Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Dependencia entera. El teorema de Rees

Autor: Diego Miguel de Celestino

Tutor/es: Santiago Encinas Carrión

Índice

1. Introducción

La dependencia entera es un concepto habitual en el álgebra conmutativa que extiende el concepto de elemento algebraico sobre un cuerpo a anillos. Un elemento entero es aquel que es anulado por un polinomio mónico con coeficientes en el anillo. El concepto de dependencia entera está íntimamente ligado con los conceptos de multiplicidad, valoraciones, función de Hilbert y las álgebras de Rees, entre otros temas. La dependencia entera se utiliza también en otras áreas como la geometría algebraica o la teoría de números.

La clausura entera de un anillo, o de un ideal, será el conjunto de elementos enteros sobre el anillo, respectivamiente el ideal.

Se puede comprender la clausura entera de un ideal de varias formas. De manera intuitiva, es un ideal que contiene al original pero que 'crece' de manera parecida. Donde entendemos el crecimiento de un ideal I de un anillo R como el crecimiento de las longitudes de R/I^n, cuando $n \in \mathbb{N}$. Estas longitudes son las que definen la función de Hilbert-Samuel, como veremos en la sección 5. También la clausura entera de un ideal se puede calcular utilizando valoraciones. Estas caracterizaciones son equivalentes y la más sencilla es la de dependencia entera que usaremos en este trabajo.

El objetivo del trabajo es definir la clausura entera de anillos e ideales, explicar sus propiedades, tratar las valoraciones (y su relación con la clausura entera), las álgebras de Rees y demostrar el teorema de Rees. Para ello vamos a seguir principalmente [HS06], empezando en el capítulo 3 con las clausuras enteras de anillos en extensiones de los mismos. Además de la definición, hablamos de los teoremas del ascenso y del descenso que son en sí mismos una aplicación de la clausura entera y unas fuertes herramientas que se usarán implícitamente a partir de entonces. Estudiaremos también la clausura entera en anillos graduados.

En el capítulo 4, hablamos de la clausura entera de un ideal en su anillo y además de la definición y propiedades hablamos de la importante relación que hay entre la clausura y las reducciones, de cómo se comporta la clausura entera de un ideal monomial en un anillo de polinomios (que será de hecho otro ideal monomial) y de algunos resultados más que será de utilidad posteriormente. Para estos dos capítulos también usamos resultados de [AM69], [Mat70] y [Mat89].

El capítulo 5 trata las valoraciones, un concepto importante del álgebra conmutativa, que será de utilidad para calcular la clausura entera de un ideal. Además de las propiedades básicas, se tiene que los anillos de valoración son íntegramente cerrados y que si R es un anillo e I un ideal de R, la clausura de I son los elementos de R que están en la imagen de I en cada valoración contenida entre R y su cuerpo de fracciones.

Para el capítulo 6 se estudian las álgebras de Rees, que son extensiones del anillo que permiten calcular las clausuras enteras de las potencias del ideal y que además serán útiles en la demostración del teorema de Rees.

El capítulo 7 trata los elementos superficiales, concepto técnico que se utilizará para demostraciones importantes de los siguientes capítulos.

El capítulo 8 demuestra que la función de Hilbert es un polinomio para potencias grandes del ideal y con ello define la multiplicidad de un ideal sobre un módulo. También hemos usado [HIO88] en esta sección. Finalmente el último capítulo se centra en la demostración del teorema de Rees, que concluye que, bajo ciertas condiciones, dos ideales tienen la misma multiplicidad si y solo si tienen la misma clausura entera.

Otras referencias utilizadas a lo largo de este trabajo han sido [Sta18] y [Vas05].

2. Conceptos previos

Definición 2.1. *Sea R un anillo, una R-álgebra o álgebra sobre R es un R-módulo (S,·) con una operación asociativa y R-bilineal.*

Definición 2.2. *Sea R un anillo, $W \subseteq R$ el conjunto de todos los elementos de R que no son divisores de cero. Al anillo K(R)=$W^{-1}R$ se le llama anillo total de fracciones. Si R es un dominio, K(R) es un cuerpo y se denomina cuerpo de fracciones de R. Para todo P primo de R, se denota por $\kappa(P)$ al cuerpo de fracciones de R/P (que es un dominio).*

Definición 2.3. *Sea R un anillo. Un primo P se dice que es minimal si el único ideal primo que contiene es él mismo.*

Teorema 2.4. *(Teorema chino del resto) Sea R un anillo.*

1. *Si $I_1, I_2, ..., I_r$ son ideales tal que $I_i + I_j = R$ si $i \neq j$. Entonces $I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_r = I_1 I_2 ... I_r$ y $R/(I_1 I_2 ... I_r) \cong R/I_1 \times R/I_2 \times \cdots \times R/I_r$.*

2. *Si $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, ..., \mathfrak{m}_r$ son ideales maximales distintos entonces $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = R$ si $i \neq j$ (y se tiene (1)).*

Los siguientes lemas son variantes del lema de evitación de primos. Se incluye demostración del primero.

Lema 2.5. *Sea R un anillo noetheriano $\mathbb{N}$-graduado. Sean $P_1, P_2, ..., P_s$ ideales primos homogéneos en R. Si I es un ideal homogéneo generado por elementos de grado positivo y no contenido en ningún P_i, entonces existe un elemento homogéneo $x \in I$ de grado positivo y tal que $x \notin P_i$ para todo i.*

Demostración. Si r = 1, existe un $x \in I \setminus P_1$. Como I es homogéneo, todas las componentes homogéneas de x (que son de grado positivo) están en I pero no todas pueden estar en P_1 ya que $x \notin P_1$. Luego el resultado es cierto.
Se supone entonces que el resultado es cierto para r - 1. Si hubiera alguna inclusión entre los P_i se iría al caso r - 1, así que se puede suponer que no las hay. Por la hipótesis de inducción existe un $x \in I$ homogéneo de grado positivo tal que $x \notin P_i$ para $i = 1, 2, ..., r-1$. Si $x \notin P_r$ se tendría el lema. Se supone entonces $x \in P_r$. Como $I \nsubseteq P_r$, $IP_1P_2...P_{r-1} \nsubseteq P_r$, así que sea $y \in IP_1P_2...P_{r-1} \setminus P_r$ que al igual que antes se puede suponer homogéneo de grado m. Entonces $y^n + x^m$ cumple los requerimientos del lema. □

Lema 2.6. *Sea R un anillo, sea $P_1, P_2, ..., P_r$ ideales primos de R. Si $I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_r$ entonces $I \subseteq P_i$ para algún i.*

Lema 2.7. *Sea R un anillo noetheriano $\mathbb{N}$-graduado tal que R_0 tiene cuerpos residuales infinitos. Sean $P_1, P_2, ..., P_s, I$ ideales homogéneos de R, con I generado por elementos de grado n con $I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_s$. Entonces $I_n \subseteq P_i$ para algún $i \in \{1, 2, ..., s\}$.*

Definición 2.8. *Sea R un anillo y M un R-módulo. Un ideal primo P de R se dice que es un primo asociado de M si $P = Ann_R(m)$ para algún $m \in M$ distinto de 0. Los primos asociados de M minimales para la inclusión se denominan primos aislados y el resto de primo asociados se denominan primos inmersos.*

Definición 2.9. *Un módulo M es fiel sobre R si Ann(M)=$\{r \in R \mid rM = 0\} = (0)$.*

Definición 2.10. *Sea $R \subseteq S$ una extensión de dominios. Se dice que un elemento $s \in S$ es trascendente sobre R si s no anula ningún polinomio con coeficientes en R distinto de 0 (y es algebraico si anula algún polinomio distinto de 0). Se dice que $s_1, s_2, ..., s_n \in S$ son algebraicamente independientes sobre R si no anulan f($\underline{X}$), donde f es un polinomio en n variables con coeficientes en R y distinto de 0. Sea $\{s_i\}_{i \in I}$ un subconjunto de S, se dice que es una base de trascendencia sobre R si todo elemento de S es algebraico sobre $\kappa R[s_i]_{i \in I}$.*

Es conocido que las bases de trascendencia existen y tienen el mismo cardinal. De esta forma si es $R \subseteq S$ una extensión de dominios, se define el grado de trascendencia de S sobre R y se denota por $trdeg_R S$ al cardinal de las bases de trascendencia de S sobre R.

Definición 2.11. *Un anillo R es reducido si no tiene elementos nilpotentes distintos de 0. Para un anillo en general, se define el anillo reducido asociado a R como $R_{red} = R/N$ donde $N = \sqrt{(0)}$ es el conjunto de nilpotentes (el nilradical), por lo que R_{red} es un anillo reducido.*

Definición 2.12. *Sea R un anillo y M un R-módulo. Decimos que M es una plano sobre R si al tensorizar cualquier sucesión exacta de R-módulos por M también se tiene una sucesión exacta. Decimos también que M es fielmente plano si cualquier sucesión de R-módulos es exacta si y solo si al tensorizarla por M es exacta.*

Ejemplo 2.13. *Si $R = R_1 \times R_2$, entonces R_1 es un R-módulo plano, pero no fielmente plano. Por otro lado, $R[x_1, x_2, ..., x_n]$ sí que es fielmente plano.*

Definición 2.14. *Sea R un anillo e I un ideal del anillo. Se considera $R'_I = R/I \times I/I^2 \times I^2/I^3 \times ...$ y se define el completado I-ádico de R como el conjunto de los elementos a = $(a_0, a_1, a_2, ...)$ de R'_I que cumplen que para todo a_i, su imagen en I^j/I^{j+1} es a_j para todo $j \leq i$. Este conjunto se denota por $\hat{R}_I$ y si (R,$\mathfrak{m}$) es un anillo local se dice que es completo si R = $\hat{R}_{\mathfrak{m}}$.*

El completado I-ádico de un anillo (R,$\mathfrak{m}$) local y noetheriano es una extensión fielmente plana y en particular lo es $\hat{R}$.

Definición 2.15. *Un anillo local noetheriano R es equidimensional si para cada P primo minimal de R, dim R/P = dim R.*

Definición 2.16. *Un anillo noetheriano* R *es formalmente equidimensional si para cada* Q *ideal primo de* R *se tiene que* $\widehat{R_Q}$*, el completado de la localización en* Q *de* R*, es equidimensional.*

3. Extensiones enteras de anillos

3.1. Elementos enteros sobre un anillo

Empezamos dando algunas nociones básicas de clausura entera de anillos.

Definición 3.1. *Sea R un anillo y S un R-álgebra, se dice que $s \in S$ es* ***entero sobre R*** *si $\exists\, n \in \mathbb{N},\ a_i \in R,\ i = 1, .., n$ tal que*

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Esta ecuación se denomina ecuación de dependencia entera de s sobre R (de grado n). Decimos que S es entero sobre R si para todo $s \in S$, s es entero sobre R.

Definición 3.2. *Sea $R \subseteq S$ una extensión de anillos. El conjunto de elementos de S enteros en R se denomina clasura entera de R en S. Si S es el anillo total de fracciones de R, se denomina la clausura entera de R. Si R es igual a su clausura entera, se dice que es íntegramente cerrado.*

El concepto de clausura entera también se define para ideales aunque los coeficientes de la ecuación de dependencia entera deberán estar en potencias del ideal. Ese concepto se usará a partir del capítulo 4, para el resto de este capítulo usaremos la conocida como clausura débil y diremos que un elemento de S es entero sobre un ideal $I \subseteq R$ si existe una ecuación de dependencia entera con coeficientes en I.

Proposición 3.3. *Un dominio de factorización única es íntegramente cerrado.*

Demostración. Sean a y b $\in$ R con $\frac{a}{b}$ en el cuerpo de fracciones de R, entero sobre R y supongamos además que no tienen factores en común que no sean unidades. Multiplicando por b^n una ecuación de dependencia entera de grado n se tiene que $a^n \in$ (b), pero como es un dominio de factorización única se tiene que b debe ser una unidad y $\frac{a}{b} \in R$. □

Ejemplo 3.4. *Si R = $\mathbb{Z}$, su cuerpo de fracciones de $\mathbb{Q}$ y como $\mathbb{Z}$ es un dominio de factorización única, es íntegramente cerrado en $\mathbb{Q}$.*

Lema 3.5. *Sean $R \subseteq S$, con S entero sobre R. Sea $Q \in \{P \subseteq S\,|P$ es un ideal primo$\}$. Q es maximal sí y solo sí $Q \cap R$ es maximal en R. Si R y S son dominios de integridad, R es cuerpo sí y solo sí S es cuerpo.*

Demostración. Si Q es primo en S, se tiene que Q $\cap$ R es primo en R, y por lo tanto, se tiene que R/(Q $\cap$ R) $\subseteq$ S/Q son dominios de integridad así que si se prueba la última afirmación del lema se tiene que R/(Q $\cap$ R) es cuerpo sí y solo sí lo es S/Q, así que se tiene que (Q $\cap$ R) es maximal en R sí y solo sí Q lo es en S. Para probar la última afirmación del lema, si R es cuerpo y s $\in$ S, se tiene una ecuación de dependencia entera:

$$s^n + r_1 s^{n-1} + r_2 s^{n-2} + ... + r_{n-1} s + r_n = 0$$

$$(s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + r_2 s^{n-3} + ... + r_{n-1})s = -r_n$$

$$\frac{-1}{r_n}(s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + r_2 s^{n-3} + ... + r_{n-1})s = 1$$

Luego $s^{-1} \in S$, ya que $\frac{-1}{r_n} \in R$ por ser R un cuerpo.
Ahora, si S es cuerpo y r $\in$ R, sea s = r^{-1} $\in$ S, con s entero sobre R tenemos la siguiente ecuación de dependencia entera:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + ... + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Multiplicando por r^{n-1}:

$$s + a_1 + a_2 r + ... + a_{n-1} r^{n-2} + a_n r^{n-1} = 0$$

Y se tiene que s = r^{-1} $\in$ R, luego R es un cuerpo. □

Lema 3.6. *Sea R un anillo y M un R-módulo finitamente generado, $\phi : M \to M$ un homomorfismo e I un ideal de R tal que $\phi(M) \subseteq IM$, entonces existen $r_i \in I^i$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\phi^n + r_1 \phi^{n-1} + r_2 \phi^{n-2} + ... + r_{n-1} \phi + r_n \phi^0 = 0$$

Si además $R \subseteq S$ es un R-álgebra y $s \in S$ es tal que $sM \subseteq M$, entonces si M es un R[s]-módulo fiel se tiene que s es entero sobre R.

Demostración. Sean $m_1, m_2, ...m_n$ generadores de M y escribamos $\phi(m_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j$, con $a_{ij} \in I$. Sea A la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \phi - a_{11} & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ -a_{12} & \phi - a_{22} & \cdots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & \phi - a_{nn} \end{pmatrix} = \phi I_n - A^*. \qquad (1)$$

Entonces el producto de A por el vector columna $(m_1, m_2, .., m_n)$ lleva al vector 0, y multiplicando por la matriz adjunta de A ambos lados se tiene que det(A)I_n lleva $(m_1, m_2, .., m_n)$ al 0 y por lo tanto det(A) lleva M a 0. Entonces el determinante de A será el polinomio característico de A* tomando ϕ como variable, $det(A) = \phi^n + c_1 \phi^{n-1} + ... + \phi_n$, donde c_i es suma de los menores principales de orden i de A* y por tanto $c_i \in I^i$.
Para la segunda parte, tomando I=R y como ϕ la multiplicación por s, se deduce al evaluar det(A) en 1 que $s^n + r_1 s^{n-1} + r_2 s^{n-2} + ... + r_{n-1} s + r_n = 0$ y se tiene que s es entero sobre

R. ☐

Lema 3.7. *(Lema de Nakayama) Sea R un anillo, M un R-módulo finitamente generado, I un ideal contenido en J el radical de Jacobson. Entonces IM=M implica M=0.*

Demostración. Tomando en 3.6 ϕ igual a la identidad, I como el ideal del enunciado y $x = 1 + r_1 + r_2 + ... + r_n$, tememos que $xM = 0$ y que $x = 1 + y$ para algún $y \in I \subseteq J$. Si x no fuera unidad, entonces estaría en algún ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R, pero como $y \in J \subseteq \mathfrak{m}$, entonces se tendría $1 = x - y \in \mathfrak{m}$ que es absurdo. Finalmente se llega a que x es unidad, con lo que $M = x^{-1}xM = 0$. ☐

Lema 3.8. *Si M es un R-módulo finitamente generado, $N \subseteq M$ es otro submódulo y $M = N + IM$ para algún I contenido en el radical de Jacobson, entonces $M = N$.*

Demostración. Es consecuencia de aplicar en lema de Nakayama a M/N, ya que cocientando $M = N + IM$ por N tenemos $M/N = I(M/N)$. ☐

Lema 3.9. *Sea $R \subseteq S$ una inclusión de anillos y sean $x_1, x_2, .., x_n \in S$. Son equivalentes:*

1. *Los x_i son enteros sobre R.*
2. *R[$x_1, x_2, .., x_n$] es un R-submódulo de S finitamente generado.*
3. *Existe un R-módulo $M \subseteq S$ distinto de 0 y finitamente generado tal que $x_iM \subseteq M$ para todo i y tal que M es un R[$x_1, x_2, .., x_n$]-módulo fiel.*

Demostración. Si (1) es cierto, existe una ecuación de dependencia entera sobre x_1:

$$x_1^m + r_1x_1^{m-1} + r_2x_1^{m-2} + ... + r_{m-1}x_1 + r_m = 0$$

Luego,

$$-x_1^m = r_1x_1^{m-1} + r_2x_1^{m-2} + ... + r_{m-1}x_1 + r_m$$

y se tiene que R[x_1] es finitamente generado (por $\{1, x_1, x_1^2, ...x_1^{m-1}\}$). Aplicando sucesivamente este razonamiento cambiando R por R[$x_1, x_2, .., x_{i-1}$] y R[x_1] por R[$x_1, x_2, .., x_i$] se concluye que R[$x_1, x_2, .., x_n$] también es finitamente generado.
(3) es inmediato de (2) tomando M = R[$x_1, x_2, .., x_n$] y con el lema anterior aplicado a cada x_i se ve que (3) implica (1). ☐

Proposición 3.10. *La clausura entera de un anillo R en otro S es un anillo.*

Demostración. Sean x, y $\in$ S enteros sobre R. Por el lema anterior, R[x,y] es un R-submódulo de S finitamente generado, pero R[x,y]=R[x+y,x-y]=R[x,y,xy], luego x+y, xy son enteros sobre R y la clausura entera es un anillo. ☐

Proposición 3.11. *Sea $R \subseteq S$ una extensión de anillos y $W \subseteq S$ un conjunto multiplicativo. Sea $\overline{R}$ la clausura de R en S, entonces la clausura de $W^{-1}R$ en $W^{-1}S$ es $W^{-1}\overline{R}$.*

Demostración. Sea s entero sobre R y b $\in$ W. Entonces tenemos las ecuaciones:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n = 0$$

$$(s/b)^n + a_1/b\ (s/b)^{n-1} + ... + a_n/b^n = 0,$$

luego s/b es entero sobre $W^{-1}R$ y $W^{-1}\overline{R}$ está contenido en su clausura entera.
Ahora si s/b $\in W^{-1}S$ es entero sobre $W^{-1}R$, entonces:

$$(s/b)^n + a_1/b_1\ (s/b)^{n-1} + ... + a_n/b_n = 0,$$

donde $a_i \in R$ y $b_i \in W$. Entonces quitando denominadores, para un b' de W:

$$(b'b_1...b_n s)^n + (b'b_2b_3...b_n)\ a_1\ (b'b_1b_2...b_n s)^{n-1} +$$
$$((b')^2 b_1^2 b_2 b_3^2...b_n^2)\ a_2\ (b'b_1b_2...b_n s)^{n-2} + ... + b_1^n b_2^n...b_{n-1}^{n-1}\ a_n = 0,$$

y se llega a que $(b'b_1...b_n s)$ es entero sobre R y s/b $\in$ $W^{-1}\overline{R}$. □

Proposición 3.12. *Sea $R \subseteq S$ una extensión de anillos y $s \in S$, son equivalentes:*

1. *s es entero sobre R.*
2. *Para cualquier conjunto multiplicativo $W \subseteq R$, $\frac{s}{1}$ es entero sobre $W^{-1}R$*
3. *Para cualquier ideal primo P de R, $\frac{s}{1}$ es entero sobre R_P*
4. *Para cualquier ideal maximal M de R, $\frac{s}{1}$ es entero sobre R_M*

Demostración. (1) implica (2) porque R $\subseteq W^{-1}$R y una ecuación de dependencia entera sobre R lo es sobre W^{-1}R.
(2) implica (3) ya que si se tiene P primo, $R_P = W^{-1}$R, con $W = R \setminus P$ conjunto multiplicativo, luego si s es entero sobre W^{-1}R también lo es sobre R_P.
Los maximales son primos luego (3) implica (4) y solo queda ver que (4) implica (1). Para cada M maximal, tenemos una ecuación de dependencia entera de $\frac{s}{1}$:

$$(\frac{s}{1})^n + \frac{a_1}{b_1}(\frac{s}{1})^{n-1} + ... + \frac{a_n}{b_n},$$

donde b_i está en $R \setminus M$ para todo i. Multiplicando en cada $\frac{a_1}{b_1}$ numerador y denominador por los b_j con $j \neq i$, se tiene b como denominador común. Multiplicando la ecuación por b^n se tiene la siguiente ecuación en R:

$$(bs)^n + a_1'(bs)^{n-1} + a_2'b(bs)^{n-2} + ... + a_n'b^n = 0$$

Así que bs es entero sobre R. Entonces para cada maximal M existe un $b_M \notin M$ tal que $b_M s$ es entero sobre R. Si $I = < b_M >_{(M \text{ maximal})}$, como I no está contenido en ningún maximal debe ser I=R y existen $M_1, M_2, ..., M_k$ tal que 1 = $\sum_{i=0}^{k} c_i b_{M_i}$ con c_i en R, luego s = $\sum_{i=0}^{k} c_i b_{M_i} s$ que será entero sobre R porque la clausura entera es un anillo. $\square$

Observaciones 3.13. *Como consecuencia directa de 3.12, se tiene que es equivalente que S sea la clausura entera de R o que lo sea después de localizar en cada conjunto multiplicativamente cerrado, cada primo o cada ideal maximal.*

Proposición 3.14. *Sean $R \subseteq S \subseteq T$, T es entero sobre R si y solo si T es entero sobre S y S es entero sobre R.*

Demostración. Si T es entero sobre R es inmediato que lo es sobre S y que S es entero sobre R.
Si S es entero sobre R y T sobre S, sea t $\in$ T, como es entero sobre S:

$$t^n + s_1 t^{n-1} + s_2 t^{n-2} + ... + s_{n-1} t + s_n = 0$$

Con los $s_i \in$ S, que son enteros sobre R. Por 3.9, R[$s_1, s_2, ..., s_n$] es un R-módulo finitamente generado y también R[$s_1, s_2, ..., s_n$,t] es un R[$s_1, s_2, ..., s_n$]-módulo finitamente generado y por lo tanto un R-módulo finitamente generado y de nuevo por el lema 3.9, t es entero sobre R. $\square$

Lema 3.15. *Sean $R_i \subseteq S_i$ anillos y sean $\overline{R_i}$ las clausuras enteras de los R_i en S_i con $i = 1, 2, .., t$. Entonces $(s_1, s_2, .., s_t)$ es entero sobre $R_1 \times R_2 \times .. \times R_t$ si y solo si $s_i \in \overline{R_i}$ para todo i=1, 2,.., t.*

Demostración. Si $(s_1, s_2, .., s_t)$ es entero sobre $R_1 \times R_2 \times .. \times R_t$, entonces tomando la coordenada i-ésima en la ecuación de dependencia entera se tiene una ecuación de s_i sobre R_i.
Si se tiene $s_i \in \overline{R_i}$ para $i = 1, 2, .., t$, entonces $\forall\ i\ \exists\ n_i,\ r_{i,j} \in R_i$ tal que se tienen t ecuaciones de dependencia entera:

$$s_i^{n_i} + r_{i,1} s_i^{n_i-1} + r_{i,2} s_i^{n_i-2} + ... + r_{i,n_i-1} s_i + r_{i,n_i} = 0,\ i = 1, 2, ..., t$$

ahora, elevando cada ecuación a $\prod_{l \neq i} n_l$, se tienen t ecuaciones con grado N = $\prod n_l$ (los coeficientes pueden ser distintos que en las anteriores pero siguen siendo elementos de R_i y el coeficiente de mayor grado sigue siendo 1), así que se tiene:

$$(s_1, s_2, ..., s_t)^N + (r'_{1,1}, r'_{2,1}, ..., r'_{t,1})(s_1, s_2, ..., s_t)^{N-1} + (r'_{1,2}, r'_{2,2}, ..., r'_{t,2})(s_1, s_2, ..., s_t)^{N-2} +$$

$$... + (r'_{1,N-1}, r'_{2,N-1}, ..., r'_{t,N-1})(s_1, s_2, ..., s_t) + (r'_{1,N}, r'_{2,N}, ..., r'_{t,N}) = 0$$

y se tiene que $(s_1, s_2, ..., s_t)$ es entero sobre $R_1 \times R_2 \times .. \times R_t$. $\square$

Lema 3.16. *Si R es un anillo reducido con ideales primos minimales $P_1, P_2, .., P_s$, entonces:*

$$K(R) \cong \prod_{i=1}^{s} Q(R/P_i),$$

donde $K(R)$ es el anillo total de fracciones de R y $Q(R/P_i)$ el cuerpo de fracciones de R/P_i.

Demostración. Por construcción, los elementos de $K(R)$ son o bien unidades o bien divisores de cero, por lo que cualquier ideal propio de $K(R)$ está contenido en el conjunto de divisores de cero de $K(R)$. Como R es reducido, el conjunto de divisores de 0 de R es la unión de los primos minimales de R, por lo que el conjunto de divisores de 0 de $K(R)$ es la unión de los ideales que generan los P_i en $K(R)$. Por 2.6, I tiene que estar contenido en algún $P_iK(R)$, por lo que se tiene que los ideales $P_iK(R)$ son los maximales de $K(R)$ y por tanto los únicos primos, así que su intersección es el conjunto de elementos nilpotentes que es (0). Por el teorema chino del resto 2.4 aplicado a $K(R)$ se tiene:

$$K(R) \cong \prod_{i=1}^{s} K(R)/P_iK(R).$$

Sea W el conjunto de no divisores de 0 de R, se tiene:

$$K(R)/P_iK(R) = W^{-1}R/P_iW^{-1}R = W^{-1}(R/P_i),$$

que es un cuerpo que contiene R/P_i por lo que debe ser $Q(R/P_i)$. □

Proposición 3.17. *Sea R un anillo reducido y sean $P_1, P_2, .., P_s$ sus primos minimales. Sea $\overline{R/P_t}$ es la clausura entera de R/P_t en su cuerpo de fracciones, entonces $\overline{R/P_1} \times \overline{R/P_2} \times ... \times \overline{R/P_s}$ es la clausura entera de R en su anillo total de fracciones.*

Demostración. El anillo total de fracciones K(R) es el localizado del anillo en los elementos que no están en ningún primo minimal. Por ser R reducido y tener un número finito de primos minimales, se tiene que K(R) = $k(R/P_1) \times k(R/P_2) \times ... \times k(R/P_s)$.

Se tiene que $R/P_1 \times R/P_2 \times ...R/P_s \subseteq K(R)$ es un R-módulo finitamente generado fiel (porque al ser reducido, $\cap_{i=1}^{s} P_i = 0$ y el anulador de $R/P_1 \times R/P_2 \times ...R/P_s$ es (0)) luego es entero sobre R por 3.9. Además, $\overline{R/P_1} \times \overline{R/P_2} \times ... \times \overline{R/P_s}$ es entero sobre $R/P_1 \times R/P_2 \times ...R/P_s$ por 3.15 y por 3.14 también lo es sobre R, luego está contenida en su clausura. Si se ve que es íntegramente cerrada, será su clausura: Sea k = $(k_1, k_2, ..., k_s) \in K(R)$, entero sobre $\overline{R/P_1} \times \overline{R/P_2} \times ... \times \overline{R/P_s}$, entonces restringiendo la ecuación de dependencia entera a cada coordenada se tiene que $k_i \in \overline{\overline{R/P_i}} = \overline{R/P_i}$, luego $\overline{R/P_1} \times \overline{R/P_2} \times ... \times \overline{R/P_s}$ es íntegramente cerrado y la clausura entera de R en K(R). □

Proposición 3.18. *Sea R un anillo noetheriano íntegramente cerrado en su anillo total de fracciones. El conjunto de primo asociados de un ideal principal generado por x no divisor de cero es exactamente el conjunto de primos minimales sobre (x).*

Demostración. Todos los ideales primos minimales sobre (x) están asociados a (x). Sea P un primo asociado a xR. Por 2,5, existe un $y \in R$ no divisor de cero tal que $P = xR :_R y$. Localizando en P podemos asumir que R es noetheriano con ideal maximal P. Por la elección de P, $\frac{y}{x}P \subseteq R$. Si $\frac{y}{x}P \subseteq P$, entonces por 3.6, $\frac{y}{x} \in \overline{R} = R$, así que $y \in xR$ y $P = xR :_R y = R$, que es absurdo. Entonces $\frac{y}{x}P = R$ (es estrictamente más grande que el ideal maximal P), así que existe un $z \in P$ tal que $\frac{y}{x}z = 1$. Entonces $P = xR :_R y = yzR :_R y = zR$, por lo que P es un ideal primo de altura 1 y por tanto minimal sobre xR. □

3.2. Teoremas del ascenso y descenso

Esta sección tratará los teoremas del ascenso y del descenso, que permiten elevar o bajar primos entre dos anillos, manteniendo las inclusiones entre ellos.

Lema 3.19. *Sean R $\subseteq$ S anillos con S entero sobre R, se tiene:*

1. *Si J es un ideal de S e I = J $\cap$ R, entonces S/J es entero sobre R/I.*
2. *Si W es un conjunto multiplicativo de R, entonces $W^{-1}S$ es entero sobre $W^{-1}R$.*

Demostración.

1. Si tenemos una ecuación de dependencia entera de un elemento de S sobre R, sus coeficientes serán elementos de R y al hacer módulo J serán elementos de R/(R $\cap$ J) = R/I y el polinomio seguirá siendo mónico.
2. Si x/s $\in$ S, dividiendo por s^n una ecuación de dependencia entera de x sobre R, nos queda una ecuación de x/s con coeficientes en W^{-1}R que sigue siendo mónica.

□

Teorema 3.20. *Sean R $\subseteq$ S anillos, S entero sobre R y P un primo de R. Entonces existe un ideal Q primo de S tal que Q $\cap$ R = P.*

Demostración. Sea W = R \ P, por 3.19 W^{-1}S es entero sobre R_P. Sea N un ideal maximal de $W^{-1}S$, entonces por 3.5 M = N $\cap$ R es maximal, el único del anillo local R_P. Sean α y β los morfismos de localización respectivos de R y S. Entonces Q = $\beta^{-1}(n)$ es primo y Q $\cap$ R = $\beta^{-1}(n \cap R_P) \cap R$ = $\alpha^{-1}(m) = P$. □

Teorema 3.21. *("Teorema del ascenso"). Sean R $\subseteq$ S anillos, S entero sobre R. Sea $P_1 \subseteq P_2 \subseteq ... \subseteq P_n$ una cadena ascendiente de ideales primos de R y $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq ... \subseteq Q_m$ una cadena de primos de S, con m <n y tal que $Q_i \cap R = P_i$ para $1 \leq i \leq m$. Entonces se puede extender la cadena de los Q_i hasta n, $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq ... \subseteq Q_n$ y tal que $Q_i \cap R = P_i$ para $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Supongamos m = 1, n = 2. Entonces R/$P_1 \subseteq$ S/Q_1 y S/Q_1 es entero sobre R/P_1 por 3.19. Sean $\alpha : R \to R/P_1$ y $\beta : S \to Q_1$ las aplicaciones de paso al cociente. Entonces por 3.20, existe otro primo Q_2' de S/Q_1 tal que $Q_2' \cap$ R/P_1 = P_2', la imagen por α de P_2 en R/P_1. Entonces se tiene que $\beta^{-1}(Q_2')$ es un primo de S que contiene a Q_1. Aplicando las veces que haga falta este resultado se generaliza para m y n arbitrarios. □

Lema 3.22. *Sean $R \subseteq S$ anillos e I un ideal de R. Sea $\overline{R}$ la clausura de R en S. Entonces la clausura entera de I en S es $\sqrt{I\overline{R}}$.*

Demostración. Sea $r \in S$ entero sobre I. Entonces tenemos la siguiente ecuación:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n = 0,$$

donde $a_i \in I$ para todo i, luego $s \in \overline{R}$ y $s^n \in I\overline{R}$ así que $s \in \sqrt{I\overline{R}}$.
Ahora si $s \in \sqrt{I\overline{R}}$, $s^n \in I\overline{R}$ para algún n, es decir $s^n = \sum a_i s_i$ donde $a_i \in I$ y $s_i \in \overline{R}$. Como los s_i son enteros sobre R, por 3.9 $M = R[s_1, s_2, ..., s_m]$ es un R-módulo finitamente generado y como $x^n M \subseteq IM$ y tomando en 3.6 ϕ(z) = $s^n z$, se tiene que s^n es entero sobre I y por tanto también lo es s. □

Lema 3.23. *Sean $R \subseteq S$ dominios, con R íntegramente cerrado y sea $s \in S$ entero sobre un ideal I de R. Si s es algebraico sobre el cuerpo de fracciones de R entonces los coeficientes de su polinomio mínimo están en $\sqrt{I}$.*

Demostración. Por ser s entero es algebraico sobre K, el cuerpo de fracciones de R. Sea L una extensión de cuerpos de K que contenga $s_1, s_2, ..., s_l$ los conjugados de s. Los s_i cumplen las mismas ecuaciones de dependencia entera que y, luego son enteros sobre I. Se tiene entonces que los coeficientes del polinomio mínimo son polinomios en las s_i, luego también son enteros sobre I y están en R porque es íntegramente cerrado. Finalmente, por 3.22 deben estar en $\sqrt{I}$.. □

Teorema 3.24. *("Teorema del descenso"). Sean $R \subseteq S$ dominios con S entero sobre R y con R íntegramente cerrado. Sean $P_1 \supseteq P_2 \supseteq ... \supseteq P_n$ una cadena descendiente de ideales primos de R y $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq ... \supseteq Q_m$, con m <n, una cadena de ideales primos de S tal que $Q_i \cap R = P_i$ para $1 \leq i \leq m$. Entonces se puede extender la cadena de los Q_i hasta n, $Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq ... \supseteq Q_n$ y tal que $Q_i \cap R = P_i$ para $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Al igual que en el teorema del ascenso, basta demostrarlo para m = 1 y n = 2, y aplicar repetidamente el resultado. Hay que ver que P_2 es contracción de un ideal primo de S_{Q_1}, es decir que $P_2 S_{Q_1} \cap$ R = P_2, ya que un ideal primo es contracción de un primo sí y solo sí al extenderlo y contraerlo se vuelve al mismo ideal.

Sea x $\in P_2S_{Q_1}$. Entonces x = y/ s con y $\in$ SP_2, s $\in$ S$\backslash Q_1$. Por 3.22, y es entero sobre I y por 3.23 su ecuación mínima sobre K, el cuerpo de fracciones de R es:

$$y^d + r_1y^{d-1} + r_2y^{d-2} + r_{d-1}y + r_d = 0, \tag{2}$$

con los r_i en P_2.
Ahora si x $\in$ R $\cap$ $S_{Q_1}P_2$, s = yx^{-1}, con x^{-1} $\in$ K, luego el polinomio mínimo de s sobre K será obtenido al dividir (2) por x^d:

$$s^d + t_1s^{d-1} + t_2s^{d-2} + t_{d-1}s + t_d \tag{3}$$

Con t_i = r_i/x^i, luego t_ix^i = $r_i \in P_2$
Como s $\in$ S, es entero sobre R y por 3.23, cada $v_i \in R$. Ahora si x $\notin P_2$, por (3) se tiene que $v_i \in P_2$, luego por (2), $s^d \in$ S$P_2 \subseteq$ S$P_1 \subseteq Q_1$, que es absurdo. Se tiene entonces que x está en P_2 y que $S_{Q_1}P_2 \cap$ R = P_2 (la otra implicación es inmediata). □

3.3. Graduación y clausura entera

La clausura entera de un anillo graduado no es necesariamente graduada, pero en este capítulo veremos algunos resultados que garantizan que la clausura es graduada bajo ciertas condiciones.

Definición 3.25. *Un **monoide** es un conjunto no vacío con una operación binaria asociativa y con unidad. El monoide es conmutativo si lo es la operación. Sea G es un monoide conmutativo (abeliano), un anillo R es G-graduado si se cumple:*

1. *Para cada g $\in$ G, existe un subgrupo aditivo $R_g \subseteq R$.*

2. *R = $\oplus_{g\in G}$ R_g (como subgrupos de R).*

3. *Si g, g' $\in$ G, $R_gR_{g'} \subseteq R_{g+g'}$*

De forma parecida se dice que un R-módulo M es G-graduado si:

1. *M = $\oplus_{g\in G}$ M_g, siendo los M_g R_0-submódulos de M.*

2. *Si g, g' $\in$ G, $R_gM_{g'} \subseteq M_{g+g'}$*

Un elemento de R (o de M) se dice que es homogéneo de grado g si pertenece a R_g (respectivamente a M_g). Un ideal I de R se dice que es homogéneo si para todo x $\in$ I, si escribimos $x = \sum_{g\in G} x_g$ donde $x_g \in R_g$ para todo g $\in$ G, entonces $x_g \in$ I para todo g.

Ejemplo 3.26. *Sean G = $\mathbb{N}$, R = $\mathbb{Z}$[x]. Entonces R_0 = $\mathbb{Z}$ y si se toma n $\in$ $\mathbb{N}$, R_n = $x^n\mathbb{Z}$. Está claro que R = $\oplus_{n\in\mathbb{N}}$ R_n y si tenemos n y n', $z_1x^nz_2x^{n'}$ = $(z_1z_2)x^{n+n'}$.*

Teorema 3.27. *Sea G = $\mathbb{N}^d \times \mathbb{Z}^e$, y sea R $\subseteq$ S anillos G-graduados. Entonces la clausura entera de R en S también es G-graduada.*

Demostración. Supongamos $d+e=1$, sea s = $\sum_{j=j_0}^{j_1} s_j,\ s_j \in S_j$ entero sobre R, con $j_0, j_1 \in \mathbb{Z}$. Hay que ver que cada s_j es entero sobre R.

Sea r una unidad arbitraria de R_0, entonces la aplicación $\phi_r : S \mapsto S$ que multiplica los elementos de S_i por r^i es un automorfismo graduado (también restringido a R) y es la identidad en S_0. Por tanto $\phi_r(s) = \sum_{j=j_0}^{j_1} r^j s_j$ es entero sobre R.

Se supone ahora que R_0 tiene al menos n = $j_1 - j_0 + 1$ unidades distintas r_i cuyas restas son también unidades en R. Sea $b_i = \phi_{r_i}(s)$, que son enteros sobre R. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} r_1^{1+j_0-1} & r_1^{2+j_0-1} & \cdots & r_1^{n+j_0-1} \\ r_2^{1+j_0-1} & r_2^{2+j_0-1} & \cdots & r_2^{n+j_0-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n^{1+j_0-1} & r_n^{2+j_0-1} & \cdots & r_n^{n+j_0-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{j_0} \\ s_{j_0+1} \\ \vdots \\ s_{j_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{j_0} \\ b_{j_0+1} \\ \vdots \\ b_{j_1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Como la primera matriz A es de Vandermonde porque los r_i son distintos, es invertible y se tiene:

$$\begin{pmatrix} s_{j_0} \\ s_{j_0+1} \\ \vdots \\ s_{j_1} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_{j_0} \\ b_{j_0+1} \\ \vdots \\ b_{j_1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Es decir, cada s_j son combinación lineal de los b_i luego son enteros sobre R. Veamos ahora que podemos reducir al caso en el que hay como mínimo n unidades distintas.

Sean $t_{j_0}, t_{j_0+1}, ..., t_{j_1}$ variables. Sea $S' = S[t_j, t_j^{-1}, (t_j - t_i)^{-1} \mid i, j = j_0, j_0+1, ..., j_1], i \neq j$ y sea $R' = R[t_j, t_j^{-1}, (t_j - t_i)^{-1} \mid i, j = j_0, j_0+1, ..., j_1] \subseteq$ S'. Se considera en R' y S' la G-graduación de R y S dando a las variables t_i grado 0. Entonces R' y S' son anillos G-graduados, R' tiene n unidades distintas $r_i = t_i$ de grado 0 (cuyas restas son también unidades en R'). Luego los s_j son enteros sobre R'. Se considera la siguiente ecuación de dependencia entera de un s_j:

$$s_j^k + z_1 s_j^{k-1} + ... + z_{k-1} s_j + z_k = 0$$

donde los z_j son elementos de R[t_i, $i = j_0, j_0+1, ..., j_1$] divididos por productos de elementos de la forma t_i o $t_i - t_j, i \neq j$ y quitando los denominadores queda:

$$p_0 s_j^k + p_1 s_j^{k-1} + ... + p_{k-1} s_j + p_k = 0$$

una ecuación en R[t_i, $i = j_0, j_0+1, ..., j_1$] y donde p_0 es un polinomio en las t_i con al menos un coeficiente C_0 de un multigrado α siendo unidad de R, que justificaré posteriormente. Tomando solo la parte homogénea de multigrado α debe ser 0 y dividiendo por C_0

tenemos una ecuación de dependencia entera de s_j en R.

$$C_0 s_j^k t^\alpha + C_1 s_j^{k-1} t^\alpha + ... + C_{k-1} s_j t^\alpha + C_k t^\alpha = 0$$

$$C_0 s_j^k + C_1 s_j^{k-1} + ... + C_{k-1} s_j + C_k = 0$$

$$s_j^k + C_1' s_j^{k-1} + ... + C_{k-1}' s_j + C_k' = 0$$

Para ver que en el polinomio de las t_i al menos un coeficiente es unidad, voy a probar que dado cualquier subconjunto de variables y cualquier orden léxicográfico entre ellas, al menos un término con grado máximo en ese orden tiene coeficiente unidad. Nótese que el polinomio está formado por productos de t_i y de $t_i - t_k$, luego es homogéneo de grado L, sobre el cual voy a hacer inducción. Si L = 0, el coeficiente es 1. Si el resultado es cierto para L, y el polinomio P es de grado L+1 entonces o bien se puede extraer un t_i, en cuyo caso el resultado es cierto para P/t_i y dado cualquier subconjunto de variables y orden léxicográfico, el mismo coeficiente que era unidad en P/t_i seguirá siendo coeficiente de un término de grado máximo en P, o bien se puede extraer $(t_i - t_k)$ y se tiene:

$$(\sum_{|\alpha|=L} c_\alpha t^\alpha)(t_i - t_k) = \sum_{|\alpha|=L+1} [c_{(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_i-1,..,\alpha_n)} - c_{(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_k-1,..,\alpha_n)}] t^\alpha = P \qquad (6)$$

Entonces dado un subconjunto de las variables y un orden, añadiendo t_i y t_k final si no estaban entre las variables (se supone t_i>t_k, pero si no es así basta intercambiar i y k en la siguiente parte), se tiene que en $\sum_{|\alpha|=L} c_\alpha t^\alpha$ hay un término de grado máximo β en ese orden (y por tanto en el original) con un coeficiente unidad U y el coeficiente de grado $\beta' = (\beta_1, \beta_2, .., \beta_i + 1, .., \beta_n)$ en P será $c_{(\beta_1,\beta_2,..,\beta_i,..,\beta_n)}$ = U por (7), ya que $c_{(\beta_1,\beta_2,...\beta_i+1,..,\beta_k-1,...,\beta_n)} = 0$. Con esto se prueba que al menos un coeficiente del polinomio que acompaña a s_j^m es una unidad.
Sigamos ahora haciendo inducción sobre $d+e$. Si $e = 0$, sea $G' = \mathbb{N}^{d-1}$ y si $e > 0$, sea $G' = \mathbb{N}^d \times \mathbb{Z}^{e-1}$. Sea T la clausura entera de R en S. Se tiene la G'-graduación en R $\subseteq$ S consistente en ignorar la última componente. Entonces por inducción se tiene que T = $\sum_{\alpha \in G'} T_\alpha$, siendo T_α la parte homogénea de grado α. Sea s $\in$ T_α, luego s $\in$ S que es G-graduado y $s = \sum_{j=j_0}^{j_1} s_j$, con los $s_j \in S_{(\alpha,j)}$. Aplicando ahora el caso en el que $d+e = 1$, los s_j son enteros sobre R.

□

Lema 3.28. *Sea G un monoide abeliano totalmente ordenado, sea R un anillo G-graduado y M un módulo G-graduado. Sea $x \in M$ y P un primo tal que $P = (0 :_R x)$(los elementos que anula x). Entonces P es G-homogéneo.*

Demostración. Sea $r \neq 0$ en P. Sea $r = \sum_{i=1}^n r_i$ donde r_i son homogéneos de grado R y razonando por reducción al absurdo podemos suponer que ningún r_i está en P (basta restarle los que están en P). Reindexando podemos asumir también que $deg(r_1) > deg(r_2) >$

$... > deg(r_n)$. Escribiendo $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$ para x_i homogéneos distintos de 0 de M y de nuevo reindexando podemos suponer $deg(x_1) > deg(x_2) > ... > deg(x_n)$. Como $r \in (0 :_R x)$, rx=0 y mirando el grado $deg(r_1 x_1)$ tenemos $r_1 x_1 = 0$. Como hipótesis de inducción podemos suponer que para $i = 1, 2, ..., m-1$, $r_i x_i = 0$. Entonces.

$$0 = r_1^{m-1}(rx) = r_1^{m-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i x_j = r_1^{m-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i x_j = \sum_{i=1}^{n} r_i r_1^{m-1} x_m,$$

así que mirando la componente de grado $deg(r_1^m x_m)$ se tiene que $r_1^m x_m = 0$ y se concluye que $r_1^m x_i = 0$ para todo i. Esto implica que $r_1 \in (0 :_R x) = P$, lo cual es absurdo. □

Lema 3.29. *Sea G un monoide abeliano totalmente ordenado, R un anillo Noetheriano G-graduado y M un módulo finitamente generado G-graduado. Entonces todos los submódulos G-graduados de M tienen descomposición primaria G-homogénea y tal que los primos asociados son G-homogéneos.*

Demostración. En un anillo noetheriano, los primos asociados de módulo finitamente generados son anuladores de un elementos. Por el lema anterior, los primos asociados de G-homogéneos. Si N es un submódulo G-graduado de M, también se tendrá que los primos asociados de M/N son homogéneos. Sea $P = Ann_R(f)$, con $f \in M/N$ distinto de cero, un primo asociado de M/N que sea maximal entre los primos asociados. Si P es el único primo asociado de M/N, entonces N es P-primario y G-graduado así que se tiene el lema. Supongamos entonces que P no es el único primo asociado de M/N. Como P es maximal, podemos tomar un $r \in P$ homogéneo que no está en algún otro primo asociado, por ejemplo $P' = Ann_R(f')$, con $f \in M/N$ distinto de cero. Como M es noetheriano, la cadena ascendente $N \subseteq N :_M r \subseteq N :_M r^2 \subseteq ...$ debe acabar. Entonces existe un e tal que $N :_M r^e = N :_M r^{e+1}$.
Veamos que $N = (N :_M r^e) \cap (N + r^e M)$. La inclusión $N \subseteq (N :_M r^e) \cap (N + r^e M)$ es evidente. Si $x \in (N :_M r^e) \cap (N + r^e M)$, entonces $x = n + r^e m$ para $n \in N$ y $m \in M$ y además $r^e x \in N$, por lo que $r^e x = r^e n + r^{2e} m \in N$, luego $r^{2e} m \in N$ y, por la elección de e, $r^e m \in N$ con lo que también se tiene $x \in N$.
Como r es homogéneo también lo son $N :_M r^e$ y $N + r^e M$. Por la elección de r, $fr = 0_{M/N}$ (es decir $fr \in N$), con lo que $fr^e \in N$ y $f \in N :_M r^e$. Esto implica que f vale 0 en $M/(N :_M r^e)$ así que P no está asociado a $M/(N :_M r^e)$ y por las contenciones de primos asociados debe ser que $N :_M r^e$ estrictamente más grande que N. Por otro lado, si $r^k = 0$, entonces $r^k f' = 0$ y $r^k \in P'$, pero como es primo se tendría que $r \in P'$ que es absurdo, por lo que se tiene que r no es nilpotente y como $r^e \notin N$, $N + r^e M$ es también estrictamente más grande que N. Finalmente, si seguimos repitiendo el proceso con estos nuevos submódulos tendremos cadenas de contenciones estrictas que como M es noetheriano tienen que acabar todas en M (o podríamos añadir más módulos) que cumple el resultado y por inducción podemos suponer que $(N + r^e M)$ y $(N :_M r^e)$ tienen descom-

posición primaria G-homogénea con primos homogéneos. La intersección de todos los módulos primarios de las dos descomposiciones será una descomposición primaria de N (quitando los componentes redundantes). □

Proposición 3.30. *Sea $G = \mathbb{N}^d \times \mathbb{Z}^e$ y sea R un anillo G-graduado reducido y noetheriano. Sea A su anillo total de fracciones y $P_1, P_2, .., P_s$ sus primos minimales. Sea S la localización de R en el conjunto de los homogéneos no divisores de 0 de R. Es equivalente:*

1. *El anillo S es íntegramente cerrado.*
2. *La clausura entera $\overline{R}$ de R es un anillo G-graduado de S. (heredando el grado)*
3. *Los idempotentes de $\overline{R}$ son homogéneos de S de grado 0.*
4. *Para $i = 1, 2, ..., s$, $P_i + \cap_{j \neq i} P_j$ contiene un homogéneo no divisor de 0.*

Demostración. Se supone (1) , entonces como S es íntegramente cerrado y R $\subseteq$ S $\subseteq$ A, $\overline{R}$ está contenida en S y es la clausura entera de R en S. Por 3.27, $\overline{R}$ es $\mathbb{Z}^{d+e}$-graduado. Ahora, sea la siguiente ecuación de dependencia entera sobre R:

$$s^n + r_1 s^{n-1} + ... + + r_{n-1} s + r^n = 0$$

Si suponemos que s=a/b está en una componente homogénea de $\overline{R}$ con una entrada de las d primeras del grado negativa (-k con k>0), entonces s^n tendrá en esa misma entrada del grado -kn, pero como el grado de los r_i es positivo para las d primeras entradas se tiene que el resto de términos de la suma están en otra componente homogénea y $s^n = 0$ luego existe un c homogéneo no divisor de 0 tal que $ca^n = 0$, luego ca es nilpotente en R y como es reducido debe ser a=0 y se tiene una contradicción. De esta forma se llega a que $\overline{R}$ es G-graduado y se tiene (2).
Supongamos cierto (2) y veamos que se tiene (3). Sea e idempotente de $\overline{R}$. Como es G-graduado, es suma de elementos homogéneos de $\overline{R}$, $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Dando un orden lexicográfico a $\mathbb{Z}^{d+e}$, podemos suponer salvo renombrar gr(e_1)>...>gr(e_n). Si el gr(e_1)>0, la parte homogénea de $e^2 - e$ de grado 2gr(e_1) es e_1^2 y como $e^2 - e = 0$ (por ser idempotente) y R es reducido (el único nilpotente es 0) entonces se tiene una contradicción. De la misma forma si gr(e_n)<0 también se tiene una contradicción. Entonces debe ser n=1 y gr(e)=0 con e homogéneo.
Se supone ahora (3). Basta probar (4) para i=1. Sea e = (1,0,...,0) $\in$ $\overline{R} = \overline{R/P_1} \times ... \times \overline{R/P_s}$, igualdad que se tiene por 3.17. Entonces e $\in$ S es homogéneo y existen a, b $\in$ R homogéneos, con b no siendo divisor de 0 y $e = a/b = (1, 0, ..., 0)$, luego la clase de a en $\overline{R}$ es (b,0,...,0) y esto significa que b-a $\in$ P_1, a $\in$ P_j si $j \neq 1$ y se tiene que b = (b-a)+a $\in$ $P_1 + P_2 \cap ... \cap P_s$ es homogéneo y no divisor de 0.

Finalmente se supone cierto (4) y veamos que se tiene (1). Sea $h_i = r'_i + p'_i$ un homogéneo no divisor de 0 en $P_i + \cap_{j\neq i} P_j$. Sea $h = \prod_{i=1}^{s} h_i \in$ R, que es homogéneo, no divisor de 0 y para todo i, $h = r'_i(h_1...h_{i-1}h_{i+1}...h_s) + p'_i(h_1...h_{i-1}h_{i+1}...h_s) = r_i + p_i$, donde $r_i \in P_i$, $p_i \in \cap_{j\neq i} P_j$. Como por 3.29 todos los P_i son homogéneos, podemos tomar r_i y p_i homogéneos y por tanto del mismo grado que h. Sea $e_i = \frac{p_i}{h}$. Como $p_i r_i \in \cap_j P_j$ que es 0 por ser el anillo reducido, se tiene que $e_i = e_i \frac{(p_i + r_i)}{h} = e_i^2$, luego e_i es homogéneo idempotente de grado 0. Si $i \neq j$, $p_i p_j \in \cap_j P_j$ luego vale 0 y se tiene que $e_i e_j = 0$. Como e = $\sum_i p_i$ no pertenece a ningún primo minimal, por ser los p_i del grado de h y ser el anillo reducido ($\cap P_i = (0)$), $\sum_i e_i$ es unidad en A y además $(\sum_i e_i)^2 = \sum_i e_i^2 = \sum_i e_i$ luego también es idempotente y por lo tanto $\sum_i e_i = 1$ (basta multiplicar por e^{-1} en $e^2 = e$). Como S contiene los idempotentes ortogonales e_i y es una localización homogénea de R, los isomorfismos $S/P_iS \simeq Se_i$ y $S = S/P_1S \times S/P_2S \times ... \times S/P_sS$ conservan el grado y S no tiene ideales primos minimales no homogéneos. Si vemos que S/P_iS es íntegramente cerrado, también lo será S por 3.17.
Sea $T = S/P_iS$. Es un dominio $\mathbb{Z}^{d+e}$-graduado donde no hay ideal primos homogéneos distintos de 0. Se tiene que T_0 es un cuerpo, y todos los elementos homogéneos (distintos de 0) son unidades de T. Sea M el $\mathbb{Z}$-módulo generado por los grados de elementos homogéneos distintos de cero de T. Entonces M $\subseteq \mathbb{Z}^{d+e}$. Si m $\in$ M, m = $\sum_j z_j m_j$ con $z_j \in \mathbb{Z}$ y m_j el grado de elementos homogéneos r_j distintos de 0 en T. Entonces, $r_j^{z_j}$ es de grado $z_j m_j$ y homogéneo y $\prod_j r_j^{z_j}$($\neq$ 0 por ser T un dominio) también es homogéneo y tiene grado m, luego si m $\in$ M, es grado de un elemento homogéneo distinto de 0. Ahora, como M es un $\mathbb{Z}$-módulo libre finitamente generado, existen homogéneos distintos de 0 $t_1, t_2, ..., t_c$ en T de forma que si $g_i = gr(t_i)$, $\{g_1, g_2, ..., g_c\}$ es una base de M. Como los g_i son linealmente independientes en $\mathbb{Q}$, los t_i son algebraicamente independientes en T_0.
Tenemos que $T_0[t_1,...,t_c,t_1^{-1},...,t_c^{-1}] \subseteq$ T. Sea x $\in$ T homogéneo distinto de 0 y sea gr(x)=$\sum_k m_k g_k$ con $m_k \in \mathbb{Z}$. Se tiene que x y $\prod_k t_k^{m_k}$ son ambos homogéneos de T con el mismo grado, luego su cociente es un elemento distinto de grado 0, es decir en T_0 y x $\in T_0[t_1,...,t_c,t_1^{-1},...,t_c^{-1}]$. Como todos los elementos de T son suma de homogéneos, se llega a que T = $T_0[t_1,...,t_c,t_1^{-1},...,t_c^{-1}]$, y como T_0 es un dominio de factorización única y los t_k son distintos de 0, se llega a que $T_0[t_1,...,t_c]$ y también $T_0[t_1,...,t_c,t_1^{-1},...,t_c^{-1}]$ = T son dominios de factorización única y por tanto T es íntegramente cerrado. □

Proposición 3.31. *Sea R un anillo reducido $\mathbb{N}$-graduado, no necesariamente Noetheriano, tal que si r ($\neq$ 0) $\in R_0$, r no es divisor de 0 en R. Entonces la clausura entera de R es $\mathbb{N}$-graduada.*

Demostración. Sea $\alpha \in \overline{R}$. Poniendo $\alpha = \frac{p}{q}$, con p y q en R, y tomando todos los sumandos homogéneos de p, q y de los coeficientes de una ecuación de dependencia entera, existen una cantidad finita de homogéneos $x_1,..,x_n$ en R tal que si R' es un subálgebra de R generada por el subanillo primitivo A de R_0 por los x_i, entonces α está en el anillo de fracciones de R' y es integral sobre R'. Basta con probar que la clausura entera de R' es G-graduada.

Se tiene que R' es Noetheriano, sea R" la localización de R' en $R_0 \setminus \{0\}$, que es $\mathbb{N}$-graduada, y por 3.27 basta probar que la clausura entera de R" es $\mathbb{N}$-graduada. Como R" es Noetheriano, tiene solo una cantidad finita de ideales primos minimales $P_1, ..., P_s$ y son homogéneos. Como el localizado de R_0 es un cuerpo, estos ideales primos están generados en grado positivos. Para cada $i \in \{1, ..., s\}$, $P_i + \cap_{j \neq i} P_j$ es un ideal homogéneo generado en grado positivo y no contenido en la unión de los P_i. Entonces por 2.5, $P_i + \cap_{j \neq i} P_j$ tiene un elemento homogéneo no divisor de cero y por 3.30, la clausura de R" es $\mathbb{N}$-graduada y lo mismo se tiene para R' y R. $\square$

4. Clausura entera de ideales

Hablamos en este capítulo de la clausura entera de ideales empezando por algunos conceptos básicos parecidos a los de la clausura entera de anillos.

4.1. Elementos enteros de ideales

Definición 4.1. *Sea R un anillo, I un ideal de R. Se dice que $r \in R$ es* ***entero sobre I*** *si $\exists\, n \in \mathbb{N}, a_i \in I^i, i = 1,..,n$ tal que*

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + a_{n-1} r + a_n = 0$$

Esta ecuación se denomina ecuación de dependencia entera de r sobre I (de grado n). El conjunto de elementos de r que son enteros sobre I se denomina clausura entera de I y se denota por $\overline{I}$. Si I=$\overline{I}$ se dice que I está íntegramente cerrado.
Si para todo $n \geq 1$, I^n está íntegramente cerrado, se dice que I es normal.

Al igual que con la clausura de anillos tenemos el siguiente resultado que vincula la clausura del ideal con la clausura de la localización de los maximales.

Proposición 4.2. *Sea R un anillo e I un ideal en R. Si $w \subseteq R$ es un conjunto multiplicativamente cerrado, $W^{-1}\overline{I} = \overline{W^{-1}I}$. Y son equivalentes:*

1. *$I = \overline{I}$*
2. *$\forall$ W multiplicativamente cerrado de R, $W^{-1}I = \overline{W^{-1}I}$.*
3. *$\forall$ P primo de R, $I_P = \overline{I_P}$*
4. *$\forall$ M maximal de R, $I_M = \overline{I_M}$*

Demostración. Para ver la primera implicación, sea $r \in W^{-1}\overline{I}$. Entonces $r = \frac{a}{b}$ para $b \in W$ y $a \in \overline{I}$. Entonces tenemos una ecuación de dependencia entera de a sobre I:

$$a^n + c_1 a^{n-1} + ... + c_n = 0,$$

donde $c_i \in I^i$. Dividiendo por b^n se tiene una ecuación de dependencia entera de r:

$$(\frac{a}{b})^n + \frac{c_1}{b}(\frac{a}{b})^{n-1} + ... + \frac{c_n}{b^n} = 0,$$

donde $\frac{c_i}{b^i} \in (W^{-1}I)^i$ así que $r = \frac{a}{b} \in \overline{W^{-1}I}$.

Si en cambio $r \in \overline{W^{-1}I}$, entonces $r = \frac{a}{b}$ para $b \in W$ y $a \in R$ y tenemos una ecuación de dependencia entera de r sobre $W^{-1}I$:

$$(\frac{a}{b})^n + \frac{c_1}{b_1}(\frac{a}{b})^{n-1} + ... + \frac{c_n}{b_n} = 0,$$

donde $\frac{c_i}{b_i} \in (W^{-1}I)^i$. Podemos suponer que $b_i = b$ para todo i, multiplicando los c_i y a por elementos adecuados. Entonces, multiplicando la ecuación por b^n se llega a:

$$(rb)^n + c_1(rb)^{n-1} + bc_2(rb)^{n-2} + ... + b^{n-1}c_n = 0,$$

con lo que $a = rb$ es entero sobre I y se tiene el resultado.

Supongamos entonces que (1) es cierto, entonces $W^{-1}I = W^{-1}\overline{I} = \overline{W^{-1}I}$ por el resultado anterior y se tiene (2).
Si (2) es cierto, entonces (3) también, porque el localizado de cualquier primo P en I es igual a $W^{-1}I$ para $W = R \setminus P$, así que $I_P = W^{-1}I = \overline{W^{-1}I} = \overline{I_P}$.

Si se tiene (3) entonces (4) es inmediato ya que los maximales son primos.
Finalmente si (4) es cierto y r es entero sobre I, una ecuación de dependencia entera de r sobre I es también una ecuación de dependencia entera de $\frac{r}{1}$ sobre I_M, con lo que $\frac{r}{1} \in \overline{I_M} = I_M$. Escribamos $\frac{r}{1} = \frac{a}{b}$ para $a \in I, b \in R \setminus M$. Esto significa que existe un $b' \in R \setminus M$ tal que $b'(rb - a) = 0$, es decir $rb'' \in I$ para un $b'' \in R \setminus M$. Entonces para cada M maximal existe un $b_M \in R \setminus M$ tal que $br \in I$. Sea J el ideal generado por estos b_M, que será el total ya que J no está contenido en ningún ideal maximal M porque contiene a b_M. Se tiene entonces para unos $b_{M_1}, b_{M_2}, ..., b_{M_s}$, con M_i maximal para todo i, se puede escribir $1 = \sum_{i=1}^{s} c_i b_{M_i}$, con $c_i \in R$. Multiplicando por r la igualdad se tiene $r = \sum_{i=1}^{s} c_i b_{M_i} r$, donde los sumandos están en I y por tanto r también. Como $I \subseteq \overline{I}$ se tienen las dos inclusiones y se tiene (1). □

Proposición 4.3. *Sea R un anillo y N su nilradical. Sea I un ideal en R y sea $\overline{I}$ la clausura entera de I en R.*

1. *$\overline{I}R_{red}$ es la clausura entera de IR_{red} en R_{red}, por lo que la elevación natural en R de la clausura de I en R_{red} es $\overline{I}$.*

2. *Un elemento $r \in R$ está en $\overline{I}$ si y solo si para todo primo minimal de R, la imagen de r en R/P está en la clausura entera de (I+P)/P en R/P.*

Demostración. Sea $\overline{IR_{red}}$ la clausura de IR_{red} en R_{red}. Es inmediato que $\overline{I}R_{red} \subseteq \overline{IR_{red}}$. Para la otra inclusión, sea $r + N \in \overline{IR_{red}}$, para algún $r \in R$. Entonces para algunos $a_i \in I^i$, se tiene $(r+N)^n + a_1(r+N)^{n-1} + ... + a_n = 0 + N$, por lo que se tiene $s = r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_n \in N$. Por estar en N, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $s^m = 0$, pero eso da una ecuación de

dependencia entera de r sobre I de grado nm y se tiene (1).
Al igual que antes, ver que la imagen de $\overline{I}$ en R/P está contenida en la clausura entera de $(I+P)/P$ en R/P para todo P es inmediato. Para ver la otra implicación, supongamos que $r+P$ es entero sobre $(I+P)/P$ para todo P minimal y sea $W=\{r^n+a_1r^{n-1}+...+a_n \mid n\in \mathbb{N}_{\geq 0}, a_i\in I^i\}$. Si $0\in W$, hay una ecuación de dependencia entera de r sobre I y se tendría el enunciado. Supongamos que $0\notin W$, como W es un subconjunto de R multiplicativamente cerrado, existe un Q primo de R con intersección vacía con W. Sea P un primo minimal contenido en Q, entonces hay una ecuación de dependencia entera (es decir un elemento de W) que se anula en R/P, luego ese elemento de W está en P. Pero también se tenía $W\cap P\subseteq W\cap Q=\emptyset$, que es absurdo, con lo que debe de ser r entero sobre I y se tiene (2). □

4.2. Clausura entera y reducciones

Una propiedad clave de la clausura entera de ideales es que un ideal es reducción de su clausura. Veremos en esta sección que es así y algún resultado que se deriva de esto, como que la clausura de un ideal es otro ideal íntegramente cerrado.

Definición 4.4. *Sean $J\subseteq I$ ideales. Se dice que J es una reducción de I si existe un $n\in \mathbb{N}$ tal que $I^{n+1}=JI^n$.*

De la definición de sigue que si m $\geq$ n, $I^{m+n}=J^mI^n$, utilizando la igualdad m veces.

Proposición 4.5. *Sea R un anillo, $r\in R$ e I ideal $\subseteq$ R. Entonces $r\in\overline{I}$ si y solo si existe un entero n tal que $(I+(r))^n=I(I+(r))^{n-1}$.*

Demostración. Se supone r $\in\overline{I}$. Sea una ecuación de dependencia entera de r sobre I de grado n: $r^n+a_1r^{n-1}+...+a_n=0$, con $a_i\in I^i$, y se tiene que $a_ir^{n-i}\in I^i(r)^{n-i}\subseteq I(I+(r))^{n-1}$, luego $r^n\in I(I+(r))^{n-1}$ y $(I+(r))^n\subseteq I(I+(r))^{n-1}$. Además, como I $\subseteq$ I + (r), se da siempre que $I(I+(r))^{n-1}\subseteq (I+(r))^n$ y se tiene la igualdad.
Si ahora se supone cierta la igualdad, $r^n=a_1r^{n-1}+...+a_n$ para algunos $a_i\in I^i$ y se tiene una ecuación de dependencia entera de r sobre I. □

Corolario 4.6. *Sea R un anillo, J un ideal de R. Entonces $r\in R$ es entero sobre J si y solo si J es una reducción de J + (r).*

Corolario 4.7. *Sea I un ideal de R y $r\in R$. Son equivalentes:*

1. *$r\in\overline{I}$*

2. *Existe un R-módulo M finitamente generado tal que rM $\subseteq$ IM y tal que si aM = 0, $a\in R$, entonces $r\in\sqrt{0:a}$.*

Además si I es finitamente generado y contiene un elemento no divisor de 0, r es entero sobre I si y solo si existe un R-módulo M fiel tal que $IM=(I+(r))M$.

Demostración. Se supone (2). Se escribe $M = Rb_1 + ... + Rb_m$ y para cada $i = 1,...,m$, $rb_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_j$, con a_{ij} en I. Sea A la matriz:

$$\begin{pmatrix} r-a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & r-a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \cdots & r-a_{m,m} \end{pmatrix} = A^* - rI_m.$$

y $b = (b_1, b_2, .., b_m)^T$. Por construcción Ab = 0, luego det(A)b = Adj(A)Ab=0 y det(A)b_i=0 para todo $i = 1,...,m$, luego det(A)M=0 y se tiene que det(A)r^k = 0 para algún k. Entonces el determinante de A será el polinomio característico de A* en las r. $det(A) = r^m + c_1r^{m-1} + ... + c_m$, donde c_i es suma de los menores principales de orden i de A* y por tanto $c_i \in I^i$. Finalmente al multiplicar por r^k, $0 = det(A)r^k = r^{m+k} + c_1r^{m+k-1} + ... + c_mr^k$, que es una ecuación de dependencia entera de r sobre I.

Se supone ahora (1), sea $r^n + a_1r^{n-1} + ... + a_n = 0$ una ecuación de dependencia entera de r sobre I. Cada $a_i \in I^i$, es decir es suma finita de productos de elementos de I, luego sea J el ideal (finitamente) generado por todos esos elementos. Entonces r es entero sobre J y por 4.5, existe un m tal que $J(J + (r))^{m-1} = (J + (r))^m$. Entonces $M = (J + (r))^{m-1}$ es finitamente generado y $rM = r(J + (r))^{m-1} \subseteq (J + (r))^m \subseteq J(J + (r))^{m-1} = JM \subseteq IM$. Además, si $aM = 0$, $ar^{m-1} = 0$.

Si I es finitamente generado, se toma $J = I$ y se tiene que $IM = (I + (r))M$. Y si I tiene un no divisor de 0, Ann(M) = (0) y es fiel. □

Proposición 4.8. *Sean $K \subseteq J \subseteq I$ ideales de un anillo R.*

1. *Si K es reducción de J y J es reducción de I, K es reducción de I.*

2. *Si K es reducción de I, J también es reducción de I.*

3. *Si I es finitamente generado, J = K + $(r_1,...,r_k)$ y K es reducción de I, K es reducción de J.*

Demostración. 1. Existen n, m ∈ ℕ tal que $KJ^n = J^{n+1}$ y $JI^m = I^{m+1}$, luego $I^{m+n+1} = J^{n+1}I^m = KJ^nI^m \subseteq KI^{m+n} \subseteq I^{m+n+1}$, luego todo son igualdades y K es reducción de I.

2. Existe n ∈ ℕ tal que $I^{n+1} = KI^n \subseteq JI^n \subseteq I^{n+1}$ y de nuevo las contenciones son igualdades y J es reducción de I.

3. Existe un entero tal que $KI^n = I^{n+1}$. Por (2), $K + (r_1,...,r_i)$ es reducción de I para todo $i = 1,...,k$. Como $r_i \in I$, $r_iI^n \subseteq I^{n+1} = KI^n \subseteq (K + (r_1, r_2, .., r_{i-1}))I^n$. Además

si $aI^n = 0$ para algún $a \in R$, $ar^n = 0$ y $r \in \sqrt{0 : a}$. Finalmente, como I^n es finitamente generado, usando 4.7 con $M = I^n$ debe r_i es entero sobre $K + (r_1, r_2, .., r_{i-1})$ para $i = 1, ..., k$ y por 4.5 $K + (r_1, r_2, .., r_{i-1})$ es reducción de $K + (r_1, r_2, .., r_i)$. Aplicando ahora (1) k veces se llega a que K es reducción de J.

□

Corolario 4.9. *Sean $K \subseteq I$ ideales, I finitamente generado. Entonces K es reducción de I si y solo si $I \subseteq \overline{K}$.*

Demostración. Si K es reducción de I, por 4.8, para todo r ∈ I, K es reducción de K + (r), luego por 4.5 r ∈ $\overline{K}$. Ahora si I = $(r_1, r_2, ..., r_k) \subseteq \overline{K}$, r_j es entero sobre K para j= 1,...,k, luego sobre K + $(r_1, r_2, ..., r_{j-1})$. Por 4.5, $K \subseteq K + (r_1) \subseteq K + (r_1, r_2) \subseteq ... \subseteq K + (r_1, r_2, ..., r_k) = I$ son reducciones una a una y por (1) en 4.8 K es reducción de I. □

Corolario 4.10. *La clausura entera de un ideal K en un anillo R es un ideal íntegramente cerrado en R.*

Demostración. Si a, r ∈ R, r entero sobre K, tomando una ecuación de dependencia entera de grado n de r sobre K y multiplicandola por a^n tenemos una ecuación de dependencia entera de ar sobre K, luego es cerrado para el producto por elementos de R.
Si r, s ∈ R, ambos enteros sobre K, tenemos una ecuación de dependencia entera de r sobre K:

$$r^n + k_1 r^{n-1} + ... + k_n = 0$$

con $k_i \in K^i$. Entonces si $k_i = \sum_{l=0}^{l_i} \prod_{j=1}^{i} a_{i,j,l}$, donde $a_{i,j,l}$ está en K para todo i, j, l, y tomándolos todos tenemos un ideal finitamente generado $K' \subseteq K$ y tal que $k_i \in K'^i$. Entonces r ∈ $\overline{K'}$ y de forma similar con s se tiene un K" entre K' y K finitamente generado tal que r, s ∈ $\overline{K''}$. Sea J = K" + (r) e I = J + (s). Por 4.5, K" es reducción de J que es reducción de I, luego por 4.8 K" es reducción de I. Como J e I son finitamente generados, de nuevo por 4.8, $K'' \subseteq K'' + (r, s) \subseteq I$ son reducciones y 4.5 implica que r+s es entero sobre K", luego sobre K, y se tiene que $\overline{K}$ es un ideal.
Finalmente para ver que $\overline{K}$ es íntegramente cerrado, sea r ∈ $\overline{\overline{K}}$. Entonces al igual que antes existe un K' contenido en K finitamente generado con r ∈ $\overline{K'}$. Sea $K' = (k_1, k_2, ..., k_n)$, entonces por el mismo motivo existe un K" finitamente generado tal que cada k_i es entero sobre K". Por 4.8, K" es reducción de K" + K' que es reducción de K" + K' + (r), luego K" es reducción de K" + (r) y por 4.5 r es entero sobre K" (y por tanto sobre K). □

4.3. Ideales monomiales

Los ideales monomiales son un caso particular que permite calcular la clausura entera de forma más sencilla, aunque con muchas variables los algoritmos no son muy eficientes. Es importante para esto ver que la clausura de un ideal monomial es también un ideal monomial.

Definición 4.11. *Sea K un cuerpo. Un monomio del anillo de polinomios* $K[t_1,t_2,...,t_d]$ *es un elemento que se puede escribir como* $kt_1^{n_1}t_2^{n_2}\cdots t_d^{n_d}$ *para* $k\in K, n_1,n_2,...,n_d\in\mathbb{Z}_+$. *Un ideal del anillo de polinomios se dice que es monomial si está generado por elementos monomiales.*

Para la $\mathbb{N}^d$ graduación natural del anillo de polinomios se tiene que los ideales homogéneos son exactamente los monomiales que se tiene porque los elementos homogéneos son exactamente los monomios.

Proposición 4.12. *Sea I un ideal monomial y sea* $r = kt_1^{n_1}t_2^{n_2}\cdots t_d^{n_d}$ *un monomio entero sobre I. Entonces* $\exists\ c_i\in I^i$ *para algún* $i\in\mathbb{N}$ *tal que* $r^i+c_i=0$.

Demostración. Sea $r^n+a_1r^{n-1}+...+a_n=0$ una ecuación de dependencia entera de r sobre I. Como I es monomial, es homogéneo bajo la graduación natural y cada parte homogénea de a_i está también en I^i. En particular, mirando la parte de grado $n(n_1,n_2,...,n_d)$ en la ecuación tenemos:

$$r^n+b_1r^{n-1}+...+b_n=0,$$

donde b_i es la componente de grado $i(n_1,n_2,...,n_d)$ de a_i, así que es una ecuación de dependencia entera de r sobre I. Sea i tal que $b_ir^{n-i}\neq 0$. ENtonces r^n y b_ir^{n-i} son elementos de grado $n(n_1,n_2,...,n_d)$. Pero el conjunto de elementos de grado $n(n_1,n_2,...,n_d)$ de $K[t_1,t_2,...,t_d]$ es un subespacio vectorial de dimensión 1, así que para un $u\in K\setminus\{0\}$, se debe tener $r^n+ub_ir^{n-i}=0$ y, dividiendo por r^{n-i}, tenemos que $r^i+c_i=0$ donde c_i es producto de i monomios de I. □

Proposición 4.13. *Sea K un cuerpo. La clausura entera de un ideal monomial I en un anillo de polinomios* $K[t_1,t_2,...,t_d]$ *es un monomial ideal.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que $\overline{I}$ no es monomial y por lo tanto tampoco homogéneo. Entonces existe un $f\in\overline{I}$ tal que alguna de sus componentes homogéneas no está en $\overline{I}$, y restándole las que sí que estén podemos suponer que ninguna de sus componentes homogéneas está en $\overline{I}$ (esto implica también que no es monomial). Escribamos $f=\sum_{m\in M}f_m$, donde M es un subconjunto finito de $\mathbb{N}^d$ y con f_m homogéneo de grado m. Sea $N\in M$ tal que $f_N\neq 0$.
Probemos primero el resultado para el caso en el que K es algebraicamente cerrado. En ese caso, cualquier automorfismo ϕ lleva una ecuación entera de f sobre I en una de $\phi(f)$ sobre $\phi(I)$. En particular, si tenemos $u_1,u_2,...,u_d$ unidades de K y ϕ_u es el automorfismo que lleva t_i a u_it_i para todo i, entonces $\phi_u(I)=I$ y $\phi_u(f)$ es entero sobre I. Además, ϕ_u cumple que la f_m es distinto de 0 si y solo si $\phi_u(f)_m$ es distinto de 0 para un $m\in\mathbb{N}^d$. Como K es algebraicamente cerrado y f no es múltiplo por un escalar de un monomio entonces existen $u_1,u_2,...,u_d\in K$ tal que $\phi_u(f)$ no es f multiplicado por un polinomio. Como f y

$\phi_u(f)$ son integrales sobre I, y la clausura entera de un ideal en un anillo es otro ideal, $g_1 = u_1^{N_1} \cdot u_1^{N_d} f - \phi_u(f)$ también es entero sobre I y es distinto de 0 porque $\phi_u(f)$ no es f por un polinomio. Por la construcción de g_1, su componente homogénea de grado N vale 0, y si una componentes de g_1 que no tiene grado N es distinta de 0, la componente de ese grado de f también es distinta de 0. Con esto se tiene que g_1 tiene estrictamente menos componentes homogéneas distintas de 0. Repitiendo este proceso sobre g_1 se obtienen $g_2, g_3, ..., g_h$ polinomios de $\overline{I}$ cada vez con menos componentes homogéneas distintas de 0 y se llega a un monomio de $\overline{I}$ que evidentemente tiene sus componentes homogéneas en $\overline{I}$. Pero escribiendo $f = g_0$ se tiene que para $i = 1,2,...,h$, cada componente homogénea de g_i es una componente homogénea de g_{i-1} multiplicada por una unidad así que al menos 1 de las componentes de g_{i-1} está en $\overline{I}$ y se llega a una contradicción por la elección de f.

Ahora sea K es un cuerpo que puede no ser arbitario y sea K' su clausura algebraica. Por lo visto antes, como $f \in \overline{IK'[t_1,t_2,...,t_d]}$ entonces cada monomio de f está en $\overline{IK'[t_1,t_2,...,t_d]}$. Además, como vimos antes, cada monomio r de f satisface una ecuación entera del tipo $r^i - a_i = 0$ para a_i un producto de i monomios de $IK'[t_1,t_2,...,t_d]$, así que cada a_i también es producto de i monomios de I y se tiene que r es entero sobre I.

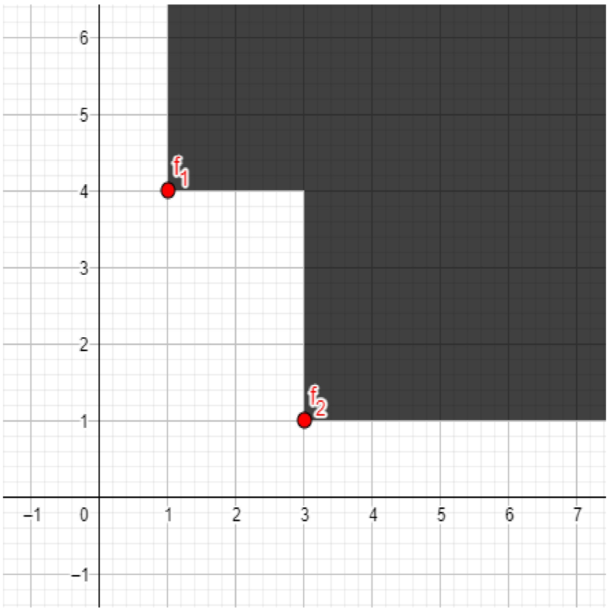
□

Veamos que no se tiene lo mismo para ideales binomiales, es decir la clausura de un ideal binomial no tiene por qué ser binomial (un ideal es binomial si está generado por binomios). El siguiente ejemplo se describe en profundidad en [CHV98, p. 13]:

Ejemplo 4.14. *Sea K un cuerpo de característica 0 (por ejemplo $\mathbb{Q}$) y sea $R = K[x,y,z,w]$. Sea $I = (x^2 - xy, y^2 - xy, z^2 - zw, w^2 - zw)$ que es un ideal binomial. La clausura de I en R es $(x^2 - xy, y^2 - xy, z^2 - zw, w^2 - zw, xz - yz - xw + yw) = I + (xz - yz - xw + yw)$, que tiene que no es binomial (se tendría que ver que los generadores forman una base de Gröbner y el ideal no es binomial por no serlo la base).*

Definición 4.15. *Sea K un cuerpo y sea $R = K[t_1,t_2,...,t_d]$. Sea $r = kt_1^{n_1}t_2^{n_2}\cdots t_d^{n_d}$ un monomio. El vector de exponentes de r es $(n_1,n_2,...,n_d) \in \mathbb{N}^d$. Para un ideal monomial I, el conjunto de los vectores de exponentes de los monomios de I se llama el conjunto de exponentes de I.*

Ejemplo 4.16. *Si estamos en $R = K[x,y]$ para un cuerpo K y tenemos un ideal monomial $I = (f_1, f_2) = (x^3y, xy^4)$ podemos representar el ideal en el plano donde cada coordenada entera equivale a un vector de exponentes:*



Los puntos rojos corresponden a los generadores de I y la zona oscura se corresponde a todos los puntos que tienen al menos una ordenada mayor que los generadores. Cada coordenada entera de esa zona se corresponde con un monomio de I (salvo producto por unidad).

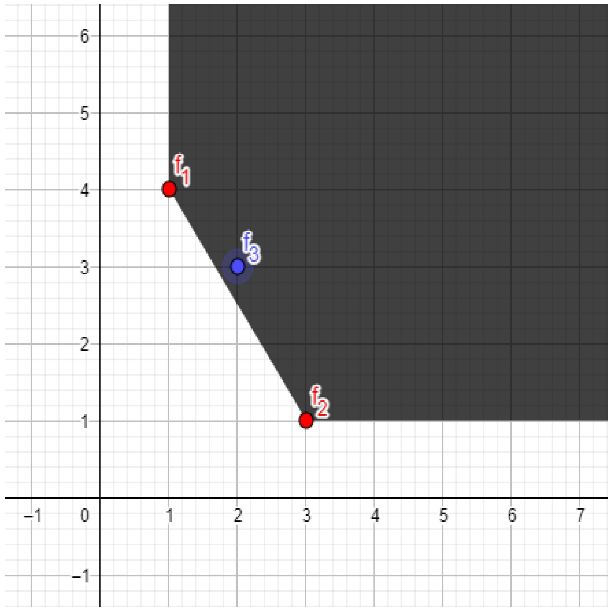
Proposición 4.17. *El conjunto de exponentes de la clausura entera de un ideal monomial es igual a los vectores de exponentes de $\mathbb{N}^d$ de la envolvente convexa del conjunto de exponentes del ideal.*

Demostración. Sean como antes R = $K[t_1,t_2,...,t_d]$ e I un ideal monomial de R. Sean $m_j = t_1^{n_{j1}} t_2^{n_{j2}} \cdots t_d^{n_{jd}}$, j = 1, 2, ..., s, los generadores de I. Sea r = $kt_1^{n_1}t_2^{n_2}\cdots t_d^{n_d}$ un monomio entero sobre I. Como hemos visto por 4.12, existe un i natural tal que $r^i - a_i = 0$ con a_i producto de i monomios de I. Se tiene que un producto de i monomios de I es de la forma $bm_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_s^{k_s}$, donde b es un monomio y $\sum_{j=1}^{s} k_j$ = 1 (puede haber más m_j en b). Entonces $r^i = bm_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_s^{k_s}$ y para l = 1, 2, ..., d se tiene que $n_l \geq \sum_{j=1}^{s} \frac{k_j}{i} n_{jl}$. Entonces encontrar monomios enteros sobre I se reduce a encontrar $c_1, c_2, ..., c_s$ racionales no negativos que suman 1 y tal que:

$$(n_1, n_2, ..., n_d) \geq \sum_{j=1}^{s} c_j (n_{j1}, n_{j2}, ..., n_{jd})$$

Por otro lado, se supone que tenemos $c_1, c_2, ..., c_s$ racionales no negativos que suman 1 y para los que se tiene la desigualdad anterior. Escribiendo $c_j = \frac{k_j}{i}$ para $k_j, i \in \mathbb{N}$ con $i \neq 0$, tenemos $r^i = bm_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_s^{k_s}$ para algún monomio b, así que se tiene que $r \in \bar{I}$. Con esto se prueba que encontrar monomios r = $kt_1^{n_1}t_2^{n_2}\cdots t_d^{n_d}$ enteros sobre I es equivalente a encontrar los racionales no negativos, que suman 1 y que cumplen la desigualdad anterior, pero los vectores de exponentes que cumplen eso son exactamente los que están en la envolvente convexa del conjunto de exponentes de I. $\square$

Ejemplo 4.18. *Si R e I son como 4.16, por el resultado anterior se puede calcular la clausura entera de I calculando la envolvente convexa del conjunto de exponentes del ideal, que en el caso de dos variables es sencillo de calcular pero con más variables es poco eficiente. Gráficamente se traduce en lo siguiente:*



Como f_3 es el único punto con coordenadas enteras que está en la envolvente convexa, la clausura de I en R estará generada por (f_1, f_2, f_3).

Proposición 4.19. *Sea K un cuerpo, sea R = $K[t_1, t_2, ..., t_d]$ y sea I un ideal monomial de R. Si N es una cota superior para los grados de los generadores minimales monomiales de I, entonces los generadores minimales monomiales de la clausura entera de I tienen como mucho grado N + d - 1.*

Demostración. Sea m = $kt_1^{n_1}t_2^{n_2}\cdots t_d^{n_d}$ es un generador de $\overline{I}$. Sea $c_1, c_2, ..., c_s$ números racionales que cumplen 4.3 y que suman 1. Se supone que para algún $i \in \{1,2,...,d\}$, $n_i \geq 1+\sum_{j=1}^{s} c_j n_j i$. Entonces el vector de exponentes de $\frac{m}{t_i}$ también satisface la desigualdad, así que $\frac{m}{t_i}$ está en $\overline{I}$ y m no es un generador minimal. Entonces $n_i \leq 1+\sum_{j=1}^{s} c_j n_j i$ para todo i, así que $\sum_{i=1}^{d} n_i < \sum_{i=1}^{d}(1+\sum_{j=1}^{s} c_j n_j i) = d+N$. □

Lema 4.20. *Sea n un entero positivo y $v_1, v_2, ..., v_r \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$. Sean $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y sea $v = \sum_i a_i v_i$. Entonces existe un subconjunto linealmente independiente $\{v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_s}\}$ y unos $b_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, j= 1, 2, ..., s, tal que:*

$$v = \sum_i b_i v_{i_j},\ y \sum_j b_j \geq \sum_i a_i.$$

Demostración. Si los vectores $v_1, v_2, ..., v_r$ son independientes el resultado es cierto. Se supone entonces que existen $c_i \in \mathbb{R}$ que no son todos 0 y tal que $\sum_i c_i v_i = 0$. Algunos c_i

tienen que ser positivos y algunos negativos, así que multiplicando por -1 todos los c_i si $\sum_i c_i$ >0 (y dejándolos igual si no es el caso) y reindexando podemos asumir $\sum_i c_i \leq 0$ y $c_1 > 0$. Por inducción sobre r, basta probar que v puede ser escrito como combinación lineal de $r-1$ de los v_i, con coeficientes no negativos y tal que su suma es mayor o igual que $\sum_i a_i$.
Supongamos que no se puede y razonemos por contradicción al absurdo, por lo que $a_j \neq 0$, o se podría quitar v_j y estaríamos en el caso $r-1$. Nótese que si $c_i > 0$, entonces $v = \sum_{j\neq i}(a_j - a_i\frac{c_j}{c_i})v_j$ y que $\sum_{j\neq i}(a_j - a_i\frac{c_j}{c_i}) = (\sum_{j\neq i} a_j) - (\frac{a_i}{c_i}\sum_{j\neq i} c_j) = (\sum_j a_j) - (\frac{a_i}{c_i}\sum_j c_j) \geq \sum_j a_j$, porque $a_i, c_i \geq 0$ y $\sum_i c_i \leq 0$. Por la suposición de que el resultado era falso y usando en lo anterior $i = 1$, no puede ser que todos los coeficientes sean mayores que 0, por lo que tiene que ser $a_j - a_i\frac{c_j}{c_i}$ <0 para algún j >1, que solo se puede dar si $c_j > 0$, y reindexando se puede considerar j = 2. Repitiendo este razonamiento para $i = 2$ se tiene $c_3 > 0$ y continuando con el proceso se llega a que todos los c_i son mayores que 0, que es absurdo. □

Teorema 4.21. *Sea $R = \mathbb{R}[t_1, t_2, ..., t_d]$ y sea I un ideal monomial de R. Se supone que $I, I^2, I^3, ..., I^{d-1}$ son íntegramente cerrados. Entonces todas las potencias de I son íntegramente cerradas.*

Demostración. Sea $n \geq d$, podemos suponer que las potencias anteriores a I^n son íntegramente cerradas. Basta ver que si un monomio es entero sobre I^n entonces está en I^n. Sea $\{\underline{t}^{\underline{v}_1}, \underline{t}^{\underline{v}_2}, ..., \underline{t}^{\underline{v}_s}\}$ un conjunto de generadores de I y sea r = $t_1^{n_1} t_2^{n_2} \cdots t_d^{n_d}$ entero sobre I^n. Se tiene entonces existen c_i racionales no negativos tal que $\sum_{i=0}^{s} c_i$ = n y tal que $(n_1, n_2, ..., n_d)$ es componente a componente mayor que $\sum c_i v_i$. Por 4.20 y reindexando los generadores de I, existen racionales no negativos $b_1, b_2, ..., b_h$ y un conjunto de generadores con exponentes linealmente independientes $\{\underline{t}^{\underline{w}_1}, \underline{t}^{\underline{w}_2}, ..., \underline{t}^{\underline{w}_h}\}$ con $\sum_{i=0}^{h} b_i$ >n y tal que $(n_1, n_2, ..., n_d)$ es componente a componente mayor que $\sum b_i w_i$ (al ser los vectores $\underline{w}_1, \underline{w}_2, ..., \underline{w}_h$ linealmente independientes, h no puede ser mayor estrictamente que d). Como $n \geq d \geq h$, existe un j tal que $b_j \geq 1$, así que $(n_1, n_2, ..., n_d) - w_j \geq \sum_i (b_i - \delta_{ij}) w_i$, por lo que el monomio correspondiente a $(n_1, n_2, ..., n_d) - w_j$ es entero sobre I^{n-1}. Pero por la suposición, I^{n-1} es íntegramente cerrado así que ese monomio está en I^{n-1}. Finalmente se tiene que $t_1^{n_1} \cdots t_d^{n_d} \in I^{n-1}\underline{t}^{\underline{w}_j} \subseteq I^n$ y llega al resultado. □

4.4. Otros resultados de la clausura entera de ideales

Finalmente demostramos algunos resultados que se usarán más adelante en el trabajo.

Proposición 4.22. *Sea R un anillo íntegramente cerrado en su anillo total de fracciones. Entonces para cualquier ideal I y cualquier no divisor de cero $f \in R$, $\overline{fI} = f\overline{I}$. En particular, cualquier ideal principal generado por un elemento no divisor de 0 en R es íntegramente cerrado.*

Demostración. Si r es entero sobre fI, tenemos una ecuación de dependencia entera:

$$r^n + b_1 f r^{n-1} + \ldots + b_n f^n = 0,$$

con $b_i \in I^i$. Diviendo por f^n tenemos una ecuación de dependencia entera de $\frac{r}{f}$ sobre R:

$$\frac{r}{f}^n + b_1 \frac{r}{f}^{n-1} + \ldots + b_n = 0.$$

Como $\frac{r}{f}$ está en el anillo total de fracciones y R es íntegramente cerrado, entonces $\frac{r}{f}$ está en R y la ecuación anterior es también una ecuación de dependencia entera de $\frac{r}{f}$ sobre I, por lo que $r \in f\bar{I}$ y se tiene que $\overline{fI} \subseteq f\bar{I}$.
Si ahora $r \in f\bar{I}$, $r = sf$ para $s \in \bar{I}$. Multiplicando una ecuación de dependencia entera de s sobre I de grado n por f^n, tenemos una ecuación de $sf = r$ sobre fI, así que $f\bar{I} \subseteq \overline{fI}$. □

Proposición 4.23. *Sea $R \subseteq S$ una extensión entera de anillos y sea I un ideal de R. Entonces $\overline{IS} \cap R = \bar{I}$.*

Demostración. Evidentemente $\bar{I} \subseteq \overline{IS}$ y los elementos de $\bar{I}$ están en R así que $\bar{I} \subseteq \overline{IS} \cap R$. Sea $r \in \overline{IS} \cap R$, entonces satisface una ecuación de dependencia entera sobre IS, así que recopilando los elementos de I y S que aparecen en los coeficientes (que es un número finito) y sea J el ideal finitamente generado por los elementos de I y T el R-álgebra finitamente generado por los de S, tenemos que r es entero sobre JT. Si tuvieramos el resultado sobre ideales finitamente generados y R-álgebras finitamente generados entonces $r \in \overline{JT} \cap R \subseteq \bar{J} \subseteq \bar{I}$ y se tendría la proposición.
Asumamos entonces que I es finitamente generado y S es un R-módulo finitamente generado. Entonces si $r \in \overline{IS} \cap R$, IS es reducción de $I + (r)S$, así que existe un n tal que $I(I+(r))^n S = (I+(r))^{n+1} S$. Sea $M = (I+(r))^n S$ que es un R-módulo finitamente generado y se tiene que $rM \subseteq IM$ y que si $aM = 0$ para algún $a \in R$, entonces $(ar)^n = 0$. Por 4.7 se tiene que $r \in \bar{I}$. □

Proposición 4.24. *Sea R un anillo y S un R-álgebra fielmente plana. Para cualquier ideal I de R, $\overline{IS} \cap R = \bar{I}$. En particular si (R,$\mathfrak{m}$) es local y noetheriano, para cualquier ideal I de R se tiene que $\overline{I\hat{R}} \cap R = \bar{I}$.*

Demostración. Al igual que antes se tiene $\bar{I} \subseteq \overline{IS} \cap R$. Si $r \in \overline{IS} \cap R$, existe un n tal que $r^{n+1} \in (I+(r))^{n+1} S = I(I+(r))^n S$. Pero $r^{n+1} \in I(I+(r))^n S \cap R = I(I+(r))^n$ (por ser S fielmente plana), así que I es reducción de $I+(r)$ y r es entero sobre I. □

5. Valoraciones

Las valoraciones son homomorfismos entre un cuerpo (por ejemplo el cuerpo de fracciones de un dominio) y un grupo abeliano totalmente ordenado, que intuitivamente permiten 'medir'. Las valoraciones están relacionadas con los anillos de valoración, que como veremos se pueden utilizar para describir la clausura entera de un ideal.

5.1. Valoraciones

Definición 5.1. *Un grupo abeliano totalmente ordenado es un grupo (G,+) con un orden total definido "$\geq$"que es consistente con la estructura de grupo, es decir, si para todo a, b, c $\in$ G con a $\geq$ b se tiene que a + c $\geq$ b + c.*

Definición 5.2. *Sea K un cuerpo. Una valoración sobre K (K-valoración) es un homomorfismo v de grupos del grupo multiplicativo $K* = K \setminus \{0\}$ en (G,+) un grupo abeliano totalmente ordenado, tal que si x, y $\in$ K^*,*

$$v(xy) = v(x) + v(y) \ (\textit{se tiene por ser homomorfismo}),$$

$$v(x+y) \geq min\{v(x), v(y)\}.$$

Como propiedades inmediatas se tiene que $v(1) = 0$, y que $v(x) = -v(-x)$.
Si R es un dominio, G como en la definición anterior y v una aplicación de $R \setminus \{0\}$ en G tal que:

$$v(xy) = v(x) + v(y) \tag{7}$$

$$v(x+y) \geq min\{v(x), v(y)\} \tag{8}$$

entonces v se puede extender de forma única a K^*, siendo K el cuerpo de fracciones de R, definiendo $v(\frac{x}{y}) = v(x) - v(y)$. para x,y distintos de 0. De esta forma también se llamará valoración a una aplicación de $R \setminus \{0\}$ en G que cumpla 7 y 8. También se extiende a $v : K \to G \cup \{\infty\}$ con $v(0) = \infty$ y usando $\infty + g = g + \infty = \infty + \infty = \infty$ y $g < \infty$ para todo g $\in$ G.

Definición 5.3. *Sea K un cuerpo, dos valoraciones $v : K^* \to G$ y $v' : K^* \to G'$ son equivalentes si existe un isomorfismo de grupos $\phi : Im(v) \to Im(v')$ que mantenga el orden tal que para todo $f \in K^*$, $\phi(v(f)) = v'(f)$.*

Definición 5.4. *Una valoración del cuerpo de fracciones del anillo $k[X_1, ..., X_d]$ siendo k un cuerpo es monomial con respecto a $X_1, ..., X_d$ si para todo polinomio $f = \sum_{\underline{v} \in G} c_{\underline{v}} \underline{X}^{\underline{v}}$, $v(f) = min\{v(\underline{X}^{\underline{v}}) / c_{\underline{v}} \neq 0\}$.*

Si una valoración es monomial, basta dar los valores de $v(X_i)$ para definirla:

Ejemplo 5.5. *Sea $R = k[x,y]$ donde k es un cuerpo y sea K el cuerpo de fracciones de R. Definiendo la valoración monomial v por $v(x) = n$ y $v(y) = m$ para $n,m \in \mathbb{Z}$, si $f(x,y) = \sum_{i=0}^{n_i} \sum_{j=0}^{n_j} r_{i,j} x^i y^j$, entonces $v(f) = min\{v(x^i y^j) \mid r_{i,j} \neq 0\} = min\{in + jm) \mid r_{i,j} \neq 0\}$, de donde igualando $in + jm$ a 0 se deduce que los elementos del subcuerpo $k(\frac{x^m}{y^n})$ tienen imagen 0 por la valoración.*

No todas las valoraciones son monomiales:

Ejemplo 5.6. *Sea $R = k[x,y]$ donde k es un cuerpo y sea K el cuerpo de fracciones de R. Sea t un elemento de $xk[[x]]$ trascendente sobre k[x]. Escribamos $t = \sum_{i\geq 1} t_i x^i$ y sea $v : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$, definida por:*

$$v(f(x,y)) = max\{n \mid f(x,t) \in x^n k[[x]]\}.$$

Se tiene que v es una valoración en R, ya que si tenemos $f,g \in R$ con $f(x,t), g(x,t) \in x^n k[[x]]$, entonces $(f+g)(x,t) \in x^n k[[x]]$ y $v(fg)$ es mayor que el mínimo de $v(f)$ y $v(g)$ y si además $f(x,t) \in x^n k[[x]], g(x,t) \in x^m k[[x]]$, entonces $fg \in x^{m+n} k[[x]]$, por lo que $v(fg) = n+m = v(f)+v(g)$. Al extender v a K también será valoración, pero no será monomial, ya que si n es el entero más pequeño tal que $t_n \neq 0$ y m es el siguiente entero tal que $t_m \neq 0$, entonces $v(Y) = n$, $v(t_n x^n) = n$ y $v(y - t_n x^n) = v(t_m x^m) = m > n$.

5.2. Anillos de valoración

Definición 5.7. *Sea K un cuerpo y v una K-valoración. La imagen de K^* por v, que es un grupo abeliano totalmente ordenado, es el grupo de valores de v. Si K es el cuerpo de fracciones de un dominio V y satisface que para todo $x \in K$, o bien $x \in V$ o $x^{-1} \in V$, se denomina un anillo de K-valoración (también se denominará anillo o dominio de valoración si no hay confusión).*

Para los anillos de valoración, la inclusión de ideales es un orden total. Si I y J son dos ideales de V se tendrá que o bien $I \subseteq J$ o bien $J \subseteq I$. Veamos que es así:
Sean $x \in I \setminus J \neq \emptyset$ e $y \in$ J distinto de 0. Entonces o bien $xy^{-1} \in V$ o $yx^{-1} \in V$. Si $xy^{-1} \in V$, entonces $x = xy^{-1}y \in J$, que es una contradicción. Si $yx^{-1} \in V$, entonces $y = yx^{-1}x \in I$. Se concluye que o bien $I \setminus J = \emptyset$ o $J \subseteq I$, y debe ser que los ideales de V están totalmente ordenados con la inclusión.
Otra propiedad de V es que tiene un único ideal maximal $\mathfrak{m}_V = \{x \in V | x = 0 \text{ o } x^{-1} \notin V\}$.
Finalmente, dada una valoración se puede construir un anillo de valoración

$$R_v = \{f \in K^* | v(f) \geq 0\} \cup \{0\},$$

que es un subanillo de K cuyo único ideal maximal es $\mathfrak{m}_v = \{f \in K^* | v(f) \geq 0\}$ y además es anillo de valoración. R_v se dice que es el anillo de valoración de v. Si dos valoraciones son equivalentes tienen el mismo anillo de valoración.

Proposición 5.8. *Sea V un dominio de valoración con cuerpo de fracciones K. Sea $\Gamma_V = K^*/V^*$, donde $V^* \subseteq K^*$ son grupos multiplicativos de unidades y sea $v : K^* \to \Gamma_V$ el homomorfismo de paso al cociente. Entonces Γ_V es un grupo abeliano totalmente ordenado y el grupo de valoración de v que es una K-valoración.*

Demostración. Γ_V es abeliano porque lo hereda de K^*. Se define el siguiente orden: Sean a, b en Γ_V y x, y en K^* tal que v(x) = a y v(y) = b. Entonces a $\leq$ b si $yx^{-1} \in V$. Es un orden total porque al ser V anillo de valoración, o bien $yx^{-1} \in$ V o bien $xy^{-1} \in$ V. Además es compatible con la estructura de grupo, ya que si a, b, c $\in \Gamma_V$ y x, y, z en K^* los tienen como imágenes por v, con a $\leq$ b, entonces $(yz)(xz)^{-1} = yx^{-1} \in$ V luego ac $\leq$ bc.
Veamos que v es una K-valoración. Sean x, y en K, se tiene que $v(xy) = v(x)v(y)$ por ser homomorfismo. Para la otra propiedad, por ser V dominio de valoración, o bien $xy^{-1} \in$ V o bien $yx^{-1} \in$ V, se supone lo primero. Entonces $xy^{-1} + 1 = (x+y)y^{-1} \in$ V, así que para el orden anterior, $v(x+y) \geq v(y) \geq min\{v(x), v(y)\}$. El otro caso es igual. Como v es sobreyectiva, Γ_V es el grupo de valoración de v. □

Definición 5.9. *Sea Γ un grupo abeliano totalmente ordenado. Decimos que Γ es arquimediano si para todo $g, h \in \Gamma$ con $g > 0$, existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $ng > h$ (en el sentido de sumar n veces g).*

Teorema 5.10. *Sea Γ un grupo abeliano totalmente ordenado y arquimediano. Entonces Γ es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Para cada $r = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, con $n, m \in \mathbb{Z}$ y $m > 0$ diremos que $ra < b$ si $na < mb$ (no depende de la representación de r como cociente).
Sea $a > 0$ en Γ y para cada $b > 0$ en Γ sea $Q_b = \{r \in \mathbb{Q} \mid ra \leq b\}$. Como Γ es arquimediano, para cada b existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $b < na$, así que Q_b tiene cota superior. Se define $\phi : \Gamma \to \mathbb{R}$ como:

$$\phi(b) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ sup(Q_b) & b > 0 \\ -\phi(-b) & b < 0 \end{cases}$$

Veamos primero que es un homomorfismo, para lo que basta ver que $\phi(b+c) = \phi(b) + \phi(c)$. Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ con $r \leq \phi(b)$ y $s \leq \phi(c)$, es decir que $ra \leq b$ y $sa \leq c$, pero entonces $a(r+s) \leq b+c$ con lo que $r+s \leq \phi(b+c)$ y se tiene que $\phi(b)+\phi(c) \leq \phi(b+c)$. Supongamos ahora que $\phi(b)+\phi(c) < \phi(b+c)$. Entonces existen $r, s \in \mathbb{Q}$ con $r > \phi(b)$, $s > \phi(c)$ y con $r+s < \phi(b+c)$. Entonces $(r+s)a \leq b+c$ con $ra > b$ y $sa > c$ lo cual es absurdo así que debe ser $\phi(b+c) = \phi(b)+\phi(c) y \phi$ es homomorfismo.
Si además ϕ conserva las desigualdades se tendrá que es inyectiva. Sea $b > 0$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < nb$, por lo que $\frac{1}{n} \in Q_b$ así que $\phi(b) > \frac{1}{n} > 0$. Por ser ϕ además homomorfismo se concluye que preserva todas las desigualdades. □

5.3. Más propiedades

Proposición 5.11. *Un dominio de valoración es íntegramente cerrado (en su anillo total de fracciones).*

Demostración. Sea V un dominio de valoración, K su anillo total de fracciones y $r \in K$ entero sobre V. Entonces $r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ para $a_i \in V$. Si $r \notin V$, entonces $r^{-1} \in V$, así que multiplicando la ecuación anterior por r^{-n} se tiene $1 + a_1 r^1 + \ldots + a_n r^{-n} = 0$, con lo que $1 \in r^{-1}V$, así que r^{-1} es unidad en V y $r \in V$, que contradice $r \notin V$. □

Lema 5.12. *Sea V un dominio de valoración. Sea I un ideal de V y sea G un conjunto generador finito de I. Entonces existe un $g \in G$ tal que $gV = I$ (esto significa que la valoración correspondiente a V y restringida a $I \setminus \{0\}$ alcanza un mínimo en z).*

Demostración. Sea $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Si n = 1 el resultado es inmediato. Supongamos entonces que existe un $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ tal que $x_i V = I' = (x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Como V es de valoración, entonces o bien $x_1 x_i^{-1}$ o bien $x_1^{-1} x_i$ están en V. En el primer caso, $x_1 \in x_i V$, luego $I = x_i V$. En el segundo caso, $x_i \in x_1 V$, con lo que $x_i V \subseteq x_1 V$ así que debe ser $x_1 V = I$. □

Lema 5.13. *Sea R un dominio con cuerpo de fracciones K. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal primo de R. Para todo $x \in K*$, o bien $\mathfrak{m}R[x] \neq R[x]$ o bien $\mathfrak{m}R[x^{-1}] \neq R[x^{-1}]$.*

Demostración. Podemos localizar en P y suponer que R es local con ideal maximal $\mathfrak{m} = P$. Si $\mathfrak{m}R[x^{-1}] = R[x^{-1}]$, entonces $1 = a_0 + a_1 x^{-1} + \ldots + a_n x^{-n}$ para algunos $a_i \in \mathfrak{m}$, por lo que multiplicando por x^n, se tiene $(1 - a_0)x^n = a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, donde $(1 - a_0)$ es unidad de R porque $a_0 \in \mathfrak{m}$. Entonces x es entero sobre R y R[x] es una extensión entera de R, luego por 3.20, $\mathfrak{m}R[x] \cap R = \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}R[x]$ no puede ser igual a $R[x]$. Si $\mathfrak{m}R[x] = R[x^{]}$ se llega a la otra conclusión. □

Teorema 5.14. *Sea R un dominio, sea K el cuerpo de fracciones de R y P un ideal primo de R distinto de (0). Entonces existe un dominio de valoración V entre R y K tal que $\mathfrak{m}_V \cap R = P$, donde $\mathfrak{m}_V$ es el ideal maximal de V.*

Demostración. Localizando en P podemos suponer que R es local con ideal maximal $\mathfrak{m}$=P. Sea Λ el conjunto de anillos locales $(S, \mathfrak{m}_S)$ tal que $R \subseteq S$ y $\mathfrak{m}S \subseteq \mathfrak{m}_S$, en el que definimos un orden parcial $\leq$: $(S, \mathfrak{m}_S) \leq (S', \mathfrak{m}_{S'})$ si $s \subseteq S'$ y $\mathfrak{m}_S S' \subseteq \mathfrak{m}_{S'}$. Cada cadena ascendente tiene una cota superior, así que por el lema de Zorn, Λ tiene un elemento maximal $(V, \mathfrak{m}_V)$.
Veamos que V es un dominio de valoración. Si $x \in K$, entonces por el lema anterior, si $\mathfrak{m}_V$ no es un ideal propio al extenderlo a $V[x]$ lo es al extenderlo a $V[x^{-1}]$ (y viceversa). Supongamos que $\mathfrak{m}_V V[x]$ es propio. Sea M un maximal de $V[x]$ que lo contenga y sea $(S, \mathfrak{m}_S) = (V[x]_M, MS)$. Entonces $(S, \mathfrak{m}_S)$ es un elemento de Λ que contiene V que es maximal así que debe ser $(S, \mathfrak{m}_S) = (V, \mathfrak{m}_V)$. Como $x \in S$, se tiene que $x \in V$. En el caso que

consideráramos que $\mathfrak{m}_V V[x^{-1}]$ es propio se llegaría a $x^{-1} \in V$, por lo que V es un dominio de valoración.
Finalmente, por construcción $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{m}$ y se tiene el teorema. $\square$

5.4. Valoraciones y clausura entera

Proposición 5.15. *Sea R un dominio con cuerpo de fracciones K, I un ideal de R y V un anillo de valoración entre R y K. Entonces* $IV = \overline{I}V = \overline{IV}$.

Demostración. Como $I \subseteq \overline{I}$, $IV \subseteq \overline{I}V$. Además como $\overline{I} \subseteq \overline{IV}$, también $\overline{I}V \subseteq \overline{IV}$. Sea entonces $r \in \overline{IV}$. Tenemos $r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_n = 0$ para $a_i \in I^i V$. Entonces existe un ideal $J \subseteq I$ finitamente generado y tal que $a_i \in J^i V$ para todo i. Por 5.12, existe un $j \in J$ no divisor de cero tal que $JV = jV$, así que r satisface una ecuación entera de grado n sobre jV. Por 4.22, $r \in jV \subseteq JV \subseteq IV$, por lo que $\overline{IV} = IV$ y se tienen todas las igualdades. $\square$

Proposición 5.16. *Sea R un dominio, I un ideal de R y K el cuerpo de fracciones de R. Entonces:*

$$\overline{I} = \bigcap_V IV \cap R,$$

donde V varía en los dominios de valoración tal que $R \subseteq V \subseteq K$.

Demostración. Por el resultado anterior, $\overline{I} \subseteq \bigcap_V \overline{I}V \cap R = \bigcap_V IV \cap R$. Para probar la otra inclusión, sea $r \in \bigcap_V IV \cap R$. Sea $S = R[\frac{I}{r}]$, que tiene el mismo cuerpo de fracciones que R. Para todo V entre S y K, $r \in IV$, así que para cada V, el ideal $\frac{I}{r}S$ de S se extiende al ideal unidad en V. Supongamos que $\frac{I}{r}S$ es propio en S y sea $\mathfrak{m}$ un maximal de S que contiene a $\frac{I}{r}S$. Por 5.14 existe un $(V, \mathfrak{m}_V)$ dominio de valoración entre S y K tal que $\mathfrak{m}V \subseteq \mathfrak{m}_V$. Como $(\frac{I}{r}S)V = V \not\subseteq \mathfrak{m}_V$, $\frac{I}{r}S$ no puede estar contenido en $\mathfrak{m}$ y se tiene que $\frac{I}{r}S = S$. Podemos escribir entonces $1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{r^i}$ para $a_i \in I^i$. Multiplicando esto por r^n tenemos una ecuación de dependencia entera de r sobre I, luego r es entero sobre I. $\square$

Proposición 5.17. *Sea R un anillo, I un ideal de R y* $r \in R$. *Son equivalentes:*

1. $r \in \overline{I}$.

2. *para cualquier P primo minimal de R y para todos los anillos de valoración V entre* R/P *y* $\kappa(P)$, $r \in IV$.

Demostración. Se tiene como consecuencia del resultado anterior y 4.3. $\square$

Corolario 5.18. *Sea R un anillo e I, J ideales de R. Entonces,* $\overline{I} \cdot \overline{J} \subseteq \overline{IJ}$.

Demostración. Sean r, $s \in R$ enteros sobre I y J respectivamente. Por la proposición anterior, para cualquier P primo minimal de R y cualquier V anillo de valoración entre R/P y $\kappa(P)$ se tiene que $r \in IV$ y $s \in JV$, con lo que $rs \in IJV$. Como esto se tiene para todo P primo minimal de R y V anillo de valoración entre R/P y $\kappa(P)$ de nuevo por el resultado anterior se tiene que $rs \in \overline{IJ}$. $\square$

6. Álgebras de Rees

Las álgebras de Rees de ideales son ideales del anillo de polinomios que funcionan bien con la clausura entera ya que, como veremos, la clausura del álgebra de Rees de un ideal es el álgebra de la clausura de ideal y se pueden utilizar para calcular la clausura de potencias de ideales.

Definición 6.1. *Sea R un anillo, I un ideal de R y t una variable. El álgebra de Rees de I es el subanillo de $R[t]$ definido por:*

$$R[It] = \{\sum_{i=0}^{n} r_i t^i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in I^i\}$$

Se define también el álgebra de Rees extendido que es el siguiente subanillo de $R[t,t^{-1}]$:

$$R[It,t^{-1}] = \{\sum_{i=-n}^{n} r_i t^i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in I^i\},$$

donde $I^i = R$ si $i \leq 0$.

Si J es un ideal de R, se tiene la siguiente cadena de contenciones:

$$J \subseteq JR[It] \subseteq JR[It,t^{-1}] \cap R \subseteq JR[t,t^{-1}] \cap R = J,$$

luego todas son igualdades y todo ideal de R es contracción de uno de R[It] y de $R[It,t^{-1}]$. También se tiene que:

$$\frac{R}{J} \subseteq \frac{R[It]}{JR[t,t^{-1}] \cap R[It]} \subseteq \frac{R[It,t^{-1}]}{JR[t,t^{-1}] \cap R[It,t^{-1}]} \subseteq \frac{R[t,t^{-1}]}{JR[t,t^{-1}]},$$

donde $\frac{R[It]}{JR[t,t^{-1}] \cap R[It]}$ es isomorfo al álgebra de Rees de la imagen de I en R/J y $\frac{R[It,t^{-1}]}{JR[t,t^{-1}] \cap R[It,t^{-1}]}$ es isomorfo a su álgebra de Rees extendida. En particular si J = P es un primo minimal de R, $JR[t,t^{-1}] \cap R[It]$ y $JR[t,t^{-1}] \cap R[It,t^{-1}]$ son primos minimales en sus respectivos anillos. Además, cualquier nilpotente de R[It] o de $R[It,t^{-1}]$ es también nilpotente en $R[t,t^{-1}]$ así que pertenece a $\cap_{P \in MinR} PR[t,t^{-1}]$. Entonces cualquier primo minimal de cualquiera de las dos álgebras de Rees es contracción de un primo minimal de $R[t,t^{-1}]$ que son de la forma $PR[t,t^{-1}]$ con P minimal de R. En conclusión, se tiene:

$$dimR[It] = max\{dim(\frac{R}{P}[\frac{I+P}{P}t]) \mid P \in Min\ R\} \tag{9}$$

$$dimR[It,t^{-1}] = max\{dim(\frac{R}{P}[\frac{I+P}{P}t,\ t^{-1}]) \mid P \in Min\ R\} \tag{10}$$

Lema 6.2. *Sea $R \subseteq S$ una extensión de dominios noetherianos. Sea Q un ideal primo de S y $P = Q \cap R$. Entonces:*

$$htQ + trdeg_{\kappa(P)}\kappa(Q) \leq htP + trdeg_R S.$$

Demostración. Localizando en P podemos suponer que R es local y P es su ideal maximal. Tenemos una cadena de ideales primos en S: $Q_0 \subset Q_1 \subset ... \subset Q_h = Q$, donde h = ht Q. Para cada $i = 1,2,...,h$, sea $y_i \in Q_i \setminus Q_{i-1}$. Además, si $t = trdeg_{\kappa(P)}\kappa(Q)$, existen $z_1, z_2, ..., z_t \in S$ algebraicamente independientes tal que su imagen en $\kappa(Q)$ es trascendental sobre $\kappa(P)$. Sea $S' = R[y_1, y_2, ..., y_h, z_1, z_2, ..., z_t] \subseteq S$. Si se tuviera el resultado para dominios finitamente generados sobre R, se tendría que ht $Q' + trdeg_{\kappa(P)}\kappa(Q') \leq htP + trdeg_R S' \leq htP + trdeg_R S$ y se tendría el resultado.
Entonces podemos suponer que S es finitamente generado sobre R. Escribamos entonces $S = R[x_1, x_2, ..., x_n]$. Si n = 1 y x_1 es trascendente, entonces Q = PS o tiene altura igual a ht(PS) + 1 = ht(P) + 1. En el primer caso, $trdeg_{\kappa(P)}\kappa(Q)$ = 1 y en el segundo $trdeg_{\kappa(P)}\kappa(Q)$ = 0 así que en ambos casos se tiene la desigualdad del enunciado porque $trdeg_R S = 1$, que además será también igualdad. Si x_1 no es trascendente, entonces $trdeg_R S = 0$. Sabemos entonces que S = R[X]/I para I un ideal primo distinto de cero de R[X]. Como $R \subseteq S$, localizando en los elementos de R distintos de cero se tiene que ht I = 1. Sea Q' el ascendido de Q en R[X]. Entonces $Q' \cap R = P$. Como X es trascendente sobre R, por el caso trascendente se tiene que $htQ' + trdeg_{\kappa(P)}\kappa(Q') = htP + trdeg_R R[X] = htP + 1$. Pero como $htQ + 1 = htQ + htI \leq htQ'$ y $\kappa(Q) = \kappa(Q')$, se tiene $htQ + trdeg_{\kappa(P)}\kappa(Q) \leq htP$.
Se supone ahora que el resultado es cierto para $i = 1,2,...,n-1$. Entonces se tiene:

$$htQ + trdeg_{\kappa(Q \cap R[x_1])}\kappa(Q) \leq htP + trdeg_{R[x_1]} S,$$

$$ht(Q \cap R[x_1]) + trdeg_{\kappa(P)}\kappa(Q \cap R[x_1]) \leq htP + trdeg_R R[x_1].$$

con lo que aplicando dos veces la hipótesis de inducción se tiene el resultado. □

Teorema 6.3. *Sea R un anillo Noetheriano e I un ideal de R. Entonces dim R es finita si y solo si la dimensión de alguna de las dos álgebras de Rees es finita y además:*

1. *dim* $R[It] \begin{cases} dim\ R & \text{si } I \not\subseteq P \text{ para algún } P \text{ primo con } dim(R/P) = dim\ R, \\ dim\ R + 1 & \text{si no ocurre.} \end{cases}$

2. *dim* $R[It, t^{-1}]$ = *dim R + 1*

3. *Si* $\mathfrak{m}$ *es el único ideal maximal de R e* $I \subseteq \mathfrak{m}$ *entonces* $\mathfrak{m}R[It, t^{-1}]$ + $ItR[It, t^{-1}]$ + $t^{-1}R[It, t^{-1}]$ *es un ideal maximal en* $R[It, t^{-1}]$ *de altura dim R + 1.*

Demostración. Para ver cuánto vale dim $R[It]$, primero hay que notar que vale probarlo para el caso en que R es un dominio y la dimensión de la de R si I = (0) y dim R + 1 en el resto de casos. Si se tiene este resultado e $I \not\subseteq P$ para P primo con dim(R/P) = dim R, entonces R/P es un dominio y la imagen de I en R/P no es el ideal (0) y por la fórmula para la dimensión de 9, dim R[It]= dim $\frac{R}{P}[\frac{I}{P}t]$ = dim R/P + 1 = dim R + 1. Si se tiene que I está contenido en todos los primos P tal que dim R/P = dim R, entonces para estos primos $dim(\frac{R}{P}[\frac{I+P}{P}t]$ = dim R y para el resto $\frac{R}{P}[\frac{I+P}{P}t] \subseteq \frac{R}{P}[t]$ cuya dimensión es como mucho la de R. Entonces se puede suponer que R es un dominio. Si I es el ideal cero entonces claramente dim R[It] = dim R. Se supone I distinto de (0). Por 6.2, para cualquier Q primo de R[It], $htQ \leq ht(Q \cap R) + 1 \leq dimR + 1$, así que $dimR[It] \leq dimR + 1$. Sea P = ItR[It]. Se tiene que $P \cap R$ = (0), $It \subseteq P$, $htP \geq 0$ y $R[It]/P \cong R$, con lo que P es primo y $dimR[It] \geq dimR + 1$, así que se tiene (1).
Al igual que antes pero por 10 se supone que R es un dominio y por B2.5, dim $R[It, t^{-1}] \leq$ dim R + 1 y como dim $R[It, t^{-1}] \geq$ dim $R[It, t^{-1}]_{t^{-1}}$ = dim $R[t, t^{-1}]$ = dim R + 1 y se tiene (2).
Ahora sea $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_h = \mathfrak{m}$ una cadena saturada de ideales primos distintos en R con h = ht $\mathfrak{m}$. Sea $Q_i = P_iR[t, t^{-1}] \cap R[It, t^{-1}]$. Como $Q_i \cap R = P_i$, $Q_0 \subset Q_1 \subset ... \subset Q_h$ es una cadena de ideales primos distintos de R[It]. $Q_h = \mathfrak{m}R[t, t^{-1}] \cap R[It, t^{-1}] = \mathfrak{m}R[It, t^{-1}] + ItR[It, t^{-1}]$ que está contenido en el ideal maximal $Q_h + t^{-1}R[It, t^{-1}]$ cuya altura será dim R + 1 y se tiene (3). □

6.1. Clausura de las álgebras de Rees

Proposición 6.4. *Sea R un anillo, I un ideal de R y t una variable. La clausura de R[It] en R[t] es igual al siguiente anillo graduado:*

$$R \oplus \bar{I}t \oplus \overline{I^2}t^2 \oplus \overline{I^3}t^3 \oplus ...$$

También se tiene que la clausura de $R[It, t^{-1}]$ en $R[t, t^{-1}]$ es igual a:

$$... \oplus Rt^{-2} \oplus Rt^{-1} \oplus R \oplus \bar{I}t \oplus \overline{I^2}t^2 \oplus ...$$

Demostración. Por 3.27, la clausura entera de R[It] en R[t] es un submódulo $\mathbb{N}$-graduado de R[t]. Sea esta S y sea S_k la parte de grado k $\in \mathbb{N}$. Si s $\in S_k$, s = s_kt^k, con $s_k \in R$. Como s entero sobre R[It], tenemos la ecuación de dependencia entera:

$$s_k^nt^{kn} + a_1s_k^{n-1}t^{k(n-1)} + a_2s_k^{n-2}t^{k(n-2)} + ... + a_{n-1}s_k^1t^k + a_n = 0,$$

donde $a_i \in$ R[It], luego $a_i = \sum_{j=0}^{k_i} a_{i,j}t^j$, con $a_{i,j} \in I^j$. Juntando el coeficiente de t^{kn}, se tiene:

$$t^{kn}(s_k^n + a_{1,k}s_k^{n-1} + a_{2,2k}s_k^{n-2} + \ldots + a_{n-1,(n-1)k}s_k^1 + a_{n,nk}) = 0$$

, donde $a_{i,ik} \in I^{ik}$, así que s_k es entero sobre I^k y $S_k \subseteq \overline{I^k}t^k$. Para ver la otra inclusión, si s = $s_k t^k$ con s_k entero sobre I^k, tenemos una ecuación entera de grado n y al multiplicarla por t^{kn} se tiene una de s sobre R[It]. De forma similar se prueba $R[It,t^{-1}]$. □

Corolario 6.5. *Sea R un anillo G-graduado con $G = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^e$ e I un ideal homogéneo de R. Entonces $\overline{I}$ es también G-graduado.*

Demostración. Si R es G-graduado, entonces $R[It]$ es $G \oplus \mathbb{N}$-graduado. Por 3.27, la clausura entera de $R[It]$ en $R[t]$ es $G \oplus \mathbb{N}$-graduada y por el resultado anterior cada $\overline{I^n}$ es G-graduada y en particular $\overline{I}$. □

Proposición 6.6. *Sea R un anillo y $\overline{R}$ su clausura entera en su anillo total de fracciones. Entonces la clausura entera de R[It] en su anillo total de fracciones es:*

$$\overline{R} \oplus \overline{I\overline{R}}t \oplus \overline{I^2\overline{R}}t^2 \oplus \overline{I^3\overline{R}}t^3 \oplus \ldots$$

Además la clausura entera de $R[It,t^{-1}]$ en su anillo total de fracciones es:

$$\ldots \oplus \overline{R}t^{-2} \oplus \overline{R}t^{-1} \oplus \overline{R} \oplus \overline{I\overline{R}}t \oplus \overline{I^2\overline{R}}t^2 \oplus \ldots$$

Demostración. Se tiene que para todo n, $\overline{I^n\overline{R}} = \overline{\overline{I^nR}}$. Además, como $\overline{R}$ está contenido en la clausura entera de R[It], también lo está $I\overline{R}$ y por lo tanto $\overline{R}[I\overline{R}]$. Por el resultado anterior, la clausura entera de $\overline{R}[I\overline{R}]$ en $\overline{R}[t]$ es $\overline{R} \oplus \overline{I\overline{R}}t \oplus \overline{I^2\overline{R}}t^2 \oplus \overline{I^3\overline{R}}t^3 \oplus \ldots$. Pero como $\overline{R}$[t] es íntegramente cerrado, la clausura de R[It] es la de arriba. De nuevo de forma similar se prueba el resultado para $R[It,t^{-1}]$. □

6.2. Clausura entera de potencias de ideales

Los álgebras extendidas de Rees son importantes para ver las propiedades de las potencias de ideales ya que

$$t^{-n}R[It,t^{-1}] \cap R = I^n.$$

Proposición 6.7. *Sea R un anillo e I un ideal. Se gradúa $R[It,t^{-1}]$ dando a t grado 1 (y por lo tanto $\overline{R[It,t^{-1}]}$, la clausura de $R[It,t^{-1}]$ en $R[t,t^{-1}$] también es graduado). Entonces:*

1. *El ideal $\overline{t^{-n}S}$ es $\mathbb{Z}$-graduado y la componente de grado $\overline{t^{-n}S}$ es $(\overline{I^{m+n}} \cap I^m)t^m$.*

2. *$\overline{t^{-n}\overline{S}}$ también es $\mathbb{Z}$-graduado y la componente de grado m es $\overline{I^{m+n}}t^m$*

Demostración. $\overline{t^{-n}R[It,t^{-1}]}$ es $\mathbb{Z}$-graduado por 6.5. Los elementos de grado m de $R[It,t^{-1}]$ son de la forma rt^m, $r \in I^m$. Si $rt^m \in \overline{t^{-n}R[It,t^{-1}]}$, entonces tenemos una ecuación de dependencia entera:

$$(rt^m)^k + a_1(rt^m)^{k-1} + \ldots + a_k = 0,$$

con $a_i \in t^{-ni}R[It,t^{-1}]$, luego $a_i = b_i t^{-ni}$ para $b_i \in R[It,t^{-1}]$. Entonces cada sumando es de la forma $b_i(t^{-(m+n)i})t^{mk}$ entonces los términos que quedan al fijarse solo en la ecuación en los que tienen grado mk en t son los de la forma $c_i t^{(m+n)i}$ con $c_i \in I^{(m+n)i}$, es decir r es entero sobre I^{m+n} y se tiene que $r \in \overline{I^{m+n}} \cap I^m$.
Por otro lado si $r \in \overline{I^{m+n}} \cap I^m$, tenemos la ecuación de dependencia entera $r^k + c_1 r^{k-1} + \ldots + c_k = 0$, con $c_i \in I^{(m+n)i}$. Multiplicando por t^{mk}, tenemos $(rt^m)^k + c_1 t^m (rt^m)^{k-1} + \ldots + c_k t^{mk} = 0$ con $c_i t^{mi} \in t^{-ni}R[It,t^{-1}]$ luego $r^{tm} \in \overline{t^{-n}S}$ y como $r \in I^m$ está en su componente de grado m, lo que prueba (1).
De nuevo por 5.2.3, $\overline{t^{-n}\overline{R[It,t^{-1}]}}$ es $\mathbb{Z}$-graduado. Sea rt^m homogéneo de grado m en $\overline{R[It,t^{-1}]}$ entero sobre $t^{-n}R[It,t^{-1}]$. Tenemos la siguiente ecuación de dependencia entera:

$$(rt^m)^k + b_1 t^{-n}(rt^m)^{k-1} + \ldots + b_k t^{-kn} = 0,$$

con $b_i \in \overline{R[It,t^{-1}]}$. Tras multiplicar la ecuación por t^{mk}, cada sumando queda $b_i t^{-i(m+n)}$ por lo que al fijarse en la parte de grado 0 de la ecuación, solo quedan los elementos de la forma $c_i \in \overline{I^{i(m+n)}}$, r $\in \overline{\overline{I^{n+m}}} = \overline{I^{n+m}}$ y $rt^m \in \overline{I^{m+n}}t^m$. Ahora si r $\in \overline{I^{n+m}}$, está la ecuación de dependencia entera $r^k + c_1 r^{k-1} + \ldots + c_k = 0$ con $c_i \in I^{i(m+n)}$ y al multiplicarla por t^{mk} se tiene una ecuación de dependencia entera de $rt^m \in \overline{R[It,t^{-1}]}_m$ sobre $t^{-n}\overline{R[It,t^{-1}]}$y se tiene (2). □

Proposición 6.8. *Sea R un anillo e I un ideal de R. Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$t^{-n}R[It,t^{-1}] \cap R = I^n y t^{-n}\overline{R[It,t^{-1}]} \cap R = \overline{I^n}$$

Además si R es reducido entonces $t^{-n}\overline{R[It,t^{-1}]} \cap R[It,t^{-1}] = \overline{t^{-n}R[It,t^{-1}]}$.

Demostración. Es inmediato que $I^n \subseteq t^{-n}R[It,t^{-1}] \cap R$ y $\overline{I^n} \subseteq t^{-n}\overline{R[It,t^{-1}]} \cap R$. Si $r \in t^{-n}R[It,t^{-1}] \cap R$, $r = t^{-n}(rt^n)$, con $rt^n \in R[It,t^{-1}]_n$ con lo que $r \in I^n$. La segunda igualdad se tiene del apartado (1) de la anterior proposición con m=0.
Si R es reducido, lo es $R[It,t^{-1}]$. Como $t^{-n}R[It,t^{-1}]$ es íntegramente cerrado por 4.22, se tiene que $\overline{t^{-n}R[It,t^{-1}]} \subseteq t^{-n}\overline{R[It,t^{-1}]} \cap R[It,t^{-1}]$. La otra inclusión se tiene de 4.23. □

Proposición 6.9. *Sea R un anillo noetheriano e I un ideal de R. Sea S el álgebra de Rees de I, R[It] y T un anillo $\mathbb{N}$-graduado que contiene S. Entonces T es un módulo finitamente generado sobre S si y solo si existe un entero k tal que para todo $n \geq k$, $T_n = S_{n-k}T_k$.*

Demostración. Supongamos primero que T es finitamente generado sobre S. Entonces existe un número finito de generadores de T sobre S que podemos suponer homogéneos de grado menor o igual que un entero k. Entonces para todo $n \geq k$, $T_n = S_{n-k}T_k$.
Por otro lado, si suponemos que existe un k entero tal que para todo $n \geq k$, $T_n = S_{n-k}T_k$,

entonces $T = ST_0 + ST_1 + \ldots + ST_k$, así que T es finitamente generado sobre S. □

Del resultado anterior, si T es la clausura entera de S en R[t], por 6.4 se tiene que T es $\mathbb{N}$-graduado y $T_n = \overline{I^n}$. Como existe un k tal que para todo $n \geq k$, $\overline{I^{k+1}} = I\overline{I^k}$ se llega a que $T_n = I^{n-k}T_k$ para todo $n \geq k$.

7. Elementos superficiales

Este capítulo desarrolla algunos resultados, como el lema de Artin-Rees o la existencia y propiedades de los elementos superficiales, que aunque son interesantes en sí mismos solo los trataremos para demostrar resultados de multiplicidad y el teorema de Rees.

Definición 7.1. *Sea R un anillo, I un ideal y M un R-módulo. Se dice que una sucesión de submódulos* $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ *es una filtración de M por I si* $IM_n \subseteq M_{n+1}$ *y se dice que es estable si* $IM_n = M_{n+1}$ *para n suficientemente grande. Si tenemos una filtración de M por se define* $B_I M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ *que es un R[It]-módulo graduado.*

Lema 7.2. *Sea R un anillo, I un ideal y M un R-módulo y* $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ *una filtración de M por I. Entonces* $B_I M$ *es finitamente generado como R[It]-módulo si y solo si la filtración es estable.*

Demostración. Si la filtración es estable, existe un k tal que $B_I M$ está generado por $M_0, M_1, \ldots M_k$, los cuales están finitamente generados y por tanto BI_M también.
Ahora si $B_I M$ está finitamente generado por elementos de $\bigoplus_{j=0}^{k} M_n$ que se pueden suponer homogéneos, entonces si $n \geq k$, cualquier $m \in M_n$ se puede poner de la siguiente manera:

$$m = \sum_{j=0}^{k} r_j m_j,$$

donde $r_j \in I^{n-j}$ y $m_j \in M_j$, así que $m \in I^{n-k} M_k$, es decir la filtración es estable. □

Proposición 7.3. *("Lema de Artin-Rees") Sea R un anillo Noetheriano, I un ideal, M un R-módulo finitamente generado y N un submódulo de M. Entonces existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq k$,

$$I^n M \cap N = I^{n-k}((I^k M) | \cap N)$$

Demostración. Sea $M_n = I^n M$, entonces $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ es una filtración estable. Por el lema anterior, $B_I M$ es finitamente generado sobre R[It], que es un anillo noetheriano por serlo R. Entonces $B_I M$ es un módulo noetheriano y cualquiera submódulo de $B_I M$ es finitamente generado sobre R[It]. En particular, si $N_m = M_n \cap N$, tenemos una filtración de N por I y $B_I N$ es finitamente generado sobre R[It] luego la filtración es estable y se tiene el lema. □

7.1. Elementos superficiales

Definición 7.4. *Sea R un anillo, I un ideal y M un R-módulo. Sea* $x \in I$*, decimos que es un elemento superficial de I respecto a M si existe un* $c \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq c$*,* $(I^{n+1} M :_M x) \cap I^c M = I^n M$*. (*$I^n M \subseteq (I^{n+1} M :_M x) \cap I^c M$ *se tiene siempre para cualquier x de I).*

Proposición 7.5. *Sea R un anillo, I un ideal y M un R-módulo. Sea $x \in I$ y no divisor de cero en M. Entonces es un elemento superficial de I respecto a M si y solo si para n suficientemente grande, $I^nM :_M x = I^{n-1}M$.*

Demostración. Si se tiene $I^nM :_M x = I^{n-1}M$ para n suficientemente grande, entonces x es superficial de I respecto a M (basta tomar c=0 en la definición).
Si x es superficial, por el lema de Artin-Rees, existe un k entero tal que para todo $n \geq k$, $I^n \cap xM = I^{n-k}(I^kM \cap xM) \subseteq xI^{n-k}M$. Se tiene que $I^n \cap xM = x(I^nM :_M x)$ y como x no es divisor de cero $I^nM :_M x \subseteq I^{n-k}M$ así que para todo $n \geq k+c$, $I^cM \subseteq I^{n-k}M$ y $I^nM :_M x = (I^nM :_M x) \cap I^cM = I^{n-1}M$ por ser x superficial. □

Proposición 7.6. *Sea R un anillo noetheriano, I un ideal de R y M un R-módulo finitamente generado. Si $\cap_n^\infty(I^nM) = 0$ e I contiene un elemento que no es un divisor de cero en M. Entonces ningún elemento superficial de I con respecto a M es divisor de cero en M.*

Demostración. Sea x un elemento superficial de I. Sea $c \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq c$, $(I^{n+1}M :_M x) \cap I^cM = I^nM$. Entonces como $(0 :_M x)I^c \subseteq (I^{n+1}M :_M x) \cap I^cM = I^nM \ \forall\ n$ (si n<c es inmediato) y $\cap_n^\infty(I^nM) = 0$, se tiene que $(0 :_M x)I^c = 0$. Finalmente como I tiene un elemento r que no es divisor de 0 y $(0 :_M x)r = 0$ debe ser $(0 :_M x) = 0$. □

Proposición 7.7. *Sea R un anillo noetheriano, I un ideal de R, M un R-módulo finitamente generado y x en R. Se supone que o bien x no es divisor de cero en M o que para algún ideal J con $I \subseteq \sqrt{J}$ y $\cap_n^\infty J^nM$ x es un elemento superficial de J con respecto a M. Entonces existe un $e \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq e$,*

$$I^nM :_M x \subseteq (0 :_M x) + I^{n-e}My(0 :_M x) \cap I^eM = 0.$$

Si x es superficial de I con respecto a M, para todo n grande, $I^nM :_M x = (0 :_M x) + I^{n-1}M$.

Demostración. Por 7.3, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$, $I^NM \cap xM \subseteq xI^{n-k}M$ y en particular:

$$I^nM :_M x \subseteq (0 :_M x) + I^{n-k}M.$$

Si x no es divisor de cero en M, $(0 :_M x) = 0$ así que $(0 :_M x) \cap I^kM = 0$ y se tiene el resultado.
Si x es superficial para un J como el del enunciado con respecto a M, existe un c$\in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq c$, $(J^n :_M x) \cap J^cM = J^{n-1}M$. Como $I \subseteq \sqrt{J}$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $I^m \subseteq J$. Sea e=cm+k, como $I^{n-k} \subseteq I^{n-e}$, por 7.1, $I^nM :_M x \subseteq (0 :_M x) + I^{n-e}M$. Además, como $I^e \subseteq J^c$ se tiene:

$$(0 :_M x) \cap I^eM \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty}(J^nM :_M x) \cap J^cM \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} J^{n-1}M = 0,$$

y se tiene el resultado.

En el caso en el que x es superficial de I respecto a M, existe un c' tal que si $n \geq c'$, $(I^nM :_M x) \cap I^{c'}M = I^nM$, así que si $n \geq c' + e$, $I^{n-e} \subseteq I^{c'}$ y usando lo probado anteriormente se tiene:

$$\begin{aligned} I^nM :_M x =& ((0 :_M x) + I^{c'}M) \cap (I^nM :_M x) \\ =& (0 :_M x) + (I^{c'}M \cap (I^nM :_M x)) \\ =& (0 :_M x) + I^{n-1}M. \end{aligned}$$

□

Definición 7.8. *Se define el anillo graduado asociado de I por:*

$$gr_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} (I^n/I^{n+1}) \cong R[It]/IR[It] \cong R[It, t^{-1}]/t^{-1}R[It, t^{-1}],$$

donde $I^0 = R$. Estos isomorfismos se tienen porque si $y \in I^n \setminus I^{n+1}$, entonces su imagen en los otros anillos son $y^nt^n + I^{n+1}R[It]$ y $y^nt^n + t^{-1}R[It, t^{-1}]$ así que los morfismos son sobreyectivos e inyectivos.

Lema 7.9. *Sea R un anillo noetheriano e I un ideal tal que $gr_I(R)$ tiene un elemento de grado positivo que no es divisor de 0. Entonces para n grande, $I^{n+1} : I = I^n$.*

Demostración. Sean x y m como en la primera parte del lema anterior y al igual que en la demostración supongamos que h = x + I^{m+1} no está en los primos P_i con $i > s$ y c = 0. Está claro que $I^n \subseteq I^{n+1} : I$ y para la otra inclusión, si $y \in I^{n+1} : I$, entonces $yx \in yI^m = (yI)(I^m - 1) \subseteq I^{n+m}$ luego $y \in (I^{n+m} : x) = I^n$ por el lema anterior. □

Lema 7.10. *Sea R un anillo noetheriano, I un ideal, J el conjunto de elementos positivos de $gr_I(R)$ (es un ideal) y M un R-módulo finitamente generado. Entonces:*

1. *Existe un entero m tal que I^m tiene que elemento superfcial respecto a M y además existe un entero c tal que si $n \geq m$, c, $(I^nM :_M x) \cap I^cM = I^{n-m}M$*
2. *Si R tiene cuerpos residuales, se puede tomar m = 1.*
3. *Si (R,$\mathfrak{m}$) es un anillo local noetheriano con cuerpo residual infinito, cualquier ideal I tiene un elemento superficial respecto M. Además si existe un subconjunto U de J/$\mathfrak{m}$J no vacío, tal que $J/\mathfrak{m}J \setminus U$ es unión de subespacios vectoriales y si la imagen de $r \in I$ en J/$\mathfrak{m}$J está en U, entonces r es superficial de I respecto M.*

Demostración. Sea $gr_I(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(I^nM/I^{n+1}M)$ que es un $gr_I(R)$-módulo finitamente generado (con $gr_I(R)$ noetheriano por serlo R). Sea $0 = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_r$ una descomposición primaria del submódulo 0 en $gr_I(M)$. Sea $P_i = \sqrt{N_i :_{gr_I(R)} gr_I(M)}$ para $i = 1, 2, \ldots, r$,

que son ideales primos de R. Se puede suponer que cada primo de $\{P_1, P_2, ...P_s\}$ contiene todos los elementos de J y que $P_{s+1}, ..., P_r$ no. Entonces como los N_i son primarios, existe un entero c tal que $I^cM/I^{c+1}M$ está contenido en N_i con $i = 1, 2, 3, ..., s$. Por 2.5, usando como ideal J, existe un h homogéneo (de grado positivo) que no está contenido en ningún P_i para $i > s$. Escribamos h = x + I^{m+1} para un x en I^m. Si R tiene cuerpos residuales infinitos, por 2.7 se puede tomar m = 1.
Supongamos que para algún $n \geq c$, $y \in (I^nM :_M x) \cap I^cM$ pero $y \notin I^{n-m}$. Sea k el mayor natural tal que $y \in I^kM$, que deberá ser $c \leq k < n-m$. En $gr_I(M)$, $(x + I^{m+1})(y + I^{k+1}M)$ = $xy + I^{m+k-1}$, pero $xy \in I^n$ y $k + m + 1 \leq n$ así que $xy + I^{m+k-1} = 0$. Así que por la elección de x + I^{m+1}, y + $I^{k+1}M \in N_{s+1} \cap ... \cap N_r$. Por otro lado, como $I^kM/I^{k+1}M \subseteq I^cM/I^{c+1}M \subseteq N_i$ para $i = 1, 2, ..., s$, también se tiene que y + $I^{k+1}M \in N_1 \cap ... \cap N_s$ así que debe ser y + I^{k+1} = 0 que contradice que k sea el mayor natural tal que $y \in I^kM$ con lo que se prueba (1) y (2).
Ahora se supone que R es local y notheriano con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y cuerpo residual infinito R/$\mathfrak{m}$. Sea $M' = J/J\mathfrak{m}$. Sean $N_i' = (P_i \cap J)/\mathfrak{m}J$ para cada $i > s$, submódulos de M'. Si $M' = N_i'$ para algún i, entonces $J = (P_i \cap J) + \mathfrak{m}J = (P_i \cap J) + \mathfrak{m}gr_I(R)$, luego como por ser R noetheriano sus ideales son finitamente generados, por 3.8 se llega a $J = (P_i \cap J)$ que es absurdo. Se tiene entonces que los N_i' son $(R/\mathfrak{m})$-subespacios vectoriales propios de $J/\mathfrak{m}J$. Como $R/\mathfrak{m}$ es infinito la unión finita de subespacios vectoriales propios no puede ser el total, así que su complementario U es no vacío y cumple con el enunciado. □

Proposición 7.11. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un anillo local noetheriano con cuerpo residual infinito. Sea I un ideal de R y $P_1, P_2, ..., P_R$ ideales de R que no contienen a I. Entonces si M es un R-módulo finitamente generado, existe un elemento superficial de I con respecto a M que no pertenece a ningún P_i. En particular, si I contiene un no divisor de cero en M, existe un elemento superficial de I con respecto a M que no es divisor de cero en M.*

Demostración. Por 7.10, existe un conjunto U no vacío contenido en $J/\mathfrak{m}J$ tal que su complementario en $J/\mathfrak{m}J$ es unión de subespacios vectorial y si $x \in I$ y $x + \mathfrak{m}J \in$ U entonces x es superficial de I respecto a M.
Sea $W_i = ((P_i \cap I) + \mathfrak{m}I)/\mathfrak{m}I$, un subespacio vectorial de J/$\mathfrak{m}$J. Como P_i no contiene J, por 3.7 como en el lema anterior, $(P_i \cap I) + \mathfrak{m}I$ tampoco contiene I así que es un subespacio vectorial propio de J/$\mathfrak{m}$J. Sea U' = $U \cap (I/\mathfrak{m}I \setminus (W_1 \cup W_r))$, que también cumple que su complementario es unión de subespacios vectoriales de $J/\mathfrak{m}J$. Como es un subconjunto de U, si $x \in I$ es tal que x + $\mathfrak{m}I \in U'$, entonces x es superficial de I respecto M. Además por construcción, si x + $\mathfrak{m}J \in U'$, entonces $x \notin P_i$ para todo i. Lo último es consecuencia de 7.6. □

8. Multiplicidad

El teorema de Rees del que hablaremos en el siguiente capítulo establece que, bajo ciertas condiciones, si dos ideales tienen la misma multiplicidad entonces tienen la misma clausura entera. En este capítulo definimos la multiplicidad, que está determinado por el coeficiente líder de la función de Hilbert (ya que, como veremos, es un polinomio para valores grandes).

Lema 8.1. *Sea $P(t) \in Q[t]$ de grado d y distinto de 0. Entonces son equivalentes:*

1. $P(n) \in \mathbb{N} \; \forall \, n \gg 0$.
2. *Existen enteros únicos $a_1, a_2, ..., a_d$ tal que $a_d > 0$ y $P(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{t-1-i}{i}$.*

Demostración. (2) implica (1) porque los números combinatorios son números naturales y por tanto es una suma de números enteros y además como el coeficiente líder es mayor que 0 el polinomio es mayor que 0 para t suficientemente grande y P(n) será natural si n es suficientemente grande.
Para ver que (1) implica (2), teniendo en cuenta que $\binom{t-1+i}{i}$ forma una base para $\mathbb{Q}(t)$, existe una única representación en esa base de $P(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i \binom{t-1-i}{i}$, con los $a_i \in \mathbb{Q}$. Para ver que los a_i son enteros, sea n_0 tal que $P(n) \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0$. Entonces:

$$P(n+1) = a_0 + (n+1)a_1 + \frac{(n+2)!}{2!n!}a_2 + ... + \frac{(n+d)!}{d!n!}a_d = b_{(0,n)} \in \mathbb{Z}.$$

Sea $b_{(j,n)} = b_{(j-1,n+1)} - b_{(j-1,n)}$ para $n > n_0, \; j \in \mathbb{N}$. Probamos por inducción que:

$$b_{(j,n)} = a_j + (n+1+j)a_{j+1} + \frac{(n+j+2)!}{2!(n+j)!}a_{j+2} + ... + \frac{(n+d)!}{(d-j)!(n+j)!}a_d,$$

cierto para j = 0. Supongamos entonces es verdad para j-1 y veamos que se cumple para j:

$$b_{(j-1,n+1)} = a_{j-1} + (n+1+j)a_j + \frac{(n+j+2)!}{2!(n+j)!}a_{j+1} + ... + \frac{(n+d+1)!}{(d-j+1)!(n+j)!}a_d$$
$$b_{(j-1,n)} = a_{j-1} + (n+j)a_j + \frac{(n+j+1)!}{2!(n+j-1)!}\frac{n+j}{n+j}a_{j+1} + ... + \frac{(n+d)!}{(d-j+1)!(n+j-1)!}\frac{n+j}{n+j}a_d$$

$$\begin{aligned} b_{(j,n)} &= b_{(j-1,n+1)} - b_{(j-1,n)} && (11)\\ &= a_j + \tfrac{(n+1+j)!((n+2+j)-(n+j))}{2!(n+j)!}a_{j+1} + ... + \tfrac{(n+d)!((n+d+1)-(n+j))}{(d-j+1)!(n+j)!}a_d && (12)\\ &= a_j + (n+1)a_{j+1} + ... + \tfrac{(n+d)!((n+d+1)-(n+j))}{(d-j+1)!(n+j)!}a_d. && (13)\\ & && (14) \end{aligned}$$

Ahora $b_{(d,n)} = a_d \in \mathbb{Z}$, y por inducción recorriendo los $b(j,n)$ desde d hasta 0 se ve que todos los a_j son enteros por ser suma de enteros. □

Lema 8.2. *Sea R un dominio que contenga $\mathbb{Q}$, y sea Q(n) un polinomio de grado d $\geq$ 0 con coeficientes en R. Sea j entero y sea $P(n) = \sum_{i=j}^{n} Q(i)$. Entonces P(n) es un polinomio de grado d + 1 y con coeficientes en R. Si el coeficiente líder de Q es c, el de P es $\frac{c}{d+1}$.*

Demostración. Se supone que Q $\neq$ 0, así que reindexando y salvo sumarle una constante ($\sum_{i=0}^{j-1} Q(i)$), hay que probar que el enunciado se cumple para $P'(n) = \sum_{i=0}^{n} Q(i)$. Sea $Q = \sum_{j=0}^{d} a_j \binom{n-1+j}{j}$, para a_j racionales con $a_d \neq 0$. Entonces:

$$P'(n) = \sum_{i=0}^{n} Q(i) = \sum_{j=0}^{d} a_j \sum_{i=0}^{n} \binom{i-1+j}{j} = \sum_{j=0}^{d} a_j \binom{n+j}{j+1}, \tag{15}$$

y como $a_d \binom{n+d}{d+1} = a_d \frac{(n+d)(n+d-1)...(n-1)!}{(d+1)!(n-1)!} = \frac{a_d}{(d+1)!}(n+d)(n+d-1)...(n)$ queda un polinomio de grado d+1 con coeficientes en R y coeficiente líder $\frac{a_d}{(d+1)!}$. □

La igualdad de números combinatorios de 15 se puede demostrar por inducción.
Para n = 0, $\binom{j-1}{j} = \binom{j}{j+1} = 0$.
Si se tiene hasta n-1, entonces $\sum_{i=0}^{n} \binom{i-1+j}{j} = \binom{n-1+j}{j} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i-1+j}{j} = \binom{n-1+j}{j} + \binom{n-1+j}{j+1} = \binom{n+j}{j+1}$ por inducción y por la fórmula para sumar números combinatorios.

Definición 8.3. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un anillo local Noetheriano y X una variable sobre R. Se denota R(X)=$R[X]_{\mathfrak{m}R[x]}$.*

Se tiene que el cuerpo residual de R(X) es un cuerpo infinito, ya que están todas las potencias de X.

Lema 8.4. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un anillo local Noetheriano e I $\mathfrak{m}$-primario, entonces $\lambda(R/I) = \lambda(R(X)/IR(X))$.*

Demostración. Si tenemos una filtración de R/I como R-módulo tal que los cocientes de los submódulos son isomorfos a $R/\mathfrak{m}$ (y por tanto de longitud igual a $\lambda(R/I)$), como R(X) es una extensión fielmente plana de R podemos tensorizarla por R(X) y nos da una filtración de $R(X)/IR(X)$ de la misma longitud en la que también se tiene que los cocientes de los submódulos adyacentes son isomorfos a $R(X)/\mathfrak{m}R[X]$ y por tanto su longitud es igual a la de $R(X)/IR(X)$. □

Teorema 8.5. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un anillo local, I un ideal $\mathfrak{m}$-primario y sea M un módulo distinto de 0 finitamente generado. Sea d = dim(R). Entonces existe un polinomio P(n) con coeficientes racionales tal que para un n suficientemente grande,*

$$P(n) = \lambda_R(M/I^n M).$$

y además el grado de P(n) = dim M <d.

Demostración. Usando 8.4 podemos asumir que el cuerpo residual de R es infinito (sustituyendo R por R(X)). Hacemos inducción sobre $t = dimM = dim(\frac{R}{Ann(M)})$.
Si $t = dim(\frac{R}{Ann(M)}) = 0$, $\frac{R}{Ann(M)}$ es artiniano y $J(\frac{R}{Ann(M)}) = \mathfrak{m} + Ann(M)$ que es nilpotente luego existe un n' tal que $(\mathfrak{m} + Ann(M))^{n'} = (0)$ y como I es potencia de M, $(I + Ann(M))^{n''} = (0)$ para otro n", entonces para $n > n''$, $I^nM = 0$ y P(n) = $\lambda(M)$, el polinomio constante. Además el grado del polinomio es 0 como la dimensión de M.
Si t >0,
Para $n > 0$, tenemos la secuencia exacta:

$$0 \to \frac{I^nM :_M x}{I^{n-1}M} \overset{i}{\mapsto} \frac{M}{I^{n-1}M} \overset{x}{\mapsto} \frac{M}{I^nM} \overset{r}{\mapsto} \frac{M}{xM + I^nM} \to 0,$$

donde i es la inclusión, x el producto por x y r la aplicación de paso al cociente. De esta secuencia tenemos el siguiente resultado para la longitud de módulos:

$$\lambda(\frac{M}{I^nM}) - \lambda(\frac{M}{I^{n-1}M}) = \lambda(\frac{M}{xM + I^nM}) - \lambda(\frac{I^nM :_M x}{I^{n-1}M}). \tag{16}$$

Por el lema 7.11, existe un c $\in$ $\mathbb{N}$ tal que si $n \geq c$, $I^nM :_M x = 0 :_M x \oplus I^{n-1}M$, luego $\frac{I^nM :_M x}{I^{n-1}M} \cong 0 :_M x$ y la longitud de ambos módulos es igual. Sustituyendo en 16 el valor de $\lambda(\frac{M}{I^{n-1}M})$ por el obtenido en la misma ecuación pero cambiando n por n-1 y repitiendo con n-2, n-3, ..., hasta llegar a c, se obtiene:

$$\lambda(\frac{M}{I^nM}) = \lambda(\frac{M}{I^cM}) + \sum_{i=c+1}^{n} \left(\lambda(\frac{M}{xM + I^iM}) - \lambda(0 :_M x)\right).$$

Como x no está en ningún ideal primo minimal de $\frac{R}{Ann(M)}$, dim(M/xM)=dim (M) - 1, luego por la hipótesis de inducción se tiene que para n grande, $\lambda(M/xM + I^nM)$ es un polinomio Q(n) de grado t-1, con coeficientes racionales. Si fuera Q(n)=$\lambda(0 :_M x)$ para n grande, entonces por la fórmula, $\lambda(M/I^nM) = \lambda(M/I^cM)$ constante para n grande, se sigue que $\lambda(I^nM/I^{n+1}M) = 0$ luego los módulos son iguales, se tiene que $I(IM) = I^{n+1}M = IM$ y por el lema de Nakayama 3.7, $I^nM = 0$ y dim M = 0 como antes, absurdo. Entonces Q(n) debe ser distinto de $\lambda(0 :_M x)$ para infinitos n y como es no decreciente, debe ser distinto de $\lambda(0 :_M x)$ para todo n grande. De esta forma por el lema 8.2, para n grande, $\lambda(M/I^nM)$ es un polinomio de grado t = dim M con coeficientes racionales. □

Definición 8.6. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un anillo local noetheriano de dimensión d, sea I un ideal $\mathfrak{m}$-primario, y sea M un R-módulo finitamente generado. Se define la multiplicidad de I en M, $e_R(I;M)$, como d! veces el coeficiente de $P_{I,M}(n)$ de grado d, donde $P_{I,M}(n)$ es el polinomio del teorema anterior. Alternativamente y sabiendo que la función de Hilbert, $\lambda(M/I^nM)$, es un polinomio para n grande, se tiene que $e(I;M) = lim_{n\to\infty}\lambda(M/I^nM)d!/n^d$.*

Para calcular $e_R(I;M)$ podemos usar que $\lambda(M/I^nM)$ es un polinomio P(n) para n suficientemente grande con coeficiente líder $\frac{e_R(I;M)}{d!}$ o que $\lambda(I^nM/I^{n+1}M) = P(n+1) - P(n)$ también es un polinomio pero con coeficiente líder $\frac{e_R(I;M)}{(d-1)!}$ y de grado d-1.

Ejemplo 8.7. *Si $R = K[[x_1,x_2,...,x_r]]$ para un cuerpo K, tenemos que es local con ideal maximal $\mathfrak{m} = (x_1,x_2,...,x_r)$. La dimensión de R es r y la potencia n-ésima de $\mathfrak{m}$ es el ideal generado por los monomios de grado n, así que tenemos la siguiente cadena de R-módulos:*

$$R/\mathfrak{m}^n \subseteq R/((x_1^{n-1})\mathfrak{m}^n) \subseteq R/((x_1^{n-1},x_2^{n-1})\mathfrak{m}^n) \subseteq ... \subseteq R/\mathfrak{m}^{n-1} \subseteq ... \subseteq R/\mathfrak{m} \subseteq 0,$$

donde se añade un monomio de grado menor que n en cada paso (por lo que es la cadena más larga que se puede hacer). Como existen $\binom{n+r-1}{r}$ monomios de grado menor que n, tenemos que $\lambda(R/\mathfrak{m}^n) = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)...(n)}{r!}$ y mirando el coeficiente de n^r este será $\frac{1}{r!}$, por lo que $e_R(\mathfrak{m};R) = 1$.
Alternativamente podemos fijarnos en $\lambda(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})$, donde se tiene la cadena:

$$\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \subseteq \mathfrak{m}^n/(x_1^n)\mathfrak{m}^{n+1} \subseteq \mathfrak{m}^n/(x_1^n,x_2^n)\mathfrak{m}^{n+1} \subseteq ... \subseteq \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^n = 0,$$

donde añadimos monomios pero solo de grado n. El total de estos monomios es $\binom{n+r-1}{r-1}$, con lo que $\lambda(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = \binom{n+r-1}{r-1} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)...(n+1)}{(r-1)!}$ y mirando el coeficiente de n^{r-1} tendremos $\frac{1}{(r-1)!}$ y de nuevo obtenemos $e_R(\mathfrak{m};R) = 1$.

Lema 8.8. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un anillo local noetheriano de dimensión d, sea I un ideal $\mathfrak{m}$-primario, $x \in I$, y sea M un R-módulo finitamente generado de dimensión d. Sea M'=M/xM, R'=R/xR o R'=R/ann(M') e I'=IR'. Entonces:*

1. *Si dim M'=d-1, entonces el coeficiente líder de $(d-1)!P_{I',M'}$ es mayor o igual que el coeficiente líder de $d!P_{I,M}$, y para todo $n \geq 0$, $\lambda((I^nM :_M x)/I^{n-1}M)$ es un polinomio en n de grado menor o igual a d-1 con coeficientes racionales.*

2. *Si dim R'=d-1, entonces $e_{R'}(I';M') \geq e_R(I;M)$ y la igualdad se tiene si y solo si $\lambda((I^nM :_M x)/I^{n-1}M)$ es un polinomio en n de grado menor o igual a d-2 para n grande.*

Demostración. Se supone dim M' = d-1. Por el teorema del polinomio de Hilbert, el polinomio $P_{I',M'}$ tiene grado d-1 y $P_{I,M}$ tiene grado d. Entonces la siguiente secuencia corta exacta:

$$0 \to \frac{I^nM :_M x}{I^{n-1}M} \to \frac{M}{I^{n-1}M} \overset{x}{\mapsto} \frac{M}{I^nM} \to \frac{M}{xM + I^nM} \to 0$$

dice que $\lambda((I^nM :_M x)/I^{n-1}M) = \lambda(M/xM + I^nM) + \lambda(M/I^{n-1}M) - \lambda(M/I^nM)$. Entonces para n grande, $\lambda((I^nM :_M x)/I^{n-1}M) = P_{I',M'}(n) - P_{I,M}(n) + P_{I,M}(n-1)$ que tiene la siguiente forma:

$$\frac{e(I',M')}{(d-1)!}n^{d-1}+O(n^{d-2})-(\frac{e(I,M)}{(d)!}n^d+Cn^{d-1}+O(n^{d-2}))+\frac{e(I,M)}{(d)!}(n-1)^d+C(n-1)^{d-1}+O((n-1)^{d-2})$$

Con lo que es un polinomio racional de grado d-1 (el coeficiente de grado d se va) y desarrollando el de grado d-1 se tiene:

$$\frac{e(I',M')}{(d-1)!}-C-\binom{d}{1}\frac{e(I,M)}{(d)!}+C$$

$$\frac{e(I',M')}{(d-1)!}-\frac{e(I,M)}{(d-1)!}$$

y como el coeficiente líder de este polinomio debe ser mayor o igual que 0 (λ es no negativa así que su coeficiente líder debe ser no negativo) y se tiene que $e(I',M')\geq e(I,M)$. Si dim R'=d-1, entonces también dim M'=d-1 (para ambas opciones de R'), así que también se tiene la desigualdad que será igualdad si y solo si el polinomio tiene grado d-2 para n grande. □

Proposición 8.9. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un anillo local noetheriano, sean J e I ideales $\mathfrak{m}$-primarios con la misma clausura entera y M un R-módulo finitamente generado. Entonces $e(I;M)=e(J;M)$.*

Demostración. Como $\overline{J}=\overline{I}$, basta ver que $e(I;M)=e(\overline{I};M)$ para cualquier I ideal $\mathfrak{m}$-primario. Existe un entero k tal que $\overline{I}^{k+1}=I\overline{I}^k$. Entonces para todo $n\geq k+1, \overline{I}^n=\overline{I}^kI^{n-k}$ y se tiene que $\lambda(M/I^nM)\geq\lambda(M/\overline{I}^nM)\geq\lambda(M/I^{n-k}M)$ para todo $n\geq k$. Sea d=dim R, entonces para n grande, $\lambda(M/I^nM)=\frac{e(I;M)}{d!}+O(n^{d-1})$, $\lambda(M/\overline{I}^nM)=\frac{e(\overline{I};M)}{d!}+O(n^{d-1})$ y $\lambda(M/I^{n-k}M)=\frac{e(I;M)}{d!}+O(n^{d-1})$, siendo esta última porque $(n-k)^d=n^d+O(n^{d-1})$. Finalmente tomando el límite cuando $n\to\infty$ en las tres multiplicidades divididas por n^d, queda $e(I;M)\geq e(\overline{I};M)\geq e(I;M)$ luego son iguales. □

Teorema 8.10. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un anillo local noetheriano y sea I un ideal $\mathfrak{m}$-primario. Si $0\to K\to M\to N\to 0$ es una secuencia corta exacta de R-módulos finitamente generados entonces e(I;M)=e(I;K)+e(I;N).*

Demostración. $M\bigotimes R/I^n$ es isoformo a M/I^nM (tomando $m\otimes 1\to m+I^nM$ se tiene con las propiedades del producto tensorial), así que si se tensoriza la secuencia por R/I^n se obtiene $K/I^nK\to M/I^nM\to N/I^nN\to 0$, luego se tiene que $\lambda(M/I^nM)\leq\lambda(N/I^nN)+\lambda(K/I^nK)$. Por otro lado, por el lema de Artin-Rees, existe un entero q tal que para todo $n\geq q$, $I^nM\cap K\subseteq I^{n-q}K$ y en particular $\lambda(K/(I^nM\cap K))\geq\lambda(K/(I^{n-q}K))$. Además, la secuencia $0\to K/(I^nM\cap K)\to M/(I^nM)\to N/(I^nN)\to 0$ es exacta y se tiene:

$$\lambda(N/I^nN)+\lambda(K/I^{n-q}K)\leq\lambda(M/I^nM)\leq\lambda(N/I^nN)+\lambda(K/I^nK).$$

Como $lim_{n\to\infty}\lambda(K/I^nK)d!/n^d = lim_{n\to\infty}\lambda(K/I^{n-d}K)d!/n^d$ se tiene que para n grande deben ser iguales y e(I;M)=e(I;K)+e(I;N). □

Teorema 8.11. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un anillo local noetheriano, I un ideal $\mathfrak{m}$-primario y M un R-módulo finitamente generado. Sea Λ el conjunto de primos minimales P de R tal que dim(R/P)=dim(R). Entonces:*

$$e(I;M) = \sum_{P\in\Lambda} e(I;R/P)\lambda(M_P).$$

Demostración. Por el teorema anterior, la multiplicidad es aditiva para secuencias cortas exactas. $Sea 0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$ una filtración prima de M, con $M_{i+1}/M_i \cong R/P_i$, P_i primo para todo $0 \leq i \leq n-1$. Como se tiene que e(I;R/Q) vale 0 si dim(R/Q)<dim(R), la multiplicidad valdrá 0 en los primos que no estén en Λ (dim(R/Q)<dim(R) se da siempre si Q no es minimal). Entonces e(I;M) será suma de las multiplicidades de los primos P de Λ, contado cada P tantas veces como R/P sea isomorfo a algún M_{i+1}/M_i. Localizando la filtración en P, tenemos una filtración de M_P de forma $(M_{i+1}/M_i)_P$ se hace 0 salvo en los casos donde $M_{i+1}/M_i \cong R/P$ que ocurre exactamente $\lambda(M_P)$ veces. □

9. Teorema de Rees

Antes del teorema, hablaremos de unos resultados cortos previos necesarios para la demostración.

9.1. Dominios de Krull

Definición 9.1. *Un dominio R es un dominio de Krull si:*

1. *Para todo P primo de R con ht(P)=1, R_P es un dominio noetheriano íntegramente cerrado.*

2. *R = $\bigcap_{ht(P)=1} R_P$*

3. *Si $x \in R \setminus \{0\}$, entonces x está contenido en una cantidad finita de ideales primos de R con altura uno.*

Proposición 9.2. *Sea R un dominio de Krull y $x \in R \setminus \{0\}$. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_r$ los ideales primo de R de altura uno y que contienen a x. Entonces xR = $\bigcap_{i=1}^{r}(xR_{P_i} \cap R)$ es una descomposición primaria mínima de xR y en particular los dominios de Krull no tienen primos inmersos.*

Demostración. Sea I = $\bigcap_{i=1}^{r}(xR_{P_i} \cap R)$ e $y \in I$. Entonces $\frac{y}{x} \in R_{P_i}$ para $i = 1, 2, \ldots, r$. Además para cualquier otro P primo en R de altura uno, como no contiene a x, $\frac{y}{x} \in R_P$. Entonces $\frac{y}{x} \in \bigcap_{ht(P)=1} R_P = R$ por ser R dominio de Krull así que $y \in xR$ con lo que se tiene I = xR. Además, como cada P_i tiene altura uno, R_{P_i} es noetheriano y xR_{P_i} es primario así que xR = $\bigcap_{i=1}^{r}(xR_{P_i} \cap R)$ es una descomposición primaria mínima de xR y como los P_i tienen altura 1, R no tiene primos inmersos. □

Proposición 9.3. *Un dominio noetheriano íntegramente cerrado es un dominio de Krull.*

Demostración. Sea R un dominio noetheriano íntegramente cerrado. La propiedad (1) de los dominios de Krull es inmediata por ser R íntegramente cerrado. La (3) también es inmediata porque un anillo noetheriano tiene un número finito de primos minimales. Veamos que se tiene (2):
Como $\frac{r}{1}$ está en R_P para todo $r \in R$, P primo, $R \subseteq \bigcap_{ht(P)=1} R_P$. Sea ahora $\alpha \in \bigcap_{ht(P)=1} R_P$, y escribamos $\alpha = \frac{x}{y}$ para algunos $x, y \in R$ con $y \neq 0$. Sea $J = yR :_R x$. Para cada primo P de R de altura 1, $\frac{x}{y} \in R_P$, luego $JR_P = R_P$, así que J no está contenido en ningún ideal primo de R de altura 1. Los primos asociados de J están contenidos en el conjunto de los primos asociados de yR y por 3.18, estos primos tienen altura 1, por lo que J no tiene primos asociados y J debe ser el ideal unidad, por lo que $x \in yRy\alpha \in R$. □

9.2. Lemas Previos

Definición 9.4. *Un anillo local noetheriano (R,$\mathfrak{m}$) es analíticamente no ramificado si su completado $\mathfrak{m}$-ádico es reducido.*

Si un anillo es completo, basta sea reducido para que sea analíticamente no ramificado. En particular, si R es un dominio completo es analíticamente no ramificado (esta idea se usará en el teorema de Rees, ya que se podrá reducir a un dominio completo).
Los siguientes enunciados los enuncio sin demostrar porque sen queda fuera de los objetivos del trabajo aunque sí que se utilizarán en el teorema de Rees.

Proposición 9.5. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un anillo local noetheriano no analíticamente ramificado e I un ideal de R. Entonces:*

1. *Sea S = R[It] el álgebra de Rees de I. Entonces la clausura entera de S en R[t] es un módulo finitamente generado sobre S.*

2. *Existe un entero k tal que si $n \geq 1$,*

$$\overline{I^{n+k}} = I^n \overline{I^k} \text{ y } (\overline{I^k})^n = \overline{I^{kn}}.$$

Lema 9.6. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un dominio local formalmente equidimensional y sea I un ideal de R. Para todo ideal primo minimal P de $gr_I(R)$ se tiene que $dim(gr_I(R)/P) = dimR$.*

9.3. Teorema de Rees

Teorema 9.7. *Sea (R,$\mathfrak{m}$) un anillo local noetheriano formalmente equidimensional y sean $I \subseteq J$ dos ideales $\mathfrak{m}$-primarios. Entonces $J \subseteq \overline{I}$ si y solo si e(I)=e(J).*

Demostración. Si $J \subseteq \overline{I}$ entonces $\overline{J} = \overline{I}$ y por 8.9, e(I)=e(J).
Se supone ahora que e(I)=e(J). Hacemos inducción sobre la dimensión de R. Si dim R=0, cualquier ideal propio es nilpotente y por tanto cualquier ideal propio es reducción de cualquier otro y sus clausuras coinciden. Se supone entonces que dim R >0.
Ahora se reducirá al caso en el que R es un dominio local completo con cuerpo residual infinito y tal que las potencias de I, J son íntegramente cerradas. Al igual que en se considera $S = R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$, y se tiene e(IS)=e(I)=e(J)=e(JS) y por 4.24 si JS y IS tienen la misma clausura también la tendrán J e I. Entonces probando el teorema para S se tendrá para R y se puede suponer que R tiene cuerpo residual infinito. De la misma forma, como $\overline{I\widehat{R}} \cap R = \overline{I}$ por la proposición 4.24, entonces podemos suponer que R es completo. Para reducirlo a un dominio, sean $P_1, P_2, ..., P_n$, por la fórmula de 8.11:

$$e(I) = \sum_{i=1}^{n} e(I_i)\lambda(R_{P_i}),$$

donde I_i es imagen de I en $R_i = R/P_i$. Y de la misma forma $e(J) = \sum_{i=1}^{n} e(J_i)\lambda(R_{P_i})$. Como $I \subseteq J$, $e(J_i) \leq e(I_i)$ para todo i, pero como e(J)=e(I) debe ser $e(J_i) = e(I_i)$ para todo i. Si se ve que el teorema es cierto para dominios completos, se tendrá que $J_i \subseteq \overline{I_i}$ para cada i y por 4.3 se tiene que $J \subseteq \overline{I}$, luego se supone que R es dominio.
Ahora como R es un dominio completo, es analíticamente no ramificado y por 9.5 se tiene que existe un entero k y uno $l \geq k$ tal que para todo $n \geq 1$, $(\overline{I^k}^n = \overline{I^{kn}})$ y $(\overline{J^l}^n = \overline{J^{ln}})$. Además $I^{kl} \subseteq J^{kl}$ y sus multiplicidades coinciden. Si se prueba que $\overline{J^k l} \subseteq \overline{I^k l}$ entonces J está en la clausura entera de I, así que se puede suponer que ambos ideales son normales (que sus potencias son íntegramente cerradas).
Sea x un elemento superficial de I. Por 7.5 existe un entero c tal que para todo $n \geq c$, $I^n : x = I^{n-1}$ y por tanto $I^{cn} : x^c = I^{c(n-1)}$. Al igual que antes podemos reemplazar I por I^c y J por J^c, además de x por x^c y por tanto suponer que $I^n : x = I^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Sean I' y J' las imágenes de I y J en R/Rx. Por 8.8, $e(J') \geq e(J)$ y como $I^n : x/I^{n-1} = 0$ $e(I') = e(I)$. Además como $I' \subseteq J'$, $e(I') \geq e(J') \geq e(J) = e(I)$, luego todas son igualdades.
Veamos que la imagen x* de x en $gr_J(R)$ es no divisor de cero en $gr_J(R)$ de grado 1. Claramente x está en $I \subseteq J$. Si x está en J^2, entonces $\lambda(\frac{(J^n:x)}{(J^{n-1})}) \geq \lambda(\frac{J^{n-2}}{(J^{n-1})})$ que para n grande es un polinomio de grado d-1 y por 8.8 no podría ser e(J')=e(J). Entonces x no está en J^2 y x* tiene grado 1 en $gr_J(R)$. Ahora sea $0 : x* \subseteq gr_J(R)$. La parte de grado n de este ideal serán los elementos de J^{n-1} que caen en J^{n+1} al multiplicarse por x* cocientado por J^n. Como e(J)=e(J'), por 8.8 su longitud está acotada por un polinomio en n de grado d-2. En particular, 0:x* tiene dimensión d-1 como $gr_J(R)$-módulo, así que la dimensión de $gr_J(R)/(0 : (0 : x*))$ es como mucho d-1. Para cualquier primo minimal Q de $gr_J(R)$, dim $gr_J(R)/Q = d$ por 9.6. Se sigue que $(0 : (0 : x*))$ no está contenido en ningún primo minimal de $gr_J(R)$. Pero $gr_J(R)$ no tiene primos inmersos porque $gr_J(R) \cong R[Jt,t^{-1}]/(t^{-1})$ y si $gr_J(R)$ tuviera un primo inmerso se podría subir a un primo de (t^{-1}) inmerso en el álgebra extendida de Rees $R[Jt,t^{-1}]$, pero como por las reducciones anteriores $R[Jt,t^{-1}]$ es un dominio íntegramente cerrado y los ideales principales no tienen primos inmersos (9.2). Entonces tiene que ser 0:x*=0 y x* no es un divisor de cero.
Como x no es divisor de cero (ya que no lo es x*) no está en ningún ideal primo minimal y la dimensión de R/xR es una menos que la de R, luego por la hipótesis de inducción $J' \subseteq \overline{I'}$ y existe un entero n tal que $(J')^n = I'(J')^{n-1}$. Llevando esta igualdad a R tenemos $J^n = I(J)^{n-1} + Rx \cap J^n$. Como x* no es divisor de cero y tiene grado 1 en $gr_J(R)$, $Rx \cap J^n = xJ^{n-1}$, luego $J^n = IJ^{n-1} + xJ^{n-1} = IJ^{n-1}$, luego I es reducción de J y se tiene el teorema.

□

Referencias

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[CHV98] Alberto Corso, Craig Huneke, and Wolmer V. Vasconcelos. On the integral closure of ideals. *Manuscripta Math.*, 95(3):331–347, 1998.

[HIO88] M. Herrmann, S. Ikeda, and U. Orbanz. *Equimultiplicity and blowing up*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. An algebraic study, With an appendix by B. Moonen.

[HS06] Craig Huneke and Irena Swanson. *Integral closure of ideals, rings, and modules*, volume 336 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[Mat70] Hideyuki Matsumura. *Commutative algebra*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1970.

[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[Sta18] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2018.

[Vas05] Wolmer Vasconcelos. *Integral closure*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Rees algebras, multiplicities, algorithms.