



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

**Trabajo Fin de Grado**

Grado en Matemáticas

**Poliedros y conjuntos convexos.  
Una generalización del volumen.**

*Autora: Raquel Melgar Fernández*

*Tutor: Antonio Campillo López*



---

*A mi madre, mi padre y mis hermanas.*

*A las chicas de L'Orecchio di Fatima, a Carlos, a Louis, a Álvaro y a toda la gente buena con  
la que he disfrutado de este año en Montpellier.*

*A Mimi, Rober y Alber por todo lo que han significado para mí estos cuatro años.*

*A Antonio Campillo por toda la ayuda e ilusión que ha puesto en este trabajo. Gracias por  
haberme hecho descubrir este tema del que espero seguir disfrutando y aprendiendo.*



---

# Índice general

Introducción	7
1. Primeras definiciones y característica de Euler	11
2. Transformaciones lineales y estructura de los poliedros	19
3. Conjuntos Polares	39
4. Conos tangentes y descomposición de poliedros	49
5. El interior de los poliedros	59
6. La evaluación exponencial	65
7. Cálculo de volúmenes	79
8. Comparaciones y conclusiones	83
Bibliografía	94



---

# Introducción

La búsqueda de algoritmos para encontrar el número y la lista de puntos con coordenadas enteras de un poliedro, o más generalmente, en un conjunto convexo es un problema de gran interés en los campos de la geometría combinatoria y de la programación entera.

En 1988 Michael Brion en [7], usando resultados de geometría algebraica que quedan lejos del alcance de este trabajo, describió una bonita fórmula que da una respuesta a este problema y además muestra cuáles son los puntos reticulares contenidos en el poliedro.

Algunos años después se publicaron varias pruebas mucho más elementales en [12], [4] y [13] que usaban la teoría de evaluaciones, que también se utilizará en este trabajo.

En el trabajo definiremos *poliedro* como la intersección de una cantidad finita de semiespacios cerrados. Esta definición de poliedro  $P$  abarcará conjuntos no acotados.

Veamos algún ejemplo de aplicación del algoritmo que Michael Brion diseñó. Supongamos que queremos obtener una lista de todos los enteros positivos, es decir los enteros en el intervalo  $[1, \infty)$  y los representaremos en los exponentes de la serie  $x^1 + x^2 + x^3 + \dots$ . Para poder escribirlo de forma más compacta vamos a asociar la serie a la función generatriz:

$$x^1 + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k>0} x^k = \frac{x}{1-x}.$$



Figura 1: Enteros en el intervalo  $[1, \infty)$

De manera similar, si hacemos una lista de todos los enteros menores o iguales que 5, es decir los enteros en el intervalo  $(-\infty, 5]$ , obtenemos:

$$\dots + x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \sum_{k \leq 5} x^k = \frac{x^5}{1-x^{-1}}.$$

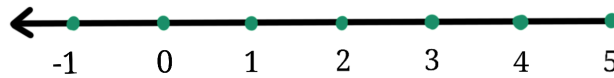
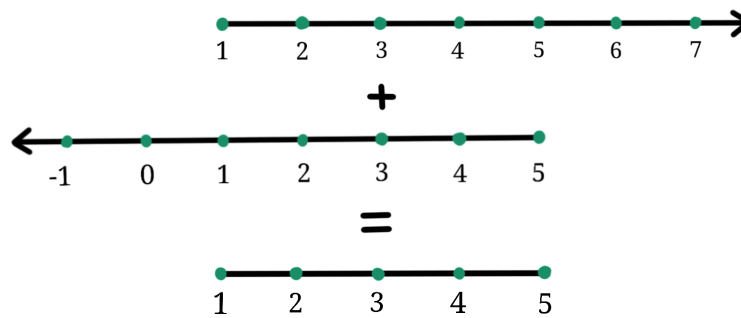


Figura 2: Enteros en el intervalo  $(-\infty, 5]$

Ahora sumamos las dos funciones racionales que hemos obtenido

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^5}{1-x^{-1}} = \frac{x}{1-x} + \frac{x^6}{x-1} = \frac{x-x^6}{1-x} = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

y se cancelan obteniendo un polinomio. Es decir, la suma de dos funciones racionales asociadas a series infinitas se simplifica en un polinomio que representa los enteros contenidos en el intervalo  $[1, 5]$ .



Esta curiosa simplificación es un ejemplo unidimensional de lo que representa la fórmula de Brion.

En resumen, el procedimiento ha sido: tomamos un poliedro acotado, en nuestro caso se trata del intervalo  $[1, 5]$ , a cada uno de los vértices, en nuestro caso los puntos 1 y 5, con ayuda de la fórmula de Brion le asociamos una función racional. Sumamos las funciones racionales asociadas a cada uno de los vértices y obtenemos un polinomio de tal forma que los exponentes de sus términos monomiales nos indican cuales son los puntos con coordenadas enteras que se encuentran contenidas en el poliedro.

La interpretación de esta curiosa simplificación es lo que ha motivado este trabajo. Se estudiarán, mediante la teoría de evaluaciones que antes hemos mencionado, los espacios de funciones características de poliedros y conjuntos convexos. Se seguirá principalmente el trabajo de Alexander I. Barvinok. Este matemático ruso, basándose en el trabajo de Michael Brion, demostró en [5] un teorema cuyas conclusiones establecen que, una vez fijada la dimensión del



espacio en que se trabaja, se puede calcular en tiempo polinómico el número y la lista de puntos reticulares de un poliedro. Gracias a este resultado, Barvinok fue invitado como conferenciante el ICM de Madrid en 2006 [2].

Este no es el resultado en el que nos vamos a centrar en el trabajo. Nuestro principal objetivo será obtener una generalización de la noción de volumen o, más generalmente, de la medida de Lebesgue de un poliedro en un espacio Euclídeo.

La idea de esta generalización es la misma que hemos visto antes en los ejemplos; a cada uno de los vértices de un poliedro se le asociará una determinada función de tal forma que al sumarlas todas, obtengamos el “volumen” generalizado del poliedro. Para ello, necesitaremos poder hablar del “volumen” de un poliedro no acotado.

Dado un poliedro  $P$  definido en el espacio Euclídeo  $V$ , diremos que su volumen, en vez de ser un escalar, será una función  $\phi_P : V \rightarrow \mathbb{R}$  de tal forma que  $\phi_P(0)$  sea el volumen usual de  $P$  si  $P$  es un poliedro acotado y  $\phi(P)$  no esté necesariamente bien definida en 0 si el poliedro  $P$  es no acotado.

La forma de definir esta función y sus propiedades es uno de los objetivos principales del trabajo y se tratará con profundidad en los capítulos 6, 7 y 8.

En el camino de estudiar esta generalización del volumen, se definirá lo que es una *evaluación* y se verán varios ejemplos importantes. Se definirán dos estructuras de  $\mathbb{R}$ -álgebras sobre  $\mathcal{P}(V)$ , el espacio vectorial engendrado por las funciones características de poliedros definidos en  $V$ . También se estudiarán y demostrarán resultados clásicos sobre la teoría de poliedros y conjuntos convexos, como el Teorema de Weyl-Minkowski o la existencia de la característica de Euler, que es aditiva para conjuntos cerrados y convexos.

Se intentará descubrir hasta qué punto existe un paralelismo entre la fórmula de Brion para los puntos reticulares contenidos en un poliedro y esta fórmula para el volumen de un poliedro. Entre las conclusiones se presenta un paralelismo original entre la demostración posterior del Teorema de Brion y la demostración de la fórmula de los volúmenes. También se aporta una demostración original y explícita sobre el carácter analítico del volumen generalizado de un politopo.



---

# Capítulo 1

## Primeras definiciones y característica de Euler

En este capítulo introduciremos los principales objetos que van a aparecer en este trabajo. Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión finita  $d \geq 0$ .

**Definición 1.1** (Poliedro). Un *poliedro*  $P \subset V$  es un conjunto definido por una cantidad finita de inecuaciones lineales:

$$P := \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i, i \in I\} \quad (1.1)$$

Para un conjunto  $I$  finito, donde  $\ell_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones lineales y  $\alpha_i$  son números reales.

*Observación 1.1.* Si identificamos  $V$  con  $\mathbb{R}^d$  eligiendo una base, podemos definir un poliedro  $P$  por:

$$P = \{x : \sum_{j=1}^d a_{ij}\xi_j \leq \alpha_i \text{ para } x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \text{ y } i \in I\}$$

donde  $a_{ij}$  y  $\alpha_i$  son números reales.

*Observación 1.2.* La definición que hemos dado para un poliedro no implica que sea acotado, ver figura 1.1. Es por eso que introducimos el término *politopo*.

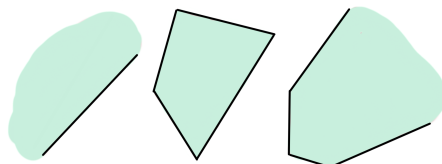


Figura 1.1: Ejemplos de poliedros acotados y no acotados

**Definición 1.2** (Politopo). Sea  $P \subset V$  un poliedro. Decimos que  $P$  es un *politopo* si está acotado.

**Definición 1.3** (Convexidad). Decimos que un conjunto  $A \subset V$  es *convexo* si para cada par de puntos  $x, y \in A$ , se tiene que  $\overline{xy} \subset A$ , donde

$$\overline{xy} = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$$

*Observación 1.3.* Los poliedros son por definición conjuntos convexos.

En efecto, si tenemos  $x, y \in P = \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i, i \in I\}$ .

Entonces dado  $\lambda \in [0, 1]$  se tiene que:

$$\ell_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda \ell_i(x) + (1 - \lambda)\ell_i(y) \leq \lambda \alpha_i + (1 - \lambda)\alpha_i = \alpha_i \quad \forall i \in I$$

**Definición 1.4** (Función característica de un conjunto). Sea  $A \subset V$  un conjunto. Entonces la *función característica de  $A$*   $\mathbb{1}_A$  es la función  $\mathbb{1}_A : V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (1.2)$$

Una vez introducidas estas definiciones básicas, presentamos los siguientes espacios vectoriales.

Denotaremos  $\mathcal{P}(V)$ , el espacio vectorial generado por las funciones características de los **poliedros** de  $V$ ,  $P \subset V$ . Esto es, es el mínimo espacio vectorial que contiene las funciones características de los poliedros  $P \subset V$ .

Equivalentemente, se define:

- $\mathcal{C}(V)$ , el espacio vectorial generado por las funciones características de conjuntos **cerrados y convexos** de  $V$ .
- $\mathcal{C}_b(V)$ , el espacio vectorial generado por las funciones características de conjuntos **compactos y convexos** de  $V$ .
- $\mathcal{P}_b(V)$ , el espacio vectorial generado por las funciones características de **politopos** de  $V$ .  
Es decir  $\mathcal{P}_b(V) = \mathcal{P}(V) \cap \mathcal{C}_b(V)$

La observación 1.3, muestra que  $\mathcal{P}(V) \subset \mathcal{C}(V)$ .

El cuerpo base del espacio vectorial  $V$  es  $\mathbb{R}$ . El cuerpo sobre el que definimos los espacios vectoriales  $\mathcal{P}(V)$ ,  $\mathcal{P}_b(V)$ ,  $\mathcal{C}(V)$  y  $\mathcal{C}_b(V)$  será también  $\mathbb{R}$ . Así por ejemplo, los elementos de  $\mathcal{P}(V)$  son combinaciones lineales finitas con coeficientes en  $\mathbb{R}$  de funciones características de poliedros en  $V$ . Es decir, si  $f \in \mathcal{P}(V)$ , entonces  $f$  es de la forma:

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{P_i}$$

donde  $P_i \subset V$  son una cantidad finita de poliedros y  $\alpha_i$  son números reales.

Los espacios vectoriales mencionados, son subespacios del espacio vectorial  $\mathcal{A}(V)$  formado por todas las funciones  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Este espacio de funciones, junto con el producto y la suma usuales de funciones:

$$f = g + h \quad \text{si} \quad f(x) = g(x) + h(x) \quad \forall x \in V$$

$$f = g \cdot h \quad \text{si} \quad f(x) = g(x)h(x) \quad \forall x \in V$$

conforman un anillo conmutativo y con unidad. Además, considerando la operación adicional de producto por elementos de  $\mathbb{R}$ , se tiene una estructura de  $\mathbb{R}$ -álgebra.

Puesto que:

$$\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$$

Los subespacios vectoriales que acabamos de definir, heredan la estructura de anillo ya que la intersección de poliedros es un poliedro, la intersección de conjuntos cerrados y convexos es cerrada y convexa y la intersección de conjuntos acotados es acotada.

La función que desempeña el papel de elemento neutro para el producto en  $\mathcal{A}(V)$  es la función constante igual a 1, que también se puede escribir como  $\mathbb{1}_V$ . Y dado que  $V$  es un poliedro y un conjunto cerrado y convexo, se tiene que  $\mathcal{P}(V)$  y  $\mathcal{C}(V)$  también son anillos **unitarios** con elemento unitario  $\mathbb{1}_V$ .

Igual que en  $\mathcal{A}(V)$ , podemos considerar la operación adicional de producto por elementos de  $\mathbb{R}$  para hablar de una estructura de  $\mathbb{R}$ -álgebra.

Más adelante definiremos otro producto interno en  $\mathcal{C}(V)$ , que nos proporcionará una nueva estructura de anillo (y  $\mathbb{R}$ -álgebra) con propiedades interesantes.

*Observación 1.4.* Las funciones características de poliedros (respectivamente conjuntos cerrados y convexos) **no** forman una base de  $\mathcal{P}(V)$  (respectivamente de  $\mathcal{C}(V)$ ), es decir, no son linealmente independientes. (Observar figura 1.2).

*Observación 1.5.* Cuando quede claro por el contexto, podremos hablar de *suma de dos conjuntos* para hacer referencia a la suma de las funciones características de ambos conjuntos.

*Observación 1.6.* Aunque  $\mathcal{P}(V)$  está engendrado por funciones características de poliedros cerrados, también contiene funciones características de poliedros abiertos (observar figura 1.3). Igualmente, en  $\mathcal{C}(V)$  hay funciones características de conjuntos que no son convexos. Por ejemplo, si sumamos las doce caras de un dodecaedro, luego restamos las treinta aristas y sumamos

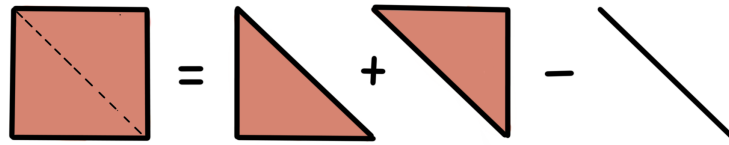


Figura 1.2: Relaciones lineales entre indicadores de poliedros

los veinte vértices, obtenemos la función característica de la superficie exterior del dodecaedro, que no es un conjunto convexo.

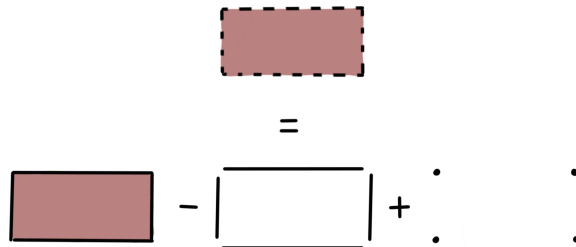


Figura 1.3: Un rectángulo abierto como combinación lineal de poliedros cerrados

**Definición 1.5** (Evaluación). Una *evaluación* es una transformación lineal

$$T : \mathcal{P}(V), \mathcal{C}(V), \mathcal{C}_b(V), \mathcal{P}_b(V) \longrightarrow W$$

donde  $W$  es un espacio vectorial.

Dos ejemplos de *evaluaciones*  $\mathcal{P}_b(V) \longrightarrow W$  son los siguientes:

1. La evaluación que asigna a cada politopo el numero de puntos con coordenadas enteras (o puntos reticulares) contenidos en él, aquí  $W$  es el espacio vectorial  $\mathbb{R}$ .
2. La evaluación  $T$  que asigna a cada politopo su polinomio indicador reticular. El polinomio indicador reticular de un politopo  $P$  es el polinomio de Laurent en  $d$  variables dado por la suma de monomios con coeficiente 1 cuyos exponentes son las coordenadas de los puntos reticulares contenidos en  $P$ .

Por ejemplo, si  $P$  es el politopo en  $\mathbb{R}^3$  que solo contiene a los puntos reticulares  $(1, 1, 1)$ ,  $(0, 2, 2)$  y  $(0, 0, 3)$  entonces

$$T(\mathbb{1}_P) = xyz + y^2z^2 + z^3$$

En este caso  $W$  es el espacio vectorial de los polinomios de Laurent en  $d = 3$  variables con coeficientes en  $\mathbb{R}$ .

Una característica fundamental de las evaluaciones es la siguiente: la evaluación de (la función característica de) la unión de dos poliedros es la suma de las evaluaciones de (las funciones características de) de dos poliedros menos la evaluación de (la función característica de) la intersección.

Por ejemplo, si consideramos la evaluación en (1) “número de puntos reticulares contenidos en el politopo”:

$$\begin{aligned} T : \mathcal{P}_b(V) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{1}_P &\longmapsto |P \cap \mathbb{Z}^d| \end{aligned}$$

donde  $|\cdot|$  denota el cardinal de un conjunto. Entonces se tiene la relación:

$$|(P \cup Q) \cap \mathbb{Z}^d| = |P \cap \mathbb{Z}^d| + |Q \cap \mathbb{Z}^d| - |(P \cap Q) \cap \mathbb{Z}^d|$$

Se introduce ahora una *evaluación* fundamental de los conjuntos cerrados y convexos.

**Teorema 1.1.** *Existe una única evaluación:*

$$\chi : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

llamada *característica de Euler* tal que  $\chi(\mathbb{1}_A) = 1$  para cada conjunto cerrado y convexo  $A \subset V$  distinto del vacío.

Este teorema fue enunciado y demostrado por Hugo Hadwiger [10].

*Demostración.* De existir, esta aplicación debe ser *única* ya que para  $f \in \mathcal{C}(V)$ ,  $f$  es combinación lineal finita de funciones características de conjuntos convexos y cerrados. Entonces:

$$f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \implies \chi(f) = \sum_{i:A_i \neq \emptyset} \alpha_i.$$

Para ver la existencia, procedemos por inducción sobre  $d = \dim V$ . Primero vamos a ver la existencia de la función con dominio en  $\mathcal{C}_b(V)$ .

Si  $d = 0$ , entonces definimos  $\chi(f) = f(0)$  para cada  $f \in \mathcal{C}(V)$  que verifica ambas propiedades.

Supongamos que la función existe para  $\dim V = d - 1$ . Sea  $V$  tal que  $\dim V = d$ . Consideramos una función lineal no nula  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  y descomponemos  $V$  en los hiperplanos afines

$$H_\tau = \{x \in V : \ell(x) = \tau\}$$

Eligiendo el origen de coordenadas arbitrariamente en  $H_\tau$ , estos hiperplanos son naturalmente subespacios de dimensión  $d - 1$ . Por hipótesis de inducción, existe una evaluación

$$\chi_\tau : \mathcal{C}_b(H_\tau) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $\chi_\tau(\mathbb{1}_A) = 1$  para cada  $A \subset H_\tau$  no vacío, convexo y compacto.

Sea  $f \in \mathcal{C}_b(V)$ , entonces existe una cantidad finita de conjuntos no vacíos, cerrados y convexos  $A_i \subset V$  y unos escalares  $\alpha_i$  tales que

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \quad (1.3)$$

Escribimos la restricción a cada hiperplano  $H_\tau$  como

$$f_\tau = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap H_\tau}$$

Entonces  $f_\tau \in \mathcal{C}_b(H_\tau)$  y

$$\chi_\tau(f_\tau) = \sum_{i \in I: A_i \cap H_\tau \neq \emptyset} \alpha_i \quad (1.4)$$

Afirmamos que para cada  $\tau$  el límite lateral

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \chi_{\tau-\epsilon}(f_{\tau-\epsilon})$$

existe salvo para una cantidad finita de  $\tau$  (este conjunto depende de la función  $f$ ) y el límite es igual a  $\chi_\tau(f_\tau)$ . Así, definimos el conjunto  $J \subset I$  de los índices  $i$  en la descomposición 1.3 que verifican:

- $A_i \cup H_\tau \neq \emptyset$
- $\tau$  no es el mínimo valor de  $\ell$  en  $A_i$

Entonces utilizando la fórmula 1.4 se tiene que

$$\chi_{\tau-\epsilon}(f_{\tau-\epsilon}) = \sum_{i \in J} \alpha_i$$



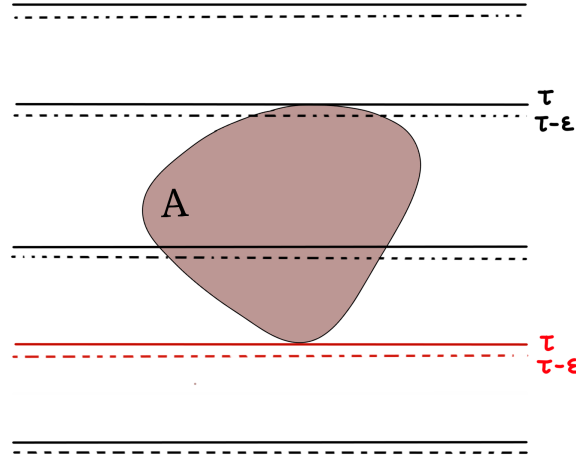


Figura 1.4: Posibles localizaciones de los planos  $H_\tau$  y  $H_{\tau-\epsilon}$

Así definimos la función  $\chi$  como

$$\chi(f) = \sum_{\tau \in \mathbb{R}} (\chi_\tau(f_\tau) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \chi_{\tau-\epsilon}(f_{\tau-\epsilon})), \quad (1.5)$$

y como para cada  $f \in \mathcal{C}_b(V)$  solo hay una cantidad finita de sumandos no nulos, la suma está bien definida y, por la forma en que está definida,  $\chi$  es lineal.

Solo falta comprobar que  $\chi(\mathbb{1}_A) = 1$  si  $A \subset V$  es no vacío, convexo y cerrado. Pero esto se deduce de que, en ese caso, en 1.5, el único término no nulo vale 1. Es el término correspondiente al  $\tau$  que es el mínimo valor de  $\ell$  en A (dibujado en rojo en la figura 1.4).

Para acabar, solo nos falta extender esta función a los conjuntos no acotados, es decir, a  $\mathcal{C}(V)$ .

Consideremos  $B$  un conjunto convexo cerrado y acotado que contiene al origen, y para  $t > 1$ , consideramos la dilatación:

$$tB := \{tx : x \in B\}.$$

Entonces, para cada  $f \in \mathcal{C}(V)$  definimos

$$\chi(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(f\mathbb{1}_{tB}). \quad (1.6)$$

Si escribimos  $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$  donde los conjuntos  $A_i \subset V$  son conjuntos no vacíos cerrados y convexos (posiblemente no acotados). Se tiene que  $A_i \cap tB \neq \emptyset$  para  $t$  suficientemente grande,

de modo que el límite 1.6 está bien definido y es igual a:

$$\sum_i \alpha_i$$

como queríamos. La linealidad de esta extensión se deduce de 1.6.  $\square$

*Observación 1.7.* Durante la demostración de este teorema, hemos obtenido una expresión explícita para  $\chi$ , dada por la fórmula 1.5. Más adelante, esta expresión explícita nos va a ser de utilidad.

*Observación 1.8.* La característica de Euler no es invariante topológico. La característica de Euler de (la función característica de) una recta es 1, ya que una recta es un poliedro. Pero por otra parte la característica de Euler de un intervalo abierto es -1. En efecto, si al intervalo cerrado le restamos los dos puntos extremos, que tienen característica de Euler 1, se obtiene -1.

*Observación 1.9.* La característica de Euler de un rectángulo abierto es 1 (ver figura 1.3). La característica de Euler del cubo abierto es -1 y para un hiper-cubo abierto d-dimensional la característica de Euler es  $(-1)^d$  como demostraremos en el capítulo 5.

---

## Capítulo 2

# Transformaciones lineales y estructura de los poliedros

**Teorema 2.1.** *Sea  $T : V \rightarrow W$  una aplicación lineal entre  $V$  y  $W$  espacios vectoriales reales de dimensión finita. Entonces:*

1. *Para cada poliedro  $P \subset V$ , la imagen  $T(P) \subset W$  es un poliedro.*
2. *Existe una única evaluación  $\mathcal{T} : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(W)$  tal que*

$$\mathcal{T}(\mathbb{1}_P) = \mathbb{1}_{T(P)}$$

*para cada poliedro  $P \subset V$ .*

En otras palabras, el teorema dice que las transformaciones lineales conservan las relaciones lineales entre funciones características de poliedros.

Para probar la primera parte del teorema, utilizaremos el siguiente lema:

**Lema 2.1** (Procedimiento de eliminación de Fourier-Motzkin). *Sea  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$  la proyección:*

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \mapsto (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-1})$$

*y sea  $P \subset \mathbb{R}^d$  un poliedro. Entonces  $T(P) \subset \mathbb{R}^{d-1}$  es un poliedro.*

*Demostración.* Supongamos que  $P$  viene dado por:

$$P = \left\{ x : \sum_{j=1}^d a_{ij} \xi_j \leq b_i \quad \text{para } x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \quad \text{y } i \in I \right\}$$

Entonces consideramos los conjuntos:

$$I_o = \{i \in I : a_{id} = 0\}$$

$$I_+ = \{i \in I : a_{id} > 0\}$$

$$I_- = \{i \in I : a_{id} < 0\}$$

Entonces dado  $y = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-1})$ , se tiene que  $y \in T(P)$  si y solo si existe  $\xi_d$  tal que  $(y, \xi_d) \in P$ , esto se traduce en:

$$\sum_{j=1}^{d-1} a_{ij} \xi_j \leq b_i \quad \forall i \in I_o \quad (2.1)$$

$$\xi_d \leq \frac{b_i}{a_{id}} - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{a_{ij}}{a_{id}} \xi_j \quad \forall i \in I_+$$

$$\xi_d \geq \frac{b_i}{a_{id}} - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{a_{ij}}{a_{id}} \xi_j \quad \forall i \in I_-.$$

Para que este  $\xi_d$  exista, es condición necesaria y suficiente, que ninguna de las cotas inferiores para  $\xi_d$  sea mayor que ninguna de las cotas superiores. Es decir, que se verifique:

$$\frac{b_{i_1}}{a_{i_1 d}} - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{a_{i_1 j}}{a_{i_1 d}} \xi_j \geq \frac{b_{i_2}}{a_{i_2 d}} - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{a_{i_2 j}}{a_{i_2 d}} \xi_j \quad \forall (i_1, i_2) \in I_+ \times I_-$$

Estas desigualdades, junto con 2.1, establecen una cantidad finita de desigualdades lineales sobre las coordenadas de  $y = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-1})$ . Así, se tiene que  $T(P)$  es un poliedro.  $\square$

*Demostración del teorema 2.1.* Comenzaremos demostrando la parte (1).

Si se tiene que  $T : V \longrightarrow W$  es un isomorfismo, entonces el resultado es fácil de probar. Si  $P = \{x : \ell_i(x) \leq \alpha_i\}$  entonces  $T(P) = \{y : \ell_i(T^{-1}(y)) \leq \alpha_i\}$  y  $T(P)$  es un poliedro.

También es fácil ver el resultado si  $T$  es inyectiva, pues podemos considerar la restricción  $T : V \longrightarrow T(V)$  para tener un isomorfismo.

Si  $T$  es arbitrario consideramos la composición:

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V \times W \longrightarrow W \\ x &\longmapsto (x, T(x)) \longmapsto T(x). \end{aligned}$$

La primera aplicación es inyectiva y la segunda es una proyección. Así, utilizando el lema anterior, se tiene que si  $P$  es un poliedro,  $T(P)$  también lo es.

Para demostrar la parte (2), es fácil ver que si la aplicación  $\mathcal{T}$  existe, entonces es única. Si  $f \in \mathcal{P}(V)$  entonces existen  $P_1, \dots, P_s$  poliedros y  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}$  tales que

$$f = \alpha_1 \mathbb{1}_{P_1} + \alpha_2 \mathbb{1}_{P_2} + \dots + \alpha_s \mathbb{1}_{P_s}$$

y entonces necesariamente:

$$\mathcal{T}(f) = \alpha_1 \mathbb{1}_{T(P_1)} + \alpha_2 \mathbb{1}_{T(P_2)} + \dots + \alpha_s \mathbb{1}_{T(P_s)}.$$

Demostremos ahora la existencia. Observamos que dado  $x \in W$ , el conjunto  $T^{-1}(x) \subset V$  es un subespacio afín y que si  $P \subset V$  es un poliedro, entonces el producto  $\mathbb{1}_P \mathbb{1}_{T^{-1}(x)} = \mathbb{1}_{P \cap T^{-1}(x)}$  es la función indicatriz de un poliedro. Entonces para cada  $f \in \mathcal{P}(V)$  el producto  $f \mathbb{1}_{T^{-1}(x)}$  está contenido en  $\mathcal{P}(V)$  y entonces tiene sentido considerar su característica de Euler. Así definimos  $h = \mathcal{T}(f)$ ,  $h : W \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$h(x) = \chi(f \mathbb{1}_{T^{-1}(x)}) \quad \forall x \in W. \tag{2.2}$$

Es claro que la aplicación  $\mathcal{T}$  es lineal y va de  $\mathcal{P}(V)$  a  $\mathcal{P}(W)$ . Además si  $f = \mathbb{1}_P$  con  $P$  un poliedro, entonces el poliedro  $P \cap T^{-1}(x)$  es no vacío cuando  $x \in T(P)$ , entonces se tiene que  $\mathcal{T}(\mathbb{1}_P) = \mathbb{1}_{T(P)}$ .  $\square$

Introduciremos ahora, una nueva estructura de álgebra sobre  $\mathcal{P}(V)$  más interesante que la introducida en el capítulo anterior. Para ello, presentamos primero la siguiente definición:

**Definición 2.1** (Suma de Minkowski). Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos. La *suma de Minkowski*  $A + B \in V$  se define como:

$$A + B := \{a + b : \text{donde } a \in A, b \in B\} \tag{2.3}$$

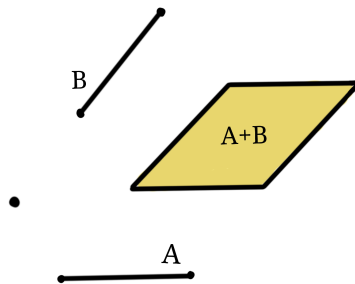


Figura 2.1: Suma de Minkowski de dos segmentos

*Observación 2.1.* Dados  $A$  y  $B$  conjuntos cerrados y convexos, la suma de Minkowski  $A + B$  no es cerrada en general. Tenemos el siguiente contraejemplo: si se toman como conjuntos  $A$  y  $B$ :

$$A = \{(x, y) : x > 0, y \geq \frac{1}{x}\} \quad y \quad B = \{(-x, y) : x > 0, y \geq \frac{1}{x}\}$$

entonces  $A + B$  no es cerrado. En efecto, si consideramos los puntos de la forma  $(0, y)$  con  $y > 0$ , estos están todos contenidos en  $A + B$ , pues dado  $y > 0$ , considero  $x > 0$  tal que  $\frac{y}{2} \geq \frac{1}{x}$ . Entonces se tiene que  $(0, y) = (x, \frac{y}{2}) + (-x, \frac{y}{2}) \in A + B$  y sin embargo

$$\lim_{y \rightarrow 0} (0, y) = (0, 0) \notin A + B$$

pues los puntos de  $A + B$  tienen segunda coordenada estrictamente positiva. Así, el conjunto  $A + B$  no es abierto, de hecho  $A + B = \{(x, y) : y > 0\}$  es el semiespacio abierto.

**Teorema 2.2.** *Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión finita. Entonces*

1. *Si  $P, Q$  son poliedros no vacíos, entonces su suma de Minkowski  $P + Q$  es también un poliedro.*
2. *Existe una única aplicación bilineal*

$$* : \mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V) \longrightarrow \mathcal{P}(V)$$

*llamada convolución tal que*

$$\mathbb{1}_P * \mathbb{1}_Q = \mathbb{1}_{P+Q}$$

*donde  $P$  y  $Q$  son poliedros no vacíos.*

*Demostración.* Comenzamos demostrando la parte (1). Observamos que, dado  $P$  y  $Q$ , entonces  $P \times Q = \{(x, y) : x \in P, y \in Q\} \subset V \times V$  es un poliedro ya que está definido por las inecuaciones lineales de  $x$  y las inecuaciones lineales de  $y$ .

Consideramos la transformación lineal

$$T : V \times V \longrightarrow V$$

$$(x, y) \longmapsto x + y. \tag{2.4}$$

Entonces es claro que  $T(P \times Q) = P + Q$  y entonces  $P + Q$  es un poliedro aplicando la primera parte del teorema 2.1.

Demostremos ahora la segunda parte:

Es fácil ver la unicidad de la aplicación bilineal  $*$  procediendo como en el teorema anterior. Para ver la existencia, para  $f, g \in \mathcal{P}(V)$  definimos la función  $f \times g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$(f \times g)(x, y) = f(x)g(y).$$

Es fácil ver que  $f \times g \in \mathcal{P}(V \times V)$  ya que si escribimos  $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{P_i}$  y  $g = \sum_j \beta_j \mathbb{1}_{Q_j}$  donde  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$  y  $P_i, Q_j \subset V$  son poliedros, se tiene que :

$$f \times g = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbb{1}_{P_i \times Q_j}.$$

Así, podemos definir  $\mathcal{T} : \mathcal{P}(V \times V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$  como en la demostración del teorema 2.1 por:

$$\mathcal{T}(h)(x) = \chi(h \mathbb{1}_{T^{-1}(x)}), \quad h \in \mathcal{P}(V \times V)$$

donde  $T$  es 2.4 y entonces:

$$* : \mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V) \xrightarrow{\times} \mathcal{P}(V \times V) \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathcal{P}(V)$$

está bien definida. Así escribimos

$$f * g = \mathcal{T}(f \times g).$$

La bilinealidad es fácil de deducir, y además se verifica que si  $P$  y  $Q$  son poliedros:

$$\mathbb{1}_P * \mathbb{1}_Q = \mathcal{T}(\mathbb{1}_P \times \mathbb{1}_Q) = \mathcal{T}(\mathbb{1}_{P \times Q}) = \chi(\mathbb{1}_{P \times Q} \mathbb{1}_{T^{-1}(z)}) = \chi(\mathbb{1}_{PQ})$$

y el poliedro

$$(P \times Q) \cap T^{-1}(z)$$

es no vacío precisamente cuando  $z \in P + Q$ . Entonces, la función así definida, verifica las propiedades requeridas.  $\square$

*Observación 2.2.* Observamos que en el producto de convolución  $*$ , la función  $\mathbb{1}_0$  juega el papel de elemento neutro. En efecto, sea  $f \in \mathcal{P}(V)$  entonces existen  $A_1, A_2, \dots, A_s$  poliedros y  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  números reales tales que

$$f = \alpha_1 \mathbb{1}_{A_1} + \alpha_2 \mathbb{1}_{A_2} + \dots + \alpha_s \mathbb{1}_{A_s}$$

y por bilinealidad:

$$f * \mathbb{1}_0 = \alpha_1 (\mathbb{1}_{A_1} * \mathbb{1}_0) + \alpha_2 (\mathbb{1}_{A_2} * \mathbb{1}_0) + \dots + (\alpha_s \mathbb{1}_{A_s} * \mathbb{1}_0) = \alpha_1 \mathbb{1}_{A_1+0} + \alpha_2 \mathbb{1}_{A_2+0} + \dots + \alpha_s \mathbb{1}_{A_s+0} = f$$

igualmente se tiene que  $\mathbb{1}_0 * f = f$ .

Ya habíamos mencionado que el espacio vectorial  $\mathcal{P}(V)$  tiene una estructura de anillo al considerar la suma y el producto usuales de funciones. Por el teorema 2.2, vemos que el producto de convolución  $*$  en  $\mathcal{P}(V)$ , nos proporciona una nueva estructura de anillo conmutativo en la que tendremos igual interés. Igual que antes, también es un  $\mathbb{R}$ -álgebra al considerar la operación de producto por escalares. Y por lo visto en la observación anterior, se trata de un anillo unitario. En el caso del anillo  $(\mathcal{P}(V), +, \cdot)$ , el elemento unidad era  $\mathbb{1}_V$ , mientras que en el anillo  $(\mathcal{P}(V), +, *)$  el elemento unidad es  $\mathbb{1}_0$ .

*Observación 2.3.* En este anillo hay elementos invertibles. Por ejemplo, el inverso de la función característica del intervalo  $[0, 1]$  es el indicador negativo del intervalo  $(-1, 0)$ . (Ver figura 2.2).

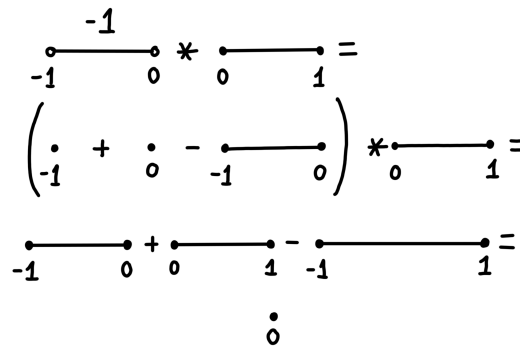


Figura 2.2: Figura de la observación 2.3

*Observación 2.4.* Igual que en el caso del primer anillo, este anillo no es un dominio. Observamos, por ejemplo, que al hacer el producto de convolución del rayo  $[0, \infty)$  con  $(0, 1]$ , obtenemos 0. Ver figura 2.3.

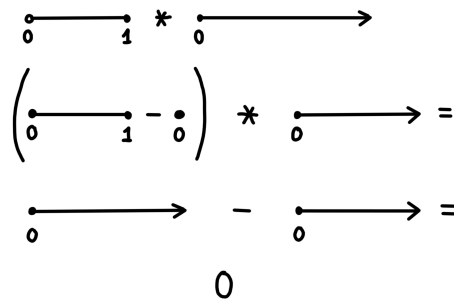


Figura 2.3: Figura de la observación 2.4



A continuación se definen tres objetos que nos serán de utilidad a la hora de estudiar la estructura de los poliedros.

**Definición 2.2** (Recta, semirecta y segmento). Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión finita. Sean  $u$  y  $v$  vectores tales que  $u \neq 0$ . Entonces el conjunto

$$\{v + \tau u : \tau \in \mathbb{R}\}$$

es una *recta* en  $V$ .

El conjunto

$$\{v + \tau u : \tau \geq 0\}$$

es una *semirecta de extremo  $v$  en la dirección  $u$* .

Dados dos puntos  $v_1, v_2 \in V$ , el conjunto

$$\{\tau v_1 + (1 - \tau)v_2 : \tau \in [0, 1]\}$$

es el *segmento de extremos  $v_1$  y  $v_2$* .

**Lema 2.2.** *Un poliedro es acotado si y solo si no contiene ninguna semirecta.*

*Demostración.* Sea  $P$  un poliedro definido por:

$$P = \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i \text{ para } i \in I\}.$$

Es claro que si  $P$  contiene una semirecta, no puede ser acotado. Recíprocamente, si  $P$  es no acotado, entonces existe una sucesión  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$  tal que  $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ . Consideramos la sucesión  $w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ . Por estar contenida en la bola unidad, esta sucesión tiene alguna subsucesión convergente. Sea  $w = \lim_{k \rightarrow \infty} w_{n_k}$ , entonces se tiene que

$$\ell_i(w_{n_k}) = \frac{\ell_i(u_{n_k})}{\|u_{n_k}\|} \leq \frac{\alpha_i}{\|u_{n_k}\|}$$

y pasando al límite se tiene que  $\ell_i(w) \leq 0$  para todo  $i \in I$ . Así, dado  $x \in P$ ,  $\tau \geq 0$  se deduce que

$$\ell_i(x + \tau w) = \ell_i(x) + \tau \ell_i(w) \leq \alpha_i \quad \forall i \in I.$$

Así, la semirecta de extremo  $x$  y dirección  $w$  está contenida en  $P$ . □

**Definición 2.3** (Combinación convexa). Un punto  $v \in V$  es *combinación convexa* de los puntos  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  si

$$v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \quad \text{donde } \lambda_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

El conjunto de todas las combinaciones convexas de un conjunto  $A \in V$  recibe el nombre de *envolvente convexa* y se denota  $\text{conv}(A)$ .

**Definición 2.4** (Vértice, cara y cara propia). Sea  $P \subset V$  un poliedro y sea  $v \in P$ . Decimos que  $v$  es un *vértice* de  $P$  si cuando se tienen  $v_1, v_2 \in P$  tales que  $v = \frac{v_1+v_2}{2}$  entonces necesariamente  $v_1 = v_2 = v$ . Es decir,  $v$  es un vértice si no existen  $v_1$  y  $v_2$  puntos distintos de  $P$  tales que  $v$  sea su punto medio.

Sea  $F \subset P$  decimos que  $F$  es una *cara* de  $P$  si existe  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  una función lineal no nula y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\ell(x) \leq \alpha$  para todo  $x \in P$  y

$$F = \{x \in P : \ell(x) = \alpha\}.$$

Una cara  $F$  tal que  $F \neq \emptyset, P$  se dice que es una *cara propia*.

Veamos ahora algunas propiedades de los vértices que nos resultarán de utilidad más adelante.

**Lema 2.3.** Sea  $P \subset V$  un poliedro, sea  $v \in P$ .

1. Supongamos que

$$P = \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i \quad \forall i \in I\}.$$

Sea

$$I_v = \{i \in I : \ell_i(v) = \alpha_i\}.$$

El conjunto de desigualdades indexadas por los elementos de  $I_v$  son llamadas *desigualdades activas en  $v$* .

Entonces  $v$  es un vértice de  $P$  si y solo si

$$\text{span}(\ell_i : i \in I_v) = V^*.$$

Donde  $\text{span}(\ell_i : i \in I_v)$  representa el subespacio vectorial de  $V^*$  generado por las formas lineales  $\ell_i$ ,  $i \in I_v$ . Y en consecuencia, el conjunto de vértices de un poliedro es siempre finito y posiblemente vacío.

2. Sea  $F \subset P$  una cara de  $P$  y sea  $v$  un vértice de  $F$ . Entonces  $v$  es un vértice de  $P$ .

*Demostración.* Para demostrar la parte (1). Supongamos que  $\text{span}(\ell_i : i \in I_v) = V^*$  y supongamos que existen  $v_1, v_2 \in P$  tales que  $v = \frac{v_1+v_2}{2}$ . Entonces, por ser puntos del poliedro, se tiene que

$$\ell_i(v_1), \ell_i(v_2) \leq \alpha_i \quad \forall i \in I_v.$$

Por otro lado se tiene que:

$$\frac{\ell_i(v_1) + \ell_i(v_2)}{2} \leq \alpha_i \quad \forall i \in I_v.$$

Entonces necesariamente se tiene que  $\ell_i(v_1) = \ell_i(v_2) = \alpha_i$  para todo  $i \in I_v$ .

Si se tiene que  $\ell_i(v) = \alpha_i$  y  $\ell_i(v_1) = \alpha_i$  para todo  $i \in I$ . Entonces, restando las ecuaciones tenemos que:

$$\ell_i(v - v_1) = 0 \quad \text{para todo } i \in I_v.$$

Y dado que  $\{\ell_i : i \in I_v\}$  genera el espacio de funciones lineales de  $V$ , entonces necesariamente  $v = v_1$ . Se razona de igual manera con  $v_2$  para deducir finalmente que  $v_1 = v_2 = v$  y que  $v$  es un vértice de  $P$ .

Recíprocamente, si  $\{\ell_i : \tilde{i} \in I_v\}$  no genera el espacio de funciones lineales de  $V$ , entonces debe existir un vector  $u \in V \setminus \{0\}$  tal que  $\ell_i(u) = 0$  para cada  $i \in I_v$ .

En efecto, si consideramos  $\{\ell_i : i \in I_v\}$ , extraemos un conjunto linealmente independiente  $\{\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \dots, \ell_{i_m}\}$  y lo ampliamos a una base  $\mathcal{B}^* = \{\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \dots, \ell_{i_m}, \tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_{d-m}\}$  de  $V^*$  que renombramos  $\mathcal{B}^* = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d\}$ . Ahora consideramos la base dual de  $\mathcal{B}^*$ , es decir, la base  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_d\}$  de  $V$  que verifica:

$$\psi_i(u_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Consideramos  $u$  el vector que en la base  $\mathcal{B}$  tiene todo ceros salvo un 1 en la posición  $m + 1$ . Entonces  $\ell_{i_k}(u) = 0$  para  $k = 1, 2, \dots, m$  y para todas las funciones lineales que sean combinación lineal de éstas. Es decir  $\ell_i(u) = 0$  para cada  $i \in I_v$ .

Entonces si definimos

$$v_1 = v + \epsilon u \quad v_2 = v - \epsilon u$$

para un  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño, se tiene que  $v_1, v_2 \in P$  y además  $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$ , de modo que  $v$  no es un vértice.

Observamos que de la parte (1) se deduce que para un vértice, el conjunto de desigualdades activas es al menos  $\dim V^* = \dim V = d$ , y cada  $d$  desigualdades determinan de forma única el vértice. Si consideramos que el poliedro  $P$  viene dado por  $m$  desigualdades entonces el número de vértices de  $P$  no puede ser mayor que  $\binom{m}{d}$ .

Para demostrar la parte (2), supongamos que para todo  $x \in P$  se tiene  $\ell(x) \leq \alpha$  y

$$F = \{x \in P : \ell(x) = \alpha\}.$$

Supongamos que  $v$  es un vértice de  $F$ . Sean  $v_1, v_2 \in P$  tales que  $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$ . Entonces se da

que:

$$\alpha = \ell(v) = \frac{\ell(v_1) + \ell(v_2)}{2}$$

y dado que  $\ell(v_1), \ell(v_2) \leq \alpha$  entonces debe ser

$$\ell(v_1) = \ell(v_2) = \alpha$$

de modo que  $v_1, v_2 \in F$ , y por ser  $v$  vértice de  $F$ , se concluye que  $v_1 = v_2 = v$ .  $\square$

Presentamos ahora un importante teorema en la teoría de poliedros. Recordamos se había definido un *politopo* como un poliedro acotado.

**Teorema 2.3** (de Weyl-Minkowski). *Sea  $P$  un poliedro. Entonces  $P$  es un politopo si y solo si es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos.*

*Demostración.* Supongamos primero que  $P = \text{conv}(v_1, v_2, \dots, v_m)$ .

Consideremos el símplice  $\Delta \subset \mathbb{R}^m$

$$\Delta = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) : \lambda_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \text{ y } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}.$$

Entonces  $\Delta$  es claramente un poliedro. Consideramos la aplicación lineal:

$$T : \mathbb{R}^m \longrightarrow V, \quad T(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i.$$

Entonces se tiene que  $P = T(\Delta)$  y entonces  $P$  es un poliedro por la parte (1) del teorema 2.1. Y dado que  $\Delta$  es compacto y  $T$  es continua, entonces  $P$  es acotado.

Vamos a demostrar la otra implicación por inducción sobre la dimensión de  $V$ . Es claro que si la dimensión es 0, entonces el resultado es cierto. Supongamos que el resultado es cierto para los espacios vectoriales de dimensión estrictamente menor que  $d$ . Sea

$$P = \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i, \quad i \in I\}$$

y sea  $\text{Vert}(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  el conjunto de vértices de  $P$ .

Entonces queremos demostrar que

$$\{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i, \quad i \in I\} = \text{conv}(v_1, v_2, \dots, v_m).$$

Sea  $y \in \text{conv}(v_1, v_2, \dots, v_m)$ . Entonces  $y = \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j$  donde  $\lambda_j \geq 0$  y  $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$ . Entonces

$$\ell_i\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \ell_i(v_j) \leq \max_{j=1, \dots, m} \ell_i(v_j) \sum_{j=1}^m \lambda_j \leq \alpha_i \quad \forall i \in I.$$

Es decir  $y \in P$ .

Ahora, sea  $y \in P$ , supongamos que existe  $j \in I$  tal que  $\ell_j(y) = \alpha_j$ . Consideramos la cara:

$$F = \{x \in P : \ell_j(x) = \alpha_j\}.$$

Entonces  $F$  está contenida en un subespacio afín propio de  $V$ , con  $y \in F$  y por hipótesis de inducción  $y$  está en la envolvente convexa de los vértices de  $F$  y por la parte (2) del lema precedente, estos son también vértices de  $P$ .

Supongamos ahora que  $\ell_i(y) < \alpha_i$  para todo  $i \in I$ . Entonces se considera una recta que pasa por  $y$ . Como  $P$  es acotado, la recta debe intersectar  $P$  en un segmento de extremos  $z_1$  y  $z_2$ . Estos puntos están en una cara propia de  $P$ . Entonces, por hipótesis de inducción, estos puntos son combinación convexa de los vértices de las caras en las que están, que a su vez son vértices de  $P$ . Así  $y$  es combinación convexa de vértices de  $P$ .  $\square$

**Teorema 2.4.** *Un poliedro no vacío contiene un vértice si y solo si no contiene ninguna recta.*

*Demostración.* Sea

$$P = \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i \text{ para } i \in I\}.$$

Supongamos primero que existe una recta  $\{v + \tau u : \tau \in \mathbb{R}\}$  con  $u \neq 0$  contenida en  $P$ .

Entonces como

$$\ell_i(v + \tau u) = \ell_i(v) + \tau \ell_i(u) \leq \alpha_i \quad i \in I,$$

debe ser  $\ell_i(u) = 0$  para todo  $i \in I$ . Entonces cada  $x \in P$  puede escribirse como  $x = (x_1 + x_2)/2$  donde  $x_1 = x + u \in P$  y  $x_2 = x - u \in P$  y entonces ningún punto puede ser vértice de  $P$ .

Supongamos ahora que no hay ninguna recta contenida en  $P$ . Vamos a razonar por inducción sobre  $d = \dim V$ . Si  $d = 0$  el resultado es claro.

Sea  $x \in P$ , si suponemos que para algún  $j \in I$ , se tiene que  $\ell_j(x) = \alpha_j$ , entonces, como en la demostración del teorema anterior, se considera la cara

$$F = \{x \in P : \ell_j(x) = \alpha_j\}$$

que está contenida en un subespacio afín y  $y \in F$ . Por hipótesis de inducción hay algún vértice en  $F$ , que será también un vértice de  $P$ .

Si suponemos que para todo  $i \in I$  se tiene que  $\ell_i(x) < \alpha_i$ , tomamos una recta que pasa por  $x$ . Como  $P$  no contiene ninguna recta, la intersección de  $P$  con esta recta es o bien una semirrecta de extremo  $z_0$  o bien un segmento de extremos  $z_1$  y  $z_2$ . Donde estos puntos están contenidos en caras propias de  $P$ . Entonces aplicamos la hipótesis de inducción para concluir que existe un vértice en  $P$ .  $\square$

Se presenta ahora la definición de un tipo de poliedro no acotado que nos va a ser de mucha utilidad.

**Definición 2.5** (Cono). Un poliedro  $K \subset V$  es un *cono* si  $0 \in K$  y para cada  $x \in K$  y cada  $\lambda \geq 0$  se tiene que  $\lambda x \in K$

Observamos que un cono está definido por un sistema de ecuaciones lineales *homogéneas*.

$$K = \{x \in V : \ell_i(x) \leq 0 \text{ para } i \in I\}.$$

0 es el único punto que puede ser vértice de un cono. Por el teorema 2.4 deducimos que el 0 es un vértice del cono si y solo si el cono no contiene rectas. Un cono que no contiene rectas recibe el nombre de *cono punteado*.

**Definición 2.6** (Combinación cónica). Un punto  $v \in V$  se dice que es *combinación cónica* de los puntos  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  si

$$v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \text{ donde } \lambda_i \geq 0.$$

El conjunto de combinaciones cónicas de un conjunto dado  $A \subset V$  recibe el nombre de *combinación cónica* de  $A$  y se denota  $co(A)$ .

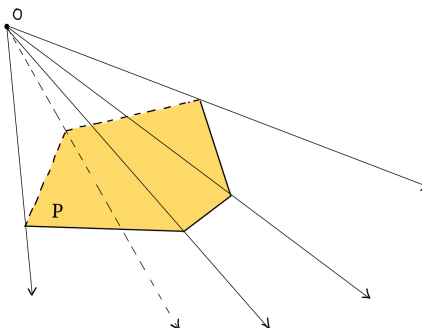


Figura 2.4: Los conos que no contienen rectas forman una “pirámide” sobre politopos

La envolvente cónica de un conjunto finito de puntos es necesariamente un cono. La demostración es completamente análoga a la del teorema 2.3, así que va a ser omitida.

**Teorema 2.5.** Sea  $K \subset V$  un cono punteado,  $K \neq \{0\}$ . Entonces existe un hiperplano afín  $H \subset V$ ,  $0 \notin H$  y un politopo  $P \subset H$  tal que  $K = co(P)$ .

*Demostración.* Sea

$$K = \{x \in V : \ell_i(x) \leq 0 \text{ para } i \in I\}.$$

Como 0 es un vértice de  $K$  y  $\ell_i(0) = 0$  para todo  $i \in I$  entonces, por la primera parte del lema 2.3 se tiene que las formas lineales  $\ell_i$  generan  $V^*$ . Sea

$$\ell = \sum_{i \in I} \ell_i.$$

Veamos que  $\ell \neq 0$ . Si fuese  $\ell = 0$  entonces para cada  $x \in K$  se tiene que  $\ell(x) = 0$  y entonces  $\ell_i(x) = 0$  para todo  $i \in I$  lo cual es una contradicción con que las formas lineales  $\ell_i$  generen  $V^*$ .

Consideramos el hiperplano afín:

$$H = \{x : \ell(x) = -1\}.$$

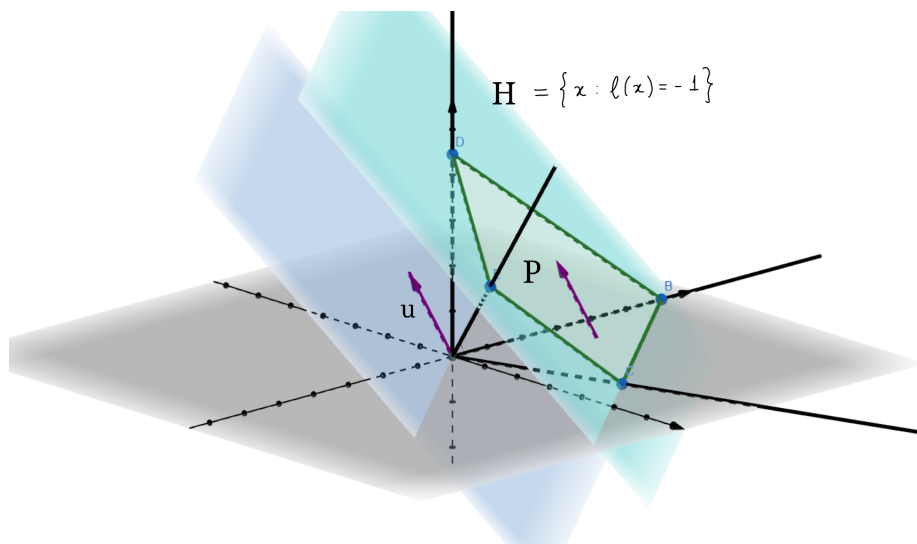


Figura 2.5:  $P = H \cap K$

Definimos el poliedro  $P = H \cap K$ . Entonces para cada  $x \in K \setminus \{0\}$  se tiene que  $\ell(x) < 0$  y entonces  $\lambda x \in H$  para algún  $\lambda > 0$ . Así, se tiene que  $K = co(P)$  y solo falta demostrar que  $P$  está acotado.

Supongamos que  $P$  no estuviese acotado. Entonces  $P$  contendría una semirrecta con dirección  $u \neq 0$  paralela al hiperplano  $H$ . Entonces  $\ell(u) = 0$ . Por otro lado, como la semirrecta está

contenida en  $K$ , se tiene que  $\ell_i(u) \leq 0$  para todo  $i \in I$ . Entonces necesariamente  $\ell_i(u) = 0$ , pero entonces  $\tau \ell_i(u) = 0 \leq 0$  y la recta  $\{\tau u : \tau \in \mathbb{R}\}$  está contenida en el cono  $K$ , lo cual es absurdo, pues el cono tiene a 0 como vértice.  $\square$

*Observación 2.5.* Como ya sabemos que un politopo  $P$  puede escribirse como  $P = \text{conv}(\text{Vert}(P))$ , entonces observamos que se puede escribir un cono punteado  $K$  como  $K = \text{co}(\text{Vert}(P))$ .

**Definición 2.7** (Cono simplicial). Dado un cono punteado  $K \subset V$ . Decimos que  $K$  es un *cono simplicial* si podemos escribirlo como  $K = \text{co}(v_1, v_2, \dots, v_d)$  donde  $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$  es una base de  $V$ .

El siguiente teorema presenta una forma de escribir poliedros que no contienen rectas como suma de Minkowski de un cono punteado y un politopo. Esta escritura nos será de mucha utilidad.

**Teorema 2.6.** Sea  $P \subset V$  un poliedro no vacío que **no contiene ninguna recta**. Sea  $M$  la envolvente convexa del conjunto de vértices de  $P$ . Definimos  $K = K_P$  como:

$$K_P := \{u \in V : x + \tau u \text{ para algún } x \in P \text{ y para todo } \tau \geq 0\}.$$

Es decir, el cono formado por las direcciones de las semirrectas contenidas en  $P$ .

Entonces  $K \subset P$  recibe el nombre de cono de recesión de  $P$  y

$$P = K + M.$$

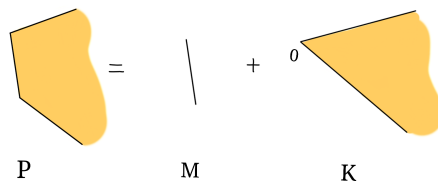


Figura 2.6: Poliedro  $P$  representado como suma de Minkowski de un politopo  $M$  y un cono punteado  $K$

*Demostración.* Sea

$$P = \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i \text{ para todo } i \in I\}.$$



Entonces

$$x + \tau u \in P \quad \forall \tau \geq 0 \iff \ell_i(x) + \tau \ell_i(u) \leq \alpha_i \quad \forall i \in I, \quad \forall \tau \geq 0 \iff \tau \ell_i(u) \leq 0 \quad \forall i \in I, \quad \forall \tau \geq 0.$$

Entonces podemos escribir

$$K = \{x \in V : \ell_i(x) \leq 0 \text{ para cada } i \in I\}.$$

Así,  $K$  es un cono poliédrico y se tiene que  $x + K \subset P$  para cada  $x \in P$  y  $K$  no contiene rectas. Entonces se tiene que  $K + M \subset P$  y falta demostrar la otra contención.

Para ello, procedemos por inducción sobre  $d = \dim V$ . El caso  $d = 0$  es claro. Ahora suponiendo que lo que queremos mostrar es cierto en dimensión estrictamente menor que  $d$ , dado  $y \in P$ , quiero escribir  $y = u + z$  con  $u \in K$  y  $z \in M$ .

Si  $\ell_j(y) = \alpha_j$  para algún  $j \in I$ , entonces consideramos la cara

$$F = \{x \in P : \ell_j(x) = \alpha_j\}$$

y por la hipótesis de inducción, sabiendo que los vértices de  $F$  son vértices de  $P$  y que  $K_F \subset K_P$  se tiene la descomposición deseada.

Entonces supongamos que  $\ell_i(y) < \alpha_i$  para todo  $i \in I$ . Si se da que  $K = \{0\}$  entonces  $P$  no contiene ninguna semirrecta y por el lema 2.2  $P$  es acotado, entonces se puede escribir como la envolvente convexa de su conjunto de vértices y hemos terminado.

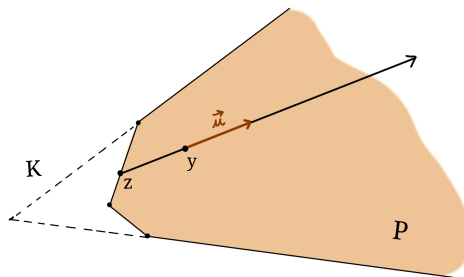


Figura 2.7:  $K$  cono de recesión del poliedro  $P$  y semirrecta contenida en el poliedro

Entonces, sea  $u \in K \setminus \{0\}$ , considero la recta  $\{y + \tau u : \tau \in \mathbb{R}\}$  y dado que  $P$  no contiene rectas, esta recta interseca con  $P$  en una semirrecta  $\{z + \tau u : \tau \geq 0\}$  para algún  $z$  contenido en una cara propia  $F$  de  $P$  (ver figura 2.7). Es decir se tiene que  $y = z + \tau_0 u$  para un  $\tau_0 \geq 0$  y por hipótesis de inducción sabemos que se puede escribir

$$z = t + w$$

donde  $t$  es combinación convexa de vértices de  $F$ , que también son vértices de  $P$  y  $w \in K_F \subset K$ .

Se tiene que  $w + \tau_0 u \in K$  ya que  $\ell_i(w) + \tau_0 \ell_i(u) \leq 0$ . Así hemos descompuesto  $y = t + (w + \tau_0 u)$  como queríamos.

□

En el siguiente teorema se trata la descomposición de un poliedro cualquiera.

**Teorema 2.7.** *Sea  $P \subset V$  un poliedro no vacío. Entonces  $P$  se puede representar como suma de Minkowski*

$$P = M + K + L$$

donde  $L \subset V$  es un subespacio vectorial,  $K \subset V$  es un cono punteado que no contiene rectas y  $M$  es un politopo.

*Demostración.* Sea

$$P = \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Observamos que si  $P$  contiene una recta con dirección  $u$ ,  $\{v + \tau u, \tau \in \mathbb{R}\}$  entonces necesariamente se tiene que  $\ell_i(u) = 0$  para todo  $i \in I$ .

Definimos

$$L = \{u \in V : \ell_i(u) = 0 \quad i \in I\}$$

que es claramente un subespacio. Así descomponemos  $V$  como suma directa

$$V = L \oplus W$$

y consideramos la proyección  $T : V \rightarrow W$  que tiene a  $L$  como núcleo. Por la parte 1 del teorema 2.1, la imagen  $Q = T(P) \subset W$  es un poliedro y es claro que  $Q$  no contiene rectas. Por el teorema anterior (2.6), podemos escribir  $Q = M + K$  donde  $M \subset W$  es un politopo y  $K \subset W$  es un cono que no contiene rectas. Así hemos descompuesto:

$$P = L + K + M.$$

□

**Definición 2.8** (Interior relativo). Sea  $P \subset V$  un poliedro. Nos referimos al *interior relativo* como el interior topológico usual respecto al subespacio afín más pequeño que contiene a  $P$ .

**Teorema 2.8.** Sea  $P \subset V$  un poliedro.

$$P = \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i \quad \forall i \in I\}$$

para un conjunto finito de funciones lineales no nulas  $\ell_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  y números reales  $\alpha_i$ .  
Entonces:

1. Supongamos que  $P$  es no vacío. Entonces o bien  $P$  contiene un punto interior, o bien está contenido en un subespacio afín propio de  $V$ .

2. Supongamos que  $P$  tiene interior no vacío. Para un punto  $v$  que no esté en el interior de  $P$ . Sea

$$I_v = \{i \in I : \ell_i(v) = \alpha_i\}$$

el conjunto de índices de desigualdades activas en  $v$  y sean

$$\ell_v = \sum_{i \in I_v} \ell_i \quad \text{y} \quad \alpha_v = \sum_{i \in I_v} \alpha_i$$

Entonces el conjunto

$$F_v = \{x \in P : \ell_v(x) = \alpha_v\}$$

es una cara propia de  $P$  que contiene a  $v$  en su interior.

3. Toda cara no vacía  $F$  de  $P$  puede ser escrita como  $F_v$  para los  $v$  en el interior de  $F$ .

*Demostración.* Demostremos la primera parte. Si para algún  $i \in I$  se tiene que  $\ell_i(x) = \alpha_i$  para cada  $x \in P$ , entonces  $P$  está contenido en el subespacio afín propio  $\{x \in V : \ell_i(x) = \alpha_i\}$ .

Si para todo  $i \in I$  existe un punto  $x_i \in P$  tal que  $\ell_i(x_i) < \alpha_i$  entonces considero el punto:

$$x = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} x_i$$

y entonces se tiene que

$$\ell_i(x) < \alpha_i \quad \text{para todo } i \in I$$

y  $x$  está contenido en el interior de  $P$ .

Para demostrar la segunda parte, por la definición es claro que  $F_v$  es una cara de  $P$  ya que  $\ell_v(x) \leq \alpha_v$  para todo  $x \in P$  y también es claro que  $v \in F_v$ . El menor subespacio afín en el que

está contenido  $F_v$  es

$$A_v = \{x \in V : \ell_i(x) = \alpha_i \text{ para cada } i \in I_v\}.$$

Es claro que  $v \in A_v$ . Considero un punto  $w \in A_v$  tal que  $|v - w| < \epsilon$ . Entonces  $w$  está en  $F_v$  si  $w$  está en  $P$ . Es decir buscamos que  $\ell_i(w) \leq \alpha_i$  para todo  $i \in I$ . Esto se verifica automáticamente para  $i \in I_v$ , si  $i \notin I_v$  entonces  $\ell_i(v) < \alpha_i$  y tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeño se tiene lo que buscamos.

Es decir  $v$  está en el interior relativo de  $F_v$ , esto es, el interior de  $F_v$  respecto de  $A_v$ .

Para la tercera y última parte escribimos  $F$  como

$$F = \{x \in P : \ell(x) = \alpha\}.$$

Es claro que  $F$  es un poliedro no vacío de modo que por la parte 1 de este teorema, el interior relativo de  $F$  es no vacío. Sea  $v$  un punto del interior relativo de  $F$ , veamos que  $F = F_v$ .

Para ello, veamos primero que  $\ell \in K_v$ , donde

$$K_v = \text{co}(\ell_i : i \in I_v).$$

$K_v$  es un cono en  $V^*$ , de modo que si  $\ell \notin K_v$ , hay alguna desigualdad lineal (de las que definen  $K_v$ ), que  $\ell$  no verifica. Es decir, existe un vector  $u \in (V^*)^* = V$  tal que  $\ell(u) > 0$  pero  $\ell_i(u) \leq 0$  para todo  $i \in I_v$ .

Pero entonces, para un  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño se tiene que  $v + \epsilon u \in P$  pero sin embargo

$$\ell(v + \epsilon u) = \ell(v) + \epsilon \ell(u) = \alpha + \epsilon \ell(u) > \alpha$$

lo cual es una contradicción.

Así, se tiene que

$$\ell = \sum_{i \in I_v} \lambda_i \ell_i \text{ para ciertos } \lambda_i \geq 0$$

evaluando en  $v$  se tiene que

$$\alpha = \sum_{i \in I_v} \lambda_i \alpha_i.$$

Y se concluye que  $F_v \subset F$ .

Recíprocamente, sea  $x \notin F_v$ , entonces  $\ell_i(x) < \alpha_i$  para algún  $i \in I_v$ , es decir, si suponemos que  $x \in F$  entonces

$$G = \{x \in F : \ell_i(x) = \alpha_i\}$$

es una cara propia de  $F$  y como  $v \in G$  se obtiene una contradicción con el hecho de que  $v$  está

en el interior relativo de  $F$ . Se concluye que  $F \subset F_v$ .

□



---

## Capítulo 3

# Conjuntos Polares

En el espacio vectorial  $V$ , consideramos un producto escalar (forma bilineal simétrica definida positiva)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de modo que trabajamos en un espacio vectorial euclídeo.

Nuestro objetivo en este capítulo va a ser describir y estudiar los conjuntos polares de los subconjuntos de  $V$ . Esta definición será imprescindible más adelante para los resultados principales de este trabajo.

**Definición 3.1** (Conjunto polar). Sea  $A \subset V$  un conjunto no vacío. Definimos el *conjunto polar*  $A^\circ$  de  $A$  como:

$$A^\circ := \{x \in V : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ para todo } y \in A\}.$$

Antes de ver las propiedades del conjunto polar, observemos algunos ejemplos ilustrativos.

- Si  $A$  es un subespacio vectorial de  $V$  entonces se verifica que  $A^\circ = A^\perp$ . Recordamos que  $A^\perp := \{x \in V : \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in A\}$ . En efecto,  $A^\circ \supset A^\perp$  es evidente. Por otra parte, si  $x \notin A^\perp$  entonces existe  $y \in A$  tal que  $\langle x, y \rangle \neq 0$ . Podemos considerar un escalar  $\lambda$  de tal manera que  $\langle x, \lambda y \rangle > 1$ . Y como  $\lambda y \in A$  entonces se tiene que  $x \notin A^\circ$ .
- Razonando similarmente, obtenemos que si  $K$  es un cono, entonces se tiene que

$$K^\circ = \{x \in V : \langle x, y \rangle \leq 0 \text{ para todo } y \in K\}.$$

En efecto, si  $\langle x, y \rangle > 0$  para algún  $y \in K$  entonces  $\langle x, \lambda y \rangle > 1$  para  $\lambda$  suficientemente grande y por tanto  $x \notin K^\circ$ .

- Finalmente, si  $P = \text{conv}(v_1, v_2, \dots, v_m)$  es un polítopo entonces

$$P^\circ = \{x \in V : \langle x, v_i \rangle \leq 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Dado que los puntos  $v_i$  están en el politopo, la contención  $\subset$  es evidente.

Recíprocamente, si  $x \notin P^\circ$  entonces existe  $y \in P$  tal que  $\langle x, y \rangle > 1$ . Como  $y$  está en la envolvente convexa de  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  entonces  $y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  con  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$  y  $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Así, se tiene que

$$1 < \langle x, y \rangle = \sum \lambda_i \langle x, v_i \rangle \leq \max\{\langle x, v_i \rangle\} \sum \lambda_i = \max\{\langle x, v_i \rangle\}.$$

De modo que  $x \notin \{x \in V : \langle x, v_i \rangle \leq 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m\}$  que prueba la otra contención.

Antes de exponer el resultado principal de este capítulo, necesitamos demostrar el siguiente lema.

**Lema 3.1** (De separación). *Sea  $A \subset V$  un conjunto cerrado y convexo y sea  $a \notin A$ . Entonces existe un vector no nulo  $u \in V$  y un escalar  $\alpha$  tal que*

$$\langle u, a \rangle > \alpha \quad \text{y} \quad \langle u, x \rangle < \alpha \quad \forall x \in A.$$

Geoméricamente, este resultado se puede interpretar como sigue: un conjunto convexo y cerrado  $A$  puede ser separado de un punto  $a \notin A$  por un hiperplano afín.

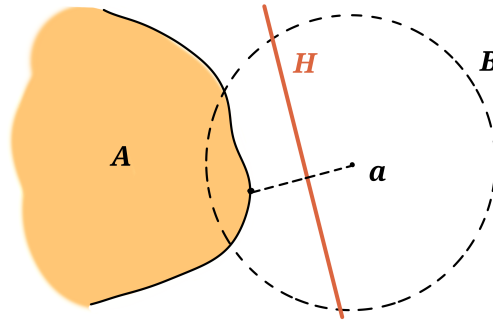


Figura 3.1: Conjunto cerrado y convexo  $A$  y un punto  $a \notin A$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad vamos a considerar el problema trasladado al origen,  $a = 0$ .

Consideramos  $\|\cdot\|$  la norma asociada al producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , y  $\delta(\cdot, \cdot)$  la distancia asociada a esa norma. Sea  $r = \delta(a, A) = \min_{x \in A} \delta(a, x)$  que existe por ser  $A$  cerrado. Además  $r > 0$ .

Consideramos una bola  $B$  centrada en  $a$  de radio  $r$  de modo que  $B \cap A \neq \emptyset$ .

$$B := \{x \in V : \|x - a\| \leq r\}.$$



Consideramos  $y \in A \cap B$ , que existe pues  $A \cap B$  es compacto. El mínimo de la definición de  $r$  se alcanza y lo hac en los puntos de  $A \cap B$ . Este punto  $y$  es también verifica  $\delta(y, A) = \min_{x \in A} \delta(x, A)$ . Tomamos  $0 < \alpha < \|y\|^2$ . Consideramos el semiespacio:

$$H^- = \{x \in V : \langle y, x \rangle \leq \alpha\}.$$

Al que  $a$  pertenece y que no contiene ningún punto de  $A$ . En efecto, sea  $z \in H^- \cap A$ . Como  $A$  es convexo entonces el punto  $y_\epsilon = (1 - \epsilon)y + \epsilon z$  está contenido en  $A$  para cada  $\epsilon \in [0, 1]$ . Por otro lado tenemos que:

$$\|y_\epsilon\|^2 \leq (1 - \epsilon)^2 \|y\|^2 + \epsilon^2 \|z\|^2 + 2(1 - \epsilon)\epsilon \langle y, z \rangle$$

Como  $\langle y, z \rangle < \|y\|^2$ , se deduce que  $\|y_\epsilon\|^2 < \epsilon^2 \|z\|^2 + \|y\|^2(1 - \epsilon^2)$  y tomando  $\epsilon$  suficiente mente pequeño obtendríamos que  $y_\epsilon$  es más cercano a  $a$  que  $y$ , lo cual contradice la definición de  $y$ .  $\square$

*Observación 3.1.* Es fácil ver que la polaridad invierte las contenciones, esto es:  $A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$

Veamos ahora algunos resultados sobre el conjunto polar.

**Teorema 3.1** (Teorema fundamental de los conjuntos polares). *Consideramos un espacio vectorial  $V$ .*

1.  $A \subset V$  es un conjunto no vacío. Entonces  $A^\circ$  es un conjunto cerrado y convexo que contiene al origen.
2. Si  $A \subset V$  es un conjunto cerrado y convexo que contiene al origen, entonces se verifica:  $(A^\circ)^\circ = A$
3. Sea  $A \subset V$  un conjunto no vacío, entonces  $A^\circ = A$  si y solo si  $A$  es la bola cerrada unidad.
4. Existe una única transformación lineal  $\mathcal{D} : \mathcal{C}(V) \rightarrow \mathcal{C}(V)$ , que por tanto es una evaluación, de manera que  $\mathcal{D}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{A^\circ}$  para todo conjunto cerrado convexo y no vacío  $A$ .
5. Si  $P \subset V$  es un poliedro, entonces  $P^\circ \subset V$  es también un poliedro.

*Demostración.* 1.  $A^\circ$  es intersección de semiespacios cerrados, de modo que es cerrado y convexo. Es claro que  $0 \in A^\circ$ .

2. La inclusión  $A \subset (A^\circ)^\circ$  sigue de la definición (no es necesario imponer ninguna condición sobre  $A$ ).

Para la otra inclusión; supongamos que  $a \in (A^\circ)^\circ \setminus A$ . Utilizando el lema 3.1 deducimos la existencia de un vector  $u$  y un escalar  $\alpha$  con las dos propiedades siguientes:

$$\langle u, x \rangle < \alpha \quad \forall x \in A$$

$$\langle u, a \rangle > \alpha.$$

Como  $0 \in A$  podemos asumir que  $\alpha > 0$  y, escalando el vector  $u$  podemos suponer  $\alpha = 1$ . La primera propiedad muestra que  $u \in A^\circ$  y la segunda que  $\langle u, a \rangle > 1$  lo cual es una contradicción pues  $a \in (A^\circ)^\circ$ .

3. Demostremos la implicación directa. Si  $B$  es la bola cerrada unidad. Veamos  $B = B^\circ$  por doble inclusión, se tiene  $B = \{x \in V : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ para todo } y \in B\}$ .

En efecto, si  $x \in B$  entonces

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \leq 1 \text{ para todo } y \in B.$$

De modo que  $x \in B^\circ$ .

Sea  $x \notin B$ , entonces  $\|x\| > 1$ . Sabemos que  $y = \frac{x}{\|x\|} \in B$ , entonces

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \frac{\langle x, x \rangle}{\|x\|^2} = \|x\| > 1.$$

De modo que  $x \notin B^\circ$ .

Para demostrar la otra implicación: Si  $A = A^\circ$ , demostremos  $A = B$  por doble inclusión.

Sea  $x \in A$

$$x \in A \Rightarrow x \in A^\circ \Rightarrow \langle x, x \rangle \leq 1 \Rightarrow \|x\| \leq 1 \Rightarrow x \in B.$$

Recíprocamente:

$$A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$$

y puesto que  $B = B^\circ$ , se tiene la inclusión deseada.

4. Vamos a obtener este operador  $\mathcal{D}$  como límite de operadores  $\mathcal{D}_\epsilon$ . Fijado  $\epsilon > 0$ , se define la “función de Green”  $G_\epsilon : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  como :

$$G_\epsilon(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle x, y \rangle < 1 + \epsilon \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea  $f \in \mathcal{C}(V)$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $y \in V$ . Definimos una nueva función:

$$\begin{aligned} g_{\epsilon,y} : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)G_{\epsilon}(x, y). \end{aligned}$$

Veamos que  $g_{\epsilon,y} \in \mathcal{C}(V)$ . Supongamos que  $f = \mathbb{1}_A$  donde  $A$  es un conjunto no vacío cerrado y convexo. Definimos el semiespacio:

$$H_{\epsilon,y} := \{x : \langle x, y \rangle \geq 1 + \epsilon\}.$$

Entonces la función  $g_{\epsilon,y}$  antes definida se puede reescribir como:

$$g_{\epsilon,y} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A \cap H_{\epsilon,y}^c} \in \mathcal{C}(V).$$

Y por linealidad se tiene que  $\forall f \in \mathcal{C}(V)$ ,  $g_{\epsilon,y} \in \mathcal{C}(V)$ .

De modo que podemos definir los funcionales:

$$\mathcal{D}_{\epsilon}(f)(y) = \chi(g_{\epsilon,y}).$$

Se trata de una función lineal y bien definida. Si  $f = \mathbb{1}_A$ , donde  $A$  es un conjunto no vacío cerrado y convexo, entonces la función viene dada por:

$$\mathcal{D}_{\epsilon}(f)(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle x, y \rangle < 1 + \epsilon \text{ para todo } x \in A \\ 0 & \text{si } \langle x, y \rangle \geq 1 + \epsilon \text{ para algún } x \in A \end{cases}$$

Ahora, observamos que en el caso de  $f = \mathbb{1}_A$ , el límite puntual (en  $y$ )

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{D}_{\epsilon,y}(f)(y)$$

existe y es igual a  $\mathbb{1}_{A^{\circ}}$ . Por linealidad, extendemos esta definición a todos los elementos de  $\mathcal{C}(V)$  y definimos el funcional  $\mathcal{D}$  como el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  de estos funcionales.

Es claro que esta función  $\mathcal{D}$  es lineal, se trata de una evaluación donde el espacio vectorial de llegada es  $\mathcal{C}(V)$ .

5. Sea  $P$  un poliedro. Consideramos la descomposición en la suma de Minkowski  $P = M + K + L$  que nos da el teorema 2.7. Donde  $M \subset V$  es un politopo,  $K \subset V$  es un cono poliédrico que no contiene rectas y  $L \subset V$  es un subespacio vectorial.

Como  $M = \text{conv}(v_1, v_2, \dots, v_m)$  tenemos que:

$$M^\circ = \{x : \langle x, v_i \rangle \leq 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

De modo que  $M^\circ$  es también un poliedro.

Por lo visto en el capítulo anterior sabemos que podemos escribir  $K = \text{co}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , de modo que:

$$K^\circ = \{x : \langle x, u_i \rangle \leq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Así,  $K^\circ$  es un cono poliédrico.

Finalmente  $L^\circ = L^\perp$ .

Mostremos que  $P^\circ = M^\circ \cap K^\circ \cap L^\circ$  por doble inclusión. De esta forma,  $P^\circ$  será intersección de tres poliedros y, por la primera parte del teorema, será un poliedro.

Para la primera inclusión, mostremos que  $P^\circ \subset M^\circ, K^\circ, L^\circ$ .

- $M \subset P \Rightarrow P^\circ \subset M^\circ$
- Sean  $u \in K$  y  $y \in P$ , entonces  $y + \lambda u \in P$  para todo  $\lambda \geq 0$ . De modo que para cada  $x \in P^\circ$  se tiene que  $\langle u, x \rangle \leq 0$ . De modo que  $x \in K^\circ$ .
- Sean  $u \in L$ ,  $y \in P$ . Entonces  $y + \lambda u \in P$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . De modo que para cada  $x \in P^\circ$ , se debe tener  $\langle u, x \rangle = 0$ , de modo que  $x \in L^\circ$ .

Recíprocamente, sea  $x \in M^\circ \cap K^\circ \cap L^\circ$ . Entonces  $\langle x, y \rangle \leq 1$  para todo  $y \in M$ ,  $\langle x, u \rangle \leq 0$  para todo  $u \in K$  y  $\langle x, z \rangle = 0$  para todo  $z \in L$ . Como cada punto de  $P$  puede ser escrito como  $y + u + z$  para ciertos  $y \in M, u \in K$  y  $z \in L$ , se tiene que  $x \in P^\circ$  ya que  $\langle x, y + u + z \rangle \leq 1$ .

□

*Observación 3.2.* Observamos que el punto (4) de este teorema tiene un corolario inmediato que nos va a ser de utilidad: si tenemos una relación lineal entre funciones características de poliedros, esta relación lineal se mantiene en los poliedros polares (ver figura 3.2). Es decir si tenemos poliedros  $P_1, P_2, \dots, P_s$  que verifican la relación:

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbb{1}_{P_i} = 0$$

entonces aplicando la transformación  $\mathcal{D}$  vista en el apartado (4) también se tiene que

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbb{1}_{P_i^\circ} = 0.$$

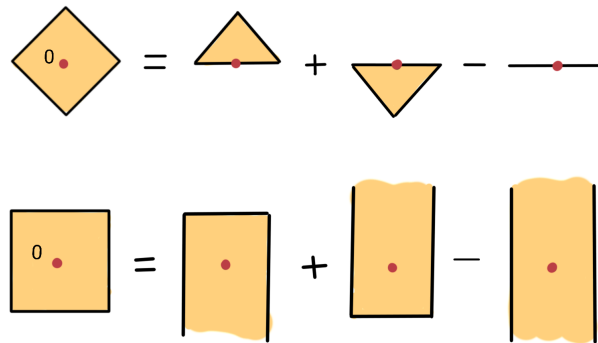


Figura 3.2: Conservación de las relaciones lineales entre las funciones características de poliedros a través del paso al conjunto polar

**Teorema 3.2.** 1. Sean  $K_1, K_2 \subset V$  conos. Entonces se tiene que

$$(K_1 + K_2)^\circ = K_1^\circ \cap K_2^\circ \quad \text{y} \quad (K_1^\circ + K_2^\circ) = (K_1 \cap K_2)^\circ.$$

2. Sea  $\mathcal{P}_K(V)$  el espacio vectorial generado por las funciones características de los conos de  $V$ . Sean  $f, g \in \mathcal{P}_K(V)$  entonces se tiene que

$$\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f) * \mathcal{D}(g)$$

donde  $\mathcal{D}$  es la evaluación polar del teorema anterior.

3. Un conjunto  $A \subset V$  contiene una recta entonces el conjunto  $A^\circ$  está contenido en un hiperplano vectorial de  $V$ . Y viceversa, si un conjunto  $A \subset V$  está contenido en un hiperplano vectorial, entonces  $A^\circ$  contiene una recta.

*Demostración.* Para la demostrar  $\subset$  en la primera igualdad, sea  $x \in (K_1 + K_2)^\circ$  entonces se tiene que

$$\langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle \leq 0 \quad \forall y_1 \in K_1, y_2 \in K_2.$$

Y por ser  $K_2$  un cono se tiene que

$$\langle x, y_1 \rangle + \langle x, \epsilon y_2 \rangle \leq 0 \quad \forall y_1 \in K_1, y_2 \in K_2, \epsilon > 0$$

y si  $\epsilon \rightarrow 0$  entonces se obtiene que  $\langle x, y_1 \rangle \leq 0$ . Igualmente, como  $K_1$  es un cono se obtiene que

$\langle x, y_2 \rangle \leq 0$  y en consecuencia

$$x \in K_1^o \cap K_2^o.$$

Recíprocamente si  $x \in K_1^o \cap K_2^o$ , entonces  $\langle x, y_1 \rangle \leq 0$  para todo  $y_1 \in K_1$  y  $\langle x, y_2 \rangle \leq 0$  para todo  $y_2 \in K_2$ . Y sumando ambas expresiones se obtiene

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle \leq 0 \quad \forall y_1 \in K_1, y_2 \in K_2.$$

Demostremos ahora la segunda igualdad. Como  $K_1^o$  y  $K_2^o$  son conos, les podemos aplicar la igualdad anterior para obtener:

$$(K_1^o + K_2^o)^o = K_1^{oo} \cap K_2^{oo} = K_1 \cap K_2.$$

Por ser  $K_1$  y  $K_2$  cerrados y convexos se obtiene

$$(K_1^o + K_2^o)^o = K_1^o \cap K_2^o$$

y tomando el conjunto polar de los conjuntos de ambos lados de la igualdad, y teniendo en cuenta que es un conjunto cerrado y convexo se obtiene el resultado deseado.

Para demostrar la segunda parte, mostremos primero que si  $P, Q \subset V$  son conos poliédricos entonces  $\mathcal{D}(\mathbb{1}_P \mathbb{1}_Q) = \mathcal{D}(\mathbb{1}_P) * \mathcal{D}(\mathbb{1}_Q)$ .

$$\mathcal{D}(\mathbb{1}_P \mathbb{1}_Q) = \mathcal{D}(\mathbb{1}_{P \cap Q}) = \mathbb{1}_{(P \cap Q)^o} = \mathbb{1}_{(P^o + Q^o)} = \mathbb{1}_{P^o} * \mathbb{1}_{Q^o} = \mathcal{D}(P) * \mathcal{D}(Q).$$

Como  $\mathcal{D}$  es una evaluación y es lineal y  $f, g \in \mathcal{P}_K(V)$ , entonces se tiene el resultado buscado aplicando la linealidad.

Demostremos la última parte del teorema. Si suponemos que  $\{a + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset A$ . Entonces si  $x \in A^o$  se tiene que

$$\langle x, a + \lambda u \rangle = \langle x, a \rangle + \lambda \langle x, u \rangle \leq 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

y necesariamente  $\langle x, u \rangle = 0$  así que  $x$  está contenido en el hiperplano vectorial ortogonal a  $u$ .

Supongamos ahora que  $A \subset V$  está contenido en un hiperplano ortogonal al vector  $u \in V$ . Entonces

$$\langle \lambda u, x \rangle = \lambda \langle u, x \rangle = 0 \quad \forall x \in A, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

de modo que la recta  $\{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$  está contenida en  $A^o$ . □

*Observación 3.3.* En el apartado (3), los hiperplanos que se mencionan son vectoriales (es decir,

contienen al origen) mientras que las rectas no tienen porque hacerlo, son rectas afines. Por una parte, los poliedros polares contienen todos al origen. Por otra se tienen los siguientes contraejemplos: en  $\mathbb{R}^2$  el segmento de extremos  $(2, 0)$  y  $(0, 2)$  está contenido en un hiperplano no vectorial y su polar no contiene rectas pues es el conjunto  $\{(x_1, x_2) : x_1 \leq 1/2, x_2 \leq 1/2\}$ . De igual forma ocurre con el poliedro  $\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 2\}$  cuyo conjunto polar es la semirrecta de origen  $(1/2, 1/2)$  y vector director  $(-1, -1)$ .

Sin embargo el poliedro  $\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 0\}$ , que es un hiperplano vectorial, tiene como conjunto polar a  $\{(x_1, x_2) : x_1 - x_2 = 0\}$ , que sí que contiene una recta.





---

## Capítulo 4

# Conos tangentes y descomposición de poliedros

**Definición 4.1** (Cono tangente y cono de direcciones factibles de un poliedro). Sea  $P \subset V$  un poliedro no vacío y sea  $v \in P$  un punto del poliedro. Definimos el *cono tangente* de  $P$  en  $v$  como:

$$tcono(P, v) := \{v + y : v + \epsilon y \in P \text{ para algún } \epsilon > 0\}.$$

Definimos el *cono de direcciones factibles* en  $v$  como

$$fcono(P, v) := \{y \in V : v + \epsilon y \in P \text{ para algún } \epsilon > 0\}.$$

Entonces se tiene que  $tcono(P, v) = v + fcono(P, v)$ .

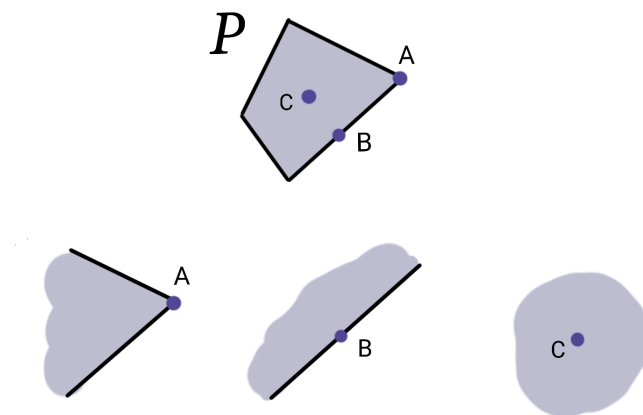


Figura 4.1: Conos tangentes de un politopo en un vértice, en una arista y en el interior

*Observación 4.1.* Observamos que el cono tangente, al no ser un cono vectorial, no es un

cono como los que hemos definido en el capítulo 2. Sin embargo es el trasladado del cono de direcciones factibles, que sí es un cono vectorial.

*Observación 4.2.* Para algunas demostraciones nos será útil escribir el cono de direcciones factibles como:

$$fcono = \{t(x - v) : t \geq 0, x \in P\}.$$

La equivalencia de las dos definiciones se obtiene facilmente tomando  $\epsilon = 1/t$  y  $x = v + \epsilon y$  y observando que si  $y \in \{y \in V : v + \epsilon y \in P\}$ , entonces  $\lambda y \in \{y \in V : v + \epsilon y \in P\}$  para todo  $\lambda > 0$ .

Entonces, también escribiremos:

$$tcono = \{v + t(x - v) : t \geq 0, x \in P\}.$$

**Lema 4.1.** *Los conjuntos  $tcono(P, v)$  y  $fcono(P, v)$  son poliedros.*

*Demostración.* Supongamos que  $P \in V$  está definido por:

$$P = \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i, \quad i \in I\}.$$

Como ya hemos hecho anteriormente, para cada  $v \in P$  definimos el subconjunto  $I_v = \{i \in I : \ell_i(v) = \alpha_i\}$ . Es decir, los índices de las inecuaciones que alcanzan la igualdad en  $v$ , que reciben el nombre de inecuaciones *activas* en  $v$ . Vamos a demostrar que:

$$fcono(P, v) = \{y \in V : \ell_i(y) \leq 0, \quad i \in I_v\} \quad (4.1)$$

$$tcono(P, v) = \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i, \quad i \in I_v\}. \quad (4.2)$$

Para demostrar la contención  $\supset$  en 4.1: sea  $y$  tal que  $\ell_i(y) \leq 0$  para todo  $i \in I_v$ , quiero ver que  $\ell_i(v + \epsilon y) \leq \alpha_i$  para todo  $i \in I$ . Es decir  $\ell_i(v) + \epsilon \ell_i(y) \leq \alpha_i$  para todo  $i \in I$ .

- Si  $\ell_i(v) = \alpha_i$  entonces  $\ell_i(y) \leq 0$  y se verifica  $\ell_i(v) + \epsilon \ell_i(y) \leq \alpha_i$  para cualquier  $\epsilon > 0$ .
- Si  $\ell_i(v) < \alpha_i$  y  $\ell_i(y) \leq 0$  entonces nos vale cualquier  $\epsilon > 0$ . Si  $\ell_i(y) > 0$ , como  $\alpha_i - \ell_i(v) > 0$  considero  $\epsilon = \frac{\alpha_i - \ell_i(v)}{\ell_i(y)}$  y se verifica la igualdad.

En conclusión, tomando  $\epsilon = \min_{i \in I} \left\{ \frac{\alpha_i - \ell_i(v)}{\ell_i(y)} \right\}$  se verifica la desigualdad deseada.

Para la contención contraria; sea  $y \in V$  tal que  $v + \epsilon y \in P$ , es decir, tal que

$$\ell_i(v) + \epsilon \ell_i(y) \leq \alpha_i \quad \forall i \in I_v$$

entonces si  $i$  es tal que  $\ell_i(v) = \alpha_i$  entonces  $\epsilon \ell_i(y) \leq 0$  para algún  $\epsilon > 0$  así que  $\ell_i(y) \leq 0$  y, por tanto,  $\ell_i(y) \leq 0$  para todo  $i \in I_v$ .

Para demostrar 4.2:

$$\begin{aligned} tcono(P, v) &= v + fcono(P, v) = v + \{y \in V : \ell_i(y) \leq 0, \quad i \in I_v\} = \\ &= \{x \in V : \ell_i(x) \leq \alpha_i, \quad i \in I_v\}. \end{aligned}$$

□

**Lema 4.2.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal entre espacios vectoriales reales de dimensión finita  $V$  y  $W$ . Sea  $P \subset V$  un poliedro y sea  $v \in P$ . Entonces:

$$T(tcono(P, v)) = tcono(T(P), T(v)). \quad (4.3)$$

*Demostración.* Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, el problema trasladado al origen. Es decir  $v = 0$ .

- Para demostrar la contención  $\subset$ :

$$\text{Sea } y \in tcono(P, 0) \implies \epsilon y \in P, \epsilon > 0 \implies T(\epsilon y) \in T(P) \implies T(y) \in tcono(T(P), 0).$$

- Para la contención contraria:

$$\text{Sea } x \in tcono(T(P), 0), \text{ entonces } \epsilon x \in T(P) \implies \exists y \in P \text{ tal que } T(y) = \epsilon x \implies x = T(\epsilon^{-1}y) \text{ y como } \epsilon^{-1}y \in tcono(P, v) \text{ ya que } \epsilon \epsilon^{-1}y \in P \text{ entonces } x \in T(tcono(P, v)).$$

□

Más adelante, no estaremos interesados en considerar poliedros que contienen rectas. de modo que vamos a definir dos relaciones de equivalencia en  $\mathcal{P}(V)$ .

**Definición 4.2.** Dados  $f, g \in \mathcal{P}(V)$  decimos que:

$$f \equiv g \quad (\text{módulo poliedros que contienen rectas})$$

si la diferencia  $f - g$  es combinación lineal de de funciones características de poliedros que contienen rectas.

Equivalentemente, decimos que:

$$f \equiv g \quad (\text{módulo poliedros en subespacios propios})$$

si la diferencia  $f - g$  es combinación lineal de de funciones características de poliedros contenidos en subespacios vectoriales propios.

Observamos que las funciones equivalentes a 0 módulo poliedros que contienen rectas, son un ideal en el álgebra  $\mathcal{P}(v)$  respecto del producto de convolución  $*$ .

En efecto, si

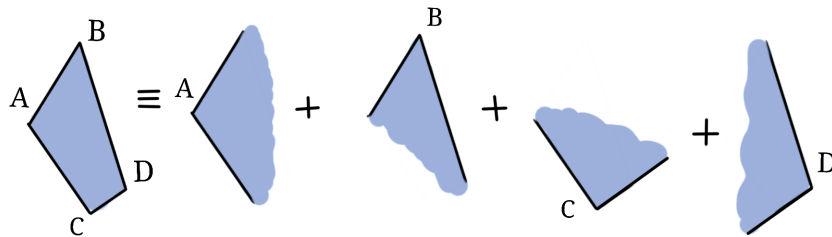
$$f = \epsilon_1 \mathbb{1}_{P_1} + \epsilon_2 \mathbb{1}_{P_2} + \dots + \epsilon_s \mathbb{1}_{P_s} \quad y \quad g = \beta_1 \mathbb{1}_{Q_1} + \beta_2 \mathbb{1}_{Q_2} + \dots + \beta_r \mathbb{1}_{Q_r}$$

donde  $P_i$  son poliedros que contienen rectas, y  $Q_i$  son poliedros cualesquiera. Entonces, utilizando la bilinealidad de la convolución obtenemos que en  $f * g$  nos aparece una combinación lineal de términos de la forma  $\mathbb{1}_{P_i} * \mathbb{1}_{Q_j}$ . Y utilizando

$$\mathbb{1}_{P_i} * \mathbb{1}_{Q_j} = \mathbb{1}_{P_i+Q_j} \tag{4.4}$$

como  $P_i + Q_j$  contiene alguna recta, obtenemos que  $f * g \equiv 0$ .

Vistas estas definiciones, el objetivo de este capítulo es demostrar que un poliedro es la suma de los conos tangentes en sus vértices módulo poliedros que contienen rectas.



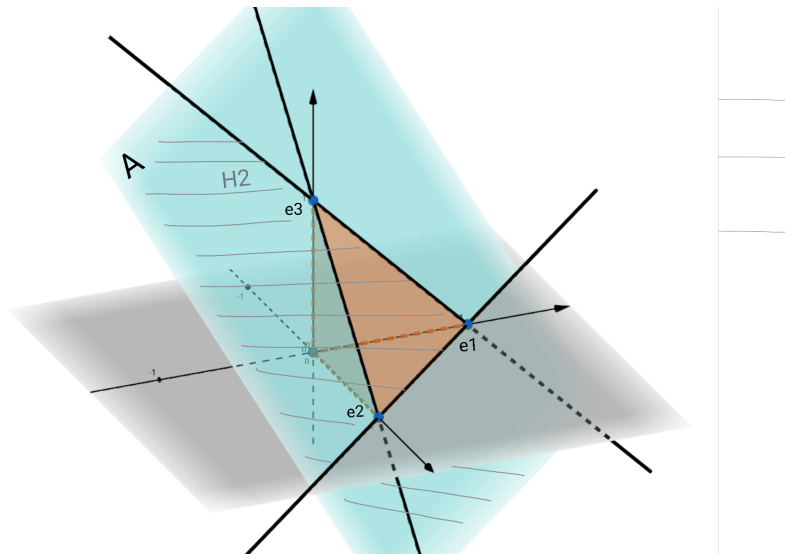
**Teorema 4.1.** *Sea  $P \in V$  un poliedro y sea  $Vert(P)$  el conjunto de vértices de  $P$ . Entonces:*

$$\mathbb{1}_P \equiv \sum_{v \in Vert(P)} \mathbb{1}_{tcono(P,v)} \quad \text{módulo poliedros que contienen rectas.}$$

*Demostración.* Supongamos  $P \in V$  no vacío. Empezaremos probando el resultado para el **símplice**. Es decir, para el poliedro  $\Delta \subset \mathbb{R}^m$

$$\Delta := \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) : \sum_{i=1,2,\dots,m} \lambda_i = 1 \quad y \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Observamos a  $\Delta$  como un poliedro dentro del subespacio  $A := \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) : \sum_i \lambda_i = 1\}$ . Consideramos  $H_i \subset A$  el semiespacio de  $A$  dado por  $\lambda_i \geq 0$ . Sea  $e_i$  el punto con coordenada  $i$ -ésima 1, y 0 en el resto de posiciones. Es decir  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  es el conjunto de vértices de  $\Delta$ .



Entonces se tiene que:

$$\Delta = \bigcap_{i=1}^m H_i \quad \text{y} \quad A = \bigcup_{i=1}^m H_i.$$

Notamos  $H_I = \bigcap_{i \in I} H_i$  y entonces, aplicando la fórmula de inclusión exclusión tenemos que:

$$\mathbb{1}_A = \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} (-1)^{|I|-1} \mathbb{1}_{H_I} \quad (4.5)$$

tomando en  $I$  los subconjuntos no vacíos de  $\{1, \dots, m\}$ . Notamos que

$$I = \{1, 2, \dots, m\} \implies H_I = \Delta \quad (4.6)$$

$$I = \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i\} \implies H_I = tcono(\Delta, e_i). \quad (4.7)$$

Finalmente, si  $i, j \notin I$  para  $i \neq j$ , entonces  $H_I$  contiene a la recta que une los puntos  $e_i$  y  $e_j$ .

Así queda demostrado el resultado para el caso del símplice. Veamos la demostración para poliedros acotados, es decir, para **politopos**.

Sea  $P = conv(v_1, \dots, v_m), P \subset V$  un politopo con vértices  $v_1, v_2, \dots, v_m$ . Consideramos la transformación lineal:

$$T : \mathbb{R}^m \longrightarrow V, \quad T(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i.$$

Esta transformación verifica que  $T(\Delta) = P$ . Y usando 4.5 y que las relaciones lineales entre funciones características de poliedros se mantienen a través de funciones lineales (teorema 2.1)

se tiene que:

$$\mathbb{1}_P = \mathbb{1}_{T(\Delta)} = \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} (-1)^{|I|-1} \mathbb{1}_{T(H_I)}.$$

Para el caso  $I = \{1, 2, \dots, m\} - \{i\}$ , usando 4.7 y el Lema 4.2 se obtiene que:

$$T(H_I) = T(\text{tcono}(\Delta, e_i)) = \text{tcono}(P, v_i).$$

Y como en el caso anterior, si  $i, j \notin I$  para  $i \neq j$ , entonces  $H_I$  contiene a la recta que pasa por los puntos  $v_i = T(e_i)$  y  $v_j = T(e_j)$ .

Para acabar, demostremos el resultado para **un poliedro no vacío cualquiera**.

Si el poliedro no tiene ningún vértice, entonces contiene alguna recta y el resultado es evidente. Si  $P$  no contiene rectas podemos aplicar el teorema 2.6 para escribir

$$P = Q + K \tag{4.8}$$

donde  $Q$  es la envolvente convexa de los vértices de  $P$  y  $K$  es el cono de recesión. Como  $Q$  es acotado se tiene que:

$$\mathbb{1}_Q \equiv \sum_{v \in \text{Vert}(P)} \mathbb{1}_{\text{tcono}(Q, v)} \quad (\text{módulo poliedros que contienen rectas}).$$

Por el teorema 2.2 sabemos que la suma de Minkowski mantiene las relaciones lineales entre funciones características de poliedros, de modo que:

$$\mathbb{1}_{Q+K} \equiv \sum_{v \in \text{Vert}(P)} \mathbb{1}_{\text{tcono}(Q, v) + K} \quad (\text{módulo poliedros que contienen rectas}).$$

Y se termina la demostración observando que:

$$\text{tcono}(Q, v) + K = \text{tcono}(P, v). \tag{4.9}$$

En efecto, el cono  $K$  es un cono que verifica la siguiente propiedad: si  $x \in K$  y  $t > 0$  entonces  $tx \in K$ . Para demostrar esta igualdad de conjuntos procedemos por doble inclusión.

Sea  $w \in \text{tcono}(P, v)$ , entonces  $w = v + t(x - v)$  con  $x \in P$  y  $t \geq 0$ . Como  $x \in P$ , sabemos que se puede descomponer como  $x = y + z$  donde  $y \in Q$  y  $z \in K$ . Así, podemos reescribir

$$w = v + t(y - v) + tz$$

donde  $t(y - v) \in \text{tcono}(Q, v)$  y  $tz \in K$ .

Recíprocamente, sea  $w = v + t(y - v) + z$  con  $y \in Q$ ,  $z \in K$  entonces:

$$w = v + t\left(\left(y + \frac{1}{t}z\right) - v\right)$$

donde como  $y \in Q$  y  $\frac{1}{t}z \in K$  se tiene que  $y + \frac{1}{t}z \in P$ . Y hemos terminado.  $\square$

Tras este resultado, es interesante volver a pensar en lo demostrado en el capítulo anterior para pasar en ambos lados al conjunto polar y deducir el siguiente corolario.

**Corolario 4.1.** Sean  $P_i \in V$ ,  $i \in I$  una familia finita de poliedros tales que  $0 \in P_i$  para todo  $i \in I$ , y sean  $\alpha_i, i \in I$  escalares. Entonces:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{P_i} \equiv \mathbb{1}_0 \quad (\text{módulo poliedros que contienen rectas})$$

respectivamente módulo poliedro contenidos en subespacios propios

si y solo si

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{P_i^\circ} \equiv \mathbb{1}_V \quad (\text{módulo poliedros contenidos en subespacios propios})$$

respectivamente módulo poliedros que contienen rectas.

*Observación 4.3.* Es importante no confundir las funciones  $\mathbb{1}_0$  y  $\mathbb{1}_\emptyset$ . El primero es la función característica del politopo 0, es decir, del origen de coordenadas. Sin embargo  $\mathbb{1}_\emptyset = 0$  es la función nula, es el elemento 0 de  $\mathcal{P}(V)$ . Por otro lado, los poliedros  $V$  y 0, son cada uno el conjunto polar del otro y las funciones  $\mathbb{1}_V$  y  $\mathbb{1}_0$  son las unidades del anillo  $\mathcal{P}(V)$  para sus estructuras de anillo con los productos  $\cdot$  y  $*$ .

Para finalizar el capítulo, nos interesamos en qué es lo que sucede cuando observamos la suma de (las funciones características de) los conos de direcciones factibles en lugar de los conos tangentes en los vértices.

**Lema 4.3.** Sea  $P \in V$  un politopo y sea  $Vert(P)$  el conjunto de sus vértices. Sea  $\ell(x)$  una función lineal. Si  $\ell(x)$  alcanza un máximo en  $P$ , entonces este máximo se alcanza en  $Vert(P)$ .

*Demostración.* Ya sabemos que  $P = conv(Vert(P))$ , entonces sea  $x_o \in P$  un punto donde se alcanza el máximo  $M$ .

$$M = \ell(x_o) = \ell\left(\sum_{v \in Vert(P)} \lambda_v v\right) = \sum_{v \in Vert(P)} \lambda_v \ell(v) \leq \max_{v \in V}(\ell(v)) \leq M$$

ya que  $\sum_{v \in Vert(P)} \lambda_v = 1$ .

Es decir, el máximo de la función se alcanza en uno de los vértices del politopo.

□

**Teorema 4.2.** *Sea  $P \subset V$  un politopo no vacío y sea  $Vert(P)$  su conjunto de vértices. Entonces:*

$$\sum_{v \in Vert(P)} \mathbb{1}_{fcono(P,v)} \equiv \mathbb{1}_0 \quad (\text{módulo poliedros que contienen rectas}). \quad (4.10)$$

*Demostración.* Consideramos el conjunto polar de cada uno de los conos

$$fcono(P, v)^o = \{c \in V : \langle c, x \rangle \leq 0 \quad x \in fcono(P, v)\}.$$

Y observamos que se tiene la siguiente igualdad:

$$fcono(P, v)^o = \{c \in V : \max_{x \in P} \langle c, x \rangle = \langle c, v \rangle\}. \quad (4.11)$$

Demostremos esta igualdad por doble inclusión.

Sea  $c \in fcono(P, v)^o$ , es decir  $\langle c, t(x - v) \rangle \leq 1$  para todos  $t \geq 0, x \in P$ . Deducimos que  $\langle c, x - v \rangle \leq 0$ , pues sino, podríamos encontrar  $t > 0$  de forma que  $\langle c, t(x - v) \rangle > 1$ .

Entonces  $\langle c, x \rangle - \langle c, v \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle c, x \rangle \leq \langle c, v \rangle$ , de modo que  $\max_{x \in P} \langle c, x \rangle = \langle c, v \rangle$ , ya que  $v \in P$ .

Recíprocamente:

$$\max_{x \in P} \langle c, x \rangle = \langle c, v \rangle \Rightarrow \langle c, x \rangle - \langle c, v \rangle \leq 0 \quad \forall x \in P \Rightarrow \langle c, x - v \rangle \leq 0 \quad \forall x \in P$$

entonces  $\langle c, t(x - v) \rangle \leq 0$  para todo  $x \in P$  y para todo  $t \geq 0$ , es decir  $c \in fcono(P, v)^o$ .

Y hemos acabado de demostrar 4.11.

Es decir, se tiene que los vectores  $c \in V$  que verifican que la función lineal  $\ell(x) := \langle c, x \rangle$  restringida a  $P$ , alcanza su máximo en  $Vert(P)$ .

Y aplicando el lema 4.3 se deduce la igualdad

$$\bigcup_{v \in Vert(P)} fcono(P, v)^o = V \quad (4.12)$$

Observamos que para cada par de vértices distintos  $u$  y  $v$ , se tiene que la intersección

$$fcono(P, v)^o \cap fcono(P, u)^o$$



está contenida en el hiperplano  $\langle c, u - v \rangle = 0$ .

En efecto, si  $c \in fcono(P, v)^\circ \cap fcono(P, u)^\circ$  se tiene que

$$\langle c, v \rangle = \langle c, u \rangle = \max_{x \in P} \langle c, x \rangle.$$

Y entonces  $\langle c, v - u \rangle = 0$

Esto quiere decir que al aplicar la fórmula de inclusión y exclusión en 4.12 sin considerar los términos asociados a poliedros contenidos en subespacios propios obtenemos:

$$\sum_{v \in Vert(P)} \mathbb{1}_{fcono(P, v)^\circ} \equiv \mathbb{1}_V \quad (\text{módulo poliedros contenidos en subespacios propios}).$$

Y aplicando el corolario la evaluación de dualidad se obtiene:

$$\sum_{v \in Vert(P)} \mathbb{1}_{fcono(P, v)} \equiv \mathbb{1}_0 \quad (\text{módulo poliedros que contienen rectas})$$

que es el resultado que buscábamos demostrar. □



---

## Capítulo 5

# El interior de los poliedros

Como hemos mencionado anteriormente, aunque  $\mathcal{C}(V)$  esté generado por conjuntos cerrados y convexos. En él también hay contenidos conjuntos no cerrados y no convexos. En este capítulo se presentan algunos resultados sobre el interior de poliedros.

**Teorema 5.1.** *Sea  $P \subset V$  un politopo de dimensión  $d$ . Entonces para el interior de  $P$  ( $\text{int}P$ ) se tiene la siguiente fórmula:*

$$\chi(\mathbb{1}_{\text{int}P}) = (-1)^d \quad (5.1)$$

*Demostración.* Aquí, si  $\dim V = n$ ,  $\text{int}P$  es el interior relativo, es decir, el interior topológico usual respecto de la mínima subvariedad lineal afín que contiene a  $P$ , cuya dimensión es  $d \leq n$  por definición.

Esta demostración se basa en la fórmula explícita que obtuvimos para  $\chi$  durante la demostración del teorema 1.1.

Procedemos por inducción sobre  $d$ . El resultado es cierto para  $d = 1$  pues ya vimos que la característica de Euler de un intervalo abierto es  $-1$  y los politopos en dimensión 1 con interior no vacío son **los** intervalos.

Supongamos que la propiedad se cumple para  $d - 1$ , demostrémosla para  $d$ . Consideremos la familia de hiperplanos  $H_\tau$ , donde  $H_\tau$  viene dado por los puntos con última coordenada igual a  $\tau$ . Aplicando la fórmula del teorema 1.1:

$$\chi(\mathbb{1}_{\text{int}P}) = \sum_{\tau \in \mathbb{R}} (\chi(\mathbb{1}_{\text{int}(P \cap H_\tau)}) - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \chi(\mathbb{1}_{\text{int}(P \cap H_{\tau-\epsilon})})). \quad (5.2)$$

Observamos que para cada  $\tau$  la intersección  $H_\tau \cap \text{int}P$  es o bien el interior de un politopo de dimensión  $d - 1$  en  $H_\tau$  o bien el conjunto vacío. Así, en 5.2 el único término no nulo en el sumatorio es el correspondiente al valor más grande de la última coordenada en  $P$ , y por

hipótesis de inducción, es igual a  $0 - (-1)^{d-1} = (-1)^d$  como queríamos demostrar, ver figura 5.1. □

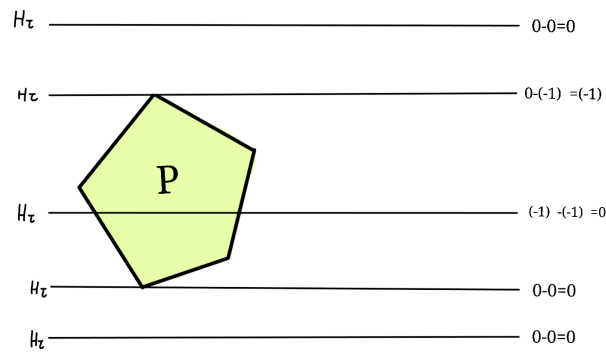


Figura 5.1: El interior del politopo  $P$  y los hiperplanos  $H_\tau$

**Corolario 5.1** (Fórmula de Euler-Poincaré). *Sea  $P \subset \mathbb{R}^d$  un politopo de dimensión  $d$ . Para  $k = 1, 2, \dots, d - 1$  denotamos  $f_k$  el número de caras  $k$ -dimensionales de  $P$  y sea  $f_d = 1$  (ya que  $P$  es una cara de sí mismo). Entonces se tiene que:*

$$\sum_{k=0}^d (-1)^k f_k = 1. \tag{5.3}$$

*Demostración.* Por el teorema 2.8 sabemos que cada punto del politopo, está en el interior relativo de una de las caras de este (considerando al mismo  $P$  también como una cara). Así podemos escribir:

$$\mathbb{1}_P = \sum_F \mathbb{1}_{\text{int}F}.$$

Aplicando la característica de Euler, sus propiedades, y el teorema 5.1 se tiene que:

$$1 = \chi(\mathbb{1}_P) = \sum_F \chi(\mathbb{1}_{\text{int}F}) = \sum_F (-1)^{\dim F} = \sum_{k=0}^d (-1)^k f_k.$$

□

*Observación 5.1.* La fórmula 5.3 generaliza la conocida *Fórmula de Euler para poliedros* que dice que para un politopo en un espacio de dimensión 3 (tal y como se han definido en este trabajo) se tiene que:

$$V - A + C = 2.$$

Es decir, que el número de vértices menos el número de aristas más el número de caras es siempre igual a 2.

Por ejemplo para el caso del cubo se tiene:

$$8 - 12 + 6 = 2.$$

Y para el dodecaedro:

$$20 - 30 + 12 = 2.$$

Ahora, vamos a estudiar una fórmula que relaciona la función característica de un cono con la función característica del interior del cono opuesto.

**Teorema 5.2** (Relación de reciprocidad). *Sea  $K \subset V$  un cono poliédrico  $d$ -dimensional. Entonces se tiene que:*

$$\mathbb{1}_K \equiv (-1)^d \mathbb{1}_{-\text{int}K} \quad (\text{módulo poliedros que contienen rectas}).$$

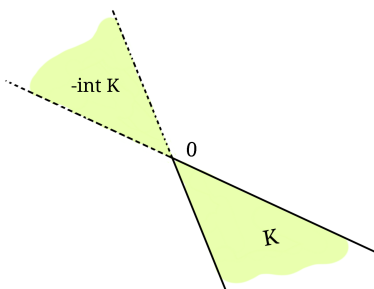


Figura 5.2: Interior del cono opuesto.

*Demostración.* Vamos a comenzar probando la igualdad para el hiper-octante no negativo de dimensión  $n$ ,

$$K = \mathbb{R}_+^n = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \xi_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Denotamos

$$H_i^+ = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \xi_i \geq 0\}$$

$$H_i^- = \mathbb{R}^n \setminus H_i^+ = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \xi_i < 0\}.$$

Entonces:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^n} = \mathbb{1}_{\cap_i H_i^+} = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{H_i^+} = \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{H_i^-}) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} \mathbb{1}_{H_i^-} \quad (5.4)$$

donde en el último sumatorio, se toman todos los conjuntos  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$  incluyendo el vacío.

Observamos que si para algún  $k$  se tiene que  $k \notin I$ , entonces en la intersección  $\cap_{i \in I} H_i^- = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \xi_i < 0 \ \forall i \in I\}$  está contenida la recta con dirección  $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  donde el 1 está en la  $k$ -ésima posición.

También observamos que:

$$\cap_{i=1}^n H_i^- = -\text{int}\mathbb{R}_+^n.$$

Entonces, en la igualdad 5.4 obtenemos:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^n} \equiv (-1)^n \mathbb{1}_{-\text{int}\mathbb{R}_+^n} \quad (\text{módulo poliedros que contienen rectas}). \quad (5.5)$$

donde el resto de términos que faltan para la igualdad, son funciones características de poliedros que contienen rectas en la dirección de  $e_k$ .

Demostremos ahora el teorema para un cono  $K \subset V$  de dimensión  $d$ . Aplicando el teorema 2.5 y suponiendo sin pérdida de generalidad que  $K \neq \{0\}$ . Sabemos que existe un hiperplano afín  $H \subset V$  tal que  $0 \notin H$ , un politopo  $P \subset H$  tales que

$$K = \text{co}(u_1, u_2, \dots, u_s)$$

donde los  $u_i$  son los vértice del politopo  $P$ .

Entonces

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i \quad \text{donde } \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, s \right\}$$

$$\text{int}K = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i u_i \quad \text{donde } \lambda_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots, s \right\}$$

Ahora vamos a considerar una transformación lineal  $T$  que envía el hiper-octante de dimensión  $n$  en el cono  $K$ . Consideramos  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  definida por  $T(e_k) = u_k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  donde  $e_k$  son los vectores de una base de  $\mathbb{R}^n$ , así  $T(\mathbb{R}_+^n) = K$ .

Por el teorema 2.1, sabemos que existe una transformación lineal  $(\mathcal{T}) : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(V)$  tal que  $\mathcal{T}(\mathbb{1}_P) = \mathbb{1}_{T(P)}$  para todo poliedro no vacío  $P \subset \mathbb{R}^n$ .

Entonces aplicando  $\mathcal{T}$  en 5.5 se obtiene:

$$\mathbb{1}_K \equiv (-1)^d \mathcal{T}(\mathbb{1}_{-\text{int}\mathbb{R}_+^n}) \quad (\text{módulo poliedros que contienen rectas})$$

donde los términos que faltan para la igualdad son funciones características de poliedros que contienen rectas en la dirección  $T(e_k) = u_k$ .

Ahora solo queda demostrar que:

$$\mathcal{T}(\mathbb{1}_{-int\mathbb{R}_+^n}) = (-1)^{n-d}\mathbb{1}_{-intK}$$

Para ello, en la demostración del teorema 2.1 se dio una expresión explícita para  $\mathcal{T}$ :

$$\mathcal{T}(f) = h \quad \text{donde} \quad h(y) = \chi(\mathbb{1}_{T^{-1}y}f) \quad \forall y \in V$$

Es decir, que para obtener el valor de  $h(y)$  tenemos que considerar la restricción a  $f$  de  $T^{-1}(y)$  y aplicar la característica de Euler  $\chi$ .

Tomando  $f = \mathbb{1}_{-int\mathbb{R}_+^d}$ , la restricción  $\mathbb{1}_{T^{-1}\cap(-int\mathbb{R}_+^n)}$  es 0 si  $y \notin T(-int\mathbb{R}_+^n)$ .

Si  $y \in T(-int\mathbb{R}_+^n)$  entonces  $\mathbb{1}_{T^{-1}\cap(-int\mathbb{R}_+^n)}$  es el indicador del interior de un politopo de dimensión  $n - d$  pues la condición de pertenecer a  $T^{-1}(y)$  añade  $d$  condiciones que son linealmente independientes. Entonces aplicando el teorema 5.1 se tiene que si  $y \in T(-int\mathbb{R}_+^n)$  entonces  $\chi(\mathbb{1}_{T^{-1}\cap(-int\mathbb{R}_+^n)}) = (-1)^{n-d}$  y entonces:

$$h = (-1)^{n-d}\mathbb{1}_{T(-int\mathbb{R}_+^n)} = (-1)^{n-d}\mathbb{1}_{-intK}.$$

□





---

## Capítulo 6

# La evaluación exponencial

Sea  $V$  un espacio Euclídeo de dimensión  $d$ , con producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y la medida de Lebesgue  $dx$ . Entonces es claro que si aplicamos la función

$$f \mapsto \int_V f \, dx$$

a la función característica de un poliedro acotado  $P$ , obtenemos

$$\int_V \mathbb{1}_P \, dx = \int_P 1 \, dx = \int_P dx \tag{6.1}$$

que usualmente reconocemos como la medida de Lebesgue del poliedro  $P$ . De aquí en adelante hablaremos de “volumen” para referirnos a la medida de Lebesgue de un conjunto. Es claro que podemos extender este “volumen” a los elementos de  $\mathcal{P}_b(V)$  por linealidad.

*Observación 6.1.* De aquí en adelante vamos a considerar elegida una base ortonormal de  $V$  para poder identificar  $V$  con  $\mathbb{R}^d$ .

Apoyándonos en resultados obtenidos en capítulos anteriores, el objetivo de este capítulo va a ser extender esta noción “volumen” a todo el espacio vectorial  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ . Es decir, nuestro objetivo es poder hablar del “volumen” de un poliedro no acotado.

Para realizar esta extensión, diremos que el volumen de un poliedro  $P$  no es un número, como hemos hecho tradicionalmente, sino una función  $\phi_P$ . Buscamos que esta función  $\phi_P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  extienda la noción usual de volumen en el sentido siguiente: Queremos que  $\phi_P$  verifique que  $\phi_P(0) = \int_P dx$  si el poliedro es acotado. Si  $P$  es un poliedro no acotado, entonces la función  $\phi_P$  no está necesariamente bien definida en 0.

**Definición 6.1** (Función entera). Decimos que  $h$  es una *función entera* sobre  $\mathbb{R}^d$  si  $h$  es una función

$$h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

analítica en todos los puntos de  $\mathbb{R}^d$ , es decir, diferenciable  $C^\infty$  que coincide en todo  $\mathbb{R}^d$  con la suma de su desarrollo de Taylor.

**Definición 6.2** (Localizado de las funciones enteras en los polinomios en  $d$  variables). Se considera  $\mathbb{R}[y] = \mathbb{R}[y_1, y_2, \dots, y_d]$  el anillo de polinomios en  $d$  variables y  $\mathcal{H}$  el anillo de funciones enteras sobre  $\mathbb{R}^d$ .  $\mathcal{H}$  es un anillo conmutativo y con unidad para las operaciones usuales de suma y producto.  $\mathcal{H}$  es un módulo sobre el anillo  $\mathbb{R}[y]$ . Entonces se define el *localizado del módulo  $\mathcal{H}$  sobre el conjunto multiplicativamente cerrado  $\mathbb{R}[y] \setminus \{0\}$*  al conjunto:

$$\mathcal{H}_{(0)} = \left\{ \frac{h}{q} : h \in \mathcal{H} \text{ y } q \in \mathbb{R}[y] \setminus \{0\} \right\},$$

donde se entiende que dos fracciones  $\frac{p}{q}$  y  $\frac{p'}{q'}$  son iguales cuando  $pq' = p'q$ . Con las operaciones usuales de fracciones  $\mathcal{H}_{(0)}$  es de hecho un álgebra sobre el cuerpo de funciones racionales  $\mathbb{R}(y) = \mathbb{R}(y_1, y_2, \dots, y_d)$  y en particular un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}(y)$ .

Así, para definir el “volumen” de un poliedro no acotado, buscamos construir una *evaluación*:

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{H}_{(0)}$$

de manera que esta evaluación extienda el volumen usual de un poliedro acotado de la forma que hemos definido antes.

Consideramos la integral

$$\int_P e^{\langle y, x \rangle} dx \tag{6.2}$$

donde  $P$  es un poliedro y  $y \in \mathbb{R}^d$ . Vamos a fijarnos en esta integral como una función de  $y$ .

*Observación 6.2.* Por simplicidad, estamos restringiéndonos constantemente al caso real. Sin embargo, observamos que como en la integral 6.2,  $x$  tiene coordenadas reales. Entonces podríamos considerar la integral

$$\int_P e^{\langle z, x \rangle} dx$$

con  $z = y + iw$  donde  $y, w \in \mathbb{R}^d$ . Y descomponer

$$\langle z, x \rangle = \langle y, x \rangle + i\langle w, x \rangle$$

para extender esta teoría al caso complejo. Sin embargo vamos a continuar trabajando en el caso real.

Observamos que en la integral 6.2, si se tiene que  $P$  es acotado y evaluamos la integral en 0, obtenemos el volumen usual de  $P$ . Sin embargo si  $P$  no está acotado, entonces esta integral puede converger o no. Veamos un primer ejemplo:

Consideramos en  $\mathbb{R}^d$  el hiper-octante no negativo

$$K = \mathbb{R}_+^d = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) : x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, d\}\}.$$

Entonces para  $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$  se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} e^{\langle y, x \rangle} dx = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{i=1}^d e^{y_i x_i} dx_1 \dots dx_d = \prod_{i=1}^d \int_0^\infty e^{y_i x_i} = \prod_{i=1}^d \frac{-1}{y_i} \quad (6.3)$$

si se tiene que  $y_i < 0$  para todo  $i = 1 \dots d$ .

Entonces se tiene que la integral converge absolutamente para todo  $y \in -\text{int}\mathbb{R}_+^d$  y converge uniformemente en los subconjuntos compactos de  $-\text{int}\mathbb{R}_+^d$  es decir, para el interior del poliedro polar  $K^\circ$ .

Veamos qué sucede en conos simpliciales. Sea  $u_1, u_2, \dots, u_d$  una base de  $\mathbb{R}^d$  y sea  $K = \text{co}(u_1, u_2, \dots, u_d)$ . Se considera  $|u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_d|$  el volumen del paralelepípedo generado por  $u_1, u_2, \dots, u_d$ . Es decir:

$$|u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_d| = \text{vol}\left\{\sum_{i=1}^d u_i \alpha_i : 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ para } i = 1, \dots, d\right\}$$

y entonces aplicando el cambio de variable definido por el cambio de base  $\{u_1, u_2, \dots, u_d\}$  en la integral 6.3 se obtiene que:

$$\int_K e^{\langle y, x \rangle} dx = |u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_d| \prod_{i=1}^d \frac{1}{\langle -y, x_i \rangle} \quad (6.4)$$

donde la integral converge absolutamente y uniformemente en los conjuntos compactos del interior de  $K^\circ$ .

*Observación 6.3.* En general para un poliedro  $d$ -dimensional  $P$  en  $\mathbb{R}^d$  la integral de Lebesgue  $\int_P e^{\langle x, y \rangle} dx$  existe para todo  $y \in \text{int}P^\circ$  y es una función analítica de las variables  $y$  en  $\text{int}P^\circ$ . Si  $P$  contiene rectas, sabemos que  $P^\circ$  está contenido en un hiperplano y por lo tanto  $\text{int}P^\circ$  es vacío, de modo que no existe tal función. Si  $P$  es un politopo, entonces su medida de Lebesgue es finita y así  $\int_P e^{\langle x, y \rangle} dx$  existe.

Si  $P$  es no acotado y no contiene rectas, si escribimos

$$P = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \quad \text{con} \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$$

donde los  $E_n$  son de medida finita, decimos que la integral  $\int_P e^{\langle x,y \rangle} dx$  converge si el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} e^{\langle x,y \rangle} dx$$

existe y es finito y definimos la integral como el valor de este límite.

Si además dicho límite es uniforme sobre los compactos de  $\text{int}P^\circ$  el límite hereda, como función de  $y$ , las propiedades de continuidad y diferenciabilidad del integrando  $e^{\langle x,y \rangle}$ . En este caso la integral es una función analítica de  $y$  en  $\text{int}P^\circ$ .

Veamos en el siguiente lema, que los cálculos realizados pueden ser extendidos para cualquier cono punteado  $K$ . Observamos que por el teorema 2.5 se tiene que el interior del cono  $K$  es no vacío.

**Lema 6.1.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^d$  un cono punteado. Entonces para todo  $y \in \text{int}K^\circ$  la integral*

$$\int_K e^{\langle y,x \rangle} dx$$

*converge absolutamente y uniformemente en los subconjuntos compactos de  $\text{int}K^\circ$  hacia una función racional  $\phi(K, y)$  del tipo*

$$\phi(K, y) = \sum_I \alpha_I \prod_{i \in I} \frac{1}{\langle -y, x_i \rangle}$$

*donde  $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ , el sumatorio es sobre los subconjuntos  $I$  de cardinal  $d$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$  y  $\alpha_I > 0$  son números reales.*

*Demostración.* Ya hemos visto que podemos representar el cono  $K$  como

$$K = \text{co}(u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Buscamos expresar  $K$  como unión de conos simpliciales. Ya sabemos que  $\text{span}((u_1, u_2, \dots, u_m)) = V$  ya que si fuese de otra forma, el cono  $K$  tiene dimensión menor que  $d$  y la integral es idénticamente nula.

Si el conjunto  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  es una base entonces hemos terminado. Sino, extraigo una base  $\mathcal{B}$  de este conjunto y el cono  $K_1$  asociado a estos  $d$  vectores es un cono simplicial. Tomamos un vector  $u_j$  que no esté en la base, entonces en la base anterior podemos eliminar un vector  $u_i$  de forma que el conjunto  $\mathcal{B} \setminus \{u_i\} \cup \{u_j\}$  sea también una base, con un cono simplicial asociado  $K_2$ . Si  $K = K_1 \cup K_2$  entonces hemos terminado. Sino, iteramos el proceso para obtener nuevos conos simpliciales. Observamos que por el proceso de obtención de estos conos, la dimensión de

la intersección de dos conos distintos es como mucho  $(d - 1)$ .

Así hemos representado  $K$  como la unión de los conos

$$K_i = \text{co}(u_i : i \in I)$$

donde para cada  $I \subset \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  los vectores  $\{u_i : i \in I\}$  forman una base de  $\mathbb{R}^d$ . Eso demuestra que

$$\int_K e^{\langle y, x \rangle} = \sum_I \int_{K_I} e^{\langle y, x \rangle} dx$$

y aplicando la fórmula 6.4 se tiene el resultado buscado.  $\square$

*Observación 6.4.* Observamos que si trasladamos el cono  $K$  con vértice en el origen por un vector  $v$ , entonces la integral que se obtiene tras un cambio de variable es:

$$\int_{K+v} e^{\langle y, x \rangle} dx = e^{\langle y, v \rangle} \int_K e^{\langle y, x \rangle} dx.$$

Podemos presentar ahora el principal resultado de este capítulo y de este trabajo.

**Teorema 6.1.** *Consideramos  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  el espacio vectorial de funciones de  $\mathbb{R}^d$  en  $\mathbb{R}$  engendrado por las funciones del tipo:*

$$f(y) = e^{\langle y, v \rangle} \prod_{i=1}^d \frac{1}{\langle -y, x_i \rangle} \text{ con } y \in \mathbb{R}^d$$

donde  $v \in \mathbb{R}^d$  y  $u_1, u_2, \dots, u_d$  es una base de  $\mathbb{R}^d$ .

Entonces existe una única evaluación

$$\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

que verifica lo siguiente:

1. Sea  $P \subset \mathbb{R}^d$  un poliedro no vacío que no contiene rectas y sea  $K \subset \mathbb{R}^d$  su cono de recesión. Entonces, para cada  $y \in \text{int}K^\circ$ , la integral

$$\int_P e^{\langle y, x \rangle} dx$$

converge absolutamente y uniformemente en los conjuntos compactos de  $\text{int}K^\circ$  hacia la función

$$\phi(P, y) = \Phi(\mathbb{1}_P) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

2. Si  $P$  contiene alguna recta, entonces  $\Phi(\mathbb{1}_P) = 0$ .

Antes de ver la demostración de este teorema, veamos algunas implicaciones y ejemplos.

Sea  $P \subset \mathbb{R}^d$  un poliedro no vacío que no contiene ninguna recta. Recordemos que el teorema 4.1 nos proporcionaba la relación:

$$\mathbb{1}_P \equiv \sum_{v \in \text{Vert}(P)} \mathbb{1}_{t\text{cono}(P,v)} \quad \text{módulo poliedros que contienen rectas.}$$

Aplicando a esta expresión la evaluación  $\Phi$  obtenemos la relación:

$$\boxed{\Phi(\mathbb{1}_P) = \sum_{v \in \text{Vert}(P)} \Phi(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,v)})}. \quad (6.5)$$

Esta ecuación recibe el nombre de **Teorema de Brion**. Fue primero demostrada para politopos con vértices racionales, después para politopos en general y finalmente para poliedros cualesquiera.

Similarmente, aplicando la evaluación  $\Phi$  a la relación que nos proporciona el teorema 4.2 se obtiene que si  $P \subset \mathbb{R}^d$  es un politopo entonces:

$$\sum_{v \in \text{Vert}(P)} \Phi(\mathbb{1}_{f\text{cono}(P,v)}) = 0.$$

Ya sabemos que se tiene que

$$t\text{cono}(P, v) = v + f\text{cono}(P, v)$$

de modo que realizando un cambio de variable en la integral y utilizando el lema 6.1 se obtiene que:

$$\Phi(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,v)}) = e^{\langle y, v \rangle} \Phi(\mathbb{1}_{f\text{cono}(P,v)}) = e^{\langle y, v \rangle} f_v(y)$$

donde  $f_v(y)$  es una función racional de grado  $-d$  y que solo depende del cono de direcciones factibles en  $v$ .

Veamos un ejemplo. Supongamos que  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  es el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  y sea  $y = (y_1, y_2)$  (ver figura 6.1). Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} e^{\langle y, x \rangle} dx &= \sum_{v \in \text{Vert}\Delta} \Phi(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,v)}) = \sum_{v \in \text{Vert}\Delta} e^{\langle y, v \rangle} f_v(y) = \\ &= \frac{e^{\langle (0,0), y \rangle}}{\langle -y, (0,1) \rangle \langle -y, (1,0) \rangle} + \frac{e^{\langle (1,0), y \rangle}}{\langle -y, (1,-1) \rangle \langle -y, (0,-1) \rangle} + \frac{e^{\langle (0,1), y \rangle}}{\langle -y, (-1,0) \rangle \langle -y, (-1,1) \rangle} = \\ &= \frac{1}{(-y_1)(-y_2)} + \frac{e^{y_1}}{y_2(y_2 - y_1)} + \frac{e^{y_2}}{y_1(y_1 - y_2)}. \end{aligned}$$

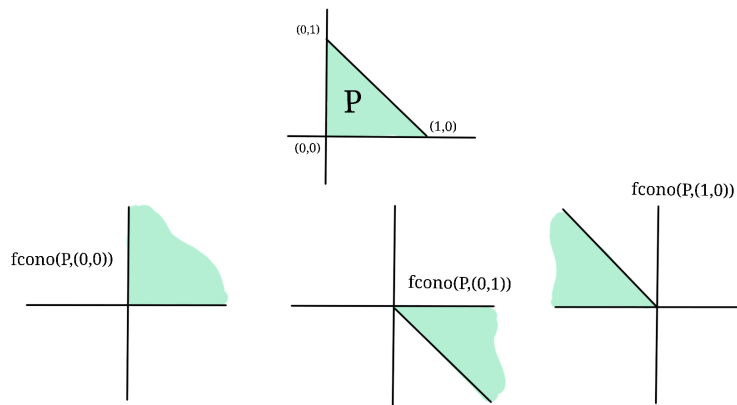


Figura 6.1: Triángulo  $\Delta$  con sus conos de direcciones factibles

Como  $\Delta$  es acotado, entonces su cono de recesión es el origen y por lo tanto el cono polar es todo  $\mathbb{R}^2$  y la igualdad se tiene para todo  $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . Estamos interesados en conocer el valor de esta función en  $(0,0)$  para obtener, a partir de las fórmulas, el volumen usual de  $\Delta$ . Para ello, vamos a hacer el desarrollo en serie de Taylor y ver qué obtenemos como término independiente.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(-y_1)(-y_2)} + \frac{e^{y_1}}{y_2(y_2 - y_1)} + \frac{e^{y_2}}{y_1(y_1 - y_2)} &= \frac{(y_1 - y_2) + y_2(1 + y_1 + \frac{y_1^2}{2!} + \dots) - y_1(1 + y_2 + \frac{y_2^2}{2!} + \dots)}{y_1 y_2 (y_1 - y_2)} = \\ \frac{y_1 - y_1 + y_2 - y_2 + y_1 y_2 - y_1 y_2 + \frac{1}{2} y_1 y_2 (y_1 - y_2) + \dots}{y_1 y_2 (y_1 - y_2)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} (y_1 + y_2) + \frac{1}{4!} (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) + \dots \end{aligned}$$

donde se ha usado que

$$y_1^k - y_2^k = (y_1 - y_2)(y_1^{k-1} + y_1^{k-2} y_2 + \dots + y_1 y_2^{k-2} + y_2^{k-1}).$$

Así, evaluando la función en  $(0,0)$  se obtiene  $1/2$  que es el volumen usual del triángulo  $\Delta$ .

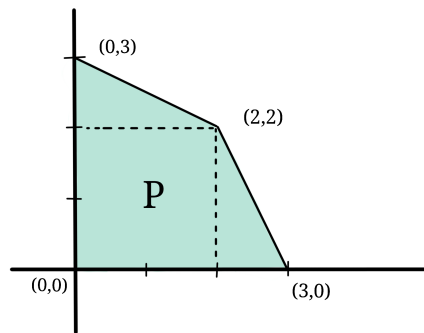
Como sabemos que el numerador de estas funciones  $f_v(y)$  es una función entera, siempre se

va a poder sustituir por el desarrollo de Taylor. El teorema 6.1 nos dice es que siempre se va a dar una simplificación como la del ejemplo anterior de manera que al evaluar en 0 la suma de las funciones  $f_v(y)$ , obtengamos el volumen del politopo  $P$ .

Veamos un último ejemplo de esta curiosa simplificación antes de pasar a la demostración del teorema.

Consideramos el cuadrilátero  $P$  con conjunto de vértices  $\{(0, 0), (0, 3), (2, 2) \text{ y } (3, 0)\}$ , que tiene área 6 (ver figura 6.2).

Figura 6.2: Segundo ejemplo cálculo de volumen



Entonces:

$$\phi(P, y) = \sum_{v \in \text{Vert}P} e^{(v,y)} f_v(y) = \frac{1}{y_1 y_2} + \frac{2e^{3y_1}}{(y_1 - 2y_2)y_1} + \frac{3e^{3y_2}}{(y_2 - 2y_1)y_2} + \frac{2e^{2y_1+2y_2}}{(2y_2 - y_1)(2y_1 - y_2)} = \frac{h}{q}$$

Así:

$$q = y_1 y_2 (y_1 - 2y_2)(y_2 - 2y_1)$$

$$h = (y_1 - 2y_2)(y_2 - 2y_1) + 2e^{3y_1} y_2 (y_2 - 2y_1) + 2e^{3y_2} y_1 (y_1 - 2y_2) + 3y_1 y_2 e^{2(y_1+y_2)}$$

Ahora, tras desarrollar  $h$  en serie de Taylor vemos qué sucede en cada uno de sus términos.

- No hay término independiente ni término lineal.
- El término cuadrático:  $5y_1 y_2 - 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1 y_2 + 2y_1^2 - 4y_1 y_2 + 3y_1 y_2 = 0$
- El término cúbico:  $6y_1(y_2^2 - 2y_1 y_2) + 6y_2(y_1^2 - 2y_1 y_2) + 6(y_1 + y_2)y_1 y_2 = 0$
- El término cuártico:  $2y_2(y_2 - 2y_1) \frac{9y_1^2}{2!} + 2y_1(y_1 - 2y_2) \frac{9y_2^2}{2!} + 3y_1 y_2 \frac{4(y_1+y_2)^2}{2!} = 30y_1^2 y_2^2 - 12y_1 y_2^3 - 12y_2^3 y_1 = 6q$ .



El los términos de grado  $\geq 5$  de  $h$  son también polinomios homogéneos múltiplos de  $q$ . En efecto, el término de grado  $k$ -ésimo para  $k \geq 5$  es:

$$2y_2(y_2 - 2y_1) \frac{(3y_1)^{k-2}}{(k-2)!} + 2y_1(y_1 - 2y_2) \frac{(3y_2)^{k-2}}{(k-2)!} + 3y_1y_2 \frac{2^{k-2}(y_1 + y_2)^{k-2}}{(k-2)!}$$

y por la regla de Ruffini, es múltiplo de  $q$  pues se anula para las sustituciones  $y_1 = 0, y_2 = 0, y_1 = 2y_2$  y  $y_2 = 2y_1$ .

Así, deducimos que:

$$\phi(P, 0) = 6.$$

**Definición 6.3** (Poliedros fuertemente combinatoriamente isomorfos). Sea  $P \subset \mathbb{R}^d$  un poliedro no vacío y sea  $\ell : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función lineal tal que:

$$m_\ell = \max_{x \in P} \ell(x) < +\infty$$

Sea

$$F_\ell(P) = \{x \in P : \ell(x) = m_\ell\}$$

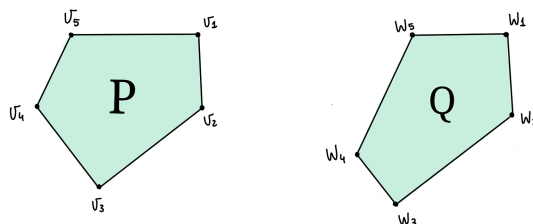
la correspondiente cara de  $P$ . Decimos que dos poliedros  $P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^d$  son *fuertemente combinatoriamente isomorfos* si para cada función lineal no nula  $\ell : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene que:

$$\max_{x \in P_1} \ell(x) < +\infty \quad \text{si y solo si} \quad \max_{x \in P_2} \ell(x) < +\infty$$

y  $\dim F_\ell(P_1) = \dim F_\ell(P_2)$ . Ver ejemplo en la figura 6.3.

*Observación 6.5.* Si  $P$  y  $Q$  son dos poliedros fuertemente combinatoriamente isomorfos, entonces los conos de direcciones factibles  $fcono(P, v_i)$  y  $fcono(Q, w_i)$  coinciden, mientras que los conos tangentes en los vértices  $tcono(P, v_i)$  y  $tcono(Q, w_i)$  coinciden salvo por una traslación.

Figura 6.3: Politopos fuertemente combinatoriamente isomorfos



Así, para una familia  $P_\tau$  de poliedros fuertemente combinatoriamente isomorfos con vértices

$v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_m(\tau)$  tendremos que:

$$\Phi(\mathbb{1}_{P_\tau}) = \sum_{i=1}^m e^{\langle y, v_i(\tau) \rangle} f_i(y)$$

donde las funciones racionales  $f_i(y)$  son las mismas para cada poliedro  $P_\tau$  de la familia.

*Observación 6.6.* Consideremos un vector  $y \in \mathbb{R}^d$ , y supongamos que un punto  $v \in \mathbb{R}^d$  se mueve con velocidad constante por el segmento que une  $v_0$  y  $v_1$ :

$$v(\tau) = v_0(1 - \tau) + v_1\tau \quad \text{para } \tau \in [0, 1].$$

Entonces:

$$\int_0^1 e^{\langle y, v(\tau) \rangle} d\tau = \begin{cases} \frac{e^{\langle y, v_0 \rangle} - e^{\langle y, v_1 \rangle}}{\langle y, v_0 - v_1 \rangle} & \text{si } \langle y, v_0 - v_1 \rangle \neq 0 \\ e^{\langle y, v_0 \rangle} = e^{\langle y, v_1 \rangle} & \text{si } \langle y, v_0 - v_1 \rangle = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

*Demostración del teorema 6.1.* Sea  $P \subset \mathbb{R}^d$  un poliedro no vacío que no contiene rectas. Vamos a proceder por inducción sobre  $d$ . Si  $d = 0$  el resultado es evidente. Si suponemos que el resultado se cumple para todos los naturales estrictamente menores que  $d+1$ , demostrémoslo para  $d+1$ .

Por el teorema 2.6 sabemos que podemos descomponer  $P$  como  $P = Q + K$  donde  $Q$  es la envolvente convexa de los vértices de  $P$  y  $K$  es el cono de recesión de  $P$ .

Vamos a probar primero que para cada  $y \in \text{int}K^\circ$  la integral

$$\int_P e^{\langle y, x \rangle} dx$$

converge absolutamente y uniformemente en los subconjuntos compactos de  $K^\circ$  hacia una función en  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ .

Observamos que cada cara de  $P$  es la suma de Minkowski de una cara de  $Q$  y de una cara de  $K$ .

Consideramos un vector  $u \in -\text{int}K^\circ$  de tal forma que no sea ortogonal a ninguna cara con dimensión positiva de  $P$ . Dividimos  $\mathbb{R}^{d+1}$  en los hiperplanos:

$$H_\tau = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \langle u, x \rangle = \tau\}.$$

Cada uno de estos hiperplanos se identifica con un espacio vectorial de dimensión  $d - 1$ , entonces el teorema se verifica en cada hiperplano  $H_\tau$ . Sea  $P_\tau = P \cap H_\tau$ , si denotamos

$$\tau_0 = \min_{x \in P} \langle u, x \rangle = \min_{x \in Q} \langle u, x \rangle$$

entonces, como  $u \in \text{int}K^o$ , se tiene que  $P_\tau$  está acotado y  $P_\tau = \emptyset$  si  $\tau < \tau_0$ . Así, podemos escribir la integral en el poliedro como:

$$\int_P e^{\langle y, x \rangle} dx = \int_{\tau_0}^{+\infty} \left( \int_{P_\tau} e^{\langle y, \xi \rangle} d\xi \right) d\tau$$

donde  $d\xi$  representa la medida de lebesgue dentro del hiperplano  $H_\tau$ .

Observamos que las caras del poliedro  $P_\tau$  se obtienen como la intersección de una cara de  $P$  y un hiperplano  $H_\tau$ . También observamos que existen una cantidad finita de puntos  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$  tales que en el intervalo abierto  $(\tau_k, \tau_{k+1})$  y en el intervalo  $(\tau_n, +\infty)$ , los politopos  $P_\tau$  se mantienen fuertemente combinatoriamente isomorfos. De hecho, los puntos  $\tau_k$  están definidos por la condición de que  $H_\tau$  pase por un vértice del poliedro  $P$ . Para uniformizar la notación, diremos que  $\tau_{n+1} = +\infty$ .

Consideramos un intervalo concreto  $(\tau_k, \tau_{k+1})$ . Por lo visto en la observación 6.5 existen funciones racionales  $f_i(y)$  de grado  $-d + 1$  tales que para cada  $\tau \in (\tau_k, \tau_{k+1})$  se tiene:

$$\int_{P_\tau} e^{\langle y, \xi \rangle} d\xi = \sum_{i=1}^m e^{\langle y, v_i(\tau) \rangle} f_i(y).$$

Además, como los vértices  $v_i(\tau)$  de  $P_\tau$  son intersecciones de aristas de  $P$  y  $H_\tau$ , cada vértice  $v_i(\tau)$  varía linealmente con  $\tau$ , entonces podemos escribir:

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \left( \int_{P_\tau} e^{\langle y, \xi \rangle} d\xi \right) d\tau = \sum_{i=1}^m f_i(y) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{\langle y, v_i(\tau) \rangle} d\tau$$

que por 6.6, tras un cambio de variable, pertenece a  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{d+1})$  como función de  $y$ .

Ahora solo falta considerar la integral:

$$\int_{\tau_n}^{+\infty} \left( \int_{P_\tau} e^{\langle y, \xi \rangle} d\xi \right) d\tau = \sum_{i=1}^m f_i(y) \int_{\tau_n}^{+\infty} e^{\langle y, v_i(\tau) \rangle} d\tau.$$

Si  $P$  no está acotado, entonces para  $\tau > \tau_n$ , los vértices  $v_i(\tau)$  son la intersección de caras no acotadas de  $P$  y  $H_\tau$ . Para esos vértices, se tiene que

$$v_i(\tau) = v_i(0) + (\tau - \tau_n)w \quad \text{para } \tau \geq \tau_n$$

y cierto  $w \in K$ . Así:

$$\int_{\tau_n}^{+\infty} e^{\langle y, v_i(\tau) \rangle} d\tau = \frac{e^{\langle y, v_i(0) \rangle}}{\langle -y, w \rangle}$$

donde  $\langle -y, w \rangle > 0$  para todo  $y \in \text{int}K^\circ$ , de modo que

$$\int_P e^{\langle y, x \rangle} dx$$

converge absolutamente para todo  $y \in \text{int}K^\circ$  y uniformemente en los compactos de  $\text{int}K^\circ$ , ya que sobre cada compacto de  $\text{int}K^\circ$  la función  $\langle -y, w \rangle$  alcanza un máximo que es  $> 0$ .

Ahora vamos a construir la evaluación  $\Phi$ .

Dado un poliedro  $P \subset \mathbb{R}^d$  que no contiene rectas y con cono de recesión  $K_P$ , ya habíamos definido una función  $\phi(P, y) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  como  $\phi(P, y) = \int_P e^{\langle y, x \rangle} dx$  para cada  $y \in \text{int}K_P^\circ$  y tal que la integral converge absolutamente y uniformemente en los compactos de  $\text{int}K_P^\circ$ .

Vamos ahora a demostrar que esta función respeta las relaciones lineales entre las funciones indicatrices de poliedros que no contienen rectas. Es decir, queremos mostrar que si se tiene

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{P_i} = 0 \tag{6.7}$$

donde  $P_i$  son poliedros que no contienen rectas y  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \phi(P_i, y) = 0 \tag{6.8}$$

Para ello supongamos que tenemos una descomposición:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d} = \sum_{j \in J} \beta_j \mathbb{1}_{Q_j} \tag{6.9}$$

donde  $Q_j$  son poliedros que no contienen rectas y  $\beta_j$  son números reales. Por ejemplo podríamos considerar la descomposición dada por los hiper-octantes. Entonces para cada poliedro  $P_i$  se tiene que:

$$\mathbb{1}_{P_i} = \mathbb{1}_{P_i} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d} = \sum_{j \in J} \beta_j \mathbb{1}_{P_i \cap Q_j}. \tag{6.10}$$

Como cada uno de los poliedros  $P_i \cap Q_j$  no contiene rectas, entonces está definida la función  $\phi(P_i \cap Q_j, y)$ . Como se tiene la inclusión  $K_{P_i \cap Q_j} \subset K_{P_i}$  entonces la integral

$$\int_{P_i} e^{\langle y, x \rangle} dx = \sum_{j \in J} \beta_j \int_{P_i \cap Q_j} e^{\langle y, x \rangle} dx$$

para todo  $y \in \text{int}K_{P_i}^o$  y todas las integrales involucradas convergen absolutamente y uniformemente en los conjuntos compactos de  $\text{int}K_{P_i}^o$ . Entonces

$$\phi(P_i, y) = \sum_{j \in J} \beta_j \phi(P_i \cap Q_j, y) \quad \text{para todo } y \in \text{int}K_{P_i}^o. \quad (6.11)$$

Como esta última igualdad es una igualdad entre funciones meromorfas que se da en un abierto no vacío de  $\mathbb{R}^d$ , se puede extender la igualdad para cada  $y \in \mathbb{R}^d$ .

Consideremos un  $j \in J$  y multipliquemos 6.7 por  $\mathbb{1}_{Q_j}$ . Se obtiene:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbb{1}_{P_i \cap Q_j} = 0$$

Como se tiene la inclusión  $K_{P_i \cap Q_j} \subset K_{Q_j}$  entonces

$$\sum_{i \in I} \int_{P_i \cap Q_j} e^{\langle y, x \rangle} dx = 0 \quad \text{para todo } y \in \text{int}K_{Q_j}^o$$

y así:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \phi(P_i \cap Q_j, y) = 0 \quad \text{para todo } y \in \text{int}K_{Q_j}^o. \quad (6.12)$$

Igual que antes, como esta igualdad una igualdad entre funciones meromorfas que se verifica en un abierto no vacío de  $\mathbb{R}^d$ .

Ahora, por 6.11 y 6.12 concluimos que:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \phi(P_i, y) = \sum_{i \in I} \alpha_i \left( \sum_{j \in J} \beta_j \phi(P_i \cap Q_j, y) \right) = \sum_{j \in J} \beta_j \left( \sum_{i \in I} \alpha_i \phi(P_i \cap Q_j, y) \right) = 0$$

como queríamos.

Entonces la aplicación que envía  $\mathbb{1}_P$  en  $\phi(P, y)$  es una aplicación lineal que va del espacio vectorial generado por las funciones características de poliedros que no contienen rectas en  $\mathbb{R}^d$ .

Pero por otro lado, si consideramos un poliedro cualquiera  $P$ , y una decomposición como en 6.9 se tiene que:

$$\mathbb{1}_P = \sum_{j \in J} \beta_j \mathbb{1}_{Q_j}.$$

De modo que las funciones características de poliedros que no contienen rectas, generan todo el espacio de funciones características de poliedros en general  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ . Entonces la aplicación que antes hemos definido es la evaluación

$$\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d).$$

Finalmente, solo falta demostrar que si  $P$  es un poliedro que contiene alguna recta, entonces  $\Phi(\mathbf{1}_P) = 0$ . Para ello, observamos que si  $P$  es un poliedro que no contiene rectas entonces si  $P + u$  es el poliedro trasladado por el vector  $u$ , entonces los conos de recesión de  $P$  y de  $P + u$  coinciden y entonces se tiene que:

$$\int_{P+u} e^{\langle y, x \rangle} dx = e^{\langle y, u \rangle} \int_P e^{\langle y, x \rangle} dx$$

para todo  $y \in K_P^\circ$ .

Y entonces  $\phi(P, y) = e^{\langle y, u \rangle} \phi(P, y)$  y entonces  $\Phi(\mathbf{1}_{P+u}) = e^{\langle y, u \rangle} \Phi(\mathbf{1}_P)$  para todos los poliedros que no contienen rectas.

Ahora, si  $P$  es un poliedro que contiene una recta con vector director  $u$ , entonces  $P = P + u$  y debemos tener:

$$\Phi(\mathbf{1}_P) = \Phi(\mathbf{1}_{P+u}) = e^{\langle y, u \rangle} \Phi(\mathbf{1}_P)$$

y entonces necesariamente  $\Phi(\mathbf{1}_P) = 0$ . Y hemos terminado de demostrar el teorema.  $\square$

---

# Capítulo 7

## Cálculo de volúmenes

Sea  $P \subset \mathbb{R}^d$  un politopo. Ya hemos visto que se obtiene el volumen del politopo al evaluar en 0 la función  $\int_P e^{\langle y, x \rangle} dx$ . Hemos visto también que se tiene la fórmula

$$\int_P e^{\langle y, x \rangle} dx = \sum_{v \in \text{Vert}P} e^{\langle y, v \rangle} f_v(y),$$

donde las funciones  $f_v(y)$  son las funciones racionales asociadas a los conos de direcciones factibles en los vértices de  $P$ .

$$f_v(y) = \phi(\text{fcono}(P, v), y) = \int_{\text{fcono}(P, v)} e^{\langle y, x \rangle} dx.$$

Las funciones  $f_v(y)$  no están bien definidas en 0. Son funciones de  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  que se pueden ver también como elementos de  $\mathcal{H}_{(0)}$ , en el capítulo siguiente plantearémos de hecho la evaluación con valores en  $\mathcal{H}_{(0)}$ . Observemos el ejemplo donde el politopo  $P$  es el intervalo  $[0, 1]$ :

$$\int_{[0,1]} e^{yx} dx = e^0 f_0(y) + e^y f_1(y) = \frac{e^y}{y} - \frac{1}{y}.$$

Podemos desarrollar en serie de Taylor como en el ejemplo anterior para obtener que

$$\frac{e^y}{y} - \frac{1}{y} = \frac{1 + y + \frac{y^2}{2!} + \dots}{y} = 1 + \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{3!} + \dots,$$

y se obtiene que el volumen es 1. Sin embargo en este capítulo se va a estudiar una forma distinta de resolver esta situación.

Consideremos un  $y \in \mathbb{R}^d$  que verifique que no es un punto singular de ninguna de las funciones

$f_v(y)$ . Sea  $t$  un parametro real, se considera la integral

$$\int_P e^{\langle ty, x \rangle} dx$$

como una función de  $t$ . Esta integral es una función analítica también de  $t$  y estamos interesados en encontrar su valor en  $t = 0$ .

Por otro lado sabemos por el lema 6.1 cada una de las funciones  $f_v(y)$  es una función racional homogénea de grado  $-d$  y entonces  $e^{\langle ty, x \rangle} f_v(ty)$ , como función de  $t$ , es una función meromorfa, es decir, es cociente de dos funciones analíticas  $f/g$  definidas en un entorno de 0 con  $g \neq 0$ ). El desarrollo de Taylor de  $e^{\langle ty, x \rangle}$  es  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle y, v \rangle^n}{n!} t^n$  y por la forma de las funciones  $f_v(y)$ , se tiene que el desarrollo de Laurent de  $e^{\langle ty, x \rangle} f_v(ty)$  es

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{n-d} \frac{\langle y, v \rangle^n}{n!} f_v(y).$$

Como vamos a evaluar en 0, lo que nos interesa es el término constante en el desarrollo de Laurent, que es:

$$\frac{\langle y, v \rangle^d}{d!} f_v(y).$$

Así se obtiene la fórmula:

$$volP = \sum_{v \in VertP} \frac{\langle y, v \rangle^d}{d!} f_v(y). \tag{7.1}$$

Veamos los ejemplos del intervalo  $[0, 1]$ , del triángulo  $\Delta$  y del cuadrilátero ya tratado en el capítulo anterior.

En el primer caso aplicando la fórmula 7.1 se obtiene:

$$1 = 0 + y \frac{1}{y}.$$

En el segundo caso se obtiene:

$$\frac{1}{2} = 0 + \frac{y_1^2}{2} f_{(1,0)}(y) + \frac{y_2^2}{2} f_{(0,1)}(y) = \frac{y_1^2}{2y_1(y_1 - y_2)} + \frac{y_2^2}{2y_2(y_2 - y_1)}.$$

En los dos casos sucede que se produce una simplificación de la variable  $y$ . Esto tiene sentido pues en el lado izquierdo de la fórmula 7.1 se tiene una constante, independiente de  $y$ , mientras que en el lado izquierdo es una suma de funciones de  $y$ .



Para el caso del cuadrilátero se tiene:

$$6 = 0 + \frac{9y_1^2}{y_1(y_1 - 2y_2)} + \frac{9y_2^2}{y_2(y_2 - 2y_1)} + \frac{6(y_1 + y_2)^2}{(y_1 - 2y_2)(y_2 - 2y_1)}.$$

Esto es, si tenemos una familia  $\{P_\tau\}$  de politopos fuertemente combinatoriamente isomorfos con vértices  $v_1(\tau), \dots, v_n(\tau)$ . Entonces se tiene que la fórmula 7.1 implica que  $\text{vol}P_\tau$  es un polinomio de grado  $d$  en las variables  $v_1(\tau), \dots, v_n(\tau)$ .

Habíamos visto que las funciones  $f_v(y)$  tenían una forma específica en el caso de que el cono de direcciones factibles en  $v$  fuese un cono simplicial. Recordamos que un cono simplicial es aquel que se puede escribir de la forma  $\text{co}(u_1, u_2, \dots, u_d)$  donde los vectores  $\{u_1, u_2, \dots, u_d\}$  forman una base de  $\mathbb{R}^d$ . Entonces si se da que para cada vértice de  $P$ , el cono de direcciones factibles es simplicial, la fórmula anterior se transforma en:

$$\text{vol}P = \sum_{v \in \text{Vert}P} \frac{\langle y, v \rangle^d}{d!} |u_1(v) \wedge u_2(v) \wedge \dots \wedge u_d(v)| \prod_{i=1}^d \frac{1}{\langle -c, u_i(v) \rangle}$$

donde el cono de direcciones factibles en  $v$  se escribe como  $\text{co}(u_1(v), u_2(v), \dots, u_d(v))$ .



---

## Capítulo 8

# Comparaciones y conclusiones

Como se avanzó en la introducción, uno de los objetivos de este trabajo era buscar paralelismos entre la fórmula de Brion para los puntos reticulares de poliedros racionales y el teorema de Brion que se ha presentado en el capítulo 6.

Decimos que un poliedro  $P \subset \mathbb{R}^d$  es racional si se puede definir como:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d : \ell_i(x) \leq \alpha_i \quad \forall i \in I\}$$

donde las  $\ell_i$  son un número finito de formas lineales con coeficientes enteros y los  $\alpha_i$  también son enteros.

Así, vamos a considerar el espacio vectorial  $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^d) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  sobre  $\mathbb{Q}$  generado por las funciones características de los poliedros racionales  $P \subset \mathbb{Q}^d$  cuyos vértices son puntos reticulares de  $\mathbb{Z}^d$ .

Denotaremos  $\mathbb{Q}(x)$  el cuerpo de las funciones racionales en  $d$  variables complejas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  con coeficientes racionales.

En 1991 en [12] J. Lawrence dio la descripción de una evaluación

$$\Psi : \mathcal{P}(\mathbb{Q}^d) \longrightarrow \mathbb{Q}(x)$$

con interesantes propiedades.

**Teorema 8.1** (Teorema de Lawrence). *Existe una evaluación  $\Psi$ , tal que a cada poliedro racional  $P \subset \mathbb{R}^d$  con vértices reticulares le asocia una función racional  $f(P, x)$  en  $d$  variables  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  con coeficientes en  $\mathbb{Q}$  que verifica las siguientes propiedades:*

1. Se verifica

$$f(P, x) = \sum_{m \in P \cap \mathbb{Z}^d} x^m$$

para cada  $x \in \mathbb{C}^d$  tal que la serie converge absolutamente.

Esto es, si la serie que se obtiene al sumar los monomios que tienen como exponente los puntos reticulares encerrados en el poliedro con coeficiente 1 converge absolutamente para algún  $x \in \mathbb{C}^d$ , lo hace hacia la función  $f(P, x)$ .

2. Si  $m + P$  es una traslación de  $P$  por un vector  $m \in \mathbb{Z}^d$ , entonces se tiene que

$$f(P + m, x) = x^m f(P, x).$$

3. Si  $P$  contiene alguna recta, entonces  $f(P, x) \equiv 0$ .

En la introducción se vio ya un ejemplo de esto cuando se calculó el número de puntos enteros en el intervalo  $[1, 5]$ .

Reinterpretando este ejemplo; si consideramos los poliedros  $[1, \infty)$ ,  $(-\infty, 5]$ ,  $[1, 5]$  y  $\mathbb{R}$ . Entonces se tiene la siguiente relación entre sus funciones características:

$$\mathbb{1}_{[1, \infty)} + \mathbb{1}_{(-\infty, 5]} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}} = \mathbb{1}_{[1, 5]}.$$

Aplicando la evaluación  $\Psi$  se obtiene:

$$f([1, \infty), x) + f((-\infty, 5], x) - f(\mathbb{R}, x) = f([1, 5], x)$$

y aplicando los puntos 1 y 3 del teorema se obtiene:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^5}{1-x^{-1}} - 0 = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5.$$

En general, dado  $P$  un poliedro cualquiera, si se aplica la evaluación  $\Psi$  a la relación:

$$\mathbb{1}_P \equiv \sum_{v \in \text{Vert}(P)} \mathbb{1}_{t\text{cono}(P, v)} \quad \text{módulo poliedros que contienen rectas}$$

que obtuvimos en el capítulo 4 en el teorema 4.1, se obtiene que:

$$f(P, x) = \sum_{v \in \text{Vert}(P)} f(t\text{cono}(P, v), \mathbf{x}). \quad (8.1)$$

Esta fórmula es el teorema de Brion para poliedros racionales. Michael Brion, usando geometría algebraica, demostró esta fórmula antes de que J. Lawrence demostrase la existencia de la evaluación  $\Psi$ .

sin embargo, se puede acceder a las funciones racionales de  $\mathbb{Q}(x)$  del teorema sin referirnos a los números complejos ni a la convergencia de series. Para ello denotamos  $SL = \mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_d, x_1^{-1}, \dots, x_d^{-1}]] = \mathbb{Q}[[x, x^{-1}]]$  el espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$  de series de potencias de Laurent en  $d$  variables  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  con coeficientes en  $\mathbb{Q}$ .  $SL$  es también un módulo sobre el anillo de polinomios de Laurent  $PL = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d, x_1^{-1}, \dots, x_d^{-1}] = \mathbb{Q}[x, x^{-1}]$ .

**Definición 8.1** (Series de Laurent racionales). Dada  $s \in SL$ , decimos que  $s$  es una serie de Laurent racional si existen polinomios  $p, q \in \mathbb{Q}[x]$ , con  $q \neq 0$  tales que  $s \cdot q = p$ . Denotaremos el conjunto de series de Laurent racionales por  $RL$ .

Se tiene que  $RL$  es un subespacio vectorial de  $SL$ , y también un  $PL$ -submódulo de  $SL$ .

Observamos que si se tiene que para una serie  $s$  que verifica  $sq = p$ , existen otros polinomios  $p', q' \in \mathbb{Q}[x]$ , con  $q' \neq 0$  tales que  $s \cdot q' = p'$ , entonces necesariamente se tiene que  $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ . De modo que podemos definir la función:

$$\mathcal{F} : RL \longrightarrow \mathbb{Q}(x) \tag{8.2}$$

que a cada serie de Laurent racional le asocia una función racional. La función  $\mathcal{F}$  es un homomorfismo de  $PL$ -módulos.

Por ejemplo si se toma la serie  $s = x + x^2 + x^3 + \dots$ , se tiene la relación

$$(x + x^2 + x^3 + \dots)(1 - x) = x$$

de modo que  $\mathcal{F}(s) = \frac{x}{1-x}$ . Si tomamos la serie  $s' = \dots + x^{-2} + x^{-1} + 1 + x + x^2 + \dots$ , se tiene que  $\mathcal{F}(s') = 0$  ya que  $(1 - x)(\dots + x^{-2} + x^{-1} + 1 + x + x^2 + \dots) = 0$ .

Entonces, en vez de considerar directamente la aplicación  $\Psi$  del teorema, podemos obviar el teorema y definir  $\Psi$  a través de la descomposición:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{Q}^d) & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{Q}(x) \\ & \searrow \varepsilon & \nearrow \mathcal{F} \\ & & RL \end{array} \tag{8.3}$$

donde  $\mathcal{E}$  es la evaluación con llegada en  $RL$  el espacio vectorial de las series de Laurent con coeficientes racionales dada por:

$$\mathcal{E}(P) = \sum_{m \in \mathbb{Z} \cap P} x^m.$$

Una de las preguntas que surgieron durante la elaboración del trabajo fue la de si existía una descomposición similar para la evaluación  $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{H}_{(0)}$  del capítulo 6.

Es decir, ¿existe un espacio (digamos  $RM$ ), una evaluación  $\mathcal{E}'$  y una aplicación  $\mathcal{F}'$  de forma análoga al caso anterior?

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}_{(0)} \\
 \searrow \mathcal{E}' & & \nearrow \mathcal{F}' \\
 & & RM
 \end{array} \tag{8.4}$$

¿Cuáles de las propiedades del caso anterior se conservarían?

Para dar respuesta a esta pregunta es importante tener en cuenta la siguiente observación.

*Observación 8.1.* Sea  $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ . Fijémonos en la integral  $\int_K e^{(x,y)} dx$ .

$$\int_K e^{(x,y)} dx = \int_{x_2 \geq 0} \int_{x_1 \geq 0} e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} dx_1 dx_2 = \frac{1}{(-y_1)(-y_2)} = f(y_1, y_2) \quad \text{para } (y_1, y_2) \in \text{int}K^o.$$

Siendo  $K^o = \{(y_1, y_2) : y_1 < 0, y_2 < 0\}$  Interpretamos esto como que la función  $f(y_1, y_2)$  “está cerca” de ser una función entera, sin embargo, solo está definida en  $\text{int}K^o$ .

En la demostración del teorema del capítulo 6 ya se había considerado el  $\mathbb{R}(y)$ -módulo  $\mathcal{H}_{(0)}$ ,

$$f \in \mathcal{H}_{(0)} = \left\{ \frac{h}{q} : h \text{ es una función entera, } q \in \mathbb{R}[y] \setminus \{0\} \right\}$$

en nuestro caso, si multiplicamos la función  $f$  por el polinomio  $q(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2$  obtenemos

$$y_1 \cdot y_2 \cdot f(y_1, y_2) = \int_{x_2 \geq 0} \int_{x_1 \geq 0} y_1 \cdot y_2 \cdot e^{x_1 y_1 + x_2 y_2} dx_1 dx_2 = 1$$

es decir,  $f$  es una función tal que al ser multiplicada por un polinomio  $q(y)$  se extiende a una función entera  $h(y) = 1$ . Según hemos visto en el capítulo 6, lo mismo sucede para todo poliedro  $P$  que no contiene rectas. Para dichos poliedros, la integral exponencial  $f$  está definida en el abierto  $\text{int}P^o$  que es no vacío, y existe un polinomio  $q \neq 0$  tal que  $f \cdot q$  se extiende a una función entera.

Teniendo esta observación en mente, vamos a proceder a definir el espacio  $RM$ , al que llamaremos espacio de funciones *racionales meromorfas*.

Dado un polinomio  $q \in \mathbb{R}[y] \setminus \{0\}$ , se define

$$D(q) = \{x \in \mathbb{R}^d : q(x) \neq 0\}.$$

Así nos interesaremos en los pares  $(D(q), f)$  donde  $f : D(q) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función analítica. En este conjunto de pares definimos la relación  $\sim$  dada por:

$$(D(q), f) \sim (D(q'), f') \iff f|_{D(q) \cap D(q')} = f'|_{D(q) \cap D(q')}.$$

Entonces se define el espacio  $RM$  como el conjunto de los pares  $(D(q), f)$  que verifican que  $q \cdot f$  se prolonga a una función entera cocientado por la relación de equivalencia  $\sim$ .

Una propiedad fundamental para poder definir este espacio es la siguiente: si  $(D(q), f) \sim (D(q'), f')$ ,  $q \cdot f$  se prolonga a la función analítica  $h$  y  $q' \cdot f'$  se prolonga a la función analítica  $h'$  entonces por el principio de prolongación analítica se tiene que  $h = h'$  ya que  $h$  y  $h'$  coinciden en el abierto no vacío  $D(q \cdot q')$  de  $\mathbb{R}^d$ .

*Observación 8.2.* A veces nos referiremos al par  $(D(q), f)$  simplemente por  $f$ . El espacio  $\mathbb{R}(y)$  de funciones racionales está contenido en  $RM$ , y con las operaciones usuales de suma y producto sobre las funciones  $f$ , se tiene que  $RM$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}(y)$  y, en particular, también es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

Entonces podemos definir una evaluación

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow RM$$

componiendo la evaluación  $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  dada por el teorema 6.1 con la inclusión  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow RM$ .

Por otro lado, consideramos la aplicación

$$RM \rightarrow \mathcal{H}_{(0)}$$

que al par  $(D(q), f) \in RM$  tal que  $q \cdot f$  se prolonga a la función entera  $h$ , le asocia la función  $\frac{h}{q} \in \mathcal{H}_{(0)}$ . Esta función es la análoga a  $\mathcal{F}$  para el caso reticular. Se trata de una función  $\mathbb{R}(y)$ -lineal que además es un isomorfismo, a diferencia de  $\mathcal{F}$  que no era inyectiva. Así hemos contruido el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}_{(0)} \\ & \searrow & \nearrow \\ & RM & \end{array} \quad . \tag{8.5}$$

donde el espacio  $RM$  dentro del espacio de las funciones meromorfas tiene un papel análogo al que tenían las series de Laurent racionales  $RL$  dentro del espacio  $SL$  de series de Laurent. Dicho espacio de funcinos meromorfas es un cuerpo extensión del cuerpo  $\mathbb{R}(y)$  y  $\mathbb{R}(y)$  es un subespacio vectorial de él.

Este diagrama, análogo al caso reticular, nos proporciona un nuevo planteamiento de la

evaluación  $\Phi$ .

Otra conclusión importante que podremos demostrar a través de una prueba constructiva y explícita es el siguiente resultado:

**Teorema 8.2.** *Sea  $P \subset V$  un poliedro. Si  $P$  es acotado, entonces  $\Phi(\mathbb{1}_P)$  es una función entera.*

Vamos a definir algunos objetos que nos harán falta para demostrar el teorema enunciado.

Sea  $\mathbb{R}[y] = \mathbb{R}[y_1, \dots, y_d]$  el anillo de polinomios con coeficientes reales en las  $d$  variables  $y_1, y_2, \dots, y_d$ . Sea  $M$  un módulo sobre  $\mathbb{R}[y]$ .

**Definición 8.2.** Se define el *localizado de  $M$  sobre el anillo  $\mathbb{R}[y]$*  como el conjunto:

$$M_{(0)} = \left\{ \frac{m}{q} : m \in M, q \in \mathbb{R}[y] \setminus \{0\} \right\}$$

identificando a los elementos  $\frac{m}{q} = \frac{m'}{q'}$  si  $m \cdot q' = m' \cdot q$ .

Con las operaciones de fracciones usuales, el localizado  $M_{(0)}$  es un  $\mathbb{R}[y]_{(0)} = \mathbb{R}(y)$  módulo, y por tanto,  $M_{(0)}$  es un  $\mathbb{R}(y)$  espacio vectorial.

También con las operaciones naturales, cada homomorfismo de módulos  $M \rightarrow M'$  sobre  $\mathbb{R}[y]$  induce un homomorfismo de  $\mathbb{R}(y)$ -espacios vectoriales localizados  $M_{(0)} \rightarrow M'_{(0)}$ . Es fácil comprobar que si el homomorfismo  $M \rightarrow M'$  es inyectivo, entonces el homomorfismo inducido  $M_{(0)} \rightarrow M'_{(0)}$  también lo es.

Ya se ha estudiado el papel del ejemplo  $\mathcal{H}_{(0)}$ , en el que  $\mathcal{H}$  es el  $\mathbb{R}[y]$ -módulo de las funciones enteras.

Denotaremos  $SP = \mathbb{R}[[y]]$  el  $\mathbb{R}$ -álgebra de las series de potencias con coeficientes en  $\mathbb{R}$  en  $d$  variables y  $SC \subset SP$  el  $\mathbb{R}$ -álgebra de las series de potencias que convergen en un entorno del origen.

Como los polinomios son también series de potencias convergentes se tiene que  $SC$  y  $SP$  son  $\mathbb{R}$ -módulos. Consideramos la siguiente cadena de homomorfismos inyectivos de  $\mathbb{R}[y]$ ,

$$\mathbb{R}[y] \hookrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow SC \hookrightarrow SP \tag{8.6}$$

donde el primer y el tercer homomorfismo son inclusiones y el segundo es la aplicación que envía cada función entera  $h$  en su desarrollo de Taylor  $\mathcal{T}_h$  en el origen (se trata de una serie de potencias convergente en todo  $\mathbb{R}^n$ ). Localizando esta cadena de homomorfismos, se obtiene la cadena:

$$\mathbb{R}(y) \hookrightarrow \mathcal{H}_{(0)} \longrightarrow SC_{(0)} \hookrightarrow SP_{(0)}. \tag{8.7}$$



Esta segunda cadena nos permite identificar los elementos de uno de estos módulos con sus imágenes en los siguientes de la cadena. Esta identificación es la que se ha hecho en los ejemplos de cálculo de volúmenes del capítulo 6 cuando se ha tomado el desarrollo de Taylor del numerador de las funciones  $\Phi(\mathbb{1}_{t\text{cono}(P,v)})$ .

Algo que nos va a interesar más adelante es tener una caracterización de los elementos de  $SC$  que son imagen del segundo homomorfismo de la primera cadena. Esto es, nos gustaría caracterizar las series de potencias que son el desarrollo de Taylor en el origen de una cierta función entera.

Para el caso en una variable tenemos el la fórmula de Cauchy-Hadamard ([8]) para el radio de convergencia  $\rho$  de una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , con coeficientes reales o complejos, dada por:

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}.$$

Es decir, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  es el desarrollo de Taylor de una función entera si y solo si el radio de convergencia es infinito. Es decir si y solo si  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0$ .

Para el caso en  $d$  variables se tiene el siguiente lema ([11]).

**Lema 8.1.** *La serie de potencias  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} z^{\alpha}$  es absolutamente convergente para todo  $z \in \mathbb{R}^n$  (o  $\mathbb{C}^d$ ) si y solo si*

$$\rho^{-1} := \limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{|\alpha|=k} |a_{\alpha}| \right)^{1/k} = 0$$

*Demostración.* Supongamos primero que el límite superior es igual a 0 y tratemos de demostrar la convergencia absoluta en el interior de todo políintervalo de radio  $< \rho$ , es decir, para el conjunto  $\{z : \|z\|_{\infty} < \rho\}$  donde  $\|z\|_{\infty} = \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_d|\}$ , para el que se tiene

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} |a_{\alpha} z^{\alpha}| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \sum_{|\alpha|=k} |a_{\alpha}| \right) \|z\|_{\infty}^k \tag{8.8}$$

Tomamos  $\rho_1$  y  $\rho_2$  tales que  $\|z\|_{\infty} < \rho_1 < \rho_2 < \rho$ . Entonces como  $\|z\|_{\infty}^k < \rho_1^k$  y como, por las propiedades del límite superior, solo una cantidad finita de términos de la forma  $(\sum_{|\alpha|=k} |a_{\alpha}|)^{1/k}$  son mayores que  $\rho_2^{-1}$ , y por tanto se tiene que en la serie 8.8 todos, salvo una cantidad finita de términos, son menores que  $(\frac{\rho_1}{\rho_2})^k$ . Como  $\frac{\rho_1}{\rho_2} < 1$  la serie  $\sum (\frac{\rho_1}{\rho_2})^k$  converge se deduce de 8.8 que la serie  $\sum_{\alpha_i \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha} z^{\alpha}$  converge absolutamente.

Para demostrar la otra implicación supongamos que existe un  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  tal que la serie  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} w^{\alpha}$  converge absolutamente siendo  $w_i \geq \rho$  para todo  $i = 1, 2, \dots, d$ . Veamos que entonces se verifica que  $\limsup_{k \rightarrow \infty} (\sum_{|\alpha|=k} |a_{\alpha}|)^{1/k} \leq \rho^{-1}$ .

Por la condición necesaria para la convergencia se tiene que  $|a_\alpha|w^\alpha \rightarrow 0$  para  $|\alpha| \rightarrow \infty$ . Así,

$$|a_\alpha w^\alpha| \geq |a_\alpha| \cdot \rho^{|\alpha|} \Rightarrow |a_\alpha| \cdot \rho^{|\alpha|} \rightarrow 0.$$

De modo que dado  $\epsilon > 0$ , para  $|\alpha|$  lo suficientemente grande se tiene que  $|a_\alpha| < \epsilon \cdot \rho^{-|\alpha|}$ .

Por combinatoria sabemos que existen  $\binom{d+k-1}{d-1}$  elementos  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  tales que  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d = k$ . Entonces tenemos

$$\sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| \leq \binom{d+k-1}{d-1} \cdot \epsilon \cdot \rho^{-k}.$$

Si observamos el número  $\binom{d+k-1}{d-1}$  como un polinomio en la variable  $k$ , se tiene que es de grado  $d-1$ . De modo que se puede deducir

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| \right)^{1/k} \leq \rho^{-1}$$

como queríamos ya que se tiene que  $\left( \binom{d+k-1}{d-1} \cdot \epsilon \right)^{1/k} \rightarrow 1$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Por hipótesis, esto sucede para todo  $\rho > 0$  y si  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| \right) = 0$  como queríamos.  $\square$

Se introduce otro lema que nos será de utilidad para probar el teorema.

**Lema 8.2.** *Sea  $P \subset V$  un politopo, entonces  $0 \in \text{int}P^\circ$ .*

*Demostración.* Recordamos que si  $P$  es un politopo, con conjunto de vértices  $\text{Vert}P$ , entonces se tiene que

$$P^\circ = \{x \in V : \langle x, v \rangle \leq 1 \ \forall v \in \text{Vert}P\}.$$

Como  $\langle 0, v \rangle = 0$  y hay una cantidad finita de vértices, entonces por continuidad se tiene que  $\langle x, v \rangle \leq 1$  en un entorno de 0.  $\square$

Recordamos la fórmula de Brion que se presentaba en el capítulo 6 para un poliedro  $P$ :

$$\Phi(\mathbb{1}_P) = \sum_{v \in \text{Vert}P} e^{\langle y, v \rangle} f_v(y) = \sum_{v \in \text{Vert}P} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle y, v \rangle^n}{n!} \right) f_v(y) \quad (8.9)$$

para los  $y$  en  $\text{int}P^\circ$ . Donde las funciones  $f_v(y)$  son funciones racionales, suma de cocientes de una constante entre un polinomio homogéneo de grado  $d$ , que además es producto de  $d$  formas lineales.

Así, aplicando el lema 8.2, se tiene que  $\Phi(\mathbb{1}_P)$  está definida y es analítica en un entorno de 0. Por lo tanto,  $\Phi(\mathbb{1}_P)$  tiene un desarrollo de Taylor  $\mathcal{T}_P$  en 0. Visto así, la fórmula 8,9 nos proporciona una igualdad en el módulo localizado  $SP_{(0)}$  del módulo de series de potencias  $SP$  en el conjunto  $\mathbb{R}[y] \setminus \{0\}$ .

Aquí se observa un paralelismo con el caso de la fórmula de Brion para el número de puntos reticulares. En el caso de la fórmula de Brion reticular se tiene una suma de funciones racionales que curiosamente se simplifica en un polinomio, pues desaparece el denominador. En este caso, se tiene una suma de elementos de  $SP_{(0)}$  que se simplifica en una serie de potencias de  $SP$ , es decir, vuelve a desaparecer el denominador. En otras palabras, en ambos casos se tiene una suma de elementos del anillo localizado, que se simplifica en un elemento del anillo original.

Vamos ahora con la demostración del teorema.

Consideramos  $m(y)$  el mínimo común múltiplo de los denominadores de todas las funciones  $f_v(y)$ . Entonces  $m(y)$  es producto de formas lineales distintas.

Entonces en 8,9 podemos escribir  $\Phi(\mathbb{1}_P) = \frac{h(y)}{m(y)}$  donde  $h(y)$  es una función entera por ser suma de productos de funciones exponenciales y polinomiales. Así, multiplicando por  $m(y)$  y considerando los desarrollos de Taylor, se tiene en  $SP$  la igualdad:

$$m(y)\mathcal{T}_P(y) = \mathcal{T}_h(y) \tag{8.10}$$

donde  $\mathcal{T}_h(y)$  es el desarrollo de Taylor en el origen de la función entera  $h(y)$ .

Si consideramos  $e$  el grado del polinomio homogéneo  $m(y)$  entonces la fórmula 8.10 implica que:

- los términos de grado  $< e$  del desarrollo de Taylor de  $h$  se anulan
- el término de grado  $e$  es exactamente  $vol(P)/m(y)$
- los términos de grado  $> e$  son todos múltiplos del polinomio  $m(y)$

igual que sucedió en los ejemplos del capítulo 6.

Por lo tanto, volviendo a dividir la ecuación 8.10 entre  $m(y)$  se obtiene:

$$\mathcal{T}_P(y) = \frac{h(y)}{m(y)} = vol(P) + \sum_{n>e} \frac{\text{término de grado } n \text{ de } \mathcal{T}_h}{m(y)}$$

que es una expresión del desarrollo de Taylor de  $T_P(y)$  en el origen.

Por ejemplo, para el triángulo que vimos en el capítulo 6 esta expresión era:

$$\mathcal{T}_P(y_1, y_2) = \frac{1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{3!} + \frac{(y_1 + y_2)^2}{4!} + \dots$$

A priori, solo sabemos que para un politopo  $P$ ,  $\Phi(\mathbb{1}_P)$  es una función analítica en  $intP^o$ .

Sin embargo, el lema 8.1 nos permite deducir que si  $h$  es una función entera en  $d$  variables, tal que todos los monomios de su desarrollo de Taylor  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha y^\alpha$  en el origen son múltiplos de la variable  $y_1$  entonces  $h/y_1$  está bien definida y es también una función entera.

En efecto, si denotamos  $b_k = \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|$ , entonces si  $h$  es entera se tiene que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} b_k^{1/k} = 0.$$

Para poder aplicar el criterio a la función  $h/y_1$  necesito que  $\limsup_{k \rightarrow \infty} b_{k+1}^{1/k} = 0$  pues  $b_{k+1}$  es la suma de los módulos de los coeficientes de los términos de grado  $k$  del desarrollo de Taylor de la función  $h/y_1$ . Como  $b_k \geq 0$ , aplicando logaritmos se tiene que:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} b_k^{1/k} = 0 \Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k^{\frac{1}{k-1}} = 0.$$

Como ya hemos sabemos que los factores de  $m(y)$  son formas lineales, podemos considerar una a una sucesivamente esas funciones lineales y en cada etapa, realizar cambios de variable lineales que transformen las variables  $y_i$  en dichas formas y, aplicando sucesivamente el razonamiento que acabamos de hacer, se concluye que  $\mathcal{T}_P$  es el desarrollo de Taylor de una función entera, como queríamos demostrar.

*Observación 8.3.* Este resultado sobre el carácter analítico de  $\Phi_P(y)$  para el caso de un politopo  $P$  no es sorprendente pues, al ser  $P$  acotado, la integral exponencial  $\int_P e^{\langle y, x \rangle} dx$  está definida para todo  $y \in \mathbb{R}^d$  y no solo para  $\text{int}P^\circ$ . Sin embargo, esta demostración es interesante pues está basada en el cálculo algebraico y en la fórmula de Brion y nos da una expresión más explícita sobre el desarrollo de Taylor  $\mathcal{T}_P(y)$ .

Para finalizar este capítulo de comparaciones y conclusiones, y como análogo al cálculo para el número de puntos reticulares realizado en la introducción, se presenta el cálculo del volumen del intervalo  $[1, 5]$  a partir de la fórmula de Brion.

$$\begin{aligned} \Phi_{[1,5]}(y) &= \Phi_{\text{tcono}([1,5],1)}(y) + \Phi_{\text{tcono}([1,5],5)}(y) \\ &= \int_1^\infty e^{y \cdot x} dx + \int_{-\infty}^5 e^{y \cdot x} dx \\ &= \frac{e^{5y} - e^y}{y} = 4(1 + 12y + \dots). \end{aligned} \tag{8.11}$$

Así hemos obtenido  $\Phi_{[1,5]}(y)$ , la función “volumen generalizado” del intervalo  $[1, 5]$  y, evaluando en  $y = 0$ ,

$$\Phi_{[1,5]}(0) = 4$$

se obtiene el volumen usual del intervalo.



---

# Bibliografía

- [1] A. Barvinok. *Integer Points in Polyhedra*. Contemporary mathematics. European Mathematical Society, 2008. ISBN 9783037190524. URL <https://books.google.com.mx/books?id=RDUQoR2MI9YC>.
- [2] Alexander Barvinok. The complexity of generating functions for integer points in polyhedra and beyond. En *International Congress of Mathematicians*, tomo 3, págs. 763–787. Citeseer, 2006.
- [3] Alexander Barvinok y James E Pommersheim. An algorithmic theory of lattice points in polyhedra. *New perspectives in algebraic combinatorics*, 38:91–147, 1999.
- [4] Alexander I Barvinok. Computing the volume, counting integral points, and exponential sums. *Discrete & Computational Geometry*, 10(2):123–141, 1993.
- [5] Alexander I Barvinok. A polynomial time algorithm for counting integral points in polyhedra when the dimension is fixed. *Mathematics of Operations Research*, 19(4):769–779, 1994.
- [6] Matthias Beck, Christian Haase, y Frank Sottile. Formulas of brion, lawrence, and varchenko on rational generating functions for cones. *Math. Intelligencer*, 31(1):9–17, 2009.
- [7] Michel Brion. Points entiers dans les polyedres convexes. En *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, tomo 21, págs. 653–663. 1988.
- [8] Félix Galindo Soto, Luis Alberto Tristán Vega, Javier Sanz Gil, Javier Gómez Pérez, Alberto Lastra Sedano, Jesús Javier Jiménez Garrido, et al. Guía teórico-práctica de variable compleja para estudios de grado. 2015.
- [9] Branko Grünbaum, Victor Klee, Micha A Perles, y Geoffrey Colin Shephard. *Convex polytopes*, tomo 16. Springer, 1967.
- [10] Hugo Hadwiger. Eulers charakteristik und kombinatorische geometrie. 1955.
- [11] Johannes Hahn ([https://math.stackexchange.com/users/62443/johannes\\_hahn](https://math.stackexchange.com/users/62443/johannes_hahn)). When does a multivariate power series define an entire function? Mathe-

maths Stack Exchange. URL <https://math.stackexchange.com/q/2650950>.  
URL:<https://math.stackexchange.com/q/2650950> (version: 2018-02-19).

- [12] Jim Lawrence. Rational-function-valued valuations on polyhedra. *Discrete and computational geometry (New Brunswick, NJ, 1989/1990)*, 6:199–208, 1991.
- [13] Andrea Prieto García et al. Fórmulas de brion y lawrence-varchenko. 2017.