 1$.

Capítulo 5

El Teorema de Poincaré-Hopf

Como parte final del trabajo demostraremos el teorema de Poincaré-Hopf para superficies en \mathbb{R}^3 . Para ello, es necesario, en primer lugar, introducir la característica de Euler Poincaré.

De entre las diversas formas de introducir la característica de Euler-Poincaré, se escoge la basada en grupos de homología simplicial. Los grupos de homología consisten, *grosso modo*, en secuencias de grupos abelianos asociados a ciertos espacios que permiten estudiar la existencia de homeomorfismos entre ellos en términos de isomorfismos de grupos. Por tanto, se presentan en este capítulo los conceptos (pertenecientes al campo de la topología algebraica) necesarios para definir la característica de Euler-Poincaré de esta manera sin apenas demostraciones.

En la *sección 5.1* se introducen las definiciones y notaciones básicas referentes a símlices en \mathbb{R}^n , para en la *sección 5.2* definir los grupos de homología simplicial.

Posteriormente se introduce la característica de Euler-Poincaré y se prueba su invarianza topológica (*sección 5.3*) a partir de la invarianza topológica de los grupos de homología, resultado que nos limitamos a enunciar.

Una vez se dispone de estas herramientas topológicas, las trasladamos al campo de la geometría de superficies a partir del *teorema de existencia de triangulaciones*, en la *sección 5.4*. Esto, junto con la prueba del apartado anterior, permite dar una definición consistente de la característica de Euler Poincaré de superficies compactas.

En base a esta definición, se indica en la *sección 5.5* la existencia de un campo tangente a una superficie cuya suma de índices en sus ceros aislados resulte exactamente la característica de Euler-Poincaré, el cual se utiliza como último ingrediente necesario para concluir la idea de demostración del *teorema de Poincaré-Hopf* en la *sección 5.6*.

Se toma como referencia principal en la elaboración de este capítulo [11], mientras que los abundantes resultados pertenecientes a la teoría de grupos que aquí aparecen pueden consultarse en [12].

5.1. Símplices en \mathbb{R}^n . Complejos simpliciales

Definición 5.1. Dado un conjunto $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ de $m + 1$ puntos afínmente independientes en \mathbb{R}^n ($m \leq n$), se define el m -símplice σ^m engendrado por v_0, \dots, v_m como la envolvente convexa de los puntos v_0, \dots, v_m , es decir,

$$\sigma^m = \left\{ x = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i, \sum \lambda_i = 1 \right\}.$$

Notación 5.2. En el caso de la definición anterior, para dejar claro cuales son los puntos generadores del símplice σ^m se puede utilizar (sea $v = \{v_0, \dots, v_m\}$),

$$\sigma^m = \sigma^m(v) = \sigma^m(\{v_0, \dots, v_m\}).$$

Los puntos v_0, \dots, v_m se denominan vértices de σ^m y el número m se denomina dimensión de σ^m . Cualquier símplice engendrado por un subconjunto de v se denomina cara de σ^m .

En cuanto a su dimensión, los símplices σ^0 se denominan también vértices, los σ^1 se denominan segmentos y los σ^2 , triángulos.

Definición 5.3. Un complejo simplicial K es una familia (no necesariamente finita) de símplices en \mathbb{R}^n tal que:

- (1) Toda cara de un símplice de K está en K .
- (2) La intersección de dos símplices de K es una cara de cada uno de ellos.

Definición 5.4. Se define el poliedro de un complejo simplicial K como el subconjunto $|K| \subset \mathbb{R}^n$ dado por la unión de los símplices de K .

Considerando cada símplice como un espacio topológico con la topología inducida (topología de subespacio), se define una topología en $|K|$ considerando que un subconjunto C de $|K|$ es cerrado en $|K|$ si $A \cap \sigma$ es cerrado en σ para todo $\sigma \in K$. $|K|$ se denomina poliedro de K . En el caso en que K sea finito, esta topología es exactamente la de subespacio en \mathbb{R}^n .

5.2. Cadenas y grupos de homología

Para definir los grupos de homología es necesario en primer lugar introducir la idea de orientación de un símplice.

Definición 5.5. Sea $\sigma^p(\{v_0, \dots, v_p\})$ un símplice. Dadas dos ordenaciones de sus vértices, $(v_{i_0}, \dots, v_{i_p})$ y $(v_{j_0}, \dots, v_{j_p})$, se dice que están relacionadas si la diferencia entre ellas es una permutación par.

Proposición 5.6. La relación de la definición 5.5 es de equivalencia. Además, para un símplice σ de dimensión $\dim \sigma > 0$ existen dos clases de equivalencia únicas.

Definición 5.7. Sea σ un símplice de dimensión $\dim \sigma > 0$. Cada una de las dos clases de equivalencia de la proposición se denomina *orientación* (en el caso en que $\dim \sigma = 0$, se tiene una sola ordenación posible y por lo tanto una única orientación). Un *símplice orientado* es un símplice $\sigma^p(\{v_0, \dots, v_p\})$ junto con una orientación. Si la orientación fuese la dada por una ordenación (v_0, \dots, v_p) , se denota el *símplice orientado* por $[v_0, \dots, v_p]$.

Notación 5.8. Cuando el contexto lo permita, se utilizará σ para denotar un símplice orientado y $-\sigma$ para denotar el mismo símplice equipado con la otra orientación posible.

Definición 5.9. Sea K un complejo simplicial. Una p -cadena en K es una función c definida en el conjunto de p -símplices orientados de K en \mathbb{Z} que verifica:

- (1) $c(\sigma) = -c(\sigma')$ si σ y σ' representan orientaciones distintas del mismo símplice.
- (2) $c(\sigma) = 0$ para todo p -símplice orientado σ excepto para un número finito de ellos.

Definiendo la suma de cadenas como $(c + c')(\sigma) = c(\sigma) + c'(\sigma) \in \mathbb{Z}$ se tiene que las p -cadenas presentan una estructura de grupo abeliano, denotado por $C_p(K)$. Este se denomina *grupo de p -cadenas orientadas de K* . Para $p < 0$ ó $p > \dim K$, se denota por $C_p(K)$ al grupo trivial.

Definición 5.10. Dado un símplice orientado σ , la *cadena elemental c asociada a σ* se define a partir de las tres siguientes propiedades:

- (1) $c(\sigma) = 1$.
- (2) $c(-\sigma) = -1$.
- (3) $c(\tau) = 0$ para todos los demás símplices orientados τ .

La *cadena elemental asociada* a un p -símplice orientado σ se denota por c_σ .

Proposición 5.11. $C_p(K)$ es el grupo abeliano libre de base el conjunto de cadenas elementales asociadas a los p -símplices de K dotando a cada uno de ellos de una orientación.

Demostración. Se elige una orientación de cada p -símplice de K . Dada una p -cadena cualquiera c , dado que $c(\sigma) = 0$ salvo un número finito de veces, tomando las cadenas elementales c_{σ_k} de los símplices para los cuales $c(\sigma_k) \neq 0$ es claro que c se puede escribir como (la suma es finita y por lo tanto está bien definida):

$$c = \sum_k n_k c_{\sigma_k}$$

donde la expresión es cierta $\iff n_k = c(\sigma_k)$, y por tanto es única.

Por otra parte, no es difícil comprobar que una definición de c de este tipo verifica las propiedades (1) y (2) expresadas en la *definición 5.9*, ya que, en primer lugar, c verifica para todo σ_k que si $c(\sigma_k) = n_k$ entonces

$$c(-\sigma_k) = n_k c_{\sigma_k}(-\sigma_k) = -n_k.$$

Además, $c(\sigma) = 0$ para todos los símlices σ_k tales que $n_k = 0$, es decir, solo es no-nula para un número finito de ellos. Esto concluye la prueba. \square

Se puede ahora introducir el operador borde a partir de su definición sobre los elementos de la base dada para $C_p(K)$:

Definición 5.12. Sea K un complejo simplicial. Sea $0 < p \in \mathbb{Z}$ y $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ un p -símlice orientado. Se define el *operador borde* como el único homomorfismo de grupos $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ dado por

$$\partial_p c_\sigma = \partial_p c_{[v_0, \dots, v_p]} = \sum_{i=0}^p (-1)^i c_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]}.$$

Donde \hat{v}_i significa que el vértice v_i se elimina de los que generan el símlice (y por lo tanto de la ordenación).

Observación 5.13. *Una cuenta pesada pero elemental prueba que en efecto, con la definición anterior, se tiene que $\partial_p c_\sigma \in C_p(K)$.*

Proposición 5.14. Siguiendo la notación anterior, se tiene que

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0.$$

Esta última proposición permite introducir los grupos de homología como sigue:

Definición 5.15. El núcleo de $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ se denomina grupo de p -ciclos y se denota por $Z_p(K)$. La imagen de $\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \rightarrow C_p(K)$ es el subgrupo de p -bordes y se denota por $B_p(K)$. En virtud de la proposición anterior, cada p -borde resulta ser un p -ciclo, esto es, $B_p(K) \subset Z_p(K)$, de manera que se puede definir

$$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K),$$

que recibe el nombre de p -ésimo grupo de homología simplicial de K .

Observación 5.16. *Si K es un complejo simplicial finito, entonces $C_p(K)$ es un grupo libre de rango finito, lo cual implica que $Z_p(K)$ tiene también rango finito, pues $Z_p(K) \subset C_p(K)$. En consecuencia se tiene que el grupo de homología $H_p(K)$ ha de ser un grupo finitamente generado, lo que permite hablar sobre su número de Betti, definido a partir del teorema fundamental de estructura de grupos abelianos finitamente generados, cuya demostración se puede encontrar en [11], págs 24-25.*

Teorema 5.17 (Teorema de estructura de grupos abelianos finitamente generados). Dado un grupo abeliano G finitamente generado, sea T su subgrupo de torsión:

- (a) Existe un subgrupo abeliano libre H de G de rango β finito tal que

$$G = H \oplus T.$$

- (b) Existen grupos cíclicos finitos T_1, \dots, T_k donde T_i es de orden $t_i > 1$, tal que t_i divide a t_{i+1} para todo $1 \leq i \leq k-1$ y

$$T = T_1 \oplus \dots \oplus T_k.$$

- (c) Los números β y t_1, \dots, t_k están determinados de manera única por G .

El número β se denomina *número de Betti de G* (nótese que β es el rango del grupo libre abeliano $G/T \cong H$) y t_1, \dots, t_k se denominan *coeficientes de torsión* o *factores invariantes* de G .

A partir del operador borde introducido en la *definición 5.12* se tiene la siguiente sucesión de grupos abelianos y homomorfismos

$$\{C_p, \partial_p\} : \dots \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots,$$

que constituye lo que se denomina un *complejo de cadenas*. A continuación se presenta una visión más general para poder llegar al resultado buscado.

Definición 5.18. Un complejo de cadenas \mathcal{C} es una familia $\{C_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ de grupos abelianos y homomorfismos $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$, que verifican que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Si C_p es libre para todo p se dice que \mathcal{C} es *libre*. En este caso, como en la *observación 5.13*, tiene sentido definir el *p -ésimo grupo de homología del complejo de cadenas \mathcal{C}* , dado por

$$H_p(\mathcal{C}) = \ker \partial_p / \text{im } \partial_{p+1}.$$

Dados dos complejos de cadenas $\mathcal{C} = \{C_p, \partial_p\}$ y $\mathcal{C}' = \{C'_p, \partial'_p\}$, una *aplicación de cadenas* $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es una familia de homomorfismos $\phi_p : C_p \rightarrow C'_p$ tal que $\partial'_p \circ \phi_p = \phi_{p-1} \circ \partial_p$ para todo p .

Proposición 5.19. Una aplicación de cadenas $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ entre dos complejos de cadenas \mathcal{C} y \mathcal{C}' induce homomorfismos

$$(\phi_*)_p : H_p(\mathcal{C}) \rightarrow H_p(\mathcal{C}') \text{ dados por } (\phi_*)_p(c + \text{im } \partial_{p+1}) = \phi_p(c) + \text{im } \partial'_{p+1}.$$

entre los p -grupos de homología correspondientes. Además se verifica que:

- (a) La aplicación identidad id en \mathcal{C} es una *aplicación de cadenas*, e $(id_*)_p$ es también la identidad en los grupos $H_p(\mathcal{C})$.
- (b) Si $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ y $\psi : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ son *aplicaciones de cadenas*, entonces $\psi \circ \phi$ es una *aplicación de cadenas* y $(\psi\phi)_* = \psi_* \phi_*$.

5.3. Invarianza topológica de la característica de Euler-Poincaré

El siguiente resultado servirá para probar la invarianza topológica de la característica de Euler-Poincaré.

Teorema 5.20 (De la invarianza topológica de los grupos de homología). Dados dos poliedros $|K|$ y $|L|$ y un homeomorfismo topológico $h : |K| \rightarrow |L|$, existe un isomorfismo de grupos h_* entre los p -grupos de homología de K y L ,

$$h_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L).$$

La demostración se basa en una construcción laboriosa que se escapa de las técnicas de este trabajo. Puede encontrarse en [11], págs. 80-102.

Observación 5.21. *Dado un grupo abeliano libre G con base e_1, \dots, e_n y un endomorfismo $\varphi : G \rightarrow G$, se puede definir la matriz correspondiente a φ respecto a esta base. Por lo tanto, tiene sentido hablar de la traza de φ , que no depende de la elección de la base.*

Observación 5.22. *Dado un complejo simplicial finito K , sea $\phi : C_p(K) \rightarrow C_p(K)$ una aplicación que satisface las condiciones impuestas a los homomorfismos ϕ_p de la definición 5.18 (lo que significa que induce un endomorfismo ϕ_* en $H_p(K)$).*

Como K es finito, $C_p(K)$ es libre de rango finito y por la observación anterior está definida la traza de ϕ , que se denota por $tr(\phi, C_p(K))$.

Por otra parte, aunque $H_p(K)$ no es necesariamente libre, si que es finitamente generado, lo que permite aplicar el teorema 5.17 para concluir que el grupo $H_p(K)/T_p(K)$ es libre. Entonces, el endomorfismo que ϕ_ induce sobre $H_p(K)/T_p(K)$ (al que se denota de la misma manera) es homomorfismo entre grupos abelianos libres, por lo que también tiene traza bien definida $tr(\phi_*, H_p(K)/T_p(K))$.*

Se prueba el siguiente resultado:

Teorema 5.23 (De la traza, de Hopf). Dado un complejo simplicial K , sea $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ una aplicación de cadenas en $\mathcal{C} = \{C_p(K), \partial_p\}_{p>0}$, donde ∂_p son los correspondientes operadores borde. Se denotan también por ϕ los homomorfismos de grupos $\phi : C_p(K) \rightarrow C_p(K)$ que la componen, sin especificar el subíndice p . Entonces se verifica que

$$\sum_p (-1)^p tr(\phi, C_p(K)) = \sum_p (-1)^p tr(\phi_*, H_p(K)/T_p(K)),$$

donde ϕ_* se define a partir de ϕ como describe la observación anterior

Demostración. Paso 1: Sea G un grupo abeliano libre de rango finito y H un subgrupo tal que G/H es abeliano libre. Dado un endomorfismo ϕ en G que lleve H en sí mismo, vamos a probar que

$$tr(\phi, G) = tr(\phi', G/H) + tr(\phi'', H),$$

donde ϕ' y ϕ'' son los homomorfismos inducidos naturalmente sobre los grupos correspondientes. Al ser todos los grupos considerados abelianos de rango finito, se consideran las bases y las matrices siguientes:

(a.1) Para G/H se considera una base $\{\alpha_1 + H, \dots, \alpha_n + H\}$ y la matriz A de ϕ' en esta base, es decir,

$$\phi'(\alpha_j + H) = \sum_i a_{ij}(\alpha_i + H).$$

(b.1) Para H se considera una base $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ y la matriz B de ϕ'' en esta base, es decir,

$$\phi''(\beta_j) = \sum_i b_{ij}\beta_i.$$

Se tiene que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p\}$ es una base para G . La matriz C en esta base es

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & B \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que

$$tr(C) = tr(A) + tr(B) \Rightarrow tr(\phi, G) = tr(\phi', G/H) + tr(\phi'', H).$$

Paso 2: Se consideran los grupos: $C_p(K)$, $Z_p(K)$, $B_p(K)$ y $W_p(K)$, donde este último se corresponde con aquellas cadenas tales que alguno de sus múltiplos es p -borde. Entonces se verifica que

$$B_p(K) \subset W_p(K) \subset Z_p(K) \subset C_p(K).$$

Como ϕ es una *aplicación de cadenas*, los homomorfismos $\phi : C_p(K) \rightarrow C_p(K)$ envían cada uno de estos grupos en si mismo por la propiedad $\partial_p \circ \phi = \phi \circ \partial_p$:

(a.2) Si $c \in B_p(K)$, entonces existe $c' \in C_{p+1}(K)$ tal que $c = \partial_{p+1}(c')$, por tanto, $\phi(c) = \phi(\partial_{p+1}(c')) = \partial_{p+1}(\phi(c')) \in Im(\partial_{p+1}) = B_p(K)$.

(b.2) Para $W_p(K)$ el resultado es inmediato una vez verificado para $B_p(K)$. Sea $c \in W_p(K)$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nc \in B_p(K)$, lo que significa que $n\phi(c)$ será su imagen y estará en $B_p(K)$, es decir, $\phi(c) \in W_p(K)$.

(c.2) Si $c \in Z_p(K)$, entonces $\partial_p(\phi(c)) = \phi(\partial_p(c)) = \phi(0) = 0$ por ser ϕ homomorfismo.

Se prueba a continuación que los grupos $C_p(K)/Z_p(K)$ y $Z_p(K)/W_p(K)$ son libres, de modo que a partir del paso 1 se pueda establecer que

$$tr(\phi, C_p(K)) = tr(\phi, C_p(K)/Z_p(K)) + tr(\phi, Z_p(K)/W_p(K)) + tr(\phi, W_p(K)), \quad (5.1)$$

donde se pasa a denotar todos los endomorfismos (en el grupo que se corresponda dado el contexto) por ϕ .

PASO 3: El homomorfismo $\partial_p^* : C_p(K) \rightarrow B_{p-1}(K)$ es suprayectivo y su núcleo es $Z_p(K)$. En consecuencia, $C_p(K)/Z_p(K)$ es isomorfo a $B_{p-1}(K)$. Si se denota por $\psi : C_p(K)/Z_p(K) \rightarrow B_{p-1}$ dicho isomorfismo, entonces se tiene que,

$$\text{tr}(\phi, C_p/Z_p) = \text{tr}(\psi^{-1} \circ \phi \circ \psi, B_{p-1}) = \text{tr}(\phi, B_{p-1}), \quad (5.2)$$

(donde se ha de tener cuidado en la denominación de ϕ , que en este caso se corresponde con los endomorfismos inducidos por la aplicación de cadenas en $C_p(K)/Z_p(K)$ y B_{p-1}).

De aquí en adelante se suaviza la notación dejando de indicar que los grupos definidos se corresponden con el complejo K .

Paso 4. Se consideran las aplicaciones proyección canónica

$$j_1 : Z_p \rightarrow Z_p/B_p = H_p \quad \text{y} \quad j_2 : H_p \rightarrow H_p/T_p.$$

Ambas son sobreyectivas y por lo tanto lo es su composición. Veamos que el núcleo de la composición es W_p . Por una parte, si c verifica que al pasarlo por la aplicación compuesta es $0 \in H_p/T_p$, entonces la imagen de c por j_1 ha de pertenecer al grupo de torsión de Z_p/B_p , esto es, debe existir algún entero n tal que $nj_1(c) = 0 \in Z_p/B_p$, es decir, que nc pertenezca a B_p . Esto es justo la definición de los elementos de W_p . Para probar el recíproco solo hace falta darse cuenta de que si $c \in W_p$ entonces $j_1(c) = 0$ y por lo tanto la composición resulta igual a cero también.

Por tanto, se tiene que Z_p/W_p y H_p/T_p son isomorfos, lo que resulta en que el primero ha de ser libre (pues el segundo ya lo es). Argumentando como en el paso anterior se llega a

$$\text{tr}(\phi, Z_p/W_p) = \text{tr}(\phi_*, H_p/T_p). \quad (5.3)$$

Paso 5: Puesto que $B_p \subset W_p$ son libres, se puede elegir una base $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de W_p para la cual existen unos enteros $m_1, \dots, m_k \geq 1$ tal que $m_1\alpha_1, \dots, m_k\alpha_k$ forman una base de B_p . Es claro que el cociente W_p/B_p es un grupo de torsión, pues para todo $c \in W_p$ se verifica que existe un entero tal que $nc \in B_p$. De esta manera se puede afirmar $k = n$, pues en caso contrario, $k < n$, debería haber algún elemento de la base de W_p que no fuera de torsión.

Por tanto, la traza de ϕ en B_p resulta

$$\text{tr}(\phi, B_p) = \sum b_{ii}, \quad \text{donde se ha definido} \quad \phi(m_j\alpha_j) = \sum_i b_{ij}(m_i\alpha_i).$$

Por otra parte, la traza de ϕ en W_p resulta

$$\text{tr}(\phi, W_p) = \sum a_{ii}, \quad \text{donde se ha definido} \quad \phi(\alpha_j) = \sum_i a_{ij}\alpha_i.$$

Multiplicando $\phi(\alpha_j)$ por m_j se obtiene $m_j a_{ij} = b_{ij} m_i$, luego $a_{ii} = b_{ii}$ y por lo tanto se tiene que

$$\text{tr}(\phi, W_p) = \text{tr}(\phi, B_p). \quad (5.4)$$

Paso 6: Sustituyendo los resultados de las relaciones (5.2), (5.3) y (5.4) en (5.1) se

tiene que

$$\text{tr}(\phi, C_p) = \text{tr}(\phi, B_{p-1}) + \text{tr}(\phi_*, H_p/T_p) + \text{tr}(\phi, B_p).$$

De donde se deduce inmediatamente el resultado multiplicando por $(-1)^p$ y sumando para todos los p (pues el primer y el último término cancelan por pares). \square

Definición 5.24 (Característica de Euler-Poincaré). Se define la *característica de Euler-Poincaré* de un complejo simplicial finito K como la suma alterna del número de simplices de K de cada dimensión, o lo que es lo mismo,

$$\chi(K) = \sum (-1)^p k_p,$$

donde k_p es el número de simplices de dimensión p de K , es decir, el rango de $C_p(K)$.

Proposición 5.25. Dado un complejo simplicial finito K , sea

$$\beta_p = \text{rank} (H_p(K)/T_p(K))$$

el número de Betti de $H_p(K)$. Entonces se verifica

$$\chi(K) = \sum_p (-1)^p \beta_p.$$

Demostración. Por definición

$$\chi(K) = \sum (-1)^p k_p = \sum (-1)^p \text{rank}(C_p(K)).$$

Se considera entonces $id : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ con $\mathcal{C} = \{C_p(K), \partial_p\}_{p>0}$ siendo ∂_p el correspondiente operador borde, la aplicación identidad como aplicación de cadenas, como expresa el punto (a) de la *proposición 5.19*. Se verifica $\text{tr}(id, C_p(K)) = \text{rank}(C_p(K))$ para todo p . Los endomorfismos id_* en $H_p(K)$ y en $H_p(K)/T_p(K)$ son también la identidad. En consecuencia

$$\text{tr}(id_*, H_p(K)/T_p(K)) = \text{rank}(H_p(K)/T_p(K)) = \beta_p.$$

Para concluir, acudiendo al *teorema 5.23* se tiene

$$\chi(K) = \sum (-1)^p \text{rank}(C_p(K)) = \sum (-1)^p \text{tr}(\phi_*, H_p(K)/T_p(K)) = \sum (-1)^p \beta_p.$$

\square

Corolario 5.26 (De la invarianza topológica de la característica de Euler-Poincaré). Dados dos complejos simpliciales finitos K y L , sus correspondientes poliedros $|K|$ y $|L|$ y un homeomorfismo topológico $h : |K| \rightarrow |L|$, se tiene que

$$\chi(K) = \chi(L)$$

Demostración. Se puede aplicar el *teorema 5.20* para asegurar que existen isomorfismos entre los p -grupos de homología $H_p(K)$ y $H_p(L)$ para todo $0 < p \in \mathbb{Z}$. En

consecuencia, los números de Betti de cada uno de los respectivos p -grupos de homología $\beta(H_p(K)) = \text{rank}(H_p(K)/T_p(K))$ y $\beta(L_p(K)) = \text{rank}(H_p(L)/T_p(L))$ coinciden para todo p . Aplicando la *proposición 5.24* se concluye el resultado. \square

5.4. Característica de Euler-Poincaré de una superficie compacta

Definición 5.27. Una *triangulación* de una superficie S es un homeomorfismo $h : |K| \rightarrow S$, donde $|K|$ es el poliedro de un complejo simplicial finito $K \subset \mathbb{R}^3$ formado por símplices de dimensión $m \leq 2$.

Observación 5.28. Dado un poliedro como el de la definición anterior se tiene que, denotando por V el número de vértices, por A el número de aristas y por C el número de triángulos de K , entonces,

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^2 (-1)^p \text{rank}(C_p(K)) = V - A + C,$$

lo cual recuerda a la afamada fórmula de Euler.

El siguiente resultado garantiza la existencia de triangulaciones en superficies compactas, se puede encontrar una demostración de este en [13], págs. 44-48.

Teorema 5.29 (De triangulación de superficies compactas). Para toda superficie S compacta existe una triangulación de S .

A partir del *corolario 5.26* es claro que si se tienen dos triangulaciones $h_1 : |K_1| \rightarrow S$, $h_2 : |K_2| \rightarrow S$ de una superficie S , entonces $\chi(K_1) = \chi(K_2)$. Por lo tanto, puesto que el teorema anterior afirma que para cualquier superficie compacta existe al menos una triangulación, tiene sentido la siguiente definición:

Definición 5.30 (Característica de Euler-Poincaré de una superficie compacta). Sea S una superficie compacta y $h : |K| \rightarrow S$ una triangulación de S . La *característica de Euler-Poincaré* de S se denota por $\chi(S)$ y se define como

$$\chi(S) = \chi(K),$$

donde $\chi(K)$ es la característica de Euler-Poincaré del complejo simplicial K .

5.5. El campo de Hopf

Se presenta en esta sección el *campo de Hopf*, un campo tangente a una superficie S compacta, definido a través de una triangulación, de modo que la suma de índices en los ceros aislados del campo en la superficie resulta ser la característica de Euler-Poincaré de la misma. Se sigue en esta sección la referencia [2], y se puede consultar la construcción del campo de Hopf en [14], pág. 202.

Definición 5.31. Dado un símplice $\sigma = (\{v_0, \dots, v_p\})$, se define el *baricentro* de σ como el punto

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} v_i.$$

Sea $h : |K| \rightarrow S$ una triangulación de S . Para cada símplice σ^i , $i = 0, 1, 2$, de K , se fija un baricentro, que se denota por $\hat{\sigma}^i$ (figura 5.1).

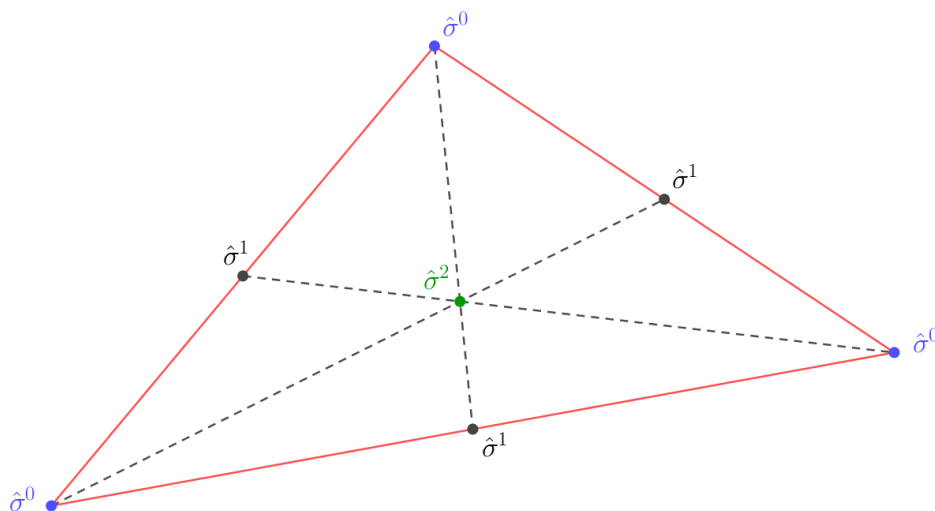


Figura 5.1: Descomposición baricéntrica de un triángulo de K .

Esta elección de baricentros permite definir una nueva triangulación K' de S (se conoce como descomposición baricéntrica) cuyos vértices son todos los baricentros $\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2$, sus aristas los segmentos $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]$, para $i < j$ y sus caras los triángulos $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2]$.

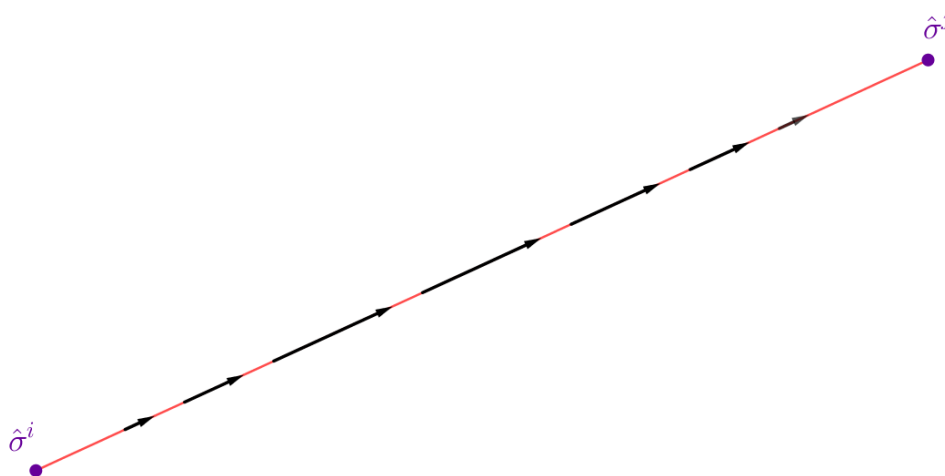


Figura 5.2: Campo de Hopf en un segmento $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]$.

El campo de Hopf se construye de modo que los únicos ceros aislados son los baricentros $\hat{\sigma}^i$, $i = 0, 1, 2$. Además, el campo es tangente a los segmentos $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]$, saliendo de $\hat{\sigma}^i$ y entrando en $\hat{\sigma}^j$ (teniendo en cuenta que $i < j$) y, puesto que debe anularse en ambos vértices, se construye de modo sea creciente hasta alcanzar un máximo en el segmento y posteriormente decrezca de nuevo (como se indica en la *figura 5.2*). En los triángulos $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2]$, el campo se construye como indica la *figura 5.3*, es decir, se extiende de manera diferenciable al interior respetando las propiedades que ha de satisfacer en los vértices $\hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}^3$ y en los segmentos que lo delimitan.

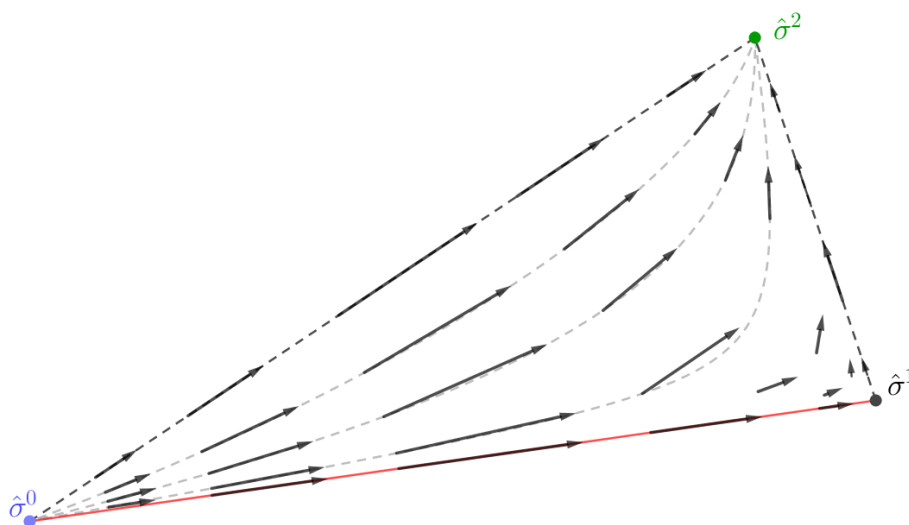


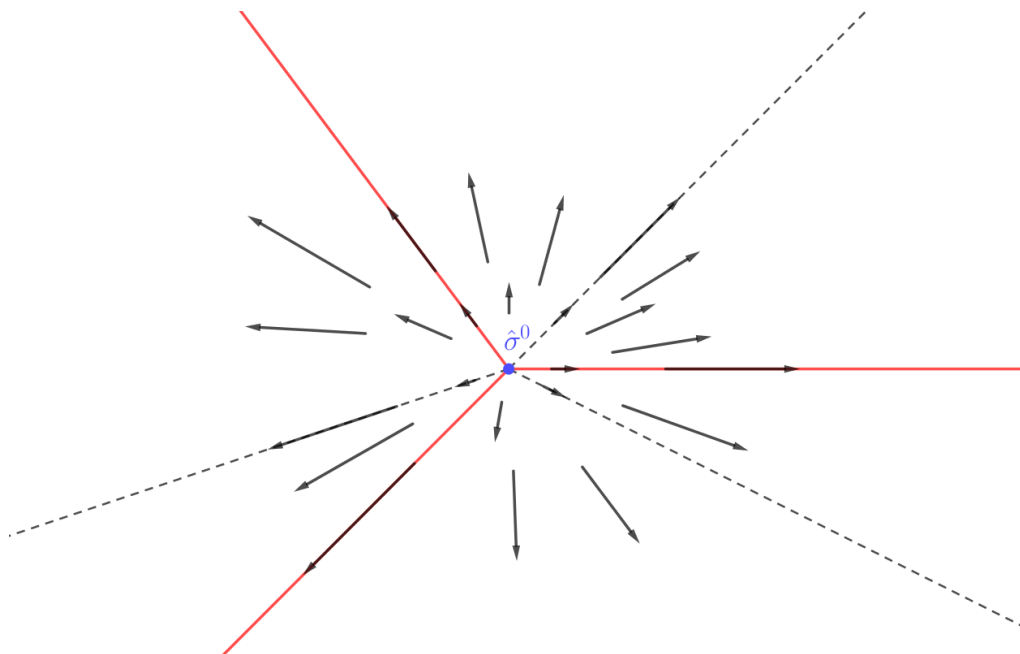
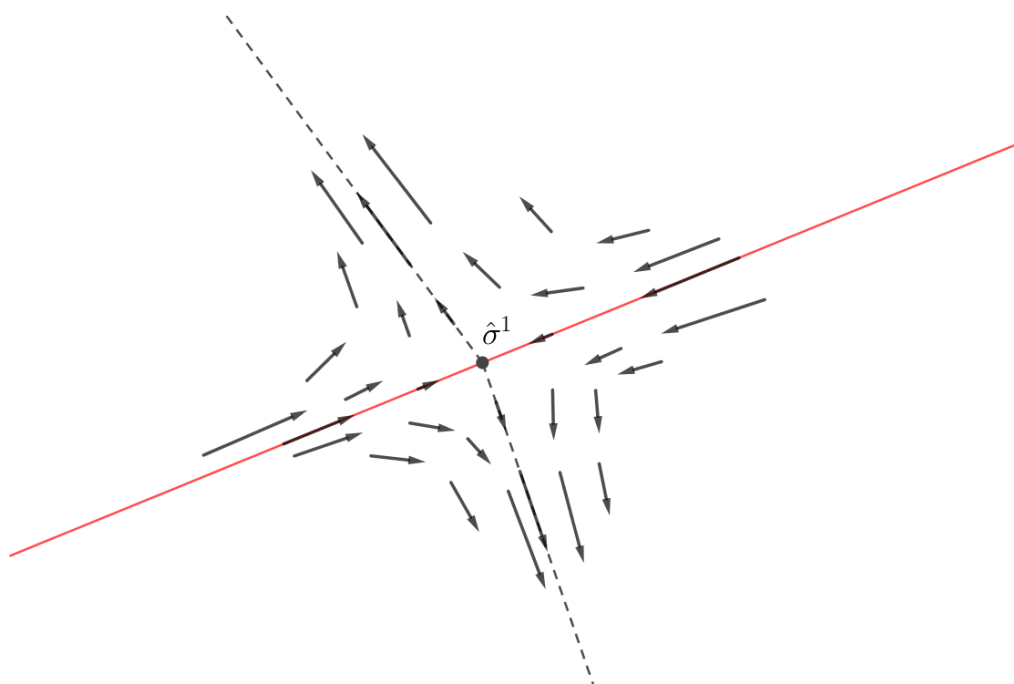
Figura 5.3: Campo de Hopf en los triángulos $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2]$ de K' . Se observa cómo el campo satisface las condiciones de anularse en los vértices y las descritas en la *figura 5.2* para los segmentos que forman la frontera.

La *figura 5.4* ilustra la situación local que presenta el campo de Hopf en un vértice del tipo $\hat{\sigma}^0$. Dado que todos los segmentos con origen en un vértice de este tipo presentan un vértice $\hat{\sigma}^1$ ó $\hat{\sigma}^2$ como extremo opuesto, se tiene que el campo es saliente a través de todo segmento. Además, tal y como se construye la extensión del campo a los triángulos, se puede deducir que el campo ha de ser como el indicado en la *figura*. Por tanto, acudiendo al cálculo local del grado, se presenta una situación similar a la observada en el *ejemplo 4.35* luego,

$$I(v, \hat{\sigma}^0) = 1. \quad (5.5)$$

En la *figura 5.5* se puede observar la forma del campo de Hopf en un vértice del tipo $\hat{\sigma}^1$ de K' . En este vértice confluyen 2 segmentos con extremos $\hat{\sigma}^0$, punteados en la *figura*, y otros 2 con $\hat{\sigma}^2$ como extremo opuesto, coloreados en rojo. Por lo tanto, en este tipo de vértices el campo presenta la situación local de la *figura* y es sencillo ver que como en la *figura 4.3*,

$$I(v, \hat{\sigma}^1) = -1. \quad (5.6)$$

Figura 5.4: Campo de Hopf en un vértice $\hat{\sigma}^0$ de K' .Figura 5.5: Campo de Hopf en un vértice $\hat{\sigma}^1$ de K' .

Por último, en la *figura 5.6* se presenta la situación local del campo de Hopf en un vértice del tipo $\hat{\sigma}^2$. Dado que todos los segmentos con origen en un vértice de este tipo tienen extremo opuesto $\hat{\sigma}^i$ con $i < 2$, el campo es saliente a lo largo de cada segmento. Es sencillo ver que en este caso, a partir del cálculo local del índice (ver *figura 4.4*),

$$I(v, \hat{\sigma}^2) = 1. \quad (5.7)$$

Teniendo en cuenta que a través de la descomposición K' llevada a cabo:

- Hay tantos baricentros $\hat{\sigma}^0$ como vértices en K (donde se recuerda que K es el símlice responsable de la triangulación inicial sobre la superficie S).
- Hay tantos baricentros $\hat{\sigma}^1$ como segmentos en K .
- Hay tantos baricentros $\hat{\sigma}^2$ como triángulos en K .

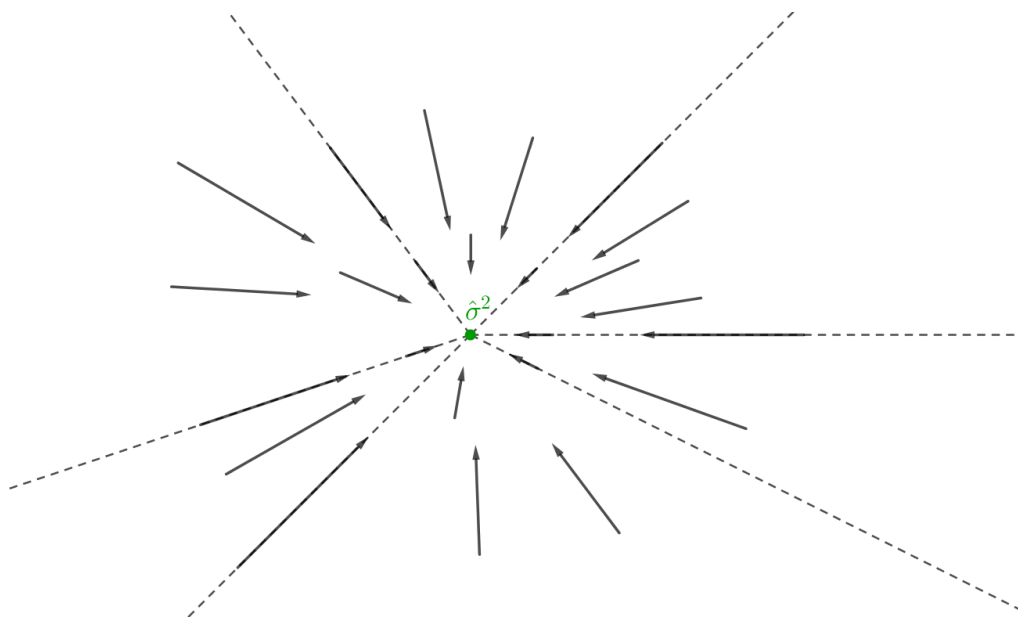


Figura 5.6: Campo de Hopf en un vértice $\hat{\sigma}^2$ de K' .

Se tiene que, a través de las ecuaciones (5.5), (5.6) y (5.7) la suma de los índices en los ceros aislados del campo de Hopf en la superficie S resulta

$$\sum_{j=0,1,2} i(v, \hat{\sigma}_l^j) = \sum_{\sigma_l^0} i(v, \hat{\sigma}_l^0) + \sum_{\sigma_l^1} i(v, \hat{\sigma}_l^1) + \sum_{\sigma_l^2} i(v, \hat{\sigma}_l^2) = \chi(K) = \chi(S),$$

donde los subíndices l denotan la indexación de todos los símlices de cada dimensión del complejo simplicial K .

5.6. El teorema de Poincaré-Hopf

Teorema 5.32 (De Poincaré-Hopf). Sea S una superficie compacta en \mathbb{R}^3 y $v : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo tangente cuyos ceros son todos aislados. Se tiene que

$$\sum_{p \in S} i(v, p) = \chi(S).$$

Demostración. Basta calcular $\sum_{p \in S} i(v, p)$ donde v es el campo de Hopf definido en la sección anterior a través de una triangulación $h : |K| \rightarrow S$ de S y aplicar el corolario 4.29. \square

Teorema 5.33 (De Gauss-Bonnet “clásico”). Sea S una superficie compacta en \mathbb{R}^3 . Se tiene que

$$\int_S K(p) dp = 2\pi\chi(S),$$

donde K es la *curvatura de Gauss* de la superficie S .

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior y la fórmula 4.16 a través de un campo tangente a S cuyos ceros son todos aislados, por ejemplo, a través del campo de Hopf. \square

El *teorema de Poincaré-Hopf* goza de una mayor generalidad que la de la versión aquí desarrollada. Se expone una formulación más global debida a J.-P. Brasselet [15].

En primer lugar, para el caso de superficies sin borde:

Teorema 5.34. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable de dimensión m , compacta y orientada, y v un campo vectorial continuo en M con un número finito de ceros aislados. Entonces se verifica que

$$\sum_{p \in \mathcal{C}} i(v, p) = \chi(M),$$

donde \mathcal{C} es el conjunto de ceros aislados del campo v en M y $\chi(M)$ es la característica de Euler-Poincaré de la variedad M .

Para el caso en que la variedad M sea orientada y con borde, Brasselet formula un teorema similar:

Teorema 5.35. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable de dimensión m , compacta, orientada y con borde ∂M , y sea v un campo vectorial sin ceros en un entorno U del borde ∂M . Entonces:

- (1) v puede extenderse al interior de M presentando un número finito de singularidades aisladas.
- (2) La suma de índices del campo v en sus ceros aislados en M es independiente de la extensión de v considerada. En otras palabras, la suma de índices del campo v en sus ceros aislados en M está determinada por el comportamiento en un entorno del borde ∂M .
- (3) Si v es un campo transversal a ∂M y que apunta hacia el exterior de M , entonces,

$$\sum_{p \in \mathcal{C}} i(v, p) = \chi(M),$$

donde \mathcal{C} es el conjunto de ceros aislados del campo v en M . En caso de que v apunte hacia el interior de M , entonces,

$$\sum_{p \in \mathcal{C}} i(v, p) = \chi(M) - \chi(\partial M),$$

donde $\chi(\partial M)$ es la característica de Euler-Poincaré del borde ∂M .

Bibliografía

- [1] S. Montiel y A. Ros, (1985). *Curves and surfaces* (2^a edición). American Mathematical Society & Real Sociedad Matemática Española.
- [2] J-P. Brasselet y T. B. Thuy, (2016). *Teorema de Poincaré-Hopf*. arXiv:1710.08764 [math.HO]
- [3] M.P do Carmo, (1976). *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Prentice-Hall.
- [4] F. W. Warner, (1983). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer.
- [5] B. O'Neill, (1983). *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*. Academic Press.
- [6] J. A. Fernandez-Viña, (1992). *Análisis Matemático III*. Tecnos.
- [7] E. M. Stein y R. Shakarchi, (2005). *Real analysis. Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton Lectures in Analysis.
- [8] C. F. Gauss, (1827). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Comm. Soc. Göttingen Bd, 6.
- [9] J. W. Milnor, (1981). *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia.
- [10] E. Outeruelo, J. A. Rojo y J. M. Ruiz, (2020). *Topología Diferencial, un curso de iniciación*. Sanz y Torres.
- [11] J. R. Munkres, (1984). *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [12] J. F. Humphreys, (2001). *A course in Group Theory*, Oxford.
- [13] L. Ahlfors y L. Sario, (1960). *Riemann Surfaces*. Princeton University Press.
- [14] N. Steenrod, (1951). *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press.
- [15] J.-P. Brasselet, J. Seade y T. Suwa, (1987). *Vector Fields on Singular Varieties*. Springer
- [16] J. R. Munkres, (2002). *Topología* (2^a edición). Prentice-Hall.

- [17] V. Guillemin y A. Pollack, (1974). *Differential topology*. Prentice-Hall.
- [18] J.-P. Brasselet, J. Damon, L. D. Tráng y M. Oka, (2005). *Singularities in Geometry and Topology*. World Scientific.