



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

**EMPAQUETAMIENTOS DE
APOLONIO Y ALGUNAS DE
SUS APLICACIONES**

Autor: Juan Rebé Sancho

Tutor: Philippe Gimenez

Febrero-Septiembre 2022

Índice general

Introducción	1
1. El problema de Apolonio	5
1.1. Enunciado del problema	5
1.2. Los 10 problemas de Apolonio	6
2. Empaquetamientos de Apolonio	21
2.1. Definición y construcción	21
2.2. Fórmula de Descartes	28
2.3. Ejemplos	35
3. Empaquetamientos y Teoría de números	39
3.1. Teoría de reducción	39
3.1.1. Grupo de Apolonio	40
3.1.2. Algoritmo de reducción	41
3.2. Curvaturas enteras	45
3.2.1. Curvaturas contadas con multiplicidad	45
3.2.1.1. Dimensión de Hausdorff	45
3.2.1.2. Resultados asintóticos	46
3.2.2. Curvaturas contadas sin multiplicidad	51
3.2.2.1. Relaciones de congruencia	51
4. Círculos de Ford	53
4.1. Definición y propiedades	53
4.2. Números de Fibonacci	56
Bibliografía	61

Introducción

Los empaquetamientos de Apolonio son un concepto matemático comprendido en la rama del álgebra. El estudio de este concepto tiene su origen aproximadamente en el año 230 a.C, cuando el famoso matemático y astrónomo griego Apolonio de Perga (Perga, 262-190 a.C.) planteó y resolvió el siguiente problema en su tratado sobre tangencias, el cual en la actualidad se encuentra perdido. El problema busca encontrar una circunferencia tangente a tres objetos geométricos en el plano, cada uno de los cuales puede ser un punto, un círculo o una recta. Su enunciado y su desglose en diez problemas se incluyen en el capítulo 1 del trabajo. En este trabajo, vamos a centrarnos y realizar un estudio más profundo del caso en que los objetos son tres círculos tangentes dos a dos, conocido como problema fundamental de Apolonio, que es el de mayor dificultad y la base de los empaquetamientos de Apolonio. Normalmente, este problema tiene dos posibles soluciones, a excepción del caso en el que las tres circunferencias son tangentes en el mismo punto, para el cual tenemos infinitas soluciones, como se puede observar en la figura 1, donde los círculos negros son los iniciales y los azules los que son solución al problema propuesto.

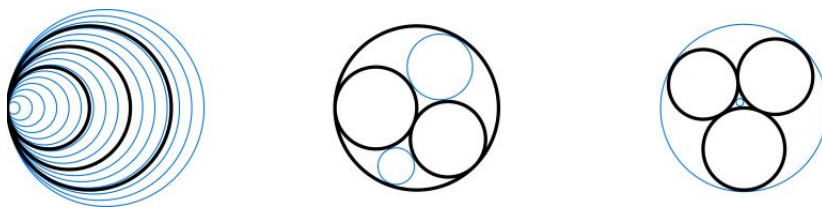


Figura 1: Posibles casos y soluciones al problema fundamental de Apolonio.

Apolonio resolvió el problema mediante razonamientos geométricos y no fue hasta 1643 cuando René Descartes (La Haye en Touraine, 1596-Estocolmo, 1650) redactó una solución algebraica. Para ello descubrió la fórmula con la que se calcula el tamaño de las dos circunferencias resultantes que son solución del problema. El tamaño de una circunferencia viene dado por su radio, pero esta fórmula se expresa en función de las curva-

turas ($1/\text{radio}$) de las circunferencias tangentes entre sí. En concreto, se obtiene una ecuación de segundo grado y que cuando tiene dos soluciones reales, que serán las curvaturas de las nuevas circunferencias tangentes a las tres propuestas y que son solución del problema. En ocasiones, la ecuación tiene como solución números negativos para la curvatura de los círculos, en este caso se toma como curvatura el valor absoluto del número negativo y se obtiene un círculo que contiene a los tres de parida. Más tarde en 1936 Fedrerick Soddy (Inglaterra, 1877-1956), hizo un estudio acerca de esta fórmula. No entraremos ahora en más detalles sobre esta fórmula ya que, al ser una parte básica del estudio de los empaquetamientos de Apolonio, será abordada a lo largo del trabajo con mayor profundidad.

Es fácil darnos cuenta que no ha sido un tema muy estudiado a lo largo de la historia, y que no ha sido abordado por grandes matemáticos. No obstante, en la actualidad, gracias a nuevos estudios, se ha podido comprobar que los empaquetamientos de Apolonio aparecen en muchas ramas de las matemáticas como la geometría euclidiana, la geometría fractal y teoría de la medida, las transformaciones de Möbius y el plano hiperbólico, la teoría de grupos y la teoría de números. Además se puede resaltar la relación de este objeto matemático con la teoría de nudos mediante el uso de un enfoque politópico, como se muestra en la tesis doctoral [11]. Por otro lado, se utiliza en ámbitos de la vida real como, por ejemplo, la navegación de barcos. A lo largo de este trabajo se abordará, como el propio título indica, los principales conceptos sobre los empaquetamientos de Apolonio y su relación con la teoría de números y la geometría. A continuación, se proporciona una pequeña introducción a lo que se va a tratar en cada capítulo del trabajo.

1. Para comenzar con el trabajo, se va a enunciar el problema geométrico conocido como *problema de Apolonio*. Este problema es fundamental para la definición del objeto matemático sobre el que se desarrolla el trabajo: Los empaquetamientos de Apolonio. Por otro lado se abordaran los diez casos particulares de este problema y se expondrá su solución, con mayor o menor profundidad en función de su dificultad.
2. En el capítulo 2 se introducen los conceptos básicos de los empaquetamientos de Apolonio: definiciones esenciales, principales propiedades y el procedimiento para la construcción de los mismos. Además, incluye un apartado sobre la fórmula de Descartes, que se explica y demuestra con todo detalle. Para terminar se incluyen algunos ejemplos de empaquetamientos de Apolonio, para asimilar mejor el concepto.
3. En el tercer capítulo, se presentan los principales aspectos de los empaquetamientos de Apolonio aplicados a la teoría de números. Incluye los conceptos de grupo de Apolonio y raíces cuádruples, para posteriormente abordar la teoría de reducción. Se realiza un estudio sobre las

curvaturas de las circunferencias, para en particular contar el número de círculos de un empaquetamiento teniendo en cuenta o no su multiplicidad.

4. Respecto al último capítulo, se incluye la definición del objeto conocido como círculo de Ford, el cual se define a partir del concepto de empaquetamiento de Apolonio. Además, se relaciona este concepto con la sucesión de Fibonacci, introduciendo resultados que muestran diferentes relaciones entre el conjunto de los círculos de Ford y los números de Fibonacci.

Capítulo 1

El problema de Apolonio

En este primer capítulo del trabajo, se dará una pequeña introducción al problema enunciado por Apolonio, un problema muy interesante de la geometría clásica y que no se estudia mucho. Además, se incluye el desglose del problema en diez subproblemas planteados por Apolonio, de los cuales se realizará un profundo estudio de algunos, mientras que otros se enunciarán únicamente detallando alguna propiedad. Para su redacción, me he apoyado en el artículo [9] o en el vídeo divulgativo [12].

1.1. Enunciado del problema

Dados tres objetos distintos en el plano, cada uno de los cuales puede ser punto, recta o círculo, construir una circunferencia que sea tangente a los tres objetos dados (o los contenga en el caso de los puntos).

Este problema se considera uno de los problemas más famosos de la geometría. Fue enunciado y resuelto por Apolonio de Perga en su obra desaparecida “*Tangencias*” en el año 200 a.C. aproximadamente. Es obvio que existen muchas combinaciones entre los tres tipos de objetos que generan diferentes casos del problema. Por otro lado, cada caso del problema presenta un número diferente de soluciones. Normalmente el método de resolución de estos problemas se basa en la búsqueda del centro del círculo que resuelva el problema. Esto se abordará más en particular para cada caso en la siguiente sección.

1.2. Los 10 problemas de Apolonio

En concreto, Apolonio dividió el problema en diez casos, conocidos como *Los 10 problemas de Apolonio*, cada uno de una dificultad diferente y que se clasifican según una escala de complejidad, que tiene cinco niveles. Los casos 1 y 2 corresponden al primer nivel de dificultad, los 3 y 4 forman el segundo nivel de complejidad, el tercer nivel está compuesto por los casos 5,6 y 7, mientras que el 4 nivel incluye los casos 8 y 9. Por último el caso 10 es el único que pertenece al quinto nivel de dificultad. Normalmente, los casos que más círculos incluyen son de mayor complejidad.

Nota 1.2.1. Como he mencionado, por desgracia, los libros sobre tangencias de Apolonio se encuentran perdidos pero a través de los libros de Pappus de Alejandría (S.IV d.C.) se puede saber que Apolonio pudo resolver los nueve primeros. El último sobre tres círculos y el de más dificultad se cree que fue resuelto por el brillante matemático inglés Isaac Newton(1642-1727).

Notación 1.2.2. Escribiremos P , R y C para referirnos respectivamente a puntos, rectas y círculos. Esta notación aparece a lo largo de todo el texto recurrentemente.

A continuación, se van a enumerar los diez casos propuestos por Apolonio con sus principales particularidades y en algunos casos se resolverán los problemas de una forma más detallada.

Notación 1.2.3. Escribiremos PPP para referirnos al caso en el que se toman tres puntos inicialmente y análogamente en el resto de casos.

Nota 1.2.4. Durante todas las figuras de esta sección los elementos iniciales de cada problema se identifican con el color rojo, mientras que las soluciones con el color verde. Los pasos auxiliares se identifican mediante el color negro.

1. PPP

Dados tres puntos P_1 , P_2 y P_3 , que no estén alineados, ya que en caso contrario el problema no tendría solución, vamos a buscar un círculo que pase por los tres. Para resolver este caso se utilizan técnicas de geometría básica y los conceptos de mediatriz o circuncentro. Este caso admite una única solución. Consideramos el triángulo $P_1P_2P_3$ y obtenemos el circuncentro O del triángulo. Ahora, por la definición de circuncentro sabemos que el triángulo está inscrito en el círculo C_1 de centro O y de radio OP_1 . C_1 contiene todos los vértices que son los puntos dados, por lo que hemos llegado a una solución del problema ya que hemos encontrado un círculo que contiene a P_1 , P_2 y P_3 . La unicidad viene determinada por el hecho de que cualquier otra circunferencia que pase por los tres puntos, su centro debe estar

a la misma distancia de los tres y por tanto pertenecer a las tres mediatrices.

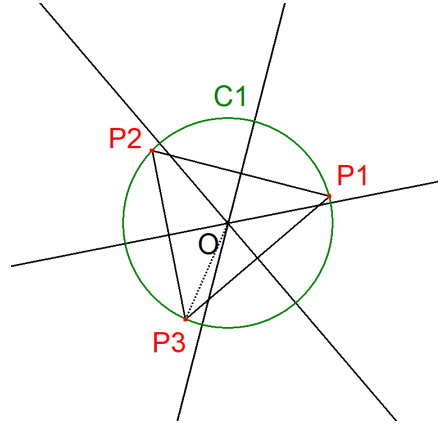


Figura 1.1: Resolución gráfica del problema PPP

2. RRR

Dadas tres rectas R_1 , R_2 y R_3 , que no sean todas paralelas (ya que en caso contrario no existiría solución), hay que encontrar un círculo que sea tangente a las tres. El método de resolución es muy similar al anterior y se basa en los conceptos de bisectriz, incentro y excentro.

Recordamos que el **incentro** de un triángulo es el punto en el que se cortan las tres bisectrices de sus ángulos internos y es el centro del círculo inscrito en el triángulo, tangente a sus tres lados. Por otro lado, un **excentro** es el punto en el que se cortan las bisectrices de los dos ángulos externos del triángulo (formado por un lado y por la extensión de los otros dos) y por la bisectriz del vértice opuesto al mismo lado. Siendo el centro del círculo exinscrito, que es tangente al lado y a las respectivas prolongaciones de los otros dos lados.

A diferencia del anterior, distinguimos 2 casos:

- a) **Ninguna de las rectas es paralela entre sí.** En este primer caso existen 4 posibles soluciones. Definimos por ABC el triángulo que forman las tres rectas dadas siendo $A = R_1 \cap R_2$, $B = R_2 \cap R_3$ y $C = R_3 \cap R_1$. Si tomamos las bisectrices del triángulo ABC se cortan en el incentro O_1 y que es el centro del círculo inscrito. Para hallar el radio de la circunferencia debemos conocer los puntos de tangencia, con hallar un único punto de tangencia valdría. Sea R_4 una recta perpendicular a R_3 que pase por O_1 y tomamos $P_1 = R_3 \cap R_4$, entonces el segmento O_1P_1 es el radio buscado. Así que finalmente tenemos que el círculo C_1 de centro O_1 y radio O_1P_1 es la primera solución del problema, ya

que es tangente a los tres lados del triángulo y por lo tanto a las tres rectas R_1 , R_2 y R_3 .

Respecto a las otras tres soluciones de este caso, son análogas y se resuelven todas del mismo modo así que solo se va a explicar como hallar una. Tomamos las bisectrices exteriores de los ángulos B y C y la bisectriz interior de A . El punto intersección de las tres bisectrices (se demuestra fácilmente que estas tres rectas pasan por el mismo punto) es uno de los tres excentros del triángulo que llamaremos O_2 . De la misma forma que hemos hecho en la primera solución determinamos el radio de C_2 . Repitiendo este procedimiento para los otros excentros podemos definir las otras dos soluciones del problema C_3 y C_4 .

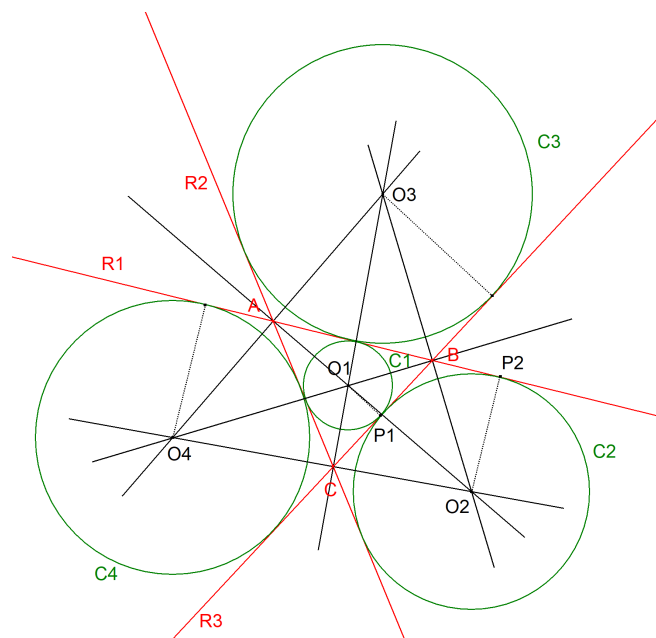


Figura 1.2: Resolución gráfica del problema RRR caso a).

- b) **2 rectas son paralelas entre sí.** Para este caso particular únicamente existen 2 soluciones. Supongamos que R_1 y R_2 son paralelas, mientras que R_3 es una recta secante a las otras dos. Consideramos, los puntos de intersección de las rectas $P_1 = R_1 \cap R_3$ y $P_2 = R_2 \cap R_3$. Ahora tomamos las dos bisectrices de los ángulos que forman las rectas con vértices P_1 y P_2 , que además se encuentran entre las dos rectas paralelas, y la recta paralela a R_1 y R_2 , que tiene la propiedad de que está a la misma distancia de las dos rectas, y que denotaremos como R_4 . Las intersecciones de las bisectrices con la nueva recta R_4 son los centros de los círculos que son solución al problema, a los que llamaremos O_1 y O_2 . Para

definir los radios, procedemos como en el caso anterior. Podemos comprobar, dado la sencillez de la resolución, que la hipótesis de que dos de ellas sean paralelas simplifica el problema.

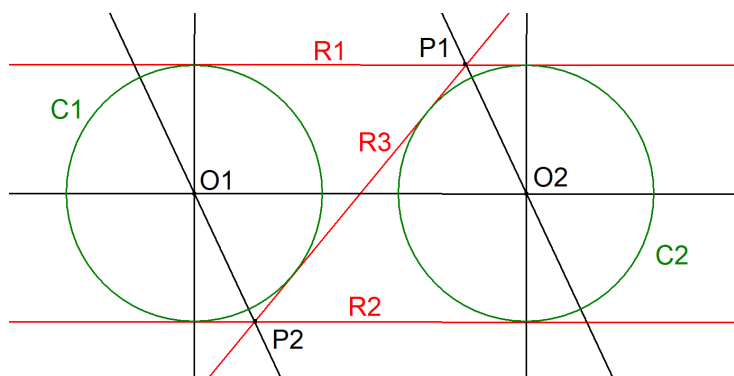


Figura 1.3: Resolución gráfica del problema RRR caso b).

En estos dos primeros problemas se consideran los más sencillos, en concreto pertenecen al nivel uno de la escala de dificultad. Por esta razón, su solución es bien conocida y la hemos recordado con todo detalle. En este nivel de dificultad, no hay ninguna circunferencia y los tres elementos son del mismo tipo (tres punto o tres rectas).

3. PPR

Este caso pertenece al segundo nivel de complejidad y su resolución depende de conceptos geométricos más avanzados, en concreto, sobre tangencias. En general, presenta dos posibles soluciones. Consideramos dos puntos P_1 y P_2 y la recta R . Las soluciones tienen la propiedad de que los centros se encuentran en la mediatriz del segmento que une los dos puntos, porque el centro tiene que estar a la misma distancia de los dos. Por otro lado, hay que definir los puntos de tangencia con la recta, que deben cumplir la relación de equivalencia $MT_1^2 = MT_2^2 = MP_1 \times MP_2$, donde M es la intersección de el rayo P_1P_2 con R . Para ello se hace uso de la definición de un círculo auxiliar, con centro en la mediatriz y que pase por P_1 y P_2 y una recta tangente a este círculo que pase por M y llevar la distancia del segmento MT , donde T es el punto de tangencia, a R , para así determinar los puntos de tangencia T_1 y T_2 de las soluciones. Una vez definidos los puntos de tangencias usando rectas perpendiculares hallamos los centros solución. Para una comprensión más precisa se incluye la figura 1.4 donde se da una resolución gráfica al problema.

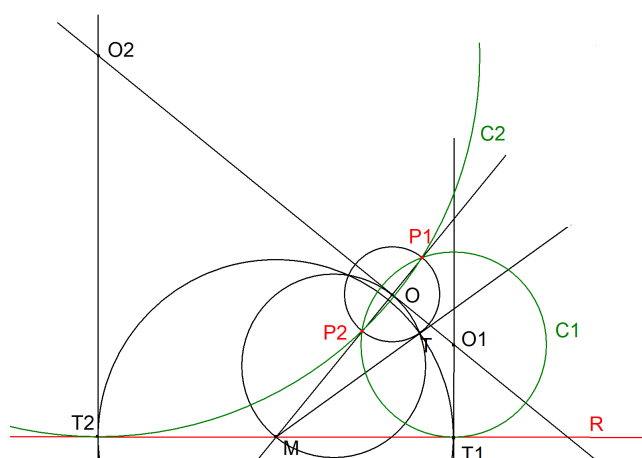


Figura 1.4: Resolución gráfica del caso general de PPR

El problema 3 presenta dos casos particulares, cuyo razonamiento es mucho más sencillo y no necesita una explicación en profundidad:

- a) **Uno de los dos puntos pertenece a la recta.** Para este caso la solución es única, el centro es la intersección de la mediatriz del segmento que une los dos puntos dados y la recta perpendicular que pasa por el punto contenido en la recta. Véase la figura 1.5a.
- b) **Los dos puntos se encuentran a la misma distancia de la recta.** Existe una única solución. El centro de la solución es la intersección de la mediatriz del segmento que une los puntos dados y la mediatriz del segmento que une uno de los puntos con el punto intersección T de la mediatriz del segmento que une los puntos con la recta dada. Además T es el punto de tangencia. Se puede comprobar su resolución en la figura 1.5b.

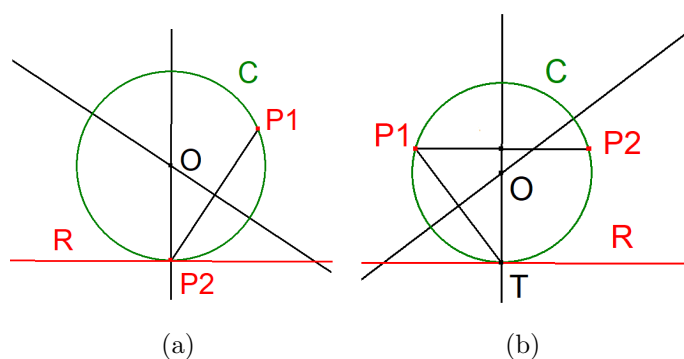


Figura 1.5: Casos particulares del problema PPR

Por último, la recta dada divide el plano en dos semiplanos y es necesario que los dos puntos pertenezcan al mismo semiplano ya que sino el problema no tiene solución.

4. PRR

Se considera que este caso es de la misma dificultad que el problema PPR. Consideramos dos rectas R_1 y R_2 y un punto P . Los centros de las soluciones deben pertenecer a la bisectriz del ángulo que forman las dos rectas y además debe contener al punto dado y por lo tanto a su punto simétrico P' respecto de la bisectriz. Esta última propiedad nos lleva al caso anterior PPR, en concreto, el punto dado, su simétrico y cualquiera de las dos rectas. Para su resolución se procede como en el problema 3. Casi siempre tiene solución, ya que los dos puntos del nuevo problema se encuentra en el mismo semiplano. Si el punto pertenece a la intersección de las dos rectas no existe solución.

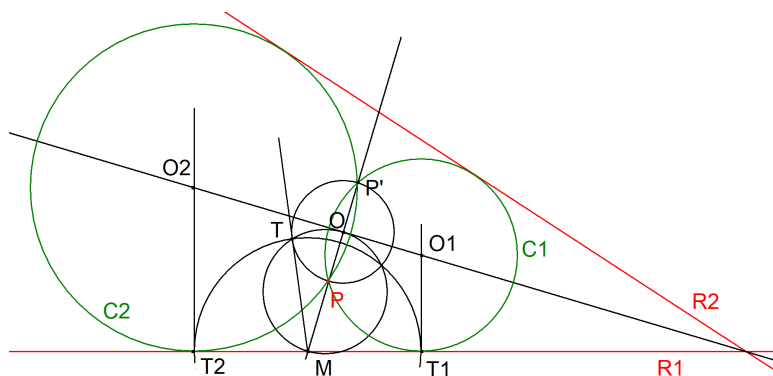


Figura 1.6: Resolución gráfica del caso general de PRR

Este problema tiene 3 casos particulares cuya construcción es muy sencilla y que se dejará indicada a continuación:

- a) **Las dos rectas son paralelas.** El punto debe estar entre las dos rectas para que tenga solución. Los centros de los círculos solución vienen dados por la intersección del círculo de centro el punto dado y radio r que es igual a la mitad de la distancia entre las dos rectas R_1 y R_2 . En el caso que el punto pertenezca a una de las dos rectas solo existe una solución. Véase la figura 1.7a.
- b) **El punto pertenece a una de las rectas secantes.** Los centros de los círculos solución son los puntos de intersección de las bisectrices con la recta perpendicular a la que pertenece el punto y que lo contiene. Véase la figura 1.7b.
- c) **El punto pertenece a la bisectriz del ángulo que forman las rectas.** Calculamos la recta perpendicular a la bisectriz y

que pasa por P . Consideramos el punto de corte M con una de las rectas, y la circunferencia con centro en M y radio MP . Los puntos de corte con R_1 son los puntos de tangencia y por lo tanto los centros son la intersección de la perpendicular a R_1 en los puntos de tangencia con la bisectriz. Véase la figura 1.7c.

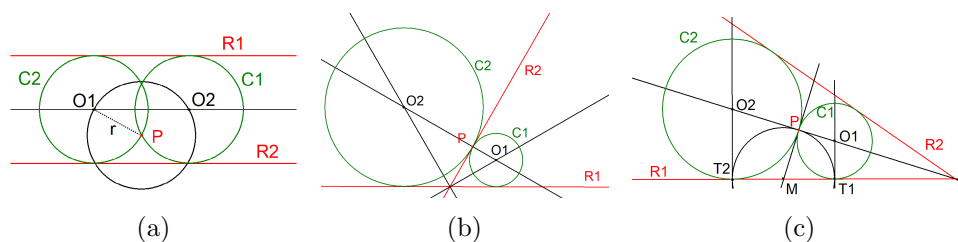


Figura 1.7: Casos particulares del problema PRR

Los problemas 3 y 4 pertenecen al segundo nivel de dificultad donde todavía no hay ningún círculo involucrado pero los elementos son de dos puntos diferentes (dos puntos y una recta o un punto y dos rectas). Los problemas 5, 6 y 7 pertenecen tercer nivel de dificultad, que corresponde a los tres casos donde uno de los elementos es un círculo (y los otros dos o bien dos puntos, dos rectas o un punto y una recta).

5. PPC

Para este problema existen cuatro casos bien diferenciados en función de la posición de los puntos respecto al círculo. Cada caso tiene un número de soluciones diferente y tiene un método de resolución particular. A continuación, se aborda cada uno de ellos detalladamente. Consideramos aquí dos puntos P_1 y P_2 y el círculo C .

- a) **Un punto pertenece al interior del círculo y el otro no.**
En este caso no existe solución. Esto sucede debido a que todos los círculos que pasan por los dos puntos cortan al círculo dado.
- b) **Los dos puntos pertenecen o no al interior del círculo.**
Realmente son dos casos pero se resuelven de forma similar y se consideran como uno. Al igual que para el problema PPR existen dos posibles soluciones que se encuentran en la mediatriz del segmento que une los dos puntos. Para su resolución se utilizan los conceptos de eje radical y centro radical, los cuales son esenciales para determinar los puntos de tangencia de la solución. Apoyándonos en la figura 1.8 vamos a detallar el razonamiento de la solución. Recordamos que el **eje radical** de dos círculos es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia (valor obtenido al multiplicar las longitudes de los segmentos de

una recta que corta a la circunferencia y pasa por dicho punto) respecto de ambas circunferencias. Considerando los círculos dos a dos, los ejes radicales, se cortan en el lugar geométrico llamado **centro radical**. Los centros solución se encuentran en la mediatriz del segmento P_1P_2 y por otro lado la recta que pasa por P_1 y P_2 es el eje radical de las dos soluciones. Se traza un círculo auxiliar que pase por P_1 y P_2 y que corte a C , entonces el eje radical de estos dos círculos y de los círculos solución definen el centro radical R . Razonando como en el problema 3, hallamos las tangentes desde R al círculo dado que determinan los puntos de tangencia T_1 y T_2 . Los centros solución son la intersección de las rectas OT_1 y OT_2 con la mediatriz del segmento P_1P_2 .

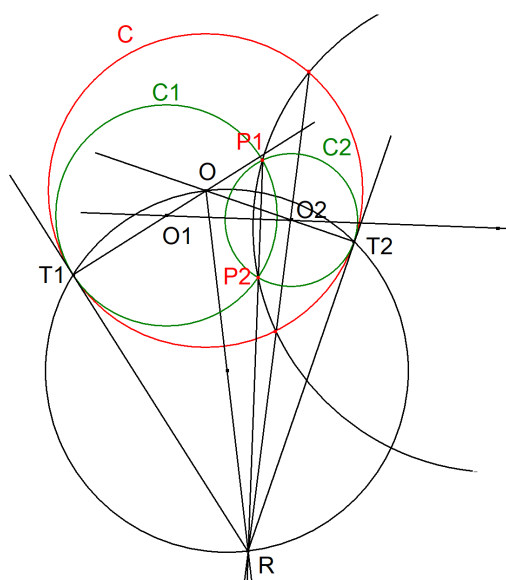


Figura 1.8: Resolución gráfica del caso b) de PPC

- c) **Uno de los dos puntos pertenece al círculo.** La solución es única y la construcción es muy sencilla. Al igual que en (b) no importa si el otro punto está en el interior o exterior del círculo, se resuelven de la misma forma. Sean P_1 y P_2 dos puntos de tal forma que uno de los dos pertenece al círculo C . Supongamos que P_1 pertenece a C . Consideramos el segmento que une los dos puntos y construimos su mediatriz M . El centro solución debe pertenecer a ella, ya que buscamos un punto que esté a la misma distancia de los dos. Construimos la recta R que pasa por el centro O de C y P_1 y consideramos la intersección de las dos rectas $O_1 = R \cap M$, que es el centro del círculo que buscamos y por lo tanto hemos terminado.

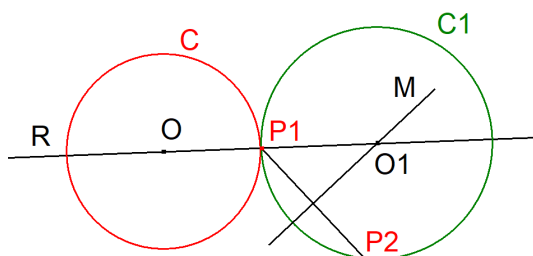


Figura 1.9: Resolución gráfica del caso c) de PPC

- d) **Los dos puntos pertenece al borde del círculo.** Al igual que para el caso (a) no existe solución, ya que todas las que contienen los dos puntos cortan al círculo inicial.

6. PRC

Respecto a este caso, dada su complejidad solo se va a mencionar el dato de que la idea, es usar una inversión en la que se usa como polo el punto dado y potencia arbitraria. La posición de los objetos, si se cortan o no y si son tangentes o no generan multitud de casos particulares, algunos de ellos se describen sin mayores detalles a continuación.

- a) **El punto es exterior al círculo y ambos están situados en el mismo semiplano definido por la recta dada.** Presenta cuatro soluciones y es el de mayor dificultad. Aun así se considera el caso general.
- b) **El punto se encuentra en el interior del círculo y la recta no es secante.** No existe solución ya que cualquier tangente a la recta que pasa por el punto es secante al círculo.
- c) **El punto y el círculo se encuentran en distintos semiplanos de los que la recta divide el plano.** No existe solución ya que cualquier círculo tangente a el círculo original y que pase por el punto dado corta a la recta.
- d) **La recta es secante al círculo y el punto se encuentra en el exterior o interior.** Este caso presenta dos posibles soluciones al problema.
- e) **La recta es tangente al círculo.** La solución es única. A excepción de dos subcasos, el primero se da cuando el punto es exterior al círculo y ambos están situados en el mismo semiplano, entonces existen tres posibles soluciones. Mientras que el segundo tiene infinitas soluciones y ocurre cuando la recta y la circunferencia son tangentes en el punto original.

- f) **El punto pertenece al círculo.** Presenta dos soluciones, sea la recta secante o no.
- g) **El punto pertenece a la recta.** Sea la recta secante o no, presenta dos posibles soluciones, al igual que en el caso anterior.

Las indicaciones para la resolución del problema no se van a incluir pero si el lector esta interesado puede consultar la de (a), ya que es el más general, junto con su representación gráfica en [9, pág 66, problema 8]. El resto de casos se procede de la misma forma, pero la dificultad disminuye.

7. RRC

Para resolver este caso se recurre a disminuir el radio del círculo dado hasta convertirlo en un punto (su centro). A partir de aquí las rectas dadas R_1 y R_2 debidamente trasladadas según vectores opuestos a una distancia igual al radio dan un conjunto de cuatro pares de rectas, $R'_1R'_2$, $R''_1R'_2$, $R'_1R''_2$ y $R''_1R''_2$. Esto permite reducir el problema al caso PRR, generando cuatro problemas reducidos y obtener hasta ocho posibles círculos solución (dos posibles por cada problema reducido), ya que normalmente los centros de los círculos solución de este problema reducido son los mismos que lo del problema original. Por otro lado, los radios de la solución original son los del problema reducido sumando o restando el radio del círculo dado, en función del par de rectas que elijamos. No obstante, no siempre son válidas las soluciones, únicamente lo son en los casos en los que las bisectrices del problema reducido y original coinciden. Este problema tiene la particularidad de que siempre presenta solución y al igual que para el caso anterior existen muchos casos con diferentes números de soluciones. A continuación se realiza un pequeño estudio de algunos de ellos tratados de forma más general.

- a) **Las rectas son secantes al círculo y se cortan en el interior o en el exterior.** Estos casos presentan ocho soluciones, ya que se consideran los cuatro problemas reducidos.
- b) **Una recta tangente y otra secante al círculo. Las rectas se cortan en un punto distinto al de tangencia.** Este caso presenta seis posibles soluciones.
- c) **Las dos rectas son paralelas.** Este caso puede presentar muchos subcasos que no se van a incluir, pero puede tener seis, cuatro o dos soluciones en función de la posición de las rectas con respecto al círculo. En este caso toma un papel muy importante el hecho de considerar los círculos de radio infinito como rectas.
- d) **Las dos rectas se cortan y son exteriores al círculo original.** Este caso es el más común cuando se propone este problema

y presenta cuatro soluciones. Para su resolución se procede como se ha indicado tomando como pares de rectas las dos paralelas exteriores $R'_1R'_2$, que razonando como en el caso PRR y reajustando los radios nos proporciona las dos primeras soluciones como se puede ver en la figura 1.10. Para las otras dos posibles soluciones se considera el par de rectas paralelas interiores $R''_1R''_2$ y se procede de la misma forma con la diferencia de sumar el radio en vez de restarlo. Las otras dos combinaciones de las rectas trasladadas, es decir, $R'_1R''_2$ o $R''_1R'_2$ no proporcionan soluciones válidas ya que los centros solución no se encuentran en la bisectriz definida por R_1 y R_2 .

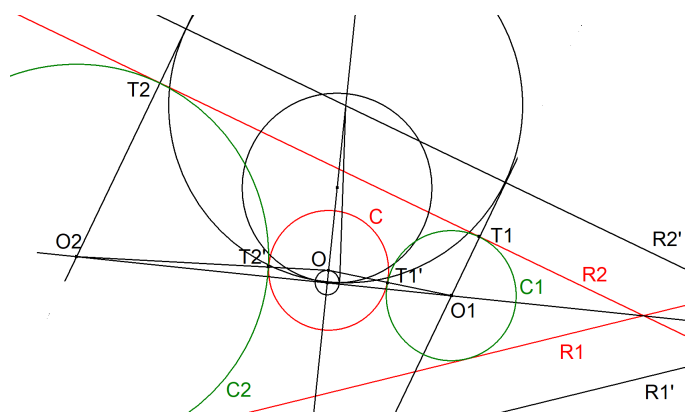


Figura 1.10: Resolución gráfica del caso d) de RRC

- e) **Las dos rectas se cortan en un punto que pertenece al círculo.** Para este caso existen dos subcasos, el primero ocurre cuando las dos rectas son secantes al círculo y tiene cuatro soluciones. Por otro lado cuando una de las rectas es tangente al círculo únicamente presenta dos soluciones.

Los problemas 8 y 9 pertenecen al cuarto nivel de dificultad donde siempre hay involucrados dos círculos mientras que el tercer objeto es o bien un punto o una recta. La resolución de estos casos es de alta dificultad, por lo que solo se aportaran datos característicos interesantes.

8. PCC

Para la resolución de este caso se basa en el mismo planteamiento que el caso PRC, es decir, considerar la inversión mencionada de potencia arbitraria. Posteriormente se procede a aplicar la inversión de los elementos dados, resolución por tangentes comunes y construcción de las soluciones gracias a la reciprocidad de la inversión. Generalmente

tiene cuatro soluciones, aunque presenta diferentes casos, algunos de ellos han sido descritos en las siguientes líneas.

- a) **Los círculos son exteriores y el punto exterior a ellos.** Este caso se considera el caso general ya que a partir de este se pueden resolver el resto. Tiene cuatro soluciones. Su resolución con todo detalle se puede consultar en [9, pág 65, problema 6].
- b) **Los círculos son secantes.** Normalmente presentan dos soluciones. Aunque en el caso que el punto sea uno de los de la intersección entre los dos círculos, no presenta solución.
- c) **El punto pertenece a uno de los círculos.** Cuando ocurre esto el problema tiene por lo general dos soluciones aunque existen excepciones. En los siguientes tres casos el problema tiene solución única:
 - Los círculos son tangentes exteriores.
 - Un círculo es interior al otro y el punto pertenece a este y obviamente es interior al otro.
 - Son tangentes interiores y el punto pertenece al círculo que está en el interior del otro círculo.

Por último, si los círculos son tangentes y el punto es el de tangencia tiene infinitas soluciones.

- d) **Un círculo es interior al otro y el punto es interior o exterior a ambos.** Este caso no admite solución ya que todas las posibles soluciones tangentes a la de dentro son secantes al círculo exterior.

9. RCC

La idea para resolver este problema es realizar una serie de ajustes y transformaciones, para reducirlo al problema PRC. Para ello se considera el centro del uno de los círculos como el punto, al otro círculo se le suma el radio del primero, dando lugar a uno más grande y se considera la recta paralela a la original, que se aleje del punto la distancia equivalente al radio del primer círculo. Una vez definido el caso PRC con los objetos previamente determinados se resuelve como se ha resuelto anteriormente este caso. Para terminar, como los centros solución coinciden con los del problema original. Por ello con realizar el ajuste de los radios llegamos a la solución buscada. El número máximo de soluciones es ocho a excepción del caso donde presenta infinitas soluciones. A continuación se exponen algunos de los casos posibles y su número de soluciones como se ha hecho a lo largo del trabajo.

- a) **Los tres objetos son exteriores o secantes entre sí.** Presenta ocho soluciones posibles.

- b) **Los círculos se encuentran en distintos semiplanos definidos por la recta o los círculos están contenidos el uno en el otro y la recta es exterior.** Estos casos no presentan solución ya que cualquier solución posible y tangente a dos objetos corta o no es tangente al tercero.
- c) **Los círculos tangentes y la recta tangente en el punto de tangencia.** Estos casos son especiales ya que presentan infinitas soluciones.

El resto de casos posibles presentan dos, cuatro o seis soluciones y no se van a incluir ya que existen demasiados y no se considera el objetivo del trabajo.

Se puede observar que los problemas del nivel 4 de dificultad se resuelven modificando el problema mediante transformaciones para reducirlo a uno más simple ya abordado. Por último, se va a abordar el problema que pertenece al quinto nivel de complejidad y es el de mayor dificultad, es el caso en el que se consideran inicialmente tres círculos. Dada su complejidad no se va a describir detalladamente y únicamente nos vamos a centrar en el caso que estos sean tangentes dos a dos, que es el objetivo final del trabajo.

10. CCC

Para resolver el problema debemos realizar una serie de ajustes que nos llevan reducir el problema al caso PCC. Para ello, se consideran tres círculos de centros O_1 , O_2 y O_3 con sus respectivos radio r_1 , r_2 y r_3 . Para el problema modificado se consideran los círculos de centros O_1 y O_2 , con radios $r_1 + r_3$ y $r_2 + r_3$ o $r_1 - r_3$ y $r_2 - r_3$ respectivamente y el punto O_3 . Una vez realizado estas transformaciones se puede comenzar a resolver el problema como si fuese el caso PCC. Se recomienda al lector consultar el vídeo [13], donde se ofrece una solución detallada de la solución del caso más común de este problema, aquel donde los tres círculos son exteriores. Existen muchos casos particulares y cada caso tiene un número de soluciones diferentes. Hay casos en los que hay hasta ocho soluciones (cuatro para cada reducción al caso PCC) y otros en los que no hay solución, algunos de ellos se muestran a continuación:

- a) **Los tres círculos son exteriores o los tres son secantes entre sí.** Este casos presenta ocho soluciones y es el de mayor dificultad.
- b) **Los tres círculos son concéntricos o dos son concéntricos y uno exterior.** Este caso no tiene solución.

c) **Los círculos son tangentes entre sí en el mismo punto.**

Existen infinitas soluciones para este posicionamiento de los círculos.

El resto de opciones tienen dos, cuatro o seis soluciones. El estudio del trabajo se va a centrar en el caso en que los tres círculos son tangentes dos a dos, que presenta dos soluciones, y es conocido como *problema fundamental de Apolonio*. Se aborda su solución con profundidad en la sección 2.1.

A medida que se ha ido escribiendo el capítulo se ha llegado a la conclusión final de que a mayor número de círculos involucrados, mayor es la dificultad del problema.

Nota 1.2.5. Se puede consultar la solución detallada, si fuese necesario, del caso general de cada uno de estos diez problemas la lista de reproducción de youtube [14], donde aparece cada solución explicada paso a paso con todo detalle. Contiene exactamente once vídeos uno para cada problema y uno de introducción en cada caso.

Nota 1.2.6. Como curiosidad, estos 10 problemas aparecen recurrente en el área del dibujo técnico y su resolución es básica en cualquier grado relacionado con este área. Esto nos da una visión de lo importante que son las matemáticas en cualquier ámbito de la vida, en este caso en el de las artes plásticas.

Capítulo 2

Conceptos básicos sobre empaquetamientos de Apolonio

A lo largo de este capítulo se introducen las principales nociones y propiedades sobre los empaquetamientos de Apolonio, para poder comprender y demostrar la mayoría de resultados expuestos en el trabajo. Para la redacción de este capítulo me he apoyado principalmente en [3] y [6].

2.1. Definición y construcción

Como se ha expresado durante la introducción la base de nuestro trabajo es el problema de Apolonio, particularmente el caso en el que se consideran tres círculos tangentes dos a dos, en concreto estamos ante un caso particular del décimo problema de Apolonio propuesto en la sección 1.2 y que es conocido como problema fundamental de Apolonio.

Teorema 2.1.1. *(Problema fundamental de Apolonio) Dados tres círculos tangentes dos a dos C_1, C_2, C_3 , entonces existen exactamente dos círculos C_4, C_5 , tangentes a los tres.*

Para su demostración antes se van a introducir una serie de nociones:

Definición 2.1.2. Una **inversión circular** de un punto P con respecto a un círculo C con centro O y radio r es el punto P' que se encuentra en el rayo OP y que cumple la ecuación $r^2 = d(O, P)d(O, P')$. Se llama **centro de inversión** a O , que es el centro del círculo C .

En este apartado consideraremos la inversión circular de conjuntos de puntos (por ejemplo rectas y círculos). La propiedad más importante de

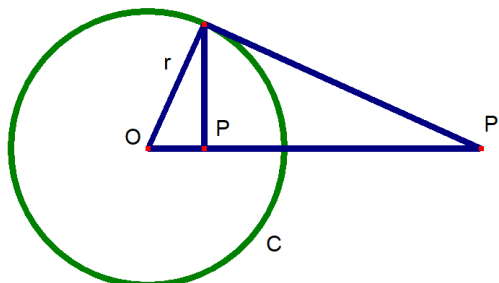


Figura 2.1: Inversión de un punto respecto de C

esta transformación es que si volvemos a realizar una inversión respecto al punto invertido obtenemos el punto original y como consecuencia directa, lo mismo ocurre para cualquier objeto geométrico. Esta propiedad de que la inversa sea la propia transformación, es muy importante a lo largo de la prueba del Teorema 2.1.1 y sus respectivos lemas.

Notación 2.1.3. La aplicación inversión circular respecto del círculo C se escribirá como I_C .

Lema 2.1.4. *La inversión circular de dos puntos P y Q con respecto al círculo C de centro O y radio r conserva los ángulos entre los puntos. Es decir, que si $I_C(P) = P'$ y $I_C(Q) = Q'$, entonces los triángulos OPQ y $OQ'P'$ son semejantes. Además,*

$$\begin{aligned}\angle POQ &= -\angle Q'OP', \\ \angle OQP &= -\angle OP'Q', \\ \angle QPO &= -\angle P'Q'O.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Demostración. De la definición de inversión circular,

$$\begin{aligned}r^2 &= d(O, P)d(O, P') \\ r^2 &= d(O, Q)d(O, Q')\end{aligned}$$

donde r es el radio de C respecto al cual se invierten los puntos. Entonces $d(O, P)d(O, P') = d(O, Q)d(O, Q')$. y por lo tanto,

$$\frac{d(O, P)}{d(O, Q)} = \frac{d(O, Q')}{d(O, P')}.$$

Es claro gracias a la figura 2.2 que $\angle POQ = \angle P'OQ' = -\angle Q'OP'$. Utili-

zando lo anterior sabemos si que $k = \frac{d(O,P)}{d(O,Q')} = \frac{d(O,Q)}{d(O,P')}$ tenemos que,

$$\begin{aligned} d(O, P) &= k d(O, Q') \\ d(O, Q) &= k d(O, P') \\ \angle POQ &= -\angle Q'OP'. \end{aligned}$$

se cumplen las condiciones de semejanza [10, pág 44, 6.2] y por lo tanto los triángulos OPQ y $OQ'P'$ son semejantes. Haciendo uso la semejanza de los triángulos y teniendo en cuenta la orientación de los ángulos tenemos que los ángulos cumplen

$$\begin{aligned} \angle OQP &= \angle Q'P'O = -\angle OP'Q', \\ \angle QPO &= \angle OQ'P' = -\angle P'Q'O. \end{aligned}$$

Con esto queda probado (2.1) y hemos terminado la prueba. \square

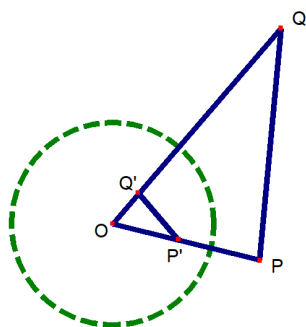
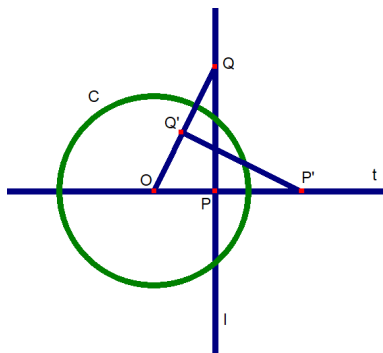


Figura 2.2

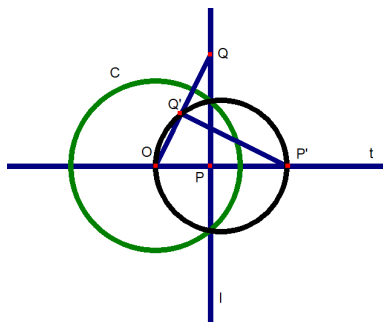
La prueba de este lema no se va incluir en el trabajo, pero se basa en la definición de inversión circular y en conceptos de geometría básica. Se puede encontrar con todo detalle en

Lema 2.1.5. *Sea C un círculo de centro O . La inversión respecto a C de una recta l que no pasa por O , $I_C(l)$, es un círculo que contiene a O y la inversión de un círculo que pasa por O es una recta que no pasa por O .*

Demostración. Sea l una recta que no pasa por el centro de inversión O . Tomamos ahora la recta perpendicular a l que pasa por O que llamaremos t y sea $P = l \cap t$. Sea P' la imagen de P a través de la inversión circular respecto a C . Es fácil observar que cada vez que cogemos un punto de la recta l que se aleja de O , su imagen se acerca a O . De esto se deduce que la imagen de l no puede ser una recta. Sea Q cualquier otro punto de l y Q' su imagen por la inversión.

Figura 2.3: Inversión de P y Q con respecto de C

Aplicando el lema 2.1.4 tenemos que los triángulos OPQ y $OQ'P'$ son semejantes. Por construcción $\angle OPQ$ es recto y como consecuencia del lema tenemos que, $\angle OPQ = -\angle OQ'P'$ y por lo tanto $\angle OQ'P'$ es un ángulo recto. Ahora $\angle OQ'P'$ está inscrito en un círculo con diámetro OP' de manera que Q' pertenece al círculo y como consecuencia la imagen de l está contenida en un círculo de diámetro OP' .

Figura 2.4: Representación del círculo de diámetro OP' que contiene a Q

Se puede comprobar que deshaciendo la inversión todo punto del círculo tiene su preimagen en l , por lo que la imagen de l es el círculo de diámetro OP' . Razonando de la misma manera pero en sentido contrario, se puede demostrar que la imagen de un círculo a través de la inversión circular es una recta al invertir la construcción anterior. \square

Lema 2.1.6. Sea C un círculo de centro O . La inversión respecto a C de un círculo C_1 que no pasa por O , $I_C(C_1)$, es un círculo que no pasa por O .

Demostración. Existen tres casos bien diferenciados, cuando C_1 está dentro de C , cuando C_1 tiene algún punto en común con C , y cuando C_1 está fuera de C . Veamos en primer lugar el primer caso. Sea O_1 y O los centros de C_1 y

C respectivamente. Tomamos el rayo OO_1 , y consideramos las intersecciones del rayo con C_1 que serán P y Q . Entonces, si P' es el inverso de P y Q' el de Q los dos pertenecen al rayo OO_1 . Sea T un punto cualquiera de C_1 y T' su inverso respecto de C . $\angle PTQ$ es un ángulo recto ya que está inscrito en un semicírculo. Debemos ver que $\angle P'T'Q'$ es también recto, ya que estaría inscrito en un círculo con diámetro $P'Q'$ y T' estaría en ese círculo.

Procediendo como en el lema 2.1.5 y por ello aplicando el lema 2.1.4, los triángulos OPT y $OT'P'$ son semejantes. De la misma forma los triángulos OQT y $OT'Q'$ también son semejantes. Para poder comprender de mejor manera el curso de la demostración se incluye en la siguiente figura los objetos definidos hasta el momento.

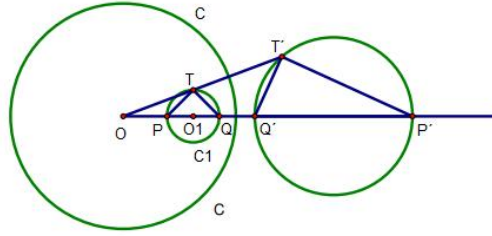


Figura 2.5: Inversión de C_1 con respecto de C

Entonces $\angle OPT = \angle OT'P'$, pero $\angle OPT$ es exterior y por lo tanto la suma de los dos ángulos interiores opuestos, es decir, $\angle OPT = \angle PQT + \angle PTQ$. De la misma forma $\angle OQT = \angle OT'Q'$ porque los triángulos OQT y $OT'Q'$ son semejantes. Reagrupando todo lo anterior tenemos que,

$$\begin{aligned}\angle OPT &= \angle OT'P' \\ \angle PQT + \angle PTQ &= \angle OT'Q' + \angle P'T'Q' \\ \angle OQT + \angle PTQ &= \angle OQT + \angle P'T'Q' \\ \angle PTQ &= \angle P'T'Q'\end{aligned}$$

Como $\angle PTQ$ es recto, entonces $\angle P'T'Q'$ debe ser también recto.

Por el momento se ha probado que la imagen de todo punto de C_1 es un punto de el círculo con diámetro $P'Q'$. Ahora debemos ver que la imagen de C_1 es el círculo entero con diámetro $P'Q'$, para ello debemos mostrar que la preimagen de cualquier punto del círculo con diámetro $P'Q'$ es un punto de C_1 .

Sea X un punto del círculo de diámetro $P'Q'$, consideramos $I_C^{-1}(X)$. Como

$I_C^{-1} = I_C$, $I_C^{-1}(X) = I_C(X) = Y$. Solo debemos probar que si $\angle Q'XP'$ es recto entonces $\angle PYQ$ también. Se procede de la misma forma que para $\angle PTQ$ y $\angle P'T'Q'$ y se llega a que los dos ángulos son iguales y por lo tanto queda probado que es recto. Por lo que la imagen de C_1 a través de la inversión cuando no contiene a O es un círculo exterior que no pasa por O . Los otros dos casos son muy similares a este, por lo que la demostración no se va a incluir ya que se considera un poco repetitivo, siendo el caso del círculo exterior una consecuencia directa del demostrado. La imagen a través de la inversión de un círculo que no contiene a O que está contenido en C es un círculo exterior y por lo tanto aplicando otra vez la inversión tenemos que la imagen de un círculo exterior que no contiene a O es un círculo interior que no contiene a O por lo que queda probado el tercer caso. \square

Hemos visto que la inversión circular, asigna rectas a rectas o círculos y círculos a rectas o círculos dependiendo de si el objeto dado pasa o no por el centro de inversión. Estos lemas muestran que la inversión no es una simple dilatación porque los círculos se asignan a rectas y viceversa.

Corolario 2.1.7. *Las inversiones circulares conservan las tangencias.*

Este corolario es una consecuencia de los lemas anteriores. Del lema 2.1.4 tenemos que se conserva la magnitud de los ángulos. Por ello si dos círculos en este caso son tangentes en un punto con un ángulo α entonces la imagen de estos dos círculos es tangente en el inverso del punto de tangencia con el mismo ángulo α , pero con la opción de tener diferente orientación. Una vez introducidos estos conceptos podemos abordar la demostración del Teorema 2.1.1.

Demostración. (Teorema 2.1.1). Sea C_1, C_2, C_3 tangentes dos a dos. Sea p el punto de tangencia entre C_1 y C_2 . Invertimos los tres círculos con respecto al círculo E centrado en p y de radio r arbitrario. Los círculos C_1 y C_2 se asignarán a líneas rectas, ya que pasan por el centro del círculo de inversión, C'_1 y C'_2 ; Además estas dos rectas son paralelas ya que solo tienen el punto p en común y que la inversión lo envía al infinito. Sin embargo, C_3 se envía al círculo C'_3 tangente a C'_1 y C'_2 , debido a que las inversiones conservan las tangencias. Véase la figura 2.6.

Ahora es fácil comprobar que estamos ante el caso de un círculo tangente a dos rectas paralelas, que es exactamente el problema de Apolonio número 4 cuya solución está incluida en la sección 1.2. Tiene exactamente dos posibles soluciones, C'_4 y C'_5 , que son tangentes a C'_1 , C'_2 y C'_3 . A continuación, invertimos de nuevo respecto al círculo E , y como ninguna de las dos soluciones pasa por el centro p , entonces su imagen serán dos círculos. Si a estos se le suma que la inversión conserva las tangencias, entonces hay dos nuevos

círculos C_4 y C_5 que son las inversiones respecto de E de C'_4 y C'_5 y por lo tanto son tangentes a C_1 , C_2 y C_3 . Hemos demostrado la existencia de dos nuevos círculos que son tangentes a los tres dados, por lo que hemos probado el problema. \square

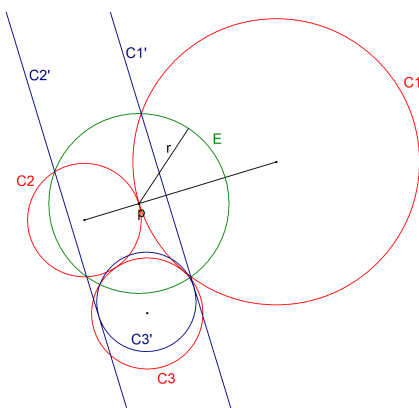


Figura 2.6: Inversión de C_1, C_2, C_3

Una vez demostrado el *problema fundamental de Apolonio*, vemos que podemos proponer una construcción iterativa, para dar una definición del concepto matemático sobre el que va a tratar el trabajo. Para ello partimos de tres círculos tangentes dos a dos; lo más común es que haya un círculo que contenga a los otros dos, aunque existen variaciones; por ejemplo, que uno de los círculos se puede reemplazar por una línea recta, en este caso se considera que ese círculo pasa por el punto en el infinito, este es el caso de los círculos de Ford, abordados en la sección 4.

Una vez definimos los tres primeros utilizamos el procedimiento mostrado en el Teorema 2.1.1, para ir construyendo nuevos círculos tangentes dos a dos y repetimos este razonamiento de forma recursiva sobre los círculos resultantes de la anterior iteración para cada elección de tres círculos. Finalmente llegaremos a obtener un conjunto infinito de círculo que es el objeto matemático que estudiaremos. Una vez explicado como se construyen podemos dar una definición al concepto.

Definición 2.1.8. Un **fractal** es un objeto geométrico en el que una misma estructura, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas y tamaños.

Definición 2.1.9. Un **empaquetamiento de Apolonio** es un fractal que esta compuesto por círculos, y que se construye a partir de conjuntos de tres círculos. De tal forma que, para cada conjunto de tres círculos en el empaquetamiento existe exactamente dos círculos distintos en el empaquetamiento que son tangentes a los tres círculos considerados.

A continuación, se incluye en la figura 2.7 un ejemplo de un empaquetamiento de Apolonio para obtener una mejor comprensión y más visual del concepto.

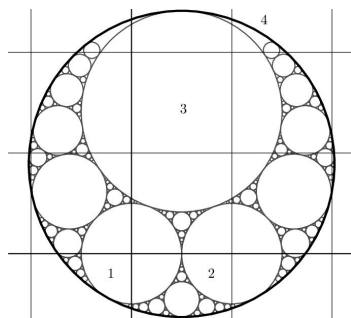


Figura 2.7: Ejemplo de empaquetamiento de Apolonio.

2.2. Fórmula de Descartes

Para poder seguir avanzando en el estudio de los empaquetamientos de Apolonio es necesario comprender los conceptos de curvatura de un círculo y de configuración de Descartes ya que se van a utilizar a lo largo del trabajo.

Definición 2.2.1. La **curvatura** de un objeto geométrico viene a medir lo lejos que esta el objeto de ser plano (o lineal). En el caso de un círculo podemos definirla como el inverso de su radio: los círculos de radio pequeño tienen mucha curvatura mientras un círculo de radio infinito podría verse como una recta.

Definición 2.2.2. Una **configuración de círculos** es un conjunto de cuatro círculos.

Definición 2.2.3. Una **configuración de Descartes** es un conjunto de cuatro círculos tangentes dos a dos, con interiores disjuntos y que están correctamente definidos.

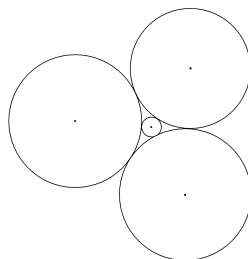


Figura 2.8: Ejemplo de Configuración de Descartes.

Una vez asimilado el concepto de empaquetamiento de Apolonio, vamos a introducir un resultado algebraico que nos permite relacionar las curvaturas de los círculos de cualquier configuración de Descartes.

Teorema 2.2.4. (*Fórmula de Descartes*) Dada una configuración de Descartes y sean a, b, c y d respectivamente las curvaturas de cada uno de los círculos, entonces

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}(a + b + c + d)^2 \quad (2.2)$$

Antes de abordar su demostración se va a introducir una serie de conceptos y resultados para poder abordarla con claridad

Definición 2.2.5. Se define el producto escalar $\langle C_1, C_2 \rangle$, conocido como **producto de Pedoe**, de la siguiente forma

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \begin{cases} (d^2 - r_1^2 - r_2^2)/2r_1r_2 & \text{si } C_1 \text{ y } C_2 \text{ no intersecan} \\ \cos \phi & \text{si } C_1 \text{ y } C_2 \text{ intersecan} \end{cases} \quad (2.3)$$

donde d es la distancia entre los centros, y r_1, r_2 son los radios de los círculos y ϕ es el ángulo bajo el que se produce la intersección.

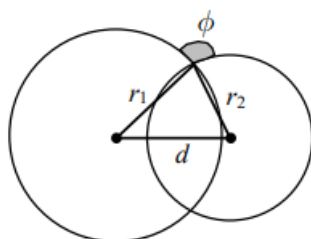


Figura 2.9: Elementos del producto de Pedoe.

El producto de Pedoe tiene su origen en el concepto de potencia de dos círculos introducida por Darboux, que se conoce como producto de Darboux y se define como,

$$C_1 * C_2 = \begin{cases} (d^2 - r_1^2 - r_2^2)/2 & \text{si } C_1 \text{ y } C_2 \text{ no intersecan} \\ r_1r_2 \cos \phi & \text{si } C_1 \text{ y } C_2 \text{ intersecan} \end{cases}$$

Considerando la ecuación de los círculos, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, con centros (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , tenemos que $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. El producto de Darboux se puede reescribir de la forma

$$C_1 * C_2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - r_1^2 - r_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$

Pedoe interpretó esto como un producto interno. Definió el producto interno $\langle C_1, C_2 \rangle$ como,

$$\begin{aligned} \langle C_1, C_2 \rangle &= \frac{(C_1 * C_2)}{r_1 r_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - r_1^2 - r_2^2 - 2x_1 x_2 - 2y_1 y_2}{2r_1 r_2} \\ &= \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2} \end{aligned}$$

Con lo que se consigue definir (2.3).

Definición 2.2.6. Se conoce como **espacio de Minkowski estándar isotrópico** \mathbf{M} de dimensión cuatro a un espacio linear y real que es isomorfo a \mathbb{R}^4 y que tiene un producto interno definido por la métrica inducida por la matriz,

$$g = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Definición 2.2.7. La **aplicación proyectiva de Pedoe**, π , es una aplicación que envía los círculos del plano en rayos del espacio proyectivo de Minkowski $P(\mathbf{M})$, donde \mathbf{M} está definido en 2.2.6. Esta aplicación está definida de la siguiente forma,

$$\pi : \Omega \longrightarrow P(\mathbf{M}) \quad (2.5)$$

donde Ω es el conjunto de todos los círculos del plano, de tal forma que π envía el círculo C de centro (x_0, y_0) y radio r en el rayo $\pi(C)$ que está generado por el vector $[x_0, y_0, 1, x_0^2 + y_0^2 - r^2]$, mientras que en el caso de que sea una recta L , de ecuación $ax + by = c$, es decir, un círculo de radio infinito, la envía en el rayo $\pi(L)$ generado por el vector $[a, b, 0, c/2]$.

Teniendo en cuenta esta definición se va a introducir el siguiente concepto que es clave en la demostración del teorema.

Definición 2.2.8. La **aplicación especial de Pedoe**, $\dot{\pi}$, es una especificación de la aplicación π definida en (2.5),

$$\dot{\pi} : \Omega \longrightarrow \mathbf{M} \quad (2.6)$$

que envía círculos en vectores unitarios de \mathbf{M} de manera que cumplen la siguiente condición. Sea $C \in \Omega$, entonces $\dot{\pi}(C)$ es el vector director unitario que genera el rayo $\pi(C)$.

El vector $\dot{\pi}(C)$ se conocerá como **vector de Pedoe** de un círculo C . En

particular, para un círculo de centro (x, y) y radio r su imagen viene dada por,

$$\dot{\pi}(C) = \begin{bmatrix} x/r \\ y/r \\ 1/r \\ (x^2 + y^2 - r^2)/r \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

donde las dos primeras coordenadas se denotan por \dot{x} e \dot{y} y se llamas posiciones reducidas de C . La tercera es la curvatura del círculo tal y como lo hemos definido y que denotamos por β . Mientras que la cuarta se llama co-curvatura, a la que denotamos por γ , y es la curvatura de la imagen de C a través de la inversión respecto al círculo unidad centrado en el origen.

Es sencillo comprobar que el producto interno del espacio de Minkowski definido por (2.4) coincide con el producto de Pedoe de la definición 2.2.5, es decir, $\dot{\pi}(C_1)^T g \dot{\pi}(C_2) = \langle C_1, C_2 \rangle$. Por ello el producto interno del espacio \mathbf{M} se identifica con el producto de Pedoe y por ello de ahora en adelante lo llamaremos **producto interno de Pedoe**.

Proposición 2.2.9. Sean $A = \dot{\pi}(C_1)$ y $B = \dot{\pi}(C_2)$, dos vectores unitarios que representan círculos. Entonces:

- I. $|A|^2 = -1$ para cada círculo.
- II. $\langle A, B \rangle = \cos \phi$, si $A \cap B \neq \emptyset$.
- III. $\langle A, B \rangle = 1$, si son tangentes externos.
- IV. $\langle A, B \rangle = -1$, si son tangentes internos.
- V. $\langle A, B \rangle = 0$ si son ortogonales.

Demostración. I. $\langle A, A \rangle = -\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + \beta\gamma = \frac{-x^2 - y^2 - r^2 + x^2 + y^2}{r^2} = -1$ por definición de la métrica en (2.4).

- II. Por definición del producto interno de Pedoe.
- III. Intersecan con un ángulo de 0 grados y el $\cos 0^\circ = 1$.
- IV. Intersecan con un ángulo de 180 grados y el $\cos 180^\circ = -1$.
- V. Intersecan con un ángulo de 90 grados y el $\cos 90^\circ = 0$.

□

Notación 2.2.10. Durante el resto de resultados y hasta la demostración de la fórmula de Descartes, los vectores de Pedoe, $\dot{\pi}(C)$, se denotaran únicamente como C . A excepción de que se indique lo contrario.

Definición 2.2.11. Sean C_1, C_2, C_3 y C_4 los vectores de Pedoe de cuatro círculos. Una **matriz de configuración**, f , es aquella formada por los productos internos de los vectores de Pedoe C_i , es decir,

$$f_{ij} = \langle C_i, C_j \rangle, \quad (2.8)$$

considerando el producto interno de Pedoe.

Teorema 2.2.12. (*Teorema de las configuraciones de círculos*). Sean C_1, C_2, C_3 y C_4 cuatro círculos cuyos vectores de Pedoe son linealmente independientes, entonces

$$AFA^T = G \quad (2.9)$$

donde la matriz G es la inversa de la matriz que define la métrica de Minkowski g , definida en (2.4), $G = g^{-1}$. Mientras que F es la inversa de la matriz de configuración, es decir, $F = f^{-1}$.

Demostración. De la definición de matriz de configuración, f se puede escribir como el siguiente producto matricial, en función de la matriz g definida en (2.4), de la siguiente forma

$$f = A^T g A$$

Del hecho de que A es invertible, tomamos la inversa a ambos lados y tenemos

$$f^{-1} = A^{-1} g^{-1} (A^T)^{-1}$$

Ahora multiplicando en la izquierda por A y en la derecha por A^T , llegamos a que

$$AFA^T = Af^{-1}A^T = g^{-1} = G$$

que es lo que se quería probar. \square

Una vez definidos esta serie de conceptos y abordado algunas de las principales propiedades procedemos con la demostración de la fórmula de Descartes.

Demostración. (Formula de Descartes). Sea $\mathbf{M} \cong \mathbb{R}^4$ el espacio de Minkowski definido en 2.2.6 y considerando la aplicación especial de Pedoe $\tilde{\pi}$. El producto interno de Pedoe se expresa de la forma,

$$\langle C_1, C_2 \rangle = C_1^T g C_2 \quad (2.10)$$

donde g es la matriz (2.4). Realizando unas pequeñas operaciones algebraicas tenemos,

$$\begin{aligned}\langle C_1, C_2 \rangle &= \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} \\ &= -\frac{x_1x_2}{r_1r_2} - \frac{y_1y_2}{r_1r_2} + \frac{1}{2r_1} \frac{x_1^2 + y_1^2 - r_1^2}{r_2} + \frac{1}{2r_2} \frac{x_2^2 + y_2^2 - r_2^2}{r_1} \\ &= -\dot{x}_1\dot{x}_2 - \dot{y}_1\dot{y}_2 + \frac{1}{2}\beta_1\gamma_2 + \frac{1}{2}\beta_2\gamma_1\end{aligned}$$

que es la forma del producto interno de Pedoe, en función de los nuevos conceptos introducidos en la definición 2.2.8. Como sabemos, los vectores circulares están normalizados, es decir, $\langle C_i, C_i \rangle = -1$ para todo i . Construimos ahora la matriz formada por los vectores de Pedoe que representan los cuatro círculos:

$$D = [C_1|C_2|C_3|C_4] \quad (2.11)$$

Ahora, consideramos la matriz de configuración de estos cuatro círculos, que por definición es,

$$f = D^T g D \quad (2.12)$$

En concreto, en este caso para cualquier configuración de Descartes considerada, los círculos son tangentes dos a dos y por ello, el producto interno de cada par de círculos tangentes es 1 (véase la proposición 2.2.9). Por ello, tenemos que:

$$\langle C_i, C_j \rangle = \begin{cases} -1 & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.13)$$

Para nuestro caso en particular la ecuación (2.12) de una configuración de descartes sería,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{y}_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \dot{x}_2 & \dot{y}_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \dot{x}_3 & \dot{y}_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \dot{x}_4 & \dot{y}_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \dot{x}_4 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 & \dot{y}_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix}$$

Tomando el inverso en ambos lados de (2.12) tenemos que

$$F = f^{-1} = (D^{-1})g^{-1}(D^T)^{-1}$$

Ahora multiplicamos a ambos lados por D por la izquierda y por D^T por la derecha para llegar a

$$DFD^T = g^{-1} = G \quad (2.14)$$

que es el Teorema 2.2.12. Si ahora consideramos en particular la ecuación (2.14) para el caso de una configuración de Descartes y multiplicamos a cada lado por 4, tenemos que,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \dot{x}_4 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 & \dot{y}_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{y}_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \dot{x}_2 & \dot{y}_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \dot{x}_3 & \dot{y}_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \dot{x}_4 & \dot{y}_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando solo los vectores de curvaturas $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]$, entonces $Bf^{-1}B^T = 0$ y renombramos las curvaturas como $a = \beta_1$, $b = \beta_2$, $c = \beta_3$ y $d = \beta_4$ obtenemos que:

$$2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Completando cuadrados se obtiene,

$$(a + b + c + d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Para finalmente, reajustando los coeficientes llegar a (2.2) que es la fórmula de Descartes y lo que queríamos probar.

□

Como consecuencia de este resultado podemos conocer la curvatura de todos los círculos que forman parte de un empaquetamiento de Apolonio, esto es un aspecto muy importante para el estudio de los mismos en la teoría de números.

Definición 2.2.13. Un cuádruple o conjunto de cuatro números (a, b, c, d) que satisface la fórmula de Descartes se conoce como **cuádruple de Descartes**

Definición 2.2.14. Una **raíz cuádruple** es un cuádruple de Descartes que es minimal, es decir, que contiene las curvaturas más pequeñas de los círculos que pertenecen al empaquetamiento y es única, aunque puede ser representada por varias configuraciones de Descartes.

Definición 2.2.15. I. Un **cuádruple de Descartes entero**, $\mathbf{a} = (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, es cualquier representación del cero para la forma cuadrática cuaternaria ,

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}(w, x, y, z) := 2(w^2 + z^2 + y^2 + z^2) - (w + x + y + z)^2$$

que se conoce como *Forma integral de Descartes*.

II. Un cuádruple de Descartes entero es **primitivo** si el máximo común divisor de los cuatro números que lo forman es igual a 1. Si todos los cuádruples son primitivos el empaquetamiento se dice primitivo.

Definición 2.2.16. Un empaquetamiento de Apolonio es **integral** si todo círculo del empaquetamiento tiene una curvatura entera, por defecto si todo cuádruple de Descartes es entero.

Realizando operaciones y ajustes sobre la fórmula de Descartes propuesta en el Teorema 2.2.4 llegamos a que si a, b, c son las curvaturas de los tres círculos iniciales entonces la curvatura de los dos círculos tangentes viene dada por

$$d, d' = a + b + c \pm 2\sqrt{ab + bc + ac}$$

Entonces,

$$d + d' = 2(a + b + c)$$

Por lo que si tenemos cuatro círculos con curvaturas a, b, c, d , la curvatura del quinto círculo tangente a los tres de partida es

$$d' = 2(a + b + c) - d \tag{2.15}$$

De (2.15) podemos deducir que si partimos de una configuración de Descartes en la que las curvaturas de los cuatro círculo de partida sean enteros, entonces el quinto círculo de nuestro empaquetamiento también tendrá curvatura entera. De manera inductiva, vamos construyendo un empaquetamiento de círculos tangentes cuyas curvaturas son todas enteras. Esto nos da la condición que si la configuración de Descartes de partida tiene curvaturas enteras entonces los círculos del empaquetamiento tendrán todos curvaturas enteras y por lo tanto sera integral.

Como conclusión de lo anterior tenemos que si partimos con tres círculos de curvatura entera, existen dos casos: el primero en el que la curvatura de uno de los dos nuevos círculos sea entera, lo que implica que la del segundo también lo sea, con lo que estamos ante un empaquetamiento es integral. Respecto al segundo donde ninguno de los dos es entero y en este caso el empaquetamiento no será integral

Otro aspecto a tener en cuenta es que en general los empaquetamientos de Apolonio se pueden ver como equivalentes bajo movimientos euclídeos, ya que se conserva la curvatura de los círculos; este concepto aparecerá a lo largo de todo el trabajo de manera recurrente.

2.3. Ejemplos

Para terminar con esta introducción al concepto de empaquetamiento de Apolonio, se van a exponer una serie de ejemplos con el fin de asimilarlo de forma más precisa.

Notación 2.3.1. Denotaremos a los empaquetamientos de Apolonio por su raíz cuádruple (definición 2.2.14), de la forma (a, b, c, d) .

Ejemplo 2.3.2. Partimos de un círculo de radio 1 y dos círculos interiores de radio $1/2$ y tangentes entre sí; a partir de estos círculos se construye nuestro empaquetamiento de la forma que se ha explicado a lo largo del capítulo. En este caso estamos ante el empaquetamiento $(-1, 2, 2, 3)$ donde -1 representa el valor de la curvatura del círculo inicial que engloba al resto, se toma negativa por convenio para que la fórmula de Descartes se cumpla aunque en realidad el círculo tiene curvatura 1. Es sencillo comprobar que nos encontramos ante un empaquetamiento de Apolonio integral y primitivo.

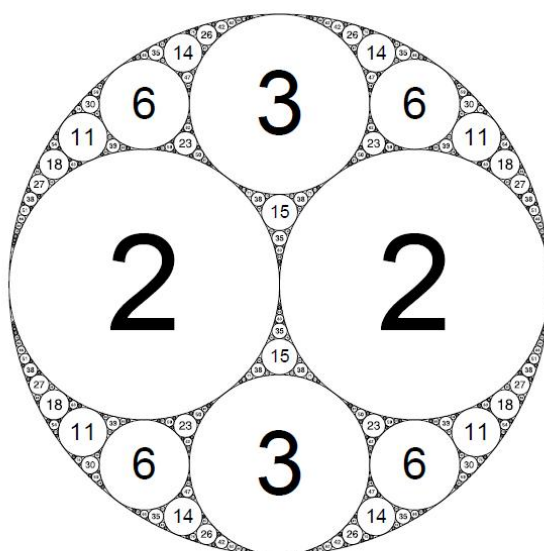


Figura 2.10: Empaquetamiento de Apolonio $(-1, 2, 2, 3)$.

Nota 2.3.3. Los números dentro de cada círculo indican la curvatura del círculo que los contiene.

Ejemplo 2.3.4. Como segundo ejemplo, se muestra un caso más particular. En concreto, el empaquetamiento $(0, 0, 1, 1)$, que está formado por dos círculos con centro en el infinito y que se consideran como líneas rectas, dentro de los cuales están contenidos los círculos de curvatura 1. Es un caso muy especial ya que es el único empaquetamiento que no es acotado y que contiene infinitas copias de la raíz cuádruple. Este caso juega un papel muy importante en la teoría de números, por lo que este tipo de empaque-

tamientos se estudiara con todo detalle en el capítulo 4, que trata sobre los círculos de Ford que son un caso particular de este ejemplo.

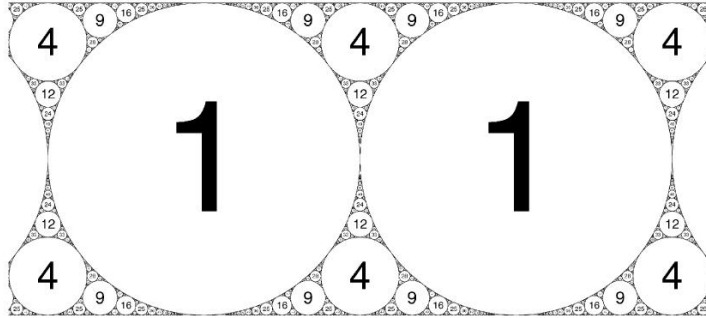


Figura 2.11: Empaquetamiento de Apolonio $(0, 0, 1, 1)$.

Capítulo 3

Empaquetamientos de Apolonio y Teoría de números

En el este capítulo se incluye la relación de los empaquetamientos de Apolonio con la teoría de números. En concreto, descubriremos la teoría de reducción y haremos un estudio sobre las curvaturas de los círculos. La referencia bibliográfica usada como base a lo largo de este capítulo ha sido [3].

3.1. Teoría de reducción

Durante esta sección se describe un procedimiento de reducción, por el cual si partimos de cualquier cuádruple de Descartes del empaquetamiento de Apolonio dado, se obtiene la raíz cuádruple (Definición 2.2.14) del mismo. Este algoritmo se detiene siempre para empaquetamientos de Apolonio integrales.

Para su correcta comprensión se va a introducir el concepto de grupo de Apolonio, base para todo lo expuesto en este capítulo.

Notación 3.1.1. Durante la sección 3.1, cuando hablemos de empaquetamientos nos referiremos a empaquetamientos de Apolonio, en caso contrario quedara indicado. De la misma forma, cualquier cuádruple de Descartes se conocerá como cuádruple únicamente.

3.1.1. Grupo de Apolonio

Definición 3.1.2. Un **grupo de Apolonio** \mathcal{A} es el grupo generado por cuatro matrices 4×4 de coeficientes enteros, a las que llamaremos movimientos. Los cuatro generadores que definen el grupo son,

$$S_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Cualquier elemento del grupo envía mediante la multiplicación matricial un cuádruple de Descartes en otro cuádruple de Descartes ya que $\mathcal{A} \subset \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{Q}_{\mathcal{D}})$. Es decir, si $\mathbf{v} = (a, b, c, d)^T$ es un cuádruple, entonces $S\mathbf{v}$, con $S \in \mathcal{A}$, es un cuádruple.

Los elementos S_i del grupo tienen un significado geométrico que se basa en que la imagen por multiplicación matricial de cualquier cuádruple, preserva tres de los cuatro círculos que representa mientras que intercambia el cuarto por otro de los que pertenece al mismo empaquetamiento. Este hecho hace que se consideren como movimientos y por lo tanto se llamen así. A continuación, se va a describir el movimiento que describe cada uno de ellos con ayuda de la figura 3.1.

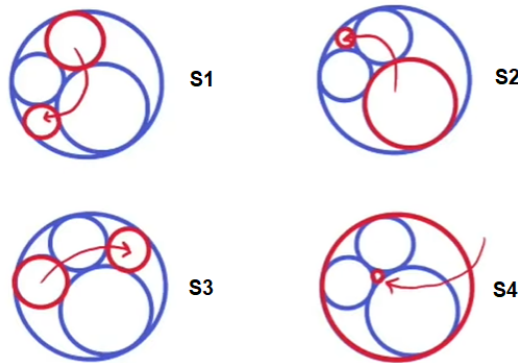


Figura 3.1: Representación gráfica de la acción de los elementos del grupo de Apolonio sobre los cuádruple

El resto de movimientos se corresponden con cada una de las diferentes combinaciones de estos cuatro que generan el grupo. Como se puede comprobar en la imagen, los elementos S_1, S_2, S_3 y S_4 del grupo envían uno de los cuatro círculo del cuádruple en otro del empaquetamiento, lo que nos proporciona un cuádruple diferente al dado. En particular, tal y como lo hemos definido nosotros S_1 actuará sobre el círculo con curvatura a , S_2 sobre el círculo con curvatura b , S_3 sobre el círculo con curvatura c y S_4 sobre el círculo con curvatura d , dejando invariantes el resto en cada caso.

Por último es fácil comprobar que el grupo de Apolonio es un grupo de Coxeter, que son aquellos que cumplen la relación, $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = S_4^2 = I$, es decir que los elementos de la base sean de grado dos. Esto nos da a la idea de que si a un cuádruple le aplicamos un movimiento y luego aplicamos el mismo movimiento en orden contrario entonces volvemos al cuádruple original. Esta propiedad debemos tenerla en cuenta a lo largo del capítulo.

Una vez definido el concepto y alguna de sus propiedades pasamos a la descripción del algoritmo de reducción para lograr el objetivo planteado al inicio de la sección.

3.1.2. Algoritmo de reducción

Definición 3.1.3. Sea $\mathbf{v} = (a, b, c, d)^T$ un cuádruple cualquiera de un empaquetamiento, se define el **signo** del empaquetamiento como el signo de,

$$L(\mathbf{v}) := a + b + c + d \quad (3.1)$$

Si es mayor que cero obviamente es positivo y sino negativo.

Durante el trabajo únicamente se va a describir el algoritmo para aquellos empaquetamientos con signo positivo, $L(\mathbf{v}) > 0$. Esto se debe a que para aquellos con signo negativo basta con considerar el cuádruple conjugado, es decir, si $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$ es el cuádruple, consideramos $\mathbf{v}' = (-a, -b, -c, -d)$, y entonces estaríamos antes un empaquetamiento de signo positivo, donde ya se puede aplicar el procedimiento que se va a explicar, y al terminar volver a aplicar la conjugación. Además del signo del empaquetamiento, hay que tener en cuenta que el cuádruple este ordenado en sentido creciente, es decir, $a \leq b \leq c \leq d$. Para iniciar la reducción, debemos averiguar si algún $S_i \mathbf{v}$ puede disminuir el valor de $L(\mathbf{v})$. Para ello, se va a enunciar el siguiente lema que nos indica que S_1, S_2 y S_3 no son válidos para ello. Recuerda que $S_4(a, b, c, d)^T = (a, b, c, d')^T$ con $d' = 2(a + b + c) - d$.

Lema 3.1.4. *Suponemos que $\mathbf{v} = (a, b, c, d)^T$ es un cuádruple de Descartes real, de tal forma que sus elementos estén ordenados en orden creciente y*

sea $d' = 2(a + b + c) - d$.

(i) Si $L(\mathbf{v}) := a + b + c + d > 0$, entonces $a + b \geq 0$. La igualdad se alcanza solo cuando $a = b = 0$ y $c = d$. Como consecuencia, $b \geq 0$ siempre.

(ii) Si $L(\mathbf{v}) := a + b + c + d > 0$, entonces cada $L(S_i \mathbf{v}) > 0$. En particular $L(S_4 \mathbf{v}) = a + b + c + d' > 0$.

(iii) Si $a \geq 0$, de tal manera que $L(\mathbf{v}) := a + b + c + d > 0$, entonces $d' \leq c \leq d$. Si $d' < c$ entonces la matriz S_4 que cambia d por d' hace que disminuya estrictamente la suma $L(\mathbf{v}) := a + b + c + d$ y es el único generador del grupo de Apolonio que lo hace. Si $d' = c$ entonces necesariamente $c = d = d'$ y ningún generador S_i del grupo disminuye $L(\mathbf{v})$.

La demostración de este lema no es complicada pero si tediosa, por lo que hay que tener cuidado para no confundirse. Esta incluida en [3, pág 13, Lema 3.1] y se basa en el uso de la fórmula de Descartes y el haber comprendido correctamente el concepto de grupo de Apolonio.

Definición 3.1.5. Un cuádruple de Descartes $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$ con $L(\mathbf{v}) := a + b + c + d > 0$ es una raíz cuádruple si $a \leq 0 \leq b \leq c \leq d$ y $a + b + c \geq d$.

Es fácil darse cuenta de que la última inecuación es equivalente a la condición $d' = 2(a + b + c) - d \geq d$.

Algoritmo de reducción

Entrada: \mathbf{v} un cuádruple de Descartes real (a, b, c, d) con $a + b + c + d > 0$.

(1) Comprueba en orden $1 \leq i \leq 4$ si alguno de los S_i disminuye el valor de la suma $a + b + c + d$. Si es así, se aplica al cuádruple para obtener un nuevo cuádruple y se pasa a la siguiente iteración

(2) Si ningún S_i disminuye la suma, ordena los elementos del cuádruple en orden creciente y el algoritmo se detiene.

Nota 3.1.6. A pesar de saber que S_4 es el único que disminuye la suma de los cuatro, el algoritmo comprueba los cuatro movimientos debido a que el cuádruple no tiene porque estar ordenado en orden creciente.

El algoritmo no siempre se detiene, depende de diferentes condiciones, una de ellas y la más importante es que si el cuádruple de entrada es entero, siempre se detiene y tiene como salida una raíz cuádruple. El siguiente resultado nos da una idea de los principales criterios en los que la reducción es posible y por lo tanto se detiene. Además, demuestra que aunque la raíz sea única es posible que en el empaquetamiento exista más de una configuración de Descartes, representada por esa raíz.

Teorema 3.1.7. Sea $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$ el cuádruple de Descartes con el que se inicia el algoritmo, entonces,

- (i) Si el algoritmo de reducción encuentra un elemento negativo, $a < 0$, entonces se detiene en una raíz cuádruple en un número finito de pasos más.
- (ii) Si a, b, c, d son enteros, entonces el algoritmo de reducción se detiene en una raíz cuádruple en un número finito de pasos.
- (iii) Una raíz cuádruple es única si existe. Sin embargo, un empaquetamiento de Apolonio puede contener más de una configuración de Descartes representada con este cuádruple.

Nota 3.1.8. Si uno de los cuatro elementos del cuádruple es negativo, en este caso a , geoméricamente significa que el círculo de radio $1/a$, contiene a los otros tres círculos de radios $1/b$, $1/c$ y $1/d$, que son tangentes interiores al de curvatura negativa. El resto de círculos del empaquetamiento también están contenidos pero no tienen porque ser tangentes al círculo de radio $1/a$. Revisar el ejemplo 2.3.2.

Demostración. (i) Si aplicamos el algoritmo de reducción tenemos que en cada paso que este no para, se produce un nuevo círculo con curvatura $d' < d$ cuyo radio es $1/d' > 1/d$. Este nuevo círculo de la última iteración cubre un área de π/d'^2 , que como mínimo es π/d^2 . Se debe cubrir el área total, π/a^2 , esto es porque la raíz cuádruple de este tipo de empaquetamientos está formada por los tres círculos de menor curvatura, por lo tanto de mayor radio contenidos en el círculo que contiene a todos y por él mismo. Todos los círculo excepto el de radio $1/a$ tienen interiores disjuntos, por lo tanto el proceso de llenado de todo el área con cada vez círculo más grandes se detiene en como mucho en $\lfloor \frac{\pi/a^2}{\pi/d^2} \rfloor = \lfloor (\frac{d}{a})^2 \rfloor$ pasos.

(ii) De la fórmula de Descartes (2.2), tenemos que $q_{abc} = \sqrt{ab + bc + ac} = (a + b + c - d)/2 \in \mathbb{N}$. Además sabemos también que $d = a + b + c + 2q_{abc}$ y $d' = a + b + c - 2q_{abc}$. por lo tanto la suma $a + b + c + d$ disminuye en $d - d' = 4q_{abc}$ unidades. Del lema 3.1.4 sabemos que la cota inferior de la suma $a + b + c + d$, es igual a 0. Por lo que este proceso se detiene después de un número finito de pasos, ya que llega un punto que la suma no decrece más.

(iii) Consideramos ahora que \mathbf{v} es la raíz cuádruple de un empaquetamiento de Apolonio, entonces a, b, c, d son las curvaturas de los círculos más grandes que pertenecen al empaquetamiento, por ello son únicas. Por otro lado, es fácil ver que una raíz cuádruple puede representar a dos configuraciones de Descartes distintas.

Apoyándonos en el ejemplo 2.3.2, se ve que la raíz $(-1, 2, 2, 3)$, representa dos configuraciones distintas en ese empaquetamiento. Por otro lado en el ejemplo 2.3.4 se ve que la raíz $(0, 0, 1, 1)$, representa a infinitas configuraciones de ese empaquetamiento. \square

Este teorema también nos muestra que en todos los casos donde la reducción es posible, el elemento más grande del cuádruple es único. Esto no quiere decir que no existan cuádruples con dos elementos iguales, solo que para que sea reducible el elemento más grande sea único. Es decir, $(0, 0, 1, 1)$ no es reducible porque el elemento más grande está repetido y por ello es la raíz.

Denotamos por $\mathcal{Q}(\mathbb{Z})$ el conjunto de todos los cuádruple enteros, veamos que se puede realizar una partición en función de las raíces cuádruples. Es posible dividir este conjunto en $\mathcal{Q}(\mathbb{Z})^+ \cup \{(0, 0, 0, 0)\} \cup \mathcal{Q}(\mathbb{Z})^-$, donde $\mathcal{Q}(\mathbb{Z})^+ = \{(a, b, c, d) \in \mathcal{Q}(\mathbb{Z}) : a + b + c + d > 0\}$, es decir, aquellos con signo positivo. Mientras que $\mathcal{Q}(\mathbb{Z})^-$ es la partición de aquellos cuádruples con signo negativo. Ahora podemos particionar el conjunto de los cuádruples con signo positivo de la siguiente forma,

$$\mathcal{Q}(\mathbb{Z})^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\mathcal{Q}(\mathbb{Z})_{prim}^+$$

donde $\mathcal{Q}(\mathbb{Z})_{prim}^+$ es el conjunto de todos los cuádruples enteros primitivos con signo positivo. Si ahora particionamos el conjunto $\mathcal{Q}(\mathbb{Z})_{prim}^+$ respecto a los conjuntos de los cuádruples en un empaquetamiento de Apolonio tenemos,

$$\mathcal{Q}(\mathbb{Z})_{prim}^+ = \bigcup_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}} \mathcal{Q}(\mathcal{P}_{\mathbf{d}})$$

donde $\mathcal{Q}(\mathcal{P}_{\mathbf{d}})$, es el conjunto de los cuádruples del empaquetamiento de Apolonio $\mathcal{P}_{\mathbf{d}}$ con la raíz cuádruple primitiva $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$, con \mathcal{D} el conjunto de todas las raíces cuádruples primitivas.

Una vez realizada la partición del conjunto de todos los cuádruples podemos abordar el estudio del conjunto de los enteros en un empaquetamientos de Apolonio, es decir, el estudio de las curvaturas enteras de los círculos que pertenecen al empaquetamiento, y que se realiza en la sección 3.2.

Por último, el siguiente teorema muestra que para cualquier empaquetamientos de Apolonio integral, las curvaturas enteras de todos los círculos que no pertenecen a la raíz se encuentran en correspondencia única con un elemento del grupo de Apolonio que no sea la identidad.

Teorema 3.1.9. *Sea $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ el empaquetamientos de Apolonio con raíz cuádruple $\mathbf{v} = (a, b, c, d)^T$. Entonces el conjunto de curvaturas enteras de los círculos que pertenecen a \mathcal{P} , contadas con multiplicidad, esta constituido por los cuatro elementos de \mathbf{v} más los elementos más grandes de cada vector $M\mathbf{v}$, siendo M un elemento del grupo de Apolonio.*

En resumen, este teorema muestra que todas las curvaturas de los círculos en el empaquetamiento, a excepción de las que forman la raíz cuádruple, pueden ser enumeradas por elementos del grupo de Apolonio.

3.2. Curvaturas enteras

Respecto al contenido de esta sección, se va a centrar únicamente en el estudio desde el punto de vista de la teoría de números de las curvaturas de los círculos que forman parte de un empaquetamiento de Apolonio integral. Se clasifican, dependiendo si se considera su multiplicidad, es decir, si una misma curvatura aparece solo una vez o más. Por otro lado, teniendo en cuenta únicamente si aparece o no una curvatura en el empaquetamiento, se abordarían algunas de las relaciones de congruencia de estos enteros. En otras palabras, se van a contar el número de círculos de un empaquetamiento teniendo en cuenta o no su multiplicidad.

3.2.1. Curvaturas contadas con multiplicidad

En este apartado, para el estudio del conjunto de curvaturas se tiene en cuenta el número de veces que aparecen en el empaquetamiento, es decir, su multiplicidad. Para ello es importante considerar la dimensión de Hausdorff del conjunto residual ya que guarda relación desde el punto de vista asintótico.

3.2.1.1. Dimensión de Hausdorff

Definición 3.2.1. Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío. Su **diámetro**, es definido como

$$|U| := \sup\{|x - y| : x, y \in U\}. \quad (3.2)$$

Sea $\{U_i\}$ una colección de conjuntos numerables de diámetro menor o igual que δ que recubre E , entonces estamos ante un δ -recubrimiento de E . Definimos el conjunto $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ con $s, \delta > 0$, de la forma,

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } E \right\}$$

Definición 3.2.2. La **medida de Hausdorff de dimensión s** de un conjunto de E definido como,

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

De la monotonía del ínfimo y del hecho que la cota inferior es cero, el límite existe para todo subconjunto de \mathbb{R}^n . El valor de la medida puede ser 0 e ∞ : si $s > 0$, la medida de un conjunto discreto de puntos es igual a 0, mientras que si $s = 0$ la medida es ∞ .

Definición 3.2.3. La **dimensión de Hausdorff**, $dim_H E$, de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ es:

$$dim_H E = inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}. \quad (3.3)$$

Por lo tanto, si $0 < s < dim_H E$ tenemos que $\mathcal{H}^s(E) = 0$, si $s > dim_H E$ entonces $\mathcal{H}^s(E) = \infty$, mientras que si $s = dim_H E$, el valor de $\mathcal{H}^s(E)$ puede ser 0 , ∞ o $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$. La dimensión de Hausdorff cumple las siguientes propiedades:

- **Monotonía** Si $A \subset B$, entonces $dim_H A \leq dim_H B$.
- **Estabilidad numerable** Si A_1, A_2, A_3, \dots es una secuencia numerable de conjuntos, entonces $dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = sup_{0 \leq i < \infty} \{dim_H A_i\}$.
- **Conjuntos numerables** Si A es numerable, $dim_H A = 0$.
- **Conjuntos abiertos** Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $dim_H A = n$.

3.2.1.2. Resultados asintóticos

A continuación se van a introducir los resultados más importantes sobre el número de elementos de un empaquetamiento de Apolonio y del grupo de Apolonio. Todos ellos tienen un carácter asintótico.

Definición 3.2.4. El **conjunto residual**, \mathcal{R} , de un empaquetamiento, \mathcal{P} , (no necesariamente de Apolonio) es el conjunto restante que obtenemos de eliminar todos los círculos del empaquetamiento, incluidos aquellos con centro infinito.

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n. \quad (3.4)$$

Donde C_n denota los círculos del empaquetamiento.

Sea \mathcal{P} un empaquetamiento, denotaremos por $\alpha(\mathcal{P})$ la dimensión de Hausdorff del conjunto residual de \mathcal{P} y se conoce como **dimensión del conjunto residual**. Los conjuntos residuales de los empaquetamientos de Apolonio tienen la propiedad particular de que la dimensión de Hausdorff es la misma, que se denota como α .

Definición 3.2.5. El **exponente o constante de empaquetamiento**, $e(\mathcal{P})$, de un empaquetamiento (no necesariamente de Apolonio) acotado \mathcal{P} se define de la forma,

$$e(\mathcal{P}) := sup \left\{ e : \sum_{C \in \mathcal{P}} r(C)^e = \infty \right\} = inf \left\{ e : \sum_{C \in \mathcal{P}} r(C)^e < \infty \right\} \quad (3.5)$$

donde $r(C)$ es el radio de C .

Para los empaquetamientos de Apolonio, este número se encuentra entre 1.035 y 1.99971. En particular, el valor mínimo es alcanzado por un empaquetamiento de Apolonio. Todos estos resultados fueron enunciados y probados por Melzak en 1966. En 1997 Wilker mostró que todos los empaquetamientos osculatorios, que son aquellos en los que todo elemento del mismo ocupa el mayor área disponible y que por lo tanto engloban a los empaquetamientos de Apolonio, tienen todos el mismo exponente e , que se conoce como **exponente osculatorio**.

Una vez introducido estos conceptos, sabemos que los empaquetamientos de Apolonio tiene un valor fijo tanto para su dimensión de Hausdorff como para su exponente. A lo largo de la historia se ha intentado buscar una relación entre estos dos números que fue enunciada por D.Boyd, experto en teoría de números que centró una parte de su estudio en los empaquetamientos de Apolonio y sus relaciones con la teoría de números. El resultado es el siguiente.

Teorema 3.2.6. *El exponente e de cualquier empaquetamiento de Apolonio acotado es igual que la dimensión de Hausdorff α del conjunto residual de cualquier empaquetamiento de Apolonio, $e = \alpha$.*

La prueba se basa en demostrar el resultado para empaquetamientos osculatorios, entonces obviamente quedara probado para empaquetamientos de Apolonio. No se va a incluir porque los empaquetamientos osculatorios se exceden del objetivo del trabajo.

Definición 3.2.7. La **función de conteo de círculos**, $N_{\mathcal{P}}(T)$, indica el número de círculos en un empaquetamiento de Apolonio \mathcal{P} , cuya curvatura no es mayor que T .

Nuevamente, D.Boyd trató de dar una relación entre el exponente de un empaquetamiento, o en otras palabras la dimensión de Hausdorff del conjunto residual, con la función de conteo.

Teorema 3.2.8. *Sea \mathcal{P} un empaquetamiento de Apolonio acotado, la función de conteo, $N_{\mathcal{P}}(T)$ satisface,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\mathcal{P}}(T)}{\log T} = \alpha, \quad (3.6)$$

donde α , es la dimensión de Hausdorff del conjunto residual. Así que, $N_{\mathcal{P}}(T) = T^{\alpha+o(1)}$, cuando $T \rightarrow \infty$.

Al igual que el resultado anterior la prueba se basa en empaquetamientos osculatorios y se puede consultar en [1, pág 252-253].

Por último, se considera el resultado central de la sección donde se relaciona el número de elementos del grupo de Apolonio, de altura acotada, con la dimensión de Hausdorff α .

Nota 3.2.9. La *altura* de un elemento M del grupo de Apolonio \mathcal{A} se mide utilizando la norma de Frobenius,

$$\|M\|_F := \left(\sum_{i,j} M_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Teorema 3.2.10. *El número de elementos $N_T(\mathcal{A})$ con altura menor que T en el grupo de Apolonio \mathcal{A} satisface,*

$$N_T(\mathcal{A}) = T^{\alpha+o(1)} \quad (3.7)$$

cuando $T \rightarrow \infty$, donde α es la dimensión de Hausdorff del conjunto residual de cualquier empaquetamiento de Apolonio.

Antes de probarlo, se van a enunciar dos lema auxiliares.

Lema 3.2.11. *Sea $M = S_{i_n} \dots S_{i_2} S_{i_1} \in \mathcal{A}$, un elemento del grupo de Apolonio, y supongamos que $i_j \neq i_{j+1}$ para $1 \leq j \leq n-1$, y $n \geq 2$. En cada fila k de M ,*

1. $M_{kl} \leq 0$ si $l = i_1$.
2. $M_{kj} \geq |M_{kl}|$ para $l = i_1$ y $j \neq l$.

Demostración. Vamos a proceder por inducción sobre n . Para $n = 1$ es cierto ya que cada matriz S_i , su columna i está formada por ceros o números negativos.

Ahora supongamos que el lema es cierto para $n-1$ y veamos para n . Sea $M' = S_{i_n} \dots S_{i_2}$ y $i_1 = 1$. Entonces

$$M = M' S_1 = \begin{bmatrix} -M'_{11} & 2M'_{11} + M'_{12} & 2M'_{11} + M'_{13} & 2M'_{11} + M'_{14} \\ -M'_{21} & 2M'_{21} + M'_{22} & 2M'_{21} + M'_{23} & 2M'_{21} + M'_{24} \\ -M'_{31} & 2M'_{31} + M'_{32} & 2M'_{31} + M'_{33} & 2M'_{31} + M'_{34} \\ -M'_{41} & 2M'_{41} + M'_{42} & 2M'_{41} + M'_{43} & 2M'_{41} + M'_{44} \end{bmatrix}$$

Como $i_2 \neq i_1 = 1$ entonces por la hipótesis de inducción $M'_{k1} \geq 0$, así que $M_{k1} = -M'_{k1} \leq 0$ lo que prueba (1). Por otro lado sabemos que

$$M_{kj} = 2M'_{k1} + M'_{kj} \geq 2M'_{k1} - |M'_{kl}| \geq M'_{k1} = |M_{k1}|$$

porque por hipótesis $M'_{kj} \geq |M'_{kj}|$ y $M'_{kj} \geq -|M'_{kl}|$ y por lo tanto queda probado (2). Para los casos $i_1 = 2, 3, 4$ se procede de la misma manera. \square

Lema 3.2.12. *Sea $\mathbf{v} = (a, b, c, d)^T$ una raíz cuádruple entera con $a < 0$. Entonces existen constantes positivas $c_0 = c_0(\mathbf{v})$ y $c_1 = c_1(\mathbf{v})$ que dependen de \mathbf{v} de tal forma que*

$$c_0 \|M\|_F \leq \|M\mathbf{v}\|_\infty \leq c_1 \|M\|_F \quad \text{para cada } M \in \mathcal{A}. \quad (3.8)$$

Demostración. Para la cota superior es muy sencillo, ya que aplicando las propiedades de las normas tenemos que,

$$\|M\mathbf{v}\|_\infty \leq 2\|M\mathbf{v}\| \leq 2\|M\|_F \|\mathbf{v}\| \quad (3.9)$$

y tomando $c_1 = 2\|\mathbf{v}\|$ tenemos la segunda desigualdad.

Por otro lado, para la cota inferior debemos ver que si $M = S_{i_n} \dots S_{i_2} S_{i_1}$ con $i_j \neq i_{j+1}$ e $i_1 = 1$, tenemos que

$$\|M\mathbf{v}\|_\infty \geq \frac{1}{2} \|M\|_F \quad (3.10)$$

El vector \mathbf{v} tiene signo $(-, +, +, +)$ y del lema 3.2.11 tenemos que M tiene la primera columna de elementos no positivos y el resto de columnas no negativas. Por ello, todos los términos del producto $M\mathbf{v}$ son no negativos. Como consecuencia,

$$(M\mathbf{v})_i \geq \sum_{j=1}^4 |M_{ij}| |v_j| \geq \sum_{j=1}^4 |M_{ij}|$$

debido a que $a < 0$ implica que $\min(|a|, |b|, |c|, |d|) \geq 1$. Entonces

$$\|M\mathbf{v}\|_\infty = \max_i (M\mathbf{v})_i \geq \frac{1}{4} \sum_{i,j} |M_{ij}| \geq \frac{1}{2} \|M\|_F$$

Por último, hay que abordar los casos donde $i_1 = 2, 3, 4$. Por el teorema 3.1.9, sabemos que $\|M\mathbf{v}\|_\infty$ nos proporciona la curvatura de un círculo del empaquetamiento, de tal forma que este círculo se encuentra en uno de las cuatro secciones disponibles, es decir, como partimos de una configuración de Descartes con $a < 0$, entonces el círculo con curvatura a engloba al resto así que en su interior contiene a los otros tres tangentes dos a dos y por lo tanto el espacio restante se divide en cuatro secciones, que depende del valor de i_1 . Véase la figura 3.2 para una mejor comprensión de este concepto.

La cota (3.10) corresponde a la sección central y al valor de $i_1 = 1$. Para el resto de casos, se hace uso del hecho que existe una transformación de Möbius $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ con $\phi \in \text{Aut}(\mathcal{P})$, particular para cada empaquetamiento, que deja fijo el cuádruple de Descartes pero lo permuta de forma cíclica, es decir, $\phi(a) = b$, $\phi(b) = c$, $\phi(c) = d$ y $\phi(d) = a$. En particular, también permuta las cuatro secciones, es decir, $i_1 = 1 \rightarrow i_1 = 2 \rightarrow i_1 = 3 \rightarrow i_1 = 4$.

Una vez definida la aplicación, es obvio que ϕ envía el centro del círculo con curvatura d al centro del círculo de curvatura a y así sucesivamente. Por otro lado, el factor de estiramiento de ϕ dentro de las cuatro secciones, esta acotado superior e inferiormente por constantes positivas, c_2 y c_2^{-1} . Por lo tanto, como ϕ envía la sección $i_1 = 4$ en la sección 1 tenemos para el caso en el que $i_1 = 4$ que,

$$\|M\mathbf{v}\|_\infty \geq \frac{1}{2c_2} \|M\|_F$$

Si razonamos de la misma forma para ϕ^2 y ϕ^3 , llegamos a acotar de la misma forma para los casos $i_1 = 2$ e $i_1 = 3$. Tomando $c_0 = \frac{1}{2c_2}$ hemos probado la primera desigualdad y por lo tanto el resultado. \square

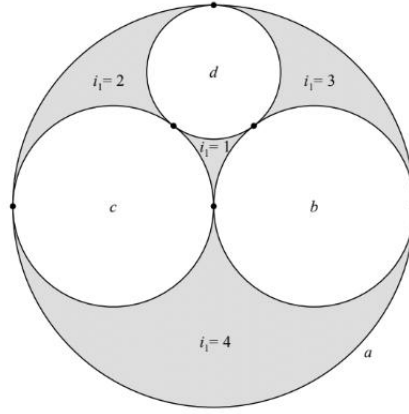


Figura 3.2: Las 4 secciones de un empaquetamiento de Apolonio

Una vez probados los dos lemas auxiliares, procedemos con la demostración del teorema central.

Demostración. (Teorema 3.2.10.) Tomamos un cuádruple de Descartes con $a < 0$, y sea \mathcal{P} , el empaquetamiento de Apolonio asociado. Por 3.1.9 sabemos que cada $M \in \mathcal{A}$ corresponde a la curvatura $\|M\mathbf{v}\|_\infty$ de un círculo en \mathcal{P} . Por ello todos los círculos están etiquetados a excepción de los cuatro de \mathbf{v} . Del lema 3.2.12 se deduce que si $\|M\|_F < T$ entonces M produce un círculo con curvatura $c_1 T$ como máximo. Ahora por el teorema 3.2.8 tenemos que hay como mucho $T^{\alpha+o(1)}$ círculos con esta propiedad, por lo tanto $N_T(\mathcal{A}) \leq T^{\alpha+o(1)}$. Por otro lado, el lema 3.2.12 implica que todo círculo de curvatura $\|M\mathbf{v}\|_\infty \leq T$ corresponde a un elemento $M \in \mathcal{A}$ con $\|M\|_F < \frac{1}{c_0} T$. Procediendo de la misma manera que en el otro caso sabemos que hay $T^{\alpha+o(1)}$ círculos con esta propiedad, de lo que se obtiene la otra desigualdad, es decir, $N_T(\mathcal{A}) \geq T^{\alpha+o(1)}$, que nos proporciona lo que queríamos probar. \square

3.2.2. Curvaturas contadas sin multiplicidad

Ahora pasamos a plantear otra cuestión, ¿cuales son los enteros que aparecen en un empaquetamiento de Apolonio y si existe alguna relación entre ellos? La respuesta a esta pregunta tiene gran complejidad. No obstante, se van a introducir una serie de resultados sobre congruencias que caracterizan los enteros de un empaquetamiento de Apolonio, para poder así dar una respuesta sencilla y general a la pregunta planteada, sin entrar en detalles ya que excede los objetivos del trabajo.

3.2.2.1. Relaciones de congruencia

Nota 3.2.13. Durante esta sección, cuando aparezca la notación $(\text{mod } n)$, significa que se va a trabajar sobre el grupo de los enteros \mathbb{Z}_n .

Teorema 3.2.14. *Sea \mathcal{P} , un empaquetamiento de Apolonio primitivo e integral, los cuádruples de Descartes $(\text{mod } 12)$ se encuentran exactamente en una de las cuatro posibles orbitas. La primera orbita $Y (\text{mod } 12)$ esta formada por,*

$$\{(0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 4), (0, 1, 4, 9), (1, 4, 4, 9), (4, 4, 9, 9)\} \pmod{12} \quad (3.11)$$

Las otras tres orbitas son $(3, 3, 3, 3) - Y$, $(6, 6, 6, 6) + Y$ y $(9, 9, 9, 9) - Y (\text{mod } 12)$.

Las otras tres orbitas restantes están formadas por:

$$\begin{aligned} (3, 3, 3, 3) - Y &= \{(6, 6, 11, 11), (2, 6, 11, 11), (2, 3, 6, 11), (2, 2, 3, 11), (2, 2, 3, 3)\} \\ (6, 6, 6, 6) + Y &= \{(3, 3, 10, 10), (3, 6, 7, 10), (3, 7, 10, 10), (6, 7, 7, 10), (6, 6, 7, 7)\} \\ (9, 9, 9, 9) - Y &= \{(0, 0, 5, 5), (0, 5, 5, 8), (0, 5, 8, 9), (5, 8, 8, 9), (8, 8, 9, 9)\} \end{aligned}$$

Fácilmente se puede comprobar, que cada una de las orbitas solo contiene cuatro clases del grupo \mathbb{Z}_{12} , y por lo tanto las otras ocho clases de equivalencia del grupo están excluidas, lo que significa que las curvaturas asociadas a esos valores no se incluyen en esa orbita.

No obstante, existen condiciones de congruencias más potentes, como por ejemplo considerando el caso $(\text{mod } 24)$ para el empaquetamiento $(0,0,1,1)$, toda curvatura debe ser congruente a $0, 1, 4, 9, 12, 16 (\text{mod } 24)$. Esto nos muestra que seis clases de \mathbb{Z}_{24} pertenecen al empaquetamiento, a diferencia del caso mostrado en el teorema anterior, donde solo eran cuatro clases. El número de clases $(\text{mod } n)$ incluidas en un empaquetamiento es una potencia del tipo $2^a 3^b$. Sin embargo, para el caso $(\text{mod } n)$ donde n es primo con 30 existe un resultado que garantiza que todas las clases de \mathbb{Z}_n , se encuentran en cualquier empaquetamiento.

Teorema 3.2.15. *Sea \mathcal{P} un empaquetamiento de Apolonio primitivo e integral. Para cada n con $\text{mcd}(n, 30) = 1$, cada clase de \mathbb{Z}_n aparece como valor de la curvatura de algún círculo de \mathcal{P} .*

Retomando el objetivo de la sección proponemos la pregunta: ¿que enteros se encuentran en un empaquetamiento de Apolonio como curvaturas, teniendo en cuenta los resultados expuestos con anterioridad sobre congruencias? Para dar respuesta a la pregunta y con el fin de enunciar la nueva conjetura se van a introducir dos ejemplos.

Ejemplo 3.2.16. El primer caso es el empaquetamiento con raíz cuádruple $(-1, 2, 2, 3)$. Siguiendo el teorema 3.2.14 sabemos que todos los cuádruples (mod 12) deben pertenecer a una de las órbitas y por lo tanto en este caso todas sus curvaturas deben ser congruentes a 2, 3, 6, 11 (mod 12). No obstante, no todos los enteros congruentes a ellos aparecen, como ejemplo 78 que debería pertenecer a la clase del 6 no se encuentra en el empaquetamiento. Considerando el primer millón de números enteros, solo 61 enteros de las clases 2, 3, 6 no están en el empaquetamiento, siendo 97287 el más grande. En este caso, todos los enteros de la clase del 11 están incluidos. Todo ello nos indica que el número de enteros ausentes es finito.

Ejemplo 3.2.17. Para el caso del empaquetamiento con raíz cuádruple $(0, 0, 1, 1)$. Tendremos en cuenta las restricciones modulares (mod 24), ya que son más potentes como se ha introducido con anterioridad. Todas sus curvaturas deben ser congruentes a 0, 1, 4, 9, 12, 16 (mod 24). No obstante, no todos los enteros congruentes a ellos se encuentran en el empaquetamiento. Aún siendo esta lista mucho más grande sigue siendo finita.

Observando detalladamente estos dos ejemplos, se puede observar que a excepción de una lista finita de enteros el resto de ellos se encuentran en el empaquetamiento. Esto nos permite plantear la siguiente conjetura que da una respuesta general a la pregunta planteada al inicio de la sección 3.2.2.

Conjetura de la densidad fuerte. *Todo empaquetamiento de Apolonio primitivo, contiene todos los enteros suficientemente grandes, siempre que no estén excluidos por las condiciones de congruencia.*

Capítulo 4

Círculos de Ford

Por último, se va realizar un breve estudio sobre los círculos de Ford y sus aplicaciones a la teoría de números. El conjunto de los círculos de Ford es una parte de un ejemplo particular de los empaquetamientos de Apolonio, por lo tanto es posible definirlo de esta manera y se incluirá a lo largo del capítulo. Para la redacción del capítulo se utilizan principalmente las referencias bibliográficas [8] y [4].

4.1. Definición y propiedades

A continuación se va a presentar la construcción del conjunto de los círculos de Ford a partir de un empaquetamiento de Apolonio concreto. Conside-

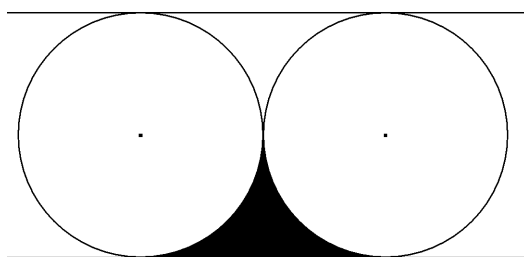


Figura 4.1: Región de definición de los círculos de Ford.

ramos el empaquetamiento de Apolonio $(0,0,2,2)$, muy similar al abordado en el ejemplo 2.3.4. Tomamos la parte de este empaquetamiento de longitud 1 que queda por debajo de dos de los círculos tangentes de radio $1/2$, estos dos últimos círculos también se incluyen. Para una mejor comprensión de la parte elegida se puede observar en la figura 4.1 la región coloreada de

negro. De los círculos que pertenecen a esta región del empaquetamiento nos quedamos solo con aquellos que cumplan la siguiente propiedad: todo círculo debe ser tangente a la recta inferior, es decir, el círculo de radio infinito inferior. El conjunto infinito de círculos que cumplen todo lo anterior se conoce como **círculos de Ford**, que denotaremos por \mathcal{F} .

Por otro lado, existen otras tres formas de definir el conjunto \mathcal{F} , que no se incluyen en el trabajo ya que no guardan relación con los empaquetamientos. No obstante, se pueden consultar [8, sección 2] Una vez definido el conjunto,

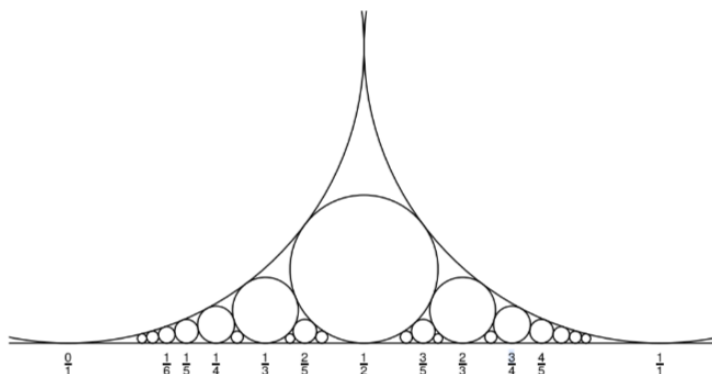


Figura 4.2: Conjunto de los círculos de Ford.

vamos a introducir algunos resultados para su posterior aplicación.

Notación 4.1.1. Conocemos por $C[p, m]$ el círculo de Ford de radio $1/2m^2$ y de centro $(p/m, 1/2m^2)$ donde el punto $x = p/m$ es el punto de tangencia al eje x . También pueden venir denotados por el punto de tangencia como en la figura 4.2.

Nota 4.1.2. Sea $C[p, m]$ un círculo de Ford, la fracción $\frac{p}{m}$ es irreducible.

Proposición 4.1.3. *Sea $C[p, m]$ y $C[k, n]$ dos círculos de Ford. Si*

$$\det \begin{bmatrix} p & k \\ m & n \end{bmatrix} = \pm 1$$

entonces $C[p, m]$ y $C[k, n]$ son tangentes, mientras que en caso contrario son disjuntos. Además, el círculo de Ford con centro en $x = \frac{p+k}{m+n}$ esta inscrito en la región que delimitan los dos círculos dados y el eje x .

Durante la demostración del resultado nos apoyaremos constantemente en la figura 4.3, que nos servirá de gran ayuda para no perdernos.

Demostración. Sean $\frac{p}{m}$ y $\frac{k}{n}$ los puntos de tangencia de los círculos de Ford $C[p, m]$ y $C[k, n]$ con el eje x . Consideramos la distancia entre los centros

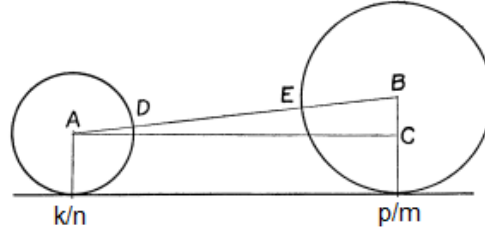


Figura 4.3

AB de los círculos dados. Por otro lado, la distancia entre los puntos de tangencia con el eje es igual a $AC = \left| \frac{p}{m} - \frac{k}{n} \right|$ mientras que la diferencia de radios es la distancia $CB = \left| \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2n^2} \right|$. Gracias al Teorema de Pitágoras tenemos que,

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= \left(\frac{p}{m} - \frac{k}{n} \right)^2 + \left(\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2n^2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2n^2} \right)^2 + \frac{(pn - km)^2 - 1}{m^2n^2} \\ &= (AD + EB)^2 + \frac{(pn - km)^2 - 1}{m^2n^2}. \end{aligned}$$

donde $pn - km = \det \begin{bmatrix} p & k \\ m & n \end{bmatrix}$. Por ello existen tres posibles casos:

1. Si $\left| \det \begin{bmatrix} p & k \\ m & n \end{bmatrix} \right| > 1$, entonces $AB > AD + EB$, y los círculos son externos.
2. Si $\det \begin{bmatrix} p & k \\ m & n \end{bmatrix} = \pm 1$, entonces $AB = AD + EB$, y los círculos son tangentes.
3. Si $\left| \det \begin{bmatrix} p & k \\ m & n \end{bmatrix} \right| < 1$, $pn - km$ es un entero y por lo tanto $pn - km = 0$. Esto implica que $p/m = k/n$, que es absurdo ya que los círculos dados son diferentes.

La segunda parte del teorema no es más que una consecuencia de la primera. Si consideramos el círculo de Ford $C[p+k, m+n]$, debemos comprobar que es tangente a los dos dados y entonces estaría inscrito en la región. Del hecho que,

$$\det \begin{bmatrix} p & p+k \\ m & m+n \end{bmatrix} = \pm 1, \quad \det \begin{bmatrix} k & p+k \\ n & m+n \end{bmatrix} = \pm 1$$

y utilizando la primera parte del resultado sabemos que $C[p+k, m+n]$ es tangente a $C[p, m]$ y $C[k, n]$, por lo que queda probado el resultado. \square

Nota 4.1.4. La recta $y = 1$, normalmente se considera un círculo de Ford, que es tangente en el punto infinito al eje x .

A continuación, se incluye un resultado que caracteriza el punto de tangencia de dos círculos de Ford.

Proposición 4.1.5. *El punto de tangencia de dos círculos de Ford tangentes es*

$$C[p, m] \cap C[k, n] = \left(\frac{pm + kn}{m^2 + n^2}, \frac{1}{m^2 + n^2} \right). \quad (4.1)$$

Demostración. Vamos a hallar el valor explícito de la coordenada x . A partir de la 4.4 y utilizando las propiedades de semejanza de triángulos se llega a que

$$\frac{(p/m) - x}{x - (k/n)} = \frac{1/m^2}{1/n^2}$$

Donde $1/m^2$ y $1/n^2$ son respectivamente los radios de los dos círculos. Despejando nos queda que $x = \frac{pm+kn}{m^2+n^2}$, una vez obtenido la coordenada x del punto de tangencia se calcula la y llegando al resultado buscado. \square

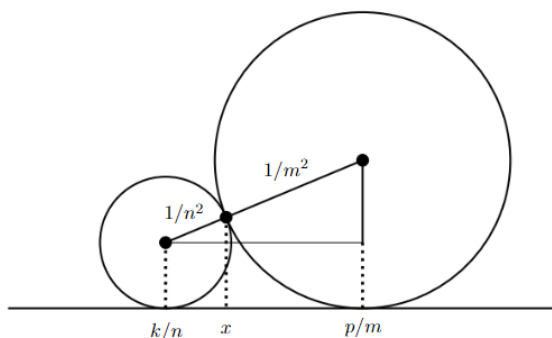


Figura 4.4

4.2. Números de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci guarda relación con los círculos de Ford, que se presenta a lo largo de la sección. Antes de nada, se van a repasar como esta definida esta sucesión y sus principales propiedades.

Definición 4.2.1. La **sucesión de Fibonacci**, F_n , es una sucesión de números naturales que comienza con $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$ y que cumple la siguiente relación de recurrencia,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Algunas de sus principales propiedades son las siguientes,

$$\begin{aligned} (i) \quad & F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_{2n} \\ (ii) \quad & F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \\ (iii) \quad & F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \end{aligned}$$

Consideramos ahora la sucesión de puntos con las siguientes coordenadas

$$\left(\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}, \frac{1}{F_{2n+1}} \right) \quad (4.3)$$

como se puede observar esta compuesta por números de Fibonacci. Esta nueva sucesión genera un círculo y por lo tanto los puntos son cíclicos. Además, estos puntos coinciden con los puntos de tangencia entre los círculos de Ford. Esto es lo que se quiere probar y que esta incluido en el teorema 4.2.4. Lo primero que se va a hacer es introducir un nuevo concepto.

Definición 4.2.2. Se conoce como **sucesión de Fibonacci extendida** a la sucesión de números enteros, F_n , definida tal que

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.4)$$

Nota 4.2.3. La sucesión de Fibonacci extendida cumple las tres propiedades (i), (ii), (iii) expuestas anteriormente.

Una vez introducidos todos los resultados o conceptos preliminares ya podemos abordar el resultado central del capítulo.

Teorema 4.2.4. *Sea F_n la sucesión de Fibonacci extendida. Entonces la sucesión de puntos con coordenadas*

$$\left(\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}, \frac{1}{F_{2n+1}} \right) \quad (4.5)$$

pertenece a un círculo con centro $(-1/2, 0)$ y radio $\sqrt{5}/2$. Además los puntos de la sucesión definida en (4.5) son puntos de tangencia de dos círculos de Ford. El nuevo círculo definido corta al eje x en los puntos $x = \phi^{-1}$ y $x = -\phi$ donde ϕ es el número áureo.

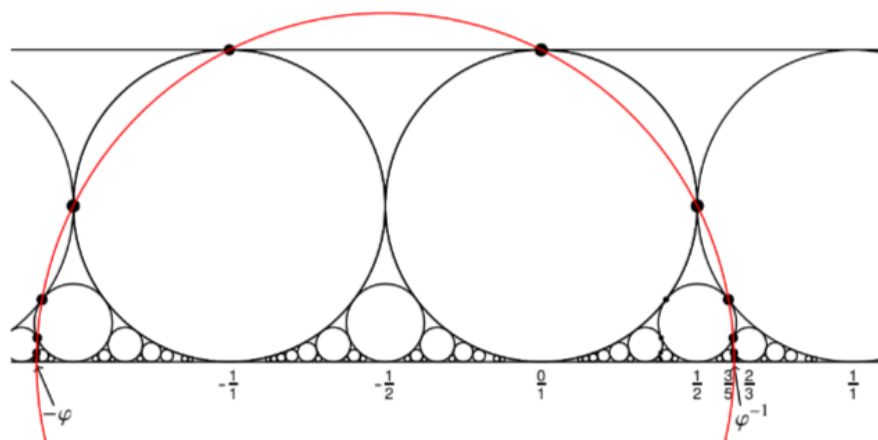


Figura 4.5: Representación gráfica del Teorema 4.2.4.

Demostración. Primero de todo vamos a probar que los puntos de la sucesión son cíclicos es decir que pertenecen al círculo de centro $(-1/2, 0)$ y radio $\sqrt{5}/2$. Para ello veamos que se cumple la ecuación del círculo para los puntos, es decir,

$$\left(\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad (4.6)$$

Denotamos $2n = m$ para facilitar los cálculos y procedemos a comprobar que es cierto. Desarrollamos los cuadrados llegamos a que,

$$F_m^2 + F_m F_{m+1} + 1 = F_{m+1}^2,$$

ordenamos los términos y sacamos factor común a F_{m+1} y nos queda

$$F_{m+1}(F_{m+1} - F_m) = F_m^2 + 1,$$

ahora aplicando la definición de la sucesión de Fibonacci al miembro entre paréntesis tenemos que

$$F_{m+1}F_{m-1} = F_m^2 + 1,$$

que es la propiedad (iii) de la sucesión de Fibonacci y por lo tanto queda probado (4.6).

Ahora, debemos probar que son puntos de tangencias. Primero veamos que si los círculos de Ford están definidos por las fracciones de Fibonacci F_n/F_{n+1} , lo consecutivos son tangentes entre sí. De la propiedad (iii) tenemos que,

$$\det \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n = \pm 1$$

entonces estamos en las condiciones de la proposición 4.1.3 y por lo tanto los círculos consecutivos son tangentes. Ahora, tenemos que comprobar cuales son explícitamente esos puntos de tangencia. De la proposición 4.1.5 tenemos que

$$\begin{aligned} C[F_{n-1}, F_n] \cap C[F_n, F_{n+1}] &= \left(\frac{F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1}}{F_n^2 + F_{n+1}^2}, \frac{1}{F_n^2 + F_{n+1}^2} \right) \\ &= \left(\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}, \frac{1}{F_{2n+1}} \right) \end{aligned}$$

Para la última igualdad se ha hecho uso de las propiedades (i) y (ii) de la sucesión de Fibonacci. Por último para comprobar los puntos de cortes con el eje x únicamente debemos sustituir valor de $y = 0$, en la ecuación cuadrática del círculo de centro $(-1/2, 0)$ y radio $\sqrt{5}/2$. Las dos soluciones obtenidas dan solución al último resultado del teorema. Véase una representación gráfica de la demostración en la siguiente figura. \square

Con esto se da por terminado este capítulo ya que se ha conseguido relacionar los empaquetamientos de Apolonio con los círculos de Ford y a su vez utilizar la teoría de números para relacionar todo lo anterior con la sucesión de Fibonacci.

Bibliografía

- [1] Boyd, David William, The sequence of radii of the Apollonian packing. *Math.Comp.* 39, 1982.
- [2] Eriksson, Nicholas & Lagarias, Jeffrey Clark. Apollonian Circle Packings: Number Theory II. Spherical and Hyperbolic Packings. *The Ramanujan Journal*, 14, 437–469, 2007.
- [3] Graham, Ronald Lewis & Lagarias, Jeffrey Clark & Mallows, Colin Lingwood & Wilks, Allan Reeve & Yan, Catherine Huafei. Apollonian circle packings: number theory. *Journal of Number Theory*, 100, 1-45, 2003.
- [4] Kocik, Jerzy. Fibonacci numbers and Ford circles. arXiv:2003.00852. Febrero 2020.
- [5] Kocik, Jerzy. Proof of Descartes circle formula and its generalization clarified. arXiv.1910.09174. Octubre 2019.
- [6] Kocik, Jerzy. A theorem on circle configuration. arXiv:0706.0372. Junio 2007.
- [7] Kozai, Kenji & Libeskind, Shlomo. Circle Inversions and Applications to Euclidean Geometry. University of Georgia. 9 enero, 2009. Recuperado de: <http://jwilson.coe.uga.edu/MATH7200/InversionCompanion/inversion/inversionSupplement.pdf>
- [8] Northshield, Sam. Ford Circles and Spheres. arXiv.1503.00813, 2015.
- [9] Ortega, Inés & Ortega, Tomas. Los diez problemas de Apolonio. *Suma*. 46, 59-70, Junio 2004.
- [10] Petrunin, Anton.(2019). Euclidean plane and its relatives: a minimalist introduction. Versión consultada: arXiv.1302.1630. Mayo 2022.
- [11] Rasskin, Iván. A polytopal approach to Apollonian packings and discrete knotted structures. Tesis de doctorado, Universidad de Montpellier. 10 diciembre 2021.

- [12] Wildberger, Norman John. [Insights into Mathematics]. Apollonius' circle construction problems — Famous Math Problems 3 — NJ Wildberger. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=8KDpGn0bUP8>
- [13] Problem of Apollonius - CCC. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=Iur0RqEg1fA>. Consultado en junio 2022.
- [14] The Problems of Apollonius. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=h6Z8rnvgwP4&list=PLZnGiLjV1F_uU55em6zfuttaWm40utXeX. Consultado en junio 2022.