



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Matemáticas

**Los splines en teoría de la aproximación: una revisión de tipos y técnicas.**

*Autor: Manuel Manzanares Barraión*

*Tutor: Luis M. Abia LLera*



# Índice general

<b>1. Resultados Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Matrices y Determinantes . . . . .	1
1.2. Diferencias Divididas . . . . .	3
1.3. Ceros y Cambios de signo . . . . .	8
1.4. Sistemas de Tchebycheff . . . . .	10
<b>2. Splines Polinomiales</b>	<b>15</b>
2.1. Propiedades básicas . . . . .	15
2.2. B-splines . . . . .	20
2.3. Nudos uniformemente espaciados . . . . .	32
2.4. B-splines perfectos . . . . .	35
2.5. Propiedades de los ceros . . . . .	38
2.6. Teorema de Schoenberg-Whitney . . . . .	44
2.7. Propiedades de variación decreciente . . . . .	52
<b>3. Otros tipos de splines</b>	<b>55</b>
3.1. Splines de Tensión . . . . .	55
3.1.1. Interpolación cúbica a trozos . . . . .	55
3.1.2. $\tau$ splines . . . . .	57
3.1.3. Interpolación por splines de tensión . . . . .	58
3.2. Propiedad variacional del spline cúbico interpolatorio . . . . .	64
3.3. Splines de suavizado . . . . .	68
<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>



# Prefacio

La teoría de splines, desde su introducción a finales de la década de los años 60 del siglo pasado, ha tenido un gran desarrollo debido a su enorme potencial en teoría de la aproximación. Los splines son funciones polinómicas a trozos, con distintos órdenes de regularidad en los nudos que separan los subintervalos, cuya evaluación sólo requiere de sumas y productos, y con representaciones que se almacenan muy eficientemente en la memoria de un ordenador.

El presente Trabajo Fin de Grado se centra en el estudio analítico de las principales propiedades de los espacios de splines, y obvia el tratamiento algorítmico de estas funciones. Concebimos este proyecto como una extensión de la teoría básica de splines que se estudia en el Grado de Matemáticas en distintas direcciones: primero, considera espacios de splines de orden arbitrario y con la posibilidad de que sus sucesiones de nudos puedan incluir nudos repetidos (hasta un cierto orden). Una segunda extensión aborda propiedades de las funciones splines en relación con sus ceros y cambios de signo, así como propiedades teóricas de las matrices de colocación basadas en  $B$ -splines. Un resultado que también se generaliza es el teorema de Schoenberg-Whitney que caracteriza los problemas de interpolación bien puestos. Todo el material sigue el tratamiento de la monografía de Schumacker ([2]).

El capítulo 1 introduce notaciones y resultados preliminares que serán de uso frecuente a lo largo de la Memoria. Un enfoque novedoso con respecto a lo estudiado en el Grado de Matemáticas es el tratamiento basado en determinantes de las diferencias divididas de argumentos repetidos. Se demuestran las propiedades básicas de las diferencias divididas, así como una generalización del teorema de Rolle para su aplicación a funciones regulares a trozos. El capítulo se cierra con la introducción de diversos conceptos de sistemas de Tchebycheff.

El capítulo 2 es la parte principal de la Memoria e introduce los espacios de splines y el estudio y construcción de las bases formadas por  $B$ -splines y sus principales propiedades, que incluyen las relaciones de recurrencia que sirve para computarlos. Se presenta el teorema de Marsden que representa las potencias monomiales en términos de  $B$ -splines y  $B$ -splines normalizados. Los  $B$ -splines perfectos aparecen como  $B$ -splines en redes uniformes y permiten resolver el problema de la transición entre dos valores constantes a lo largo de un intervalo arbitrario. El capítulo se cierra con la prueba del teorema de Schoenberg-Whitney que caracteriza cuando el problema de interpolación por splines

está bien puesto, tanto en el caso de abscisas de interpolación distintas dos a dos, como en el caso osculatorio de abscisas de interpolación repetidas. Una última contribución es el análisis del carácter totalmente positivo de las matrices de colocación basadas en las bases de  $B$ -splines. Una herramienta fundamental para probar estos resultados es el análisis del número de ceros y cambios de signo máximo que puede tener un spline.

El capítulo 3 aborda la construcción de dos tipos diferentes de splines (cúbicos): los  $\tau$ -splines o splines de tensión que mitigan la aparición de puntos de inflexión extraños cuando se utilizan splines cúbicos ordinarios en la interpolación, y los splines mínimos cuadrados o de regularización. Se introduce su motivación y la construcción de los mismos. Todo ello se extrae de los textos de Carl de Boor ([1]) y de Klaus Hölling ([3]).

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

### 1.1. Matrices y Determinantes

Sea  $\{u_i\}_{i=1}^m$  un conjunto de funciones definidas en el intervalo  $I = [a, b]$ , y sean  $t_1, \dots, t_m$  puntos en  $I$  tales que  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ .

Definimos la matriz asociada con  $\{u_i\}_{i=1}^m$  y  $\{t_i\}_{i=1}^m$  por

$$M \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_m \\ u_1, \dots, u_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) & \cdots & u_m(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) & \cdots & u_m(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(t_m) & u_2(t_m) & \cdots & u_m(t_m) \end{bmatrix}$$

Y el determinante viene dado por

$$D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_m \\ u_1, \dots, u_m \end{pmatrix} = \det M \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_m \\ u_1, \dots, u_m \end{pmatrix}$$

También será útil definir matrices asociadas a un conjunto de puntos  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$  donde algunos de estos son iguales entre sí. Para describir exactamente dónde se cumplen las igualdades, suponemos que

$$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m = \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{a_d, \dots, a_d}_{l_d},$$

donde cada  $a_i$  se repite exactamente  $l_i$  veces con  $\sum_{i=1}^d l_i = m$ . Entonces dadas funciones suficientemente diferenciables  $u_1, \dots, u_m$ , definimos

$$M \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_m \\ u_1, \dots, u_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(a_1) & u_2(a_1) & \cdots & u_m(a_1) \\ Du_1(a_1) & Du_2(a_1) & \cdots & Du_m(a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{l_1-1}u_1(a_1) & D^{l_1-1}u_2(a_1) & \cdots & D^{l_1-1}u_m(a_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(a_d) & u_2(a_d) & \cdots & u_m(a_d) \\ Du_1(a_d) & Du_2(a_d) & \cdots & Du_m(a_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{l_d-1}u_1(a_d) & D^{l_d-1}u_2(a_d) & \cdots & D^{l_d-1}u_m(a_d) \end{bmatrix}$$

Naturalmente, denotamos al determinante de la matriz anterior por

$$D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_m \\ u_1, \dots, u_m \end{pmatrix}.$$

Estudiamos a continuación una matriz especial, conocida como la matriz de Vandermonde:

**Definición 1.1.1.** Sea  $U = \{1, x, \dots, x^{m-1}\}$ . Este conjunto de funciones genera el espacio de polinomios de orden  $m$  (véase Teorema 2.1.2.). La **matriz de Vandermonde** se define como

$$VM(t_1, \dots, t_m) = M \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_m \\ 1, \dots, x^{m-1} \end{pmatrix}$$

y el determinante de Vandermonde viene dado por:

$$V(t_1, \dots, t_m) = D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_m \\ 1, \dots, x^{m-1} \end{pmatrix}$$

Siempre que  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$  se satisface

$$V(t_1, \dots, t_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_j - t_i). \quad (1.1)$$

Mientras que para  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m = \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{l_1} < \dots < \underbrace{a_d, \dots, a_d}_{l_d}$ , donde  $l_i$  es el número de veces que se repite  $a_i$ , se satisface

$$V(t_1, \dots, t_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (a_j - a_i)^{l_j l_i} \prod_{i=1}^d \prod_{k=1}^{l_i-1} k! \quad (1.2)$$



## 1.2. Diferencias Divididas

En esta sección se va a realizar un estudio de las propiedades de las diferencias divididas que nos van a ser de gran utilidad en la construcción de los splines, en particular de los B-splines. Las diferencias divididas pueden ser definidas de varias formas equivalentes. Aquí se definirán como cocientes de determinantes. La notación que usaremos para hacer referencia a las diferencias divididas es la que se usa en [2].

**Definición 1.2.1.** Dados los puntos  $t_1, \dots, t_{r+1}$  y una función  $f$ , definimos la **diferencia dividida de orden  $r$**  sobre los puntos  $t_1, \dots, t_{r+1}$  como

$$[t_1, \dots, t_{r+1}] f = \frac{D \left( \begin{array}{c} t_1, \dots, t_{r+1} \\ 1, \dots, x^{r-1}, f \end{array} \right)}{D \left( \begin{array}{c} t_1, \dots, t_{r+1} \\ 1, \dots, x^r \end{array} \right)}. \quad (1.3)$$

En esta definición se ha supuesto que los  $t_i$  vienen determinados en orden creciente para que los determinantes considerados tengan sentido.

Cuando los  $t_i$  son distintos dos a dos, entonces  $[t_1, \dots, t_{r+1}] f$  se define para cualquier función que tiene valores finitos en estos puntos. Cuando algunos de los  $t_i$  se repiten (aparecen más de una vez), entonces el valor del determinante del numerador de (1.3) depende de ciertas derivadas de  $f$ , y la correspondiente diferencia dividida solamente tiene sentido para las funciones  $f$  que poseen las derivadas requeridas.

En el siguiente teorema se presentan algunas propiedades básicas de las diferencias divididas:

**Teorema 1.2.1.** Si  $t_1, \dots, t_{r+1}$  son distintos dos a dos, entonces

$$[t_1, \dots, t_{r+1}] f = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{f(t_i)}{w'(t_i)} = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{f(t_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{r+1} (t_i - t_j)}$$

donde

$$w(t) = (t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_{r+1}).$$

Más generalmente, si

$$t_1, \dots, t_{r+1} = \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{a_d, \dots, a_d}_{l_d}$$

donde  $a_i$  está repetido  $l_i$  veces, para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$ , y  $a_1 < a_2 < \dots < a_d$ . Entonces

$$[t_1, \dots, t_{r+1}] f = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} D^{j-1} f(a_i), \quad (1.4)$$

donde  $\alpha_{ij} \neq 0$ , para  $j \in \{1, 2, \dots, l_i\}$  e  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ .

Además, si  $f$  y  $g$  satisfacen que, para el conjunto de puntos  $\{t_i\}_{i=1}^{r+1}$ ,

$$D^{j-1}f(a_i) = D^{j-1}g(a_i), \quad \text{para todo } j \in \{1, 2, \dots, l\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, d\}$$

entonces se tiene que  $[t_1, \dots, t_{r+1}]f = [t_1, \dots, t_{r+1}]g$ .

De aquí se deduce que la  $r$ -ésima diferencia dividida es un funcional lineal en el espacio de todas las funciones suficientemente suaves.

En el siguiente resultado damos varias propiedades importantes sobre diferencias divididas. De suma importancia es el hecho de que las diferencias divididas pueden calcularse recursivamente.

**Teorema 1.2.2.** Dados los puntos  $t_1, \dots, t_{r+1}$  (no necesariamente ordenados) y sea  $f$  una función suficientemente suave, es decir,  $f \in \mathcal{C}^r([a, b])$ , se tiene que

$$[t_1, \dots, t_{r+1}]f = \frac{[t_2, \dots, t_{r+1}]f - [t_1, \dots, t_r]f}{t_{r+1} - t_1} \quad (1.5)$$

siempre que  $t_1 \neq t_{r+1}$ . Si  $t_1 = t_2 = \dots = t_{r+1}$ , entonces

$$[t_1, \dots, t_{r+1}]f = \frac{D^r f(t_1)}{r!}. \quad (1.6)$$

En general, si  $f \in \mathcal{C}^r[a, b]$ , donde  $a = \min_{1 \leq i \leq r+1} t_i$  y  $b = \max_{1 \leq i \leq r+1} t_i$ , entonces

$$[t_1, \dots, t_{r+1}]f = \frac{D^r f(\theta)}{r!}, \quad \text{para } a \leq \theta \leq b. \quad (1.7)$$

En cuanto a las diferencias divididas de potencias de  $x$ , tenemos

$$[t_1, \dots, t_{r+1}]x^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{0, 1, \dots, r-1\}, \\ s_{j-r}(t_1, \dots, t_{r+1}) & \text{si } j \in \{r, r+1, \dots\} \end{cases} \quad (1.8)$$

donde  $s_0(t_1, \dots, t_{r+1}) = 1$  y

$$s_l(t_1, \dots, t_{r+1}) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_l \leq r+1} t_{i_1} \cdot t_{i_2} \cdots t_{i_l}. \quad (1.9)$$

La suma en (1.9) se toma sobre todas las elecciones de enteros  $l$ , lo que permite que haya repeticiones. Por ejemplo,  $s_1(t_1, \dots, t_{r+1}) = t_1 + \dots + t_{r+1}$ , y  $s_2(t_1, t_2) = t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2$ . El número de términos en la suma es de  $(r+l)!/(r!l!)$ .

**Demostración.** Por la definición de diferencia dividida, si tomamos  $f(x) = x^j$  con  $0 \leq j \leq r-1$ , entonces dos columnas del determinante en el numerador de (1.3) serán iguales, y el valor por tanto de este será cero. Si tomamos  $f(x) = x^r$ , entonces el numerador y el denominador son iguales, y el valor de la diferencia dividida será 1.

Probamos las afirmaciones restantes primero en el caso de que  $t_1 = t_2 = \dots = t_{r+1}$ . En este caso, el denominador en (1.3) es

$$V(t_1, \dots, t_{r+1}) = \prod_{k=1}^r k!,$$

mientras que el numerador es

$$D^r f(t_1)V(t_1, \dots, t_r) = D^r f(t_1) \prod_{k=1}^{r-1} k!,$$

por tanto,

$$[t_1, \dots, t_{r+1}] f = \frac{D^r f(t_1) \prod_{k=1}^{r-1} k!}{\prod_{k=1}^r k!} = \frac{D^r f(t_1)}{r!},$$

lo que prueba (1.6). Más aún, para  $j \geq r$ ,

$$[t_1, \dots, t_{r+1}] x^j = \frac{D^r x^j|_{x=t_1}}{r!} = \frac{j(j-1)\dots(j-r+1)t_1^{j-r}}{r!} \frac{j!t_1^{j-r}}{(j-r)!r!} = s_{j-r}(t_1, \dots, t_{r+1}),$$

lo que prueba (1.8) en este caso.

Supongamos ahora que  $t_1 \neq t_{r+1}$ . Comprobemos el teorema por inducción sobre  $r$ : el caso  $r = 1$  es simple. Supongamos que se cumple para diferencias divididas de orden  $r - 1$ . En primer lugar, probemos (1.5). Consideremos el funcional lineal

$$\lambda f = [t_1, \dots, t_{r+1}] f - \frac{[t_2, \dots, t_{r+1}] f - [t_1, \dots, t_r] f}{(t_{r+1} - t_1)}.$$

Queremos ver que este  $\lambda$  es nulo. Es claro que  $\lambda x^i = 0$  para  $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$  por la fórmula (1.8). Aún más, usando (1.8) para  $r$  puntos y con  $j = r$  tenemos

$$\lambda x^r = 1 - \frac{(t_2 + \dots + t_{r+1}) - (t_1 + \dots + t_r)}{(t_{r+1} - t_1)} = 0.$$

Por otro lado,  $\lambda f$  tiene la forma de suma de (1.4). De esta forma, el conjunto de ecuaciones lineales  $\lambda x^i = 0$  con  $i \in \{0, 1, \dots, r\}$  proporciona un sistema no singular para los coeficientes de  $\lambda$ , concluimos por tanto que  $\lambda = 0$ . Lo que prueba (1.5).

Por la hipótesis de inducción y la definición de la función  $s$ , tenemos

$$\begin{aligned} [t_2, \dots, t_{r+1}] x^j &= \frac{[t_2, \dots, t_{r+1}] x^j - [t_1, \dots, t_r] x^j}{(t_{r+1} - t_1)} \\ &= \frac{s_{j-r+1}(t_2, \dots, t_{r+1}) - s_{j-r+1}(t_1, \dots, t_r)}{(t_{r+1} - t_1)} \\ &= s_{j-r}(t_1, \dots, t_{r+1}). \end{aligned}$$

Se prueba (1.8) para todo  $r$ . Del teorema de la representación de Peano (Teorema 2.2.10), para  $j = 0$  y  $r=m$ , se sigue (1.7):

$$[t_1, \dots, t_{1+r}] f = \int_{t_1}^{t_{r+1}} \frac{Q(x) D^r f(x)}{(r-1)!} dx,$$

donde  $Q$  es una función no negativa que satisface  $\int_{t_1}^{t_{r+1}} Q(x) dx = 1/r$ , fórmula (2.12).  $\square$

La relación de recurrencia (1.5) nos permite calcular las diferencias divididas sucesivas, generando así la siguiente tabla triangular:

$$\begin{array}{ccccccc} & [t_1]f & & [t_2]f & & \cdots & & [t_r]f & & [t_{r+1}]f \\ & [t_1, t_2]f & & \cdots & & & & [t_r, t_{r+1}]f & & \\ & \cdots & & & & & & & & \\ & [t_1, \dots, t_r]f & & [t_2, \dots, t_{r+1}]f & & & & & & \\ & \cdots & & & & & & & & \\ & [t_1, \dots, t_{r+1}]f & & & & & & & & \end{array}$$

El siguiente resultado es una especie de regla de Leibniz para las diferencias divididas del producto de dos funciones:

**Teorema 1.2.3.** Dados  $t_1, t_2, \dots, t_{r+1}$  y sean dos funciones suaves  $f$  y  $g$ .

$$[t_1, \dots, t_{r+1}] fg = \sum_{i=1}^{r+1} [t_1, \dots, t_i] f \cdot [t_i, \dots, t_{r+1}] g. \quad (1.10)$$

**Demostración.** Vamos a proceder por inducción sobre  $r$ . Para  $r = 0$  el resultado es inmediato. Supongamos que se cumple para  $r - 1$ . Si  $t_1 = t_{r+1}$ , tenemos que la fórmula (1.10) es igual a la regla de Leibniz clásica

$$\begin{aligned} \frac{D^r fg}{r!} &= \sum_{i=1}^{r+1} \frac{D^{i-1} f(t_1) D^{r+1-i} g(t_1)}{(i-1)!(r+1-i)!} = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{r! D^{i-1} f(t_1) D^{r+1-i} g(t_1)}{(i-1)!(r+1-i)! r!} = \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} D^i f(t_1) D^{r-i} g(t_1). \end{aligned}$$

donde se ha hecho un cambio de índices en el sumatorio,  $j = i - 1$ . Suponemos ahora que  $t_1 \neq t_{r+1}$ . Usando (1.5) y la regla de Leibniz para  $r$  puntos, es decir la hipótesis inductiva; obtenemos

$$\begin{aligned} [t_1, \dots, t_{r+1}] fg &= \frac{[t_2, \dots, t_{r+1}] fg - [t_1, \dots, t_r] fg}{(t_{r+1} - t_1)} = \\ &= \frac{\sum_{i=2}^{r+1} [t_2, \dots, t_i] f \cdot [t_i, \dots, t_{r+1}] g - \sum_{i=1}^r [t_1, \dots, t_i] f \cdot [t_i, \dots, t_r] g}{(t_{r+1} - t_1)} \end{aligned}$$

Sumando y restando el término

$$\sum_{i=2}^{r+1} [t_1, \dots, t_{i-1}] f \cdot [t_i, \dots, t_{r+1}] g = \sum_{i=1}^r [t_1, \dots, t_i] f \cdot [t_{i+1}, \dots, t_{r+1}] g$$

Combinando obtenemos

$$\begin{aligned} [t_1, \dots, t_{r+1}] fg &= \frac{1}{(t_{r+1} - t_i)}. \\ \cdot \left( \sum_{i=2}^{r+1} [t_1, \dots, t_i] f [t_i, \dots, t_{r+1}] g \cdot (t_i - t_1) + \sum_{i=1}^r [t_1, \dots, t_i] f [t_i, \dots, t_{r+1}] g \cdot (t_{r+1} - t_i) \right) &= \\ &= \sum_{i=1}^{r+1} [t_1, \dots, t_i] f [t_i, \dots, t_{r+1}] g. \end{aligned}$$

Y hemos probado el resultado para  $r + 1$ . □

Un caso especial de diferencias divididas es cuando tenemos puntos equidistantes, es decir, todos ellos distan entre sí la misma distancia, que denotamos  $h > 0$ .

**Definición 1.2.2.** Dados  $h > 0$  y un entero positivo  $r$ , definimos la **diferencia progresiva de orden  $r$**  de  $f$  como

$$\Delta_h^r f(t) = r! h^r [t, t + h, \dots, t + hr] f$$

Veamos seguidamente algunas propiedades

**Teorema 1.2.4.** Dados  $h > 0$  y un entero positivo  $r$  y la diferencia progresiva  $\Delta_h^r f(t)$  de orden  $r$  de  $f$ . Esta tiene las siguientes propiedades:

$$\Delta_h^r f(t) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(t + hi).$$

Si  $f \in L_1^r [t, t + rh]$  (se define en la Definición 2.2.4.), entonces

$$\Delta_h^r f(t) = h^r \int_0^{rh} \frac{D^r f(t + u) N^r(\frac{u}{h})}{h} du$$

donde  $N^r$  satisface

$$0 \leq N^r(x) \leq 1, \quad \int_0^r N^r(x) dx = 1 \quad \text{y} \quad \|N^r\|_{\mathcal{L}_q[0,r]} \leq 1 \quad \text{para todo} \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

**Demostración.** La demostración podemos encontrarla en [[2], pag.70].

### 1.3. Ceros y Cambios de signo

En esta sección se presentan algunos procedimientos de conteo para cambios de signo y ceros de funciones.

**Definición 1.3.1.** Sea  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  un vector de números reales. Definimos el número de **cambios fuertes de signo** de  $\mathbf{v}$  como número de cambios de signo en la sucesión  $v_1, \dots, v_n$  donde los ceros son ignorados. Se denota por  $S^-(\mathbf{v})$ .

Análogamente, definimos el número de **cambios débiles de signo** de  $\mathbf{v}$  como el número máximo de cambios de signo en la secuencia  $v_1, \dots, v_n$  donde cada cero puede ser considerado como  $+1$  o  $-1$ , dependiendo de cuál de estos haga que el valor de conteo sea mayor. Se denota por  $S^+(\mathbf{v})$ .

Es obvio que

$$S^-(\mathbf{v}) \leq S^+(\mathbf{v}) \text{ para todo } \mathbf{v}.$$

**Definición 1.3.2.** Sea  $I = [a, b]$  un intervalo cerrado finito. Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una **función real y acotada** en  $I$  si

$$|f(x)| < \infty \text{ para todo } x \in I.$$

El conjunto de todas las funciones reales y acotadas sobre  $I$  se denota por  $B[I]$ .

**Definición 1.3.3.** Sea  $f$  una función real acotada en un subconjunto de la recta real  $\mathbb{R}$ . Llamamos

$$S_I^-(f) = \sup_n \{S^- [f(t_1), \dots, f(t_n)] : t_1 < \dots < t_n \in I\}.$$

el número de **cambios fuertes de signo** de  $f$  en  $I$ . Análogamente, definimos el número de **cambios débiles de signo** de  $f$  en  $I$  como

$$S_I^+(f) = \sup_n \{S^+ [f(t_1), \dots, f(t_n)] : t_1 < \dots < t_n \in I\}.$$

Se deduce también que

$$S_I^-(f) \leq S_I^+(f).$$

**Definición 1.3.4.** Sea  $f \in B[I]$ . Decimos que  $f$  tiene un **cero** en el punto  $\xi \in I$  siempre que  $f(\xi) = 0$ . Sea  $Z_I(f)$  el **número de ceros** de  $f$  en  $I$ .

**Definición 1.3.5.** Sea  $f \in B[I]$  una función con un cero en un punto  $t$  en el interior de  $I$ , entonces diremos que  $f$  **cambia de signo** en  $t$  siempre que

$$f(t - \epsilon)f(t + \epsilon) < 0 \text{ para todo } \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeño.}$$

Ahora bien, si  $f$  tiene un cero en un punto  $t$  en  $(a, b)$  y no cambia de signo en este punto, entonces decimos que  $f$  tiene un **cero doble** en  $t$ . Se denota por  $Z_I^2(f)$  el número de ceros dobles de la función  $f$ .

También es posible definir ceros de mayor multiplicidad siempre que  $f$  tenga derivadas suficientes.

**Definición 1.3.6.** Sea  $f \in C^z [I]$  y sea  $t \in I$ . Decimos que  $f$  es un **cero de multiplicidad  $z$**  en el punto  $t$  cuando

$$f(t) = Df(t) = \dots = D^{z-1}f(t) = 0 \neq D^z f(t).$$

**Observación 1.3.1.** Si  $t$  es un punto final del intervalo  $I$ , entonces  $D$  debe entenderse como la derivada izquierda o derecha. Además, el comportamiento de una función en un entorno de un cero múltiple depende de si este es par o impar. Es decir,

- Si  $f$  tiene un cero impar en  $t$  en el intervalo  $(a, b)$ , entonces  $f$  debe cambiar de signo en el punto  $t$ .
- Si  $f$  tiene un cero par en  $t$  en el intervalo  $(a, b)$ , entonces  $f$  no cambia de signo en el punto  $t$ .

**Definición 1.3.7.** Sea  $f \in C^r [I]$ . Se define el número de ceros de  $f$  en  $I$ , contando multiplicidades hasta orden  $r$ , como  $Z_I^r(f)$ .

Las multiplicidades se cuentan como en la definición previa tomando  $z = r$ .

Concluimos esta sección con una herramienta útil para tratar con ceros múltiples de funciones. Se trata de una generalización del Teorema de Rolle. Para ello requerimos la noción de puntos de Rolle por la izquierda y por la derecha. Para ello, vamos a definir un subespacio del espacio de las funciones continuas,  $C[I]$ , que es el espacio de funciones absolutamente continuas:

**Definición 1.3.8.** Sea  $I = [a, b]$  un intervalo de la recta real  $\mathbb{R}$ . Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es **absolutamente continua** en  $I$  si para todo número positivo  $\epsilon$ , existe otro número positivo  $\delta_\epsilon$  tal que para cualquier sucesión de subintervalos disjuntos dos a dos  $(x_k, y_k)$  de  $I$  con  $x_k, y_k \in I$  que satisfice

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta_\epsilon,$$

entonces

$$\sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon.$$

El conjunto de todas las funciones absolutamente continuas sobre  $I$  se denota por  $AC[I]$ .

**Definición 1.3.9.** Si  $f$  es una función absolutamente continua en un intervalo  $(c, d)$ , decimos que  $c$  es **punto de Rolle por la izquierda** siempre que o  $f(c) = 0$  o que para cada  $\epsilon > 0$ , existe algún

$$c < t < c + \epsilon \quad \text{con } f(t)Df(t) > 0.$$

De igual manera, decimos  $d$  es **punto de Rolle por la derecha** siempre que o  $f(d) = 0$  o que para cada  $\epsilon > 0$ , existe algún

$$d - \epsilon < t < d \quad \text{con } f(t)Df(t) < 0.$$

Geoméricamente,  $c$  o  $d$  es un punto de Rolle si la función  $f$  se aleja del eje a medida que nos adentramos en el intervalo.

**Teorema 1.3.1. (Teorema de Rolle extendido.)** Sea  $f$  una función absolutamente continua en un intervalo  $(c, d)$ , y tal que  $f$  no sea idénticamente cero. Además,  $c$  y  $d$  son puntos de Rolle por la izquierda y por la derecha, respectivamente. Entonces,  $Df$  tiene al menos un cambio de signo en el intervalo  $(c, d)$ . Si  $Df$  es continua en  $(c, d)$  entonces tiene al menos un cero en este intervalo.

**Demostración.** Como  $f$  es absolutamente continua, se tiene  $f(d) - f(c) = \int_c^d Df(t)dt$ . Si  $f(c) = f(d)$ , esto implica que  $Df(t) = 0$  en casi todo punto, o que debe cambiar de signo. Tenemos el Teorema de Rolle conocido.

Supongamos ahora que  $f(c) < f(d)$ . Se tiene entonces que  $Df(t)$  debe ser positivo en un subconjunto de medida positiva de  $(c, d)$ . Si  $f(d) > 0$ , entonces como  $d$  es un punto de Rolle a derecha,  $Df(t) < 0$  para algún  $t$  cerca de  $d$ , pues para cada  $\epsilon > 0$ ,  $f(t)Df(t) < 0$  para algún  $t \in (d - \epsilon, d)$ . Tenemos así el cambio de signo en el intervalo  $(c, d)$  que se pretendía. Si en cambio,  $f(c) < 0$ , al ser  $c$  un punto de Rolle a izquierda,  $Df(t) < 0$  para algún  $t$  cerca de  $c$ , pues para cada  $\epsilon > 0$ ,  $f(t)Df(t) > 0$  para algún  $t \in (c, c + \epsilon)$ ; y nuevamente  $Df$  cambia de signo.

El caso  $f(c) > f(d)$  se argumenta análogamente. Y puesto que una función continua sólo puede cambiar de signo si pasa por un cero se concluye la afirmación restante.  $\square$

## 1.4. Sistemas de Tchebycheff

En esta sección se van a dar una serie de conceptos y resultados útiles en las secciones 2.5 y 2.7 de la memoria: Propiedades de los ceros y Propiedades de variación decreciente. Se explora la conexión entre las propiedades de los determinantes formados a partir de un conjunto de funciones  $u_1, \dots, u_m$  y el número de ceros o cambios de signo que pueden poseer las combinaciones lineales de estas funciones.

En esta memoria se habla sucintamente de los sistemas de Tchebycheff pues no se requieren más resultados al respecto que los que daremos. Un mayor estudio de estos puede encontrarse en la sección 2.5 del libro de Schumaker [2].

A lo largo de esta sección,  $I$  va a ser un intervalo abierto, cerrado o semiabierto, es decir, un conexo de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.4.1.** Un conjunto  $U = \{u_i\}_{i=1}^m$  de funciones continuas en  $I$  se denomina **sistema de Tchebycheff** (o T-sistema) si

$$D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_m \\ u_1, \dots, u_m \end{pmatrix} > 0 \text{ para todo } t_1 < t_2 < \dots < t_m \text{ en } I.$$



**Ejemplo 1.4.1.** Un ejemplo importante de T-sistema lo constituye la base monomial  $U = \{1, x, \dots, x^{m-1}\}$  de los polinomios de grado menor o igual que  $m$ . Se toma como determinante  $D$  el determinante de VanderMonde

$$V(t_1, \dots, t_m) = D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_m \\ u_1, \dots, u_m \end{pmatrix},$$

donde  $u_1 = 1, u_2(x) = x, \dots, u_m(x) = x^{m-1}$ .

El siguiente teorema caracteriza los T-sistemas en términos de cambios de signos:

**Teorema 1.4.1.** Si  $U = \{u_i\}_{i=1}^m$  es un T-sistema, entonces

$$Z_I \left( \sum_{i=1}^m c_i u_i \right) \leq m - 1 \text{ para cualesquiera } c_1, \dots, c_m \text{ reales y no todos nulos,} \quad (1.11)$$

donde  $Z_I$  cuenta el número de ceros simples en  $I$ . Recíprocamente, si  $U = \{u_i\}_{i=1}^m$  es un conjunto de funciones continuas en  $I$  tal que se satisface la desigualdad anterior, (1.11), entonces o  $U$  o el conjunto  $\bar{U} = \{u_1, \dots, u_{m-1}, -u_m\}$  es un T-sistema.

**Demostración.** En el problema de la interpolación lagrangiana recordemos que se pretendía determinar los coeficientes  $c_1, \dots, c_m$  de un sistema lineal de  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas (de la forma  $\mathbf{M}\mathbf{c}=\mathbf{y}$ ), tales que

$$\sum_{i=1}^m c_i u_i(t) = y_j, \quad \text{para } j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Este sistema tiene solución única para  $\mathbf{y}$  precisamente cuando la matriz  $\mathbf{M}$  es no singular, es decir, a que el determinante correspondiente no se anule.

Teniendo en cuenta lo anterior, puede existir un  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$ , no nulo, tal que  $u = \sum_{i=1}^m c_i u_i$  se anula en  $m$  puntos  $t_1 < \dots < t_m$  si, y sólo si, el determinante  $D$  visto en la Definición 1.4.1. es cero. Por lo tanto, si  $U$  es un T-sistema, obtenemos (1.11). Recíprocamente, si (1.11) se satisface, entonces el determinante  $D$  nunca puede ser cero. Como  $D$  es una función continua en los puntos  $t_i$ , debe tener un signo para todo  $t_1 < \dots < t_m$  en  $I$ ; por lo que se concluye que o  $U$  o  $\bar{U}$  forman un T-sistema.  $\square$

Hasta ahora hemos estado trabajando con sistemas de funciones. En algunas aplicaciones es más conveniente hablar de espacios.

**Definición 1.4.2.** Un espacio lineal de dimensión  $m$ ,  $\mathcal{U}$ , se denomina **espacio de Tchebycheff** (o T-espacio) siempre que tenga una base que sea un sistema de Tchebycheff.

Ahora introducimos una subclase de sistemas de Tchebycheff con propiedades más fuertes sobre determinantes:

**Definición 1.4.3.** Supongamos que  $U = \{u_i\}_{i=1}^m$  es tal que  $\{u_i\}_{i=1}^k$  es un sistema de Tchebycheff para cada  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Decimos entonces que  $U$  es un **sistema completo de Tchebycheff** (o CT-sistema).

A continuación vamos a ver que existen sistemas de Tchebycheff que no son completos:

**Ejemplo 1.4.2.** Sea  $U = \{\sin(x), \cos(x)\}$  en  $I = [0, \pi)$ .

$U$  es claramente un sistema de Tchebycheff en  $I$ ; pero como  $\sin(x)$  no es positivo en  $I$ ,  $U$  no es completo. De hecho, no es posible encontrar alguna base para  $\mathcal{U} = \text{span}(U) = \langle U \rangle$  que forme un sistema completo de Tchebycheff, ya que cualquier combinación lineal de  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  siempre tiene un cero en  $[0, \pi)$ .

Presentamos a continuación una forma aún más fuerte de los sistemas de Tchebycheff:

**Definición 1.4.4.** Un conjunto de funciones  $\{u_i\}_{i=1}^m$  que satisface la propiedad de que  $\{u_{i_j}\}_{i=1}^k$  es un sistema de Tchebycheff para todo  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$  y para todo  $1 \leq k \leq m$  se denomina un **sistema ordenado y completo de Tchebycheff** (o OCT-sistema).

El siguiente Teorema muestra que los OCT-sistemas tienen una propiedad de variación decreciente.

**Teorema 1.4.2. (Regla de los signos de Descartes).** Supongamos que  $U = \{u_i\}_{i=1}^m$  es un OCT-sistema. Entonces

$$Z \left( \sum_{i=1}^m c_i u_i \right) \leq S^-(c_1, \dots, c_m) \text{ para cualesquiera } c_1, \dots, c_m \text{ reales y no todos nulos,}$$

donde  $Z$  es el número de ceros simples en  $[a, b]$  y  $S^-$  es el número de cambios fuertes de signo de  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$ .

**Demostración.** Sea  $S^-(\mathbf{c}) = d - 1$ . Entonces vamos a poder dividir los coeficientes en  $d$  conjuntos:

$$\underbrace{c_1, \dots, c_{n_2}}_{}, \underbrace{c_{n_2+1}, \dots, c_{n_3}}_{}, \dots, \underbrace{c_{n_{d-1}+1}, \dots, c_m}_{},$$

donde todos los coeficientes  $c_i$  en cualquiera de los grupos anteriores tengan el mismo signo, y de forma que al menos un  $c_j$  en cada grupo sea distinto de cero. Si tomamos  $n_1 = 0$  y  $n_{d+1} = m$ , definimos

$$v_j = \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} |c_i| u_i, \quad \text{para todo } j \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

Podemos afirmar que  $\{v_j\}_{j=1}^d$  es un CT-sistema. De hecho, para todo  $1 \leq k \leq d$  y todo  $t_1 < \dots < t_k$  en  $[a, b]$ , tenemos

$$D \left( \begin{matrix} t_1, \dots, t_k \\ v_1, \dots, v_k \end{matrix} \right) = \sum_{i_1=n_1+1}^{n_2} \dots \sum_{i_k=n_{k-1}+1}^{n_k} |c_{i_1}| \dots |c_{i_k}| D \left( \begin{matrix} t_1, \dots, t_k \\ u_{i_1}, \dots, u_{i_k} \end{matrix} \right), \quad (1.12)$$

siendo este determinante positivo, ya que  $U$  es un OCT-sistema, y además, al menos un  $c_i$  de cada grupo es no nulo. Sean

$$\bar{c}_j = (-1)^{j-1} \text{signo}(\text{primer grupo de los coeficientes } c) \quad \text{para } j \in \{1, 2, \dots, d\}. \quad (1.13)$$

Entonces claramente

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^d \bar{c}_j v_j \equiv u = \sum_{i=1}^m c_i u_i.$$

Por lo tanto  $\bar{u}$  puede tomar los valores

$$\bar{u} = \begin{cases} v_1 - v_2 + v_3 - \dots + (-1)^{d+1} v_d & \text{si el signo es positivo,} \\ -v_1 + v_2 - v_3 + \dots + (-1)^d v_d & \text{si el signo es negativo.} \end{cases}$$

Si ahora hacemos uso del Teorema 1.4.1 en el T-sistema  $\{v_j\}_{j=1}^d$ , se obtiene

$$Z \left( \sum_{i=1}^m c_i u_i \right) = Z \left( \sum_{j=1}^d \bar{c}_j v_j \right) \leq d - 1 = S^-(c_1, \dots, c_m).$$

□

En el Capítulo 2 veremos que los espacios de funciones spline no son generalmente T-espacios, pero casi. Por lo tanto, vamos a introducir una forma más débil de T-sistema.

**Definición 1.4.5.** Sea  $u_1, \dots, u_m$  un conjunto de funciones acotadas de valores reales definidas en un conjunto  $I \subset \mathbb{R}$ , donde aquí  $I$  no es necesariamente un intervalo. Decimos que  $\{u_i\}_{i=1}^m$  forma un **sistema Débil de Tchebycheff** (o WT-sistema) siempre que sean linealmente independientes, y

$$D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_m \\ u_1, \dots, u_m \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{para todo } t_1 < t_2 < \dots < t_m \text{ en } I.$$

En contraposición con la definición de T-sistemas, aquí hemos permitido deliberadamente subconjuntos arbitrarios  $I$  de la recta real  $\mathbb{R}$ , y no hemos requerido funciones  $\{u_i\}_{i=1}^m$  que sean continuas.

**Ejemplo 1.4.3.** Si  $U = \{u_i\}_{i=1}^m$  es un T-sistema en un intervalo  $I$ , entonces  $U$  es un WT-sistema en algún subconjunto  $J$  en  $I$ , ya que es claro que para cualquier conjunto de  $t_1 < \dots < t_m$  el determinante en la Definición 1.4.5. es estrictamente positivo.

El siguiente teorema da una caracterización de WT-sistemas en términos de cambios de signo:

**Teorema 1.4.3.** Sea  $U = \{u_i\}_{i=1}^m$  un conjunto linealmente independiente de  $m$  funciones definidas en  $I$ . Si  $U$  es un WT-sistema, entonces

$$S_I^- \left( \sum_{i=1}^m c_i u_i \right) \leq m - 1 \quad \text{para cualesquiera } c_1, \dots, c_m \text{ reales y no todos nulos,}$$

Recíprocamente, si se satisface la desigualdad anterior, entonces  $U$  o  $\bar{U} = \{u_1, \dots, u_{m-1}, -u_m\}$  es un WT-sistema en  $I$ .

**Definición 1.4.6.** Si  $\{u_i\}_{i=1}^k$  es un WT-sistema en  $I$  para cada  $1 \leq k \leq m$ , entonces decimos que  $\{u_i\}_{i=1}^m$  es un **sistema completo Débil de Tchebycheff** (o CWT- sistema) en  $I$ .

**Definición 1.4.7.** Decimos que  $U = \{u_i\}_{i=1}^m$  es un **sistema ordenado y completo Débil de Tchebycheff** (o OCWT-sistema) en el conjunto  $I$  si  $\{u_{i_j}\}_{j=1}^k$  es un WT-sistema en  $I$  para todo  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$  y todo  $1 \leq k \leq m$ .

El siguiente Teorema muestra que los OCWT-sistemas tienen una propiedad de variación decreciente.

**Teorema 1.4.4.** Supongamos que  $U = \{u_i\}_{i=1}^m$  es un OCWT-sistema en  $I$ . Entonces

$$S_I^- \left( \sum_{i=1}^m c_i u_i \right) \leq S^-(c_1, \dots, c_m) \text{ para cualesquiera } c_1, \dots, c_m \text{ reales y no todos nulos.}$$

**Demostración.** La demostración es muy parecida a la del Teorema 1.4.1. Supongamos que  $S^-(\mathbf{c}) = d$ . Entonces podemos dividir el conjunto de coeficientes como se hizo en el Teorema 1.4.2.. Definimos  $v_1, \dots, v_d$  como en dicho teorema. Afirmamos por tanto que  $V = \{v_i\}_{i=1}^d$  es un CWT-sistema. De hecho, por (1.12) y por ser  $U$  un OCWT, los determinantes formados a partir de  $v_1, \dots, v_d$  son siempre no negativos. De (1.12) también se sigue que para algún  $t_1 < \dots < t_d$ , el determinante es positivo, y por tanto las funciones  $v_1, \dots, v_d$  son linealmente independientes. Tomando ahora los coeficientes  $\{\bar{c}_j\}_{j=1}^d$  como en (1.13), el Teorema 1.4.3. aplicado al WT-sistema  $V$  implica

$$S_I^- \left( \sum_{i=1}^m c_i u_i \right) = S_I^- \left( \sum_{j=1}^d \bar{c}_j v_j \right) \leq d - 1 = S^-(c_1, \dots, c_m).$$

□

# Capítulo 2

## Splines Polinomiales

Los splines son curvas polinómicas definidas a trozos continuamente diferenciables hasta un orden prescrito. Se utilizan en aplicaciones que requieren la interpolación de datos, o un suavizado de curvas. En los problemas de interpolación, se utiliza la interpolación mediante splines porque da lugar a resultados similares requiriendo solamente el uso de polinomios de bajo grado, evitando así las oscilaciones, indeseables, encontradas al interpolar mediante polinomios de grado elevado. La teoría spline fue desarrollada en la década de 1940 por el matemático Isaac Jacob Schoenberg.

### 2.1. Propiedades básicas

Sea  $[a, b]$  un intervalo cerrado finito, y sea  $\Delta = \{x_i\}_{i=1}^k$  con

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b$$

una partición del intervalo  $[a, b]$  en  $k + 1$  subintervalos  $I_i = [x_i, x_{i+1})$ , para  $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$  e  $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ . Sea  $m$  un entero positivo y sea  $\mathcal{M} = (m_1, \dots, m_k)$  un vector de enteros tales que  $1 \leq m_i \leq m$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Definición 2.1.1.** Definimos el **espacio de los polinomios de orden  $m$**  con coeficientes reales como

$$\mathcal{P}_m = \left\{ p(x) = \sum_{i=1}^m c_i x^{i-1}, c_1, \dots, c_m, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Por tanto, un polinomio de orden  $n$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n - 1$ .

La ventaja de trabajar con el orden de un polinomio es que la dimensión del espacio vectorial de los polinomios de orden  $m$  es  $m$ .

**Definición 2.1.2.** Se define el **espacio de splines polinomiales de orden  $m$  con nudos  $x_1, \dots, x_k$  de multiplicidades  $m_1, \dots, m_k$** , denotado por  $\mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$ , como el conjunto de polinomios definidos a trozos,  $s \in \mathcal{P}_m$ , de forma que  $s(x) = s_i(x)$  para  $x \in I_i$ , con  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ . Además, se satisfacen las condiciones de regularidad

$D^j s_{i-1}(x_i) = D^j s_i(x_i)$  para todo  $j \in \{0, 1, \dots, m-1-m_i\}$ , y todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Al vector  $\mathcal{M}$  se le denomina **vector de multiplicidades**.

Si  $m_i = m$  para algún  $i$ , la definición anterior se interpreta como que los polinomios  $s_{i-1}$  y  $s_i$ , definidos en intervalos adyacentes al nudo  $x_i$  no están relacionados entre sí, y por tanto puede existir una discontinuidad de salto. Si en cambio,  $m_i < m$ , entonces se interpreta como que se ha forzado a que el spline  $s$  y sus primeras  $m-1-m_i$  derivadas sean continuas en el nudo.

Notemos que cada spline tiene una extensión a toda la recta real. De hecho, si  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$ , definimos

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) & \text{si } x < a, \\ s_k(x) & \text{si } x > b, \end{cases}$$

donde  $s_0$  y  $s_k$  son los polinomios que definen al polinomio  $s$  en los intervalos  $I_0$  e  $I_k$ , respectivamente.

**Teorema 2.1.1.** Sea  $K = \sum_{i=1}^k m_i$ . La dimensión del espacio  $\mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  es  $m+K$ .

**Demostración.** Supongamos que  $s_0, \dots, s_k$  son polinomios asociados en los intervalos  $I_1, \dots, I_k$ , respectivamente. Podemos escribir cada uno de estos polinomios de la siguiente forma:

$$s_i(x) = \sum_{j=1}^m c_{ij} \frac{x^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Para cada  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ , sea  $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, \dots, c_{im})^T$ . Entonces las condiciones de continuidad en  $\mathcal{S}$  se pueden escribir como el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} A_1 & -A_1 & & & & \\ & A_2 & -A_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & A_k & -A_k & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

donde

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2/2 & \cdots & x_i^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 1 & x_i & \cdots & x_i^{m-2}/(m-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & x_i^{m_i}/(m_i)! \end{bmatrix}$$

La matriz  $A_i$  es de tamaño  $(m-m_i) \times m$ , ya que la matriz  $A$  tiene rango igual al número de filas,  $\sum_{i=1}^k (m-m_i)$ . Como  $A$  es una transformación del espacio vectorial  $\mathbb{R}^{m(k+1)}$  en  $\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^k (m-m_i)}$ , se sigue que el espacio lineal de todos los vectores  $\mathbf{c}$  que satisfacen  $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{0}$  es de dimensión

$$m(k+1) - \sum_{i=1}^k (m-m_i) = m + \sum_{i=1}^k m_i = m + K.$$

Es por tanto esta la dimensión de  $\mathcal{S}$ . □

En la demostración del teorema, para calcular la dimensión, se ha contado el número de parámetros en la representación polinomial a trozos del polinomio  $s$ , y a esto se le restan el número de condiciones de regularidad impuestas en estos trozos.

Ahora que conocemos la dimensión del espacio  $\mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  vamos a construir una base de este. Pero para ello, antes damos una base del espacio  $\mathcal{P}_m$ .

**Teorema 2.1.2.** Las funciones  $1, x - y, \dots, (x - y)^{m-1}$  forman una base del espacio  $\mathcal{P}_m$ .

**Demostración.** Las funciones  $1, x - y, \dots, (x - y)^{m-1}$  pertenecen al espacio  $\mathcal{P}_m$ . Por tanto, para probar que estas forman una base del espacio sólo haría falta ver que estas son linealmente independientes. Supongamos que  $p(x) = \sum_{i=1}^m c_i (x - y)^{i-1} \equiv 0$ , veamos que  $c_i = 0$  para todo  $i$ .

Entonces, para todo  $b$ , todas las derivadas en del polinomio  $p$  deben anularse en  $b$ ; es decir,

$$\begin{bmatrix} p(b) \\ Dp(b) \\ \vdots \\ D^{m-1}p(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b - y & (b - y)^2 & \cdots & (b - y)^{m-1} \\ 0 & 1 & 2(b - y) & \cdots & (m - 1)(b - y)^{m-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (m - 1)! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Y como este es un sistema homogéneo de  $m$  ecuaciones no singular, se sigue que  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ . □

Ya que cualquier base para  $\mathcal{S}$  debe incluir al menos una base para  $\mathcal{P}_m$ . Podemos tomar las funciones  $1, x - y, \dots, (x - y)^{m-1}$ . Pero tenemos que completar con  $K$  elementos adicionales (la dimensión del espacio era  $m + K$ ). Para ello consideremos las funciones

$$(x - y)_+^j = (x - y)^j (x - y)_+^0, \quad j > 0,$$

donde

$$(x - y)_+^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } x < y, \\ 1 & \text{si } x \geq y. \end{cases}$$

Frecuentemente, nos referiremos a estas funciones como *funciones +*.

**Teorema 2.1.3.** Una base de  $\mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  viene dada por

$$\{p_{i,j}(x) = (x - x_i)_+^{m-j}\}_{j=1, i=0}^{m_i \ k}, \quad (2.1)$$

donde  $x_0 = a$  y  $m_0 = m$ .

**Demostración.** Por la definición de las funciones  $+$ ,  $(x - x_i)_+^j$  es idénticamente 0 para  $x < x_i$ , y es un polinomio de grado  $j$  para  $x \geq x_i$ . Como

$$D^r(x - x_i)_+^j|_{x=x_i} = 0, \quad \text{para todo } r \in \{0, 1, \dots, j-1\},$$

entonces cada una de las funciones en (2.1) pertenece a  $\mathcal{S}$ . Como hay  $m + K$  funciones, hay que ver por tanto que estas son linealmente independientes, y así tendremos una base de este espacio. Supongamos que para algún conjunto de coeficientes  $c_{ij}$  el spline

$$s(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}(x - x_i)_+^{m-j} \quad (2.2)$$

es idénticamente cero en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces para  $x \in I_0$  tenemos que  $\sum_{j=1}^m c_{0j}(x - x_0)^{m-j} = 0$ , y por la independencia lineal de estas funciones, al ser base de  $\mathcal{P}_m$ , se tiene que  $c_{01} = \dots = c_{0m} = 0$ . Pero esto implica que para  $x \in I_1$ ,  $s \equiv 0$ , entonces  $\sum_{j=1}^{m_1} c_{1j}(x - x_1)^{m-j} = 0$ ; y como estos polinomios son de nuevo linealmente independientes, los coeficientes deben ser cero también. Este proceso se puede continuar si nos movemos en todos los intervalos  $I_i$ , de esta manera obtenemos que todos los coeficientes  $c_{ij}$  son nulos, lo que prueba la independencia lineal.  $\square$

Por tanto, de este teorema se extrae que todo spline  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  se representa de forma única como se muestra en (2.2).

Pero deseamos construir una base de  $\mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  que conste de splines con soporte relativamente pequeño, es decir, que los splines sean distintos de cero en un conjunto relativamente pequeño. Claramente, cualquier base de este tipo debe construirse a partir de combinaciones lineales de los elementos de la base del Teorema 2.1.3..

El siguiente Lema trata la cuestión de cuándo es posible que una combinación lineal de los elementos base se anule fuera de un intervalo finito:

**Lema 2.1.1.** Sean  $a_1 < a_2 < \dots < a_d$  y  $1 \leq l_i \leq m$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ . Si  $\sum_{i=1}^d l_i > m$ , existen  $\{\alpha_{ij}\}_{i=1, j=1}^{d, l_i}$  no todos nulos tales que

$$B(x) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} \frac{(x - a_i)_+^{m-j}}{(m-j)!}$$

satisface que

$$B(x) = 0 \quad \text{para } x < a_1 \text{ y } x > a_d.$$

Por otro lado, si  $\sum_{i=1}^d l_i \leq m$ , entonces no existe esta función  $B$ .

**Demostración.** Por la naturaleza de las funciones  $+$ , es claro que para cualquier  $\alpha_{ij}$ ,  $B(x) = 0$  para  $x < a_1$ . Si  $B(x) = 0$  para  $x > a_d$ , entonces tendremos que pedir

$$B(x) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} \sum_{k=0}^{m-j} \frac{x^k (-a_i)^{m-j-k}}{k! (m-j-k)!} = 0, \quad \text{para todo } x > a_d,$$



donde

$$(x - a_i)^{m-j} = \sum_{k=0}^{m-j} \binom{m-j}{k} x^k (-a_i)^{m-j-k} = \sum_{k=0}^{m-j} \frac{(m-j)!}{k!(m-j-k)!} x^k (-a_i)^{m-j-k}.$$

Tomando

$$\gamma_{ijk} = \begin{cases} \frac{(-a_i)^{m-j-k}}{(m-j-k)!} & \text{si } k \in \{0, \dots, m-j\}, \\ 0 & \text{si } k \in \{m-j+1, \dots, m-1\}, \end{cases}$$

$B(x)$  se puede reescribir como

$$B(x) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} \sum_{k=0}^{m-j} \frac{x^k}{k!} \gamma_{ijk} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} \gamma_{ijk} = 0,$$

por ser sumas finitas.

Pero como las funciones potencia  $1, x, \dots, x^{m-1}$  son linealmente independientes, se tiene que

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} \gamma_{ijk} = 0, \quad \text{para todo } k \in \{0, 1, \dots, m-1\}. \quad (2.3)$$

Este es un sistema homogéneo de  $m$  ecuaciones para  $\sum_{i=1}^d l_i$  coeficientes, y por tanto siempre tiene una solución distinta de cero si  $\sum_{i=1}^d l_i > m$ , al ser el sistema compatible indeterminado. Escribiendo las ecuaciones del sistema (2.3) en orden decreciente,  $k \in \{m-1, \dots, 0\}$ , podemos escribirlas en forma matricial como

$$[M_1 \quad \dots \quad M_d] \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{1l_1} \\ \vdots \\ \alpha_{d1} \\ \vdots \\ \alpha_{dl_d} \end{bmatrix} = 0$$

de manera que para todo  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ ,

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \frac{(-a_1)^{m-2}}{(m-2)!} & & & \\ \frac{(-a_1)^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{(-a_1)^{m-2}}{(m-2)!} & \dots & \frac{(-a_1)^{m-l_i}}{(m-l_i)!} \end{bmatrix}$$

Supongamos ahora que  $\sum_{i=1}^d l_i \leq m$ . Entonces la matriz cuadrada en las primeras filas de esta matriz es un múltiplo distinto de cero de la matriz de VanderMonde, y por lo tanto tiene rango máximo. En consecuencia, la única solución de (2.3) es la solución trivial.  $\square$

El lema anterior muestra que para construir una combinación lineal de funciones que se anula fuera de un intervalo finito, se debe cumplir que  $\sum_{i=1}^d l_i \geq m + 1$ . Consideramos el caso donde esta suma es exactamente  $m + 1$ . Tenemos por tanto una incógnita más que el número de ecuaciones, por tanto  $B(x)$  debe estar dado por

$$B(x) = C_1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & a_d & 1 & \cdots & 0 \\ \frac{a_1^{l_1-1}}{(l_1-1)!} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{a_d^{l_d-1}}{(l_d-1)!} & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_1^{m-1}}{(m-1)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{a_d^{m-1}}{(m-1)!} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(x-a_1)_+^{m-1}}{(m-1)!} & \cdots & \frac{(x-a_1)^{m-l_1}}{(m-l_1)!} & \cdots & \frac{(x-a_d)_+^{m-1}}{(m-1)!} & \cdots & \frac{(x-a_d)^{m-l_d}}{(m-l_d)!} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

donde  $C_1$  es una constante no nula.

Si comparamos esto con la definición de diferencia dividida (ver (1.3)), observamos que excepto por una constante multiplicativa  $B(x)$  es la  $(m + 1)$ -ésima diferencia dividida de la función  $(x - y)_+^{m-1}$ , tomando los puntos  $a_1, \dots, a_d$ , y donde  $l_i$  es el número de veces que aparece  $a_i$ . Lo que sugiere que para construir elementos base para el espacio  $\mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  deberíamos trabajar con diferencias divididas de la función  $(x - y)_+^{m-1}$ .

Esta observación motiva la siguiente sección.

## 2.2. B-splines

En la sección anterior se mencionó que las diferencias divididas de las funciones  $(x - y)_+^{m-1}$  resultan ser polinomios definidos a trozos que son útiles para la construcción de bases para el espacio de splines. Estas son constituidas por ciertos splines denominados B-splines.

Empezamos la sección con una definición útil:

**Definición 2.2.1.** Sea  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b$  una partición del intervalo  $[a, b]$  y  $1 \leq m_i \leq m$ , con  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Suponemos que  $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_{2m+K}$  tal que

$$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_m \leq a \quad \text{y} \quad b \leq y_{m+K+1} \leq \cdots \leq y_{2m+K}$$

e

$$y_{m+1} \leq \cdots \leq y_{m+K} = \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{m_k}$$

donde  $m_i$  es el número de veces que aparece  $x_i$ . Decimos que  $\bar{\Delta} = \{y_i\}_{i=1}^{2m+K}$  es una **partición extendida** asociada con  $\mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$ .

Los elementos  $\{y_i\}_{i=m+1}^{m+K}$  en una partición extendida  $\bar{\Delta}$  están determinados de forma única. Los primeros  $m$  puntos y los últimos  $m$  puntos de  $\bar{\Delta}$  son arbitrarios. De facto una elección muy común es tomar

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_m = a \quad \text{e} \quad y_{m+K+1} = y_{m+K+2} = \cdots = y_{2m+K} = b.$$

**Definición 2.2.2.** Sea

$$\cdots \leq y_{-1} \leq y_0 \leq y_1 \leq \cdots$$

una secuencia de números reales. Dados enteros  $i$  y  $m > 0$ , definimos para cada  $x$  real

$$B_i^m(x) = \begin{cases} (-1)^m [y_i, \dots, y_{i+m}] (x - y)_+^{m-1} & \text{si } y_i < y_{i+m}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definimos por  $B_i^m(x)$  al **B-spline de orden  $m$  con nudos  $y_i, \dots, y_{i+m}$** .

Se ha incluido el factor  $(-1)^m$  en la definición de los B-spline para hacerlos positivos donde son distintos de cero.

Para  $m = 1$ , el B-spline asociado es la función constante a trozos

$$B_i^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{y_{i+1} - y_i} & \text{si } y_i \leq x < y_{i+1}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Vamos a dar fórmulas explícitas para  $B_i^m$  en el caso de que  $y_i$  o  $y_{i+m}$  sea un nudo de multiplicidad  $m$ :

**Teorema 2.2.1.** Suponemos que  $y_i < y_{i+1} = \cdots = y_{i+m}$ . Entonces

$$B_i^m(x) = \begin{cases} \frac{(x - y_i)^{m-1}}{(y_{i+m} - y_i)^m} & \text{si } y_i \leq x < y_{i+m}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De forma similar, si  $y_i = \cdots = y_{i+m-1} < y_{i+m}$ , entonces

$$B_i^m(x) = \begin{cases} \frac{(y_{i+m} - x)^{m-1}}{(y_{i+m} - y_i)^m} & \text{si } y_i \leq x < y_{i+m}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Demostración.** Veamos la primera siendo la otra análoga. Tomando las diferencias divididas como en (1.3)

$$[y_i, \dots, y_{i+m}] f = \frac{D \left( \begin{matrix} y_i, \dots, y_{i+m} \\ 1, \dots, x^{m-1}, f \end{matrix} \right)}{D \left( \begin{matrix} y_i, \dots, y_{i+m} \\ 1, \dots, x^m \end{matrix} \right)}.$$

Y usando las fórmulas (1.1) y (1.2) del determinante de Vandermonde tenemos

$$\prod_{i \leq k < j \leq i+m} (y_j - y_k) = (y_{i+m} - y_i)^m,$$

entonces se tiene que

$$[y_i, \dots, y_{i+m}] (x - y)^{m-1} = \frac{(x - y_i)^{m-1}}{(y_{i+m} - y_i)^m}.$$

Lo que prueba la igualdad para  $B_i^m(x)$ . □

En el siguiente teorema se muestra que  $B_i^m(x)$  es un spline polinomial de orden  $m$  con nudos en  $y_i, \dots, y_{i+m}$ :

**Teorema 2.2.2.** Sea  $y_i < y_{i+m}$ , y supongamos que

$$y_i \leq \dots \leq y_{i+m} = \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{a_d, \dots, a_d}_{l_d},$$

siendo  $l_i$  el número de veces que aparece  $a_i$ , para  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Entonces

$$B_i^m(x) = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^{l_j} \alpha_{jk} (x - a_j)_+^{m-k} \quad (2.4)$$

con  $\alpha_{jl_j} \neq 0$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ . Además,

$$D_-^k B_i^m(a_j) = D_+^k B_i^m(a_j), \quad k \in \{0, 1, \dots, m-1-l_j\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, d\}. \quad (2.5)$$

Así,  $B_i^m$  es un spline polinomial de orden  $m$  con nudos en  $a_1, \dots, a_d$  de multiplicidades respectivas  $l_1, \dots, l_d$ .

**Demostración.** La igualdad (2.4) se sigue de la fórmula (1.4) vista en el Teorema 1.2.1. pues

$$[y_i, \dots, y_{i+m}] f = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^{l_j} \alpha_{jk} D^{k-1} f(a_j),$$

con  $\alpha_{jl_j} \neq 0$  y  $j \in \{1, 2, \dots, d\}$ . Teniendo en cuenta que  $f(y) = (x - y)_+^{m-1}$  obtenemos lo que se pretendía. Como las propiedades de continuidad (2.5) se cumplen para las funciones  $+$ , por tanto para la función  $(x - y)_+^{m-1}$  y se cumple así también para  $B_i^m$ . □

El siguiente teorema proporciona una relación de recurrencia en la que B-splines de orden  $m$  se pueden relacionar con B-splines de orden inferior:

**Teorema 2.2.3.** Sea  $m \geq 2$ , y supongamos que  $y_i < y_{i+m}$ . Entonces para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$B_i^m(x) = \frac{(x - y_i)B_i^{m-1}(x) + (y_{i+m} - x)B_{i+1}^{m-1}(x)}{y_{i+m} - y_i}. \quad (2.6)$$

**Demostración.** Para  $y_i < y_{i+1} = \dots = y_{i+m}$  o  $y_i = \dots = y_{i+m-1} < y_{i+m}$ , el resultado se sigue del Teorema 2.2.1.. Por tanto, podemos suponer que  $y_{i+1} < y_{i+m}$  e  $y_i < y_{i+m-1}$ . Observemos que  $(x - y)_+^{m-1} = (x - y)_+^{m-2}(x - y)$ . Aplicando la regla de Leibniz para la diferencias divididas de un producto (Teorema 1.2.3), obtenemos

$$\begin{aligned} (-1)^m [y_i, \dots, y_{i+m}] (x - y)_+^{m-1} &= (-1)^m [y_i, y_{i+1}] (x - y) [y_{i+1}, \dots, y_{i+m}] (x - y)_+^{m-2} \\ &\quad + (x - y_i)(-1)^m [y_i, \dots, y_{i+m}] (x - y)_+^{m-2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} &(-1)^m [y_i, \dots, y_{i+m}] (x - y)_+^{m-2} = \\ &= \frac{(-1)^{m-1}}{(y_{i+m} - y_i)} ([y_i, \dots, y_{i+m-1}] (x - y)_+^{m-2} - [y_{i+1}, \dots, y_{i+m}] (x - y)_+^{m-2}) \end{aligned}$$

Si reordenamos se obtiene (2.6). □

El siguiente resultado muestra que la derivada de un B-spline de orden  $m$  también se puede escribir en términos de B-splines de orden inferior:

**Teorema 2.2.4.** Sea  $y_i < y_{i+m}$ . Suponemos que  $D_+$  es la derivada a derecha. Entonces

$$D_+ B_i^m(x) = (m - 1) \frac{B_i^{m-1}(x) - B_{i+1}^{m-1}(x)}{y_{i+m} - y_i}. \quad (2.7)$$

**Demostración.** Si alguno de los nudos  $y_i$  o  $y_{i+m}$  tiene multiplicidad  $m$ , el resultado se sigue directamente del Teorema 2.2.1.. Si no, se tiene

$$\begin{aligned} D_+ B_i^m(x) &= (-1)^m [y_i, \dots, y_{i+m}] D_+(x - y)_+^{m-1} = (-1)^m [y_i, \dots, y_{i+m}] (m-1)(x - y)_+^{m-2} = \\ &= (-1)^m (m - 1) \frac{([y_{i+1}, \dots, y_{i+m}] (x - y)_+^{m-2} - [y_i, \dots, y_{i+m-1}] (x - y)_+^{m-2})}{y_{i+m} - y_i} = \\ &= (m - 1) \frac{B_i^{m-1}(x) - B_{i+1}^{m-1}(x)}{y_{i+m} - y_i}. \end{aligned}$$

Donde se ha realizado un cambio de índice,  $k = i + 1$ , y se han juntado así los términos  $B_i^{m-1}$ . Además la última igualdad se sigue de aplicar la hipótesis inductiva. □

**Teorema 2.2.5.** Sea  $m > 1$ , y suponemos que  $y_i < y_{i+m}$ . Entonces

$$B_i^m(x) > 0 \text{ para } y_i < x < y_{i+m}$$

y

$$B_i^m(x) = 0 \text{ para } x < y_i \text{ e } y_{i+m} < x.$$

En los extremos del intervalo  $(y_i, y_{i+m})$  tenemos

$$\begin{aligned} D_+^k B_i^m(y_i) &= 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, m-1-\alpha_i\}, \\ (-1)^{k+m-\alpha_i} D_+^k B_i^m(y_i) &> 0, \quad k \in \{m-\alpha_i, \dots, m-1\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

y

$$\begin{aligned} D_-^k B_i^m(y_{i+m}) &= 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, m-1-\beta_{i+m}\}, \\ (-1)^{m-\beta_{i+m}} D_-^k B_i^m(y_{i+m}) &> 0, \quad k \in \{m-\beta_{i+m}, \dots, m-1\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \text{máx} \{j : y_i = \dots = y_{i+j-1}\} \\ \beta_{i+m} &= \text{máx} \{j : y_{i+m} = \dots = y_{i+m-j+1}\}. \end{aligned}$$

( $\alpha_i$  indica cuántos de los puntos  $y_i \leq \dots \leq y_{i+m}$  son iguales a  $y_i$ , mientras que  $\beta_{i+m}$  indica cuántos de ellos son iguales a  $y_{i+m}$ ).

**Demostración.** Para probar que  $B_i^m(x) > 0$  para  $y_i < x < y_{i+m}$ , procedemos por inducción sobre  $m$ . Para  $m=1$  es claro por  $B_i^1$ , ya calculado. Supongamos por hipótesis de inducción que se verifica para orden  $m-1$ . Entonces para  $y_i < x < y_{i+m}$ , los factores  $(x-y_i)$  y  $(y_{i+m}-x)$  son positivos en (2.6). Además, tanto  $B_i^{m-1}(x)$  como  $B_{i+1}^{m-1}(x)$  son no negativos, y al menos uno de ellos es positivo. Se sigue por tanto que  $B_i^m(x) > 0$ .

Por la definición de las funciones  $+$ , es claro que  $B_i^m(x) = 0$  para  $x < y_i$ . Por otro lado, para  $x > y_{i+m}$ ,  $B_i^m(x)$  es la  $m$ -ésima diferencia dividida del polinomio  $(x-y)^{m-1}$ , y por lo tanto también es cero. Las derivadas en  $y_i$  e  $y_{i+m}$  no aparecen ya que  $B_i^m$  es cero fuera del intervalo  $(y_i, y_{i+m})$ , además de por las propiedades de continuidad de las derivadas visto en (2.5).

Si  $\alpha_i = m$  o  $\beta_{i+m} = m$  podemos verificar los signos directamente. Si ambos  $\alpha_i$  y  $\beta_{i+m}$  son menores que  $m$ , podemos proceder por inducción en  $m$ . El caso  $m=2$  es simple. Supongamos ahora que se verifica la hipótesis de inducción para splines de orden  $m-1$ . Entonces

$$(-1)^{k+m+\alpha_i} D_+^{k-1} B_i^{m-1}(y_i) > 0 \quad \text{y} \quad (-1)^{k+m-1-\alpha_i} D_+^{k-1} B_{i+1}^{m-1}(y_i) \geq 0$$

Usando (2.7) obtenemos (2.8) para  $k \in \{m-\alpha_i, \dots, m-1\}$ . De forma análoga se prueba (2.9). □

Ahora vamos a tratar la independencia lineal de los B-splines, y por tanto tendremos que estos generan una base.

**Teorema 2.2.6.** Sea  $y_l < y_{l+1}$ . Entonces, los B-splines  $\{B_i^m\}_{i=l+1-m}^l$  generan  $\mathcal{P}_m$  en  $[y_l, y_{l+1})$ . Más generalmente, si  $l < r$  e  $y_{r-1} < y_r$ , entonces el conjunto

$$\{B_i^m\}_{i=l+1-m}^{r-1} \text{ es linealmente independiente en } [y_l, y_r).$$

**Demostración.** Si nos restringimos al intervalo  $I_l = [y_l, y_{l+1})$ , cada uno de los B-splines  $\{B_i^m\}_{i=l+1-m}^l$  pertenecen a  $\mathcal{P}_m$ . Por tanto, para probar la primera afirmación del teorema sólo restaría comprobar que estas funciones son linealmente independientes en  $I_l$ . Suponemos que

$$s(x) = \sum_{i=l+1-m}^l c_i B_i^m(x) = 0 \text{ para todo } x \in I_l.$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que no todos los coeficientes  $c_i$  son cero, y sea  $c_p$  el primero de estos distinto de cero. Suponemos

$$y_p, \dots, y_l = \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{a_d, \dots, a_d}_{l_d},$$

con  $l_i$  el número de veces que se repite  $a_i$ , para  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Entonces

$$\bar{s}(x) = \sum_{i=p}^l c_i B_i^m(x) = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^{l_j} \alpha_{jk} (x - a_j)_+^{m-k}$$

con  $\alpha_{1l_1} \neq 0$ . Se observa también que  $\bar{s}(x) = 0$  para  $x < y_p = a_1$  y para  $x > y_l = a_d$ . Pero como  $\sum_{i=1}^d l_i \leq m$ , se contradice el Lema 2.1.1., y por tanto llegamos a la conclusión que todos los coeficientes  $c_i$  tienen que ser cero, lo que prueba la independencia lineal.

Supongamos ahora que  $[y_l, y_r)$  consta de más de un intervalo no trivial, y además suponemos que  $s(x) = \sum_{i=l+1-m}^{r-1} c_i B_i^m(x) \equiv 0$  en dicho intervalo. Por el argumento anterior, los coeficientes de todos los B-splines con soporte incluido en el intervalo  $[y_s, y_{s+1})$  deben ser cero siempre que dicho intervalo sea un subintervalo no trivial del intervalo  $[y_l, y_r)$ . En consecuencia, todos los coeficientes deben ser cero, lo que completa la prueba.  $\square$

Dependiendo de la ubicación y espaciado de los nudos, los B-splines pueden tener tamaños muy diversos, como no interesa que los B-splines tengan un tamaño extremadamente grande, o pequeño, conviene normalizarlos. Por ello surge la siguiente definición:

**Definición 2.2.3.** Definimos el **B-spline normalizado de orden  $m$**   $N_i^m$  con nudos  $y_i, \dots, y_{i+m}$  como

$$N_i^m(x) = (y_{i+m} - y_i) B_i^m(x)$$

Para  $m = 1$ , el B-spline normalizado con  $y_i < y_{i+1}$  viene dado por

$$N_i^1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_i \leq x < y_{i+1}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con esta normalización, la fórmula de recurrencia vista en (2.6) se transforma en la forma siguiente

$$N_i^m(x) = \gamma_i^m(x) N_i^{m-1}(x) + (1 - \gamma_{i+1}^m(x)) N_{i+1}^{m-1}(x)$$

donde

$$\gamma_i^m(x) = \frac{x - y_i}{y_{i+m-1} - y_i}.$$

A continuación veamos que los B-splines normalizados forman una partición de la unidad, es decir:

**Teorema 2.2.7.** Los B-splines forman una partición de la unidad. Esto es,

$$\sum_{i=j+1-m}^j N_i^m(x) = 1 \quad \text{para todo } y_j \leq x < y_{j+1}.$$

**Demostración.** Probémoslo por inducción para  $m$ . Por  $N_i^1$  queda probado el caso  $m = 1$ . Asumimos que el caso es correcto para splines de orden  $m - 1$ . Y haciendo uso de la relación de recurrencia (2.6) se prueba para orden  $m$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1-m}^j N_i^m(x) &= \sum_{i=j+1-m}^j [(x - y_i)B_i^{m-1}(x) + (y_{i+m} - x)B_{i+1}^{m-1}(x)] = \\ &= \sum_{i=j+2-m}^j (x - y_i + y_{i+m-1} - x)B_i^{m-1}(x) = \sum_{i=j+2-m}^j N_i^{m-1}(x) = 1. \end{aligned}$$

□

De este teorema se sigue que para todo  $m \geq 1$ ,

$$0 \leq N_i^m(x) \leq 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Veamos otro resultado relativo a la diferenciación, en este caso de los B-splines normalizados. Este muestra que la derivada de una función B-spline puede venir dada en términos de un B-spline de orden inferior.

**Proposición 2.2.1.** Sea  $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_i^m(x)$  una función spline, tenemos que

$$D_+ s(x) = (m - 1) \sum_{i=2}^n \frac{c_i - c_{i-1}}{y_{i+m-1} - y_i} N_i^{m-1}(x).$$

**Demostración.** Teníamos por (2.7) que la derivada de un B-spline de orden  $m$  viene dada por

$$D_+ B_i^m(x) = (m - 1) \frac{B_i(x)^{m-1} - B_{i+1}(x)^{m-1}}{y_{i+m} - y_i}.$$

Y haciendo uso de la relación entre  $B_i^m(x)$  y  $N_i^m(x)$ , es decir,

$$N_i^m(x) = (y_{i+m} - y_i) B_i^m(x).$$

Entonces

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_i^m(x) = \sum_{i=1}^n c_i (y_{i+m} - y_i) B_i^m(x).$$



Si derivamos obtenemos

$$\begin{aligned} D_+s(x) &= \sum_{i=1}^n c_i(y_{i+m} - y_i)D_+B_i^m(x) = (m-1) \sum_{i=1}^n c_i [B_i^{m-1}(x) - B_{i+1}^{m-1}(x)] = \\ &= (m-1) \sum_{i=1}^n c_i B_i^{m-1}(x) - (m-1) \sum_{i=1}^n c_i B_{i+1}^{m-1}(x) \end{aligned}$$

Cambiando el índice de sumación en el segundo término de la igualdad anterior,  $i$ , por  $j = i + 1$  tenemos que

$$(m-1) \sum_{i=1}^n c_i B_{i+1}^{m-1}(x) = (m-1) \sum_{j=2}^{n+1} c_{j-1} B_j^{m-1}(x).$$

Combinando ahora las dos sumas y teniendo en cuenta que  $B_1^{m-1}$  y  $B_{n+1}^{m-1}$  se anulan en  $(y_n, y_{n+1})$ , por el Teorema 2.2.5., obtenemos

$$D_+s(x) = (m-1) \sum_{i=2}^n (c_i - c_{i-1}) B_i^{m-1}(x) = (m-1) \sum_{i=2}^n \frac{c_i - c_{i-1}}{y_{i+m-1} - y_i} N_i^{m-1}(x).$$

□

A pesar de que un B-spline consta de segmentos polinómicos de orden  $m$  no está del todo claro que podamos representar polinomios como combinaciones lineales de B-splines. Esto es necesario para mantener la precisión de las aproximaciones polinómicas. Por ello, la siguiente fórmula es una identidad crucial en la teoría de splines.

**Teorema 2.2.8. (Identidad de Marsden).** Sea  $l \leq r$  e  $y_l < y_{r+1}$ . Para todo  $y \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$(y-x)^{m-1} = \sum_{i=l+1-m}^r \Phi_{i,m}(y) N_i^m(x), \quad \text{para todo } y_l \leq x < y_{r+1},$$

donde

$$\Phi_{i,m}(y) = \prod_{k=1}^{m-1} (y - y_{i+k}).$$

Aún más, para  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,

$$x^{j-1} = \sum_{i=l+1-m}^r \Theta_i^{(j)} N_i^m(x), \quad \text{para todo } y_l \leq x < y_{r+1},$$

donde

$$\Theta_i^{(j)} = (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{(m-1)!} D^{m-j} \Phi_{i,m}(0), \quad i \in \{l+1-m, \dots, r\}.$$

**Demostración.** Procederemos por inducción sobre  $m$ . Para  $m = 1$  las afirmaciones se obtienen de la definición de  $N_i^1(x)$  y del hecho de que  $\Phi_{i,1}(y) = \Theta_i^{(1)} = 1$ , para todo  $i$ . Suponemos ahora que el resultado es cierto para  $m - 1$  y veamos que se verifica también para  $m$ , para ello usamos la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} \sum_{i=l+1-m}^r \Phi_{i,m}(y)N_i^m(x) &= \sum_{i=l+1-m}^r \Phi_{i,m}(y) [(x - y_i)B_i^{m-1}(x) + (y_{i+m} - x)B_{i+1}^{m-1}(x)] = \\ &= \sum_{i=l+1-m}^r \Phi_{i,m}(y)(x - y_i)B_i^{m-1}(x) + \sum_{i=l+1-m}^r \Phi_{i,m}(y)(y_{i+m} - x)B_{i+1}^{m-1}(x) = \\ &= \sum_{i=l+1-m}^r \Phi_{i,m}(y)(x - y_i)B_i^{m-1}(x) + \sum_{j=l+2-m}^{r+1} \Phi_{j-1,m}(y)(y_{j+m-1} - x)B_j^{m-1}(x). \end{aligned}$$

Donde se ha reordenado la suma y se ha cambiado el índice de sumación en el segundo factor en la tercera igualdad,  $j = i + 1$ . Usando ahora el hecho de que los B-splines  $B_{l+1-m}^{m-1}(x)$  y  $B_{r+1}^{m-1}(x)$  se anulan para todo  $x \in [y_l, y_{r+1})$ , se obtiene

$$\sum_{i=l+1-m}^r B_i^{m-1}(x) [(x - y_i)\Phi_{i,m}(y) + (y_{i+m-1} - x)\Phi_{i-1,m}(y)].$$

Por la definición de  $\Phi_{i,m}$  tenemos que

$$\Phi_{i,m}(y) = \prod_{k=1}^{m-1} (y - y_{i+k}) = (y - y_{i+m-1}) \prod_{k=1}^{m-2} (y - y_{i+k}) = (y - y_{i+m-1})\Phi_{i,m-1}(y),$$

de igual manera  $\Phi_{i-1,m}(y) = (y - y_i)\Phi_{i,m-1}(y)$ . Y operando tenemos

$$\Phi_{i,m-1}(y) [(x - y_i)(y - y_{i+m-1}) + (y_{i+m-1} - x)(y - y_i)] = \Phi_{i,m-1}(y)(y - x)(y_{i+m-1} - y_i).$$

Juntando todo lo anterior, haciendo uso de la definición de los B-splines normalizados, por la hipótesis de inducción podemos concluir

$$\sum_{i=l+1-m}^r \Phi_{i,m}(y)N_i^m(x) = (y-x) \sum_{i=l+1-m}^r \Phi_{i,m-1}(y)N_i^{m-1}(x) = (y-x)(y-x)^{m-2} = (y-x)^{m-1}.$$

La identidad que nos resta comprobar,  $x^{j-1}$  se sigue de derivar la fórmula vista para  $(y-x)^{m-1}$   $m-j$  veces con respecto a  $y$ , y evaluándola en  $y = 0$ . □

El próximo teorema establece la llamada *fórmula de representación de Peano* para diferencias divididas. También da valores para los momentos del B-spline  $B_i^m$ . Pero antes de nada, veamos un resultado que aparece en [[2], pag.15] que usaremos para la demostración del resultado en cuestión. Introducimos para ello la noción de espacio de Sobolev  $L_p^r [I]$ :

**Definición 2.2.4.** Sean  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$  y un entero positivo  $r$ . Se define el espacio  $L_p^r[I]$  como el conjunto de funciones  $f$  cuya derivada de orden  $r - 1$ ,  $D^{r-1}f$ , es absolutamente continua en  $I$  y donde la derivada de orden  $r$ ,  $D^r f$ , es integrable en  $I$  (es decir,  $D^r f \in L_p$ ). El espacio  $L_p^r[I]$  se denomina **espacio de Sobolev**.

Los espacios de Sobolev son subespacios de los espacios  $L_p$  donde las funciones poseen derivadas suaves.

**Teorema 2.2.9. (Desarrollo dual de Taylor).** Sea  $f \in L_1^m[a, b]$ . Entonces para todo  $a \leq y \leq b$ ,

$$f(y) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j D^j f(b)(b-y)^j}{j!} + \int_a^b \frac{(-1)^m (x-y)_+^{m-1} D^m f(x)}{(m-1)!} dx. \quad (2.10)$$

**Teorema 2.2.10. (Fórmula de representación de Peano).** Fijamos  $0 \leq j \leq m - p$ , siendo  $p$  el máximo de las multiplicidades de  $y_i, \dots, y_{i+m}$ . Entonces

$$[y_i, \dots, y_{i+m}] f(x) = \int_{y_i}^{y_{i+m}} \frac{(-1)^j D_+^j B_i^m(x) D^{m-j} f(x)}{(m-1)!} dx \quad (2.11)$$

para todo  $f \in L_1^{m-j}[y_i, y_{i+m}]$ . Es más,

$$\int_{y_i}^{y_{i+m}} (-1)^j D_+^j B_i^m(x) x^s dx = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in \{0, 1, \dots, j-1\}, \\ \frac{s!(m-1)!}{(m+s-j)!} u_{s-j}(y_i, \dots, y_{i+m}) & \text{si } s \in \{j, \dots, m-1\} \end{cases}$$

donde  $u_{s-j}$  es la función definida en (1.9) vista en el Teorema 1.2.2.:

$$u_l(y_i, \dots, y_{i+m}) = \sum_{i \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_l \leq i+m} y_{i_1} \cdot y_{i_2} \cdot \dots \cdot y_{i_l}$$

En particular, los dos primeros momentos de  $B_i^m$  vienen dados por

$$\int_{y_i}^{y_{i+m}} B_i^m(x) dx = \frac{1}{m} \quad (2.12)$$

y

$$\int_{y_i}^{y_{i+m}} x B_i^m(x) dx = \frac{y_i + \dots + y_{i+m}}{m(m+1)}.$$

**Demostración.** Por el desarrollo dual de Taylor (2.10), si  $f \in L_1^{m-j}[y_i, y_{i+m}]$ , podemos escribir

$$f(y) = \sum_{k=0}^{m-j-1} \frac{(-1)^k D^k f(y_{i+m})(y_{i+m} - y)^k}{k!} + \int_{y_i}^{y_{i+m}} \frac{(-1)^{m-j} D_x^j (x-y)_+^{m-1} D^{m-j} f(x)}{(m-1)!} dx.$$

Aplicando ahora el operador de diferencias divididas  $[y_i, \dots, y_{i+m}]$  a ambos lados, obtenemos (2.11).

La otra igualdad se prueba tomando la función  $f(x) = x^{m-j-s}$  usando la fórmula (1.8) vista en el Teorema 1.2.2..

□

Antes de probar el siguiente resultado, necesitamos introducir otro B-spline  $\bar{B}_i^m$ . Es idéntico a  $B_i^m$  salvo por los nudos de multiplicidad  $m$ . Ya que la diferencia entre  $B_i^m$  y  $\bar{B}_i^m$  es simplemente que  $\bar{B}_i^m$  es continua por la izquierda mientras que  $B_i^m$  es continua por la derecha, y esta distinción es relevante en los nudos de multiplicidad  $m$ .

**Lema 2.2.1.** Dado  $y_i < y_{i+m}$ , sea

$$\bar{B}_i^m(x) = [y_i, \dots, y_{i+m}] (y-x)_+^{m-1} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$\bar{B}_i^m(x) = B_i^m(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \setminus J_i^m,$$

donde  $J_i^m = \{\text{nudos de multiplicidad } m \text{ de } B_i^m\}$ .

**Demostración.** Se tiene que

$$(x-y)_+^{m-1} - (-1)^m (y-x)_+^{m-1} = (x-y)^{m-1}.$$

Aplicando la diferencia dividida en la igualdad anterior sobre  $[y_i, \dots, y_{i+m}]$ , vemos que

$$[y_i, \dots, y_{i+m}] (x-y)_+^{m-1} - (-1)^m [y_i, \dots, y_{i+m}] (y-x)_+^{m-1} = 0$$

ya que la diferencia dividida de orden  $m$ -ésimo del polinomio  $(y-x)^{m-1}$  es 0.

□

Como otra aplicación de la representación (2.11) de diferencias divididas, tenemos el siguiente resultado que conecta productos internos de B-splines con diferencias divididas.

**Teorema 2.2.11.** Sean  $y_i < y_{i+m}$  e  $y_j < y_{j+n}$ . Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_i^m(x) B_j^n(x) dx = \frac{(-1)^m (m-1)! (n-1)!}{(m+n-1)!} [y_i, \dots, y_{i+m}]_x [y_j, \dots, y_{j+n}]_y (y-x)_+^{m+n-1}. \quad (2.13)$$

Los subíndices  $x$  e  $y$  en los símbolos de diferencias divididas indican en qué variables se operan.

**Demostración.** Tomemos  $f(x) = [y_j, \dots, y_{j+n}] (y-x)^{m+n-1}$ . Calculemos la derivada  $m$ -ésima

$$\begin{aligned} D^m f(x) &= (m+n-1)(m+n-2) \cdots (n-1) [y_j, \dots, y_{j+n}] (y-x)^{n-1} = \\ &= \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!} [y_j, \dots, y_{j+n}] (y-x)_+^{n-1}, \end{aligned}$$

si usamos la definición de  $\bar{B}_j^n(x)$  vista en el precedente tenemos que

$$(-1)^m D^m f(x) = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!} \bar{B}_j^n(x),$$

o lo que es lo mismo

$$D^m f(x) = (-1)^m \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!} \bar{B}_j^n(x),$$

Sustituyendo en la fórmula (2.11) vista en el Teorema 2.2.10., para  $j = 0$  tenemos

$$[y_i, \dots, y_{i+m}]_x f = \int_{y_i}^{y_{i+m}} \frac{B_i^m(x) D^m f(x)}{(m-1)!} dx.$$

Por tanto, teniendo en cuenta la expresión de  $D^m f(x)$  anterior

$$[y_i, \dots, y_{i+m}]_x f(x) = \int_{y_i}^{y_{i+m}} \frac{(-1)^m B_i^m(x) \bar{B}_j^m(x) (m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!} dx.$$

Si tenemos en cuenta el valor de  $f(x)$  obtenemos la fórmula requerida

$$[y_i, \dots, y_{i+m}]_x [y_j, \dots, y_{j+n}]_y (y-x)^{m+n-1} \frac{(-1)^m (m-1)!(n-1)}{(m+n-1)!} = \int_{y_i}^{y_{i+m}} B_i^m(x) \bar{B}_j^m(x) dx.$$

Usando el hecho de que  $\bar{B}_j^n(x)$  y  $B_j^n(x)$  son iguales (excepto quizás en un punto), obtenemos la expresión. Y además sabemos que  $B_i^m(x) = 0$  si  $x \notin (y_i, y_{i+m})$ , o que  $B_j^n(x) = 0$  si  $x \notin (y_j, y_{j+n})$  (Teorema 2.2.5.), obtenemos la fórmula (2.13). □

Nuestro próximo teorema trata la cuestión de qué sucede con un spline cuando aplicamos una pequeña perturbación en la ubicación de sus nudos.

**Teorema 2.2.12.** Sea  $y_i \leq \dots \leq y_{i+m}$ , y suponemos que  $y_i^{(v)} \leq \dots \leq y_{i+m}^{(v)}$  es una secuencia de puntos tales que

$$y_j^{(v)} \rightarrow y_j, \quad \text{para todo } j \in \{i, \dots, i+m\} \text{ cuando } v \rightarrow \infty.$$

Sean  $B_i^m$  y  $B_{i,v}^m$  los B-spline de orden  $m$  con estos conjuntos de nudos, respectivamente. Entonces, para todo  $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ ,

$$D_+^k B_{i,v}^m(x) \rightarrow D_+^k B_i^m(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus J_i^k,$$

donde

$$J_i^k = \{y_j : y_j \text{ es un nudo de } B_i^m \text{ de multiplicidad } m-k \text{ o más}\}.$$

La convergencia es uniforme en todo conjunto excepto en los conjuntos  $J_i^k$ .

**Demostración.** Consideraremos el caso  $k = 0$  en primer lugar. Si  $y_i = y_{i+m}$ , por tanto  $B_i^m(x) = 0$  para todo  $x$ . Dado que  $B_{i,v}^m(x) = 0$  fuera del intervalo  $[y_i^{(v)}, y_{i+m}^{(v)}]$ , que se reduce únicamente al punto  $y_i$ , la afirmación es cierta en este caso.

Para el caso  $y_i < y_{i+m}$ , se procede por inducción. Para  $m = 1$  el resultado es cierto. Haciendo uso de la fórmula recursiva de los B-splines  $B_i^m$  y  $B_{i,v}^m$ , obtenemos

$$\begin{aligned} & |B_i^m(x) - B_{i,v}^m(x)| \leq \\ & \leq \frac{|B_i^{m-1}(x)(x - y_i)(y_{i+m}^{(v)} - y_i^{(v)}) - B_{i,v}^{m-1}(x)(x - y_i^{(v)})(y_{i+m} - y_i)|}{(y_{i+m} - y_i)(y_{i+m}^{(v)} - y_i^{(v)})} + \\ & + \frac{|B_{i+1}^{m-1}(x)(y_{i+m} - x)(y_{i+m}^{(v)} - y_i^{(v)}) - B_{i+1,v}^{m-1}(x)(y_{i+1}^{(v)} - x)(y_{i+m} - y_i)|}{(y_{i+m} - y_i)(y_{i+m}^{(v)} - y_i^{(v)})}. \end{aligned}$$

Las expresiones de la parte derecha de la desigualdad van a cero cuando  $v \rightarrow \infty$ . Por lo que estas convergen uniformemente en cualquier intervalo cerrado excluyendo a  $J_i^0$ .

Para  $k > 0$  el resultado se concluye del resultado que formula la derivada de un B-spline en términos de B-splines orden inferior, es decir, del Teorema 2.2.4. □

## 2.3. Nudos uniformemente espaciados

En este apartado vamos a discutir B-splines con nudos igualmente espaciados. Es útil en diversas aplicaciones de splines, ya que conduce a simplificaciones en la teoría y produce modificaciones sustanciales en el ahorro de cálculos.

**Definición 2.3.1.** Decimos que un conjunto de nudos  $\dots, y_i, y_{i+1}, \dots$  es **uniforme con espaciamiento**  $h$  si se cumple

$$y_{i+1} - y_i = h \text{ para todo } i.$$

Sea

$$B^m(x) = \frac{(-1)^m \Delta^m (x - y)_+^{m-1}}{m!} y = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i \binom{m}{i} (x - i)_+^{m-1}}{m!}. \quad (2.14)$$

Este es el B-spline usual con nudos simples  $0, 1, \dots, m$ . Este pertenece a  $C^{m-2}[-\infty, \infty]$ . El B-spline normalizado de  $B^m(x)$  es

$$N^m(x) = mB^m(x). \quad (2.15)$$

El siguiente teorema muestra que cualquier B-spline con nudos uniformemente espaciados puede obtenerse de  $Q^m$  o  $N^m$  mediante una traslación (y posible escalado):

**Teorema 2.3.1.** Supongamos que  $y_i, \dots, y_{i+m}$  están uniformemente espaciados con espaciado  $h$ . Entonces

$$B_i^m(x) = \frac{1}{h} B^m\left(\frac{x - y_i}{h}\right)$$

y

$$N_i^m(x) = N^m\left(\frac{x - y_i}{h}\right).$$

**Demostración.** Para los nudos  $y_j$  uniformemente espaciados, la diferencia dividida en la definición de  $B_i^m$ , vista en la Definición 2.2.2., se convierte en el operador diferencia progresiva (ver Definición 1.2.2. y Teorema 1.2.4.), por lo tanto tenemos

$$B_i^m(x) = \frac{(-1)^m \Delta_h^m(x - y)_+^{m-1}}{h^m m!} = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i \binom{m}{i} (x - y)_+^{m-1}}{h^m m!} = \frac{B^m\left(\frac{x - y_i}{h}\right)}{h}.$$

La igualdad referente al normalizado se sigue del hecho  $N_i^m(x) = mhB_i^m(x)$ , por (2.15).  $\square$

Con respecto al tamaño del spline normalizado  $N^m$ , observamos que

$$\|N^m\|_{L_1[0,m]} = \|N^m\|_{L_\infty[0,m]} = 1,$$

y por lo tanto

$$\|N^m\|_{L_q[0,m]} \leq 1 \quad \text{para todo } 1 \leq q \leq \infty.$$

La fórmula recursiva vista en (2.6) se puede reescribir en el caso de nudos uniformemente espaciados:

$$B^m(x) = \frac{x B^{m-1}(x) + (m - x) B^{m-1}(x - 1)}{m}. \quad (2.16)$$

En términos del B-spline normalizado, esta viene dada por:

$$N^m(x) = x B^{m-1}(x) + (m - x) B^{m-1}(x - 1). \quad (2.17)$$

De forma similar, la fórmula (2.7) puede reescribirse como

$$D_+ N^m(x) = N^{m-1}(x) - N^{m-1}(x - 1).$$

Para nudos uniformemente espaciados, veamos en qué se convierte la fórmula de representación de Peano, (2.11), para diferencias divididas:

Tomando para  $j = 0$  la expresión (2.11) tenemos

$$[y_i, \dots, y_{i+m}] f(x) = \int_{y_i}^{y_{i+m}} \frac{B_i^m(x) D^m f(x)}{(m - 1)!} dx.$$

Usamos ahora las fórmulas vistas en el Teorema 2.3.1. y (2.15)

$$[y_i, \dots, y_{i+m}] f(x) = \int_{y_i}^{y_{i+m}} \frac{1}{h} \frac{1}{m!} N^m \left( \frac{x - y_i}{h} \right) D^m f(x) dx.$$

Recordemos la definición de diferencia progresiva (Definición 1.2.2.), tal que para  $h > 0$  y un entero positivo  $m$  esta venía dada de la forma

$$\Delta_h^m f(t) = m! h^m [t, \dots, t + mh] f,$$

donde aquí  $h$  es el espaciamiento uniforme entre los nudos, por tanto, se toma como  $t = y_i$ , y los nudos  $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+m}$  vienen dados por  $t, t+h, \dots, t+hm$ , respectivamente. Sustituyendo todo esto en la fórmula anterior, obtenemos

$$\Delta_h^m f(t) = \int_t^{t+hm} N^m \left( \frac{x-t}{h} \right) D^m f(x) dx.$$

Realizando un cambio de variable con  $y = x - t$ , llegamos a la siguiente fórmula

$$\Delta_h^m f(t) = \int_0^{hm} N^m \left( \frac{y}{h} \right) D^m f(y+t) dy.$$

para toda función  $f \in L_1^m [t, t+hm]$ . Si tomamos ahora  $t = 0$  y  $h = 1$  se obtiene que

$$\Delta^m f(0) = \int_0^m N^m(y) D^m f(y) dy$$

para toda función  $f \in L_1^m [0, m]$ .

Para nuestro próximo teorema necesitamos introducir una modificación (una traslación a un nudo semientero) del B-spline  $N^m$  definido en (2.15) sobre una red uniforme:

$$M^m(x) = N^m \left( x + \frac{m}{2} \right), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Este spline es simétrico con respecto al origen con soporte en  $[-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}]$ . Para  $m$  par este spline tiene nudos simples en los enteros, mientras que para  $m$  impar los nudos están en los puntos medios entre los enteros.

El siguiente teorema muestra que  $M^m$  puede definirse mediante un proceso de convolución iterada:

**Teorema 2.3.2.** Para  $1 \leq i \leq m-1$ ,

$$M^m(x) = M^i * M^{m-i}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} M^i(x-y) M^{m-i}(y) dy. \quad (2.18)$$

Además,

$$M^m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin(\frac{u}{2})}{\frac{u}{2}} \right)^m e^{iux} du. \quad (2.19)$$



**Demostración.** Para probar (2.18) es suficiente con demostrar que

$$M^m(x) = M^{m-1} * M^1(x) = M^1 * M^{m-1}(x).$$

Veamos esto por inducción sobre  $m$ : Para  $m = 2$  este caso es simple. Suponemos que la fórmula anterior se cumple para  $m - 1$ . Veámoslo para  $m$ . Sustituyendo la expansión explícita de  $M^{m-1}(x)$  en términos de funciones  $+$ , usando (2.14) y Teorema 2.3.1 obtenemos

$$\begin{aligned} M^{m-1} * M^1(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j \binom{m-1}{j}}{(m-2)!} \int_{x-1/2}^{x+1/2} \left(y + \frac{m-1}{2} - j\right)_+^{m-2} dy = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j \binom{m-1}{j}}{(m-1)!} \left[ \left(x + \frac{m}{2} - j\right)_+^{m-1} - \left(x + \frac{m-1}{2} - j - 1\right)_+^{m-1} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{(m-1)!} \left[ \binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} \right] \left(x + \frac{m}{2} - j\right)_+^{m-1}, \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\binom{m-1}{-1} = \binom{m-1}{m} = 0$ . Combinando los coeficientes binomiales vemos que esta suma es precisamente la expansión de  $M^m(x)$ . Para probar (2.19), usamos la transformación de Fourier de  $M^m$

$$\widehat{M^m}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} M^m(x) e^{-iux} dx.$$

Para  $m = 1$  tenemos

$$\widehat{M^1}(u) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{u}{2}}.$$

Y como  $M^m = M^1 * \dots * M^1$  es la convolución de  $m$  copias de  $M^1$  se sigue que

$$\widehat{M^m}(u) = \left[\widehat{M^1}(u)\right]^m$$

Y la fórmula (2.19) es simplemente la inversa de la transformación de Fourier. □

## 2.4. B-splines perfectos

En esta sección se presenta un B-spline especial con buenas propiedades.

**Teorema 2.4.1. (B-spline Perfecto).** Sean

$$y_i = \cos\left(\frac{m-i}{m}\right)\pi, \quad i \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad (2.20)$$

y sea

$$B_m^*(x) = m(-1)^m [y_0, y_1, \dots, y_m] (x - y)_+^{m-1}.$$

Llamamos a  $B_m^*$  el **B-spline perfecto** de orden  $m$ . Este satisface las siguientes propiedades:

$$\int_{-1}^1 B_m^*(x) dx = 1 \quad (2.21)$$

y

$$|D_+^{m-1} B_m^*(x)| = 2^{m-2}(m-1)!, \text{ para todo } -1 \leq x \leq 1.$$

**Demostración.** La primera propiedad se sigue de (2.12) y normalizando. Pues

$$\int_{y_i}^{y_{i+m}} B_i^m(x) dx = \frac{1}{m},$$

y como  $B_m^*(x) = mB_0^m(x)$ , obtenemos (2.21); ya que al estar los nudos  $y_i$  definidos como cosenos, pertenecen al intervalo  $[-1, 1]$ .

Para probar la segunda propiedad, usamos el hecho de que  $y_i$  vienen definidos como en (2.20),

$$\begin{aligned} & (-1)^m [y_0, y_1, \dots, y_m] f = \\ & = \frac{2^{m-2}}{m} [f(y_0) - 2f(y_1) + 2f(y_2) + \dots + (-1)^{m-1} 2f(y_{m-1}) + (-1)^m f(y_m)]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} B_m^*(x) & = m(-1)^m [y_0, y_1, \dots, y_m] f = \\ & = 2^{m-2} [f(y_0) - 2f(y_1) + 2f(y_2) + \dots + (-1)^{m-1} 2f(y_{m-1}) + (-1)^m f(y_m)]. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} D_+^{m-1} B_m^*(x) & = 2^{m-2}(m-1)! [(x - y_0)_+^0 - 2(x - y_1)_+^0 + \dots + (-1)^m (x - y_m)_+^0] = \\ & = (-1)^i 2^{m-2}(m-1)! \end{aligned}$$

para  $y_i \leq x \leq y_{i+1}$ , con  $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ . □

Este spline tiene soporte en el intervalo  $[-1, 1]$ , es decir, no se anula en dicho intervalo. Se llama perfecto porque su  $(m-1)$ -ésima derivada tiene un valor absoluto constante.

**Ejemplo 2.4.1.** Los B-splines perfectos de orden  $m = 2$  y orden  $m = 3$  vienen dados por

$$B_2^*(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

y

$$B_3^*(x) = \begin{cases} 2(x+1)^2 & \text{si } -1 \leq x \leq -1/2, \\ 1 - 2x^2 & \text{si } -1/2 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x)^2 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para  $m$  más altos, los nudos continúan ubicados simétricamente sobre el origen, y por tanto  $B_m^*$  siempre es simétrica.

Una aplicación importante de los B-splines perfectos es la construcción de funciones de transición que conectan suavemente una función con otra. El siguiente teorema muestra una función de transición que conecta la función nula con la función constante 1. En la siguiente figura se muestra la función de transición para  $m = 4$ . Esta se encuentra en [2].

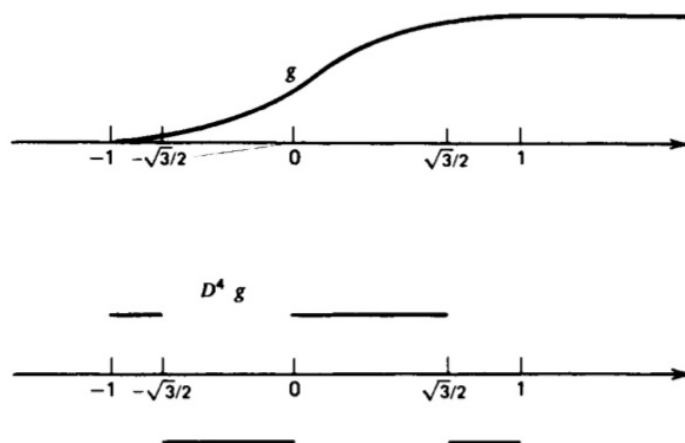


Figura 2.1: Función de transición para  $m = 4$ .

**Teorema 2.4.2.** Sea

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \int_{-1}^x B_m^*(t) dt & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

Entonces  $g \in L_\infty^m[\mathbb{R}]$ . Además, es la solución única del problema de minimización

$$\min_{f \in U} \|D^m f\|_{L_\infty[\mathbb{R}]},$$

donde

$$U = \{f \in L_\infty^m[\mathbb{R}] : f(x) \equiv 0 \text{ para } x \leq -1 \text{ y } f(x) \equiv 1 \text{ para } x \geq 1\}.$$

**Demostración.** A la vista de (2.21), es claro que  $g \in U$ . Para demostrar que proporciona un mínimo, aplicamos el método de integración por partes,

$$\int_{-1}^1 D^m f(x) DT_m(x) = (-1)^{m-1} 2^{m-1} m!$$

para todo  $f \in U$ , donde  $T_m$  es el  $m$ -ésimo polinomio de Tchebycheff de primera clase y se define como

$$T_m(x) = \cos [m \arccos(x)]$$

Es un polinomio de grado  $m$ , simétrico respecto del origen (un mayor estudio de estos puede encontrarse en 1.2.2. de [5] o en la observación 4.2 del libro de Schumaker, [2]).

Supongamos que  $f \in U$  es  $\|D^m f\|_\infty \leq \|D^m g\|_\infty$ . Entonces, con  $h = g - f$  el hecho de que  $D^m h$  tiene el mismo signo que  $D^m f$  en  $(-1, 1)$  (los ceros de  $DT_m$  están precisamente en el  $y_1, \dots, y_{m-1}$ ), tenemos

$$0 \leq \int_{-1}^1 D^m h(x) DT_m(x) dx \leq \int_{-1}^1 D^m g(x) DT_m(x) dx - \int_{-1}^1 D^m f(x) DT_m(x) dx \leq 0.$$

Donde se ha usado

$$|D^m g(x)| = 2^{m-2}(m-1)!, \text{ para todo } -1 \leq x \leq 1.$$

Se sigue que  $D^m h(x) = 0$  en casi todo punto en  $(-1, 1)$ , por tanto  $h \in \mathcal{P}_m$ . Pero como  $f$  y  $g$  están en  $U$ , sus primeras  $m-1$ -ésimas derivadas se anulan en 0, por tanto  $h = 0$ .  $\square$

La función de transición óptima para  $m = 4$  se muestra en la Figura 2.1 junto con su cuarta derivada. Está claro que en  $(-1, 1)$  la función  $g$  también es un spline perfecto, es decir, su  $m$ -ésima derivada tiene valor constante. Las funciones de transición para otros intervalos pueden obtenerse a partir de  $g$  mediante un simple cambio de variables.

## 2.5. Propiedades de los ceros

En esta sección vamos a limitar el número de ceros que puede tener un spline polinomial. El objetivo es formular una versión adecuada del teorema de Rolle para splines.

Definir los ceros puede ser complicado bien porque los splines y sus derivadas pueden tener saltos en los nudos, o bien porque los splines pueden anularse de forma idéntica en intervalos (incluso si estudiamos splines que no se anulen en intervalos, tan pronto como tomemos su derivada, los intervalos cero pueden aparecer).

**Definición 2.5.1.** Sean  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ , y  $1 \leq m_i \leq m$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Supongamos que  $s$  no se anula idénticamente en cualquier intervalo que contenga a  $t$ , y que  $s(t-) = D_- s(t) = \dots = D_-^{l-1} s(t) = 0 \neq D_-^l s(t)$ , mientras que  $s(t+) = D_+ s(t) = \dots = D_+^{r-1} s(t) = 0 \neq D_+^r s(t)$ . Entonces decimos que  $s$  tiene un **cero aislado en  $t$  de multiplicidad  $z$** , con

$$z = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{si } \alpha \text{ es par y } s \text{ cambia de signo en } t, \\ \alpha + 1, & \text{si } \alpha \text{ es impar y } s \text{ no cambia de signo en } t, \\ \alpha, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $\alpha = \max(l, r)$ .

Recordemos que si  $f$  una función real acotada en un subconjunto  $I$  de la recta real, con un cero en el punto  $t$  en el intervalo  $(a, b)$ , se dice que  $f$  **cambia de signo** en  $t$  si  $f(t - \epsilon)f(t + \epsilon) < 0$  para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño.

Si  $l = r = 0$  y  $s$  cambia de signo en  $t$ , entonces el punto  $t$  cuenta como un cero de multiplicidad 1, pues  $\alpha = 0$ . En general, los ceros de orden impar se asocian con un cambio de signo, mientras que los de orden par no se asocian en ningún cambio.

**Definición 2.5.2.** Sea  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$ . Definimos los intervalos cero de  $s$  como:

- **Intervalo extremo izquierdo.** Suponemos que  $s(x) = 0$  para  $-\infty < x < x_p$ , y  $s(y) \neq 0$  para  $x_p < y < x_{p+1}$ . Entonces decimos que  $(-\infty, x_p)$  es un **cero** de  $s$  de multiplicidad  $z = m + \sum_{i=1}^{p-1} m_i$ .
- **Intervalo interior.** Suponemos que  $s(x) = 0$  para  $x_p < x < x_q$ , y no se anula idénticamente en ningún intervalo que contiene a  $(x_p, x_q)$ . Entonces decimos que  $(x_p, x_q)$  es un **cero** de  $s$  de multiplicidad

$$z = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{si } \alpha \text{ es par y } s \text{ cambia de signo en } t, \\ \alpha + 1, & \text{si } \alpha \text{ es impar y } s \text{ no cambia de signo en } t, \\ \alpha, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $\alpha = m + \sum_{i=p+1}^{q-1} m_i$ .

- **Intervalo extremo derecho.** Suponemos que  $s(x) = 0$  para  $x_q < x < \infty$ , y  $s(y) \neq 0$  para  $x_{q-1} < y < x_q$ . Entonces decimos que  $(x_q, \infty)$  es un **cero** de  $s$  de multiplicidad  $z = m + \sum_{i=q+1}^k m_i$ .

Con respecto a la definición anterior, notamos que si  $s$  se anula en un intervalo, entonces los extremos de ese intervalo deber ser  $-\infty, \infty$  o un nudo. Como son ceros aislados, un spline cambia de signo en un intervalo impar nulo, pero no cambia de signo en un intervalo par.

A continuación, vamos a definir un procedimiento de conteo de ceros:

**Definición 2.5.3.** Dado un spline  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$ , sean  $T_1, T_2, \dots, T_d$  puntos en los intervalos donde  $s$  tiene ceros de multiplicidades  $z(T_1), \dots, z(T_d)$ , respectivamente. Denominamos

$$Z^{\mathcal{S}}(s) = \sum_{i=1}^d z(T_i)$$

al **número de ceros** de  $s$  en  $\mathbb{R}$  relativo a  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$ .

Obviamente  $Z^{\mathcal{S}}(s)$  depende de la elección de  $\mathcal{S}$ . Dado que un spline puede pertenecer a más de un espacio  $\mathcal{S}$ , la forma en que contamos los ceros de  $s$  dependerá del espacio en el que estemos contando.

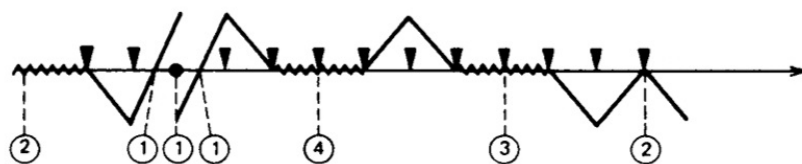


Figura 2.2: Ceros de un spline lineal.

**Ejemplo 2.5.1.** Consideremos el spline que se muestra en Figura 2.2. (se ha extraído del libro de Schumaker, [2]). En la figura se muestra con un triángulo los nudos simples y con un círculo los nudos dobles.

Si consideramos que el spline  $s$  pertenece al espacio  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$ , con  $m = 2$  (funciones lineales a trozos),  $\Delta = \{1, 2, \dots, 13\}$ , y  $\mathcal{M} = (1, 1, 2, 1, 1, \dots, 1)$ . Como en la figura se marca con un círculo los ceros y su multiplicidad, el número de ceros en este espacio es por tanto  $Z^{\mathcal{S}}(s) = 14$ . Vamos a ver como salen estas multiplicidades de los ceros. Como  $s$  es un spline lineal, para los ceros aislados,  $\alpha = 1$  que es impar. Por eso los tres primeros ceros tienen multiplicidad 1, pues además  $s$  cambia de signo, mientras que el último es 2 pues ahí no cambia la función de signo. Y para los intervalos ceros, tenemos que  $m = 2$ . En el primer intervalo  $z = m$  por eso es 2 la multiplicidad del cero. En el segundo,  $\alpha = 3$  por lo que es impar y la función  $s$  no cambia de signo, por lo que  $z = 4$ . en el último, igualmente  $\alpha = 3$  pero la función cambia de signo, por lo que en este caso la multiplicidad es  $z = 3$ .

Si ahora, consideramos a  $s$  como spline del espacio  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \bar{\mathcal{M}}; \Delta)$ , con  $m = 3$  (funciones cuadráticas a trozos),  $\Delta$  como antes y  $\bar{\mathcal{M}} = (2, 2, 3, 2, 2, \dots, 2)$ . En relación con este espacio el número de ceros es  $\bar{Z}^{\mathcal{S}}(s) = 17$ , ya que el intervalo  $(-\infty, 1)$  tiene multiplicidad 3, mientras que el intervalo  $(9, 11)$  tiene ahora multiplicidad 5.

Al haber definido los splines polinomiales a trozos, estos no tienen derivadas de orden arbitrario en todos sus puntos. Esto no ocasiona ningún problema si sólo trabajamos con derivadas por la derecha.

**Teorema 2.5.1.** Sea  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$ . Entonces,  $D_+s(x)$  existe para todo  $x$  y es una función continua por la derecha. Además,  $D_+s(x) \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_{m-1}; \mathcal{M}'; \Delta)$ , donde  $\mathcal{M}' = (m'_1, \dots, m'_k)$ , con  $m'_i = \min(m - 1, m_i)$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Demostración.** Al ser  $s$  un polinomio definido a trozos tenemos asegurada la existencia de  $D_+s(x)$  para todo  $x \notin \Delta$ , mientras que en los nudos existen derivadas tanto por la izquierda como por la derecha. La continuidad de la derivada por la derecha se sigue del hecho de que  $s$  está bien definido, por ser un polinomio en el intervalo  $[x_i, x_{i+1})$  cerrado por la izquierda para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Además, es obvio que  $D_+s$  es un polinomio definido a trozos de orden  $m - 1$ . Si  $s, D_+s, \dots, D_+^{r-1}s$  son todos continuos en torno al nudo  $x_i$ , lo son por tanto  $D_+s, \dots, D_+^{r-1}s$ , y obtenemos lo que se pretendía.  $\square$

**Teorema 2.5.2. (Teorema de Rolle para splines).** Supongamos que  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  es continua. Entonces

$$Z_{[a,b]}^{\mathcal{DS}}(D_+s) \geq Z_{[a,b]}^{\mathcal{S}}(s) - 1,$$

donde  $\mathcal{DS} = \mathcal{S}(\mathcal{P}_{m-1}; \mathcal{M}'; \Delta)$  y  $\mathcal{M}'$  definido como en el Teorema 2.5.1.

**Demostración.** Por el Teorema 2.5.1. sabemos que  $D_+s$  pertenece al espacio  $\mathcal{DS}$ . Ahora bien, si  $s$  tiene un cero de multiplicidad  $z$  en el punto  $t$  (relativo a  $\mathcal{S}$ ), se tiene que  $D_+s$  tiene un cero de multiplicidad  $(z-1)$  en el mismo punto o en el mismo intervalo (relativo a  $\mathcal{DS}$ ). Además de los ceros que  $D_+s$  hereda de  $s$ , observamos que por el Teorema de Rolle extendido (Teorema 1.3.1.), entre dos ceros cualesquiera de  $s$ , el spline  $D_+s$  debe tener un cambio de signo; pues  $s$  es continua, y por lo tanto, es absolutamente continua al ser un polinomio definido a trozos. Si suponemos ahora, que hay un total de  $d$  puntos e intervalos  $T_1, \dots, T_d$ , donde  $s$  tiene ceros de multiplicidades respectivas  $z_1, \dots, z_d$ , con  $Z_{[a,b]}^{\mathcal{S}}(s) = \sum_{i=1}^d z_i$ , tenemos que

$$Z_{[a,b]}^{\mathcal{DS}}(D_+s) \geq \sum_{i=1}^d (z_i - 1) + d - 1 = Z_{[a,b]}^{\mathcal{S}}(s) - 1.$$

Por consiguiente se obtiene lo que se pedía demostrar.  $\square$

El Teorema de Rolle para splines se ha probado sólo para splines que son continuos, es decir, sin saltos. El siguiente Lema será útil para suavizar splines con discontinuidades de salto:

**Lema 2.5.1.** Sea  $s$  un spline de orden  $m$  con un nudo de multiplicidad  $m$  en  $\xi$ . Dado cualquier  $\delta > 0$ , existe un spline polinomial  $s_\delta$  de orden  $m$  con un nudo simple en  $\xi - \delta$  y un nudo de multiplicidad  $m - 1$  en  $\xi$  tal que

$$s_\delta(x) = s(x) \text{ para todo } x \notin (\xi - \delta, \epsilon). \quad (2.22)$$

Además, si  $p_L$  y  $p_R$  son trozos polinomiales de  $s$  a la izquierda y a la derecha de  $\xi$ , respectivamente, entonces para  $\delta$  suficientemente pequeño,

$$p_L(x) \leq s_\delta(x) \leq p_R(x), \quad \xi - \delta \leq x \leq \xi. \quad (2.23)$$

De manera similar, existe un spline  $\bar{s}_\delta$  de orden  $m$  con un nudo de multiplicidad  $m - 1$  en  $\xi$  y un nudo simple en  $\xi + \delta$  tal que  $\bar{s}$  coincide con  $s$  fuera del intervalo  $(\xi, \xi + \delta)$ , y las desigualdades de (2.23) se mantienen en el intervalo  $(\xi, \xi + \delta)$ .

**Demostración.** Discutimos la construcción de  $s_\delta$ ; la construcción de  $\bar{s}$  es similar. Suponemos que

$$s(x) = p_L(x) + \sum_{i=0}^{m-1} c_i \frac{(x - \xi)_+^i}{i!}$$

para  $x$  perteneciente a un entorno de  $\xi$ . Si  $c_0 > 0$ , entonces para cualquier  $\delta > 0$ , tenemos que

$$s_\delta(x) = p_L(x) + c_0 \frac{(x - \xi + \delta)_+^{m-1}}{(m-1)! \delta^{m-1}} + \sum_{i=1}^{m-1} \left[ c_i - \frac{\delta^{-i} c_0}{(m-i-1)!} \right] \frac{(x - \xi)_+^i}{i!}$$

es un spline de orden  $m$  con un nudo simple en  $\xi - \delta$  y un nudo de multiplicidad  $m - 1$  en  $\xi$ . Claramente, (2.22) se cumple para  $x \leq \xi - \delta$ . Para  $x \geq \xi - \delta$  tenemos

$$\frac{(x - \xi + \delta)_+^{m-1}}{(m-1)!\delta^{m-1}} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x - \xi)^i \delta^{-i}}{(m-i-1)!i!}.$$

Sustituyendo esto en  $s_\delta(x)$ , obtenemos que (2.22) se satisface también para  $x \geq \xi$ . Para probar (2.23), suponemos que  $c_0 > 0$ . Se cumple  $s_\delta(x) \geq s(x) = p_L(x)$  para  $\xi - \delta \leq x \leq \xi$ . Por otro lado,  $s_\delta(\xi) = p_R(\xi)$ , mientras que  $D_+s_\delta(\xi-) \rightarrow \infty$  cuando  $\delta \downarrow 0$ . Lo que implica que  $s_\delta(x) \leq p_R(x)$  para  $\xi - \delta \leq x \leq \xi$  siendo  $\delta$  suficientemente pequeño.  $\square$

El siguiente Lema hace uso de este método, separando nudos múltiples, mostrando así que para cualquier spline  $s$  hay un spline continuo  $s_\delta$  con el mismo número de nudos, que es una perturbación de  $s$ , y que tiene el mismo número de ceros que  $s$ .

**Lema 2.5.2.** Sea  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  con  $K = \sum_{i=1}^k m_i$  nudos. Entonces para todo  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, existen  $\bar{\Delta}$  y  $\bar{\mathcal{M}}$  con  $K = \sum_{i=1}^k \bar{m}_i$  con  $\bar{m}_i < m$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ; y un spline  $s_\delta \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \bar{\mathcal{M}}; \bar{\Delta})$  de forma que  $s$  y  $s_\delta$  son idénticos excepto en intervalos de pequeña longitud cerca de nudos de multiplicidad  $m$  de  $s$ , y además, se tiene

$$Z_{[a,b]}^{\bar{\mathcal{S}}}(s_\delta) = Z_{[a,b]}^{\mathcal{S}}(s).$$

**Demostración.** Podemos usar el Lema 2.5.1. para dividir cada nudo de multiplicidad  $m$  de  $s$  en un nudo simple y en un nudo de multiplicidad  $m - 1$ . Hay que tener cuidado con los nudos que son ceros aislados de  $s$ . Si  $s(\xi+) = 0$ , deberíamos dividir el nudo, como se ha mencionado, y moverlo a  $\xi - \delta$ . Y si  $s(\xi-) = 0$ , se debe dividir un nudo y moverlo a  $\xi + \delta$ . Observando esto, se tiene que  $s$  y  $s_\delta$  tiene las mismas propiedades de cambio de signo y la misma multiplicidad del cero en  $\xi$ . Si  $s$  se anula en un intervalo  $(x_i, x_j)$ , entonces  $s_\delta$  se anula al menos un intervalo de la forma  $(x_i + \delta, x_j - \delta)$ . Dado que  $s_\delta$  cambiará de signo exactamente cuando lo haga  $s$ , la multiplicidad de los ceros de  $s$  y  $s_\delta$  también será la misma.  $\square$

El teorema principal sobre los ceros de splines es el siguiente:

**Teorema 2.5.3.** Para todo  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$ ,  $s \neq 0$ ,

$$Z^{\mathcal{S}}(s) \leq m + K - 1.$$

**Demostración.** Para  $m = 1$  el teorema se refiere a funciones constantes a trozos y con  $k = K$ . En este caso, el único tipo de cero aislado posible es un nudo. Si  $s$  se anula en un intervalo  $(x_p, x_q)$ , entonces el intervalo puede contar como máximo  $q - p + 1$ . Concluimos que cualquier  $s$  puede tener como máximo  $k$  ceros, y queda demostrado el teorema en este caso.

Procedamos ahora por inducción sobre  $m$ . Supongamos que el teorema ha quedado probado para orden  $m - 1$ . Veamos ahora que es cierto para orden  $m$ .



Sea  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  tal que  $Z^{\mathcal{S}}(s) \geq m + K$ . Supongamos que  $s$  no tiene nudos de multiplicidad  $m$ . En consecuencia,  $s$  es continua en  $\mathbb{R}$ , y por el Teorema de Rolle para splines (Teorema 2.5.2.),  $Z^{\mathcal{D}\mathcal{S}}(D_+s) \geq m + K - 1$ . Aplicando la hipótesis inductiva se tiene que  $D_+s = 0$ . De aquí se deduce que  $s$  debe ser una función constante definida a trozos, pero como  $s$  es continua, es una constante. Y como tenemos que  $s$  se anula al menos una vez, se concluye que  $s \equiv 0$ . El teorema queda probado en este caso.

Falta por tratar el caso en que  $s$  tenga ceros de multiplicidad  $m$ . Dado  $s$  con  $Z^{\mathcal{S}}(s) \geq m + K$ , por el Lema 2.5.2., existe un spline continuo  $s_\delta$  con  $K$  nudos (ninguno de ellos es de multiplicidad  $m$ ) y con  $m + K$  ceros. El argumento anterior muestra que  $s_\delta \equiv 0$ . Pero como  $s(x) = s_\delta(x)$ , excepto en entornos pequeños cerca del nudo de multiplicidad  $m$ , se sigue que  $s \equiv 0$ . □

La cota dada en el teorema precedente, es la mejor posible, como se muestra en el siguiente resultado (su demostración se verá en la próxima sección):

**Teorema 2.5.4.** Existe un spline  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  con

$$Z^{\mathcal{S}}(s) = Z^1(s) = m + K - 1,$$

donde  $Z^1$  es el número de ceros simples y distintos.

**Observación 2.5.1.** El límite en el número de ceros de un spline definido en el espacio  $\mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  es precisamente uno menos que la dimensión de este espacio. Por otro lado, dado que siempre contiene splines que se anulan en intervalos (por ejemplo, las funciones  $+$ ), no forma un espacio  $T$ .

El siguiente teorema muestra que es un espacio de Tchebycheff débil:

**Teorema 2.5.5.** El espacio  $\mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  es un WT - espacio.

**Demostración.** Para todo  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$ , por el Teorema 2.5.3.,  $S^-(s) \leq Z^{\mathcal{S}}(s) \leq m + K - 1$ . Como  $\mathcal{S}$  tiene dimensión  $m + K$ , el Teorema 1.4.3. implica que es un WT-espacio. □

Una herramienta importante para nuestro análisis futuro de determinantes de B-splines es el siguiente resultado:

**Teorema 2.5.6.** Sean  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{n+m}$ , con  $y_i < y_{i+m}$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Sean  $\{N_i^m\}_{i=1}^n$  B-splines normalizados. Entonces, para todo  $s = \sum_{i=1}^n c_i N_i^m$  no nulo en ningún subintervalo del intervalo  $(y_1, y_{n+m})$ , se tiene

$$Z_{(y_1, y_{n+m})}(s) \leq n - 1,$$

siendo  $Z$  el número de ceros aislados.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{S}$  el espacio de spline con nudos en  $y_1, \dots, y_{n+m}$ . Entonces  $s \in \mathcal{S}$ ; y por el Teorema 2.5.3.,  $Z^{\mathcal{S}}(s) \leq n + 2m - 1$ . Pero como  $s$  se anula en los intervalos  $(-\infty, y_1)$  y  $(y_{n+m}, \infty)$ , y ambos intervalos son ceros de multiplicidad  $m$  (por la Definición 2.5.2.), se sigue que en el intervalo  $(y_1, y_{n+m})$ , el spline  $s$  puede tener como máximo  $n - 1$  ceros. □

**Observación 2.5.2.** Si aplicamos el teorema precedente para  $n = 1$ , tenemos otra prueba del hecho de que el B-spline asociado con nudos  $y_i, \dots, y_{i+m}$  es no nulo en el intervalo  $(y_i, y_{i+m})$ .

El Teorema 2.5.6. también puede usarse para discutir las derivadas de un spline como se ve a continuación:

**Teorema 2.5.7.** Sea  $N_i^m$  el B-spline normalizado asociado con nudos en  $y_i, \dots, y_{i+m}$ . Entonces

$$Z_{(y_i, y_{i+m})}(D_+^j N_i^m) \leq j, \quad \text{para todo } j \in \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

Además, si  $D_+^j N_i^m$  es continua en un intervalo cerrado  $[y_i, y_{i+m}]$ , entonces  $D_+^j N_i^m$  tiene exactamente  $j$  ceros en el intervalo  $(y_i, y_{i+m})$ .

**Demostración.** Veámoslo para  $j = 1$  en particular, pues el argumento es totalmente análogo para derivadas de orden superior. Ya sabemos por la fórmula de la derivada de un B-spline que  $D_+ N_i^m$  es una combinación lineal de  $N_i^{m-1}$  y  $N_{i+1}^{m-1}$ . El teorema anterior implica que  $Z_{(y_i, y_{i+m})}(D_+ s) \leq 1$ . Y por el Teorema de Rolle para splines (Teorema 2.5.2.), como  $N_i^m$  es continuo en  $[y_i, y_{i+m}]$ , entonces  $D_+ N_i^m$  debe tener un cero en el intervalo  $(y_i, y_{i+m})$ . □

## 2.6. Teorema de Schoenberg-Whitney

Supongamos que  $y_1 \leq \dots \leq y_{n+m}$  es una secuencia de puntos tales que  $y_i < y_{i+m}$ , para todo  $i$ , y supongamos que  $N_1^m, \dots, N_n^m$  son los B-splines normalizados asociados. En esta sección examinaremos varias matrices formadas a partir de estos B-splines.

**Teorema 2.6.1.** Sea  $t_1 < \dots < t_n$ . Entonces la matriz

$$M \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ N_1^m, \dots, N_n^m \end{pmatrix} = (N_j^m(t_i))_{i,j=1}^n$$

es no singular si y sólo si

$$t_i \in \sigma_i = \text{sop}(N_i^m) = \{x : N_i^m(x) \neq 0\}, \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.24)$$

Se puede observar que la condición (2.24) es equivalente a decir que  $x_i < t_i < x_{i+m}$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Demostración.** Teniendo en cuenta el Teorema 2.2.5. tomamos, convenientemente, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , los soportes

$$\sigma_i = \begin{cases} (y_i, y_{i+m}) & \text{si } y_i < y_{i+m-1}, \\ [y_i, y_{i+m}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para  $m = 1$  es claro. Veamos entonces el caso  $m > 1$ . En primer lugar, vamos a ver que si no se cumple (2.24), entonces el determinante  $D$  de la matriz  $M$  es cero. Diferenciamos dos casos:

- Supongamos que  $t_j$  está demasiado a la izquierda para pertenecer a  $\sigma_j$ , es decir, se tiene que  $t_j \leq y_j$ . Entonces  $N_k^m(t_v) = 0$  para todo  $1 \leq v \leq j \leq k \leq n$ . En este caso, las primeras  $j$  filas de  $D$  son claramente linealmente dependientes, por lo tanto el determinante es nulo.
- Supongamos ahora que  $t_j$  está demasiado a la derecha para pertenecer a  $\sigma_j$ , es decir, se tiene que  $y_{j+m} \leq t_j$ . En este caso, por un argumento análogo se ve que los elementos en las  $j$  primeras columnas y en las  $n - j + 1$  últimas filas son cero. Por lo que el determinante debe ser nuevamente cero.

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que (2.24) se satisface, pero que  $M$  es sin embargo singular. Llegaremos por tanto a una contradicción.

Como  $M$  es una matriz singular, existen  $c_1, \dots, c_n$ , no todos nulos, tales que

$$s(t_i) = \sum_{j=1}^n c_j N_j^m(t_i) = 0, \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Sea  $l$  de forma que  $c_l$  sea el primer coeficiente no nulo, y sea

$$r = \min \{j \geq l : s(x) = 0 \text{ en un intervalo con extremo izquierdo en } y_{j+m}\}.$$

El hecho de que  $s(x) = 0$  en  $(y_{r+m}, y_{r+m+1})$  implica por la independencia lineal de los B-splines que  $c_{r+1} = \dots = c_{r+m-1} = 0$ . Distinguiamos de nuevo dos casos:

- Si  $t_l > y_l$ , entonces  $\bar{s} = \sum_{i=l}^r c_i N_i^m$  tiene ceros en  $t_l, \dots, t_r$  en  $(y_l, y_{r+m})$ . Lo que contradice el Teorema 2.5.6.
- Supongamos ahora que  $t_l = y_l$ . Esto solamente ocurre si  $y_l = \dots = y_{l+m-1}$ . Lo que es contradictorio pues  $0 = s(t_l) = c_l N_l^m(t_l) \neq 0$ .

En consecuencia, la matriz  $M$  es no singular, lo que prueba el teorema. □

La matriz  $M$  se denomina **matriz de colocación**.

A continuación vamos a aplicar este resultado a la interpolación de Lagrange:

Recordemos que dada una función  $f$  de la cual se conocen sus valores en los puntos  $x_1, \dots, x_n$ , se llama **interpolación polinómica** al proceso de hallar un polinomio  $p(x)$  de grado menor o igual que  $n$ , cumpliendo

$$p(x_i) = f(x_i), \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}.$$

A este polinomio se le llama **polinomio interpolador de grado  $n$  de la función  $f$** .

Con frecuencia, los splines, particularmente, los B-splines, se utilizan para resolver problemas de interpolación. Sea  $\mathbf{y} = (y_i)_{i=1}^{n+m}$  una secuencia de nudos no decreciente, con  $y_i < y_{i+m}$  para todo  $i$ . Sabemos por lo visto en el Teorema 2.2.6. que la sucesión  $\{N_i^m\}_{i=1}^n$  de B-splines de orden  $m$  es linealmente independiente, por tanto, el espacio generado es  $n$ -dimensional. Dada la secuencia de nodos  $\mathbf{t} = (t_i)_{i=1}^n$  estrictamente creciente, para una función  $f$  dada, deseamos hallar un spline  $s = \sum_{i=1}^n c_i N_i^m$  tal que para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$  se satisfaga

$$s(t_j) = \sum_{i=1}^n c_i N_i^m(t_j) = f(t_j). \quad (2.25)$$

Este es un sistema lineal de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas,  $\mathbf{c} = (c_i)_{i=1}^n$ , con la matriz de coeficientes  $(N_j^m(t_i))_{i,j=1}^n$ . El sistema se representa por:

$$\begin{bmatrix} N_1^m(t_1) & \cdots & N_n^m(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ N_1^m(t_n) & \cdots & N_n^m(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{bmatrix}$$

El Teorema de Schoenberg-Whitney establece cuando el problema de interpolación tiene solución única:

**Corolario 2.6.1. (Teorema de Schoenberg-Whitney).** Para cualesquiera  $v_1, \dots, v_n$  dados existe un único spline de la forma (2.25), es decir,  $s = \sum_{i=1}^n c_i N_i^m$  tal que

$$s(t_j) = v_j, \text{ para todo } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

si y sólo si las abscisas de interpolación satisfacen (2.24).

Los coeficientes de  $s$  se determinan resolviendo el sistema  $M\mathbf{c} = \mathbf{v}$ , donde  $M$  es la matriz del Teorema 2.6.1., y donde  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$  y  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ .

Mientras que el Teorema 2.6.1. y el Corolario 2.6.1. expresan  $s(x)$  en términos de la base de B-splines normalizados, está claro que se pueden aplicar a una base de B-splines arbitraria  $\{B_i\}_{i=1}^n$ , con  $n = m + K$ , para el espacio de splines  $\mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$ .

**Teorema 2.6.2.** Sea  $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$ . Entonces

$$M \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ B_1, \dots, B_n \end{pmatrix} = (B_j(t_i))_{i,j=1}^n$$

es no singular si y sólo si

$$t_i \in \bar{\sigma}_i = \{x : B_i(x) \neq 0\}, \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.26)$$

Donde la única diferencia entre los elementos  $B_i$  y los  $N_i^m$  es que  $B_n(b) > 0$ , mientras que  $N_n^m(b)$  puede ser cero si la partición extendida que define las  $B_i$  se toma con  $b = y_{n+1} = \dots = y_{n+m}$ .

**Demostración.** La prueba de que  $M$  es no singular cuando (2.26) falla es análoga a la que se hizo en el Teorema 2.6.1.. La implicación recíproca en el caso  $t_n < b$  se reproduce análogamente. Por otro lado, si  $t_n = b$ , entonces debemos considerar  $b = y_{n+1} = \dots = y_{n+m}$ . El spline satisface, por tanto,  $0 = s(t_n) = c_n B_n(t_n)$ , por lo que  $c_n = 0$ . Tomando de nuevo el spline  $\bar{s} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i B_i$  llegamos a contradicción como se vio en el Teorema 2.6.1.. □

Ahora podemos usar el Teorema 2.6.1. para demostrar el Teorema 2.5.4. de la sección anterior sobre la existencia de splines con un número máximo de ceros simples. Recordemos lo que decía:

**Teorema 2.6.3.** Existe un spline  $s \in \mathcal{S}(\mathcal{P}_m; \mathcal{M}; \Delta)$  con

$$Z^S(s) = Z^1(s) = m + K - 1,$$

donde  $Z^1$  es el número de ceros simples y distintos.

**Demostración.** Dados  $\{y_i\}_{i=1}^{n+m}$ , se va a poder elegir algún  $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$  de modo que se satisfaga la condición (2.26). Entonces, por la no singularidad de la matriz  $M$ , podemos resolver el problema de interpolación

$$s(t_j) = \sum_{i=1}^n c_i B_i(t_j) = (-1)^j, \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Está claro entonces que  $s$  debe tener al menos un cero entre dos  $t_j$ , lo que supone un total de  $n - 1 = m + K - 1$  ceros. Sin embargo, dado que  $s$  no es idénticamente cero, puede tener como máximo  $m + K - 1$  ceros; concluyendo así, que cada uno de estos ceros debe ser un cero simple, es decir, que  $Z^S(s) = Z^1(s) = m + K - 1$ . Si no hay nudos de multiplicidad  $m$ , cada uno de estos ceros es un cero ordinario de la función. Si en cambio, hay ceros de multiplicidad  $m$ , entonces un cero en tal nudo puede ser un cero de salto. □

En el Teorema 2.5.5. se probó que el conjunto de B-splines  $\{N_i^m\}_{i=1}^n$  generan un WT-espacio en  $\mathbb{R}$ . El siguiente teorema proporciona una prueba alternativa a este hecho, y además, también muestra que  $\{N_i^m\}_{i=1}^n$  es, de hecho, un WT-sistema.

**Teorema 2.6.4.** Para cualesquiera  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,

$$D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ N_1^m, \dots, N_n^m \end{pmatrix} = \det(N_j^m(t_i))_{i,j=1}^n \geq 0.$$

Entonces,  $D$  es positivo precisamente cuando se satisfacen las condiciones (2.24).

**Demostración.** En el Teorema 2.6.1. se demostró que  $D = 0$  siempre que no se verifique (2.24). Sólo queda demostrar, por tanto, que  $D > 0$  para todo  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$  en el conjunto  $T^* = \{\mathbf{t} : a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b, \text{ además se satisface (2.24)}\}$ . Por el Teorema 2.6.1. sabemos que  $D$  nunca se anula puesto que  $\mathbf{t} \in T^*$ .

Veamos ahora que  $D$  tiene el mismo signo en todo  $T^*$ . En primer lugar, afirmamos que para todo  $1 \leq i \leq n$  y todo  $1 \leq j \leq n$ , el B-spline  $B_j(t_i)$ , como función de  $t_i$ , es una función continua en  $t_i$ , puesto que pertenece al conjunto  $\sigma_i$ , definido en el Teorema 2.6.1.. De hecho, está claro que el intervalo  $(y_i, y_{i+m})$  no puede contener ningún nudo de multiplicidad  $m$ , por lo que todos los B-splines son continuos en  $t_i$  en este conjunto. Por otro lado, teniendo en cuenta que los B-splines son continuos por la derecha, son continuos en los puntos  $t_i \downarrow y_i$ . De esto se deduce que  $D$  es una función continua en  $\mathbf{t}$  cuando  $\mathbf{t} \in T^*$ . Como  $D$  nunca se anula, debe tener el mismo signo en todas partes.

Resta por calcular el signo de  $D$ . Sean  $y_1^v < y_2^v < \dots < y_{n+m}^v$  tales que  $y_i^v \rightarrow y_i$  cuando  $v \rightarrow \infty$ , para todo  $i$ . Sea  $y_i^v < t_i < y_{i+1}^v$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Entonces es claro que  $D_v > 0$  ya que en este caso la matriz correspondiente que define  $D_v$  tiene elementos diagonales positivos y, además, todos los ceros por encima de la diagonal. Además, como  $v \rightarrow \infty$  del Teorema 2.2.13. se sigue que  $D_v \rightarrow D$ . □

Un teorema análogo al que acabamos de probar se hace usando el Teorema 2.6.3., satisfaciéndose para las funciones B-splines  $B_1, \dots, B_n$  en el intervalo  $[a, b]$ . En este caso, el determinante asociado con  $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$  será precisamente positivo cuando se cumplan las condiciones (2.25). Lo que significa que las funciones de la base B-spline  $\{B_i\}_{i=1}^n$  forman un WT-sistema en  $[a, b]$ .

Una propiedad de la matriz de colocación es la *total positividad*. Describamos esta propiedad:

Para una matriz dada  $A = (A_{ij})_{i=1, j=1}^{r, r+1}$  de tamaño  $r \times (r+1)$  y dadas las secuencias  $I = (i_1, \dots, i_r)$  y  $J = (j_1, \dots, j_{r+1})$ , tales que

$$1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r \quad \text{y} \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq r+1,$$

definimos un menor asociado de  $A$  como

$$A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} = \det (A_{i_\nu j_\mu})_{\nu=1, \mu=1}^p.$$

Una identidad útil de estos determinantes, y que nos va a permitir demostrar el próximo resultado, va a ser la siguiente. Esta se encuentra en el libro de [[11], pag.8].

$$\begin{aligned} & A \begin{pmatrix} 2, \dots, r-1, r+1 \\ 1, \dots, r-1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1, \dots, r \\ 1, \dots, r \end{pmatrix} = \\ & = A \begin{pmatrix} 2, \dots, r \\ 1, \dots, r-1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1, \dots, r-1, r+1 \\ 1, \dots, r \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 1, \dots, r-1 \\ 1, \dots, r-1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2, \dots, r+1 \\ 1, \dots, r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si en cambio, la matriz  $A$  es de tamaño  $(r + 1) \times r$ , entonces se mantiene el mismo resultado intercambiando filas por columnas.

Decimos que una matriz  $A$  es **totalmente positiva** si, y sólo si, todos sus determinantes menores (de todos los órdenes hasta  $m$ ) son no negativos, es decir, si y sólo si, para todo  $1 \leq p \leq r$ ,

$$A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{cuando} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r \quad \text{y} \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq r + 1.$$

Si una matriz  $A$  es totalmente positiva, entonces como una transformación es una variación decreciente, se tiene que

$$S^-(Ac) \leq S^-(c).$$

El siguiente resultado se conoce como Teorema de Karlin, este dice que la matriz de colocación es totalmente positiva. Otra manera alternativa de formularlo es la siguiente:

**Teorema 2.6.5.** Para cualesquiera enteros  $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_p \leq n$  y cualesquiera puntos  $t_1 < t_2 < \dots < t_p$ ,

$$D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_p \\ N_{v_1}^m, \dots, N_{v_p}^m \end{pmatrix} \geq 0$$

y  $D$  es estrictamente positivo si y sólo si

$$t_i \in \sigma_{v_i}, \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad (2.27)$$

donde  $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$  son los conjuntos definidos en el Teorema 2.6.1.

**Demostración.** El hecho de que  $D = 0$  cuando no se satisface (2.27) se demuestra exactamente como se hizo en el Teorema 2.6.1.. Supongamos ahora que (2.27) se verifica, demostremos que  $D > 0$ . Para ello, definamos el número de huecos  $g$  en la secuencia  $v_1, \dots, v_p$ . Es decir,  $g$  es el cardinal del conjunto  $\{v_1, v_1 + 1, \dots, v_p\} \setminus \{v_1, \dots, v_p\}$ , es decir, el número de elementos de la base que no cuento. Para ilustrar esto, tomemos como  $v_1, v_2, v_3, v_4$  los enteros 1, 3, 4, 9, respectivamente. El número de huecos  $g$  en este caso sería:  $\{v_1, v_1 + 1, v_2, v_3, v_3 + 1, v_3 + 2, v_3 + 3, v_3 + 4, v_4\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{v_1 + 1, v_3 + 1, v_3 + 2, v_3 + 3, v_3 + 4\}$ . En consecuencia,  $g = 5$ .

Vamos a proceder por inducción sobre  $g$  y  $p$ . El resultado se cumple por el teorema anterior para  $g = 0$  y para todo  $1 \leq p \leq n$ . Supongamos ahora, por hipótesis de inducción, que la afirmación ha sido establecida para determinantes de tamaño  $p - 1$ , y para determinantes de tamaño  $p$  con  $g - 1$  huecos, como máximo. Probemos ahora el resultado para el determinante  $D$  con  $g$  huecos. Distingamos tres casos posibles:

- Supongamos que  $t_j \notin \sigma_{v_{j+1}}$  para algún  $1 \leq j \leq p - 1$ . Entonces

$$D = D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_j \\ N_{v_1}, \dots, N_{v_j} \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} t_{j+1}, \dots, t_p \\ N_{v_{j+1}}, \dots, N_{v_p} \end{pmatrix}.$$

Y cada uno de estos determinantes es positivo por la hipótesis de inducción.

- Supongamos ahora que  $t_j \notin \sigma_{v_{j-1}}$  para algún  $2 \leq j \leq p$ . Entonces

$$D = D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_{j-1} \\ N_{v_1}, \dots, N_{v_{j-1}} \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} t_j, \dots, t_p \\ N_{v_j}, \dots, N_{v_p} \end{pmatrix}$$

Nuevamente, cada uno de estos determinantes es positivo por la hipótesis de inducción.

- Supongamos ahora que  $t_j \in \sigma_{v_{j+1}}$ , para algún  $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ , y de forma que  $t_j \in \sigma_{v_{j-1}}$  para algún  $j \in \{2, 3, \dots, p\}$ . Sea  $i$  uno de los índices que faltan en  $v_1, \dots, v_p$ , digamos  $v_1 < \dots < v_l < i < v_{l+1} < \dots < v_p$ . Entonces por la identidad de los determinantes anterior se tiene que

$$\begin{aligned} & D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_{l-1}, t_l, t_{l+1}, \dots, t_{p-1} \\ N_{v_2}, \dots, N_{v_l}, N_i, N_{v_{l+1}}, \dots, N_{v_{p-1}} \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_p \\ N_{v_1}, \dots, N_{v_p} \end{pmatrix} = \\ & = D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_{p-1} \\ N_{v_2}, \dots, N_{v_p} \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_l, t_{l+1}, t_{l+2}, \dots, t_p \\ N_{v_1}, \dots, N_{v_l}, N_i, N_{v_{l+1}}, \dots, N_{v_{p-1}} \end{pmatrix} + \\ & + D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_{p-1} \\ N_{v_1}, \dots, N_{v_{p-1}} \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_{l-1}, t_l, t_{l+1}, \dots, t_p \\ N_{v_2}, \dots, N_{v_l}, N_i, N_{v_{l+1}}, \dots, N_{v_p} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El determinante deseado es el segundo del lado izquierdo, todos los demás determinantes o bien son de orden  $p-1$ , o bien tienen  $g-1$  espacios, por lo que son positivos tras aplicarles la hipótesis inductiva. Se concluye por tanto que  $D > 0$  en este caso también, por lo que el teorema ha quedado probado.  $\square$

En este teorema se ha probado, en particular, que el conjunto de B-splines  $\{N_i^m\}_{i=1}^n$  forman un OCWT-sistema en  $\mathbb{R}$ .

Otra propiedad interesante sobre la matriz de colocación es la existencia de bandas en torno a la diagonal de esta. Expliquemos esto:

Supongamos que la matriz del sistema (2.25),  $M$ , es invertible, por tanto tenemos que  $y_i < t_i < y_{i+m}$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . La matriz  $M$  debe tener menos de  $m$  bandas por encima de la diagonal y menos de  $m$  bandas por debajo de esta. Pues como

$$N_i^m(t_j) \neq 0 \quad \text{si y solo si} \quad y_i < t_j < t_{i+m}$$

se tiene que juntando las condiciones para  $N_j^m(t_j) \neq 0$  y  $N_i^m(t_j) \neq 0$ , implica que  $y_i < t_j < y_{j+m}$  e  $y_j < t_j < y_{i+m}$ , es decir,  $|j-i| < m$ . Lo que equivale a decir que  $N_i^m(t_j) = 0$  si y sólo si  $|j-i| \geq m$ . Esto muestra que la matriz  $M$  tiene un ancho de banda menor que  $2m$ .

Podemos extender el Teorema de Schoenberg-Whitney al caso en que la interpolación por splines es de tipo osculatoria, es decir, en cada nodo de interpolación tiene cabida



fijar los valores del spline, y de sus derivadas sucesivas hasta un cierto orden. Formalicemos a continuación esta situación:

Sean  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  y números reales  $v_1, \dots, v_n$ . Se define

$$d_i = \max \{j : t_i = \dots = t_{i-j}\}, \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.28)$$

Dadas funciones suficientemente suaves  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ , tenemos que encontrar un spline  $s = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$ , que verifique

$$D_+^{d_i} s(t_i) = v_i, \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

**Teorema 2.6.6.** Sean  $N_1^m, \dots, N_n^m$  B-splines de orden  $m$  asociados con los nudos  $y_1 \leq \dots \leq y_{n+m}$ . Sean además,  $t_1 \leq \dots \leq t_n$ , de forma que para todo  $i$ ,  $t_i < t_{i+m}$ . Entonces

$$D \begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ N_1^m, \dots, N_n^m \end{pmatrix} = (D_+^{d_i} N_j^m(t_i))_{i,j=1}^n \geq 0,$$

y el determinante es estrictamente positivo si y sólo si

$$t_i \in \sigma_i = (y_i, y_{i+m}) \cup \{x : D_+^{d_i} N_i(x) \neq 0\}, \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.29)$$

donde  $d_1, \dots, d_n$  se definen en (2.28).

**Demostración.** Teniendo en cuenta el Teorema 2.2.5. tomamos, conveniente, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\sigma_i = \begin{cases} [y_i, y_{i+m}), & \text{si } d_i \geq m - \alpha_i, \\ (y_i, y_{i+m}), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde

$$\alpha_i = \max \{j : y_i = \dots = y_{i+j-1}\}, \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\}.$$

El hecho de que el determinante  $D$  sea cero cuando no se verifica la condición (2.29) se demuestra mediante el mismo tipo de argumento utilizado en la demostración del Teorema 2.6.1.. Supongamos ahora que se satisface la condición (2.29) y veamos entonces que  $D$  es distinto de cero en este caso.

Vamos a razonar por reducción al absurdo. Por tanto, tenemos que deben existir coeficientes  $c_1, \dots, c_n$  no todos nulos tales que el spline  $s = \sum_{i=1}^n c_i N_i^m$  satisface

$$D_+^{d_i} s(t_i) = 0, \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Lo que nos va a llevar a una contradicción. Sea  $l$  elegido de forma que  $c_l$  es el primer coeficiente distinto de cero. Y sea

$$r = \min \{j \geq l : s(x) = 0 \text{ en un intervalo con extremo izquierdo en } y_{j+m}\}.$$

La independencia lineal de los B-splines implica que  $c_{r+1} = \dots = c_{r+m-1} = 0$ . Discernamos dos casos dependiendo de si  $t_l > y_l$  o  $t_l = y_l$ , al igual que hicimos en la prueba del Teorema 2.6.1.:

- Supongamos que  $t_l > y_l$ . Entonces el spline  $\bar{s} = \sum_{i=l}^n c_i N_i^m$  tiene  $r - l + 1$  ceros (contados según su multiplicidad) en los puntos  $t_l, \dots, t_r$  en el intervalo  $(y_l, y_{r+m})$ . Lo que contradice el Teorema 2.5.6.
- Supongamos ahora que  $t_l = y_l$ . Puesto que el spline  $s = \sum_{i=1}^n c_i N_i^m$  verificaba  $D_+^{d_i} d(t_i) = 0$ , para todo  $i$ , se debe tener  $d_l \geq m - \alpha_l$ . Lo que nos lleva a contradicción puesto que ya hemos demostrado que  $D$  es distinto de cero siempre que se verificase (2.29).

Por lo que el teorema queda probado al haber llegado a contradicción en ambos casos.  $\square$

## 2.7. Propiedades de variación decreciente

En esta sección mostraremos la conexión existente entre la forma de un spline polinomial y el comportamiento de los coeficientes de su expansión B-spline

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_i^m(x).$$

Empezamos con dos ejemplos para mostrar esta conexión.

**Ejemplo 2.7.1.** Como los B-splines sólo toman valores no negativos, se tiene que si  $c_i \geq 0$  para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces  $s(x) \geq 0$  para todo  $x$ .

**Ejemplo 2.7.2.** Sea la secuencia  $c_1, \dots, c_n$  monótona creciente, es decir,  $c_{i+1} > c_i$ , para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Veamos que  $s(x)$  es también una función monótona creciente.

Usando la fórmula (2.7) y la relación de los splines  $B_i^m(x)$  con los splines normalizados obtenemos la fórmula vista en la Proposición 2.2.1.,

$$D_+ s(x) = (m-1) \sum_{i=2}^n \frac{c_i - c_{i-1}}{y_{i+m-1} - y_i} N_i^{m-1}(x),$$

Como la secuencia  $c_1, \dots, c_n$  es monótona creciente, entonces los coeficientes de la expansión B-spline de  $D_+ s$  son todos negativos, y por el Ejemplo anterior,  $D_+ s(x) \geq 0$ .

Veamos a continuación la propiedad que se conoce como *fórmula de variación decreciente para B-splines*, en la que aparecen los conceptos que vimos en la sección 1.3:

**Teorema 2.7.1.** Para todo vector no nulo  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ , se tiene que

$$S_{\mathbb{R}}^- \left( \sum_{i=1}^n c_i N_i^m \right) \leq S^-(c_1, \dots, c_n) = S^-(\mathbf{c}). \quad (2.30)$$

**Demostración.** En la sección anterior se vio que los B-splines forman un OCWT-sistema en  $\mathbb{R}$ . Por tanto, la afirmación (2.30) se sigue del Teorema 1.4.4.  $\square$

El Teorema 2.7.1. junto con los ejemplos previos producen casos especiales. Por ejemplo, si  $c_1, \dots, c_n$  son monótonos decrecientes, entonces para cualquier constante  $d$ , se obtiene la secuencia  $c_1 + d, \dots, c_n + d$ , y se sigue que

$$\sum_{i=1}^n (c_i + d)N_i^m = \sum_{i=1}^n c_i N_i^m + d$$

solo puede tener un cambio de signo. Por lo tanto, se tiene que es monótono decreciente al ser  $d$  arbitrario.

Una versión más fuerte de esta propiedad de disminución de la variación es la que se ve a continuación:

**Teorema 2.7.2.** Supongamos que  $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_i^m(x)$  satisface, para algunos  $t_1 < t_2 < \dots < t_q$ ,

$$(-1)^j s(t_j) > 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, q\}.$$

Entonces existen  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n$  tales que

$$(-1)^j c_{i_j} N_{i_j}^m(t_i) > 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, q\}.$$

**Demostración.** Cuando se satisface la primera condición del teorema diremos que  $s$  alterna en  $t_1, \dots, t_q$ . Vamos a suponer que  $s$  no alterna en un conjunto del tipo  $t_0 < t_1 < \dots < t_q$ , ya que si alternara, podríamos trabajar con  $t_0, \dots, t_q$  en su lugar. Esto es equivalente a decir que  $s(t) \leq 0$  para  $t < t_1$ , lo que significa que el primer coeficiente distinto de cero de  $s$  debe ser negativo.

Tomemos  $S^-(\mathbf{c}) = d - 1$ . Por el Teorema 2.7.1.,  $q \leq d$ . La prueba se hará por inducción sobre  $d$ . Para  $d = 1$  es obvio. Supongamos ahora que el resultado es cierto para  $d - 2$  cambios de signo en  $\mathbf{c}$ ; probémoslo ahora para  $d - 1$  cambios de signo. Supongamos que los coeficientes  $c_1, \dots, c_n$  se han dividido en  $d$  grupos de la forma

$$\underbrace{c_1, \dots, c_{n_2}}_{}, \underbrace{c_{n_2+1}, \dots, c_{n_3}}_{}, \dots, \underbrace{c_{n_{d-1}+1}, \dots, c_n}_{},$$

de tal forma que todos los  $c_i$  en cualquier grupo tengan el mismo signo, y que en cada grupo haya un  $c_i$  que sea distinto de cero. Como los B-splines forman un OCWT-sistema, el conjunto de funciones  $V = \{v_i\}_{i=1}^d$  definidas como

$$v_j = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |c_i| N_i^m, \quad j \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

forman un CWT-sistema. Para probar la segunda identidad del teorema será suficiente demostrar que existen  $j_1 < j_2 < \dots < j_q$  con  $v_{j_i}(t_i) > 0$ ,  $i \in \{1, \dots, q\}$ .

Supongamos que  $v_i(t_i) > 0$ , para todo,  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Podemos tomar  $j_i = i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ . Si  $r = q$  habremos terminado. Si no, debemos mostrar como elegir el resto de los  $j_i$ . En ese caso, tendremos dos casos:

- Supongamos que  $v_{r+1} = 0$ , para todo  $t \geq t_{r+1}$ . En este caso, el spline  $\bar{s} = \sum_{i=r+2}^d (-1)^i v_i$  alterna en los puntos  $t_{r+1}, \dots, t_q$ , y la hipótesis de inducción puede usarse para elegir  $j_{r+1}, \dots, j_q$ .
- Si ahora  $v_{r+1} > 0$  para algún  $t > t_{r+1}$ . Se sigue por la definición de las funciones  $v_i$  que  $v_{r+2}(t_i) = \dots = v_d(t_i)$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, r+1\}$ . Si  $r = 0$  esto significaría que  $s(t_1) = 0$ , contradiciendo nuestra suposición inicial acerca de  $s$ . Si  $r > 0$ , entonces  $\bar{s} = \sum_{i=1}^r (-1)^i v_i$  alterna en  $t_1, \dots, t_{r+1}$ . Lo que significa que tiene  $r$  cambios de signo (pero solo  $r-1$  cambios de signo en su vector de coeficientes), contradiciendo así el Teorema 1.4.3. para el WT-sistema  $\{v_i\}_{i=1}^r$ .

□

La segunda condición del teorema quiere decir que  $c_{i_1}$  debe ser el coeficiente de un B-spline que es positivo en  $t_i$ , es decir,  $c_{i_j}$  influye en el comportamiento de  $s$  sólo cerca de  $t_j$ .

# Capítulo 3

## Otros tipos de splines

### 3.1. Splines de Tensión

Veamos a continuación una definición que será útil a lo largo del capítulo:

Sea  $\mathbf{t} = (t_i)_{i=1}^n$  una secuencia de nodos de interpolación (no necesariamente distintos). Decimos que un polinomio  $p$  coincide con la función  $g$  en  $\mathbf{t}$  siempre que para todo nudo  $\xi$ , que aparece  $m$  veces en la secuencia  $\mathbf{t}$ , se tiene que

$$p^{(i-1)}(\xi) = g^{(i-1)}(\xi), \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}.$$

#### 3.1.1. Interpolación cúbica a trozos

Dados los datos  $g(t_1), \dots, g(t_n)$ , obtenidos al evaluar la función  $g$  en los nodos  $a = t_1 < \dots < t_n = b$ , construimos un interpolante cúbico a trozos  $f$  de  $g$ . En todo intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  tenemos que  $f$  coincide con un polinomio  $P_i$  de orden 4, es decir,

$$f(x) = P_i(x) \text{ para } t_i \leq x \leq t_{i+1}, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Cada trozo polinomial  $P_i$  debe satisfacer las condiciones

$$P_i(t_i) = g(t_i), \quad P_i(t_{i+1}) = g(t_{i+1}), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

$$P_i'(t_i) = s_i, \quad P_i'(t_{i+1}) = s_{i+1}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

donde  $s_1, \dots, s_n$  son parámetros libres. Por tanto, la función cúbica a trozos  $f$  coincide con  $g$  en  $t_1, \dots, t_n$ , y pertenece a  $C^1[a, b]$ , esto es, es continua y tiene primera derivada continua en  $[a, b]$ . Usamos la forma de Newton para calcular los coeficientes del polinomio  $P_i$

$$\begin{aligned} P_i(x) &= P_i(t_i) + [t_i, t_i] P_i(x-t_i) + [t_i, t_i, t_{i+1}] P_i(x-t_i)^2 + [t_i, t_i, t_{i+1}, t_{i+1}] P_i(x-t_i)^2(x-t_{i+1}) = \\ &= g(t_i) + s_i(x-t_i) + \frac{[t_i, t_{i+1}]g - s_i}{t_{i+1} - t_i}(x-t_i)^2 + \frac{-2[t_i, t_{i+1}]g + s_i + s_{i+1}}{(t_{i+1} - t_i)^2}(x-t_i)^2(x-t_{i+1}) = \end{aligned}$$

$$= g(t_1) + s_i(x - t_i) + \frac{3[t_i, t_{i+1}]g - 2s_i - s_{i+1}}{t_{i+1} - t_i}(x - t_i)^2 + \frac{-2[t_i, t_{i+1}]g + s_i + s_{i+1}}{(t_{i+1} - t_i)^2}(x - t_i)^3.$$

En consecuencia, hemos representado  $P_i$  en la forma de Taylor respecto de  $t_i$ , es decir,

$$\begin{aligned} P_i(x) &= c_{1,i} + c_{2,i}(x - t_i) + c_{3,i}(x - t_i)^2 + c_{4,i}(x - t_i)^3 = \\ &= P_i(t_i) + P'_i(t_i)(x - t_i) + \frac{P''_i(t_i)}{2}(x - t_i)^2 + \frac{P'''_i(t_i)}{6}(x - t_i)^3. \end{aligned}$$

En la interpolación cúbica spline los parámetros libres  $s_2, \dots, s_{n-1}$  se determinan usando que  $f$  debe ser dos veces continuamente diferenciable, es decir, que su segunda derivada sea también continua. Lo que nos da las siguientes condiciones para todo  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ ,

$$P''_{i-1}(t_i) = P''_i(t_i),$$

es decir,

$$2c_{3,i-1} + 6c_{4,i-1}(t_i - t_{i-1}) = 2c_{3,i}.$$

Esta ecuación se obtiene calculando la segunda derivada de las piezas polinomiales  $P_i(x)$  y  $P_{i-1}(x)$ , evaluándolas en  $t_i$  e igualando.

Desarrollamos esta ecuación

$$2 \left[ \frac{3[t_{i-1}, t_i]g - 2s_{i-1} - s_i}{t_i - t_{i-1}} \right] + 6 \left[ \frac{-2[t_{i-1}, t_i]g + s_{i-1} + s_i}{(t_i - t_{i-1})^2} \right] = 2 \left[ \frac{3[t_i, t_{i+1}]g - 2s_i - s_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} \right]$$

Denotamos por  $\Delta_{i-1} = t_i - t_{i-1}$  y  $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ .

$$\Delta_i (6[t_{i-1}, t_i]g - 4s_{i-1} - 2s_i - 12[t_{i-1}, t_i]g + 6s_{i-1} + 6s_i) = \Delta_{i-1} (6[t_i, t_{i+1}]g - 4s_i - 2s_{i+1}),$$

llegamos a que

$$s_{i-1}\Delta_i + 2s_i(\Delta_{i-1} + \Delta_i) + s_{i+1}\Delta_{i-1} = 3(\Delta_i[t_{i-1}, t_i]g + \Delta_{i-1}[t_i, t_{i+1}]g) \quad (3.1)$$

para todo  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ .

Suponiendo que los valores  $s_1$  y  $s_n$  han sido determinados de alguna manera, tenemos junto con lo anterior un sistema tridiagonal de  $n-2$  ecuaciones con  $n-2$  incógnitas (estas son  $s_2, \dots, s_{n-1}$ ) que es estrictamente diagonalmente dominante. Se llama así porque los elementos no nulos de la matriz relativa al sistema se encuentran en la diagonal principal y en las dos diagonales adyacentes a ella, y además, en cada fila el término diagonal excede a la suma de módulos de los restantes elementos.

Veamos ahora tres condiciones de contorno (o frontera) familiares. Es decir, condiciones que tienen lugar en  $t_1$  y  $t_n$  y que nos van a permitir obtener splines cúbicos especiales.

- Si  $g'$  es conocida en  $t_1$  y en  $t_n$ , tomamos  $s_1 = g'(t_1)$  y  $s_n = g'(t_n)$ . El interpolante spline  $f$  resultante coincide con  $g$  en  $t_0, \dots, t_{n+1}$  (con  $t_0 = t_1$  y  $t_{n+1} = t_n$ ) se denomina **interpolante cúbico completo** de  $g$ .

- El spline cúbico  $f$  que coincide con una función dada  $g$  en los nodos de la partición y satisface  $f''(t_1) = f''(t_n) = 0$  se denomina **spline natural** de  $g$ .
- El spline cúbico coincide con un polinomio cúbico en los subintervalos  $[t_0, t_2]$  y  $[t_{n-2}, t_{n-1}]$ . Esto requiere que  $f'''$  sea continua en  $t_2$  y  $t_{n-1}$ . Esta condición se denomina de **no nudo**.

En esta sección se han estudiado problemas de interpolación muy particulares, se ha visto que un spline cúbico está determinado de manera única por sus valores en los nudos de la partición y por dos condiciones adicionales frontera, algunas son las que hemos descrito arriba.

### 3.1.2. $\tau$ splines

El spline de tensión fue propuesto por Schweikert [8], y surge como medio para eliminar puntos de inflexión extraños en el ajuste de curvas mediante splines cúbicos. Los puntos de inflexión extraños se definen de la siguiente manera:

**Definición 3.1.1.** Sean los datos  $(t_i, g(t_i))_{i=1}^n$ . Sea  $f$  un interpolante en estos nodos, sabemos por (1.7) que, para todo  $i$ , existe  $\eta_i \in (t_{i-1}, t_{i+1})$  tal que

$$[t_{i-1}, t_i, t_{i+1}]g = \frac{f''(\eta_i)}{2}.$$

Por lo tanto, para cada cambio de signo en la secuencia  $(\delta_i)_{i=2}^{n-1}$ , con

$$d_i = [t_i, t_{i+1}]g - [t_{i-1}, t_i]g = [t_{i-1}, t_i, t_{i+1}]g(t_{i+1} - t_{i-1}),$$

debe haber un cambio de signo en la segunda derivada de  $f$ , es decir, un punto de inflexión de  $f$ . Decimos que un punto de inflexión es **extraño** en el intervalo  $(t_i, t_{i+1})$  si  $\delta_i \delta_{i+1} > 0$ .

Más tarde se reconoció que un spline de tensión es un spline con un operador diferencial  $L = D^2 - pD$ , donde  $D = d/dx$  y con  $p$  el parámetro de tensión, a esto se conoce como L-spline. Spath [7] modificó el spline de tensión para que se pudieran elegir diferentes valores del parámetro de tensión en diferentes regiones del dominio. Este es un ejemplo de un L-spline por partes en el sentido de Prenter. Veamos la definición rigurosa:

**Definición 3.1.2.** Sea una partición  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  del intervalo  $[a, b]$  y un conjunto de parámetros de tensión  $\{p_i\}_{i=1}^n$ , entonces  $f(x)$  es un spline de tensión si satisface

$$f \in C^2[a, b] \quad y$$

$$(D^4 - p_i^2 D^2)f = 0 \quad \text{en cada intervalo } (t_i, t_{i+1}).$$

El caso en el cuál todos los parámetros de tensión son iguales se denomina caso de tensión uniforme. Nótese que para el caso de tensión uniforme donde  $f$  satisface  $(1/p^2 D^4 - D^2)f = 0$ , en cada subintervalo; en este caso, para  $p$  grande parece que  $f$  tiende a un

spline lineal. De ahí viene el nombre de spline de tensión; ya que en el caso de interpolación, cuando se especifica  $f(t_i) = s_i$ , gráficamente parece como si la curva a través de los datos se estrechara a medida que aumenta  $p$ .

El estudio se centra en los splines de tensión de orden cuatro, ya que las aplicaciones de estos splines son principalmente aproximaciones que preservan la forma y una solución numérica del problema de dos puntos frontera singular. Los splines de tensión de orden superior se describen en algunos artículos pero no se da ninguna aplicación. Su aplicación puede verse en un problema de aproximación por funciones con derivada superior positiva, así como en problemas de valores frontera singularmente perturbados de grado superior. Los splines de tensión de grado superior se pueden definir de la siguiente forma:

**Definición 3.1.3.** Sea una partición  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  del intervalo  $[a, b]$  y un conjunto de parámetros de tensión  $\{p_i\}_{i=1}^n$ , entonces  $f(x)$  es un spline de tensión de orden  $k$  si satisface la ecuación diferencial

$$(D^k - p_i^2 D^{k-2})f = 0 \quad \text{en cada intervalo } (t_i, t_{i+1}).$$

para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

En otras palabras, los splines de tensión de orden  $k$  son funciones cuyas restricciones al intervalo no vacío  $(t_i, t_{i+1})$ , pertenecen a  $\langle 1, x, \dots, x^{k-1} \rangle$ , para todo  $p_i = 0$ , o al espacio  $\langle e^{p_i x}, e^{-p_i x}, 1, x, \dots, x^{k-3} \rangle$ , en otro caso. Por tanto, en el caso  $k = 4$  tenemos que para  $p_i > 0$  cada pieza del interpolante es una combinación lineal de las funciones  $1, x, e^{p_i x}, e^{-p_i x}$ . Y para  $p = 0$ , ya hemos dicho que el interpolante es una cúbica a trozos.

Como se ha dicho antes, el enfoque de Spath fue que el parámetro de tensión varíe de intervalo a intervalo. Se trata con interpoladores que, en el intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ , tienen la forma

$$f(x) = A_i u + B_i v + C_i \varphi_i(u) + D_i \varphi_i(v)$$

donde

$$u := u(x) := \frac{(x - t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \quad v := 1 - u,$$

y  $\varphi_i$  es una función en  $[0, 1]$  con  $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$ , y  $\varphi_i''(0)^2 \neq \varphi_i''(1)^2$ .

Todos estos enfoques utilizan funciones exponenciales en lugar de polinomios, lo que ocasiona una mayor coste computacional. Por ello surge un nuevo método en el que se toma los splines cúbicos como interpolantes. El truco consiste en utilizar una spline cúbica con nudos adicionales colocados de modo que el interpolante pueda hacer curvas cerradas sin que se produzcan oscilaciones.

### 3.1.3. Interpolación por splines de tensión

En esta subsección se va describir una forma más sistemática de introducir nudos adicionales donde sea necesario.



Empezamos con un caso especial: Queremos interpolar los datos  $f(0) = 0, f'(0) = s_0, f(1) = 0, f'(1) = s_1$ . Por la sección anterior, obtenemos que el polinomio  $f$  es de la forma:

$$f(x) = 0 + s_0x - s_0x^2 + (s_0 + s_1)x^2(x - 1) = s_0x + (-2s_0 - s_1)x^2 + (s_0 + s_1)x^3$$

Este polinomio se obtiene usando la tabla de las diferencias divididas, se tiene por tanto que  $[0, 0, 1] f = -s_0$  y  $[0, 1, 1] f = s_1$ . En este caso además,  $[0, 0, 1] f = \delta_2$  y  $[0, 1, 1] f = \delta_3$ . En consecuencia, un punto de inflexión en  $(0, 1)$  será extraño si  $-s_0s_1 > 0$ , o lo que es lo mismo, si  $s_0s_1 < 0$ .

Calculemos ahora la segunda derivada de  $f$

$$\begin{aligned} f'(x) &= s_0 - 2(2s_0 + s_1)x + 3(s_0 + s_1)x^2, \\ f''(x) &= -2(2s_0 + s_1) + 6(s_0 + s_1)x. \end{aligned}$$

Evaluando esta en 0 y en 1 tenemos

$$f''(0) = -2(2s_0 + s_1) \text{ y } f''(1) = 2(s_0 + 2s_1).$$

Por tanto,  $f$  no tiene puntos de inflexión extraños en  $(0, 1)$  si y sólo si  $(2s_0 + s_1)(s_0 + 2s_1) \leq 0$ . Esta condición se puede reescribir como  $(2(s_0 - s_1) + 3s_1)((s_0 - s_1) + 3s_1) \leq 0$ . Si dividimos por  $(s_0 - s_1)^2$  y tomamos  $z := \frac{s_1}{s_1 - s_0}$ , tenemos

$$(2 - 3z)(1 - 3z) \leq 0.$$

Por tanto, el interpolante cúbico se tendrá cuando

$$\frac{1}{3} \leq z := \frac{s_1}{s_1 - s_0} \leq \frac{2}{3}.$$

Para los valores de  $z$  que no cumplen estas desigualdades, cambiaremos la función de interpolación. Consideremos en primer lugar el caso  $z > 2/3$ . Tomamos un spline cúbico  $\varphi$  que satisface que  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0, \varphi(1) = 1$ , y  $\varphi'' \geq 0$  en  $[0, 1]$ , en lugar de la función  $x^3$  (base de los polinomios de orden 4). La función  $\varphi$  viene determinada por

$$\varphi(x) = \varphi(x; z) := \alpha x^3 + (1 - \alpha) \left( \frac{x - \zeta}{1 - \zeta} \right)_+^3 \quad (3.2)$$

siendo  $\zeta = \zeta(z)$  un nudo adicional y  $\alpha = \alpha(z)$  un número en  $[0, 1]$ . Consideramos que tanto  $\zeta$  como  $\alpha$  son funciones monótonas continuas de  $z$ , con  $\zeta(1^-) = 1$  y con  $\alpha(2/3) = 1$ , para así unirse continuamente con la cúbica habitual cuando  $z = 2/3$ .

En términos de la nueva base, el interpolante se escribe como

$$f(x) = Ax + B(1 - x) + C\varphi(x; z) + D(1 - x)^3$$

donde

$$-A = C = \frac{s_0 + 2s_1}{3(2p - 1)} \quad \text{y} \quad -B = D = \frac{-((3p - 1)s_0 + s_1)}{3(2p - 1)}$$

siendo

$$p = \frac{\varphi'(1; z)}{3} = \alpha + \frac{(1 - \alpha)}{1 - \zeta}.$$

Calculamos la segunda derivada de  $f$

$$\begin{aligned} f'(x) &= A - B + C\varphi'(x, z) + 3D(1 - x)^2, \\ f''(x) &= C\varphi''(x, z) + 6D(1 - x) = 6C \left[ \alpha x + (1 - \alpha) \frac{(x - \zeta)_+}{(1 - \zeta)^3} \right] + 6D(1 - x) = \\ &= 6 \left[ C \left( \alpha x + (1 - \alpha) \frac{(x - \zeta)_+}{(1 - \zeta)^3} \right) + D(1 - x) \right] \end{aligned}$$

que se obtiene al derivar dos veces la función  $\varphi$  en (3.2). El signo de  $f''$  dependerá del signo de los coeficientes  $C$  y  $D$ . Por tanto,  $f$  no tiene puntos de inflexión extraños en  $(0, 1)$  si y solo si

$$((3p - 1)s_0 + s_1)(s_0 + 2s_1) \leq 0.$$

Reescribiendo esto como  $(3ps_0 + (s_1 - s_0))((s_0 - s_1) + 3s_1) \leq 0$ , si dividimos por  $(s_0 - s_1)^2$ , además teniendo en cuenta que  $z = \frac{s_1}{s_1 - s_0}$ , obtenemos

$$(3p - 1 - 3pz)(1 - 3z) \leq 0$$

pues  $1 - z = \frac{-s_0}{s_1 - s_0}$ , y entonces  $3p(1 - z) = \frac{-3ps_0}{s_1 - s_0}$ .

Como estamos en el caso  $z > 2/3$ , se tiene que  $1 - 3z < 0$ , si fuera positivo entraríamos en contradicción. En consecuencia,  $(3p - 1 - 3pz) \geq 0$ , por tanto,  $z \leq \frac{3p-1}{3p}$ . O lo que es lo mismo,

$$3p \geq \frac{1}{1 - z}.$$

Ahora bien, como  $p = \alpha + \frac{1-\alpha}{(1-\zeta)}$ , entonces si despejamos  $\alpha$  tenemos  $\alpha = \frac{1-p(1-\zeta)}{\zeta}$ . Y usando la acotación anterior, tenemos

$$\alpha \leq \frac{1}{\zeta} \left[ 1 - \frac{1 - \zeta}{3(1 - z)} \right].$$

Eligiendo el mayor valor de  $\alpha$ , obtenemos la fórmula

$$\alpha(z) = \frac{1}{\zeta} \left[ 1 - \frac{1 - \zeta}{3(1 - z)} \right].$$

Comprobemos que  $\alpha(2/3) = 1$ :

$$\alpha(2/3) = \frac{1}{\zeta} \left[ 1 - \frac{1 - \zeta}{3(1 - 2/3)} \right] = \frac{1}{\zeta} \zeta = 1.$$

Se obtiene este valor independientemente del valor de  $\zeta$ . Esto muestra que necesitamos que se verifique la desigualdad  $3(1 - z) \geq 1 - \zeta$  para asegurarse de que  $\alpha \geq 0$ . Esta

condición se cumple para la opción  $1 - \zeta(t) = \gamma(1 - z)$  si  $\gamma \leq 3$ .

El caso  $z < 1/3$  es análogo, ahora se trabajaría con la función  $\varphi(1 - x; 1 - z)$  que reemplaza ahora a la función  $(1 - x)^3$ , y se determina igual que en el caso de  $z > 2/3$ .

Podemos combinar de forma conveniente estos casos en uno considerando que la aproximación es de la forma

$$f(x) = Ax + B(1 - x) + C\varphi(x; z) + D\varphi(1 - x; 1 - z)$$

con

$$\varphi(x; z) := \alpha x^3 + (1 - \alpha) \left( \frac{x - \zeta}{1 - \zeta} \right)_+^3$$

$$\alpha(z) := \frac{1}{\zeta} \left( 1 - \frac{\gamma}{3} \right) \quad \text{y} \quad \zeta(z) := 1 - \gamma \min \{ 1 - z, 1/3 \},$$

para  $\gamma \in [0, 3]$ . A medida que aumentamos  $\gamma$ , los valores  $\alpha$  y  $\zeta$  disminuyen para  $z$  fijo.

El caso más general de interpolación tomando los datos

$$f(0) = f_0, \quad f'(0) = s_0, \quad f(1) = f_1, \quad f'(1) = s_1$$

se reduce al caso ya estudiado restando la recta  $f_0 + (f_1 - f_0)x$ . Cambia las cantidades  $s_0$  y  $s_1$  por  $s_0 - (f_1 - f_0)$  y  $s_1 - (f_1 - f_0)$ , respectivamente. Aún más generalmente, si consideramos la interpolación de los datos  $f(t_j) = f_j$ ,  $f'(t_j) = s_j$ , para  $j \in \{i, i + 1\}$ . Entonces en lugar de tener  $s_0$  y  $s_1$  tenemos  $s_i - [t_i, t_{i+1}] f$  y  $s_{i+1} - [t_i, t_{i+1}] f$ .

Haciendo uso de estas consideraciones en la construcción de un spline cúbico de tensión para los datos  $(t_i, g(t_i))_{i=1}^n$ , eligiendo la base en cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  de la forma anterior. Esto significa que el interpolante tiene la forma

$$A_i + B_i u + C_i \varphi(u; z) + D_i \varphi(1 - u; 1 - z) \quad \text{en} \quad [t_i, t_{i+1}],$$

con  $u(x) := \frac{(x - t_i)}{t_{i+1} - t_i}$ . Se tiene que

$$z_i := \begin{cases} \frac{\delta_{i+1}}{(\delta_{i+1} + \delta_i)}, & \text{si } \delta_{i+1} \delta_i \geq 0, \quad \delta_{i+1} + \delta_i \neq 0, \\ 1/2, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde

$$\delta_j := [t_j, t_{j+1}] f - [t_{j-1}, t_j] f \quad \text{para todo } j.$$

Establecemos que  $z = 1/2$ , si  $i = 1$  o si  $i = n - 1$ .

Notemos que la elección de  $z$  concuerda con el valor de  $z$  que teníamos anteriormente,  $z = \frac{s_1}{s_1 - s_0}$ , pues

$$z = \frac{\delta_3}{\delta_2 + \delta_3} = \frac{[1, 1] f - [0, 1] f}{([1, 1] f - [0, 1] f + [0, 1] f - [0, 0] f)} = \frac{[0, 1, 1] f}{[0, 1, 1] f + [0, 0, 1] f} = \frac{s_1}{s_1 - s_0}.$$

La elección de  $z_i$  anterior produce que el interpolante sea discontinuo en función de los datos. Esto significa que un pequeño cambio en los datos que produzca un cambio de signo de algún  $\delta_i \delta_{i+1}$  puede cambiar el interpolante. Por esta razón,  $z_i$  se escribe como

$$z_i := \begin{cases} \frac{|\delta_{i+1}|}{|\delta_{i+1}| + |\delta_i|}, & \text{si } |\delta_{i+1}| + |\delta_i| > 0, \\ 1/2, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De esta manera eliminamos la existencia de posibles discontinuidades.

En función de  $f_j$  y  $f_j''$ , para  $j \in \{i, i+1\}$ , los coeficientes del interpolante vienen determinados por

$$\begin{aligned} A_i &= f_i - D_i, & B_i &= h [t_i, t_{i+1}] f - (C_i - D_i) \\ C_i &= h^2 \frac{f_{i+1}''}{\varphi''(1; z)}, & D_i &= h^2 \frac{f_i''}{\varphi''(1; 1-z)} \end{aligned} \quad (**)$$

con  $h = t_{i+1} - t_i$ . Derivando dos veces (3.2) y evaluando en  $x = 1$  tenemos que  $\varphi''(1; z) = 6 \left[ \alpha + \frac{1-\alpha}{(1-\zeta)^2} \right]$ . Por tanto,

$$\frac{1}{\varphi''(1; z)} = \frac{1}{6} \frac{(1-\zeta)^2}{\alpha(1-\zeta)^2 + (1-\alpha)}.$$

Queremos ahora determinar el vector  $(f_i'')_{i=1}^n$  de forma que el interpolante resultante tenga dos derivadas continuas. Por tanto, en cada nodo  $t_i$  se debe cumplir la igualdad  $f'(t_i^-) = f'(t_i^+)$ . Desarrollemos esto:

Como  $f(x) = A_i + B_i u(x) + C_i \varphi(u(x); z) + D_i \varphi(1-u(x); 1-z)$  en  $[t_i, t_{i+1}]$ , con  $u(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i}$ . Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} B_i + C_i \varphi'(u(x); z) + D_i \varphi'(1-u(x); 1-z). \quad (3.3)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} & [t_i, t_{i+1}] f - \Delta_i \left( \frac{f_{i+1}''}{\varphi''(1; z_i)} - \frac{f_i''}{\varphi''(1; 1-z_i)} \right) + \Delta_i \frac{f_i''}{\varphi''(1; 1-z_i)} \varphi'(1; z_{i-1}) = \\ & = [t_i, t_i] f - \Delta_{i-1} \left( \frac{f_i''}{\varphi''(1; z_{i-1})} - \frac{f_{i-1}''}{\varphi''(1; 1-z_{i-1})} \right) + \Delta_{i-1} \frac{f_i''}{\varphi''(1; 1-z_{i-1})} \varphi'(1; z_{i-1}) \end{aligned}$$

Donde  $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$  y  $\Delta_{i-1} = t_i - t_{i-1}$ . Operando convenientemente llegamos a que

$$\frac{\Delta_{i-1}}{\varphi''(1; 1-z_{i-1})} f_{i-1}'' + \left( \Delta_{i-1} \frac{\varphi'(1; z_{i-1}) - 1}{\varphi''(1; 1-z_{i-1})} + \Delta_i \frac{\varphi'(1; 1-z_i) - 1}{\varphi''(1; 1-z_i)} \right) f_i'' + \frac{\Delta_i}{\varphi''(1; z_i)} f_{i+1}'' = \delta_i, \quad (3.4)$$

para todo  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ .

Donde

$$\frac{\varphi'(1; z) - 1}{\varphi''(1; z)} = \frac{1}{6} \frac{(1 - \zeta)^2}{\alpha(1 - \zeta)^2 + (1 - \alpha)} \left[ 3\alpha + 3\frac{1 - \alpha}{1 - \zeta} - 1 \right] = \frac{1 - \zeta}{6} \frac{(3\alpha - 1)(1 - \zeta) + 3(1 - \alpha)}{\alpha(1 - \zeta)^2 + (1 - \alpha)}.$$

Si no se introdujesen nudos adicionales; tomamos por tanto  $\alpha = 1$  entonces (3.4) se reduce a

$$\frac{\Delta_{i-1}}{6} f''_{i-1} + \left( \frac{\Delta_{i-1}}{3} + \frac{\Delta_i}{3} \right) f''_i + \frac{\Delta_i}{6} f''_{i+1} = \delta_i.$$

Que coincide con la ecuación del interpolante cúbico visto en (3.4).

Notemos que se necesitan dos ecuaciones más para obtener un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas  $(f''_i)_{i=1}^n$ . Para completar tomaríamos alguna de las condiciones frontera vistas en la sección previa. Consideramos en este caso la condición de no nudo. Recordamos que esta condición requería que  $f'''$  fuera continua en  $t_2$  y en  $t_{n-1}$ . Por tanto:

$$f'''(t_2^+) - f'''(t_2^-) = 0$$

y

$$f'''(t_{n-1}^+) - f'''(t_{n-1}^-) = 0,$$

donde  $g(a+)$  representa el límite por la derecha de la función evaluado en  $a$  y  $g(a-)$  representa el límite por la izquierda de la función evaluado en  $a$ . Es decir,

$$g(a+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} g(a+h) \quad \text{y} \quad g(a-) := \lim_{h \rightarrow 0^-} g(a+h).$$

Por la definición de  $f(x)$  y  $f'(x)$  vista en (3.3) y usando los coeficientes vistos en (\*\*), tenemos que  $f'''(x)$  viene dada por

$$\begin{aligned} f'''(x) &= C_i \varphi'''(u(x); z) + D_i \varphi'''(1 - u(x); 1 - z) = \\ &= \frac{h^2 f''_{i+1}}{\varphi''(1; z)} \varphi'''(u(x); z) + \frac{h^2 f''_i}{\varphi''(1; 1 - z)} \varphi'''(1 - u(x); 1 - z), \end{aligned}$$

siendo  $h = t_{i+1} - t_i$ . Evaluando en  $x = t_2^+$  y en  $x = t_2^-$  llegamos a que:

$$\frac{(f''_2 - f''_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_3 - t_2} \left( \frac{\varphi'''(0; z_2)}{\varphi''(1; z_2)} f''_3 - \frac{\varphi'''(1; 1 - z_2)}{\varphi''(1; 1 - z_2)} f''_2 \right).$$

Análogamente, se hace para comprobar la continuidad de  $f'''$  en  $t_{N-1}$ .

Notemos que

$$\frac{\varphi''(1; z)}{\varphi'''(1; z)} = (1 - \zeta) \frac{\alpha(1 - \zeta)^2 + (1 - \alpha)}{\alpha(1 - \zeta)^3 + (1 - \alpha)},$$

por lo que tenemos problemas si  $z_2 = 0$ . Por esta razón, vamos a escribir la ecuación frontera de la forma:

$$\frac{\varphi''(1; 1 - z_2)}{\varphi'''(1; 1 - z_2)} (t_3 - t_2) (f''_2 - f''_1) = \left( \frac{\varphi''(1; 1 - z_2)}{\varphi'''(1; 1 - z_2)} \frac{\varphi'''(0; z_2)}{\varphi''(1; z_2)} f''_3 - f''_2 \right) (t_2 - t_1).$$

Análogamente, con la ecuación de la continuidad de  $f'''$  en  $t_{n-1}$ .

## 3.2. Propiedad variacional del spline cúbico interpolatorio

Los interpoladores splines cúbicos minimizan el tamaño de las oscilaciones de funciones de interpolación suaves.

El interpolante spline natural es un spline cúbico  $f$  con nudos simples en  $\{x_i\}_{i=1}^n$  con  $x_1 < \dots < x_n$ , que satisface las condiciones frontera

$$f''(x_1) = f''(x_n) = 0.$$

y toma valores prescritos en las abscisas  $x_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Entre todas los interpolantes dos veces continuamente diferenciables con valores prescritos en los nudos  $\{x_i\}_{i=1}^n$ ,  $f$  minimiza la integral

$$\int_{x_1}^{x_n} (f''(x))^2 dx,$$

que sirve como medida de las oscilaciones de  $f$ .

Veamos en primer lugar, la existencia de un interpolador spline cúbico  $f$  con las condiciones frontera naturales. En vista de la linealidad de las condiciones de interpolación y dado que la dimensión del espacio spline coincide con el número de datos, es suficiente con demostrar que si

$$f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0, \quad y \quad f''(x_1) = f''(x_n) = 0$$

implica que  $f$  se anula idénticamente. Para ello apliquemos dos veces el teorema de Rolle y concluimos que existen  $n - 2$  ceros de  $f''$ , sean estos  $y_1, \dots, y_{n-2}$  de  $f''$  con

$$x_i < y_i < x_{i+2}.$$

Además,  $f''$  se anula en  $x_1 = y_0$  y  $x_n = y_{n-1}$ . Como

$$f''(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_i^2(x)$$

con nudos  $\xi_0 < \xi_1 = x_1 < \dots < x_n = \xi_n < \xi_{n+1}$ , y puesto que los puntos  $y_i$  satisfacen las condiciones del Teorema de Schoenberg-Whitney,  $\xi_i < y_i < \xi_{i+2}$ , obtenemos que  $f'' = 0$ . Y  $f$  se anula idénticamente haciendo uso de las condiciones.

Para probar la minimalidad del spline cúbico interpolatorio natural,  $f$ , sea  $g$  cualquier función dos veces continuamente diferenciable que interpole los mismos datos, es decir, que se verifique

$$g(x_i) = f(x_i) \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\}.$$

En verdad, aquí los nudos funcionan como nodos de interpolación.

Para  $f, g \in C^2[x_1, x_n]$ , tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_n} |g''(x)|^2 dx &= \int_{x_1}^{x_n} |(g''(x) - f''(x)) + f''(x)|^2 dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_n} |g''(x) - f''(x)|^2 dx + \int_{x_1}^{x_n} |f''(x)|^2 dx + 2 \int_{x_1}^{x_n} (g''(x) - f''(x))f''(x) dx. \end{aligned}$$

Si demostramos que la última integral se anula, esta identidad implica la afirmación que deseamos probar. Como  $f''$  es derivable en casi todo punto, entonces podemos calcular esta integral usando el método de integración por partes en cada subintervalo, y se obtiene así

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_n} (g''(x) - f''(x))f''(x) dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g''(x) - f''(x))f''(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left[ f''(x)(g'(x) - f'(x)) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'''(x)(g'(x) - f'(x)) dx \right] = \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g'(x) - f'(x)) dx. \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad se ha usado el hecho de que  $f$  es un spline cúbico natural, es decir, las condiciones  $f''(x_1) = f''(x_n) = 0$ . Además,  $c_i$  denota el valor de la tercera derivada constante a trozos del spline cúbico  $f$  en  $(x_i, x_{i+1})$ . Finalmente, se sigue que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g'(x) - f'(x)) dx = [g(x) - f(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} = 0,$$

pues  $f$  y  $g$  interpolan los mismos puntos.

Teniendo en cuenta lo que acabamos de ver, probaremos las siguientes propiedades de tipo extremal para los splines cúbicos:

Sea  $[a, b]$  un intervalo real, y sea una partición del mismo  $a = x_1 < \dots < x_n = b$ .

**Teorema 3.2.1.** Supongamos que  $g$  interpola los valores  $y_i = g(x_i)$  en los nodos  $x_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , además,  $f$  es el spline cúbico natural que interpola dichos datos. Entonces, se tiene que

$$\int_a^b (g''(x))^2 dx \geq \int_a^b (f''(x))^2 dx,$$

y la igualdad se verifica si y sólo si  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ .

**Demostración.** Por lo que acabamos de ver, al ser  $f$  el interpolante cúbico natural, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b f'''(x)(g(x)' - f'(x))dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'''(x)(g'(x) - f'(x))dx = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g'(x) - f'(x))dx = \sum_{i=1}^{n-1} c_i [g'(x) - f'(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} = 0, \end{aligned}$$

donde  $c_i$  denota el valor de la tercera derivada constante a trozos del spline cúbico  $f$  en  $(x_i, x_{i+1})$ . Por tanto,  $\int_a^b f''(x)(g''(x) - f''(x))dx = 0$ , y tenemos

$$\int_a^b ((g''(x) - f''(x)) + f''(x))^2 dx = \int_a^b (g''(x) - f''(x))^2 dx + \int_a^b (f''(x))^2 dx,$$

Por la monotonía de la integral,  $\int_a^b (g''(x) - f''(x))^2 dx \geq 0$ , de lo que se deduce

$$\int_a^b (g''(x) - f''(x) + f''(x))^2 dx = \int_a^b (g''(x))^2 dx \geq \int_a^b (f''(x))^2 dx.$$

De la continuidad de  $f''$  y  $g''$  se deduce que la igualdad sólo se da si  $g'' - f'' = 0$ , es decir, si y sólo si,  $g''(x) = f''(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ , por lo que  $f$  y  $g$  difieren únicamente en un polinomio de grado uno. Como coinciden en al menos dos nodos, este polinomio se anula en, al menos, dos puntos y, por consiguiente es idénticamente nulo. En definitiva

$$\int_a^b (g''(x))^2 dx = \int_a^b (f''(x))^2 dx \Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

lo que concluye la demostración. □

**Teorema 3.2.2.** Supongamos que  $g$  interpola los datos  $y_i = g(x_i)$  en los nodos  $x_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , y además se tiene la siguiente condición sobre la derivada en los extremos:  $f'(a) = g'(a)$  y  $f'(b) = g'(b)$ . Sea  $\bar{f}$  el spline cúbico asociado a los mismos datos. Entonces se tiene que

$$\int_a^b (g''(x))^2 dx \geq \int_a^b (\bar{f}''(x))^2 dx,$$

y la igualdad se da si y sólo si  $g(x) = \bar{f}(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

**Demostración.** La demostración es análoga a la del teorema precedente, teniendo en cuenta que la condición  $f''(a) = f''(b) = 0$  se debe sustituir por  $f'(a) = g'(a)$  y  $f'(b) = g'(b)$ . □



Sean ahora  $u$  un spline cúbico cualquiera con nodos en  $x_1, \dots, x_n$ , donde  $x_1 = a$  y  $x_n = b$ , y sea  $h$  una función de clase  $C^2([a, b])$ . Sean  $g = h - u$  y  $f = \bar{f} - u$ , donde  $\bar{f}$  es el spline cúbico que interpola a  $h$ .

Notemos que  $f(x_i) = g(x_i)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  y, además, se tiene también que  $f'(a) = g'(a)$  y  $f'(b) = g'(b)$ . Aplicando el teorema anterior, se obtiene que

$$\int_a^b (h''(x) - u''(x))^2 dx \geq \int_a^b (h''(x) - \bar{f}''(x))^2 dx,$$

cumpléndose la igualdad si y sólo si  $u(x) = \bar{f}(x) + \alpha + \beta(x)$ .

La desigualdad anterior se puede interpretar como que, si medimos la distancia entre  $h$  y cualquier spline cúbico  $u$  mediante la expresión  $\int_a^b (h''(x) - u''(x))^2 dx$ , entonces esta distancia se minimiza cuando  $u(x) = \bar{f}(x)$  y para todas sus traslaciones mediante polinomios de grado uno. Por tanto, podemos decir que  $\bar{f}$  es la mejor aproximación de  $h$  en este sentido.

A continuación veamos algún resultado en relación con el error de interpolación.

Sea  $[a, b]$  un intervalo cerrado real y  $a = x_1 < \dots < x_n = b$  una partición del mismo. Sea

$$h = \max_{1 \leq j \leq n-1} \{x_{j+1} - x_j\}.$$

Y sean  $f \in C^2([a, b])$  y  $u$  el spline cúbico natural que interpola a  $f$  en los nodos de la partición considerada. Entonces el error de interpolación

$$e(x) = f(x) - u(x), \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

verifica, para cada intervalo  $[x_j, x_{j+1}]$ , que  $e(x_j) = e(x_{j+1}) = 0$ ; aplicando el teorema de Rolle, se tiene que existe al menos un valor  $c_j \in [x_j, x_{j+1}]$  tal que  $e'(c_j) = 0$ . En consecuencia,

$$\int_{c_j}^x e''(t) dt = e'(x) - e'(c_j) = e'(x), \quad \text{para todo } x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que

$$|e'(x)|^2 = \left| \int_{c_j}^x e''(t) \cdot 1 dt \right| \leq \left| \int_{c_j}^x e''(t) dt \right| \left| \int_{c_j}^x 1^2 dt \right| \leq \left| \int_{c_j}^x e''(t) dt \right| |x - c_j| \leq h \left| \int_{c_j}^x e''(t) dt \right|.$$

Aplicando la propiedad extremal que verifica  $u$ , condición de spline cúbico natural, se verifica que

$$\int_c^x e''(t)^2 dt \leq \int_a^b e''(x)^2 dx = \int_a^b (f''(x) - u''(x))^2 dx = \int_a^b (f''(x))^2 dx - \int_a^b (u''(x))^2 dx.$$

donde  $t \in [c, x]$  y  $x \in [a, b]$ . Juntando ambos resultados y tomando raíz cuadrada obtenemos que

$$|e'(x)| = |f'(x) - u'(x)| \leq h^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b (f''(y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

para todo  $x \in [x_j, x_{j+1}]$  y para todo  $y \in [a, b]$ . Luego la derivada del error está acotada por una expresión proporcional a  $h^{\frac{1}{2}}$ .

Como

$$\int_{x_j}^x e'(t) dt = e(x) - e(x_j) = e(x) - 0 = e(x),$$

se tiene que

$$|e(x)| = \left| \int_{x_j}^x e'(t) dt \right| \leq \int_{x_j}^x \max_{a \leq z \leq b} |e'(z)| dt \leq h \max_{a \leq z \leq b} |e'(z)| \leq h^{\frac{3}{2}} \left( \int_a^b (f''(y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Luego, una cota del error de interpolación spline cúbica natural es

$$|f(x) - u(x)| \leq h^{\frac{3}{2}} \left( \int_a^b (f''(y))^2 dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

de donde se deduce que el error está acotado por una expresión proporcional a  $h^{\frac{3}{2}}$ .

### 3.3. Splines de suavizado

A menudo, los valores de las funciones se ven perturbados por errores de medición. Un remedio para esto, propuesto por Schoenberg y Reinsch, es minimizar una suma ponderada de los cuadrados de los errores de interpolación combinada con el cuadrado de la integral de la segunda derivada para controlar la suavidad.

Sean ahora los datos  $(x_i, y_i)_{i=1}^n$  donde  $y_i = v(x_i)$  son los valores que toma alguna función suave  $v$  en  $x_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $x_1 < \dots < x_n$ ; y sean los pesos  $w_i > 0$ . El spline de suavizado (smoothing spline)  $f_\sigma$  es el spline cúbico único con nudos simples en  $x_i$  que minimiza

$$E(f, \sigma) = (1 - \sigma) \sum_{i=1}^n w_i (y_i - f(x_i))^2 + \sigma \int_{x_1}^{x_n} (f''(t))^2 dt \quad (3.5)$$

entre todas las funciones  $f$  que son dos veces continuamente diferenciables, es decir, tales que  $f \in C^2[x_1, x_n]$ .

El primer término mide la proximidad a los datos y el segundo penaliza la curvatura de la función. Y como la minimización de (3.5) pretende encontrar un equilibrio entre

tener una curva suave y estar cerca de los datos dados, la elección de  $\sigma$  depende de a cual de estos objetivos se le de mayor importancia.

El parámetro  $\sigma \in (0, 1)$  controla la significación de los datos y el suavizado. Para  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $f_\sigma$  converge al interpolante cúbico natural, mientras que para  $\sigma \rightarrow 1$ ,  $f_\sigma$  converge a la recta de mínimos cuadrados.

Para mostrar que el minimizador de  $E$  es un spline cúbico, consideramos una secuencia minimizadora de funciones  $g_l$  dos veces continuamente diferenciables:

$$E(g_l, \sigma) \longrightarrow \inf_g E(g, \sigma) \geq 0.$$

Para cualquier  $l$ , el valor  $E(g_l, \sigma)$  se puede minimizar reemplazando  $g$  por el interpolante spline cúbico natural  $h_l$  de los datos  $(x_i, g_l(x_i))$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Este reemplazo deja el primer término de (3.5) invariante, mientras que la integral se vuelve más pequeña, pues los splines naturales se definen como el minimizador de dicha integral (visto en la sección anterior). Por tanto,  $h_1, h_2, \dots$  es una sucesión minimizadora. Y como  $|h_l(x_i)|$  y  $\int (h_l'')^2$  deben permanecer acotadas, existe una subsucesión de  $(f_l)_{l=1}^\infty$  que converja a un spline natural minimizador.

El minimizador es único debido a la estricta convexidad de  $E$ . La desigualdad

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right), \quad \text{para } a \neq b,$$

implica que  $E((p+q)/2, \sigma) < (E(p, \sigma) + E(q, \sigma))/2$ , si  $p \neq q$ , o si alguno de los datos  $p(x_i)$  y  $q(x_i)$  son distintos. En consecuencia, si  $E(p, \sigma) = E(q, \sigma)$  para  $p \neq q$ , los valores de  $E$  pueden reducirse aún más.

Para analizar el comportamiento del spline de suavizado  $f_\sigma$  cuando  $\sigma$  converge a cero, observamos que

$$\|h\| = \left(\sum_{i=1}^n w_i (h(x_i))^2\right)^{1/2}$$

es una norma en el espacio de spline naturales que, por definición, satisfacen las condiciones frontera  $h''(x_1) = h''(x_n) = 0$ , y por lo tanto están únicamente determinados por sus valores en los puntos  $x_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Suponemos, por reducción al absurdo, que  $f_\sigma$  no converge al spline natural  $h$  que interpola los datos  $y_i$ . Por tanto, existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $\|f_\sigma - h\| \geq \epsilon$ . Por la definición de  $E$  y dado que  $y_i = h(x_i)$ , se sigue que

$$E(f_\sigma, \sigma) = (1 - \sigma)\|h - f_\sigma\|^2 + \sigma \int_{x_1}^{x_n} (f_\sigma''(t))^2 dt \geq (1 - \sigma)\epsilon^2 > \sigma \int_{x_1}^{x_n} (h''(t))^2 dt,$$

Observando que el lado derecho es igual a  $E(h, \sigma)$ , pues  $(y_i - h(x_i)) = 0$ , para todo  $i$ . Lo que contradice la minimalidad de  $f_\sigma$ , pues hemos encontrado una función  $h$  menor

que  $f_\sigma$  que satisface las condiciones. Y por tanto, se ha visto el comportamiento de  $f_\sigma$  cuando  $\sigma \rightarrow 0$ . El comportamiento para  $\sigma \rightarrow 1$  se analiza análogamente, usando, en este caso, la seminorma  $|h| = \left( \int_{x_1}^{x_n} |h''(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ .

Concluimos esta sección discutiendo la construcción del spline de suavizado. Sea  $\xi = (\xi_i)_{i=1}^{n+6}$  una secuencia de nudos, de forma que  $x_i = \xi_{i+3}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Los nudos exteriores elegidos apropiadamente son  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  y  $\xi_{n+4}, \xi_{n+5}, \xi_{n+6}$ . Representamos  $f_\sigma$  de la siguiente forma

$$f_\sigma = \sum_{i=1}^{n+2} c_i N_i^4$$

Para determinar  $f_\sigma$ , expresamos  $E$  como una función cuadrática en términos de los coeficientes B-splines:

$$E(f_\sigma, \sigma) = \mathbf{c}^t Q_\sigma \mathbf{c} - 2h_\sigma^t \mathbf{c} + h_\sigma^0,$$

donde  $h_\sigma^0$  es una constante. Resolviendo el sistema

$$Q_\sigma \mathbf{c} = h_\sigma$$

obtenemos la solución mínima única. Sea la matriz de interpolación

$$A = (a_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,n+2} = (N_j^4(x_i))_{i=1,j=1}^{n,n+2}$$

de tamaño  $n \times (n+2)$ ; y sea la matriz diagonal  $W$  de los pesos  $w_i$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Con estas dos matrices obtenemos una forma de reescribir el término del sumatorio de la fórmula (3.5)

$$\sum_{i=1}^n w_i (y_i - f(x_i))^2 = (v - \mathbf{A}\mathbf{c})^t W (v - \mathbf{A}\mathbf{c}).$$

Pasamos ahora a describir el término integral como

$$f_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n+2} c_i N_i^4(x).$$

Derivando dos veces, de acuerdo a la Proposición 2.2.1, obtenemos que

$$f''(x) = \sum_{i=1}^n d_i N_{i+2}^2(x), \quad \text{con} \quad d_i = \alpha_{i+2}^2 (\alpha_{i+2}^3 (c_{i+2} - c_{i+1}) - \alpha_{i+1}^3 (c_{i+1} - c_i)), \quad (3.6)$$

donde

$$\alpha_i^m = \frac{m-1}{\xi_{i+m-1} - \xi_i}. \quad (3.7)$$

Lo que nos lleva a  $\mathbf{d} = D\mathbf{c}$ , siendo  $D$  una matriz de tamaño  $n \times (n+2)$  que contiene las combinaciones apropiadas de los factores  $\alpha_i^m$ . Denotamos por

$$G = (g_{j,j'}) = \int_{x_1}^{x_n} N_{i+2}^2 N_{i'+2}^2 dt, \quad \text{para} \quad i, i' \in \{1, \dots, n\},$$

la matriz de Graminian del sistema de B-splines normalizados. Por tanto tenemos

$$\int_{x_1}^{x_n} |f''(t)|^2 dt = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n d_i \left( \int N_{i+2}^2 N_{i'+2}^2 dt \right) d_{i'} = \mathbf{c}^t D^t G D \mathbf{c}.$$

Hemos reescrito por tanto el término de la integral de la fórmula (3.5). Si combinamos las dos fórmulas, y tenemos en cuenta los factores  $1 - \sigma$  y  $\sigma$  de (3.5) obtenemos la representación deseada para  $E$

$$F_\sigma = (1 - \sigma)A^t W A + \sigma D^t G D, \quad f_\sigma = (1 - \sigma)A^t W g, \quad b = (1 - \sigma)g^t W g.$$

Podríamos reducir el tamaño del sistema lineal usando que el spline de suavizado  $f$  satisface las condiciones frontera naturales  $f''(x_1) = f''(x_n) = 0$ . Por la fórmula de derivación anterior, (3.6), esto implica que para  $i = 0$  y  $i = n$

$$d_i = \alpha_{i+2}^2 (\alpha_{i+3}^3 (c_{i+2} - c_{i+1}) - \alpha_{i+1}^3 (c_{i+1} - c_i)) = 0,$$

y como  $\alpha_2^2$  y  $\alpha_{n+2}^2$  no son nulos por (3.7) tenemos que

$$\alpha_2^3 (c_2 - c_1) - \alpha_1^3 (c_1 - c_0) = 0$$

y

$$\alpha_{n+2}^3 (c_{n+2} - c_{n+1}) - \alpha_{n+1}^3 (c_{n+1} - c_n) = 0.$$

Por tanto, podemos eliminar el primer y el último coeficiente desconocido  $c_0$  y  $c_{n+2}$ . A pesar de que esto no produce una simplificación trascendental, nos permite ver las identidades de los coeficientes como una prueba de la corrección de la solución calculada.



# Bibliografía

- [1] DE BOOR, C. - *A practical guide to Splines*, Springer, 1978.
- [2] SCHUMAKER L.L. - *Spline Functions: Basic Theory*, Wiley-Interscience, 1980.
- [3] KLAUS HÖLLING, JÖRG HÖRNER - *Aproximation and Modeling with B-splines*, Siam, 2013.
- [4] MARCO PALUZNY, HARTMUT PRAUTZSCH, WOLFGANG BOEHM - *Métodos de Bezier y B-splines*, Springer, 2002.
- [5] J.M. SANZ SERNA, M. ÁNGEL REVILLA, M. PAZ CALVO, L.M. ABIA - *Apuntes Análisis Numérico*, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid. Curso 2019-2020.
- [6] J.M. SANZ SERNA - *Diez Lecciones de Cálculo Numérico*, Universidad de Valladolid, 2010.
- [7] H.SPETH - *Spline algorithms for Curves and Surfaces*, Utilitas Math, pp. 264-313 (1974).
- [8] D. SCHWEIKER- *An interpolation curve using splines in tension*, J. Math. Phys. **45** (1966), pp. 312-317.
- [9] IVOS BEROS, MILJENKO MARUSIC- *Evaluation of tension splines*, Mathematical Communications **4** (1999), pp. 73-81.
- [10] STEVEN PRUESS- *Properties of splines in tension*, Journal of approximation theory **17** (1976), pp. 86-96.
- [11] KARLIN, S. - *Total Positivity, Volume 1*, Stanford University Press, 1968.