Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Retículos vectoriales. Algunos teoremas de representación

Autor: Inés Marcos Lomo

Tutor: Jesús M. Domínguez Gómez

Índice general

Introducción

Si X es un espacio de Tychonoff, esto es, completamente regular y Hausdorff, denotaremos por $C(X)$ la $\mathbb{R}$-álgebra de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ con las operaciones definidas "punto apunto":

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x)+g(x), \\ (fg)(x) &:= f(x)g(x), \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x), \end{aligned}$$

para cada $x \in X$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideramos también en $C(X)$ la relación de orden parcial definida "punto a punto":

$$f \leq g \ \text{ si } f(x) \leq g(x), \text{ para cada } x \in X.$$

Esta relación de orden parcial no solo es compatible con el producto en $C(X)$, sino que también lo es con su estructura vectorial, quedando así $C(X)$ dotado de estructura de retículo vectorial.

Diremos que una $\mathbb{R}$-álgebra A es de tipo $\mathcal{C}$ si existe un espacio topológico X tal que A es l-isomorfa a $C(X)$, es decir, isomorfa como álgebra y como retículo.

Denotaremos por $C^*(X)$ la subálgebra de $C(X)$ formada por las funciones acotadas. El álgebra $C^*(X)$ es ciertamente de tipo $\mathcal{C}$, pues, si βX es la compactificación de Stone-Cech del espacio X, entonces cada función continua y acotada $f \in C^*(X)$ admite una extensión continua f^β a βX, y la aplicación

$$\begin{aligned} C^*(X) &\longrightarrow C(\beta X) \\ f &\longmapsto f^\beta \end{aligned}$$

es un l-isomorfismo.

Sea ahora Y un espacio intermedio entre X y βX, es decir, $X \subseteq Y \subseteq \beta X$. Puesto que X es denso Y (por serlo en βX), la aplicación de restricción

$$\begin{aligned} C(Y) &\longrightarrow C(X) \\ f &\longmapsto f|X \end{aligned}$$

es un l-homomorfismo inyectivo e, identificando $C(Y)$ con su imagen en $C(X)$, podemos considerar a $C(Y)$ como un álgebra intermedia entre $C^*(X)$ y $C(X)$, es decir, $C^*(X) \subseteq C(Y) \subseteq C(X)$. Ahora bien, no todas las álgebras intermedias entre $C^*(X)$ y $C(X)$ son de tipo $\mathcal{C}$. Puede demostrarse que si $f \in C(X)$, pero $f \notin C^*(X)$, entonces el álgebra intermedia $C^*(X)[f]$ formada por las expresiones polinómicas en f con coeficientes en $C^*(X)$ no es de tipo $\mathcal{C}$.

En el intento por encontrar una estructura algebraica que permita estudiar unificadamente las diferentes álgebras de funciones continuas, Henriksen y Johnson [HJ] proponen en 1961 la estructura de Φ-álgebra. Esta estructura ha sido la más exitosa. Todas las álgebras intermedias son Φ-álgebras (de hecho, son Φ-álgebras uniformemente cerradas). Plank [Pla] obtuvo además en 1971 el siguiente teorema de caracterización (mejorando un resultado anterior de Henriksen y Johnson): Una Φ-álgebra A uniformemente cerrada y cerrada por inversión es l-isomorfa a $C(X)$ para algún espacio de Lindelöf X si, y solo si, cada ideal propio uniformemente cerrado de A está contenido en un ideal maximal real (es decir, en un ideal maximal cuyo cuerpo residual es $\mathbb{R}$).

Exponemos en esta memoria la teoría elemental de los retículos vectoriales, enfocada desde el punto de vista de los espacios de funciones continuas, no hemos entrado a considerar la teoría de la medida. Nuestro objetivo era llegar, al menos, a introducir la estructura de Φ-álgebra. Hemos probado el teorema de representación de Yosida para retículos vectoriales y algunas propiedades básicas de las Φ-álgebras, pero no hemos llegado a estudiar las Φ-álgebras uniformemente cerradas ni la extensión a Φ-álgebras del teorema de representación de Yosida.

El trabajo se divide en cuatro capítulos. El primer de ellos lo dedicaremos a los preliminares, viendo unas primeras definiciones y propiedades. Principalmente nos serviremos del libro [BKW]. Para llegar a definir los retículos vectoriales, la principal estructura que vamos a tratar, vamos a definir la estructura de retículo, así como las aplicaciones crecientes y los morfismos de retículos. Después, introduciremos un ejemplo característico de retículo vectorial: las aplicaciones continuas. Por último, hablaremos de la topología débil apoyándonos en el libro [Bou].

El segundo capítulo tratará con detalle la estructura de retículo vectorial, viendo sus propiedades fundamentales. Nos basaremos principalmente en dos textos: [Pul] y [EJ]. Veremos en primer lugar algunas propiedades básicas. Luego pasaremos a ver los morfismos de retículos vectoriales y los subespacios sólidos, lo que los permitirá estudiar ciertos espacios cociente como retículos vectoriales. Por último, definiremos los elementos acotados respecto a un elemento positivo e y cuándo e es una unidad débil o fuerte, y en relación con esto veremos algunas características de los retículos vectoriales arquimedianos.

En el tercer capítulo seguiremos el texto de [Pul]. Empezaremos definiendo el espectro y el espectro acotado de un retículo vectorial. Estos espacios nos servirán para representar retículos. El resto del capítulo está dirigido a enunciar y demostrar varios resultados, entre los que tienen particular importancia dos teoremas de representación. Primero veremos la representación de Riesz, que nos permite ver los elementos acotados de un retículo vectorial como funciones continuas que parten del espectro acotado de dicho retículo vectorial (teorema 48). Luego veremos una segunda representación que nos permitirá ver los elementos de un retículo vectorial como ciertas clases de funciones que parten del espectro (teorema 58).

El último capítulo estará dedicado a las Φ-álgebras, esto es, retículos vectoriales a los que se añade una estructura de álgebra conmutativa con elemento unidad. De nuevo la referencia principal será [Pul], aunque tomaremos algún ejemplo del artículo [Hui]. Emperaremos con las definiciones y las principales propiedades. En un segundo momento paseremos a ver algunos resultados de representación de Φ-álgebras.

Capítulo 1

Preliminares

Empezamos con los preliminares, viendo unas primeras definiciones y propiedades. Principalmente nos serviremos del libro [BKW]. Para llegar a definir los retículos vectoriales, la principal estructura que vamos a tratar, vamos a definir la estructura de retículo, así como las aplicaciones crecientes y los morfismos de retículos. Después, introduciremos un ejemplo característico de retículo vectorial: las aplicaciones continuas. Por último, hablaremos de la topología débil apoyándonos en el libro [Bou].

Extremos superiores e inferiores

Definición 1. Una relación de *orden parcial* en un conjunto E es una relación binaria en E que satisface las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Como es habitual, denotaremos una relación de este tipo con el símbolo $\leq$.

Definición 2. Sea E un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq E$. Si el conjunto de las cotas superiores de A tiene elemento mínimo, este elemento se denomina *extremo superior* (o *supremo*) de A. El extremo superior de A, cuando exista, se denotará con $\bigvee A$, $\sup A$ o $\sup\limits_{x\in A} x$, y si A es un conjunto finito, $A := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, escribiremos preferentemente $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$. Análogamente para el *extremo inferior* (o *ínfimo*) de A.

Si F es un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado E (siendo el orden de F el heredado de E), será a menudo necesario utilizar una notación del tipo $\vee_F A$ o F-$\sup A$ para diferenciar el extremo superior de A en F del calculado en E. Debemos hacer notar, en relación con los extremos superiores de A, en F y en E respectivamente, que la existencia de uno no implica la del otro y que, aun cuando existan ambos, pueden no coincidir. Análogamente para los extremos inferiores.

Retículos y subrretículos

Precisamos hacer algunos observaciones sobre las dos definiciones habituales (y coincidentes) de retículo: como conjunto parcialmente ordenado y como álgebra universal.

Definición 3. Un *retículo* es un conjunto parcialmente ordenado E en el que cada par de elementos $x, y \in E$ tiene extremo superior $x \vee y$ y extremo inferior $x \wedge y$.

Es obvio que, para cualesquiera elementos x, y, z de un retículo E, se verifica lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{(asociatividad)} & x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ \text{(conmutatividad)} & x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x \\ \text{(idempotencia)} & x \vee x = x, \quad x \wedge x = x \\ \text{(absorción)} & x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x \end{array}$$

Definición 4. Como álgebra universal, un *retículo* es un conjunto E dotado de dos operaciones binarias, denotadas provisionalmente con $x \top y$ y $x \perp y$, que poseen las propiedades asociativa, conmutativa, de idempotencia y de absorción.

A partir de las dos operaciones anteriores $\top$ y $\perp$ puede introducirse una relación de orden parcial en E definiendo $x \leq y$ si $x \perp y = x$. El conjunto E con esta relación de orden parcial es un retículo y, para cualesquiera $x, y \in E$, se verifica que

$$\begin{aligned} x \vee y &= x \top y \\ x \wedge y &= x \perp y \end{aligned}$$

Definición 5. Sea E un retículo. La definición de subrretículo de E se hace atendiendo a la definición de E como álgebra universal. Así pues, un *subrretículo* F de E es un subconjunto F de E que es cerrado para las dos operaciones que definen E, es decir, $x \vee y \in F$, $x \wedge y \in F$, siempre que $x, y \in F$. Se adopta este mismo enfoque para la definición de morfismo de retículos.

Sea E un retículo y $F \subseteq E$. El que F sea un retículo con el orden heredado de E, no significa que F sea un subrretículo de E. Si F, con el orden heredado de E, es un retículo, entonces, para cada par de elementos $x, y \in F$, existen $x \vee_F y$ y $x \wedge_F y$, pero puede que estos elementos no coincidan con $x \vee_E y := x \vee y$ y $x \wedge_E y := x \wedge y$ respectivamente. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo 6. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con el orden usual es un retículo, ya que es un conjunto totalmente ordenado. El conjunto $E := \mathbb{R}^3$, con el orden producto (o definido componente a componente), es también un retículo, y $(x_1, x_2, x_3) \vee (y_1, y_2, y_3) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, x_3 \vee z_3)$. Sea $F := \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ con el orden heredado de E. Puesto que $\mathbb{R}^2$ y F son isomorfos como conjuntos ordenados ($(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2)$), concluimos que F es un retículo. Ahora bien, tanto $(2, -1, 1)$ como $(0, 0, 0)$ están en F, pero, sin embargo, $(2, -1, 1) \vee (0, 0, 0) = (2, 0, 1) \notin F$. Así pues, F no es un subrretículo de E. Veremos más ejemplos de esta situación a lo largo de la memoria.

Aplicaciones crecientes y morfismos de retículos

Definición 7. Sea $T : E \to F$ una aplicación entre conjuntos parcialmente ordenados. Diremos que la aplicación T es *creciente* (o *morfismo de conjuntos parcialmente ordenados*) si $x \leq y$ implica que $T(x) \leq T(y)$. Diremos que la aplicación T es un *isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados*) si T es biyectiva y tanto T como T^{-1} son aplicaciones crecientes.

Veremos a continuación un ejemplo de una aplicación creciente y biyectiva que no es isomorfismo. Para ello nos bastará considerar dos relaciones de orden sobre un mismo conjunto, una de ellas estrictamente más fuerte que la otra. En esas condiciones, la aplicación identidad es biyectiva, y creciente en uno solo de los dos sentidos, luego su inversa no es creciente.

Ejemplo 8. Sea $E := \mathbb{R}^2$ con el orden usual (o definido componente a componente) y $F := \mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico. Recordemos que $(x_1, x_2) \overset{lex}{\leq} (y_1, y_2)$ si $x_1 < y_1$ o ($x_1 = y_1$ y $x_2 \leq y_2$). Luego $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ implica que $(x_1, x_2) \overset{lex}{\leq} (y_1, y_2)$. Además, $(1, 2) \overset{lex}{\leq} (2, 1)$, aunque $(1, 2) \not\leq (2, 1)$. Concluimos así que la aplicación identidad de E en F es creciente y biyectiva, pero su inversa no es creciente. De hecho, no existe ningún isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados entre E y F, ya que F es totalmente ordenado y E no lo es.

Definición 9. Sea $T : E \to F$ una aplicación entre retículos. Diremos que la aplicación T es un *morfismo de retículos* o (*l-morfismo*) si, para cualesquiera $x, y \in E$, se verifica que

$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$$
$$T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$$

Definición 10. Diremos que una aplicación entre retículos $T : E \to F$ es un *isomorfismo de retículos* (o *l-isomorfismo*) si la aplicación T es biyectiva y tanto T como T^{-1} son l-morfismos. Es fácil comprobar que si T es un l-morfismo biyectivo, entonces T es un l-isomorfismo.

Se prueba también sin dificultad que si T es un l-morfismo, entonces T es una aplicación creciente, pero, como veremos en el siguiente ejemplo, lo recíproco no es cierto.

Ejemplo 11. Consideremos tanto $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}^3$ con el orden producto, y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $T(x_1, x_2) := (x_1, x_2, x_1 + x_2)$. La aplicación T es ciertamente creciente, ahora bien, $T((0, 0) \vee (2, -1)) = T(2, 0) = (2, 0, 2)$, que no coincide con $T(0, 0) \vee T(2, -1) = (0, 0, 0) \vee (2, -1, 1) = (2, 0, 1)$.

Así pues, en el caso de los retículos, los morfismos como conjuntos ordenados (o aplicaciones crecientes) no coinciden con los morfismos como retículos (l-morfismos), ahora bien, sí coinciden los dos conceptos de isomorfismo.

Sea $T : E \to F$ es una aplicación creciente entre retículos. Si x e y son dos elementos cualesquiera de E, solo podemos asegurar que

$$T(x) \vee T(y) \leq T(x \vee y)$$
$$T(x) \wedge T(y) \geq T(x \wedge y)$$

Retículos vectoriales

En lo que sigue, todos los espacios vectoriales que consideremos se supondrán construidos sobre el cuerpo de los números reales, es decir, serán $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

Definición 12. Un *espacio vectorial ordenado* es un espacio vectorial E dotado de una relación de orden parcial $\leq$ compatible con su estructura vectorial, esto es, satisfaciendo que si $x, y \in E$, entonces

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} x + z \leq y + z & \text{para todo } z \in E \\ \lambda x \leq \lambda y & \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Sea E un espacio vectorial ordenado. El conjunto $E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}$ se denomina *cono positivo* de E. Se comprueba fácilmente que $E^+ + E^+ \subseteq E^+$, $E^+ \cap -E^+ = \{0\}$ y $\lambda E^+ \subseteq E^+$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$. Además, dados $x, y \in E$, se verifica que $x \leq y$ si y solo si $y - x \in E^+$.

Recíprocamente, si C es un cono positivo en un espacio vectorial E (es decir, si C es un subconjunto de E tal que $C + C \subseteq C$, $C \cap -C = \{0\}$ y $\lambda C \subseteq C$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$), podemos establecer una relación de orden parcial en E definiendo $x \leq y$ si $y - x \in C$. Esta relación de orden parcial dota a E de estructura de espacio vectorial ordenado cuyo cono positivo es C.

Definición 13. Un *retículo vectorial* (o *espacio de Riesz*) es un espacio vectorial ordenado que posee estructura de retículo (todo par de elementos y, en consecuencia, todo subconjunto finito no vacío tiene supremo e ínfimo).

Veámos algunos ejemplos de retículos vectoriales:

Ejemplo 14.

- El cuerpo de los números reales con su orden usual es un retículo vetorial cuyo cono positivo es $\mathbb{R}^+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$. Utilizaremos esta notación a lo largo de la memoria.
- $E := \mathbb{R}^n$ con el orden usual componente a componente es un espacio de Riesz y $E^+ = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in E : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0\}$.
- $E := \mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico. En este caso $E^+ = \{(x_1, x_2) \in E : x_1 > 0\} \cup \{(x_1, x_2) \in E : x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$.

Definición 15. Un *subrretículo vectorial* de un retículo vectorial E es un subconjunto F de E que es subespacio vectorial y subrretículo de E (luego el supremo y el ínfimo, calculados en E, de todo subconjunto finito no vacío de F está en F).

Es inmediato de la definición que la intersección de dos subrretículos de un retículo vectorial es de nuevo un subrretículo. Sin embargo no siempre ocurre así con la suma algebraica. Veremos un ejemplo con las funciones continuas.

Ejemplo 16. Funciones continuas

Sea X un espacio topológico y $\mathbb{R}^X$ el conjunto de todas las funciones reales definidas sobre X. Siempre que no se advierta lo contrario, consideramos en $\mathbb{R}$ el orden usual y en $\mathbb{R}^X$ el orden producto (o relación de orden "punto a punto"). Así pues, dadas $f, g \in \mathbb{R}^X$,

$$f \leq g \text{ si y solo si } f(x) \leq g(x), \text{ para todo } x \in X$$

Como es habitual, $f < g$ significa que $f \leq g$ y que $f \neq g$. Luego, si $f < g$, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) < g(x_0)$. Queremos insistir en que $f < g$ no significa que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$.

Se comprueba sin dificultad que esta relación de orden parcial dota a $\mathbb{R}^X$ de estructura de retículo vectorial. Dadas $f, g \in \mathbb{R}^X$, se verifica que

$$\begin{aligned} (f \vee g)(x) &= f(x) \vee g(x) \\ (f \wedge g)(x) &= f(x) \wedge g(x) \\ |f|(x) &= |f(x)| \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{C}(X)$ de todas las funciones reales y continuas sobre X, que es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^X$. Puesto que la función valor absoluto $|\,.\,| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, si $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces $|f| = |\,.\,| \circ f \in \mathcal{C}(X)$. Además, si $f, g \in \mathcal{C}(X)$, entonces

$$\begin{aligned} f \vee g &= \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in \mathcal{C}(X) \\ f \wedge g &= \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \mathcal{C}(X) \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{C}(X)$ es también un subrretículo de $\mathbb{R}^X$.

Denotaremos frecuentemente con $\mathbf{r}$ (r con estilo negrita) la función constante, sobre cualquier conjunto, cuyo valor constante es el número real r.

Acabamos de ver que si $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X)$, entonces tanto $f_1 \vee f_2$ como $f_1 \wedge f_2$ existen en $\mathcal{C}(X)$ y, de hecho,

$$\begin{aligned} (f_1 \vee f_2)(x) &= f_1(x) \vee f_2(x) \\ (f_1 \wedge f_2)(x) &= f_1(x) \wedge f_2(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Análogamente para un número finito de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{C}(X)$.

Si A es un subconjunto infinito de $\mathcal{C}(X)$, entonces $\bigvee A$ o $\bigwedge A$ puede no existir (por ejemplo, si A es el subconjunto formado por las funciones constantes sobre X) y, de existir, puede no coincidir con el supremo o ínfimo calculado en $\mathbb{R}^X$ (el supremo o ínfimo calculado punto a punto). Veámoslo con un ejemplo: Sea $X := [0, \infty)$ y $A := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde

$$f_n(x) := \begin{cases} nx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq x \end{cases}$$

Se verifica que $\mathcal{C}(X)$-sup A es la función constante $\mathbf{1}$, mientras que el supremo puntual, es decir, $\mathbb{R}^X$-sup A, es la función no continua

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Para ilustrar que la suma algebraica de dos subrretículos puede no ser un subrretículo, consideremos $\mathcal{C}([0,1])$. Sea A el conjunto formado por las funciones constantes en $[0,1]$ y B el conjunto formado por las funciones definidas en $[0,1]$ de la siguiente manera: $f(x) = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Es claro que tanto A como B son subrretículos de $\mathcal{C}([0,1])$, sin embargo, $A + B$ no lo es. En efecto, $A + B$ está formado por las funciones definidas en $[0,1]$ de la siguiente forma: $f(x) = \mu + \lambda x$, con $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Tomamos $f_1, f_2 \in A + B$ definidas como $f_1(x) := x$ y $f_2(x) := -x + 1$, y tenemos que

$$(f_1 \vee f_2)(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ x, & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases},$$

luego $f_1 \vee f_2 \notin A + B$, con lo cual vemos que $A + B$ no es subrretículo de $\mathcal{C}([0,1])$.

Podemos considerar también un ejemplo de espacio de funciones que no sea un espacio de Riesz:

Ejemplo 17. Sea $\mathcal{C}^1((-1,1))$ el conjunto formado por las funciones derivables con derivada continua en $(-1,1)$, con la misma relación de orden que hemos considerado en el ejemplo anterior. Este conjunto es un espacio vectoral ordenado, pero no es un espacio de Riesz. En efecto, si consideramos $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = -x$, tenemos que $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^1((-1,1))$, pero $(f_1 \vee f_2)(x) = |x|$, luego $f_1 \vee f_2 \notin \mathcal{C}^1((-1,1))$.

Topología débil

Vamos a considerar la topología débil, con la cual dotaremos a algunos espacios relevantes que nos aparecerán a partir del cuarto capítulo de esta memoria, en relación con la representación de retículos vectoriales.

Definición 18. Sean un conjunto X, una familia de espacios topológicos $(Y_i)_{i\in I}$ y, para cada i, una aplicación $f_i : X \longrightarrow Y_i$. Denominamos *topología inicial* o *topología débil* en X respecto a la familia $(f_i)_{i\in I}$ a la menos fina de las topologías en X que hacen continuas dichas aplicaciones.

Proposición 19. Sean un conjunto X, una familia de espacios topológicos $(Y_i)_{i\in I}$ y, para cada i, una aplicación $f_i : X \longrightarrow Y_i$. Consideramos $\mathcal{G}$ el conjunto de subconjuntos de X de la forma $f_i^{-1}(U_i)$, donde U_i es abierto de Y_i, $i \in I$. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto formado por las intersecciones finitas de conjuntos de $\mathcal{G}$. Entonces se tiene que $\mathcal{B}$ es una base para la topología débil en X respecto a la familia $(f_i)_{i\in I}$.

Obviamos la demostración de esta proposición por ser de carácter técnico y ajeno a los objetivos de esta memoria. Se puede encontrar la demostración en [Bou].

Ejemplo 20. Algunos ejemplos de topologías iniciales son los siguientes:

- Sea X un espacio topológico y S un subespacio de X, la topología de subespacio en S es la topología inicial respecto a la inclusión.
- Sean $X_1, ..., X_n$ espacios topológicos, la topología producto en $X_1 \times ... \times X_n$ es la topología inicial respecto a las proyecciones.

Capítulo 2

Retículos vectoriales

En este segundo capítulo vamos a tratar con detalle la estructura de retículo vectorial, viendo sus propiedades fundamentales. Nos basaremos principalmente en dos textos: [Pul] y [EJ]. Veremos en primer lugar algunas propiedades básicas. Luego pasaremos a ver los morfismos de retículos vectoriales y los subespacios sólidos, lo que los permitirá estudiar ciertos espacios cociente como retículos vectoriales. Por último, definiremos los elementos acotados respecto a un elemento positivo e y cuándo e es una unidad débil o fuerte, y en relación con esto veremos algunas características de los retículos vectoriales arquimedianos.

Recordemos que un espacio vectorial ordenado es un espacio vectorial dotado de una relación de orden parcial compatible con su estructura vectorial. Recordemos también, que dado un espacio vectorial ordenado E, definimos el cono positivo de E como $E^+ := \{x \in E \ : \ x \geq 0\}$.

Definición 21. Sea E un espacio vectorial ordenado, y sean $x, y \in E$. Al subconjunto $[x, y] \subseteq E$ definido por:

$$[x, y] := \{z \in E \ : \ x \leq z \leq y\} = (x + E^+) \cap (y - E^+)$$

lo denominaremos *intervalo cerrado* de extremos x e y.

Recordemos que definimos un retículo vectorial (o espacio de Riesz) como un espacio vectorial ordenado que posee estructura de retículo.

Definición 22. Sea E un retículo vectorial, $x \in E$. Definimos:

- $x^+ := x \vee 0$, la *parte positiva de x*
- $x^- := (-x) \vee 0$, la *parte negativa de x*
- $|x| := x^+ \vee x^-$, el *valor absoluto de x*

Dados $x, y \in E$, es inmediato lo siguiente:

- $|x| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$

- $x \leq y \;\Leftrightarrow\; -y \leq -x$
- si además $x \geq 0$, entonces $|y| \leq x \;\Leftrightarrow\; y \in [-x, x]$

Veamos algunos resultados básicos:

Lema 23. Sea E un retículo vectorial. Para cualesquiera $x, y, z \in E$ se satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $-(x \wedge y) = (-x) \vee (-y),\; -(x \vee y) = (-x) \wedge (-y)$

(ii) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z),\; x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$

(iii) $x + y = x \vee y + x \wedge y$

(iv) $(x - y)^+ = x - x \wedge y,\; (x - y)^- = y - x \wedge y$

(v) $x = x^+ - x^-,\; x^+ \wedge x^- = 0,\; |x| = x^+ + x^-,\; |x| = |-x|$

(vi) $|x| = x \vee (-x),\; |x + y| \leq |x| + |y|,\; ||x| - |y|| \leq |x - y|$

(vii) si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx \geq 0$, entonces $x \geq 0$

(viii) $|\lambda x| = |\lambda||x|,\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(ix) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),\; x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Demostración. (i) Ambas igualdades son inmediatas.

(ii) Veamos la primera igualdad. Es claro que $x + y \leq x + (y \vee z)$ y, del mismo modo, que $x+z \leq x+(y\vee z)$. Juntando ambas desigualdades tenemos que $(x+y)\vee(x+z) \leq x+(y\vee z)$.

Para la otra desigualdad consideramos $h := (x + y) \vee (x + z)$. Tenemos que $x + y \leq h$, luego $y \leq h - x$. Análogamente, $z \leq h - x$. De manera que $y \wedge z \leq h - x$, lo cual implica $x + (y \wedge z) \leq h$, y ya tenemos ya igualdad buscada.

La segunda igualdad se demuestra de forma análoga.

(iii) Dado que $x \wedge y \leq x$, entonces $x - (x \wedge y) \geq 0$. De la misma manera, como $x \wedge y \leq y$, entonces $y - (x \wedge y) \geq 0$. Juntando ambas desigualdades, tenemos que:

$$x + y - (x \wedge y) \geq x,\; x + y - (x \wedge y) \geq y.$$

Lo cual implica que,

$$x + y - (x \wedge y) \geq (x \vee y),$$

y ya tenemos una de las desigualdades.

Para la otra desigualdad, sustituyendo x por $-x$ e y por $-y$, con el mismo razonamiento obtenemos lo siguiente:

$$(-x) + (-y) - ((-x) \wedge (-y)) \geq ((-x) \vee (-y)).$$

Aplicando I nos queda:

$$(-x) + (-y) + (x \vee y) \geq -(x \wedge y),$$

y reescribiéndolo

$$x + y - (x \wedge y) \leq (x \vee y).$$

Ya tenemos las dos desiguialdades, luego tenemos la igualdad.

(IV) Veamos la primera igualdad:

$$(x - y)^+ := (x - y) \vee 0 = (x - y) \vee (x - x).$$

Aplicando II y seguidamente I:

$$(x - y) \vee (x - x) = x + ((-y) \vee (-x)) = x - (y \wedge x).$$

La segunda igualdad se prueba de modo análogo:

$$(x - y)^- := (y - x) \vee 0 = (y - x) \vee (y - y) = y + ((-x) \vee (-y)) = y - (x \wedge y).$$

(V) La primera igualdad la demostramos aplicando las propiedades IV y I:

$$x^+ = (x - 0)^+ = x - (x \wedge 0) = x + ((-x) \vee 0) = x + x^- \;\Rightarrow\; x = x^+ - x^-.$$

Para la segunda igualdad utilizaremos la primera igualdad de este apartado y, además, las propiedades II y I:

$$(x^+ \wedge x^-) - x^- = (x^+ - x^-) \wedge (x^- - x^-) = x \wedge 0 = -((-x) \vee 0) = -x^- \;\Rightarrow\; x^+ \wedge x^- = 0.$$

La tercera igualdad la vamos a demostrar partiendo de las definiciones, la igualdad anterior y la propiedad III:

$$|x| = x^+ \vee x^- = x^+ \vee x^- + 0 = (x^+ \vee x^-) + (x^+ \wedge x^-) = x^+ + x^-.$$

Por último, la cuarta igualdad, resulta muy sencilla de demostrar gracias al resultado anterior:

$$|x| = x^+ + x^- = (x \vee 0) + ((-x) \vee 0) = (-x)^- + (-x)^+ = |-x|.$$

(vi) La igualdad $|x| = x \vee (-x)$ se deduce fácilmente de la definición que hemos dado de valor absoluto. Esta es, de hecho, una forma equivalente de definirlo que aparece, por ejemplo en [EJ].

La desigualdad triangular la demostramos de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq x^+ \\ y \leq y^+ \end{array}\right\} \Rightarrow x + y \leq x^+ + y^+,$$

añadiendo que $x^+ + y^+ \geq 0$, tenemos que $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$. Con un razonamiento análogo deducimos que $(x+y)^- \leq x^- + y^-$. Y con estas dos desigualdades y la propiedad v conlcuimos lo siguiente:

$$|x+y| = (x+y)^+ + (x+y)^- \leq (x^+ + y^+) + (x^- + y^-) = (x^+ + x^-) + (y^+ + y^-) = |x| + |y|.$$

Como consecuencia, podemos deducir de forma sencilla la desigualdad triangular inversa. Por un lado, tenemos que,

$$|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y| \;\Rightarrow\; |x| - |y| \leq |x-y|.$$

De la misma manera,

$$|y| = |(y-x) + y| \leq |y-x| + |x| \;\Rightarrow\; |y| - |x| \leq |x-y|.$$

Juntando ambas desigualdades obtenemos que $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

(vii) De ii, podemos deducir, por inducción, la siguiente igualdad:

$$n(x \wedge 0) = nx \wedge (n-1)x \wedge (n-2)x \wedge \cdots \wedge x \wedge 0.$$

Luego, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx \geq 0$, entonces

$$n(x \wedge 0) = (n-1)x \wedge (n-2)x \wedge \cdots \wedge x \wedge 0 = (n-1)(x \wedge 0).$$

Pero que $n(x \wedge 0) = (n-1)(x \wedge 0)$ implica que $x \wedge 0 = 0$, luego ya tenemos que $x \geq 0$.

(viii) Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda > 0$ y probar que $|\lambda x| = \lambda|x|$. Como $\lambda x \leq \lambda|x|$, y además, $-\lambda x = \lambda(-x) \leq \lambda|x|$, entonces $|\lambda x| \leq \lambda|x|$. En particular, $|x| = |\frac{1}{\lambda}\lambda x| \leq \frac{1}{\lambda}|\lambda x|$, esto es, $\lambda|x| \leq |\lambda x|$. Con esto queda probada la propiedad.

(IX) Veamos la primera igualdad. Denotamos $k = x \wedge (y \vee z)$. Como $y \leq (y \vee z)$, entonces $x \wedge y \leq k$. De la misma manera, como $z \leq (y \vee z)$, entonces $x \wedge z \leq k$. Juntando ambas desigualdades, tenemos que $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq k$. Para ver que k es la cota superior óptima del conjunto $\{x \wedge y, x \wedge z\}$ tomamos otra cota superior h. Usando III deducimos lo siguiente:

$$h \geq x \wedge y = x + y - (x \vee y),$$

y reescribiéndolo,

$$h - x + (x \vee y) \geq y.$$

De la misma manera,

$$h \geq x \wedge z = x + z - (x \vee z) \Rightarrow h - x + (x \vee z) \geq z.$$

Juntando ambas desigualdades y aplicando de nuevo la propiedad III:

$$h \geq x + (y \vee z) - (x \vee (y \vee z)) = x \wedge (y \vee z) = k.$$

Y ya hemos terminado. □

Teorema 24. (Propiedad de descomposición de Riesz). Sea E un espacio de Riesz y $x, y_1, y_2 \in E^+$ tales que $x \leq y_1 + y_2$. Entonces existen $x_1, x_2 \in E^+$ tales que $x = x_1 + x_2, 0 \leq x_1 \leq y_1$ y $0 \leq x_2 \leq y_2$.

Demostración. Definimos $x_1 := x \wedge y_1$ y $x_2 := x - x_1$. Es claro que $0 \leq x_1 \leq x$, luego $x_2 = x - x_1 \geq 0$, es decir, $x_1, x_2 \in E^+$. Del mismo modo $0 \leq x_1 \leq y_1$. Además,

$$x_2 = x - x_1 = x - (x \wedge y_1) = (x - y_1) \vee 0 \leq y_2 \vee 0 = y_2.$$

Para terminar, es inmediato ver que $x_1 + x_2 = x_1 + x - x_1 = x$. □

Corolario 25. Sea E un retículo vectorial y $x, y, z \in E$. Se satisfacen las siguientes propiedades:

(I) si $x, y, z \geq 0$, entonces $x \wedge (y + z) \leq x \wedge y + x \wedge z$

(II) $n(x \vee y) = nx \vee ny$, $n(x \wedge y) = nx \wedge ny$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(III) $2(x \vee y) = x + y + |x - y|$

Demostración. (I) Podemos verlo de forma muy sencilla con la propiedad de descomposición anterior. Denotamos $k = x \wedge (y + z)$. Tenemos que $0 \leq k \leq y + z$, es decir, $k \in [0, y + z]$. Ahora bien, existen $k_1 \in [0, y]$, $k_2 \in [0, z]$ tales que $k = k_1 + k_2$. Con esto podemos concluir:

$$k = k_1 + k_2 \leq (x \wedge y) + (x \wedge z).$$

(II) Si tenemos $z, k \geq 0$ tales que $z \wedge k = 0$, del teorema 24 podemos deducir que:

$$0 \leq z \wedge (k + k) \leq (z \wedge k) + (z \wedge k) = 0 + 0,$$

es decir,

$$0 = z \wedge k = z \wedge (2k) = \cdots = z \wedge (nk) = \dots\ ,\ n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, haciendo uso de esto y de las propiedades IV y V del lema 23, tenemos que:

$$0 = (x-y)^{+} \wedge (x-y)^{-} = (x - x \wedge y) \wedge (y - x \wedge y) = (nx - n(x \wedge y)) \wedge (ny - n(x \wedge y)).$$

Con esto conseguimos la siguiente implicación:

$$(nx - n(x \wedge y)) \wedge (ny - n(x \wedge y)) = 0 \ \Rightarrow\ nx \wedge ny - n(x \wedge y) = 0,$$

con lo que tenemos el resultado buscado.

(III) Se deduce como corolairo de la segunda propiedad de este corolario. En efecto, si tomamos $n = 2$ tenemos lo siguiente:

$$2(x \vee y) = 2x \vee 2y = (x + x + y - y) \vee (y + y + x - x),$$

y por la segunda propiedad del lema 23, esto es igual a

$$x + y + (x - y) \vee (y - x) = x + y + |x - y|.$$

□

Definición 26. Sean E y F dos retículos vectoriales. Recordemos que si tenemos una aplicación $T : E \longrightarrow F$ tal que $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ y $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$, para cualesquiera $x, y \in E$, entonces T es un *morfismo de retículos*. Diremos que $T : E \longrightarrow F$ es un *morfismo de retículos vectoriales* si es un morfismo de retículos y una aplicación lineal.

Diremos además que T es *isomorfismo de retículos vectoriales* si es biyectivo y su inversa es también un morfismo de retículos vectoriales. En realidad, si tenemos un morfismo de retículos vectoriales, la biyectividad es suficiente para garantizar que es un isomorfismo de retículos vectoriales. Si existe algún isomorfismo de retículos vectoriales entre E y F, diremos que E y F son *l-isomorfos*.

Veamos una sencilla proposición de gran utilidad:

Proposición 27. Sea $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal entre retículos vectoriales. T es un morfismo de retículos vectoriales si y solo si $T(|x|) = |T(x)|$ para todo $x \in E$.

Demostración. Dados $x, y \in E$ sabemos que $-(x \wedge y) = (-x) \vee (-y)$, por tanto, para que T sea morfismo de retículos vectoriales basta con que T transforme supremos en supremos o ínfimos en ínfimos. Además, puesto que $x \vee y = x + (0 \vee (y - x))$, T manda supremos en supremos si y solo si $T(x \vee 0) = T(x) \vee 0$ para todo $x \in E$. Por último, como $2(x \vee 0) = x + |x|$, podemos concluir lo que queríamos demostrar. □

Proposición 28. Sean E, F retículos vectoriales y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y biyectiva tal que $T(E^+) \subseteq F^+$. Entonces T es isomorfismo de retículos vectoriales si y solo si T^{-1} cumple que $T^{-1}(F^+) \subseteq E^+$.

Demostración. Si T es isomorfismo de retículos vectoriales, entonces T^{-1} también lo es. En consecuencia si $y_1, y_2 \in F$ son tales que $y_1 \leq y_2$, entonces $T^{-1}(y_1) \leq T^{-1}(y_2)$. En particular, si $y_1 \geq 0$, entonces $T^{-1}(y_1) \geq 0$, es decir, $T^{-1}(F^+) \subseteq E^+$.

Suponemos ahora que $T^{-1}(F^+) \subseteq E^+$. Sean $x_1, x_2 \in E$. Puesto que $x_1 \vee x_2 \geq x_1$ y $x_1 \vee x_2 \geq x_2$, tenemos respectivamente que $T(x_1 \vee x_2) \geq T(x_1)$ y $T(x_1 \vee x_2) \geq T(x_2)$. Por tanto, $T(x_1 \vee x_2) \geq T(x_1) \vee T(x_2)$. Por otra parte, usando que $T(x_1) \vee T(x_2) \geq T(x_1)$ y $T^{-1}(F^+) \subseteq E^+$, tenemos que $T^{-1}(T(x_1) \vee T(x_2)) \geq T^{-1}(x_1) = x_1$. Análogamente, $T^{-1}(T(x_1) \vee T(x_2)) \geq T^{-1}(x_2) = x_2$. Por tanto, tenemos que $T^{-1}(T(x_1) \vee T(x_2)) \geq x_1 \vee x_2$, luego $T(x_1) \vee T(x_2) \geq T(x_1 \vee x_2)$. Con esto hemos terminado de probar que $T(x_1) \vee T(x_2) = T(x_1 \vee x_2)$, es decir, T es morfismo de retículos vectoriales. Como sabemos que es biyectivo, concluimos que T es isomorfismo de retículos vectoriales. □

Ejemplo 29. Sean $E := \mathbb{R}^2$ con el orden usual componente a componente y $F := \mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico. Ya vimos en el ejemplo 14 que $E^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0\}$ y $F^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$. Es claro que $E^+ \subsetneq F^+$. En consecuencia, por la proposición que acabamos de ver, E y F no son l-isomorfos.

Definición 30. Sea E un retículo vectorial. Diremos que un subconjunto S de E es *sólido* (o *absolutamente convexo*) si se satisface que, para todo elemento s de S, el conjunto $\{x \in E : |x| \leq |s|\}$ está contenido en S.

Cuando un subespacio vectorial de E sea sólido y no esté contenido estrictamente en ningún subespacio sólido y propio de E, diremos que es un *subespacio sólido maximal* de E.

Los subespacios sólidos de un retículo vectorial son los subrretículos vectoriales convexos.

Ejemplo 31. Sea $E := \mathcal{C}([0, 1])$, retículo vectorial.

- Sea A el subespacio de E formado por las fuciones constantes en $[0, 1]$. Es inmediato que A es subrretículo vectorial de E, pero no es sólido. Por ejemplo, la función $\sin : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $|\sin| \leq \mathbf{1} \in A$ y sin embargo $\sin \notin A$. Más general, puesto que $[0, 1]$ es compacto, para toda función $f \in E$ podemos encontrar un valor $r \in \mathbb{R}$ tal que $|f| \leq \mathbf{r}$, pero no todas las funciones continuas en $[0, 1]$ con constantes.

- Sea A el subespacio de E formado por las funciones $f \in E$ tales que $f(1/2) = 0$, tenemos que A es un subesapcio sólido de E. Pues si $g \in E$ es tal que $|g| \leq |f|$ con $f \in A$, entonces $|g(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in [0,1]$, en particular $|g(1/2)| \leq |f(1/2)| = 0$, luego $g(1/2) = 0$.

- Sea A el subesapcio de E que contiene a todas las funciones $f \in E$ tales que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1/2]$. Entonces A es también un subespacio sólido de E.

Proposición 32. Sea E un retículo vectorial y S_1, S_2 subespacios sólidos de E. Se satisfacen las siguientes propiedades:

(I) La intersección de S_1 y S_2 es de nuevo un subespacio sólido de E.

(II) La suma algebraica $S_1 + S_2$ es un subespacio sólido de E. Más aún, si $x \in (S_1 + S_2)^+$, entonces existen $x_1 \in S_1^+$ y $x_2 \in S_2^+$ tales que $x = x_1 + x_2$.

Demostración. Para ver (I) tomamos $s \in S_1 \cap S_2$. Como $s \in S_1 \cap S_2 \subseteq S_1$, tenemos que el conjunto $\{x \in E : |x| \leq |s|\}$ está contenido en S_1. Del mismo modo vemos que está contenido en S_2, y en consecuencia tenemos que $\{x \in E : |x| \leq |s|\} \subseteq S_1 \cap S_2$.

Veamos ahora (II). Sea $s \in S_1 + S_2$ y $x \in \{x \in E : |x| \leq |s|\}$. Por definición de la suma, existen $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que $s = s_1 + s_2$. En consecuencia, podemos escribir

$$x^+ \leq |x| \leq |s| \leq |s_1| + |s_2|,$$

y por tanto, por el teorema 24, sabemos que existen $a_1, a_2 \in E^+$ tales que $x^+ = a_1 + a_2$, $a_1 \leq |s_1|$ y $a_2 \leq |s_2|$. Análogamente, tenemos que existen $b_1, b_2 \in E^+$ tales que $x^- = b_1 + b_2$, $b_1 \leq |s_1|$ y $b_2 \leq |s_2|$. Además, por ser S_1 subespacio sólido, $a_1, b_1 \in S_1$, y por tanto $a_1 - b_1 \in S_1$; análogamente, $a_2 - b_2 \in S_2$. Entonces tenemos que

$$x = x^+ - x^- = a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \in S_1 + S_2.$$

Hemos demostrado que $S_1 + S_2$ es un subespacio sólido. Por último, si $x \in (S_1 + S_2)^+$, por el mismo razonamiento, tenemos que existen $x_1 \in S_1^+$ y $x_2 \in S_2^+$ tales que $x = x_1 + x_2$. $\square$

El primer apartado de la proposición que acabamos de ver nos muestra que tiene sentido considerar el subespacio sólido generado por un subconjunto de un retículo vectorial E. Vamos a ver cómo podemos describir el subespacio sólido generado por un solo elemento:

Proposición 33. Sea E un retículo vectorial y $x_0 \in E^+$. Entonces, el menor subespacio sólido de E que contiene a x_0, y que llamamos *subespacio sólido generado por* x_0, es el siguiente:

$$\{y \in E : |y| \leq nx_0, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Sea $S := \{y \in E : |y| \leq nx_0, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$. Si $s \in S$ y $x \in E$ es tal que $|x| \leq |s|$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq |s| \leq nx_0$, por lo que $x \in S$. Con esto hemos visto que S es un subespacio sólido; además, es evidente que $x_0 \in S$. Sea S' otro subespacio sólido que contiene a x_0, veamos que necesariamente $S \subseteq S'$. Si $y \in S$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|y| \leq nx_0$, y por tanto $\frac{|y|}{n} \leq x_0$. Esto implica, puesto que S' es sólido y $x_0 \in S'$, que $\frac{|y|}{n} \in S'$, pero como S' es subespacio también $y \in S'$. Y hemos terminado la demostración. $\square$

Veamos ahora varios resultados sobre el cociente de un retículo vectorial: en primer lugar veremos cuándo y cómo el morfismo de paso al cociente va a ser morfismo de retículos vectoriales y después veremos una caracterización de los subespacios sólidos del cociente.

Lema 34. Sea F un subespacio vectorial de un retículo vectorial E. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(I) F es un subespacio sólido de E.

(II) Sea $\pi : E \longrightarrow E/F$ la aplicación de paso al cociente. El conjunto $\pi(E^+)$ es el cono positivo asociado a una estructura de retículo vectorial sobre E/F.

Demostración. La implicación (II)$\Rightarrow$(I) es inmediata, puesto que la inmagen inversa de un subespacio sólido por un morfismo de retículos vectoriales es un subespacio sólido.

Veamos la otra implicación. Supongamos que F es un subespacio sólido de E. Es claro que $\pi(E^+)+\pi(E^+) \subseteq \pi(E^+)$ y que $\lambda\pi(E^+) \subseteq \pi(E^+), \lambda \in \mathbb{R}^+$. Para ver que $\pi(E^+)\cap-\pi(E^+) = \{0\}$, tomamos un elemento $\pi(x)$ en esa intersección. Entonces, existen $x_1, x_2 \in E^+$ tales que $\pi(x) = \pi(x_1) = \pi(-x_2)$, de manera que $0 \leq x_1 \leq x_1 + x_2$, y podemos concluir que $\pi(x) = \pi(x_1) = 0$, como queríamos ver. Hemos demostrado que $\pi(E^+)$ es un cono positivo. $\square$

Proposición 35. Sea F un subespacio sólido de un retículo vectorial E y $\pi : E \longrightarrow E/F$ la aplicación de paso al cociente. Consideramos el retículo vectorial E/F con la relación de orden asociada al cono positivo $\pi(E^+)$. Sean $\pi(x)$ y $\pi(y)$ dos clases de equivalencia en E/F, son equivalentes:

(I) $\pi(x) \leq \pi(y)$

(II) Para todo $x_1 \in \pi(x)$ existe $y_1 \in \pi(y)$ tal que $x_1 \leq y_1$

(III) Para todo $x_1 \in \pi(x)$ y todo $y_1 \in \pi(y)$, existe $z \in F$ tal que $y_1 - x_1 \geq z$.

Además, teniendo esto en cuenta es sencillo ver que π es un morfismo de retículos vectoriales.

Demostración. Veamos primero cómo es la relación de orden en E/F cuyo cono positivo es $\pi(E^+)$. Dados dos elementos de E/F, $\pi(x)$ y $\pi(y)$, tendremos que $\pi(x) \leq \pi(y)$ si $\pi(x)-\pi(y) \in \pi(E^+)$, esto es, si existen $x_1 \in \pi(x)$ e $y_1 \in \pi(y)$ tales que $x_1 - y_1 \in E^+$, es decir, tales que $x_1 \leq y_1$. Visto esto es inmediato que tanto (II) como (III) implican (I). Por otra parte, si existen $x_1 \in \pi(x)$ e $y_1 \in \pi(y)$ tales que $x_1 \leq y_1$, y tomamos $x_2 \in \pi(x)$, tenemos que $x_2 = x_2 + x_1 - x_1 \leq x_2 - x_1 + y_1$. Si tomamos $y_2 := x_2 - x_1 + y_1$ resulta que $y_2 \in \pi(y)$, pues $y_2 - y_1 = x_2 - x_1 + y_1 - y_1 = x_2 - x_1 \in F$. Por tanto, tenemos también que (I) implica (II). Para terminar, tomamos ahora $x_1 \in \pi(x)$ e $y_1 \in \pi(y)$. Suponemos que se cumple (II), es decir, que existe $y_2 \in \pi(y)$ tal que $x_1 \leq y_2$. Entonces, $x_1 \leq y_2 + y_1 - y_1$, o equivalentemente, $y_1 - x_1 \geq y_1 - y_2 \in F$, esto es, se cumple (III). Con esto hemos visto que (I), (II) y (III) son equivalentes.

Nos falta ver que π es un morfismo de retículos vectoriales para la estructura de retículo definida en E/F por $\pi(E^+)$. Ahora bien, para demostrar esto basta probar que $\pi(x \vee 0) = \pi(x) \vee \pi(0)$, para todo $x \in E$. Puesto que $x \leq x \vee 0$ y $0 \leq x \vee 0$, es inmediato que $\pi(x) \leq \pi(x \vee 0)$ y que $\pi(0) \leq \pi(x \vee 0)$, luego tenemos que $\pi(x) \vee \pi(0) \leq \pi(x \vee 0)$. Si tomamos cualquier otra cota de $\pi(x)$ y $\pi(0)$ y vemos que $\pi(x \vee 0)$ es una cota menor habremos terminado. Sea $x' \in E$ tal que $\pi(x) \vee \pi(0) \leq \pi(x')$, queremos ver que $\pi(x \vee 0) \leq \pi(x')$. De $\pi(x) \leq \pi(x')$ y $\pi(0) \leq \pi(x')$ deducimos usando la caracterización (III) que existen dos elementos $z_1, z_2 \in F$ tales que $x' - x + z_1 \geq 0$ y $x' + z_2 \geq 0$. Puesto que F es sólido por hipótesis, podemos suponer que $z_1, z_2 \geq 0$, de modo que, si denotamos $z := z_1 + z_2$ y $x'' := x' + z$, podemos escribir $x'' - x \geq 0, x'' \geq 0$ y $\pi(x') = \pi(x'')$, y en consecuencia, $\pi(x') \geq \pi(x \vee 0)$, y hemos terminado la demostración. □

Lema 36. Dado un subespacio sólido F de un retículo vectorial E, existe una biyección natural entre el conjunto de los subespacios sólidos de E que contienen a F y el conjunto de los subespacios sólidos de E/F.

Demostración. Las aplicaciones imagen directa e imagen inversa del morfismo del paso al cociente establecen una correspondencia biunívoca entre los subespacios vectoriales de E que contienen a F y los subespacios vectoriales de E/F. En efecto, si consideramos el paso al cociente $\pi : E \longrightarrow E/F$ y S un subespacio de E/F, es claro que $\pi^{-1}(S)$ es un subespacio de E que contiene a F y que esto establece una correspondencia biunívoca. Concluimos la demostración del lema teniendo en cuenta que, puesto que π es un morfismo de retículos vectoriales, las aplicaciones mecionadas transforman subespacios sólidos en subespacios sólidos. □

Definición 37. Sea E un retículo vectorial y $e \in E^+$ un elemento fijo. Llamaremos *retículo de los elementos acotados* de E respecto a e al siguiente subrretículo vectorial de E:

$$E^*(e) := \{x \in E : |x| \leq ne, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Se dice que e es una *unidad débil de orden* si se satisface que

$$x = \bigvee \{y \in E^*(e) : 0 \leq y \leq x\}, \text{ para cada } x \in E^+.$$

Se dice que e es una *unidad fuerte de orden* si $E^*(e) = E$.

Es obvio que toda unidad fuerte de orden es también unidad débil. En el ejemplo 41 veremos que lo recíproco no es cierto.

Ejemplo 38.

- Consideramos el cuerpo de los números reales con su orden usual. Observemos que $\mathbb{R}^*(e) = \mathbb{R}$, para cualquier $e \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Luego un e de este tipo es unidad fuerte de orden. Por otra parte, si $e = 0$, entonces $\mathbb{R}^*(e) = 0$.
- Sea $E := \mathbb{R}^n$ con el orden usual componente a componente. Para todo $e := (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^+$ con todas las coordenadas no nulas, se tiene que $E^*(e) = E$.

  Si consideramos $e \in E^+$ con todas las coordenadas no nulas salvo la i-ésima, entonces $E^*(e) = \{(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \in E : x_i = 0\}$. Es inmediato ver la generalización a más coordenadas nulas. En este caso e no es unidad fuerte de orden, ni unidad débil de orden.
- Sea $E := \mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico. Sea $e := (e_1, e_2) \in E^+$, se tiene que $e_1 \geq 0$. Si $e_1 > 0$, entonces $E^*(e) = E$. Si $e_1 = 0$ y $e_2 > 0$, entonces $E^*(e) = \{(0, x_2) \in E : x_2 \geq 0\}$. Por último, si $e = (0, 0)$, entonces $E^*(e)$ se reduce al elemento nulo.

Siempre que no cree confusión, podremos escribir E^* en lugar de $E^*(e)$, y nos referiremos a sus elementos simplemente como "acotados". Podremos decir también "unidad débil" y "unidad fuerte" en lugar de "unidad débil de orden" y "unidad fuerte de orden".

Definición 39. Diremos que un retículo vectorial E es *arquimediano*, si dados $x, y \in E^+$, el que $nx \leq y$, para todo $n \in \mathbb{N}$, implica que $x = 0$. Equivalentemente, E será arquimediano si dados $x \in E$ e $y \in E^+, nx \leq y$ para todo n natural implica que $x \leq 0$.

Proposición 40. Sea E un retículo vectorial arquimediano y $e \in E^+$. Son equivalentes:

(I) e es una unidad débil de orden

(II) $x = \bigvee_n (x \wedge ne)$ para todo $x \in E^+$

(III) si $x \wedge e = 0$ entonces $x = 0$

Demostración. Veamos la implicación (I)⇒(II). Es claro que $x \wedge ne \leq x$ para todo n natural. Por lo tanto, solo nos falta ver que si $z \in E$ es tal que cumple la misma desigualdad, es decir, $x \wedge ne \leq z$ para todo n natural, entonces $x \leq z$. Por hipótesis tenemos que e es unidad débil de orden, luego $x = \bigvee\{y \in E^*(e) : 0 \leq y \leq x\}$. Pero, para cada uno de estos $y \in E^*$ tales que $0 \leq y \leq x$, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $y = y \wedge ne \leq x \wedge ne \leq z$, de forma que podemos concluir que $x \leq z$.

Para la implicación recíproca, (II)⇒(I), sea $z \in E^+$ tal que $0 \leq y \leq z$ para todo $y \in E^*(e)$ verificando $0 \leq y \leq x$. Entonces, si $x \wedge ne \in E^*(e)$, se tiene que $0 \leq x \wedge ne \leq z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \leq z$, y por tanto e es unidad débil de orden.

Demostramos ahora la implicación (II)$\Rightarrow$(III). Si $x \wedge e = 0$, entonces x pertenece a E^+, de manera que, por hipótesis, podemos escribirlo de la siguiente manera: $x = \bigvee_n (x \wedge ne)$. Pero $x \wedge ne \leq n(x \wedge e) = 0$, luego $x = 0$.

Por último, vamos a ver la implicación (III)$\Rightarrow$(I). Sea $z \in E^+$ tal que $0 \leq y \leq z$ para todo $y \in E^*(e), 0 \leq y \leq x$; queremos ver que $x \leq z$, es decir, que $x \wedge z = x$. Consideramos $t = (x - x \wedge z) \wedge e$. Para todo $y \in E^*(e), 0 \leq y \leq x$, se satisface lo siguente:

$$t + y \leq t + x \wedge z \leq x - x \wedge z + x \wedge z = x.$$

Como $t \in E^*(e), 0 \leq t \leq x$, obtenemos que $2t \leq x$, y por inducción, $nt \leq x$. Puesto que E es arquimediano, concluimos que $x - x \wedge z = t = 0$. $\square$

Ejemplo 41. Consideramos el espacio de Riesz $\mathcal{C}(X)$, con X un espacio topológico cualquiera. El espacio $\mathcal{C}(X)$ es un retículo vectorial arquimediano en el cual la función $\mathbf{1}$ es una unidad débil, pues, utilizando la proposición anterior, es evidente que si $f \wedge \mathbf{1} = 0$, con $f \in \mathcal{C}(X)$, entonces f es la función nula. De hecho, cualquier función constante es unidad débil en $\mathcal{C}(X)$.

Si denotamos por $\mathcal{C}^*(X)$ al conjunto formado por las funciones de $\mathcal{C}(X)$ acotadas en el sentido usual, entonces $\mathcal{C}(X)^*(\mathbf{1}) = \mathcal{C}^*(X)$. Además, si X es compacto, entonces $\mathcal{C}^*(X) = \mathcal{C}(X)$ y la función constante $\mathbf{1}$ es una unidad fuerte de $\mathcal{C}(X)$. Más concretamente, $\mathcal{C}(X)$ posee unidad fuerte si y solo si $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}^*(X)$, en cuyo caso se dice que X es *pseudocompacto*. Hay espacios pseudocompactos que no son compactos (véase [EJ]).

Lema 42. Sea E un retículo vectorial con unidad débil e. Entonces todo subespacio sólido y propio de E^* está contenido en un subespacio sólido maximal.

Demostración. Vamos a empezar viendo que la unidad débil e no puede pertenecer a ningún subespacio sólido y propio de E^*. Sea F un subespacio sólido de E^* tal que $e \in F$, veamos que entonces necesariamente $F = E^*$. Como e es unidad débil, para todo $x \in E^*$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq ne \in F$ y por tanto, puesto que F es sólido, tenemos que $x \in F$, de manera que no es propio.

Sea S un subespacio sólido y propio de E^* y sea $\mathcal{S}$ la familia de todos los subespacios sólidos y propios de E^* que contienen a S. Sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una *cadena* de $\mathcal{S}$, esto es, un subconjunto totalmente ordenado (por la relación de orden de la inclusión). Se tiene que $F = \bigcup_i F_i$ es un subespacio sólido de E^* que contiene a S y tal que $e \notin F$ y por tanto F es propio; con esto tenemos que $F \in \mathcal{S}$. Concluimos la demostración aplicando el lema de Zörn. $\square$

Corolario 43. Si E es un retículo vectorial no nulo con unidad débil de orden e, entonces en E^* existen subespacios sólidos maximales.

Demostración. Se deduce de forma inmediata del lema anterior teniendo en cuenta que $\{0\}$ es un subespacio sólido y propio de E^*. $\square$

Vemos que la demostración que hemos presentado del lema 42 falla para E, pues si F es un subespacio sólido de E con e unidad débil y que pertenezca a F, no podemos garantizar que $F = E$. En efecto, puesto que no es cierto que para todo elemento x de E se cumpla que existe un n natural tal que $|x| \leq ne \in F$, tenemos que E puede no estar contenido en F.

Lema 44. Sea E un retículo vectorial no nulo. Si los únicos subespacios sólidos que admite E son los triviales, esto es, $\{0\}$ y el propio E, entonces E es l-isomorfo a $\mathbb{R}$.

Demostración. Para ver que E es arquimediano tomamos $x, y \in E^+$ tales que $ny \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y consideramos el subespacio sólido S_y generado por y:

$$S_y = \{z \in E : |z| \leq \lambda y, \text{para algún } \lambda \in \mathbb{R}^+\}.$$

Si $x \in S_y$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $ny \leq my$ para todo $n \in \mathbb{N}$; en particular $y \leq 0$, luego $y = 0$. En el caso en el que $x \notin S_y$ tenemos que $S_y = \{0\}$ y por tanto $y = 0$. Con esto hemos probado que E es arquimediano.

Lo que tenemos que probar ahora para terminar la demostración es que E es unidimensional. Es decir, si tomamos $x_1, x_2 \in E^+$, entonces tenemos que comprobar que x_1 y x_2 son linealmente dependientes, pero esto es equivalente a que x_1 y $x_1 \vee x_2$ sean linealmente dependientes. Veamos esto último. Sean por tanto $x, x_2 \in E^+$ no nulos, e $y := x \vee x_2 \in E^+$. Tenemos que $0 < x \leq y$, y tenemos que ver que $x = \alpha y$ para algún α real. Sea $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda y \leq x\}$. Es inmediato que $0 \in \Lambda$ y que si $\lambda \in \Lambda$ y $\lambda' \leq \lambda$, entonces $\lambda' \in \Lambda$. También, puesto que E es arquimediano, vemos que existen elementos de $\mathbb{R}$ que no pertenecen a Λ, por lo que Λ estará contenido en algún intervalo de la forma $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}^+$. Ahora, consideramos $\alpha := \sup \Lambda \in \mathbb{R}^+$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $\alpha - \frac{1}{n} \in \Lambda$. Es decir, $(\alpha - \frac{1}{n})y \leq x$, luego $\alpha y - x \leq \frac{1}{n} y$. Y puesto que esto lo tenemos para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha y - x \leq 0$, o equivalentemente, $x - \alpha y \in E^+$. Ahora bien, si consideramos el subespacio sólido generado por $x - \alpha y$, por las hipótesis que tenemos solo puede ser E o $\{0\}$. Si fuera E, puesto que $x - \alpha y \in E^+$ y $y \in E$, por la proposición 33 tendría que existir un $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \leq n(x - \alpha y)$, pero entonces $(\alpha + \frac{1}{n})y \leq x$, es decir, $\alpha + \frac{1}{n} \in \Lambda$, pero eso contradice que α sea el superior de Λ. En consecuencia, el subespacio sólido generado por $x - \alpha y$ tiene que ser $\{0\}$, y esto implica que $x - \alpha y = 0$, es decir, $x = \alpha y$, como queríamos ver. □

Corolario 45. Todo subespacio sólido maximal de un retículo vectorial es un l-hiperplano.

Demostración. Sea M un subespacio sólido maximal de E. Puesto que los únicos subespacios sólidos de E que contienen a M son E y el propio M, concluimos, de acuerdo con el lema 36, que los únicos subespacios sólidos de E/M son los triviales (el total y el nulo). Según el lema anterior, E/M es l-isomorfo a $\mathbb{R}$, es decir, M es un l-hiperplano de E.

Recíprocamente, sea ahora H un l-hiperplano del retículo vectorial E. Así pues, H es un subespacio sólido de E tal que E/H es l-isomorfo a $\mathbb{R}$. Supongamos que F es un subespacio sólido de E que contiene estrictamente a H. Queremos ver que $F = E$ (probando así la maximalidad de H). Consideremos el morfismo de paso al cociente $\pi : E \longrightarrow E/H$. Observemos que $\pi(F)$ es un subespacio (sólido) no nulo de $E/H \cong \mathbb{R}$. Luego $\pi(F) = E/H$. Puesto que F contiene a H, tenemos que $F = \pi^{-1}(\pi(F)) = \pi^{-1}(E/H) = E$. $\square$

Capítulo 3

Representación de retículos vectoriales

En este capítulo seguiremos el texto de [Pul]. Vamos a empezar definiendo el espectro y el espectro acotado de un retículo vectorial. Estos espacios nos servirán para representar retículos vectoriales. El resto del capítulo está dirigido a enunciar y demostrar varios resultados, entre los que tienen particular importancia dos teoremas de representación. Primero veremos la representación de Riesz, que nos permite ver los elementos acotados de un retículo vectorial como funciones continuas que parten del espectro acotado de dicho retículo vectorial (teorema 48). Luego veremos una segunda representación que nos permitirá ver los elementos de un retículo vectorial como ciertas clases de funciones que parten del espectro (teorema 58).

Comenzamos con una definición:

Definición 46. Sea E un retículo vectorial con unidad débil e. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\operatorname{Spec} E := \{\omega : E \to \mathbb{R}, \text{ morfismo de retículos vectoriales tal que } \omega(e) = 1\},$$

$$\operatorname{Spec} E^* := \{\omega : E^* \to \mathbb{R}, \text{ morfismo de retículos vectoriales tal que } \omega(e) = 1\},$$

denominados respectivamente *espectro de E* respecto de e y *espectro acotado* de E respecto de e.

Según el corolario 45, si M es un subespacio sólido maximal de E^*, entonces E^*/M es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 1. Además, al ser M maximal, es en particular un subespacio sólido propio, y vimos en la demostración del lema 42 que la unidad débil e no puede pertenecer a M, lo cual implica que $\pi(e) > 0$. La composición

$$\begin{array}{rccccc} \omega_M : & E^* & \xrightarrow{\pi} & E^*/M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & \lambda\pi(e) & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

es un morfismo de retículos vectoriales de E^* en $\mathbb{R}$ tal que $\omega_M(e) = 1$, es decir, $\omega_M \in \text{Spec } E^*$. Así pues, tenemos una correspondencia biunívoca entre Spec E^* y el conjunto de los subespacios sólidos maximales de E^*.

Por otra parte, sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Podemos definir una norma sobre E^* de una forma natural:

$$||x||_e := \text{ínf}\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : |x| \leq \lambda e\}, \quad x \in E^*.$$

Es inmediato comprobar que $||\cdot||_e$ cumple las propiedades de una norma. Además, $||e||_e = 1$. Veamos que el inferior de la definición es de hecho un mínimo, esto es, que para todo $x \in E^*$ se tiene que $|x| \leq ||x||_e e$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, por definición de inferior tenemos que $|x| \leq (||x||_e + 1/n)e$, equivalentemente, $n(|x| - ||x||_e e) \leq e$. Por la propiedad arquimediana tenemos lo que buscábamos.

Por otra parte, vemos que cada elemento $x \in E^*$ define una función sobre Spec E^*, que denotamos $\tilde{x}$, que consiste en evaluar cada elemento $\omega \in \text{Spec } E^*$ en x:

$$\begin{array}{rccl} \tilde{x}: & \text{Spec } E^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & \tilde{x}(\omega) := \omega(x). \end{array}$$

Hemos construido así una familia de aplicaciones. Ahora, consideramos en Spec E^* la topología débil definida por E^*, entendiendo como tal la topología débil respecto a la familia de aplicaciones $\tilde{x}$. Para dicha topología, por definición, todas las aplicaciones de la familia son continuas, y por tanto tenemos de forma natural una aplicación $E^* \longrightarrow \mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$, llamada *representación de Riesz* de E^*. Esta aplicación es un morfismo de retículos vectoriales.

Además, si $x \in M$, subespacio sólido maximal de E^*, entonces, $\omega_M(x) = 0$, donde ω_M está definido como hemos visto más arriba en la correspondencia biunívoca entre Spec E^* y los subespacios sólidos maximales de E^*. De este modo vemos que el núcleo de la representación de Riesz es la intersección de todos los subespacios sólidos maximales de E^*.

Por último, las funciones de E^* separan puntos de Spec E^*, pues si dados $\omega_{M_1}, \omega_{M_2} \in$ Spec E^* correspondientes a subespacios sólidos maximales de E^* distintos, M_1, M_2, tomamos $x \in M_1 \setminus M_2$, es claro que $x(\omega_{M_1}) \neq x(\omega_{M_2})$. Por otra parte, también tenemos que Spec E^* es un subespacio topológico de $\mathbb{R}^{E^*}$.

Veamos ahora una proposición:

Proposición 47. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Entonces Spec E^* dotado de la topología débil definida por E^* es un espacio topológico compacto de Hausdorff y no vacío.

Demostración. El corolario 43 nos garantiza que existen en E^* subespacios sólidos maximales. Por tanto, gracias a la correspondencia biunívoca que hemos visto entre Spec E^* y los subespacios sólidos maximales de E^*, sabemos que Spec E^* es no vacío.

Para ver que es un espacio topológico compacto, vamos a ver que es cerrado y que las imágenes de los elementos de Spec E^* por todas las proyecciones son acotadas. En efecto, como hemos visto anteriormente, podemos considerar Spec E^* como un subespacio de $\mathbb{R}^{E^*}$, que podemos ver como un producto de copias de $\mathbb{R}$. Si Spec E^* es cerrado y las imágenes de los elementos de las proyecciones son acotadas, entonces tendremos que Spec E^* es un subespacio cerrado de un producto de intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$, es decir, un producto de compactos. Pero el teorema de Tychonoff nos dice que el producto arbitrario de compactos es compactos, luego para concluir bastará recordar que un cerrado de un compacto es un compacto.

Veamos primero que es cerrado. Para ello tomamos un elemento en la adherencia de Spec E^*, ω_0, y vamos a demostrar que $\omega_0 \in$ Spec E^*, es decir, que $\omega_0 : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal, morfismo de retículos y tal que $\omega_0(e) = 1$.

Para ver que ω_0 es lineal, tenemos que ver que para cualesquiera $x, y \in E^*$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se cumple que $\omega_0(\lambda x + \mu y) = \lambda\omega_0(x) + \mu\omega_0(y)$. Podemos encontrar aplicaciones de E^* en $\mathbb{R}$ que evaluadas en los puntos $x + y, x$ e y coincidan con la evaluación en ω_0. Por tanto, dado $\epsilon > 0$, tiene sentido considerar un abierto no vacío, Ω, de $\mathbb{R}^{E^*}$ definido de la siguiente manera:

$$\Omega := \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(\lambda x + \mu y) - \omega_0(\lambda x + \mu y)| < \epsilon\}$$

$$\cap\{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : \omega(x) - \omega_0(x)| < \epsilon\} \cap \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(y) - \omega_0(y)| < \epsilon\}.$$

Ahora bien, si $\omega \in \Omega \cap \text{Spec } E^* \neq \varnothing$, entonces:

$$|\omega_0(\lambda x + \mu y) - (\lambda\omega_0(x) + \mu\omega_0(y))| =$$

$$|\omega_0(\lambda x + \mu y) - (\lambda\omega_0(x) + \mu\omega_0(y)) - \omega(\lambda x + \mu y) + (\lambda\omega(x) + \mu\omega(y))|,$$

donde, aprovechando que ω es lineal, hemos sumado y restado $\omega(\lambda x + \mu y) = \lambda\omega(x) + \mu\omega(y)$. Aplicando la desigualdad triangular, tenemos que

$$|\omega_0(\lambda x + \mu y) - (\lambda\omega_0(x) + \mu\omega_0(y))| \leq$$

$$|\omega_0(\lambda x + \mu y) - \omega(\lambda x + \mu y)| + |\lambda\omega_0(x) - \lambda\omega(x)| + |\mu\omega_0(y) - \mu\omega(y)|$$

$$\leq (1 + |\lambda| + \mu|)\epsilon.$$

Puesto que esto se cumple para cualquier $\epsilon > 0$, podemos concluir que $\omega_0(\lambda x+\mu y) = \lambda\omega_0(x)+\mu\omega_0(y)$, como queríamos ver.

De forma similar, para ver que ω_0 es morfismo de retículos, tomamos el siguiente abierto no vacío:

$$\Pi := \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(x) - \omega_0(x)| < \epsilon/2\} \cap \{\omega \in \mathbb{R}^{E^*} : |\omega(|x|) - \omega_0(|x|)| < \epsilon/2\},$$

y tomando $\omega \in \Pi \cap \text{Spec } E^* \neq \varnothing$, sumando y restando $\omega(|x|)$ y aplicando la desigualdad triangular y que ω es morfismo de retículos, tenemos lo siguiente:

$$|\omega_0(|x|) - |\omega_0(x)|| \leq |\omega_0(|x|) - \omega(|x|)| + ||\omega_0(x)| - \omega(|x|)| \leq \epsilon/2 + ||\omega_0(x)| - |\omega(x)|| < \epsilon.$$

Puesto que esto se da para $\epsilon > 0$ arbitrario, esto implica que $\omega_0(|x|) = |\omega_0(x)|$ y por tanto, por la proposición 27, ω_0 es morfismo de retículos.

Para terminar de ver que $\omega_0 \in \text{Spec } E^*$, falta ver que $\omega_0(e) = 1$. Dado que la proyección

$$\begin{array}{rccl} \pi_e : & \mathbb{R}^{E^*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & \pi_e(\omega) := \omega(e). \end{array}$$

es continua, se tiene que

$$\pi_e(\overline{\text{Spec } E^*}) \subseteq \overline{\pi_e(\text{Spec } E^*)} = \overline{\{\omega(e) : \omega \in \text{Spec } E^*\}} = \{1\}.$$

Es decir, $\omega_0(e) = 1$. Con esto ya tenemos que Spec E^* es cerrado.

Por último, para terminar la demostración, veamos que las imágenes de los elementos de Spec E^* por todas las proyecciones son acotadas. Dado $x \in E^*$, consideramos la proyección

$$\begin{array}{rccl} \pi_x : & \mathbb{R}^{E^*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & \pi_x(\omega) := \omega(x). \end{array}$$

Por la definición de retículo de los elementos acotados de E respecto de e, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq ne$, y por tanto, para todo elemento $\omega \in \text{Spec } E^*$ se tiene que $|\omega(x)| = \omega(|x|) \leq \omega(ne) = n\omega(e) = n$.

□

Gracias a esta proposición tenemos definida la norma del supremo en $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$:

$$\begin{array}{rccl} ||\cdot||_\infty : & \mathcal{C}(\text{Spec } E^*) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & ||f||_\infty := \sup\{|f(\omega)| : \omega \in \text{Spec } E^*\}. \end{array}.$$

Esto nos permite decir algo más sobre la representación de Riesz:

Teorema 48. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Entonces E^* es isométrico a su imagen por la representación de Riesz $E^* \longrightarrow \mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$. Como consecuencia, dicha aplicación es inyectiva, esto es, la intersección de todos los subespacios sólidos maximales de E^* es nula.

Demostración. Queremos ver que, para todos los elementos $x \in E^*$, se cumple que $||x||_e = ||\tilde{x}||_\infty$.

Sea $x \in E^*$ no nulo. Recordamos que $|x| \le ||x||_e e$. Por tanto, para todo $\omega \in$ Spec E^* se tiene que $|\omega(x)| = \omega(|x|) \le \omega(||x||_e e) = ||x||_e$, y en consecuencia, $||\tilde{x}||_\infty \le ||x||_e$.

Sea $\gamma := \sup\{\beta \in \mathbb{R} : \beta e \le |x|\} \neq \varnothing$. Por la propiedad arquimediana, vemos que el supremo que acabamos de definir es en realidad un máximo, esto es, se tiene que $\gamma e \le |x|$.

Si $\gamma = ||x||_e$, entonces $|x| \le ||x||_e \le |x|$, es decir, $|x| = ||x||_e e$, y por tanto, para todo $\omega \in$ Spec E^*, se cumple que $\omega(|x|) = \omega(||x||_e e) = ||x||_e$. Con esto concluimos que $||x||_e = ||\tilde{x}||_\infty$ y en este caso hemos terminado.

Suponemos ahora que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma < \lambda < ||x||_e$, lo cual, por las definiciones de γ y de $||\cdot||_e$ implica respectivamente que $\lambda e \not\le |x|$ y $|x| \not\le \lambda e$, o equivalentemente, $(\lambda e - |x|)^+ > 0$ y $(\lambda e - |x|)^- > 0$. Argumentando como en la demostración del lema 44, obtenemos que $(\lambda e - |x|)^- \notin \mathcal{S}_{(\lambda e - |x|)^+} := \{z \in E^* : |z| \le \mu(\lambda e - |x|)^+$ para algún $\mu \in \mathbb{R}^+\}$. Por tanto, $\mathcal{S}_{(\lambda e - |x|)^+}$ es un subespacio sólido propio de E^* y, por el lema 42, existe un subespacio sólido maximal en E^*, M que lo contiene. Por la correspondencia biunívoca entre los elementos de Spec E^* y los subespacios sólidos maximales de E^*, tenemos que $M = \ker(\omega)$, para algún $\omega \in$ Spec E^*. Entonces,

$$\omega(\lambda e - |x|) = \omega((\lambda e - |x|)^+ - (\lambda e - |x|)^-) = -\omega((\lambda e - |x|)^-) \le 0,$$

lo cual implica, aplicando la linealidad de ω y despejando, que $\omega(|x|) \ge \lambda$. En consecuencia, $||\tilde{x}||_\infty \ge \lambda$, para todo λ tal que $\gamma < \lambda < ||x||_e$, por lo cual, deducimos que $||\tilde{x}||_\infty \ge ||x||_e$, y ya tenemos que $||\tilde{x}||_\infty = ||x||_e$.

□

Gracias a este teorema, podemos considerar E^* como subrretículo vectorial de $\mathcal{C}$(Spec E^*). Vamos a ir profundizando y diciendo más de E^* en este sentido. Veamos unas definiciones:

Definición 49. Sea E un retículo vectorial arquimediano y $e \in E^+$.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}_n$ en E es *e-uniformemente de Cauchy*, si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero positivo ν, tal que si $n, m \ge \nu$, entonces, $|x_n - x_m| \le \epsilon e$.

Una sucesión $\{x_n\}_n$ en E se dice que es *e-uniformemente convergente* si existe un $x \in E$ que satisfaga lo siguiente: para todo $\epsilon > 0$ existe un entero positivo ν tal que si $n \ge \nu$, entonces $|x_n - x| \le \epsilon e$.

Un subconjunto D de E se dice que es *e-uniformemente cerrado*, si cada sucesión e-uniformemente de Cauchy de D es e-uniformemente convergente a un elemento de D. Se dice que un subconjunto D de E es *e-uniformemente denso*, si cada elemento de E es límite e-uniforme de una sucesión de D.

En la situación de estas definiciones, es inmediato comprobar que si E es e-uniformemente cerrado, entonces se cumple que si e es unidad débil, E^* es también e-uniformemente cerrado.

Ejemplo 50. Sea X un espacio topológico. Dado $r \in \mathbb{R}^+$ no nulo, consideramos la función constante r, es decir, $\mathbf{r}$, que es continua. En $\mathcal{C}(K)$, es sencillo comprobar que las nociones "sucesión $\mathbf{r}$-uniformemente de Cauchy", "sucesión $\mathbf{r}$-uniformemente convergente", "conjunto $\mathbf{r}$-uniformemente cerrado" y "conjunto r-uniformemente denso", coinciden respectivamente con las nociones usuales de "sucesión uniformemente de Cauchy", "sucesión uniformemente convergente", "conjunto uniformemente cerrado" y "conjunto uniformemente denso".

Si X es compacto y de Hausdorff, consideramos en $\mathcal{C}(X)$ la topología definida por la norma del supremo. En este caso las nociones anteriores coinciden respectivamente con "sucesión de Cauchy", "sucesión convergente", "conjunto cerrado" y "conjunto denso" para la topología referida. Sea F una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$ que separa puntos de X y que contiene a las funciones constantes, entonces, por el teorema de Stone-Weierstrass, F es uniformemente denso en $\mathcal{C}(X)$.

Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Hemos visto que el teorema 48 nos permite considerar E^* como subrretículo vectorial de $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$ y hemos visto al principio de este capítulo que separa puntos de Spec E^*. Es inmediato, además, ver que E^* contiene a las funciones constantes, en efecto, dado $r \in \mathbb{R}$, el elemento $re \in E^*$ representado como función sobre Spec E^* por la representación de Riesz es la función constante $\mathbf{r}$. Por lo tanto, E^* es uniformemente denso en $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$.

Teorema 51. (de Caracterización). Sea E un retículo vectorial arquimediano. E es l-isomorfo a $\mathcal{C}(K)$ para algún espacio topológico compacto Hausdorff K, si y solo si, existe una unidad fuerte e en E para la cual E es e-uniformemente cerrado.

Demostración. Supongamos que K es un espacio topológico compacto Hausdorff tal que $\mathcal{C}(K)$ es l-isomorfo a E. La función constante $\mathbf{1}$ es una unidad fuerte en $\mathcal{C}(K)$, y tal y como hemos dicho en el ejemplo 50, tenemos que $\mathcal{C}(K)$ es $\mathbf{1}$-uniformemente cerrado. Puesto que E y $\mathcal{C}(K)$ son l-isomorfos, tenemos una de las implicaciones.

Para el recíproco, suponemos que E es un retículo vectorial arquimediano en el cual existe una unidad fuerte e tal que E es e-uniformemente cerrado, esto es, $E = E^*$, visto como subrretículo de $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$, es $\mathbf{1}$-uniformemente cerrado. Puesto que E^* es $\mathbf{1}$-uniformemente denso en $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$, tenemos que $E^* = \mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$. Es decir, hemos demostrado que la representación de Riesz $E = E^* \longrightarrow \mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$ es un l-isomorfismo. $\square$

Sabemos que E^* separa puntos de $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$. Vamos a ver que también S^1-separa cerrados de $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$, un tipo de separación más fuerte. Esto va a ser consecuencia de que E^* es uniformemente denso en $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$.

Definición 52. Sea X un espacio topológico y sea E un subconjunto de $\mathcal{C}(X)$. Diremos que E S^1-separa cerrados de X si para cada par de cerrados disjuntos no vacíos F, G de X, existe $h \in E, 0 \leq h \leq 1$, tal que $h(F) = 0$ y $h(G) = 1$.

Corolario 53. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Entonces E^*S^1-separa cerrados de Spec E^*.

Demostración. Sean F, G cerrados disjuntos y no vacíos de Spec E^*. Por el lema de Urysohn, existe $f \in \mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$ tal que $f(\omega) = -1$ si $\omega \in F$ y $f(\omega) = 2$ si $\omega \in G$. Por otra parte, como E^* es uniformemente denso en $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$, existe $x \in E^*$ tal que $||x - f||_\infty \leq 1$, esto es $-1 \leq \omega(x) - f(\omega) \leq 1$ para todo $\omega \in \text{Spec } E^*$. Ahora bien, si $\omega \in F$, entonces $-2 \leq \omega(x) \leq 0$; y si $\omega \in G$, entonces $1 \leq \omega(x) \leq 3$. Sea $y := 0 \vee (x \wedge e) \in E^*$. Es claro que $\tilde{y}(\omega) = \omega(y) = 0$ si $\omega \in F$ y $\tilde{y}(\omega) = \omega(y) = 1$ si $\omega \in G$, y hemos terminado la demostración. □

Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Hemos visto en este capítulo cómo Spec E^*, dotado la topología débil definida por E^*, es un espacio topológico no vacío. Surgía entonces de manera natural, desde E^* en $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$, la aplicación que hemos llamado representación de Riesz:

$$\begin{array}{rcllll} E^* & \longrightarrow & \mathcal{C}(\text{Spec } E^*) & & & \\ x & \longmapsto & \tilde{x} : \text{Spec } E^* & \longrightarrow & \mathbb{R} & . \\ & & \qquad \omega & \longmapsto & \tilde{x}(\omega) := \omega(x). & \end{array}$$

Hemos visto que esta aplicación es un morfismo inyectivo de retículos vectoriales inyectivo, que E^* es uniformemente denso en $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$ y que separa puntos y S^1-separa cerrados de Spec E^*. A partir de ahora para cada $x \in E^*$, denotaremos su imagen por la representación de Riesz de la misma manera, es decir, identificaremos x con $\tilde{x}$.

De forma análoga, consideramos Spec E con la topología débil definida por E. Con una demostración como la de la proposición 47, vemos que Spec E es un cerrado de $\mathbb{R}^E$. Podemos definir de nuevo la *representación de Riesz*, esta vez de E en $\mathcal{C}(\text{Spec } E)$, que sigue siendo morfismo de retículos vectoriales. Sin embargo, no vamos a poder decir todo lo que teníamos para E^*. Spec E puede ser vacío y la representación de Riesz no inyectiva. Además, aun siendo inyectiva y E e-uniformemente cerrado, E puede ser distinto de $\mathcal{C}(\text{Spec } E)$.

Aunque la situación sea distinta, podremos dar resultados interesantes. Vamos a ver que cada retículo vectorial arquimediano E con unidad débil e es l-isomorfo a un retículo vectorial de funciones continuas de Spec E^* en $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Este retículo vetorial será un subrretículo de $\mathcal{D}(\text{Spec } E^*)$, que ahora definimos:

Definición 54. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Sea $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ la recta ampliada. Consideramos las funciones $f : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, siendo Y un subconjunto de Spec E^* en el que f es continua y además $R(f)$ es denso en Spec E^*, donde $R(f) := \{\omega \in Y : f(\omega) \in \mathbb{R}\}$. Tomamos ahora en el conjunto de estas funciones la siguiente relación de equivalencia: f_1 y f_2 están relacionadas si coinciden en un abierto denso de $R(f_1) \cap R(f_2)$. A este espacio cociente lo denotamos $\mathcal{D}(\text{Spec } E^*)$ y a sus elementos los denominaremos *funciones extendidas*.

Es claro que $E^* \subseteq \mathcal{C}(\text{Spec } E^*) \subseteq \mathcal{D}(\text{Spec } E^*)$. Vamos a ver que $\mathcal{D}(\text{Spec } E^*)$ es retículo vectorial. Lo primero que tenemos que notar es que el que dos funciones f_1, f_2 definidas respectivamente en Y_1, Y_2 coincidan en un abierto denso de $R(f_1) \cap R(f_2)$ es equivalente a que coincidan en todo $R(f_1) \cap R(f_2)$, pues son continuas y con llegada en un Hausdorff. La relación de orden que vamos a considerar es la siguiente: dadas dos clases de equivalencia $[f_1], [f_2] \in \mathcal{D}(\text{Spec } E^*)$, entonces $[f_1] \leq [f_2]$ si $f_1 \leq f_2$ punto a punto en $R(f_1) \cap R(f_2)$. Con lo que hemos visto es inmediato que esta relación de orden está bien definida. Además, tenemos que $f_1 \leq f_2$ en $R(f_1) \cap R(f_2)$ es equivalente a que $f_1 \leq f_2$ en un abierto denso de $R(f_1) \cap R(f_2)$. Entonces tenemos que $[f_1] \wedge [f_2] = [f_1|_{R(f_1)\cap R(f_2)} \wedge f_2|_{R(f_1)\cap R(f_2)}]$ y $[f_1] \vee [f_2] = [f_1|_{R(f_1)\cap R(f_2)} \vee f_2|_{R(f_1)\cap R(f_2)}]$ están bien definidos y pertenecen a $\mathcal{D}(\text{Spec } E^*)$, por lo que tenemos que este espacio es un retículo. Por otra parte, la suma $[f_1] + [f_2] = [f_1|_{R(f_1)\cap R(f_2)} + f_2|_{R(f_1)\cap R(f_2)}]$ y el producto $\lambda[f_1] = [\lambda f_1]$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ nos dan la estructura de espacio vectorial. Es sencillo ver que ambas estructuras son compatibles, por lo que tenemos que $\mathcal{D}(\text{Spec } E^*)$ es un retículo vectorial.

Vamos a probar ahora unos resultados necesarios para llegar a ver que cada retículo vectorial arquimediano E con unidad débil e es l-isomorfo a un subrretículo de $\mathcal{D}(\text{Spec } E^*)$. Previamente, una cuestión de notación. Dados x, y, z elementos de un retículo vectorial, cuando $x \leq z$, se cumple la igualdad $(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$, que en general no es cierta. En efecto, si $x \leq z$, entonces $x \wedge z = x$, y haciendo uso de la última propiedad del lema 23 tenemos que $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = x \vee (y \wedge z)$ En este caso, utilizaremos la expresión $x \vee y \wedge z$.

Lema 55. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Dados $x \in E, \omega \in$ Spec E^*, tenemos las siguientes equivalencias:

(i) $\omega(-e \vee x \wedge e) \geq 0$ si y solo si $\sup_n \omega(x^- \wedge ne) = 0$.

(ii) $\omega(-e \vee x \wedge e) \leq 0$ si y solo si $\sup_n \omega(x^+ \wedge ne) = 0$.

Demostración. (i) Si $\omega(-e \vee x \wedge e) \geq 0$, entonces el inferior de $\omega(-e \vee x \wedge e)$ y 0 será 0. Pero, puesto que ω es morfismo y $e \geq 0$ por definición, sabemos que

$$\omega(-e \vee x \wedge e) \wedge 0 = \omega(-e \vee x \wedge e) \wedge \omega(0) = \omega((-e \vee x \wedge e) \wedge 0) = \omega(-e \vee x \wedge 0);$$

luego tenemos que $\omega(-e \vee x \wedge 0) = 0$. Además, por la primera de las propiedades del lema 23, $x \wedge 0 = -(-x \vee 0)$, pero $-x \vee 0 =: x^-$. Por lo que deducimos que $\omega(-e \vee -x^-) = 0$, y volviendo a utilizar la misma propiedad del lema 23, nos queda que $\omega(-(e \wedge x^-)) = 0$, y en consecuencia $\omega(e \wedge x^-) = 0$. Ahora bien, dado $n \in \mathbb{N}$, por la segunda propiedad del corolario 25, $n(x^- \wedge e) = nx^- \wedge ne \geq x^- \wedge ne$, donde la última desigualdad queda justificada por ser $x^- \geq 0$. En consecuencia, $0 \leq \omega(x^- \wedge ne) \leq n\omega(x^- \wedge e) = 0$, y por tanto $\omega(x^- \wedge ne) = 0$. Este razonamiento es reversible, por lo que hemos visto la equivalencia.

(II) Análogamente, $\omega(-e \vee x \wedge e) \leq 0$ implica que $\omega(-e \vee x \wedge e) \vee 0 = 0$. Puesto que

$$\omega(-e \vee x \wedge e) \vee 0 = \omega((-e \vee x \wedge e) \vee 0) = \omega(o \vee x \wedge -e) = \omega(x^+ \wedge e),$$

tenemos que $\omega(x^+ \wedge e) = 0$. Y desde este punto el razonamiento es idéntico al del apartado anterior.

□

Definición 56. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Llamaremos *cocero* de f al subconjunto de X definido como $\mathrm{coz}(f) := \{\omega \in X : f(\omega) \neq 0\}$.

Lema 57. Sea X un conjunto y E un subrretículo vectorial de $\mathbb{R}^X$ que contiene a las funciones constantes. Se cumple que $\{\mathrm{coz}(x) : x \in E\}$ es una base de abiertos para la topología débil definida en X por E.

Demostración. Sabemos por la proposición 19 que el conjunto $\{x^{-1}(a,b) : x \in E, a, b \in \mathbb{R}\}$ es una subbase para la topología débil definida en X por E. Ahora bien,

$$x^{-1}(a,b) = \{\omega \in X : x(\omega) \in (a,b)\} = \{\omega \in X : x(\omega) - a > 0 \text{ y } b - x(\omega) > 0\}.$$

Dado que E es un subrretículo de $\mathbb{R}^X$ que contiene a las funciones constantes, podemos definir $(x-a), (b-x) \in E$ como $(x-a)(\omega) = x(\omega) - a$ y $(b-x)(\omega) = b - x(\omega)$ respectivamente, $\omega \in X$. Escribimos que

$$x^{-1}(a,b) = \{\omega \in X : (x-a)^+(\omega) \neq 0 \text{ y } (b-x)^+(\omega) \neq 0\} = \{\omega \in X : [(x-a)^+ \wedge (b-x)^+](\omega) \neq 0\},$$

pero este último conjunto es $\mathrm{coz}((x-a)^+ \wedge (b-x)^+)$. Por otra parte, dados $x_1, ...x_n \in E$, es inmediato que $\mathrm{coz}(x_1) \cap ... \cap \mathrm{coz}(x_n) = \mathrm{coz}(|x_1|) \cap ... \cap \mathrm{coz}(|x_n|) = \mathrm{coz}(|x_1| \wedge ... \wedge |x_n|)$. Debido a esto, tenemos que $\mathrm{coz}((x-a)^+ \wedge (b-x)^+) = \mathrm{coz}((x-a)^+) \cap \mathrm{coz}((b-x)^+)$. De esta menera vemos que $\{\mathrm{coz}(x) : x \in E\}$ genera todos los elementos de$\{x^{-1}(a,b) : x \in E, a, b \in \mathbb{R}\}$, por lo que es de hecho una base de abiertos como queríamos ver. □

Sea ahora E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Como adelantamos, queremos ver que E es l-isomorfo a un subrretículo de $\mathcal{D}(\mathrm{Spec}\ E^*)$. Por ello, buscamos una aplicación de E en $\mathcal{D}(\mathrm{Spec}\ E^*)$. Para cada elemento $x \in E$, vamos a definir una aplicación $\hat{x} : \mathrm{Spec}E^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, y luego consideraremos su clase de equivalencia. Si $x \in E^+$, definimos $\hat{x}$ de la siguiente manera:

$$\hat{x}(\omega) := \sup_n \omega(x \wedge ne) \in [0, +\infty],\ \omega \in \mathrm{Spec}E^*.$$

Esto está bien definido, pues dado que E es arquimediano y hemos tomado $x \in E^+$, se cumple, por la proposición 40 que $x = \bigvee_n (x \wedge ne)$. Además, si $x \in (E^*)^+$, entonces $\hat{x} = x$, esto es,

$\hat{x}(\omega) = \omega(x)$, para todo $\omega \in \mathrm{Spec}E^*$. Esto ocurre porque en este caso, por definición, existe un n_0 natural tal que podemos acotar $x \leq n_0 e$, y en consecuencia, para todo $n \geq n_0$, se cumple que $x = x \wedge ne$. Gracias a esto, podremos ver más adelante, en el teorema 59, que Spec E se puede considerar como un subespacio topológico de Spec E^*.

Si tomamos un elemento cualquiera, $x \in E$, definimos $\hat{x}$ como la diferencia:

$$\hat{x} := \widehat{x^+} - \widehat{x^-}.$$

Puesto que $x^+, x^- \in E^+$, los elementos $\widehat{x^+}$ y $\widehat{x^-}$ están bien definidos. Además, no sé puede dar la situación de que la suma sea $+\infty - \infty$, pues por el lema 55, $\widehat{x^+}(\omega)$ y $\widehat{x^-}(\omega)$ no pueden ser no nulos ambos, pues en ese caso tendríamos que el valor $\omega(-e \vee x \wedge e)$ sería estrictamente mayor que 0 y estrictamente menor que 0, lo cual es absurdo. Y esto ocurre para todo $\omega \in \mathrm{Spec}E^*$, por lo que tenemos garantía de que $\hat{x}$ está bien definida en todo caso. Veamos ahora el resultado que veníamos anticipando:

Teorema 58. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. El conjunto $\hat{E} := \{[\hat{x}] : x \in E\}$ es espacio vectorial y subrretículo de $\mathcal{D}(\mathrm{Spec}\ E^*)$. Además, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \hat{E} \\ x & \longmapsto & [\hat{x}] \end{array},$$

es un l-isomorfismo.

Demostración. Para ver que $\hat{E}$ es subrretículo vectorial de $\mathcal{D}(\mathrm{Spec}\ E^*)$, veamos en primer lugar que $\hat{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathrm{Spec}\ E^*)$. Dado $x \in E$, es evidente, por cómo la hemos definido, que $\hat{x}$ es una aplicación de Spec E^* en $\overline{\mathbb{R}}$. Por tanto, nos falta ver que es continua y que $R(\hat{x}) = \{\omega \in \mathrm{Spec}\ E^* : \hat{x}(\omega) \in \mathbb{R}\}$ es denso en Spec E^*. Puesto que $\hat{x} := \widehat{x^+} - \widehat{x^-}$, basta que probemos esto para $x \in E^+$.

Sea $x \in E^+$, para probar que $\hat{x}$ es continua hay que ver que las imágenes inversas de abiertos de $\overline{\mathbb{R}}$ son abiertos en Spec E^*. Basta demostrar, por tanto, que dados $a, b \in \mathbb{R}$, los conjuntos

$$A := \hat{x}^{-1}((a, +\infty]) = \{\omega \in \mathrm{Spec}\ E^* : \hat{x}(\omega) > a\} \text{ y}$$

$$B := \hat{x}^{-1}([-\infty, b)) = \{\omega \in \mathrm{Spec}\ E^* : \hat{x}(\omega) < b\}$$

son abiertos. Ahora bien, por la definición de $\hat{x}$ para $x \in E^+$, podemos escribir que $A = \bigcup_n A_n$, donde $A_n := \{\omega \in \mathrm{Spec}\ E^* : \omega(x \wedge ne) > a\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero $x \wedge ne \leq ne$, es decir, $x \wedge ne \in (E^*)^+ \subseteq E^*$. Por tanto, puesto que A_n es la contraimagen de un abierto por una aplicación que evalúa cada $\omega \in \mathrm{Spec}\ E^*$ en un elemento de E^*, por definición de la topología débil en Spec E^*, tenemos que A_n es abierto en Spec E^*. En consecuencia, A es abierto por ser unión numerable de abiertos. Por otra parte, si probamos que $B = \{\omega \in \mathrm{Spec}\ E^* : \omega(x \wedge be) < b\}$, puesto que $x \wedge be \leq be \leq ne$ para algún n natural, es decir $x \wedge be \in E^*$, entonces, por el mismo motivo que para los A_n, tendremos que B es abierto de Spec E^*. Ahora bien, si $\omega \in B$, esto es, si $\hat{x}(\omega) < b$, para cualquier n natural tenemos que

$$b > \omega(x \wedge ne) = \omega(x \wedge ne) \wedge b = \omega(x \wedge ne \wedge be).$$

En particular, esto será cierto para $n_0 \geq b$, en cuyo caso, $b > \omega(x \wedge ne \wedge be) = \omega(x \wedge be)$, como queríamos ver. Para ver la otra contención tomamos $\omega \in$ Spec de manera que $\omega(x \wedge be) < b$. Si tomamos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(x \wedge be) < \lambda < b$ y n natural con $n \geq \lambda$, entonces es claro que

$$\lambda > \omega(x \wedge be) \geq \omega(x \wedge \lambda e) = \omega(x \wedge ne \wedge \lambda e) = \omega(x \wedge ne) \wedge \lambda = \omega(x \wedge ne).$$

De manera que $\hat{x}(\omega) \leq \lambda < b$, como buscábamos. Ya hemos demostrado que $\hat{x}$ es continua.

Veamos ahora que $R(\hat{x})$ es denso en Spec E^*. Como podemos ver E^* como un subrretículo de $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$ que contiene a las funciones constantes, por el lema 57, sabemos que $\{\text{coz}(y) : y \in E^*\}$ es base de la topología que estamos considerando en Spec E^*. Por tanto, para ver que $R(\hat{x})$ es denso en Spec E^*, basta ver que en cualquier abierto de esta base hay un elemento de $R(\hat{x})$, o de otro modo, sea $y \in (E^*)^+$ tal que $\text{coz}(y) \cap R(\hat{x}) = \varnothing$, queremos probar que $\text{coz}(y) = \varnothing$, esto es, que y se anula en todos los puntos. Puesto que estamos considerando $x \in E^+$, podemos escribir:

$$R(\hat{x}) = \{\omega \in \text{Spec } E^* : \hat{x}(\omega) < \infty\} = \bigcup_n \{\omega \in \text{Spec } E^* : \hat{x}(\omega) < n\}.$$

El hecho de que $\text{coz}(y) \cap R(\hat{x}) = \varnothing$ implica que si dado $\omega \in \text{Spec } E^*$ se tiene que $\hat{x}(\omega) < \infty$, entonces $y(\omega) := \omega(y) = 0$. En consecuencia, lo que tenemos que probar es que si dado $\omega \in \text{Spec } E^*$ se tiene que $\hat{x}(\omega) = \infty$, entonces $\omega(y) = 0$. Fijamos ahora un natural n_0 tal que $n_0 \geq ||y||_\infty$. En este caso, la familia $\{\omega \in \text{Spec } E^* : \omega(x \wedge ne) > n_0^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento por abiertos creciente del compacto $K := \{\omega \in \text{Spec } E^* : \hat{x}(\omega) = \infty\}$, y en consecuencia existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \{\omega \in \text{Spec } E^* : \omega(x \wedge ne) > n_0^2\}$. Teniendo esto en cuenta, si $\hat{x}(\omega) = \infty$, entonces

$$\omega(n_0 y) = n_0 \omega(y) \leq n_0 \omega(||y||_\infty e) = n_0 ||y||_\infty \leq n_0^2 < \omega(x \wedge ne).$$

Como E^* es subrretículo de $\mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$, entonces $\omega(n_0 y) < \omega(x \wedge ne)$ implica que $n_0 y < x \wedge ne$. Puesto que $x \wedge ne \leq x$, hemos probado que $n_0 y < x$ para todo $n_0 \geq ||y||_\infty$, y puesto que para naturales menores es obvio que se cumple, tenemos que $ny < x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia, $y = 0$, como queríamos ver. Con esto hemos terminado de demostrar que dado $x \in E$, entonces $\hat{x}$ es una aplicación de Spec E^* en $\overline{\mathbb{R}}$ continua y tal que $R(\hat{x})$ es denso en Spec E^*. Y en consecuencia, $[\hat{x}] \in \mathcal{D}(\text{Spec } E^*)$, esto es, hemos probado que $\hat{E} \subseteq \mathcal{D}(\text{Spec } E^*)$.

Para ver que $\hat{E}$ es espacio vectorial tenemos que ver que es cerrado para sumas y productos por escalares. Lo que vamos a probar es que dados $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $[\widehat{x+y}] = [\hat{x}] + [\hat{y}]$

y $[\widehat{\lambda x}] = \lambda[\hat{x}]$. De esta manera, además de ver que $\hat{E}$ es espacio vectorial, tendremos también que la aplicación de E en $\hat{E}$ que manda cada $x \in E$ a $[\hat{x}]$ es lineal, con lo que estaremos más cerca de ver que es un l-isomorfismo. Empecemos con la suma y restringiendonos a los elementos del cono positivo: sean $x, y \in E^+$, y $\omega \in \mathrm{Spec}E^*$ tenemos que

$$\omega(x \wedge ne) + \omega(y \wedge ne) \leq \omega((x+y) \wedge 2ne) \leq \omega(x \wedge 2ne) + \omega(y \wedge 2ne),$$

y tomando superiores nos queda:

$$\hat{x}(\omega) + \hat{y}(\omega) \leq \widehat{x+y}(\omega) \leq \hat{x}(\omega) + \hat{y}(\omega),$$

luego $\widehat{x+y}(\omega) = \hat{x}(\omega) + \hat{y}(\omega)$. Y en consecuencia en este caso ya tenemos que $[\widehat{x+y}] = [\hat{x}] + [\hat{y}]$. Por otra parte, es inmediato ver que $\widehat{x^+} = \hat{x}^+$:

$$\hat{x}^+(\omega) = (\hat{x} \vee 0)(\omega) = \hat{x}(\omega) \vee 0 = (\sup_n \omega(x \wedge ne)) \vee 0 =$$

$$= \sup_n (0 \vee \omega(x \wedge ne)) = \sup_n \omega(0 \vee x \wedge ne) = \sup_n \omega(x^+ \wedge ne) = \widehat{x^+}(\omega).$$

De la misma manera se comprueba que $\widehat{x^-} = \hat{x}^-$, por lo que

$$|\hat{x}| = \hat{x}^+ - \hat{x}^- = \widehat{x^+} - \widehat{x^-} = \widehat{x^+ - x^-} = \widehat{|x|},$$

donde hemos utilizado la linealidad de la aplicación para los elementos de E^+. Sean ahora $x, y \in E$, tenemos definido en todo el Spec E^* el elemento $\widehat{x+y}$, pero no conocemos claramente qué ocurre con $\hat{x} + \hat{y}$. Vamos a limitarnos al abierto denso $R(\hat{x}) \cap R(\hat{y})$. En primer lugar, si $\omega \in R(\hat{x}) \cap R(\hat{y})$, además de ser finitos los valores $\hat{x}(\omega)$ y $\hat{y}(\omega)$, también lo serán $\hat{x}^+(\omega), \hat{x}^-(\omega), \hat{y}^+(\omega), \hat{y}^-(\omega), \widehat{x+y}^+(\omega)$ y $\widehat{x+y}^-(\omega)$, por ejemplo:

$$\widehat{x+y}^+(\omega) = (\widehat{x+y})^+(\omega) \leq |\widehat{x+y}|(\omega) \leq |\widehat{x| + |y}|(\omega) = \widehat{|x|} + \widehat{|y|}(\omega) < \infty.$$

En consecuencia, podemos escribir lo siguiente:

$$\widehat{x+y}(\omega) = x^+ - \widehat{x^- + y^+} - y^-(\omega) = \widehat{x^+}(\omega) - \widehat{x^-}(\omega) + \widehat{y^+}(\omega) - \widehat{y^-}(\omega) =$$

$$= \hat{x}^+(\omega) - \hat{x}^-(\omega) + \hat{y}^+(\omega) - \hat{y}^-(\omega) = \hat{x}(\omega) + \hat{y}(\omega).$$

Con esto tenemos que $\hat{x} + \hat{y}$ está bien definida para todo $\omega \in R(\hat{x}) \cap R(\hat{y})$, y además, coincide con $\widehat{x+y}$ en dicho abierto denso. Por tanto, tomando clases de equivalencia, tenemos que $[\widehat{x+y}] = [\hat{x}] + [\hat{y}]$. El producto por escalar se ve de manera análoga, luego podemos concluir que $\hat{E}$ es espacio vectorial y la aplicación $x \longmapsto [\hat{x}]$ es lineal.

Ya hemos probado que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \hat{E} \\ x & \longmapsto & [\hat{x}] \end{array}$$

es lineal y que $|\hat{x}| = \widehat{|x|}$ para todo $x \in E$, por lo que $\hat{E}$ es un retículo vectorial, y en esta situación por la proposición 27, tenemos que la aplicación es morfismo de retículos vectoriales. Por tanto, para ver que $E \longrightarrow \hat{E}$ es un l-isomorfismo y terminar así la demostración del teorema, solo nos falta ver que dicha aplicación es biyectiva. La sobreyectividad se deduce inmediatamente de la definición de $\hat{E}$. Para la inyectividad tomamos $x \in E$ tal que $[\hat{x}] = 0$ y veamos que necesariamente $x = 0$. Si $[\hat{x}] = 0$, entonces $\hat{x} = 0$. Como ya hemos visto en una ocasión previa, el lema 55 nos permite deducir que dado $\omega \in \text{Spec } E^*$, al menos uno de los valores $\hat{x}^+(\omega)$ y $\hat{x}^-(\omega)$ tiene que ser igual a 0. En consecuencia, si $0 = \hat{x}(\omega) = \hat{x}^+(\omega) - \hat{x}^-(\omega)$, entonces $\hat{x}^+(\omega) = \hat{x}^-(\omega) = 0$, esto es, $\omega(x^+ \wedge ne) = \omega(x^- \wedge ne) = 0$. Como esto lo tenemos para todo $\omega \in \text{Spec } E^*$ y la representación de Riesz $E^* \longrightarrow \mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$ es inyectiva, tenemso que $x^+ \wedge e = x^- \wedge e = 0$. Por último, como e es unidad débil, por la proposición 40, podemos concluir que $x^+ = x^- = 0$ y por tanto $x = 0$, como queríamos ver. Con esto hemos terminado la demostración de este teorema. □

Ahora, como ya anticipamos, vamos a identificar Spec E con un subconjunto de Spec E^*, de manera que podremos verlo como subespacio topológico. Seguidamente, veremos algunas propiedades como consecuencia.

Teorema 59. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Entonces el morfismo de restricción

$$\begin{array}{rcl} \text{Spec } E & \longrightarrow & \text{Spec } E^* \\ \omega & \longmapsto & \omega|_{E^*} \end{array}$$

es un homeomorfismo entre Spec E y su imagen por esta aplicación.

Demostración. Al quedarnos con la imagen como conjunto de llegada ya tenemos la sobreyectividad; veamos la inyectividad. Para ello tomamos dos elementos $\omega_1, \omega_2 \in \text{Spec } E$ tales que $\omega_1|_{E^*} = \omega_2|_{E^*}$; veamos que entonces necesariamente $\omega_1 = \omega_2$. Basta que lo probemos para los elementos del cono positivo. Sea $x \in E^+$, existe un n natural tal que $\omega_1(x) \leq n$ y $\omega_2(x) \leq n$. Entonces podemos escribir que $\omega_1(x) = \omega_1(x) \wedge n = \omega_1(x \wedge ne)$, y análogamente $\omega_2(x) = \omega_2(x \wedge ne)$. Puesto que $x \wedge ne \in E^*$, podemos concluir que $\omega_1(x) = \omega_2(x)$.

Para terminar la demostración tenemos que ver que Spec E es homeomorfo a su imagen en Spec E^*, esto es, que sus topologías coinciden. En Spec E tenemos la topología débil inducida por E. Ahora bien, la topología de subespacio en Spec E inducida por Spec E^* es la inducida por las composiciones

$$\{\text{Spec } E \to \text{Spec } E^* \xrightarrow{y} \mathbb{R} : y \in E^*\}.$$

Pero es claro que si tomamos $y \in E^*, \omega \in \text{Spec } E$, tenemos que $y(\omega|_{E^*}) = \omega(y) = y(\omega)$, es decir, que la topología inducida en Spec E por Spec E^* es la topología débil en Spec E inducida por $E^* \subseteq E$. Por otra parte, para cada $x \in E$ se cumple que $\text{coz}(x) = \text{coz}(|x|) = \text{coz}(|x| \wedge e)$, pero $|x| \wedge e \in E^*$, esto es,

$$\{\text{coz}(x) : x \in E\} = \{\text{coz}(y) : y \in E^*\}.$$

Luego basta aplicar el lema 57 para concluir la demostración. □

En adelante identificaremos Spec E con su imagen en Spec E^*; el siguiente resultado nos indica claramente de qué manera:

Lema 60. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Entonces se tiene que

$$\text{Spec } E = \{\omega \in \text{Spec } E^* : \hat{x}(\omega) \in \mathbb{R} \text{ para todo } x \in E^+\}.$$

Demostración. Para la primera contención tomamos $\omega \in \text{Spec } E, x \in E^+$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\omega(x) \leq n_0$, y en consecuencia, $\omega(x) = \omega(x) \wedge n = \omega(x \wedge ne)$ para todo $n \geq n_0$. Esto nos permite concluir que $\hat{x}(\omega) = \sup_n \omega(x \wedge ne) = \omega(x) \in \mathbb{R}$.

Veamos ahora la otra contención. Sea $\omega \in \text{Spec } E^*$ tal que $\hat{x}(\omega) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in E^+$. Consideramos la aplicación $\overline{\omega}$:

$$\begin{array}{cccc} \overline{\omega} & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \overline{\omega}(x) := \hat{x}(\omega) \end{array}.$$

Dados $x, y \in E$ es inmediato que

$$\overline{\omega}(x+y) = \widehat{x+y}(\omega) = \hat{x}(\omega) + \hat{y}(\omega) = \overline{\omega}(x) + \overline{\omega}(y),$$

y si tomamos además $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\overline{\omega}(\lambda x) = \widehat{\lambda x}(\omega) = \lambda \hat{x}(\omega) = \lambda \overline{\omega}(x).$$

Por otra parte, es claro que $\overline{\omega}(|x|) = \widehat{|x|}(\omega) = |\hat{x}|(\omega) = |\hat{x}(\omega)| = |\overline{\omega}(x)|$ y $\overline{\omega}(e) = e(\omega) = 1$. Luego hemos comprobado que $\overline{\omega} \in \text{Spec } E$ y es obvio que $\omega = \overline{\omega}|_{E^*}$, por lo que hemos terminado. □

Definición 61. Sea X un espacio topológico e Y un subjunto de X. Diremos que Y es un *conjunto* G_δ si podemos escribir Y como intersección de una familia numerable de abiertos. Definimos la Q-*clausura* de Y como el conjunto

$$\{x \in X : A \cap Y \neq \varnothing \text{ para todo } A \text{ conjunto } G_\delta \text{ tal que } x \in A\}.$$

Diremos que Y es Q-*cerrado* cuando coincida con su Q-clausura.

Lema 62. Sea E un retículo vectorial arquimediano cono unidad débil e. Entonces Spec E es un subespacio Q-cerrado de Spec E^*. Concretamente, dada cualquier $\omega_0 \in$ Spec E, existe una función positiva $h \in \mathcal{C}(\text{Spec } E^*)$ tal que $h(\omega_0) = 0$ y $h(\omega) > 0$ para todo $\omega \in$ Spec E.

Demostración. Sea $\omega_0 \in$ Spec $E^* \backslash$Spec E, por el lema 60 tenemos que existe $x \in E^+$ tal que $\hat{x}(\omega) = +\infty$. Definimos $h : \text{Spec } E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$h(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{1+\hat{x}(\omega)}, & \text{si } \omega \in R(\hat{x}) \\ 0, & \text{si } \omega \notin R(\hat{x}) \end{cases}.$$

Como $R(\hat{x})$ es un abierto denso de Spec E^*, tenemos que h es continua. Es evidente que $h \geq 0$ y puesto que $\omega_0 \notin R(\hat{x})$ y Spec $E \subseteq R(\hat{x})$, entonces tenemos respectivamente que $h(\omega_0) = 0$ y $h(\omega) > 0$ para todo $\omega \in$ Spec E. Y hemos terminado. □

Definición 63. Sea E un retículo vectorial con unidad débil e. Diremos que E es *e-semisimple* si su representación de Riesz es inyectiva.

Sea E un retículo vectorial con unidad débil e. Por el teorema 48, E^* es e-semisimple. Además, si E es e-semisimple, entonces necesariamente Spec $E \neq \varnothing$: si no fuera así, tendríamos que $\mathcal{C}(\text{Spec } E)$ tiene un único elemento, la inclusión $\varnothing \hookrightarrow \mathbb{R}$, mientras que en E hay más de un elemento, luego la representación de Riesz desde E en $\mathcal{C}(\text{Spec } E)$ no podría ser inyectiva.

Proposición 64. Sea E un retículo vectorial arquimediano con unidad débil e. Se verifica que E es e-semisimple si y solo si Spec E es denso en Spec E^*.

Demostración. Si E es e-semisimple, entonces si dado $x \in E$ se cumple que $x(\omega) = 0$ para todo $\omega \in$ Spec E, entonces $x = 0$. Por otra parte, como coz(x) =coz$(|x| \wedge e)$, el que E sea e-semisimple es quivalente a que si $x \in E^*$ es tal que $x(\omega) = 0$ para todo $\omega \in$ Spec E, entonces $x = 0$. Luego Spec E es denso en Spec E^*.

Recíprocamente, si Spec E es denso en Spec E^*, se tiene que si $x \in E^*$ es tal que $x(\omega) = 0$ para todo $\omega \in$ Spec E, entonces $x(\omega) = 0$ para todo $\omega \in$ Spec E^*. Como E^* es e-semisimple, lo anterior es equivalente a que si $x \in E^*$ para todo $\omega \in$ Spec E, entonces $x = 0$, como queríamos ver. □

Capítulo 4

Φ-Álgebras

Este último capítulo está dedicado a las Φ-álgebras, esto es, retículos vectoriales a los que se añade una estructura de álgebra conmutativa con elemento unidad. De nuevo la referencia principal será [Pul], aunque tomaremos algún ejemplo del artículo [Hui]. Emperaremos con las definiciones y las principales propiedades. En un segundo momento paseremos a ver algunos resultados de representación de Φ-álgebras.

A lo largo de todo este capítulo supondremos que todos los anillos son conmutativos y con unidad.

Definición 65. Sea k un cuerpo. Diremos que es una *k-álgebra* todo anillo A dotado de un morfismo de anillos $k \longrightarrow A$, el cual llamaremos *morfismo estructural* de la k-álgebra A. Gracias a la inyectividad del morfismo estructural identificaremos k con su imagen en A y lo consideramos como subanillo de A.

Sean A y B k-álgebras y $A \longrightarrow B$ una aplicación. Diremos que esta aplicación es un *morfismo de* k-álgebras si es un morfismo de anillos que deja invariante a k, o equivalentemente, si hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ \swarrow & & \searrow \\ A & \longrightarrow & B\,. \end{array}$$

Sea A una k-álgebra e I un ideal propio de A. La composición del morfismo estructural con el morfismo de paso a cociente dota a A/I de estructura de k-álgebra. Además, dicha estructura, que consideraremos en adelante, es la única para la cual el morfismo del paso al cociente $a \longrightarrow A/I$ es un morfismo de k-álgebras.

Definición 66. Sea A un $\mathbb{R}$-álgebra. Diremos que A es una *l-álgebra* si está dotada de una relación de orden "$\leq''$ compatible con su producto (si $a, b \in A$ tales que $a \leq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \leq bc$) y que la dota de estructura de retículo vectorial.

Sean A y B l-álgebras. Diremos que una aplicación $T : A \longrightarrow B$ es un *morfismo de l-álgebras* si es morfismo de $\mathbb{R}$-álgebras y morfismo de retículos. Si además es biyectivo y su aplicación inversa es también un morfismo de l-álgebras, diremos que T es *isomorfismo de l-álgebras*. En caso de que exista algún isomorfismo de l-álgebras entre A y B, diremos que A y B son *l-isomorfas*.

Definición 67. Sea A una l-álgebra e I un ideal de A. Diremos que I es un *l-ideal* si es un subconjunto sólido de A. Llamaremos *l-ideal maximal* a todo l-ideal propio que no esté contenido estrictamente en ningún otro l-ideal propio de A.

Ejemplo 68. Sea X un espacio topológico, $A = \mathcal{C}(X)$ es una l-álgebra. Sea Y un subconjunto de X, entonces el conjunto $I_Y := \{f \in \mathcal{C}(X) : f(Y) = 0\}$ es un l-ideal de $\mathcal{C}(X)$.

Lema 69. Sea A una l-álgebra. Dados $a, b \in A$, se cumplen las siguientes propiedades:

(I) $c(a \wedge b) \leq ca \wedge cb$ y $c(a \vee b) \geq ca \vee cb$ para todo $c \in A^+$

(II) $(ab)^+ \leq a^+b^+ + a^-b^-$ y $(ab)^- \leq a^+b^- + a^-b^+$

(III) $|ab| \leq |a||b|$

Demostración. Puesto que $a \wedge b \leq a$ y $c \in A^+$, entonces $c(a \wedge b) \leq ca$. Análogamente, $c(a \wedge b) \leq cb$. En consecuencia, es inmediato que $c(a \wedge b) \leq ca \wedge cb$. Con esto tenemos la primera desigualdad de (I); la se demuestra con un razonamiento similar.

Veamos ahora (II):

$$(ab)^+ = ab \vee 0 = [(a^+ - a^-)(b^+ - b^-)] \vee 0 = (a^+b^+ - a^+b^- - a^-b^+ + a^-b^-) \vee 0 \leq$$

$$\leq (a^+b^+ + a^-b^-) \vee 0 = a^+b^+ + a^-b^-,$$

y con esto tenemos la primera desigualdad. La otra se demuestra de forma análoga:

$$(ab)^- = (-ab) \vee 0 = (-a^+b^+ + a^+b^- + a^-b^+ - a^-b^-) \vee 0 \leq a^+b^- + a^-b^+.$$

Haciendo uso de (II), la tercera propiedad es inmediata:

$$|ab| = (ab)^+ + (ab)^- \leq a^+b^+ + a^-b^- + a^+b^- + a^-b^+ = (a^+ + a^-)(b^+ + b^-) = |a||b|.$$

□

Definición 70. Sea A una l-álgebra y B una subálgebra de A. Si B es un subrretículo de A, diremos que es una *l-subálgebra*.

Ejemplo 71. Sea A una l-álgebra y $e \in A^+$. Gracias al lema 69, si $ee \in A^*(e)$ y $1 \in A^*(e)$, entonces tenemos que $A^*(e)$ es una l-subálgebra de A. En particular, si $1 \geq 0$, entonces $A^*(1)$ es una l-subálgebra de A.

Lema 72. Sea A una l-álgebra e I y J l-ideales de A. Entonces el conjunto $I+J=\{a+b : a \in I, b \in J\}$ es también un l-ideal. Además, si $1 \in A^+$, entonces se cumple que

$$(I+J) \cap A^*(1) = I \cap A^*(1) + J \cap A^*(1).$$

Demostración. Ya sabemos que la suma algebraica de dos ideales es de nuevo un ideal. Además, la proposisción 32 nos dice que $I+J$ es un subespacio sólido. Luego ya tenemos probada la primera parte del lema.

Veamos la segunda afirmación del lema. La contención $I \cap A^*(1) + J \cap A^*(1) \subseteq (I+J) \cap A^*(1)$ es inmediata. Tomamos ahora un elemento $c \in (I+J) \cap A^*(1)$. Como $c \in I+J$, podemos escribir $c = a+b$ con $a \in I, b \in J$, luego $c^+ \leq |c| = |a+b| \leq |a|+|b|$. Debido a esto, por el teorema 24, sabemos que existen $a_1 \in I \cap A^*(1)$ y $b_1 \in J \cap A^*(1)$ tales que $c^+ = a_1 + b_1$, con $0 \leq a_1 \leq |a|$ y $0 \leq b_1 \leq |b|$. Análogamente, tenemos que $c^- \leq |a|+|b|$, y en consecuencia existen $a_2 \in I \cap A^*(1)$ y $b_2 \in J \cap A^*(1)$ tales que $c^- = a_2 + b_2$, con $0 \leq a_2 \leq |a|$ y $0 \leq b_2 \leq |b|$. Y ahora podemos escribir

$$c = c^+ - c^- = (a_1+b_1) - (a_2+b_2) = (a_1-a_2) + (b_1-b_2) \in I \cap A^*(1) + J \cap A^*(1),$$

con lo que hemos terminado la demostración. □

Definición 73. Sea A una l-álgebra. Suponemos que se cumple la siguiente propiedad: si $a, b \in A$ son tales que $a \wedge b = 0$, entonces para todo elemento $c \in A^+$ se tiene que $a \wedge bc = ac \wedge b = 0$. En esta situación diremos que A es una *f-álgebra*. Si además es arquimediana, la denominaremos *Φ-álgebra*.

Teorema 74. Sea A un f-álgebra y $a, b \in A$. Se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $c(a \wedge b) = ca \wedge cb$ y $c(a \vee b) = ca \vee cb$ para todo $c \in A^+$

(ii) $|ab| = |a||b|$

(iii) si $a \wedge b = 0$, entonces $ab = 0$; en particular, $a^+a^- = 0$

(iv) $a^2 = |a|^2 \geq 0$; en particular $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$

(v) si $a, b \geq 0$, entonces $0 \leq ab - (ab \wedge nb) \leq \frac{1}{n}a^2 b$ para todo $n \in \mathbb{N}$

(vi) $ab = (a \wedge b)(a \vee b)$; en consecuencia, si I es un l-ideal de A y $a \geq 0$, entonces $a \in I$ si y solo si $a \wedge 1 \in I$

Demostración. (i) La demostración es análoga a la realizada para la segunda propiedad del corolario 25.

(II) Ya hemos demostrado en el lema 69 que $|ab| \leq |a||b|$, luego solo tenemos que ver una desigualdad. Si $a \in A^+$, usando la sexta propiedad del lema 23 y la primera de este teorema, tenemos que:

$$|ab| = (ab) \vee (-ab) = a[b \vee (-b)] = a|b| = |a||b|.$$

Utilizando esto, en general podemos escribir lo siguiente:

$$a|b| = a^+|b| - a^-|b| = |a^+b| - |a^-b| \leq ||a^+b| - |a^-b| \leq |a^+b - a^-b| = |ab|.$$

De forma análoga podemos ver que $-a|b| \leq |-ab| = |ab|$, luego podemos concluir que $|a||b| \leq |ab|$, y hemos terminado.

(III) Como $a \wedge b =$, tenemos que $a, b \geq 0$. En consecuencia, por la propiedad que define a una f-álgebra, sabemos que $a \wedge ab = 0$, y usando de nuevo la propiedad: $ab \wedge ab = 0$. Es decir, $ab = 0$. Como ya vimos en la quinta propiedad del lema 23 que $a^+ \wedge a^- = 0$, es inmediata la segunda afirmación.

(IV) Podemos escribir que

$$a^2 = (a^+ - a^-)(a^+ - a^-) = a^+a^+ - a^+a^- - a^-a^+ + a^-a^- =$$

$$= (a^+)^2 + (a^-)^2 = |a|^2.$$

(V) Sean $a, b \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Por la cuarta propiedad del lema 23 sabemos que $(ab - nb)^+ = ab - (ab \wedge nb)$ y $(ab - nb)^- = nb - (ab \wedge nb)$. En consecuencia, tenemos que

$$(ab - (ab \wedge nb)) \wedge (nb - (ab \wedge nb)) = (ab - nb)^+ \wedge (ab - nb)^- = 0.$$

Ahora bien, como A es una f-álgebra y $\frac{a}{n} \geq 0$, podemos escribir que

$$(ab - (ab \wedge nb)) \wedge (ab - \frac{a}{n}(ab \wedge nb)) = 0,$$

y utilizando la primera propiedad de este teorema y la segunda del lema 23

$$ab + (-(ab \wedge nb)) \wedge (-a(\frac{a}{n}b \wedge b)) = 0.$$

Pero esto por la primera de las propiedades del mismo lema implica que

$$ab - ((ab \wedge nb) \vee a(\frac{a}{n}b \wedge b)) = 0.$$

Y con esto hemos terminado, pues tenemos que $ab = (ab \wedge nb) \vee (a(\frac{a}{n}n \wedge b) \leq (ab \wedge nb) +$

$(a(\frac{a}{n}n \wedge b)$, esto es $ab - (ab \wedge nb) \leq a(\frac{a}{n}b \wedge b) \leq \frac{1}{n}a^2b$, como queríamos ver.

(vi) Por la tercera propiedad del lema 23 sabemos que $a + b = a \wedge b + a \vee b$. Luego

$$ab - (a \wedge b)(a \vee b) = ab - (a \wedge b)(a + b - a \wedge b) =$$

$$(a - a \wedge b)(b - a \wedge b) = (a - b)^+(a - b)^-.$$

Pero esto último sabemos que se anula por la tercera propiedad de este teorema. Luego podemos concluir que $ab = (a \wedge b)(a \vee b)$.

□

Ejemplo 75. Sea $A := \mathbb{R}^2$. Vamos a considerar el orden parcial componente a componente, así como la suma componente a componente y el producto por escalar usuales. Sea en A el producto

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + \frac{1}{2}a_2b_2, \frac{1}{2}a_2b_2).$$

Tenemos que A no es una f-álgebra: $(1,0) \wedge (0,1) = (0,0)$, pero $(1,0) \cdot (0,1) = (1,0)$. Es de notar en este ejemplo que la unidad multiplicativa no pertenece a A^+, pues es el elemento $(-1, 2)$.

Lema 76. Sea A una l-álgebra. Si $1 \in A$, unidad multiplicativa de A, es una unidad fuerte, entonces A es una f-álgebra. En particular, si $1 \geq 0$, entonces $A^*(1)$ es una f-álgebra.

Demostración. Si 1 es unidad fuerte en A, tenemos por definición que $1 \in A^+$ y $A^*(1) = A$. Sean $a, b \in A$ tales que $a \wedge b = 0$ y $c \in A^+$; veamos que $a \wedge cb = 0$. Como 1 es unidad fuerte, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a, b, c \leq n$, y en consecuencia tenemos que

$$0 \leq a \wedge cb \leq a \wedge nb \leq na \wedge nb = n(a \wedge b) = 0.$$

Con esto hemos demostrado que lo que queríamos.

Por otro lado, puesto que si $e \in A^+$ es evidente que e es una unidad fuerte de $A^*(e)$, tenemos que 1 es unidad fuerte de $A^*(1)$ y por lo que acabamos de desmostrar $A^*(1)$ es una f-álgebra. □

Lema 77. Sea A una Φ-álgebra. Entonces se cumple que en A no hay elementos nilpotentes.

Demostración. Veámoslo por reducción al absurdo: suponemos que existe $c \in A$ tal que $c^p = 0$ para algún p siendo A una Φ-álgebra. Podemos suponer que p es el menor natural par que lo satisface, $p = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, y en este caso tenemos, por la cuarta propiedad del teorema 74, que $c^p = |c|^p$, luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c \geq 0$. Ahora bien, si denotamos $d := c^k$, podemos escribir

$$(mc)^2 = m^2d^2 = m^2c^p = 0, \text{ para todo } m \in \mathbb{N},$$

y por la quinta propiedad del teorema ya mencionado

$$0 \leq md - (md \wedge 1) \leq (md)^2 = 0, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Con esto hemos demostrado que $md = md \wedge 1$, es decir, $md \leq 1$ para todo m natural. Como A es arquimediana, esto implica que $d = 0$. Para terminar, si $p = 2$, entonces $c = d = 0$; y si $p > 2$, entonces k o $k+1$ es par y menor estrictamente que p. En cualquier caso queda demostrado lo que queríamos. □

Corolario 78. Sea A una Φ-álgebra, y $a, b \in A^+$. Tenemos que $a \leq b$ si y solo si $a^2 \leq b^2$.

Demostración. Si $a \leq b$, entonces es inmediato que $a^2 \leq b^2$. Para ver la otra implicación suponemos que $a^2 \leq b^2$ y denotamos $c := a - a \wedge b \geq 0$. Si vemos que $c = 0$ habremos terminado, pues tendremos que $a = a \wedge b \leq b$. Por la última de las propiedades del teorema 74, podemos escribir que

$$ab = (a \wedge b)(a \vee b) = [a(a \vee b)] \wedge [b(a \vee b)] = (a^2 \vee ab) \wedge (ab \vee b^2) = (a^2 \wedge b^2) \vee (ab),$$

esto es, $a^2 \wedge b^2 \leq ab$ y en consecuencia

$$a^2 = a^2 \wedge b^2 = a^2 \wedge b^2 \wedge (ab) = (a \wedge b)^2 \leq a^2 - c^2,$$

luego $c^2 = 0$. Por último, como hemos visto en el lema anterior que en A no hay elementos nilpotentes, podemos concluir que $c = 0$. □

Teorema 79. Sea A una l-álgebra arquimediana. Son equivalentes:

(I) A es una Φ-álgebra

(II) 1 es una unidad débil

Demostración. Veamos primero que (I)⇒(II). Sea $a \in A$, si $a \wedge 1 = 0$, por la tercera propiedad del teorema 74 sabemos que $a = a1 = 0$. Basta aplicar la proposición 40 para deducir que 1 es una unidad débil.

Para la otra implicación vamos a ver que A es una f-álgebra y como ya sabemos que es arquimediana, será una Φ-álgebra. Sean $a, b, c \in A^+$ con $a \wedge b = 0$. Como 1 es unidad débil, tendremos que $a \wedge bc = 0$ si y solo si $a \wedge bc \wedge 1 = 0$, y esto a su vez es equivalente a que $(a \wedge bc \wedge 1)^2 = 0$, pues $A^*(1)$, por ser Φ-álgebra, no tiene elementos nilpotentes. Ahora bien, como

$$(a \wedge bc \wedge 1)^2 \leq a(a \wedge bc \wedge 1) \wedge bc(a \wedge bc \wedge 1) \wedge (a \wedge bc \wedge 1), \text{ y}$$

$$a(a \wedge bc \wedge 1) \wedge bc(a \wedge bc \wedge 1) \wedge (a \wedge bc \wedge 1) = 0 \text{ si } (a \wedge bc \wedge 1)b = 0,$$

basta probar que $(a \wedge bc \wedge 1)b = 0$. Además, $(a \wedge bc \wedge 1)b = 0$ si y solo si $[(a \wedge bc \wedge 1)b \wedge 1]^2 = 0$. Pero

$$0 \leq [(a \wedge bc \wedge 1)b \wedge 1]^2 \leq [(a \wedge bc \wedge 1)b \wedge 1][(a \wedge bc \wedge 1)b] \leq (b \wedge 1)(a \wedge 1)b \leq (a \wedge b)b) = 0,$$

donde hemos usado que $(a \wedge 1)(b \wedge 1) \leq a$ y $(a \wedge 1)(b \wedge 1) \leq b$. Y con esto hemos terminado la demostración. □

Vamos a pasar ahora a exponer algunos resultados sobre la representación de Φ-álgebras. Empezamos con algunos conceptos para los que necesitamos recordar la definiciones 49:

Definición 80. Sea A una l-álgebra. Por sucesión *uniformemente de Cauchy* (*uniformemente convergente*) entenderemos que $1 \geq 0$ y que la sucesión es 1-uniformemente de Cauchy (1-uniformemente convergente). Análogamente, cuando hablemos de que un subconjunto de A es *uniformemente cerrado* (*uniformemente denso*) entenderemos que $1 \geq 0$ y que el subconjunto de A es 1-uniformemente cerrado (1-uniformemente denso).

Sea A una Φ-álgebra. Hemos visto que A es un retículo vectorial arquimediano en el cual 1 es unidad débil y $1 > 0$. En consecuencia, podemos hablar del retículo de los elementos acotados de A respecto a 1:

$$A^* = A^*(1) := \{a \in A : |a| \leq n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\},$$

que llamaremos *subálgebra de los elementos acotados* de A, de hecho, también será Φ-álgebra. Por otra parte,

$$\text{Spec } A^* := \{\omega : A^* \longrightarrow \mathbb{R} \text{ morfismo de retículos vectoriales tal que } \omega(1) = 1\}$$

es un espaico topológico compacto Hausdorff, y

$$\text{Spec } A := \{\omega : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ morfismo de retículos vectoriales tal que } \omega(1) = 1\}$$

es un espacio topológico compacto. Además, tenemos las representaciones $A \longrightarrow \mathcal{C}(\text{Spec } A)$, $A^* \hookrightarrow \mathcal{C}(\text{Spec } A^*)$ y $A \hookrightarrow \mathcal{D}(\text{Spec } A^*)$.

Teorema 81. Sea A una f-álgebra y $\omega : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un morfismo de retículos vectoriales. Si $\omega \neq 0$, entonces existe un único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $a, b \in A$ se cumple que $\omega(ab) = \alpha\omega(a)\omega(b)$.

Si consideramos $a = b = 1$, tenemos que $\omega(1) = \omega(1 \cdot 1) = \alpha\omega(1)\omega(1)$, luego es claro que $\omega(1) \neq 0$ y $\alpha = \frac{1}{\omega(1)}$.

Demostración. Fijamos $a \in A$ y consideramos

$$\begin{array}{rccl} \omega_a: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & b & \longmapsto & \omega_a(b) := \omega(ab). \end{array}.$$

Si probamos que $\ker \omega \subseteq \ker \omega_a$, entonces tendremos que existe $\lambda_a \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(ab) = \lambda_a \omega(b)$ para todo $b \in A$. Para ver que $\ker \omega \subseteq \ker \omega_a$ tomamos $b \in \ker \omega$, lo cual implica que $|b| \in \ker \omega$. Como $|a|, |b| \geq 0$, por la quinta propiedad del teorema 74 tenemos que

$$|ab| - (|ab| \wedge n|b|) \leq \frac{1}{n} a^2 |b| \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Reescribiéndolo nos queda que

$$|ab| \leq (|ab| \wedge n|b|) + \frac{1}{n} a^2 |b| \leq n|b| + \frac{1}{n} a^2 |b| \text{ , para todo } n \in \mathbb{N},$$

y aplicando ω, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|\omega(ab)| = \omega(|ab|) \leq \omega(n|b| + \frac{1}{n} a^2 |b|) = n\omega(|b|) + \frac{1}{n}\omega(|b|a^2) = \frac{1}{n}\omega(|b|a^2),$$

y en consecuencia $\omega(|ab|) = 0$, luego $\omega(ab) = 0$. Por tanto, sabemos que $\omega(ab) = \lambda_a \omega(b)$ para todo $b \in A$, para algún $\lambda_a \in \mathbb{R}$; y análogamente, $\omega(ab) = \lambda_b \omega(a)$ para todo $a \in A$, para algún $\lambda_b \in \mathbb{R}$. Entonces, si dados $a, b \in A$, tanto $\omega(a)$ como $\omega(b)$ son no nulos, se satisface que $\omega(ab) = \lambda_a \omega(b) = \lambda_b \omega(a)$, y basta tomar la constante $\alpha := \frac{\lambda_a}{\omega(a)} = \frac{\lambda_b}{\omega(b)}$. Por otra parte, si $\omega(a) = 0$ u $\omega(b) = 0$, entonces $\omega(ab) = 0$ y la igualdad a demostrar es trivial. □

Definición 82. Sea A un álgebra y $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} A$ el conjunto de todos los morfismos de álgebras de A en $\mathbb{R}$. Cuando el conjunto $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} A$ esté dotado de la topología débil definida por las funciones $\{a : \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} A \longrightarrow \mathbb{R}, \omega \longmapsto a(\omega) := \omega(a)\}$, lo llamaremos *espectro real* de A. Es claro que este espacio dotado de dicha topología es un espacio topológico completamente regular y Hausdorff.

Diremos que A es *real-semisimple* si el morfismo natural $A \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} A)$ sea inyectivo. Si A es real-semisimple, entonces $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} A \neq \varnothing$.

Un ideal maximal M de A es *real* si su cuerpo residual A/M es $\mathbb{R}$, en cuyo caso tenemos de forma inmediata que $A \longrightarrow A/M = \mathbb{R}$ es un morfismo de álgebras. Además, si $\omega \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} A$, entonces $\ker \omega$ es un ideal maximal real de A. Esto implica que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} A$ y el conjunto de todos los ideales maximales reales de A. En particular, si $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} A \neq \varnothing$, entonces el núcleo de la representación $A \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}} A)$ es la intersección de todos los ideales maximales reales de A.

Corolario 83. Sea A una f-álgebra y M un subconjunto de A. Entonces M es un l-ideal maximal si y solo si M es un l-hiperplano.

Demostración. La primera implicación, esto es, que si M es un l-ideal maximal entonces es un l-hiperplano es inmediata. Por otra parte, si M es un l-hiperplano, tenemos que $A/M = \mathbb{R}$ y que el morfismo de paso al cociente $\pi : A \longrightarrow A/M$ es un morfismo de retículos. Puesto que $\pi(1) \neq 0$, podemos considerar el siguiente morfismo de l-álgebras: $\omega : A \longrightarrow A/M$, definido como $\omega := \frac{\pi}{\pi(1)}$. Este morfismo cumple que $\ker \omega = \ker \pi = M$, luego, por la correspondencia biunívoca que hemos visto anteriormente, tenemos qeu M es un l-ideal maximal real. □

Corolario 84. Sea A un Φ-álgebra. Tenemos que todo l-ideal maximal de A^* es real, y en consecuencia, la intersección de todos los l-ideales maximales de A^* es nula.

Demostración. Sea M^* un l-ideal maximal de A^*. Por una parte, puesto que M^* es un subespacio sólido y propio de A^*, por el lema 42 y el corolario 45 tenemos que existe un l-hiperplano H^* en A^* de manera que $M^* \subseteq H^*$. Y por el corolario anterior, sabemos que H^* es un l-ideal maximal real. Como M^* es maximal, $M^* = H^*$ y concluimos que M^* es un l-ideal maximal real. Por último, la consecuencia la podemos deducir del teorema 48. □

Sea A una Φ-álgebra. Recordemos que podemos tomar la representación $A \longrightarrow \mathcal{D}(\text{Spec } A^*)$, $a \longmapsto \hat{a}$. Ya vimos, en el teorema 58, que $\widehat{A} := \{[\hat{a}] : a \in A\}$ es espacio vectorial y un subrretículo de $\mathcal{D}(\text{Spec } A^*)$, y que $A \longrightarrow \widehat{A}$ es un isomorfismo de retículos vectoriales. Veamos qué podemos añadir trabajando con una Φ-álgebra. Empezamos presentando un lema que nos muestra qué más tenemos en esta situación. Omitimos su demostración por motivos de complejidad y de extensión de esta memoria; se puede encontrar una demostración en [Pul].

Lema 85. Sea A una Φ-álgebra. Entonces $\widehat{A}$ es una l-álgebra y la aplicación $A \longrightarrow \widehat{A}$ es una isomorfismo de l-álgebras.

Definición 86. Sea A una l-álgebra. Dado $a \in A$, denotamos $S(a) := \{c \in A : |c| \leq |ab| \text{ para algún } b \in A\}$. Es sencillo ver que $S(a)$ es el más pequeño de todos los l-ideales que contienen al elemento a. Llamaremos a $S(a)$ *l-ideal generado* por a.

Lema 87. Sea A una Φ-álgebra. Sea M^* un l-ideal maximal de A^*. Entonces $M := \{a \in A : S(a) \cap A^* \subseteq M^*\}$ es un l-ideal maximal de A.

Demostración. Veamos primero que M es un l-ideal. Dados $a, b \in M$, por el lema 72 sabemos que $S(a)+S(b)$ es un subespacio sólido, y en consecuencia tenemos que $S(a+b) \subseteq S(a)+S(b)$. Por el mismo lema podemos escribir que

$$S(a+b) \cap A^* \subseteq (S(a) + S(b)) \cap A^* = S(a) \cap A^* + S(b) \cap A^* \subseteq M^*,$$

y con esto hemos visto que $a + b \in M$. Análogamente, dados $m \in M$, $a \in A$, tenemos que $S(am) \cap A^* \subseteq S(m) \cap A^* \subseteq M^*$, luego $am \in M$. Con esto hemos visto que M es un ideal, por lo que para ver que es l-ideal tan solo nos falta demostrar que además es sólido. Para ello tomamos $m \in M$, $a \in A$ tales que $|a| \leq |m|$; entonces tendremos que $S(a) \subseteq S(m)$, y en consecuencia $a \in M$. Esto prueba que es sólido, luego ya tenemos que M es un l-ideal.

Veamos ahora que es maximal. Puesto que $S(1) = A$, tenemos que $1 \notin M$ y por tanto M es propio. Como A es una Φ-álgebra, por el corolario 84, si M es l-ideal maximal, entonces es real. Por esto, para ver que que es maximal, por el corolario 83, es suficiente ver que es un l-hiperplano. Es decir, tenemos que ver que si $a \in A \backslash M$, entonces $S(a) + M = A$. Ahora bien, si $a \notin M$, por la definición de M se tiene que $S(a) \cap A^* \not\subseteq M^*$. Esto implica que $S(a) \cap A^* + M^* = A^*$, es decir, $1 = m + b$, donde $m \in M$, $b \in S(a) \cap A^*$, y puesto que $b \in S(a)$, tenemos que $|b| \leq |ac|$ para algún $c \in A$. Por otra parte, el corolario 83 nos dice que existe un morfismo de l-álgebras $\omega^* : A^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\ker \omega^* = M^*$. Puesto que $\omega^*(1) = 1$ y $\omega^*(m) = 0$, pues $m \in M^*$, necesariamente tenemos que $\omega^*(b) = 1$. Sabemos por el teorema 48 que A^* es un subrretículo vectorial de $\mathcal{C}(\text{Spec } A^*)$, y por lo que hemos visto tenemos que $b \in \mathcal{C}(\text{Spec } A^*)$ y $\omega^* \in \text{coz}(b)$, por lo que existe un entorno cerrado F de ω^* en Spec A^* tal que $F \subseteq \text{coz}(b)$. Ahora bien, por el corolario 53, podemos separar los cerrados F y el complemetario de $\text{coz}(b)$, esto es, existe $d \in A^*$, $0 \leq d \leq 1$ tal que $d(F) = 0$ y $d(\omega) = 1$ si $\omega \notin \text{coz}(b)$. Para terminar, veamos que $d \in M$, es decir, que $S(d) \cap A^* \subseteq M^*$. Sea $u \in S(d) \cap A^*$, tenemos que $|u| \leq |vd|$ para algún $v \in A$. Como $R(\hat{v})$ es un abierto denso y $\omega^* \in F$, entonces $\omega^* \in \overline{R(\hat{v}) \cap F}$, y por tanto $|\omega^*(u)| \leq |\widehat{vd}|(\omega^*) = 0$, por ser $d(F) = 0$. Hemos visto que $u \in \ker \omega^* = M^*$. Y ahora, como $d + |b| > 0$ y Spec A^* es compacto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \lambda \leq d + |b|$, de manera que $1 \leq \frac{1}{\lambda} d + \frac{1}{\lambda}|b| \in M + S(a)$, es decir, $1 \in M + S(a)$. Y hemos terminado. □

Lema 88. Sea A una f-álgebra. Entonces tenemos que todo l-ideal primo de A está contenido en un único l-ideal maximal de A.

Demostración. Sea P un l-ideal primo de A. Consideramos el morfismo de paso al cociente $\pi : A \longrightarrow A/P$. Como paso previo a la demostración como tal, vamos a ver que A/P es una l-álgebra totalmente ordenada. Sea $a \in A$, tenemos que $a^+ a^- = 0 \in P$, y como P es primo, entonces $a^+ \in P$ o $a^- \in P$. En consecuencia, $\pi(a) = \pi(a^+) \geq 0$ o $\pi(a) = \pi(-a^-) \leq 0$.

Ahora bien, si logramos probar que todos los l-ideales de A/P forman una cadena para la inclusión, entonces tendremos que en A/P hay un único l-ideal maximal. Pero sabemos los l-ideales maximales de A/P están en correspondencia biunívoca con los l-ideales de A que contienen a P, luego habremos probado lo que queríamos. Sean, por tanto, I, J l-ideales de A/P. Suponemos que existe $\pi(a) \in I \backslash J$, donde podemos suponer que $\pi(a) \geq 0$. Es inmediato que para todo elemento $b \in J$ debe ocurrir que $|b| \leq \pi(a)$, pues si no se tendría que dar que $|b| \geq \pi(a)$, y como J es sólido, $\pi(a)$ pertenecería a J. Por tanto, hemos demostrado, como buscábamos, que $J \subseteq I$. □

Teorema 89. Sea A una Φ-álgebra. Existe una correspondencia biunívoca entre los l-ideales maximales de A y los l-ideales maximales de A^*.

Demostración. Ya sabemos, por lo que hemos visto en los corolarios 83 y 84, que el conjunto de los l-ideales maximales de A^* se puede identificar con el conjunto de los puntos de Spec A^*. Denotamos ahora $\mathcal{M}(A) := \{l\text{-ideales maximales de A}\}$, de manera que lo que tenemos que hacer es establecer una correspondencia biunívoca entre Spec A^* y $\mathcal{M}(A)$. Por una parte, gracias al lema 87 tenemos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \text{Spec } A^* & \longrightarrow & \mathcal{M}(A) \\ M^* & \longmapsto & \{a \in A : S(a) \cap A^* \subseteq M^*\}. \end{array}$$

Por otra parte, para poder utilizar el lema 88, vamos a ver que si $M \in \mathcal{M}(A)$, entonces M es primo. Sean $a, b \in A$ tales que $ab \in M$ y $a \notin M$. Entonces $S(a) + M = A$, por lo que existen $c \in A$ y $m \in M$ tales que $a \leq m + ac$. Esto obliga a que $b \in M$ porque $b \leq mb + cab \in M$. Con esto hemos visto que M es primo, y en consecuencia, podemos decir que $M \cap A^*$ es un l-ideal primo de A^*, y por el lema 88 existe un único l-ideal maximal de A^* en el cual está contenido $M \cap A^*$, es decir, tenemos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}(A) & \longrightarrow & \text{Spec } A^* \\ M & \longmapsto & \text{único } l\text{-ideal maximal de } A^* \text{ que contiene a } M \cap A^*. \end{array}$$

Si vemos que estas dos aplicaciones son inversa la una de la otra habremos terminado. Sean $M \in \mathcal{M}(A)$ y M^* el único l-ideal maximal de A^* que contiene a $M \cap A^*$. Sea además $M_1 := \{a \in A : S(a) \cap A^* \subseteq M^*\}$. Si fuera cierto que $M \neq M_1$, entonces tendríamos que $M_1 + M = A$, y por el lema 72:

$$A^* = (M_1 + M) \cap A^* = M_1 \cap A^* + M \cap A^* \subseteq M^*,$$

y hemos llegado a un absurdo. Recíprocante, sean $M^* \in$ Spec A^* y $M := \{a \in A : S(a) \cap A^* \subseteq M^*\}$. Por la definición de M, es inmediato que $M \cap A^* \subseteq M^*$, luego ya tenemos que M^* es el único l-ideal maximal de A^* que contiene a $M \cap A^*$. $\square$

Corolario 90. Sea A una Φ-álgebra. Entonces la intersección de todos los l-ideales maximales de A es nula.

Demostración. Sea $a \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}(A)} M$. Pero si $a \in M$, entonces $|a| \wedge 1 \in M \cap A^*$, y por la correspondencia biunívoca que hemos construido en el teorema anterior, sabemos que $M \cap A^* \subseteq M^*$, donde $M^* \in$ Spec A^*. Es decir, tenemos que

$$|a| \wedge 1 \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}(A)} (M \cap A^*) \subseteq \bigcap_{M^* \in \text{Spec } A^*} M^*.$$

Pero el corolario 84 nos dice que esta última intersección es nula, luego $|a| \wedge 1 = 0$. Por último, como 1 es unidad débil en A, por la proposición 40, concluimos que $a = 0$. $\square$

Bibliografía

[BKW] A. Bigard, K. Keimel, and S. Wolfenstein, *Groupes et anneaux réticulés*, Springer 1977.

[Bou] N. Bourbaki, *General Topology: Chapters 1-4*, Springer 1971.

[Cha] R.E. Chandler, *Hausdorff Compactifications*, Marcel Dekker 1976.

[EJ] E. de Jonge and A.C.M. van Rooij, *Introduction to Riesz spaces*, Mathematisch Centrum 1977.

[HJ] M. Henriksen and D. G. Johnson, *On the structure of a class of archimedean latticeordered algebras*, Fund. Math. (1961), 73-94.

[HP] M. Husek and A. Pulgarín, *General approach to characterizations of C(X).*, Topology Appl. (2012), 159(6):1603-1612.

[HP] M. Husek and A. Pulgarín, *On characterizing riesz spaces C(X) without Yosida representation*, Positivity (2013) 17(3):515-524.

[Hui] C. B. Huijsmans, *Lattice-ordered algebras and f-algebras: A survey. In Positive operators, Riesz spaces, and economics*, Springer (1991), 151-169.

[LZ] W. A. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz spaces Volume 1*, North Holland 1971.

[Ma] J. Ma, *Lecture notes on algebraic structure of lattice-ordered rings*, World Scientific 2014.

[Pla] D. Plank, *Closed l-ideals in a class of lattice-ordered algebras*, Illinois J. Math (1971), 515-524.

[Pul] A. Pulgarín, *Sobre la caracterización del álgebra topológica de las funciones reales y continuas sobre un espacio topológico*, PhD thesis, Universidad de Extremadura 2003.