



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Aspectos geométricos de la Teoría de la Relatividad

Autor: Aurora Luisa López-Francos Riaño

Tutor: Felipe Cano Torres

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Resumen | 3 |
| 2. Prólogo | 4 |
| 3. Cambios de referencia en Relatividad Especial. | 7 |
| 3.1. Principios de Relatividad | 7 |
| 3.2. Ecuaciones de Maxwell | 10 |
| 3.3. Isometrías de Minkowski: | 12 |
| 4. El lenguaje matemático de la Teoría de la Relatividad especial. | 22 |
| 4.1. Nociones preliminares de Geometría diferencial. | 22 |
| 4.2. Tensores | 26 |
| 4.2.1. Tensores en Espacios Vectoriales | 26 |
| 4.2.2. Tensores sobre variedades diferenciables | 28 |
| 4.3. Variedades Semiriemannianas. | 30 |
| 4.3.1. Conexiones | 31 |
| 4.3.2. Transporte paralelo, geodésicas y aplicación exponencial. | 33 |
| 4.3.3. Frame fields | 37 |
| 5. Teoría de la Relatividad Especial | 39 |
| 5.1. Geometría Lorentziana. Causalidad y Orientación | 39 |
| 5.2. Elementos de la Relatividad Especial. | 41 |
| 5.2.1. El espacio-tiempo de Newton | 41 |
| 5.2.2. Espacio-tiempo de Minkowski | 41 |
| 5.2.3. Observación de partículas: | 46 |
| 5.3. Efectos relativistas | 49 |
| 5.3.1. La adición de velocidades. | 49 |
| 5.3.2. La contracción de Fitzgerald-Lorentz. | 50 |
| 5.3.3. Ejemplo: La paradoja de los gemelos. | 51 |
| 5.4. En búsqueda de la Teoría General de la Relatividad: | 53 |
| 6. Bibliografía | 56 |

1. Resumen

Se estudian las isometrías de Minkowski como rotaciones hiperbólicas, siendo Lorentziana la estructura de los espacios tangentes. Se adapta el lenguaje de variedades semi-riemanniannas a la relatividad especial, en el caso plano, se presentan los efectos relativistas más comunes, como la contracción de Lorentz-Fitzgerald o la paradoja de los gemelos. Se deja el lenguaje preparado para abordar la relatividad general.

Como trabajo previo se presenta una introducción rápida a las variedades semi-riemannianas.

2. Prólogo

Este trabajo centra su interés en cuestiones matemático-geométricas, directamente relacionados con la Teoría de la Relatividad. Por ello hemos considerado necesario introducir una pequeña síntesis del trabajo de los que propiciaron el camino para llegar a ella.

La ciencia aporta un amplísimo panorama de observaciones y experimentos que condujeron a la mencionada teoría en la que el afán de descubrimiento y explicación de los fenómenos naturales jugaron un papel decisivo. En esta larga andadura destacaremos algunas contribuciones que se remontan al siglo XVII y siguientes, con el objetivo de hacer más comprensible cuanto en él se desarrolla.

Comenzamos con la figura de Galileo Galilei (1564-1642) del que, entre sus muchas contribuciones al avance científico, podemos reseñar su Principio de la Relatividad, según el cual el movimiento depende del sistema de referencia, lo que ejemplificó señalando como la caída de una piedra desde un mástil en el interior de un barco lo hace de forma vertical, mientras que en otro sistema de referencia, como es la tierra firme, el observador vería una trayectoria en forma de parábola. Su principio concluye que las leyes físicas son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

Posteriormente, Isaac Newton (1642-1727), basandose en lo anteriormente expuesto postuló que la Tierra se mueve respecto de un sistema en reposo absoluto; siguiendo literalmente el trabajo de [7] “Un marco fijo de referencia, el espacio absoluto. Un universo ocupado por un medio invisible (éter) en el que erraban las estrellas y viajaba la luz”.

“El tiempo es absoluto, o sea, el mismo para todo observador inercial, y las interacciones ocurren instantáneamente, incluso si son a distancia” (Véase[11]).

Este concepto de espacio absoluto y de sistema éter prevaleció durante mucho tiempo, hasta finales del siglo XIX y principios del XX, fomentado por el desarrollo del conocimiento de la naturaleza ondulatoria de la luz, y por tanto, la necesidad del éter como su medio natural de propagación. Con la aparición de las Leyes del Electromagnetismo de James C. Maxwell (1831-1879), se descarta la luz como onda mecánica y se interpreta como electromagnética. Además se comprobó que sus ecuaciones al pasar de un sistema de referencia a otro no resultaban válidas, salvo en un marco de re-

ferencia absoluto, contraviniendo la Relatividad de Galileo, que exige que las leyes físicas sean independientes del sistema de referencia.

Esta inconsistencia continuará siendo revisada por científicos de la talla de Fitzgerald, Lorentz y Poincaré cuyas aportaciones contribuyeron a la fundamentación de la Teoría de la Relatividad de Einstein, proponiendo la dilatación del tiempo y la contracción del espacio, pero manteniendo el tiempo como algo absoluto.

A todo lo anterior hay que añadir el experimento óptico de Michelson y Morley, realizado en Cleveland en 1881, cuyos resultados no fueron los esperados dado que al pretender medir la variación de la velocidad de la luz como consecuencia del movimiento terrestre comprobaron que esta es constante e independiente del movimiento del observador o de la fuente emisora. El experimento, repetido en varias ocasiones, confirmaba que la velocidad de la luz no cambiaba independientemente del movimiento del observador hacia la fuente luminosa o alejándose de ella. Esto invalidaba la aplicación de las transformadas de Galileo a la velocidad de la luz.

En este contexto de incertidumbre de la comunidad científica, que no acertaba a explicar el citado cúmulo de hechos experimentales y teorías inconsistentes, se requería un nuevo enfoque que sobrepasara el estancamiento en que se hallaba la denominada física clásica. Este salto cualitativo se produce en 1905 con la Teoría Especial, o restringida, de la Relatividad, de Albert Einstein, un marco teórico coherente que constituye un nuevo paradigma, una mecánica nueva, al cuestionar los conceptos tradicionales de espacio y tiempo. Esto se puede resumir en los principios siguientes:

1. Las Leyes de la Física tienen la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales.
 2. En cualquier sistema inercial la velocidad de la luz es siempre la misma independientemente del estado de movimiento del cuerpo emisor. (Véase [12]).
- Con estos postulados Einstein rechaza la idea del éter y del espacio como un sistema absoluto, admitiendo como probatorio el experimento de Michelson y Morley.

En relatividad la distancia en el espacio y el tiempo dejan de ser independientes y se fusionan en el concepto espacio-tiempo de cuatro dimensiones asumiendo las transformaciones de Lorentz, cuyas propiedades geométricas (espacio-tiempo) utilizó extensivamente Minkowski. Dos sucesos simultáneos en un sistema referencia no tienen por qué serlo en otro, por tanto la simultaneidad es relativa. A velocidades cercanas a la luz el tiempo se dilata y la

longitud se encoge. Además, la velocidad de la luz siempre es la misma y la máxima permitida en el Universo.

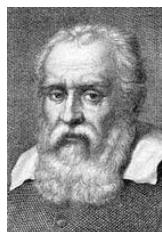


Figura 1:
G.Galileo



Figura 2:
I.Newton

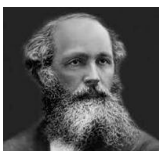


Figura 3:
JC.Maxwell

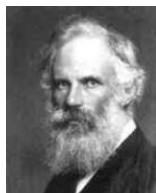


Figura 4:
GF.Fitzgerald



Figura 5:
H.Poincaré



Figura 6:
HA.Lorentz

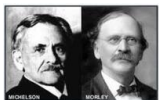


Figura 7:
AA.Michelson
y E.Morley



Figura 8:
H.Minkowski

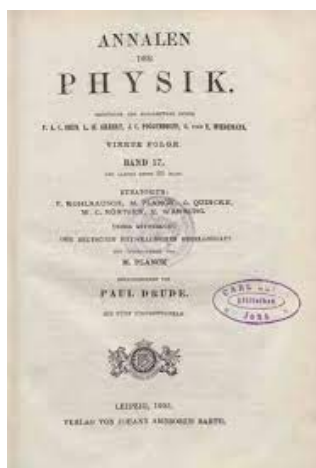


Figura 9:
Relatividad Especial



Figura 10: A.Einstein

3. Cambios de referencia en Relatividad Especial.

3.1. Principios de Relatividad

Galileo, como hemos expuesto con anterioridad, concibe que las leyes de la física son independientes de cualquier sistema de referencia, transformando la concepción de la mecánica que se tenía hasta el momento. Para enunciar su Principio de Relatividad tuvo en cuenta:

- Un espacio-tiempo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, el primer factor representa la dimensión temporal y el segundo factor representa las 3 dimensiones espaciales, teniéndose en \mathbb{R}^3 la métrica usual.
- Los eventos, son los puntos del espacio-tiempo que acabamos de mencionar.
- Observadores, son curvas $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde I es la componente temporal.
- La línea de vida de un observador $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es el grafo de la curva α , que está en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

Con estos elementos enunció su Principio de Relatividad que contiene los siguientes postulados:

- Dos observadores en movimiento rectilíneo uniforme uno con respecto del otro deben de formular las leyes de la física de la misma manera.
- No existe el movimiento como magnitud absoluta, sino movimiento en relación a un observador.
- Toda ley que se formula de la misma manera para todos los observadores es una ley física.

Con lo expuesto podemos describir el modelo relativista de Galileo:

Sean G “Griego” y R “Romano” dos observadores en el espacio-tiempo que se encuentran en movimiento rectilíneo uniforme uno con respecto del otro, con velocidad v (resp. $-v$).

Para simplificar la discusión supondremos que el espacio es unidimensional en muchas de las situaciones, es decir, describiremos una física sobre un “rail de tren”. Las coordenadas de G y R son (τ, ζ) y (t, z) , respectivamente. Se

puede comprobar esta situación en las siguientes figuras:

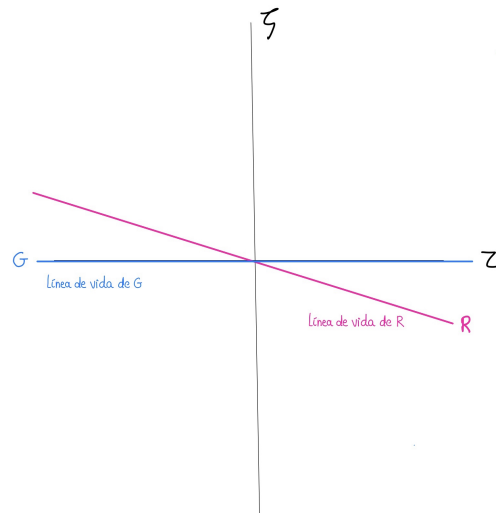


Figura 11: Observador G

El eje τ es la línea de vida del observador G.

La ecuación de movimiento para este caso es:
$$\begin{cases} \tau = t \\ \zeta = z - vt \end{cases}$$

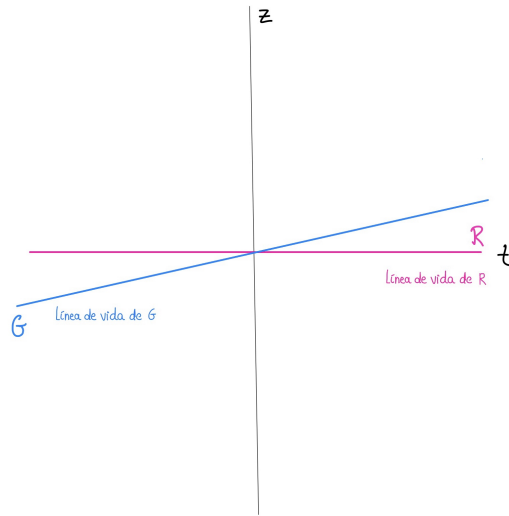


Figura 12: Observador R

El eje t es la línea de vida del observador R.

La ecuación de movimiento para este caso es:
$$\begin{cases} t = \tau \\ z = \zeta + v\tau \end{cases}$$

Si tenemos un ángulo recto entre la línea de vida del observador R (eje temporal) y el eje espacial de G entonces, el observador R está estacionado respecto de G.

Observación 3.1

Por convenio, representaremos verticalmente el eje espacial y horizontalmente el eje temporal.

A continuación abordaremos el estudio del cambio de coordenadas entre los observadores R y G hasta la llegada de Albert Einstein con su Teoría Especial de la Relatividad.

Definición 3.1

*El cambio de coordenadas de un observador G a R estudiado por Galileo, “**Transformada de Galileo**”, es la aplicación lineal $S_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:*

$$S_v : \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (1)$$

Esta transformada tiene la particularidad de que $S_{-v} = S_v^{-1}$, siendo S_{-v} la matriz que nos permite hacer el cambio de coordenadas de R a G. Sin embargo, a finales del siglo XIX, se comprobó que S_v no se ajustaba a los hechos al no transformarse adecuadamente la luz. Hecho, que se puso de manifiesto con el Experimento de Mickelson-Morley y las Ecuaciones de Maxwell entre otros como ya hemos dicho.

3.2. Ecuaciones de Maxwell

Se tiene que la velocidad de un onda electromagnética coincide con la velocidad de la luz, deduciéndose así la naturaleza electromagnética de esta. A continuación comprobamos como estas ecuaciones suponen la necesidad de dar otra forma a las transformaciones de Galileo. Describimos las funciones que intervienen en dichas ecuaciones en las coordenadas del observador R.

- Fuerza eléctrica: $E(t,z)$, vector de tiempo y espacio.
- Fuerza magnética: $B(t,z)$, vector de tiempo y espacio.
- Densidad de carga eléctrica: $\rho(t,z)$, función escalar.
- Densidad de la corriente eléctrica: $J(t,z)$, función escalar.

Asumiendo que estamos en el espacio vacío con $\rho = 0$ y $J = 0$ y las 4 funciones descritas anteriormente dedujo:

1. $\nabla \cdot E = \rho$
2. $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$
3. $\nabla \cdot B = 0$
4. $\nabla \times B = \frac{\partial E}{\partial t}$

Operando con estas 4 ecuaciones obtenemos la ecuación de ondas:

$$E_{tt} - E_{zz} = 0 \quad (E_{tt} = \nabla^2 E) \tag{2}$$

A continuación trataremos de expresar la ecuación de ondas en las coordenadas del observador G.

Aplicando las transformadas S_v y S_{-v} de Galileo podemos escribir:

$$E(t, z) = E(\tau, \zeta + v\tau) = \varepsilon(\tau, \zeta)$$

$$\varepsilon(\tau, \zeta) = \varepsilon(t, z - vt) = E(t, z)$$

Haciendo uso de la regla de la cadena:

$$E_t = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \varepsilon_t - v\varepsilon_\zeta$$

$$E_z = \varepsilon_\zeta$$

$$E_{zz} = \varepsilon_{\zeta\zeta}$$

$$E_{tt} = \varepsilon_{\zeta\zeta} - 2v\varepsilon_{\tau\zeta} + v^2\varepsilon_{\zeta\zeta}$$

Obtenemos así la ecuación de ondas en las coordenadas de observador G:

$$E_{tt} = \varepsilon_{\tau\tau} + v^2\varepsilon_{\zeta\zeta} - 2v\varepsilon_{\tau\zeta} \quad (3)$$

A simple vista, observamos que la ecuación de ondas no toma la misma forma para distintos observadores, contradiciéndose el Principio de Relatividad de Galileo. Por este motivo, necesitamos buscar una transformada que respete la forma de la ecuación de ondas para todo observador.

Debiendo considerar ahora el cambio de coordenadas establecido por la transformada de Fitzgerald: $F_v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por la siguiente matriz:

$$F_v : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \sqrt{1-v^2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Aplicamos la transformación F_v^{-1} a la ecuación de ondas en las coordenadas de R, obteniendo:

$$E_{tt} - \varepsilon_{\zeta\zeta} \frac{-2v}{\sqrt{1-v^2}} \varepsilon_{\tau\zeta} = 0 \quad (5)$$

la ecuación de ondas en las coordenadas de G, comprobando aún la existencia de un término extra que impide que se respete, entre distintos observadores, la estructura de la ecuación de ondas.

Para eliminar dicho término extra Lorentz propone una nueva transformada: $L_v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por su matriz:

$$L_v : \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Esta transformada de Lorentz nos permite escribir:

$$E(t, z) = \varepsilon\left(\frac{t-vz}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{z-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

$$E_t = \frac{\varepsilon_\tau - v\varepsilon_\zeta}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$E_{tt} = \frac{\varepsilon_{\tau\tau} + v^2\varepsilon_{\zeta\zeta} - 2v\varepsilon_{\tau\zeta}}{1-v^2}$$

$$E_z = \frac{-v\varepsilon_\tau + \varepsilon_\zeta}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$E_{zz} = \frac{v^2\varepsilon_{\tau\tau} + \varepsilon_{\zeta\zeta} - 2v\varepsilon_{\tau\zeta}}{1-v^2}$$

Tras derivar y usar la regla de la cadena obtenemos la ecuación de ondas en las coordenadas del observador G:

$$E_{tt} - E_{zz} = \frac{(1-v^2)\varepsilon_{\tau\tau} + (v^2-1)\varepsilon_{\zeta\zeta}}{1-v^2} = \varepsilon_{\tau\tau} - \varepsilon_{\zeta\zeta} \quad (7)$$

Con esta transformada de Lorentz se consigue que las ecuaciones de Maxwell tengan la misma forma, independientemente del observador que consideremos.

La transformada que propuso Einstein B_v es igual a la transformada de Lorentz L_v , salvo que Lorentz la dedujo para que se adaptara a los hechos descritos por las ecuaciones de Maxwell, mientras que Einstein las deduce solo del hecho de que la velocidad de la luz ha de ser constante.

La matriz B_v verifica que es lineal y $B_v^{-1} = B_{-v}$, tal y como pretendíamos.

3.3. Isometrías de Minkowski:

Observación 3.2

En esta sección trabajaremos utilizando como espacio-tiempo el espacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = M$. No obstante, todo lo que realizamos aquí se obtiene análogamente cuando consideramos como espacio-tiempo el espacio $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, con una dimensión temporal y 3 dimensiones espaciales.

Antes de comenzar con las isometrías de Minkowski conviene repasar la definición de las funciones hiperbólicas.

Definición 3.2

Seno Hiperbólico: $\sinh = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$

Coseno Hiperbólico: $\cosh = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$

Tangente Hiperbólica: $\tanh = \frac{\sinh u}{\cosh u}$

Siendo las cosecante, secante, secante y cotangente hiperbólicas, respectivamente, las funciones inversas de las anteriores.

Recordamos la ecuación fundamental de las funciones hiperbólicas:

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \tag{8}$$

Observación 3.3

En el caso circular tenemos que el punto $(x, y) = (\cos u, \sin u)$ se encuentra sobre el círculo unidad cuya ecuación es: $X^2 + y^2 = 1$. Además, el arco circular que une los puntos $(1, 0)$ y $(\cos u, \sin u)$ delimita un área de $\frac{u}{2}$ unidades cuadradas.

Proposición 3.1

El punto $(x, y) = (\cosh u, \sinh u)$ para cada $u \in \mathbb{R}$ se encuentra sobre la hipérbola unidad de ecuación $x^2 - y^2 = 1$.

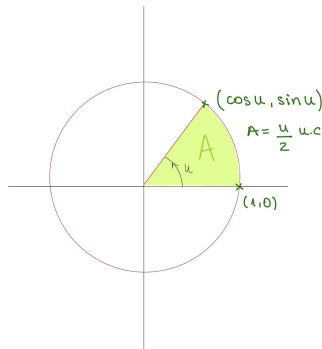


Figura 13: Área que delimitan u radianes

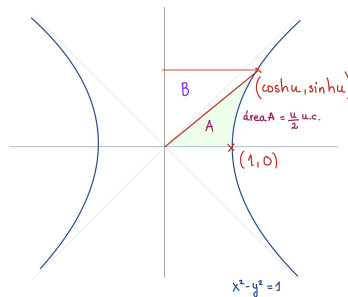


Figura 14: Relación entre la hipérbola y las funciones hipérbolicas.

Demostración. Si medimos la distancia euclidiana existente entre $(0,0)$ y $(\cosh u, \sinh u)$ ha de ser u , sin embargo vamos a ver que al igual que ocurría en el caso circular, la región sombreada tiene un área de $\frac{u}{2}$ unidades cuadradas.

Parametrizamos la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ como $x = \sqrt{1 + y^2}$.

Calculamos el área de la región $A+B$ de la figura previa.

$$\text{rea}(A + B) = \int_0^{\sinh u} \sqrt{1 + y^2} dy = \frac{u}{2} + \frac{\sinh u \cosh u}{2} \quad (9)$$

Como B es un triángulo resulta sencillo obtener $\text{Area}(B) = \frac{\sinh u \cosh u}{2}$. Despejando en (9), tenemos que $\text{Área}(A) = \frac{u}{2}$ unidades cuadradas. \square

Como consecuencia de la proposición previa (3.1) podemos usar la hipérbola unidad para definir $\cosh u$ y $\sinh u$ y reescribir la matriz de Lorentz, del cambio de coordenadas del observador G al observador R , B_v en términos de

las funciones hiperbólicas obteniendo:

$$H_u : \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \quad (10)$$

siendo $u = \tanh^{-1} v$ y $v = \tanh u$

La expresión H_u es la descripción geométrica de la transformada de Lorentz, mientras que B_v , es la descripción física de dicha transformada a la que llamamos "Booster".

En lo que resta de capítulo nuestros esfuerzos se centrarán en comprobar que H_u es una isometría y en especial una rotación hiperbólica, para una nueva norma en el espacio-tiempo M , con su correspondiente producto interno.

Teorema 3.1

H_u conserva todas las hipérbolas de la forma $t^2 - z^2 = k$, en particular H_u conserva el cono de luz ($t^2 - z^2 = 0$).

Además:

Si $\tau^2 - \zeta^2 = k$ y u es un valor cualquiera:

$$\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = H_u \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (11)$$

entonces $t^2 - z^2 = k$

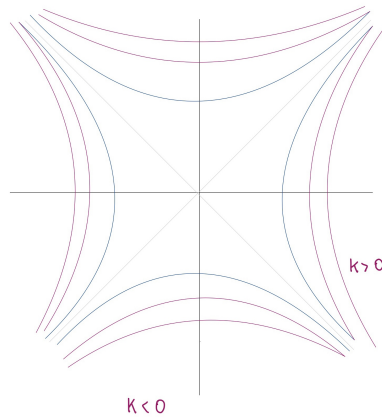


Figura 15: Hipérbolas $t^2 - z^2 = k$.

Demostración. A partir de H_u , $\left\{ \begin{matrix} t = \tau \cosh u + \zeta \sinh u \\ z = \tau \sinh u + \zeta \cosh u \end{matrix} \right\} \implies$
 $t^2 - z^2 = (\tau \cosh u + \zeta \sinh u)^2 - (\tau \sinh u + \zeta \cosh u)^2 = \tau^2 \cosh^2 u + \zeta^2 \sinh^2 u + 2\tau\zeta \cosh u \sinh u - (\tau^2 \sinh^2 u + \zeta^2 \cosh^2 u + 2\tau\zeta \cosh u \sinh u) = \tau^2 + \zeta^2. \quad \square$

Definición 3.3

Sea $E = (t, z)$ un evento del espacio-tiempo M , definimos $Q : M \rightarrow \mathbb{R}$ como $Q(E) = t^2 - z^2$.

Proposición 3.2

La norma de Minkowski de un evento $E = (t, z)$ en el espacio-tiempo M tiene la forma:

$$\|E\| = \begin{cases} \sqrt{Q(E)} & \text{si } Q(E) > 0 \\ \sqrt{-Q(E)} & \text{si } Q(E) < 0 \\ 0 & \text{si } Q(E) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

La ecuación $Q(E) = t^2 - z^2$ divide el espacio-tiempo en regiones diferenciadas.

Definición 3.4

Sea E un evento en el espacio-tiempo M , bien definido si se fija el origen, considerando pues $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como espacio vectorial:

- Decimos que E es de **tipo temporal** si $Q(E) > 0$
- Decimos que E es de **tipo espacial** si $Q(E) < 0$
- Decimos que E es de **tipo luz** si $Q(E) = 0$

En esta figura representamos la división del espacio-tiempo, a continuación en la siguiente observación interpretamos dicha figura.

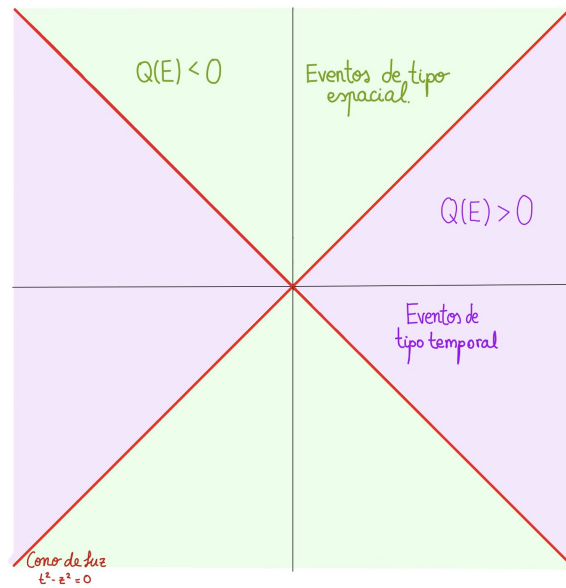


Figura 16: Clasificación de los eventos E del espacio-tiempo M

Observación 3.4

Como $Q(E) > 0$ para todos los eventos situados en el interior del cono de luz $t^2 - z^2$ tenemos que la imagen a través del H_u del eje temporal de un observador se encuentra en el interior del cono, por este motivo, estos eventos reciben el nombre de temporales y análogamente para los eventos espaciales.

Para tener en cuenta en nuestro espacio-tiempo M el pasado y el futuro realizamos una nueva partición del mismo en 6 regiones diferenciadas.

Definición 3.5

Para la norma de Minkowski:

$$C(0, 1) = \{E = (t, z) / t^2 - z^2 = 1 \quad \text{o} \quad t^2 - z^2 = -1\}$$

(Hiperbolas unidad).

Los vectores unitarios para la norma de Minkowski son aquellos que se encuentran por debajo de las hiperbolas de $C(0, 1)$.

Representamos los vectores unitarios en la siguientes figuras:

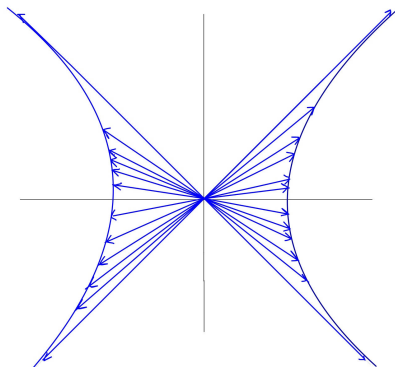


Figura 17: Vectores de tipo temporal para los que $Q(E) = +1$

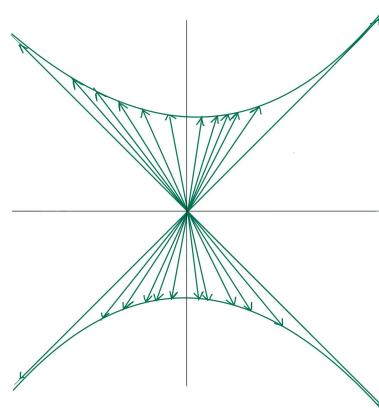


Figura 18: Vectores unitarios de tipo espacial para los que $Q(E) = -1$

Definición 3.6

Sea $E=(t,z)$ un evento del espacio-tiempo. Se obtienen la siguientes regiones en M .

- $\mathcal{T}^+ = \{E = (t, x) \in M / Q(E) > 0 \text{ y } t > 0\}$
- $\mathcal{T}^- = \{E = (t, x) \in M / Q(E) > 0 \text{ y } t < 0\}$
- $\mathcal{S} = \{E = (t, x) \in M / Q(E) < 0\}$
- $\mathcal{L}^+ = \{E = (t, x) \in M / Q(E) = 0 \text{ y } t > 0\}$
- $\mathcal{L}^- = \{E = (t, x) \in M / Q(E) = 0 \text{ y } t < 0\}$
- \mathcal{O}

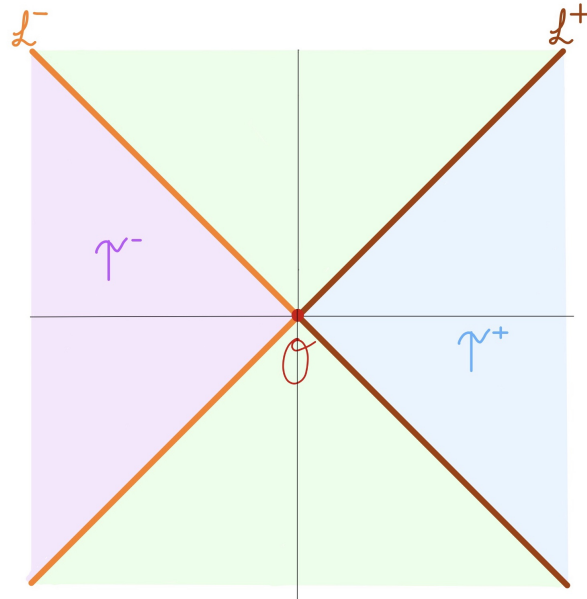


Figura 19: Las 6 regiones en las que se divide el espacio-tiempo M

Teorema 3.2

Las 6 regiones del espacio-tiempo M descritas anteriormente se conservan a través de H_u .

Demostración. Veamos que los eventos futuros y pasados se conservan individualmente y que \mathcal{T}^+ se conserva a través de H_u .

Sea $E = (\tau, \zeta)$ un evento de \mathcal{T}^+ , es decir $\tau > 0$ y $-\tau < \zeta < \tau$. Apreciamos que $H_u(E) = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix}$. □

A partir de la definición de la norma de Minkowski se introducen nuevos conceptos: la separación y el intervalo.

Definición 3.7

Dados dos eventos, $E_1 = (t_1, z_1)$ y $E_2 = (t_2, z_2)$ se define:

La **separación** entre E_1 y E_2 es el vector $E_1 - E_2$.

El **intervalo** entre dos eventos E_1 y E_2 es la norma de Minkowski de la separación: $\|E_1 - E_2\|$.

Notación 3.1

A partir de ahora denotaremos por \mathbb{F} al conjunto de los vectores futuros de tipo temporal, es decir a los vectores de \mathcal{T}^+ .

Definición 3.8

Un **rayo futuro** es un vector que parte del origen y tiene llegada en el conjunto futuro \mathcal{F} .

Con todo lo anterior, estamos en condiciones de definir el ángulo hiperbólico.

Definición 3.9

Sean ρ_1, ρ_2 dos rayos futuros en M , que intersecan la hipérbola unidad en los puntos $P_1 = (\cosh \alpha_1, \sinh \alpha_1)$ y $P_2 = (\cosh \alpha_2, \sinh \alpha_2)$, respectivamente. Denotamos por $L_{\rho_1\rho_2}$ al ángulo hiperbólico que forman ρ_1 y ρ_2 y mide $\alpha_1 - \alpha_2$ radianes hiperbólicos.

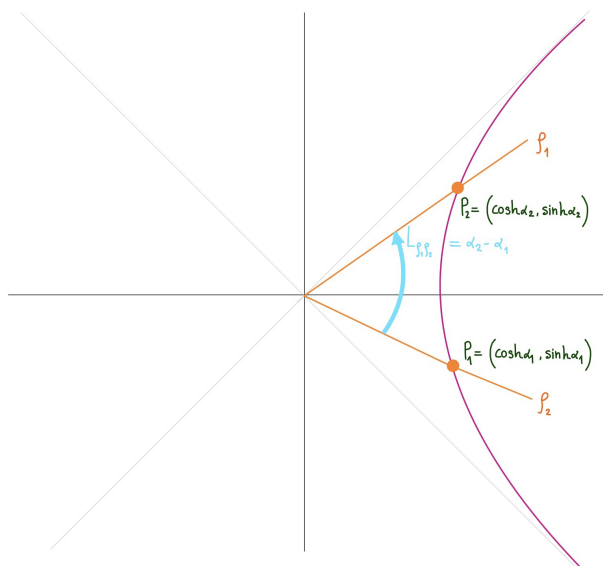


Figura 20: Ángulo hiperbólico

Teorema 3.3

Sea ρ un rayo futuro en M . El ángulo hiperbólico entre ρ u $H_u(\rho)$ mide exactamente u radianes hiperbólicos.

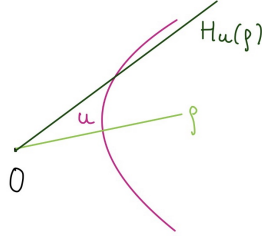


Figura 21: Ángulo hiperbólico entre ρ y $H_u(\rho)$

Demostración. Suponemos que ρ interseca la hipérbola unidad ($t^2 - z^2 = 1$) en el punto $(\cosh \alpha, \sinh \alpha)$.

$$H_u \cdot \begin{pmatrix} \cosh \alpha \\ \sinh \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh \alpha \\ \sinh \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha + u) \\ \sinh(\alpha + u) \end{pmatrix}$$

Por tanto, $H_u(\rho)$ se encuentra también en la hipérbola unidad siendo $(\cosh(u + \alpha), \sinh(u + \alpha))$ el punto en el que $H_u(\rho)$ interseca dicha hipérbola. Aplicando la definición de ángulo hiperbólico: $L_{\rho H_u(\rho)} = u + \alpha + \alpha$. □

Corolario 3.1

Si β es el ángulo hiperbólico que forman dos rayos futuros ρ_1 y ρ_2 entonces $\rho_2 = H_\beta(\rho_1)$.

Corolario 3.2

H_u conserva los ángulos hiperbólicos entre rayos futuros.

Demostración. Sea β el ángulo hiperbólico entre los rayos futuros ρ_1 y ρ_2 , aplicando el corolario previo, $\rho_2 = H_\beta(\rho_1)$, entonces, $H_u(\rho_2) = H_u(H_\beta(\rho_1)) = H_{u+\beta}(\rho_1) = H_\beta(H_u(\rho_1))$ y de acuerdo con el teorema anterior

$$L_{H_u(\rho_1)H_u(\rho_2)} = \beta.$$

□

Podemos concluir que H_u es una isometría para la métrica de Minkowski y en particular una rotación hiperbólica que rota eventos del conjunto \mathcal{F} la cantidad de u radianes hiperbólicos.

A continuación, definimos el producto interno de Minkowski que nos proporciona la mencionada con anterioridad norma de Minkowski.

Definición 3.10

Dados dos eventos $E_1 = (t_1, z_1)$ y $E_2 = (t_2, z_2)$ del espacio tiempo, expresados en coordenadas del observador R . El **producto interno de Minkowski** tiene la forma:

$$E_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} t_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = t_1 \cdot t_2 - z_1 \cdot z_2. \quad (13)$$

teniendo:

$$E \cdot E = \begin{cases} -\|E\|^2 & \text{Si } E \text{ es un evento de tipo espacial.} \\ \|E\| & \text{Si } E \text{ es de cualquier otro tipo.} \end{cases} \quad (14)$$

Con estas nociones se podrían explicar geoméricamente diversos fenómenos relativistas, pero preferimos posponerlo para más adelante y basarnos en el lenguaje más potente de la geometría semiriemanniana

4. El lenguaje matemático de la Teoría de la Relatividad especial.

4.1. Nociones preliminares de Geometría diferencial.

En esta sección introducimos los conceptos esenciales de Geometría diferencial, para comprender la Teoría de la Relatividad especial.

Definición 4.1

Sea X un espacio topológico. Un **atlas** es un conjunto $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ donde cada U_i es un abierto de X y la aplicación $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ es un homeomorfismo siendo V_i un abierto de \mathbb{R}^n y teniéndose:

- $X = \cup_{i \in I} U_i$
- $U_i \cap U_j = \emptyset$
- $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ es un homeomorfismo topológico.

Cada uno de los elementos de un atlas es una carta local.

Observación 4.1

A cada una de las cartas locales (U, ϕ) que conforman el atlas se las llama análogamente sistemas de coordenadas y para cada $p \in U$ podemos escribir $\psi(p) = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$.

Definición 4.2

Sea X un espacio topológico, un **atlas diferenciable** es un atlas $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i)_{i \in I}$ en el que se cumple que los cambios de cartas $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ son difeomorfismos de clase \mathcal{C}^∞ .

Definición 4.3

Una **variedad diferenciable** M es un par (X, \mathcal{A}) donde X es un espacio topológico y \mathcal{A} un atlas diferenciable.

Definición 4.4

Sean M y N dos variedades diferenciales, decimos que $f : M \rightarrow N$ es **diferenciable** en cada punto $p \in M$ si se cumple que para cada carta (U_2, ϕ_2) de N con $f(p) \in U_2$, entonces existe una carta (U_1, ϕ_1) de M con $p \in U_1$ y tal que $g = \phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2)) \rightarrow \phi_2(U_2)$ es diferenciable en $\phi_1(p)$. Decimos que f es diferenciable si lo es para todo $p \in M$.

Notación 4.1

La definición previa es independiente de las cartas escogidas.

Denotamos por $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ al conjunto de todas las funciones diferenciables de la variedad M en la variedad N , en el caso de la variedad de llegada se \mathbb{R} el citado conjunto de funciones se denota por $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Definición 4.5

Sea M una variedad diferenciable, U un abierto de M y p un punto de M .

Un **vector tangente a M en el punto p** es una función $v : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple:

- *Linealidad en \mathbb{R} :* $v(af + bg) = av(f) + bv(g) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ y } f, g \in \mathcal{C}^{infy}$
- *Regla de Leibnitz:*
 $v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)$

Denotamos por T_pM al espacio vectorial de todos los vectores tangentes a la variedad M en el punto p , siendo T_pM el **espacio tangente** a la variedad en dicho punto.

Definición 4.6

Sea $\varepsilon = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ carta local en M en el punto p , si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) = \frac{\partial (f \circ \varepsilon^{-1})}{\partial u_i} (\varepsilon_p) \quad 1 \leq i \leq n \tag{15}$$

donde (u_1, u_2, \dots, u_n) son las coordenadas en la carta usual de \mathbb{R}^n .

Corolario 4.1

Si tenemos coordenadas dadas por una carta local en M , como la considerada previamente, entonces $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$ es una base del espacio tangente T_pM

Definición 4.7

Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. En cada punto $p \in M$ definimos la aplicación **diferencial** de f , $df|_p$ como:

$$df|_p : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N) \quad : \quad v \rightarrow df|_p(v)$$

dónde si $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $df|_p(v)(g) = v(g \circ f)$.

Definición 4.8

Se llama **espacio cotangente** al dual del espacio tangente y le denotamos por $T_p^* = \text{Hom}(T_pM, \mathbb{R})$.

Definición 4.9

El **fibrado tangente** de una variedad diferenciable M es

$$TM = \cup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

Se define la aplicación $\pi : TM \rightarrow M$, de modo que $\pi^{-1}(p) = p$, $p \in T_p M$. π es la aplicación que envía cada vector tangente en un punto, siendo este en el que es tangente.

Definición 4.10

Sea M una variedad diferenciable cuyo fibrado tangente es TM . Un **campo de vectores** V es una sección del fibrado tangente, es decir, una aplicación $V : M \rightarrow TM$ de modo que $\pi \circ V = id$.

Si la aplicación sección es diferenciable, entonces el campo de vectores V también es diferenciable.

Notación 4.2

Si $f \in C^\infty(M)$, Vf denota la función real en M dada por

$$p \rightarrow (Vf)(p) = V|_p(f)$$

En un sistema local de coordenadas $\varepsilon : (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definido en $U \subset M$ tenemos los campos de vectores coordenados $\frac{\partial}{\partial x_j}$ dados por $p \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$. Todo campo de vectores V sobre U se expresa como $V = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

Definición 4.11

Denotamos por $\Theta(M)$ al conjunto de todos los campos de vectores en la variedad M .

Definición 4.12

Una **derivación** en $C_M^\infty(U)$ es una aplicación $\mathcal{D} : C_M^\infty \rightarrow C_M^\infty$ que cumple las siguientes propiedades:

- \mathbb{R} -lineal: $\mathcal{D}(af + bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g) \forall a, b \in \mathbb{R}$.
- Regla de Leibnitz: $\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g)$.

Sea $V \in \Theta(M)$, se tiene que la aplicación $f \rightarrow Vf$ es una derivación de \mathcal{D}_M^∞ , $Vf = \mathcal{D}(f) \in C_M^\infty$, $\forall f \in C_M^\infty(U)$.

Toda derivación \mathcal{D} proviene de un campo de vectores y además podemos ver los vectores tangentes como derivaciones de la forma:

$$\begin{aligned} v_p : \mathcal{D}_M^\infty(U) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v_p(f) &= \mathcal{D}(f)(p) \quad \forall p \in M \end{aligned} \tag{16}$$

Por tanto, v_p es un vector tangente.

Definición 4.13

Sean V, W dos campos de vectores en M , $V, W \in \Theta(M)$. El **corchete de Lie** se define como el operador

$$[V, W] : \mathcal{D}_M^\infty(U) \rightarrow \mathcal{D}_M^\infty(U)$$

que envía f en $V(Wf) - W(Vf)$.

Proposición 4.1

El corchete de Lie es una derivación en $\mathcal{D}_M^\infty(U)$ y por ello un campo de vectores diferenciable.

Definición 4.14

Una **1-forma** θ de una variedad M es una aplicación que asigna a cada $p \in M$ un elemento de T_p^*M , el espacio cotangente. Una 1-forma es un campo de vectores cotangente.

Denotamos por Θ^* al conjunto de todas las 1-formas en M .

Definición 4.15

La **diferencial** de una función $f \in \mathcal{C}_M^\infty$ es la 1-forma que denotamos por df y que cumple: $(df)(v) = v(f)$ para cada v , v vector tangente a M .

Definición 4.16

Una variedad N es una **subvariedad** de M si se verifica:

- N es un subespacio topológico de M .
- $j : N \rightarrow M$ la aplicación inclusión es diferenciable y dj la diferencial de la inclusión es inyectiva.

4.2. Tensores

Un tensor es un objeto algebraico que generaliza los conceptos de escalar, vector y forma lineal, siendo todos ellos a su vez tensores. El nombre de tensor proviene de “tensor” y tiene su origen en el papel que juegan las “tensiones” en los medios continuos, los primeros casos en los que se emplearon los tensores.

La aceptación definitiva de los tensores en el estudio de la física tuvo lugar con el desarrollo de la Teoría de la Relatividad de Einstein, que originalmente fue formulada de forma tensorial.

4.2.1. Tensores en Espacios Vectoriales

Definición 4.17

Sea V un K espacio vectorial de dimensión n , sean r, s dos enteros no simultáneamente nulos. Decimos que un **tensor de tipo (r, s)** es toda aplicación multilíneal, es decir, lineal en cada componente de la forma:

$$T : (V^*) \times (V)^s \rightarrow K$$

$$(u_1, \dots, u_r, u_1^*, \dots, u_s^*) \rightarrow T(u_1, \dots, u_r, u_1^*, \dots, u_s^*) \quad (17)$$

Decimos que este tensor es r veces contravariante y s veces covariante. Denotamos por \mathcal{T}_s^r al espacio vectorial de dimensión n^2 formado por todos los tensores de tipo (r, s) en el espacio vectorial V .

Definición 4.18

Consideramos los tensores $T \in \mathcal{T}_s^r$ y $T' \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}$. El **producto tensorial** de T por T' se define como la aplicación:

$$T \otimes T' : V^{r+r'} \times (V^*)^{s+s'} \rightarrow K$$

$$(u_1, \dots, u_{r+r'}, \phi^1, \dots, \phi^{s+s'}) \rightarrow T(u_1, \dots, u_r, \phi^1, \dots, \phi^s) \cdot T'(u_{r+1}, \dots, u_{r+r'}, \phi^{s+1}, \dots, \phi^{s+s'}) \quad (18)$$

Proposición 4.2

Propiedad universal del producto tensorial:

Sean W, V_1, V_2, \dots, V_n K espacios vectoriales, sea $G: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ una aplicación multilíneal, entonces existe una única aplicación $\bar{G} : V_1 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W$ de modo que se cumple que $\bar{G} \circ \otimes = G$.

A continuación nos centramos en los tensores de tipo $(0,2)$ sobre un espacio vectorial motivado por el hecho de que este tipo es el de los tensores involucrados en las variedades semiriemannianas. Consideramos las bases

$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de V y $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ base de V^* . A continuación vamos a demostrar que los productos tensoriales de los elementos de ambas bases constituyen una base de \mathcal{T}_2^0 y tendremos que \mathcal{T}_2^0 será un espacio vectorial de dimensión n^2 .

Lema 4.1

si $T = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} e_i \otimes e_j$ es un tensor dos covariante en \mathcal{T}_2^0 , entonces se tiene $t_{kl} = T(e_k^*, e_l^*)$ para todo $k, l \in 1, \dots, n$.

Demostración. $T(e_k^*, e_l^*) = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} (e_i \otimes e_j)(e_k^*, e_l^*) = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} \delta_k^i \delta_l^j = t_{kl} \quad \square$

Teorema 4.1 1. El conjunto $\otimes^2 \mathcal{B} = e_i \otimes e_j, i, j \in 1, 2, \dots, n$ es una base del espacio vectorial \mathcal{T}_2^0 .

2. La coordenada (k, l) de un tensor T en la base $\otimes^2 \mathcal{B}$ coincide con $T(e_k^*, e_l^*)$

Demostración. En primer lugar, tenemos que ver que $\otimes^2 \mathcal{B}$ es linealmente independiente. Si $\sum_{i,j=1}^n t_{ij} e_i \otimes e_j = T_0$, sabemos por el lema previo $t_{ij} = T_0(e_i^*, e_j^*) = 0 \quad \forall i, j$. En segundo lugar, veremos que $\otimes^2 \mathcal{B}$ es un sistema de generadores, para ello comprobamos que $\forall T \in \mathcal{T}_2^0 \quad T = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} e_i \otimes e_j$ siendo $t_{ij} = T(e_i^*, e_j^*)$. Si $u = \sum_{i=1}^n a_i e_i^*$ y $v = \sum_{j=1}^n b_j e_j^*$, entonces, $T(u, v) = T(\sum_{i=1}^n a_i e_i^*, \sum_{j=1}^n b_j e_j^*) = \sum_{i,j=1}^n T(e_i^*, e_j^*) a_i b_j = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} a_i b_j = (\sum_{i,j=1}^n t_{ij} e_i \otimes e_j)(u, v) \quad \square$

Observación 4.2

Matricialmente podemos escribir las coordenadas t_{ij} a través de la matriz \mathcal{M}_B que sigue:

$$\mathcal{M}_B = \begin{pmatrix} T(e_1^*, e_1^*) & \cdots & T(e_1^*, e_n^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T(e_n^*, e_1^*) & \cdots & T(e_n^*, e_n^*) \end{pmatrix}$$

Esto nos permite escribir : $T(u, v) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mathcal{M}_B (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

La geometría semiriemanniana involucra un tipo especial de tensor de tipo (0,2) sobre los espacios tangentes a una variedad diferenciable. Para su correcta comprensión recordamos las siguientes cuestiones generalizadas para el caso de un \mathbb{R} -espacio vectorial cualquiera.

Definición 4.19

Una **forma bilineal simétrica** es un tensor $b \in \mathcal{T}_2^0$ de la forma

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $b(u, v) = b(v, u) \quad \forall u, v \in V$
y se dice que es:

- *Definida positiva (resp. negativa) si dado $v \neq 0$ se tiene $b(v,v) > 0$ (resp. < 0).*
- *Semi-definida positiva (resp. negativa) si $b(v,v) \geq 0$ (resp. ≤ 0) para todo $v \in V$.*

Definición 4.20

El **índice** ν de una forma bilineal simétrica b en V es el mayor entero no negativo que es la dimensión del subespacio $W \subset V$, para el cual se tenga que $b|_W$ es definida negativa.

Definición 4.21

La función $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(v) = b(v, v) \forall v \in V$ es la **forma cuadrática** asociada a la forma bilineal simétrica $b : V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base del espacio vectorial V , la matriz de la forma bilineal simétrica $b : V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$ es $g_{ij} = b(e_i, e_j) \forall i, j \in 1, 2, \dots, n$.

Definición 4.22

Una forma bilineal es **no degenerada** si y solo si la matriz asociada en cualquier base es invertible.

Definición 4.23

Un **producto escalar** g en un espacio vectorial V es una forma bilineal simétrica definida positiva y un **producto interno** es una forma bilineal simétrica no degenerada.

Como ejemplo, tenemos el producto interno de Minkowski que presentamos en el capítulo de introducción, $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $g(v,w) = v_1w_1 - v_2w_2$ con $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$, siendo su forma cuadrática asociada $q(v) = v_1^2 - v_2^2$.

4.2.2. Tensores sobre variedades diferenciables

Sea M una variedad diferenciable, en este contexto el espacio vectorial V , sobre el que hemos definido los tensores, será T_pM , el espacio tangente a M en el punto $p \in M$.

En T_pM consideramos la carta local $(U, x = x_1, x_2, \dots, x_n)$ y tomamos las bases de T_pM y T_p^*M en dicha carta local $\mathcal{B}_p = (\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p)$ y $\mathcal{B}_p = (dx_1|_p, dx_2|_p, \dots, dx_n|_p)$. En esta carta local un tensor $T \in \mathcal{T}_s^r(T_pM)$ es:

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s} t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} dx_{i_1}|_p \otimes \dots \otimes dx_{i_r}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}|_p$$

siendo los coeficientes $t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = T(\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p, dx_1|_p, dx_2|_p, \dots, dx_n|_p)$.

Ejemplo 4.1

Si T es un tensor en \mathcal{T}_2^0 se escribe como $T = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$.

Definición 4.24

Un tensor de tipo $(0, 2)$, $T \in \mathcal{T}_2^0$, es **simétrico** cuando se verifica $T(u, v) = T(v, u)$ y **antisimétrico** si se cumple $T(u, v) = -T(v, u) \forall u, v \in T_p M$.

Vamos a definir los campos tensoriales de manera análoga a la definición que dimos para los campos de vectores.

Definición 4.25

Un **campo tensorial de tipo (r, s)** es una aplicación $T : M \rightarrow \mathcal{T}_s^r$ de modo que se cumple $\pi_{r,s} \circ T = id_M$ siendo $\pi_{r,s} : \mathcal{T}_s^r \rightarrow M$ la proyección canónica $\pi_{r,s}(T_p) = p$.

Denotamos por $\theta_s^r(M)$ al conjunto de todos los campos de tensores de M .

Definición 4.26

Sea T un campo de tensores de tipo $(0, 2)$, T es un campo de tensores **simétrico** si $T(v_p, w_p) = T(w_p, v_p)$ y **antisimétrico** si $T(v_p, w_p) = -T(w_p, v_p) \forall v_p, w_p \in T_p M$ y $\forall p \in M$

Ahora tenemos todos los elementos necesarios para definir el tensor métrico.

Definición 4.27

Un **tensor métrico** g es una campo de tensores de tipo $(0, 2)$ sobre una variedad diferenciables M , $g \in \Theta_s^r(M)$ **simétrico**, **no degenerado** y de **índice constante**.

Es decir, un tensor métrico es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$ que a cada punto de la variedad $p \in M$ le asigna un producto escalar g_p que tiene el mismo índice ν_p para cada punto de la variedad.

4.3. Variedades Semiriemannianas.

Definición 4.28

Una **variedad semiriemanniana** es el par (M, g) , constituido por M una variedad diferenciable y un tensor métrico g .

Definición 4.29

Llamamos **índice** de la variedad al valor común ν índice del producto interior (tensor métrico) g_p .

Si $\nu = 0$, M es una variedad Riemanniana con el producto escalar habitual y cuando $\nu = 1$ y $n \geq 2$, M es una variedad de Lorentz.

Ejemplo 4.2 (El espacio de Minkowski en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$)

En \mathbb{R}^n podemos considerar el siguiente tensor métrico:

Para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Si escribimos $u = \sum_k u_k \left(\frac{\partial}{\partial \phi_k}\right)|_p$ y $v = \sum_k v_k \left(\frac{\partial}{\partial \phi_k}\right)|_p$, es decir la expresión de u y de v en la carta local $(U, \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n))$. Entonces, podemos definir el tensor métrico g en el punto $p \in M$ como:

$$g_p = \langle u, v \rangle_p = -u_1 v_1 + \sum_{k=2}^n u_k v_k \quad (19)$$

\mathbb{R}^n , conjuntamente con el tensor métrico g_p que acabamos de definir, es una variedad semiriemanniana que llamamos: *Espacio de Minkowski n-dimensional* y se denota por \mathbb{R}_1^n .

Observación 4.3

Si $n=4$, el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^4 es el espacio-tiempo relativista más usual.

Definición 4.30

Sean M y N dos variedades semiriemannianas cuyos tensores métricos son g_M, g_N respectivamente $\Phi : M \rightarrow N$ es una **isometría** entre variedades semiriemannianas si se conservan los tensores métricos, es decir, $\Phi^*(g_N) = g_M$.

Propiedades 4.1 1. La identidad en una variedad semiriemanniana es una isometría.

2. La composición de isometrías es una isometría.

3. La aplicación inversa de una isometría es una isometría.

4.3.1. Conexiones

Definición 4.31

Sea M una variedad diferenciable. Una **conexión lineal** sobre M es una aplicación ∇ que toma la forma:

$$\nabla : \Theta_M \times \Theta_M \rightarrow \Theta_M \quad (X, Y) \rightarrow \nabla_X Y : p \rightarrow \nabla_X|_p Y. \quad (20)$$

y cumplen las propiedades:

1. *Linealidad:* $\nabla_{av+bw} Y = a\nabla_V Y + b\nabla_W Y$ para cada $V, W, Y \in \Xi_M$.
2. $\nabla_V(fY) = f(m)\nabla_V Y + V(f)Y|_m$, siendo f una función diferenciable, $m \in M$ y $V, Y \in \Theta_M$.

Decimos que $\nabla_X Y$ es la derivada covariante de Y en la dirección de X respecto a la conexión ∇ .

Ejemplo 4.3 (Conexión estándar de \mathbb{R}^n)

Sea (\mathbb{R}^n, ϕ) la carta identidad en \mathbb{R}^n , sea $p \in \mathbb{R}^n$, sea $v \in T_p \mathbb{R}^n$, sea X un campo de vectores, que podemos expresar en la base del espacio tangente $(\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi_n})$ como $X = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}$. En estas condiciones se define el operador D conexión estándar, de la siguiente manera:

$$D_v X = v(f_1) \left(\frac{\partial}{\partial \phi_1} \right) |_p + v(f_2) \left(\frac{\partial}{\partial \phi_2} \right) |_p + \dots + v(f_n) \left(\frac{\partial}{\partial \phi_n} \right) |_p \quad X, V \in \Theta_M \quad (21)$$

En particular, tenemos que para la conexión estándar se cumple la propiedad: $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ (Esta no es una propiedad general de las conexiones).

Definición 4.32

Sea ∇ una conexión lineal, definimos la **torsión** por la siguiente aplicación: $\Gamma_\nabla : \Theta_M \times \Theta_M \rightarrow \Theta_M \quad (X, Y) \Gamma(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$. Γ es una aplicación \mathcal{C}_M^∞ . Γ define un campo tensorial de tipo (1,2).

Definición 4.33

Una conexión Γ es simétrico si se cumple que $\Gamma_\nabla = 0$.

Teorema 4.2

Existencia de la conexión de Levi-Cevita.

Sea M una variedad semiriemanniana con tensor métrico g . Existe una única conexión que denotamos por D y se denomina conexión de Levi-Cevita que verifica:

1. D tiene torsión nula, $[V, W] = D_V W - D_W V$ para cada $V, W \in \Xi_M$, es decir D es simétrica.

2. D es compatible con la métrica: $Xg(V, W) = g(D_x V, W) + g(V, D_X W)$.

A continuación, a través de la fórmula de Kozul obtendremos una caracterización de la Conexión de Levi-Cevita.

Teorema 4.3

Fórmula de Kozul:

$$g(Z, D_Y X) = \frac{1}{2}(Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g([X, Z], X) - g([X, Y], Z)) \quad (22)$$

Ejemplo 4.4 (Descripción de una Conexión lineal en términos de cartas locales)

Sea M una variedad diferenciable, consideramos la carta local

$(U, \psi : U \subset M \rightarrow V$ con $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$), sean X e Y dos campos de vectores en M , es decir, $X, Y \in M$, tenemos que $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \psi_i}$ e $Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial \psi_j}$ es la expresión de dichos campos de vectores en la carta local considerada, en estas condiciones podemos expresar la conexión lineal como:

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n a_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi_i}} Y$$

donde:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi_i}} Y = \sum_{j=1}^n a_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi_i}} \frac{\partial}{\partial \psi_j} Y$$

donde:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi_j}} (b_j \frac{\partial}{\partial \psi_j}) = b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi_i}} \frac{\partial}{\partial \psi_j} + \frac{\partial b_j}{\partial \psi_i} \frac{\partial}{\partial \psi_j}$$

siendo:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi_i}} (\frac{\partial}{\partial \psi_j}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial \psi_k}$$

Los coeficientes Γ_{ij}^k que aparecen en la fórmula precedente son los llamados Símbolos de Christoffel. Los símbolos de Christoffel determinan la conexión ∇ sobre el abierto U , tal y como hemos visto con el desarrollo precedente.

Ejemplo 4.5 (Conexión en \mathbb{R}_ν^n)

La conexión natural es la conexión de Levi-Cevita en el espacio \mathbb{R}_ν^n para cada índice ν , con $\nu = 0, 1, \dots, n$.

Definición 4.34

Sean (x_1, x_2, \dots, x_n) las coordenadas usuales en el semiespacio euclídeo R_ν^n , sean V y W dos campos de vectores en R_ν^n , entonces el campo de vectores descrito como $D_V W = \sum_{i=1}^n V(W^i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ es la **derivada covariante natural** de W respecto de V .

Observación 4.4

Como vamos a ver, la conexión natural D de la definición previa es la conexión de Levi-Cevita en el espacio \mathbb{R}_ν^n para cualquier índice ν .

4.3.2. Transporte paralelo, geodésicas y aplicación exponencial.

Definición 4.35

Un campo de vectores sobre una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow M$ es la aplicación $Z : I \rightarrow TM$, de modo que se cumple $\pi \circ Z = \alpha$, siendo π la proyección de TM en M , $Z(t) \in T_{\alpha(t)}M$.

El campo de vectores Z actúa sobre cada punto $t \in I$ asignándole un vector tangente a M en $\alpha(t)$. Además, tenemos que Z es diferenciable como aplicación de $I \rightarrow TM$ si y solo si para todo f en $\mathcal{C}_M^\infty(U)$ se cumple que $Zf \in \mathcal{C}_M^\infty(U)$ siendo $Zf(t) = Z(t)f \forall p \in I$.

De nuevo se tiene que el conjunto de todos los campos de vectores sobre una curva $\alpha : I \rightarrow M$, al que denotamos por $\Theta_M(\alpha)$ es de manera natural un $\mathcal{C}_M^\infty(U)$ -módulo.

Ejemplo 4.6

La velocidad de una curva $\alpha' : I \rightarrow TM$ que lleva cada punto t en $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$ da lugar a un campo de vectores sobre la curva $\alpha : I \rightarrow M$ en la variedad diferenciable M

$$\alpha'(t) = d\alpha \frac{d}{dt} \Big|_p \in T_p M$$

Definición 4.36

$\alpha : I \rightarrow M$ es una **curva integral** del campo de vectores $Z \in \Theta(M)$ si se tiene que $\alpha' = Z_\alpha$, es decir si se cumple $\alpha'(t) = Z_{\alpha(t)} \forall t \in I$.

Si trabajamos en las coordenadas dadas por la carta local $(U, x = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ podemos escribir $F^i(x_1 \circ \alpha, x_2 \circ \alpha, \dots, x_n \circ \alpha) = \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt}$ denotando F^i la i -ésima expresión en coordenadas de Z_{x_i} .

Proposición 4.3

Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva sobre la variedad semiriemanniana M , entonces

existe un única aplicación:

$$\frac{D}{dt}\Theta_M(\alpha) \rightarrow \Theta_M(\alpha)$$

$$Z \rightarrow Z' = \frac{DZ}{dt} \quad (23)$$

llamada **derivada covariante inducida** que cumple las propiedades:

1. $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2', \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. $(hZ)' = \frac{dh}{dt}Z + hZ', \forall h \in \mathcal{C}_M^\infty(I)$
3. $(X_\alpha)'(t) = D_{X_{\alpha(t)}}(X), \forall t \in I \text{ y } \forall X \text{ in } \Theta(M)$
4. $\left(\frac{d}{dt}\right) \langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle Z_1', Z_2 \rangle + \langle Z_1, Z_2' \rangle$

La demostración de esta proposición puede ser consultada en [1, Pág 65,66]

La derivada covariante inducida a lo largo de una curva que acabamos de presentar, solo depende de los valores del campo sobre dicha curva, de esta forma podemos definir la derivada covariante de un campo a lo largo de una curva sin la necesidad de que el campo este definido sobre toda la variedad. Considerando una carta local e introduciendo los símbolos de Christoffel tenemos una expresión en coordenadas de la mencionada derivada covariante de un campo a lo largo de una curva.

Corolario 4.2

Sea Z un campo de vectores sobre la curva, sea $(U, x=x_1, x_2, \dots, x_n)$ una sistema de coordenadas. Si $Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}|_\alpha$ en $\alpha^{-1}(U)$, entonces tenemos la siguiente expresión: (también en $\alpha^{-1}(U)$)

$$Z' = \sum_k \left[\frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \alpha) \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} Z^j \right] \frac{\partial}{\partial x_k}|_\alpha \quad (24)$$

Definición 4.37

Sea $Z : I \rightarrow TM$ un campos de vectores sobre la curva $\alpha : I \rightarrow M$, decimos que el campo Z_α es **paralelo** si tiene derivada covariante inducida nula, $Z' = \frac{DZ}{dt} = 0$.

Proposición 4.4

Dada una curva $\alpha : I \rightarrow M$, sea $t \in I$ y $z \in T_{\alpha(t)}$, existe un único campo de vectores paralelo $Z \in \Theta_\alpha(M)$ cumpliendo $Z(\alpha) = z$.

Con la misma notación que hemos empleado en la proposición previa tenemos:

Definición 4.38

Sea $t' \in I$, la aplicación $P = P_{t'}' : T_p M \rightarrow T_q M$ que lleva cada z en $Z(t')$ se llama **transporte paralelo** a lo largo de α entre $p = \alpha(t)$ y $q = \alpha(t')$.

Lema 4.2

El transporte paralelo es una isometría lineal.

Demostración. Se puede consultar en [1, Págs 66 y 67]. □

Ejemplo 4.7

En el espacio de Minkowski \mathbb{R}_v^n tenemos que los campos de vectores coordenadas dados por la carta local usual son campos paralelos así como sus restricciones a cualquier curva. En este caso el transporte paralelo de p a q es el isomorfismo canónico $v_p \rightarrow v_q$, este caso particular se llama **paralelismo distante**.

A continuación, gracias a las conexiones estudiadas anteriormente, vamos a poder definir la aceleración de una curva dada y de esta forma introducir el concepto de geodésica.

Definición 4.39

Sea M una variedad semiriemanniana y sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva sobre M , la **aceleración** de la curva α es la derivada covariante de su velocidad α' , es decir, $\alpha'' = \frac{D\alpha'}{dt}$.

Definición 4.40

Una curva $\alpha : I \rightarrow M$ es una **geodésica** si el campo de vectores $\alpha'(t)$ sobre α es un campo paralelo, o lo que es lo mismo que α tenga aceleración nula, $\alpha'' = \frac{D\alpha'}{dt} = 0$.

A continuación vamos a distinguir si una curva es una geodésica atendiendo a sus coordenadas en una carta dada.

Corolario 4.3

Si $(U, x = x_1, x_2, \dots, x_n)$ una carta local en M , $\alpha : I \rightarrow U$ es una geodésica en M si y solo sus funciones coordenadas $x_i \circ \alpha$ verifican

$$\frac{d^2(x_k \circ \alpha)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x_j \circ \alpha)}{dt} = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (25)$$

Observación 4.5

Las expresiones previas son las componentes de α'' en los campos de vectores coordenados $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$.

Ejemplo 4.8 (Geodésicas en \mathbb{R}_v^n :)

En las coordenadas dadas por la carta local usual de \mathbb{R}_v^n hemos visto que los coeficientes de Christoffel eran nulos, por este motivo la expresión de la curva geodésica de \mathbb{R}_v^n en coordenadas del corolario previo, adquiere la forma:

$$\frac{d^2(u_i \circ \alpha)}{dt} = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

Las ecuaciones dadas por la expresión previa son ecuaciones diferenciales cuya solución en coordenadas es $u_i(\alpha(t)) = p_i + tv_i$. Vectorialmente $\alpha(t) = p + tv$.

Se deduce que las geodésicas en \mathbb{R}_v^n son líneas rectas.

A partir del teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales en el contexto de las geodésicas tenemos:

Proposición 4.5

Sea $v \in T_pM$. Existe un intervalo I que contiene al 0 u una única geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ que verifica que $\gamma'(0) = v$. Si $\gamma(0) = p$ tenemos que γ es una geodésica que comienza en 0 con velocidad v .

Proposición 4.6

Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ dos geodésicas en M . Si existe un $a \in M$ de modo que $\alpha'(a) = \beta'(a)$, entonces ambas geodésicas son iguales, $\alpha = \beta$

A partir de estas proposiciones se llega al siguiente Teorema:

Teorema 4.4

Sea v un vector tangente a M , $v \in T_pM$. Existe una única geodésica, $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ cumpliendo:

1. $\gamma_v'(0) = v$.
2. I_v es maximal en el sentido de que si consideramos otra geodésica $\alpha : J \rightarrow M$ tenemos que $J \subset I_v$ y $\alpha = \gamma_v|_J$.
A γ_v se le llama **geodésica inextensible** o maximal.

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \{\gamma : I_\gamma \rightarrow M : \gamma'(0) = v\}$ el conjunto de todas las geodésicas en M con velocidad inicial v . La proposición 4.6 nos garantiza que hay alguna geodésica en el conjunto \mathcal{G} , por tanto, \mathcal{G} es no vacío. Si $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$, ambas geodésicas coinciden en $I_\alpha \cap I_\beta$ de acuerdo con la proposición 4.6 y tomando la colección de geodésicas en \mathcal{G} podemos definir una geodésica γ de intervalo $I = \cup_{\gamma \in \mathcal{G}} I_\gamma$. γ siendo la geodésica que satisface las condiciones del enunciado. □

Definición 4.41

M es **geodésicamente completa** si toda geodésica en M esta definida en toda la recta real.

Introducimos la aplicación exponencial para explicar el espacio tangente localmente y sus direcciones a lo largo de la variedad. Gracias a esta aplicación exponencial podremos después definir los "frames".

Definición 4.42

Sea $o \in M$, sea \mathcal{D}_o el conjunto de todos los vectores $v \in T_oM$, tales que la geodésica inextensible γ_v está definida al menos en $[0,1]$.

La **aplicación exponencial** de M en o es $exp_o : \mathcal{D}_o \rightarrow M$ tal que $exp_o(v) = \gamma_v(1)$.

\mathcal{D}_o es el máximo subconjunto en el que se puede definir la aplicación exponencial de M en o .

Ejemplo 4.9 (La aplicación exponencial en \mathbb{R}_v^n)

Sabemos por el ejemplo 4.7 que la geodésica con velocidad inicial $v \in T_p\mathbb{R}_v^n$ es la recta $p+tv$. De acuerdo con la definición previa, la aplicación exponencial en el punto $p \in \mathbb{R}_v^n$ es la que lleva p en $p + v$.

4.3.3. Frame fields

Definición 4.43 ■ Una **sistema de referencias** o "frame" de M en el punto $p \in M$ es una base ortonormal del espacio tangente T_pM para la métrica que nos proporciona el tensor métrico g de la variedad M .

- Un **campo de referencia** es un conjunto de n campos de vectores $E_1, E_2, \dots, E_n \in \Theta_M$ mutuamente ortogonales entre sí y unitarios, tales que en cada punto $p \in M$ tenemos que $\{E_1(p), E_2(p), \dots, E_n(p)\}$ es un sistema de referencias.
- Un **campo de referencias sobre una curva** $\alpha : I \rightarrow M$ es el conjunto de campos de vectores sobre α mutuamente ortogonales y unitarios.

Los campos de vectores sobre α , $E_i \in \Theta_\alpha(M)$ de la última parte de la definición anterior les podemos elegir de modo que sean paralelos.

Corolario 4.4

Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva, sea e_1, e_2, \dots, e_n un sistema de referencias de en $\alpha(0)$. Entonces existe un único campo de referencias paralelo $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ tal que $E_i(0) = e_i$.

Ejemplo 4.10

Los campos de vectores coordinados en la carta local usual de \mathbb{R}^n forman un sistema de referencias en \mathbb{R}^n .

Todo campo de vectores V , le podemos expresar en términos de un sistema de referencias $V = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(V, E_i) E_i$ siendo $\epsilon_i = g(E_i, E_i)$ donde $g(V, W) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(V, E_i) g(W, E_i)$.

Los sistemas de referencias siempre existen localmente en una variedad M , aunque pueda no haber un sistema de referencias en todo M . Sea e_1, e_2, \dots, e_n un sistema de referencias en T_oM , sea \mathcal{U} un entorno normal de o en M , podemos extender mediante transporte paralelo a través de geodésicas radiales el sistema de referencias considerado a un campo de referencias $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, donde cada campo de vectores E_i es diferenciable de acuerdo con la teoría de Ecuaciones diferenciales.

5. Teoría de la Relatividad Especial

Para explicar los fenómenos físicos que constituían la Teoría de la Relatividad Especial se tuvo que recurrir a una geometría más acorde con los nuevos planteamientos, la Geometría de Lorentz cuatridimensional, cuyo desarrollo e impulso definitivo llevó a cabo el matemático, y profesor de Einstein, Hermann Minkowski (1864 - 1909), a través del espacio que recibe su nombre. En palabras del propio Einstein: "... antes de la investigación de Minkowski era preciso aplicar una transformación de Lorentz a una ley para comprobar su invariancia frente a tales transformaciones, mientras que él consiguió introducir un formalismo que hace que la propia forma matemática de la ley garantice su invariancia frente a las transformaciones de Lorentz". [14]

5.1. Geometría Lorentziana. Causalidad y Orientación

En esta subsección M siempre representa una variedad de Lorentz (Variedad semiriemanniana de índice 1 y dimensión ≥ 2).

Definición 5.1

Dado $v \in T_p M$ tenemos las siguientes posibilidades:

- v es de **tipo espacial** si $g(v,v) > 0$ o $v=0$.
- v es de **tipo luz** o nulo si $g(v,v)=0$ con v no nulo.
- v es de **tipo temporal** si $g(v,v) < 0$.

Se llama **cono del luz**, o cono nulo, al conjunto de todos los vectores nulos del espacio tangente $T_p M$. La categoría en la que se clasifica a cada uno de los vectores tangentes, como acabamos de ver, se denomina **carácter causal**

Definición 5.2

El carácter causal de una curva en M , $\alpha : I \rightarrow M$ coincide con el carácter causal de sus vectores de velocidad $\alpha'(t)$, $t \in I$.

Observación 5.1

Este mencionado carácter causal para curvas se tiene en especial en el caso de las curvas geodésicas γ ya que, en estos casos, γ' es paralelo y el carácter causal se conserva a través del transporte paralelo.

Definición 5.3

Denotamos por \mathcal{F} al conjunto de todos los vectores de tipo temporal en el espacio de Lorentz V .

Para cada $v \in \mathcal{F}$ definimos el **cono temporal** en V como $C(v) = \{v \in \mathcal{F} : g(v, u) < 0\}$, siendo el cono opuesto $-C(v) = \{v \in \mathcal{F} : g(v, u) > 0\}$, al ser v^\perp de tipo espacial, \mathcal{F} es la unión disjunta de ambos conos temporales.

Definición 5.4

Un vector tangente v a M que no sea de tipo espacial recibe el nombre de **vector causal**.

Llamamos **cono causal** al conjunto $\hat{C}(v)$ formado por todos los vectores causales w en M , tales que $g(v, w) < 0$. Se llama **curva causal** a aquellas curvas en M cuyos vectores de velocidad son todos no espaciales.

La existencia de dos conos temporales indistinguibles en cada espacio tangente $T_p M$ para cada $p \in M$, siendo M una variedad de Lorentz, nos lleva hasta el concepto de orientación que consistirá en elegir uno de los dos conos y a este hecho le llamaremos orientación temporal.

Definición 5.5 ■ Una **orientación tiempo** en M es una asignación diferenciable que lleva a cada punto $p \in M$ a un cono temporal C_p de $T_p M$. Para que sea diferenciable se tiene que cumplir que para un entorno U de cada punto $p \in M$ existe un campo de vectores $X \in \Theta_M(U)$ temporal, es decir que se tenga que $X(q) \in C_q$ para todo q en U .

- M es **tempo-orientable** si M admite una orientación por tiempo.
- Elegir una orientación determinada para M se llama **tempo-orientar**.

El siguiente lema nos proporciona una forma sencilla de saber cuando una variedad M es tempo-orientable.

Lema 5.1

M es tempo-orientable si y solo si existe un campo de vectores temporal en M , $X \in \Theta(M)$.

Demostración. Se puede consultar en [1, Pág145] □

5.2. Elementos de la Relatividad Especial.

5.2.1. El espacio-tiempo de Newton

Antes de entrar en el espacio-tiempo de Minkowski vamos a recordar la situación previa dentro de la física de Newton, esto nos permitirá hacer comparativas cuando comencemos a estudiar los hechos más significantes de la Relatividad especial.

Definición 5.6 ■ *El espacio newtoniano es el espacio tridimensional euclídeo E , E es una variedad riemanniana isométrica a \mathbb{R}^3 junto con el producto escalar usual.*

- *El tiempo newtoniano es la línea recta \mathbb{R} .*
- *Una partícula newtoniana es una curva $\alpha : I \rightarrow E$ en el espacio newtoniano siendo I un intervalo en el tiempo newtoniano.*

Definición 5.7 ■ *Un espacio-tiempo de Newton es el producto $\mathbb{R} \times E$ donde \mathbb{R} es el tiempo newtoniano y E es el espacio newtoniano.*

- *Un punto $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times E$ del espacio-tiempo es un evento newtoniano.*
- *La línea de vida de una partícula $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R} \times E$ es el grafo de dicha partícula.*

5.2.2. Espacio-tiempo de Minkowski

Observación 5.2

*A partir de ahora M siempre representa el espacio-tiempo de Minkowski y denotaremos por g a la métrica de Minkowski en dicho espacio. La orientación de tiempo que escogemos en M se llama **futuro**, siendo la orientación opuesta el pasado.*

Definición 5.8

Un espacio-tiempo es una variedad semiriemanniana de Lorentz de dimensión 4 y que admite una orientación de tiempo.

Un espacio-tiempo de Minkowski M es un espacio-tiempo isométrico al 4-espacio \mathbb{R}_1^4 .

Definición 5.9

Se dice que un vector tangente en M apunta al futuro si se encuentra en el cono causal futuro. Una curva causal apunta al futuro si todos sus vectores de velocidad son vectores que apuntan al futuro.

Al igual que en la relatividad de Galileo y Newton, una partícula modeliza la línea de vida de un objeto que se presupone con un “reloj interno” capaz de medir el tiempo propio.

Cualquier partícula $\gamma : I \rightarrow M$ es una curva regular, siendo $\gamma(I)$ la subvariedad 1-dimensional llamada **línea de vida** de γ .

Definición 5.10

Una **partícula material** en M , también llamada **observador**, es una curva $\alpha : I \rightarrow M$ de tipo temporal que apunta al futuro, tal que se tiene $|\alpha'(\tau)| = 1 \forall \tau \in I$. El parámetro τ es el **tiempo propio**.

De nuevo, como en el caso de la relatividad de Galileo observamos que solo los intervalos de tiempo propio son los que nos resultan relevantes, si α es una partícula entre $\alpha(\tau_1) = p$ y $\alpha(\tau_2) = q$, entonces, observamos que la longitud de arco entre τ_1 y τ_2 es el tiempo propio que ha transcurrido.

Definición 5.11

Una **partícula de tipo luz** $\alpha : I \rightarrow M$ es una geodésica nula apuntando al futuro.

Observación 5.3

Se puede asignar masa a las partículas, aunque no incidiremos mucho en ello, de esta forma se tiene que las partículas luminosas tienen masa nula y las partículas materiales masa positiva.

Definición 5.12

Un **observador en caída libre** es una partícula en M que es geodésica.

Observación 5.4

Generalmente el concepto de caída libre está asociado a movimientos que se encuentran sometidos a la acción de la gravedad únicamente. Como se puede comprobar en [1, Pags 164, 228, 333] el espacio-tiempo de Minkowski es el único espacio completo, plano, simplemente conexo y variedad de Lorentz de dimensión 4. Debido a ser un espacio plano el estudio de la relatividad en este espacio-tiempo se limita a las situaciones en las que la gravedad es despreciable.

Definición 5.13

Un **sistema de coordenadas inercial** es una isometría cualquiera $\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ que conserva la orientación dada por el tiempo.

Dado un sistema de coordenadas en M , $\varepsilon = (x_0, x_1, x_2, x_3) : M \rightarrow \mathbb{R}^4$, se trata de un sistema de coordenadas inercial si se cumple $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon$ siendo

$\epsilon = (-1, 1, 1, 1)$ y $\frac{\partial}{\partial x_0}$ es un vector que apunta al futuro.

Con el siguiente lema podemos relacionar los sistemas de referencias con los sistemas de coordenadas inerciales.

Lema 5.2

Dado un sistema de referencias $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ en T_pM tal que e_0 es un vector que apunta al futuro, existe un único sistema de coordenadas inercial tal que $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, $0 \leq i \leq 3$.

Como M es isométrico al espacio \mathbb{R}_1^4 , en M tenemos la geometría propia de este último, que es la que venimos desarrollando en el capítulo precedente dedicado a las variedades semiriemannianas. Algunos de los hechos especialmente destacables, en los que volvemos a insistir son:

Dados $p, q \in M$ tenemos:

- Existe una única geodésica $\alpha : I \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$.
- La isometría lineal entre T_pM y T_qM es el paralelismo distante.
- La aplicación $exp_p : T_pM \rightarrow M$ que lleva cada v_p en $p+v$ es una isometría.

De esta forma, podemos simplificar nuestras explicaciones ya que desde un punto de vista geométrico resulta lo mismo observar M desde p , que observar T_pM desde 0 , esto nos va a permitir trasladar la causalidad de T_pM a M .

Definición 5.14

*Dados $p, q \in M$ y sea $\alpha : I \rightarrow M$ es la única geodésica que cumple que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. El **vector desplazamiento** \vec{pq} es $\alpha'(0)$.*

Podemos expresar dicho vector de desplazamiento en términos de un sistema de coordenadas inercial $\epsilon = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ como:

$$\vec{pq} = \sum_{i=0}^3 (x_i(q) - x_i(p)) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

La definición previa nos permite expresar el cono temporal futuro en p como $\{q \in M : \vec{pq} \text{ es un vector de tipo tiempo que apunta al futuro}\}$ siendo su frontera, salvo por p , el cono de luz futuro en p $\{q \in M : \vec{pq} \text{ es un vector de tipo luz que apunta al futuro}\}$ y la unión de estos dos conos futuros constituye el cono causal futuro en p . Definiciones análogas se pueden obtener considerando en M la orientación opuesta-pasado. La unión del cono de luz pasado en p y el cono de luz futuro en p constituye el cono de luz en p $\Lambda(p)$.

Si tenemos un punto $q \in M$ que no pertenece al cono causal en p , entonces q es de tipo espacial relativo a p , es decir, \vec{pq} es un vector de tipo espacial. La idea de causalidad se materializa en el hecho de que un evento $p \in M$ influye sobre un evento q si y solo si existe una partícula que va desde p hasta q , dicha partícula puede ser de tipo luz o material.

Explicamos desde un punto de vista de la Física el significado de la causalidad:

Lema 5.3 ■ *Los únicos eventos que pueden ser influenciados por un evento p son aquellos que se encuentran en el cono causal futuro de p .*

- *Los únicos eventos que pueden influenciar un evento p son aquellos que se encuentran en el cono causal pasado de p .*
- *La mayoría de los eventos, aquellos que son de tipo espacial relativos a p no influyen, ni pueden ser influenciados por p .*

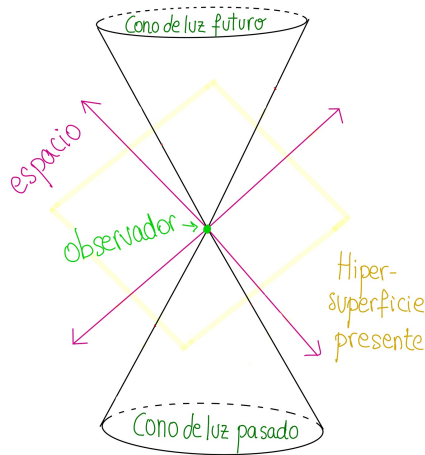


Figura 22: Representación del cono causal.

En este contexto de la geometría de Minkowski recordamos el concepto de separación mencionada en la introducción

Definición 5.15

Dados dos eventos $p, q \in M$, se define la **separación** entre p y q como el número $|\vec{pq}| > 0$.

De nuevo podemos expresar este concepto en el sistema de coordenadas inercial ε :

$$pq = |-(x_0q - x_0p)^2 + \sum_1^3 (x_iq - x_ip)^2|^{\frac{1}{2}}$$

Desde el ámbito de la Física podemos interpretar el concepto de separación:

1. Si \vec{pq} es un vector de tipo temporal que apunta al futuro, la separación pq es el tiempo propio transcurrido por un observador en caída libre, siendo este tiempo pq .
2. Si \vec{pq} es un vector de tipo luz que apunta al futuro, entonces la separación pq es nula.
3. Si \vec{pq} es de tipo espacial que apunta al futuro, entonces $pq > 0$ y representa la distancia entre p y q medida por un observador en caída libre que es ortogonal al vector \vec{pq} .

5.2.3. Observación de partículas:

Sea ξ un sistema de coordenadas inercial en M , $\xi = (x_0, x_1, x_2, x_3) \therefore x_0$ representa la línea de vida de un observador en caída libre que denotamos ω , parametrizando ω tenemos $x_0\omega(t) = t$ siendo t su tiempo propio. Los números que se obtienen a través de ξ son las medidas que toma el observador ω . $\{x_0 = 0\}$ se identifica con el espacio euclídeo E_0 que es isométrico linealmente a \mathbb{R}^3 mediante $q \rightarrow (x_1(q), x_2(q), x_3(q))$.

Observación 5.5

En esta subsección $\xi = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ representa siempre un sistema de coordenadas inercial en M .

Definición 5.16

Sea $p \in M$ un evento. Llamamos ξ -tiempo de p es $x_0(p)$ y $\vec{p} = (x_1(p), x_2(p), x_3(p))$ recibe el nombre de ξ -posición de p .

En los siguiente vamos a tratar de determinar el ξ -tiempo y la ξ -posición de una partícula $\alpha : I \rightarrow M$ material o de tipo luminoso.

Para cada $s \in M$ (tiempo propio de α en caso de que esta sea una partícula material) tenemos:

- ξ -tiempo es $x_0(\alpha(s))$.
- ξ -posición es $(x_1(\alpha(s)), x_2(\alpha(s)), x_3(\alpha(s)))$.

Como α es una curva causal que apunta al futuro de acuerdo con las definiciones que hemos dado tanto de partícula material como de partícula de tipo luz tenemos.

$$\frac{d(x_0 \circ \alpha)}{ds} = -g(\alpha', \frac{\partial}{\partial x_0})$$

$x_0 \circ \alpha$ es un difeomorfismo de I en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$ y $u : J \rightarrow I$ su función inversa.

Para un determinado ξ -tiempo t con $t \in J$ tenemos que la ξ -posición de α es $\vec{\alpha} = (x_1\alpha u(t), x_2\alpha u(t), x_3\alpha u(t))$.

Definición 5.17

*La curva $\vec{\alpha} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ en el espacio euclídeo E_0 se llama la **partícula de Newton asociada**.*

La relación entre una partícula α y su partícula de Newton es la vía de desarrollo de la Teoría de la relatividad especial, pues estudiando los conceptos newtonianos sobre $\vec{\alpha}$ encontramos los análogos relativistas sobre

α dando lugar a comparaciones.

La relación entre los parámetros t y s viene dado por $t = x_0\alpha(s)$ y $s = u(t)$ teniéndose además $\frac{dt}{ds} = \frac{d(x_0\circ\alpha)}{ds} > 0$.

También obtenemos mediante la regla de la cadena $\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \frac{d\vec{\alpha}/ds}{dt/ds}$. Por tanto estamos en condiciones de establecer la relación entre las partículas tanto materiales como luminosas con sus partículas de Newton asociadas.

Proposición 5.1

Si γ es un partícula de tipo luz en M , su partícula de Newton asociada $\vec{\gamma}$ es una recta con velocidad constante igual a 1.

Demostración. Tenemos que γ es una geodésica en M , por tanto $\xi \circ \gamma$ es una geodésica en \mathbb{R}_1^4 .

γ tiene coordenadas afines dados por $x_i(\gamma(s)) = a_i s + b_i$.

Tomando la proyección sobre $\mathbb{R}^3 \simeq E_0$ tenemos que $\vec{\gamma} = (x_1(\gamma(s)), x_2(\gamma(s)), x_3(\gamma(s)))$ la partícula de Newton asociada a γ es un línea recta.

De nuevo como γ es una geodésica se tiene:

$$\frac{d\gamma}{ds} = \sum_{i=0}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{dt}{ds} \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{j=1}^3 \frac{d(x_j \circ \gamma)}{ds} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Como $\frac{dt}{ds} > 0$ necesariamente se tiene que $\frac{dt}{ds} = \left| \frac{d\vec{\gamma}}{ds} \right|$ obteniendo así $v = \left| \frac{d\vec{\gamma}}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{\gamma}/ds}{dt/ds} \right| = 1$. □

La velocidad de la luz es constantemente igual a 1 para todo observador en caída libre.

Proposición 5.2

Sea $\vec{\alpha} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ la partícula de newton asociada a una partícula material $\alpha : I \rightarrow M$:

1. La velocidad de la partícula de Newton asociada $\vec{\alpha} \left| \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \right|$ es $v = \tan\phi$ siendo ϕ es ángulo hiperbólico que forman $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$ y el vector $\frac{\partial}{\partial x_0}$ siendo $0 \leq v < 1$.
2. La relación entre el tiempo τ y el ξ -tiempo esta dado por:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{d(x_0 \circ \alpha)}{d\tau} = \cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

(v y ϕ son funciones de α).

Demostración. Sean α' y $\frac{\partial}{\partial x_0}$ vectores de tipo temporal que apuntan al futuro. Existe un único ángulo hiperbólico $\phi \geq 0$ entre dichos vectores que esta determinado por $-g(\alpha', \frac{\partial}{\partial x_0}) = \cosh \phi \geq 1$.

Como $\alpha' = \sum \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}$ entonces $\frac{dt}{d\tau} = \frac{d(x_0 \circ \alpha)}{d\tau} = -g(\alpha', \frac{\partial}{\partial x_0}) = \cosh \phi$.

La expresión $g(\alpha', \alpha') = -1$ se convierte en $-(\frac{dt}{d\tau})^2 + |\frac{d\vec{\alpha}}{dt}|^2 = -1$.

Como $\phi \geq 0$, $|\frac{d\vec{\alpha}}{dt}| = \sqrt{\cosh^2 \phi - 1} = \sinh \phi \geq 0$. Por tanto, $\vec{\alpha}$ tiene velocidad $v = |\frac{d\vec{\alpha}}{dt}| = \frac{d\vec{\alpha}/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \tanh \phi$.

Usando las idéntidades hiperbólicas obtenemos que $\cosh \phi = \frac{1}{1-v^2}$. □

Interpretamos los hechos anteriormente descritos desde el punto de vista del observador en caída libre ω .

- Tiempo: El hiperplano $E_t = \{x_o = t\}$ consiste en los eventos que el observador ω considera simultáneos a $\omega(t)$.
- Espacio: Llamamos espacio de reposo al hiperplano E_0 .
- Velocidad: La función $v = |\frac{d\vec{\alpha}}{dt}|$ es la velocidad de la partícula α relativa al observador ω . Tradicionalmente llamamos a $\phi = \tanh^{-1} v$ parámetro velocidad relativa a ω .
(Para no dar lugar a confusiones, a $\alpha' = \frac{d\alpha}{d\tau}$ se le llama 4-velocidad para distinguirla de $\frac{d\vec{\alpha}}{dt}$, la velocidad relativa de α con respecto a ω en el espacio tridimensional).

De la proposición previa se deduce que cuanto más rápido (mayor valor de v) se mueve la partícula α , su "reloj interno" (tiempo propio) disminuye en relación con el "reloj" del observador ω . Este fenómeno que acabamos de percibir se conoce como la dilatación del tiempo.

5.3. Efectos relativistas

5.3.1. La adición de velocidades.

Consideramos un astronauta R que se aleja de dos cohetes, que denotamos por C y G respectivamente. Suponemos que el cohete G se mueve a velocidad v_1 con respecto al astronauta R y que dicho astronauta se mueve con velocidad v_2 con respecto al cohete C. Nuestro objetivo es calcular la velocidad v con la que se mueve el cohete C con respecto del cohete G. En la teoría clásica, dicha velocidad sería la suma de ambas velocidades, es decir $v = v_1 + v_2$, sin embargo, la teoría especial de la relatividad nos muestra que esto no es así, como vamos a comprobar.

Empleando las transformadas de Lorentz (Boosters) $B_{v_1} : G \rightarrow R$ y $B_{v_2} : R \rightarrow C$, con la composición $B_v = B_{v_1} B_{v_2}$ obtendremos la respuesta deseada.

Para simplificar las cuentas, al ser más sencillo trabajar con rotaciones hiperbólicas, escribimos las transformadas de Lorentz en su versión hiperbólica siendo $B_v = H_u$, $B_{v_1} = H_{u_1}$ y $B_{v_2} = H_{u_2}$ siendo $v = \tanh u$ y $u = \tanh^{-1} v$ (Análogamente con v_1, v_2 y u_1, u_2). Tenemos $H_u = H_{u_2} \cdot H_{u_1}$

El ángulo hiperbólico u si resulta ser la suma de los ángulos hiperbólicos u_1 y u_2 , $u = u_1 + u_2$.

Deshaciendo el cambio efectuado, al cambiar a coordenadas hiperbólicas, podemos concluir:

$$v = \tanh u = \tanh(u_1 + u_2) = \frac{\tanh u_1 + \tanh u_2}{1 + \tanh u_1 \tanh u_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

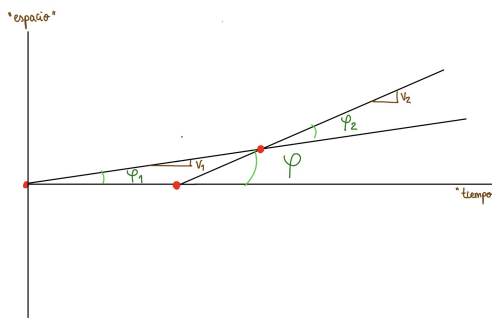


Figura 23: Adición velocidades

Es decir, las velocidades no se suman exactamente siendo la velocidad resultante menor que la suma de velocidades.

Obsérvese que, en el caso de velocidades positivas, que serán menores que la de la luz, es decir, $0 \leq v_1, v_2, < 1$ tenemos que

$$\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} < 1$$

5.3.2. La contracción de Fitzgerald-Lorentz.

Este fenómeno relativista, descubierto por Lorentz y Fitzgerald para explicar el resultado negativo del mencionado experimento de Michelson-Morley, fue descubierto antes de que viesen la luz en 1905 los trabajos de Einstein acerca de la Relatividad especial.

Sea $[\alpha, \beta]$ una “regla” cuyos extremos α y β son observadores en caída libre, y consideramos ω otro observador en caída libre.

Fijamos $\alpha(0) = \omega(0)$ y consideramos que la “regla” se mueve a una velocidad v , constante y cercana a la velocidad de la luz, con respecto a ω .

Reflejamos esta situación en la imagen siguiente

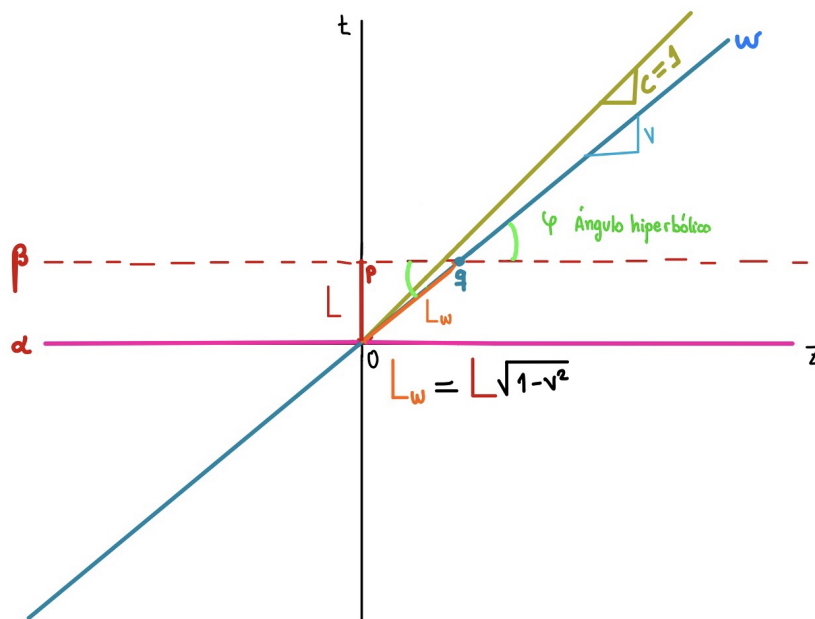


Figura 24: Contracción de la longitud

En estas circunstancias tenemos que si nuestra regla permanece estacionada, es decir ortogonal al eje temporal del observador α , la longitud de la regla que perciben tanto α (L) como ω (L_ω) coinciden $L = L_\omega$, mientras que ω percibe $L_\omega = L\sqrt{1 - v^2}$ cuando la “regla” se mueve a velocidad constante

v respecto de ω

El cálculo por el que deducimos que $L_\omega = L\sqrt{1-v^2}$ en el caso que acabamos de considerar, lo podemos comprobar de forma geométrica fijándonos en la figura previa y haciendo uso del conocimiento acerca de las funciones hiperbólicas visto en el primer capítulo. En efecto, como sabemos que $L = L_\omega \cosh(\psi)$, tenemos

$$L_\omega = L\sqrt{1-v^2}.$$

5.3.3. Ejemplo: La paradoja de los gemelos.

Tenemos una pareja de gemelos: Tom y Bob. En su veintiún ambos se separan y Tom emprende un viaje espacial (observador en caída libre) moviéndose a una velocidad constante $v = \frac{24}{25}$. Tom permanece de viaje durante 14 años medidos en su tiempo propio (7 años de ida y 7 años de vuelta), tras ese tiempo regresa a casa el día de su 35 cumpleaños. Sin embargo al reencontrarse con su hermano, resulta que Bob está celebrando su 71 cumpleaños.

Para calcular la edad de Bob nos fijamos en la siguiente figura aplicando las identidades de la geometría hiperbólica.

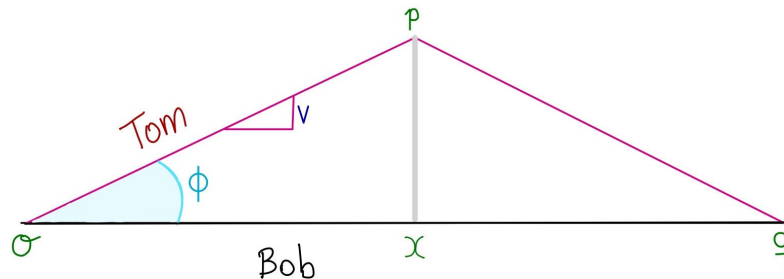


Figura 25: Paradoja de los gemelos

El tiempo transcurrido para Bob es la longitud del segmento oq que es el doble del segmento ox, siendo $ox = op \cosh \phi = \frac{7}{(1-(\frac{24}{25})^2)^{\frac{1}{2}}}$

Entonces, $oq = 2 \cdot 25 = 50$ y la edad de Bob es $21 + 50 = 71$

Este hecho paradójico se debe al cambio de sentido que efectúa Tom al regresar a casa. Este cambio no se puede expresar mediante ningún observador en caída libre, es decir no existe ningún observador cuya línea de vida sea la que describe Tom. Para resolver este inconveniente se necesitan dos sistemas

de referencias inerciales, uno para Tom en el viaje de ida y otro para el viaje de vuelta. En otras palabras, uno de los gemelos ha tenido que experimentar una “aceleración” y el otro no.

5.4. En búsqueda de la Teoría General de la Relatividad:

La Teoría General de la Relatividad, como podemos inducir de su nombre, es una generalización de la Teoría Especial, tras más de diez años de trabajo del propio Einstein, de 1905 a 1916. Ambas teorías están estrechamente ligadas siendo la Teoría Especial el punto de partida de un proyecto que pretende dar respuesta a la universalidad de los fenómenos naturales y que comienza centrándose en los sistemas inerciales dando después paso al resto de ellos, es decir, los sistemas no inerciales en los que la gravedad juega un importante papel, porque al tratar con observadores acelerados el principio de la relatividad especial se mejora con el principio de equivalencia, que incorpora la gravedad como un fenómeno equivalente a la aceleración. Citando [15], tenemos: “Einstein se dio cuenta de que la Teoría de la Gravedad, tal y como fue propuesta por Newton, no era incompatible con la estructura espacio-tiempo que surge de la Teoría de la Relatividad Especial. En la Teoría General no solo se limita a los sistemas inerciales, sino que llega a abarcar cualquier sistema de referencia.”

De otra manera, la Relatividad Especial es un caso particular de la Teoría de la Relatividad General en el espacio-tiempo de Minkowski. Los elementos que hemos ido explicando en secciones previas como los observadores, partículas materiales y luminosas, el tiempo propio..., se definen análogamente en el marco de la teoría general. Además, incidiendo en la amplia relación entre dichas teorías podemos aproximar localmente la Relatividad general por la Relatividad especial (Véase [1, Pág. 333])

Índice de figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 1. | G.Galileo | 6 |
| 2. | I.Newton | 6 |
| 3. | JC.Maxwell | 6 |
| 4. | GF.Fitzgerald | 6 |
| 5. | H.Poincaré | 6 |
| 6. | HA.Lorentz | 6 |
| 7. | AA.Michelson y E.Morley | 6 |
| 8. | H.Minkowski | 6 |
| 9. | Relatividad Especial | 6 |
| 10. | A.Einstein | 6 |
| 11. | <u>Observador G</u> El eje τ es la línea de vida del observador G. La ecuación de movimiento para este caso es: $\begin{cases} \tau = t \\ \zeta = z - vt \end{cases}$ | 8 |
| 12. | <u>Observador R</u> El eje t es la línea de vida del observador R. La ecuación de movimiento para este caso es: $\begin{cases} t = \tau \\ z = \zeta + v\tau \end{cases}$ | 9 |
| 13. | Área que delimitan u radianes | 13 |
| 14. | Relación entre la hipérbola y las funciones hipérbolicas. | 13 |
| 15. | Hipérbolas $t^2 - z^2 = k$ | 14 |
| 16. | Clasificación de los eventos E del espacio-tiempo M | 16 |
| 17. | Vectores de tipo temporal para los que $Q(E) = +1$ | 17 |
| 18. | Vectores unitarios de tipo espacial para los que $Q(E) = -1$ | 17 |
| 19. | Las 6 regiones en las que se divide el espacio-tiempo M | 18 |
| 20. | Ángulo hiperbólico | 19 |
| 21. | Ángulo hiperbólico entre ρ y $H_u(\rho)$ | 20 |
| 22. | Representación del cono causal. | 45 |
| 23. | Adición velocidades | 49 |
| 24. | Contracción de la longitud | 50 |

25. Paradoja de los gemelos 51

6. Bibliografía

Referencias

- [1] B.O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*, Academic Press, California,1983.
- [2] JJ.CALLAHAN, *The Geometry of Spacetime: An Introduction to Special and General Relativity*, Springer, 2000
- [3] FW. WAGNER, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 1983
- [4] NMJ. WOODHOUSE, *Special Relativity*, Springer.
- [5] FI. COOPERSTOCK Y S.TIEU, *Einstein's Relativity*, Springer.
- [6] JA.COLEMAN *Relativity for the Layman*, Penguin Books.
- [7] J.SCHWARTZ Y M.MCGUINNESS, *Einstein para principiantes*, Longseller, 2003.
- [8] S.HACYAN, *Relatividad para principiantes*, Fondo de Cultura Económica.
- [9] B.JANSSEN, *Relatividad y Geometría: Hechas la una para la otra*, ENEM-Granada , 25 julio 2019.
- [10] D.CHINEA, *Sobre la teoría de la Relatividad: Matemáticas del siglo XX*, Sociedad Isaac Newton de Profesores de Matemáticas, Universidad La Laguna.
- [11] S.RAMOS-SANCHEZ, *Relatividad para futuros físicos*, CopIT-archives, Cd.Mx,2018.
- [12] J.BUITRAGO, *La influencia de las matemáticas sobre la teoría de la Relatividad Matemáticas del siglo XX*,Sociedad Isaac Newton de Profesores de Matemáticas, Universidad La Laguna.
- [13] JL SYNGE, A SCHILD, *Tensor Calculus*, Dover publications.
- [14] R.BERENGUER, *Una aproximación geométrica a la equivalencia masa-energía en Relatividad*, Revista Latin-American Journal of Physics Education. Vol. 3, No 1. Junio 2009.

- [15] B.JANSSEN, *Teoría de la Relatividad General*, Universidad de Granada, Granada 2013.
- [16] B.BASSET, R.EDNEY, *Relatividad: Una guía ilustrada*, Tecnos.
- [17] *Diccionario esencial de la física*, vox10 Spes editorial, 2005
- [18] *27- Teoría de la Relatividad Especial-14.07.09*, Universo Paralelo POD-CAST, Universo paralelo files