



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

TRIANGULACIONES Y DIAGRAMAS DE VORONOI

AUTOR:

Paula Mielgo Martín

TUTOR:

José Ignacio Farrán Martín

Septiembre 2022

Índice general

1. Introducción	5
2. Conceptos previos	9
2.1. Grafos	9
2.2. Triangulaciones en polígonos	11
3. Envolvente convexa	17
3.1. Algoritmos	18
3.1.1. Algoritmo incremental	20
3.1.2. Algoritmo de Graham	22
4. Triangulaciones	25
4.1. Algoritmos	28
4.1.1. Algoritmo básico de división	28
4.1.2. Algoritmo incremental	30
4.2. Grafo de rotaciones	31
4.3. Triangulaciones de Delaunay	36
4.3.1. Algoritmo para construir la triangulación de Delaunay	43
5. Diagramas de Voronoi	45
5.1. Algoritmos	51

5.1.1. Algoritmo incremental	51
5.2. Dualidad	55

Capítulo 1

Introducción

La geometría computacional es un área de la geometría fuertemente ligada al procesamiento de datos en computadores. Su desarrollo tardío, en comparación con el de la geometría clásica, se debe a la reciente necesidad de resolver los problemas geométricos buscando algoritmos que sean computacionalmente eficientes. No basta con la construcción de soluciones en base a resultados teóricos, sino que se busca que esa solución pueda implementarse en un ordenador y resolverse en el menor tiempo posible. A lo largo de esta memoria se hará una revisión de los problemas básicos, aportando resultados teóricos, pero también buscando algoritmos eficientes para su resolución. Como base para este documento, se ha trabajado con el libro *Discrete and Computational Geometry* [1].

En términos de computación, los datos con los que se ejecutan los diversos procesos y operaciones deben ser discretos, es por ello que los problemas presentados en esta memoria se realizan sobre nubes o conjuntos finitos de puntos. Por otro lado, se estudiarán solo resultados aplicables para valores tomados en \mathbb{R}^2 , porque realizar estas construcciones en tres dimensiones aumentaría considerablemente el alcance del problema, excediéndose la carga de la asignatura Trabajo Fin de Grado (12 créditos).

En esta memoria se estudiarán algunos problemas clásicos dentro de esta disciplina. Por un lado, se trabajará con el problema de triangulación de nubes de puntos que, en otras palabras, es la construcción de triángulos mediante la unión de los puntos que forman la nube. Este tipo de problemas se presentan en aquellas áreas de la cartografía centradas en la representación de regiones de la Tierra en tres dimensiones, puesto que es necesario tomar un conjunto finito de valores reales para realizar el mapa. La idea es aproximar el resto de valores uniendo esos puntos de los que se conoce la altitud mediante segmentos. Lo que propone la geometría computacional es que esas uniones sean además en forma de triángulos. Pero no solo eso, sino que esos triángulos cumplan también alguna condición añadida, que veremos en su capítulo correspondiente. Otra aplicación de las triangulaciones en esa misma línea es el cálculo de áreas de superficies irregulares, tanto si la región posee montañas o valles (problema en tres dimensiones), como si el polígono que la delimita posee muchos vértices (problema en dos dimensiones). En cualquiera

de los casos, la idea es dividir la región en triángulos y calcular el área de dichas figuras. De esta forma, el cálculo del área global se transforma en una simple suma de áreas de triángulos. Como ejemplo, en la Figura 1.1, se muestra un mapa del siglo XIX en el que aparece una región triangulada.

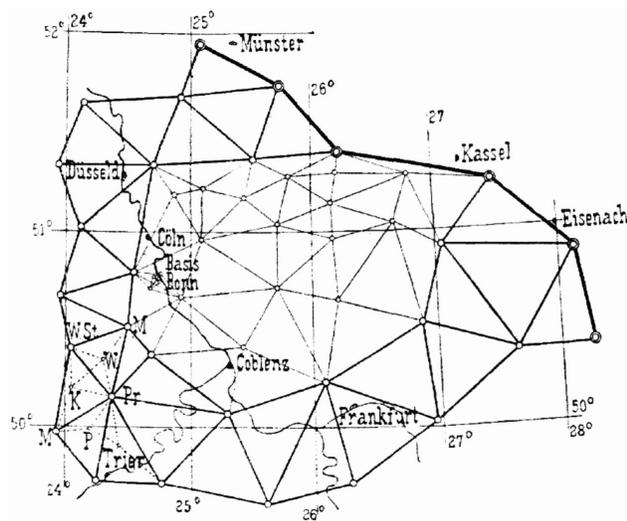


Figura 1.1: Ejemplo de región triangulada

Por otro lado, se presentará el problema de dividir el plano en regiones que delimiten las zonas más cercanas a unos puntos que a otros, conocido como diagrama de Voronoi. Este campo de la geometría computacional tiene una gran importancia en el campo de la robótica y de la cartografía para el trazado de caminos de circulación. La idea en ambos casos es similar, pero lo ejemplificaremos con el caso de un robot que trate de superar un circuito de obstáculos. El objetivo que debe buscar el algoritmo es que el robot no colisione con ningún objeto. Una de las soluciones propuestas por la geometría computacional es maximizar la distancia con todos los objetos en la trayectoria a recorrer, es decir, circular sobre el diagrama de Voronoi del conjunto de objetos (ver Figura 1.2)

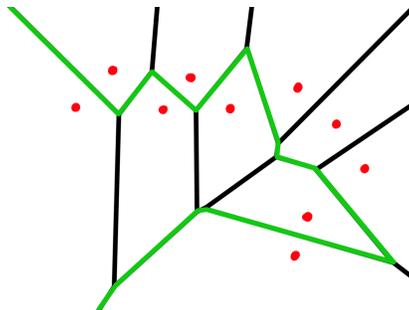


Figura 1.2: Ejemplo de camino para evitar colisionar con obstáculos (puntos rojos)

Pero este tipo de soluciones se utilizan también en el sector urbanístico porque, a la hora de determinar donde situar determinados comercios o servicios, es tremendamente útil conocer la distancia existente entre locales similares ya situados. Si, por ejemplo, se desea ubicar un nuevo hospital en una ciudad, sería lógico intentar situarlo en una zona en la que no exista ya un centro médico cerca. Los diagramas de Voronoi participan en la generación de la solución óptima como puede verse en la Figura 1.3.

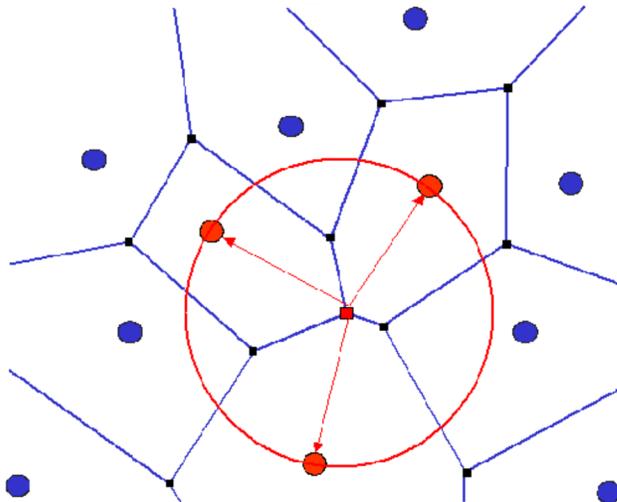


Figura 1.3: Ejemplo de ubicación óptima para un servicio urbano utilizando diagramas de Voronoi

Además, se abordará un tercer problema relacionado con rodear una nube de puntos mediante una curva que una a esos puntos y que, además, sea de longitud mínima. Esta es la idea intuitiva de la construcción geométrica a realizar, denominada envolvente convexa, que se presentará con más detalle en la sección correspondiente. Este tipo de construcciones se utilizan frecuentemente en el campo de la visión artificial. La idea es agrupar nubes de puntos con características similares. Calculando la envolvente convexa de esos puntos se obtiene una figura que se debe identificar y, a partir de ahí, se podrían calcular diferentes parámetros del objeto. Por ejemplo, podríamos agrupar un conjunto de puntos del mismo color y formar una figura al delimitar la envolvente convexa para, posteriormente, identificarla como una puerta. De esta forma, un robot podría calcular las dimensiones de la misma y determinar si puede cruzar a la siguiente habitación o no.

Concluiremos la introducción presentando la estructura de la memoria. El documento se divide en cinco capítulos, el primero de los cuales es esta introducción. A continuación, en el Capítulo 2, se presentan algunos conceptos previos, en concreto un apartado de grafos y otro de triangulaciones en polígonos, necesarios para introducir los temas centrales del trabajo. En el Capítulo 3 se presenta el problema de la envolvente convexa mostrando especial énfasis en la parte algorítmica. Posteriormente, en el Capítulo 4, se trabajará con triangulaciones sobre conjuntos finitos de puntos y, en particular, con triangulaciones de Delaunay que presentan pro-

iedades de gran interés. Finalmente, en el Capítulo 5, se estudian las propiedades y algoritmos relacionados con los diagramas de Voronoi y la dualidad que guardan estas construcciones con las triangulaciones de Delaunay ya mencionadas.

Capítulo 2

Conceptos previos

Presentaremos en esta sección una introducción a algunos conceptos que se utilizarán en el desarrollo de la memoria. El capítulo se dividirá en dos apartados. En primer lugar, se mostrarán algunos conceptos y propiedades básicas sobre grafos, que se utilizarán en los Capítulos 4 y 5 y, posteriormente, se presentará una introducción a triangulaciones en polígonos, que servirá de base para trabajar en el Capítulo 4 con triangulaciones en nubes de puntos.

2.1. Grafos

Comencemos definiendo esta estructura y algunas de sus características principales.

Definición 2.1. *Llamamos grafo G a un par de conjuntos finitos V, A , donde V es no vacío y A es un conjunto de pares de V . Denominamos al conjunto V como el conjunto de vértices o nodos de G y a A como el conjunto de aristas.*

Los grafos pueden representarse gráficamente de la siguiente forma:

- Un nodo v se representa como un punto.
- Una arista $\{v_1, v_2\}$ se representa como una curva que une los nodos v_1 y v_2 .

Definición 2.2. *Sea G un grafo. Decimos que dos nodos v_1 y v_2 son adyacentes, si existe la arista $\{v_1, v_2\}$ en A .*

Cuando existe una arista $\{v_1, v_2\}$ diremos que v_1 y v_2 están conectados por una arista.

Definición 2.3. *Sea G un grafo. Un nodo v de G tiene grado n si existen n aristas conectadas a v .*

Definición 2.4. Sea G un grafo. Un camino de G es una sucesión de nodos adyacentes, $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$. A los nodos v_1 y v_n se los denomina extremos del camino.

Definición 2.5. Sea G un grafo y c un camino de G decimos que el camino tiene longitud n si la sucesión que lo define tiene $n + 1$ nodos.

Definición 2.6. Sea G un grafo. Definimos el diámetro de G como la mayor longitud existente entre dos nodos del grafo.

Definición 2.7. Sea G un grafo. Decimos que G es conexo si para cualquier par de vértices v_1, v_2 existe un camino en el cual v_1 y v_2 son extremos.

Definición 2.8. Sea G un grafo. Decimos que G es plano si puede ser representado en dos dimensiones sin que ninguna de sus aristas se cruce.

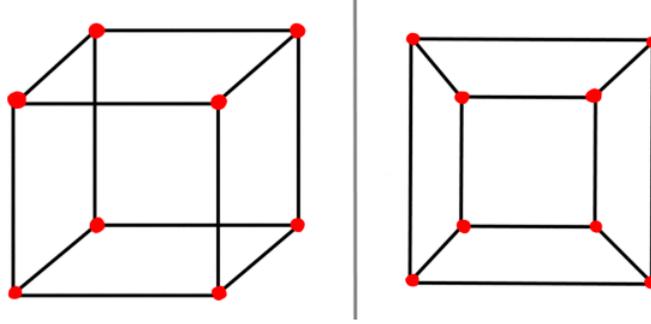


Figura 2.1: Ejemplo de grafo plano

Definición 2.9. Sea G un grafo. Decimos que G es dirigido si los pares de aristas, (v_1, v_2) , son ordenados. Decimos que es no dirigido en caso contrario.

Concluiremos esta sección con un resultado que relaciona los grados de los vértices de un grafo con el número de aristas del mismo.

Proposición 2.1 (Handshaking). Sea G un grafo con n vértices y a aristas. Si denotamos a los vértices por v_i , $i = 1, 2, \dots, n$, se verifica la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^n v_i = 2a$$

Demostración. Por un lado, el grado de un vértice es el número de aristas incidentes al mismo. Por otro lado, cada arista está definida por dos vértices simultáneamente, por lo que si determinamos el número de aristas en función del grado de los vértices estaremos contando dos veces cada una de las aristas. De esta observación se deduce el resultado. \square

2.2. Triangulaciones en polígonos

Comenzaremos definiendo el concepto de polígono.

Definición 2.10. *Un polígono P es una región acotada del plano delimitada por un número finito de segmentos que forman una curva simple y cerrada.*

Denominaremos aristas a los segmentos que definen el polígono, y vértices a los puntos en los que intersecan aristas adyacentes. Por otro lado, denominaremos frontera del polígono P , denotada por ∂P , al conjunto de vértices y aristas.

Además, denominaremos diagonal de un polígono a un segmento que une dos vértices no consecutivos y que, a excepción de esos dos vértices, está contenido en su interior. Se dice que dos diagonales no se cruzan si no comparten puntos en el interior del polígono.

Continuaremos definiendo el concepto de triangulación.

Definición 2.11. *Denominamos triangulación de un polígono P a la división de P en triángulos mediante un conjunto maximal de diagonales que no se cruzan.*

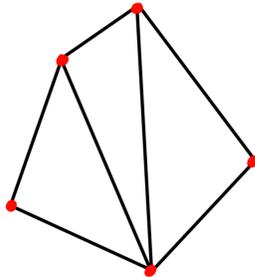


Figura 2.2: Ejemplo de una triangulación sobre un polígono

Estudiaremos a continuación la existencia y unicidad de las triangulaciones, así como el número de triangulaciones diferentes para un mismo polígono. Pero antes veamos un pequeño resultado previo.

Lema 2.1. *Todo polígono P con más de tres vértices tiene, al menos, una diagonal.*

Demostración. Sea v el vértice de P situado más inferiormente en el plano. En el caso de haber más de uno, sea v el que está más a la derecha. Sean a y b los vértices adyacentes a v . Si el segmento que une los vértices a y b es una diagonal concluimos con la prueba. Si no, dicho segmento será exterior al polígono o intersecará con su frontera.

Podemos suponer entonces que no existe un tercer vértice c alineado con a y con b y situado en medio de ellos, pues de existir utilizaríamos c junto con aquel vértice (a o b) con el que no forma una arista y el proceso sería análogo.

Continuando con el razonamiento del párrafo anterior, en ambos casos, como P tiene más de tres vértices, el triángulo formado por v , a y b contendrá, al menos, un vértice de P ya que:

- Si el segmento que une a y b es exterior a P es claro que debe existir dicho vértice.
- Si el segmento que une a y b interseca con la frontera del polígono lo hará con una arista (por suponer que no existe otro punto alineado). Por definición una arista es un segmento que define el polígono y une vértices del mismo. Por tanto, si se produce dicha intersección, deberá existir un vértice en el interior del triángulo delimitado por v , a y b .

Sea entonces L una línea paralela al segmento que une a con b y sea x el primer vértice intersecado por L al desplazarse desde v hacia el segmento que une a y b (ver Figura 2.3). Entonces el triángulo delimitado por la línea L sobre x y el vértice v no posee más vértices en su interior y, por tanto, el segmento que une v con x es una diagonal, pues está contenido en P y, además, no interseca ningún otro punto de su frontera.

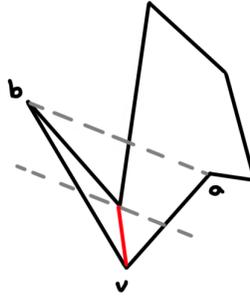


Figura 2.3: Ejemplo cálculo diagonal determinada por la recta L

□

Continuaremos con un resultado que garantiza la existencia de las triangulaciones.

Teorema 2.1. *Todo polígono P admite una triangulación.*

Demostración. Probaremos el teorema por inducción. Sea un polígono P con n vértices.

Si $n = 3$, el polígono formado es un triángulo y hemos terminado.

Si $n > 3$, supongamos la propiedad cierta para todo P' con un número de vértices menor que n . Veamos que, entonces, el polígono de n vértices también admite una triangulación. Usamos para ello el lema previo, como P tiene más de 3 vértices tendrá una diagonal. Esa diagonal divide el polígono en dos polígonos Q y R , ambos con un número de vértices menor que n . Por tanto, Q y R admiten triangulación por hipótesis de inducción. Además, por el teorema de la curva de Jordan [2], el interior de R está en el exterior de Q y viceversa, por lo que las diagonales de ambas triangulaciones no pueden cruzarse. Obtenemos entonces P dividido en triángulos mediante diagonales que no se cruzan. □

Observación 2.1. *El teorema de la curva de Jordan garantiza que toda curva simple y cerrada en \mathbb{R}^2 , divide al plano en dos componentes conexas y disjuntas, de forma que una de esas componentes será acotada (la correspondiente al interior de la curva), y la otra será no acotada (la del exterior).*

Continuaremos determinando el número de diagonales y triángulos.

Teorema 2.2. *Sea un polígono P con n vértices. Toda triangulación de P tendrá $n-2$ triángulos y $n-3$ diagonales.*

Demostración. Probaremos el resultado por inducción.

Si $n = 3$, el resultado es trivial.

Si $n > 3$, suponemos la propiedad cierta para los polígonos con un número de vértices menor. Por el Lema 2.1, P tiene, al menos, una diagonal que divide el polígono en dos polígonos Q y R con n_1 y n_2 vértices respectivamente. Como la diagonal es común a ambos polígonos, se cumplirá la siguiente igualdad: $n_1 + n_2 - 2 = n$.

Utilizando la hipótesis de inducción se obtendrá que P posee:

$$(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = (n_1 + n_2) - 4 = n - 2 \text{ triángulos.}$$

$$(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = (n_1 + n_2) - 5 = n - 3 \text{ diagonales.}$$

□

Finalmente, determinaremos el número de triangulaciones distintas que admite un mismo polígono. En este caso, trabajaremos solo con polígonos convexos porque son los que cumplen la propiedad de existencia de diagonales como veremos a continuación. Introduzcamos algunos conceptos para ello.

Definición 2.12. *Sea P un polígono. Decimos que un vértice v de P es convexo si el ángulo que forman sus aristas es menor o igual que π . En caso contrario, se denomina vértice reflejo.*

Definición 2.13. *Un polígono P es convexo cuando todos sus vértices lo son.*

Observación 2.2. *En el Capítulo 3 definiremos la convexidad en conjuntos como una propiedad que garantiza que el segmento que une dos puntos cualquiera de ese conjunto está contenido en el conjunto. Como veremos ahora, esa definición es equivalente a la propuesta.*

Lema 2.2. *Sea P un polígono. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. P es convexo
2. Sea R la recta obtenida por la prolongación de una arista de P . Entonces P está contenido en uno y solo uno de los lados de R .
3. $\forall x, y \in P$ el segmento que une x e y está totalmente contenido en el interior de P .

Demostración. $1 \Leftrightarrow 2$

$1 \Rightarrow 2$ Probaremos el resultado por un razonamiento de inducción sobre el número de vértices n del polígono.

Si $n=3$ el polígono es un triángulo y el resultado trivial.

Suponemos la propiedad cierta para polígonos con $n - 1$ vértices. Sea P un polígono con n vértices y a una arista de P definida por los vértices v_1 y v_2 . Denotamos por R a su prolongación. Sea x el vértice adyacente a v_1 ($x \neq v_2$). Realizamos la contracción de la arista que une x con v_1 , obteniendo un polígono de $n - 1$ vértices sobre el que podemos aplicar la hipótesis de inducción. El resultado queda probado puesto que, además, el vértice v_1 es convexo y, por tanto, la arista que lo une con x no puede situarse al otro lado de R .

$2 \Rightarrow 1$ En este caso, probaremos el enunciado por contrarrecíproco. Supongamos que un vértice v de P es reflejo. Entonces es claro que la prolongación de cualquiera de sus aristas intersecará con el interior del polígono, dividiéndolo de forma que existan regiones de P a ambos lados de la recta.

$2 \Leftrightarrow 3$

$2 \Rightarrow 3$ Razonamos el recíproco. Supongamos que existe una arista a cuya prolongación R divide a P . Existirá entonces, al menos, un vértice a cada lado de R . Elegimos uno de cada lado, en concreto, aquellos con mayor distancia a R , denotados por x_1 y x_2 . Veamos que al menos una de las uniones de estos vértices con los vértices de a debe ser parcialmente exterior a P . Si no fuera así, formaríamos un cuadrilátero contenido en P del cuál a sería diagonal. Esto es absurdo porque se había supuesto que a era una arista.

$3 \Rightarrow 2$ Trabajaremos nuevamente con el resultado recíproco pero, en este caso, diferenciaremos casos. Supongamos que existe un segmento s parcialmente exterior a P que une dos puntos del mismo, x_1 y x_2 .

1. Si x_1 y x_2 son interiores a P , el segmento que los une intersecará con la frontera del polígono en dos puntos y_1 e y_2 , de forma que el segmento que une y_1 e y_2 será también parcialmente exterior a P . Razonar según caso 3, 4 o 5.
2. Si solo uno de los puntos es interior a P , supongamos x_1 sin pérdida de generalidad, el segmento que los une intersecará con la frontera del polígono en un punto y . De esta forma, el segmento que une y con x_2 será también parcialmente exterior a P . Razonar según caso 3, 4 o 5.
3. Si x_1 y x_2 están ambos contenidos en una arista de P , a_1 y a_2 , entonces es claro que cualquiera de ellas separa a P puesto que las aristas forman parte de la frontera del conjunto.
4. Si uno de los puntos, supongamos x_1 , está contenido en una arista y el otro en un vértice, entonces por un razonamiento análogo se obtiene que la arista a la que pertenece x_1 dividirá el polígono.

5. Finalmente, si los dos extremos del segmento parcialmente exterior son vértices de P , realicemos una rotación del plano que sitúe a s paralelo al eje de las abscisas. Denotemos por x_1 al extremo con un mayor valor en el eje de las abscisas (es único por cómo se sitúa el segmento). Entonces la arista de x_1 que posea valores menores en el eje de las abscisas, denotada por a_1 , separará puntos de P porque, por un lado, el punto x_2 se situará a la izquierda de a_1 y, por otro, la otra arista de x_1 se mantendrá a la derecha.

□

Observación 2.3. *En concreto, de este resultado puede extraerse que dado un polígono P , existirá siempre la diagonal entre dos vértices no consecutivos de P si y solo si P es convexo.*

Introduciremos un último concepto previo al teorema.

Definición 2.14. *Sea P un polígono y T una triangulación del mismo. Decimos que un vértice v de T tiene grado n si existen n aristas o diagonales incidentes a v . Lo denotamos por $\delta(v)$.*

Teorema 2.3. *El número de triangulaciones de un polígono P convexo con $n + 2$ vértices es el número de Catalan:*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Demostración. Denotemos a los diferentes vértices de P desde 1 hasta $n + 2$ en sentido antihorario.

Sea \mathcal{T}_{n+2} el conjunto de triangulaciones de P . Denotaremos su cardinal por t_{n+2} . Denominemos P' al polígono resultante de contraer la arista determinada por los vértices 1 y $n + 2$ en un solo punto. Sea \mathcal{T}_{n+1} el conjunto de triangulaciones de P' y t_{n+1} su cardinal.

Definimos la aplicación ϕ entre los conjuntos \mathcal{T}_{n+2} y \mathcal{T}_{n+1} como la contracción de la arista determinada por 1 y $n + 2$ de una triangulación del primer conjunto. Es importante ver que, dada una triangulación T de \mathcal{T}_{n+1} , el número de elementos de \mathcal{T}_{n+2} que tienen como imagen a T se corresponde con el grado del vértice 1 en T por cómo está definida la aplicación. Esto puede garantizarse porque existen todas las diagonales al ser T convexo. Obtenemos la siguiente igualdad:

$$t_{n+2} = \sum_{T \in \mathcal{T}_{n+1}} \delta(1)$$

Pero también podemos escribir la ecuación considerando los grados de todos los vértices:

$$t_{n+2}(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{T \in \mathcal{T}_{n+1}} \delta(i) = \sum_{T \in \mathcal{T}_{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \delta(i)$$

Utilizando la Proposición 2.1 y teniendo en cuenta que T tendrá $n + 1$ aristas (porque tiene $n + 1$ vértices) y $n - 2$ diagonales (por el Teorema 2.2), llegamos a:

$$t_{n+2}(n + 1) = 2((n + 1) + (n - 2))t_{n+1}$$

Resolviendo la ecuación recursiva se obtiene:

$$t_{n+2} = 2^n \frac{2n - 1}{n + 1} \frac{2(n - 1) - 1}{n} \dots \frac{1}{2} = \frac{(2n)!}{(n + 1)!n!} = \frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n} = C_n$$

□

Capítulo 3

Envolvente convexa

Trabajaremos en esta sección con conjuntos finitos de puntos en el plano. La principal diferencia con el caso de los polígonos es que, en este caso, los puntos no están ni unidos ni ordenados. Puede ser interesante entonces, antes de realizar otro tipo de tareas, como por ejemplo la triangulación del conjunto (Capítulo 4), hallar su envolvente convexa.

En el capítulo anterior se introdujo el concepto de convexidad en polígonos. Ahora, extenderemos esa definición a conjuntos del plano.

Definición 3.1. *Un conjunto A de \mathbb{R}^2 es convexo si para todos $x, y \in A$, el segmento que une ambos puntos está totalmente contenido en A , es decir, si $tx + (1 - t)y \in A$ para todo $t \in [0, 1]$.*

El siguiente paso es definir la envolvente convexa de un conjunto de puntos.

Definición 3.2. *Sea S un conjunto de n puntos de \mathbb{R}^2 . Definimos la envolvente convexa de S como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S . Se denota por $\text{conv}(S)$.*

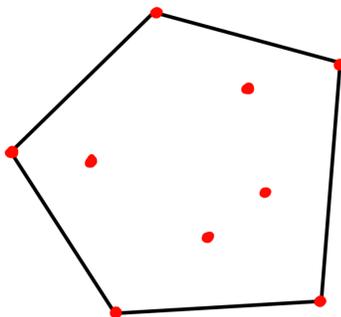


Figura 3.1: Ejemplo de la envolvente convexa de un conjunto de puntos

En otros términos, la envolvente convexa de S se corresponde con el menor conjunto convexo que contiene a S . Además, como su propio nombre indica, esta construcción será convexa. Veámoslo en la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *La intersección de conjuntos convexos es un convexo.*

Demostración. Sean A_1, A_2, A_3, \dots conjuntos convexos. Veamos que $\cap A_n$ es también convexo.

Sean $x, y \in \cap A_n$. Queremos ver que $tx + (1 - t)y \in \cap A_n$ para todo $t \in [0, 1]$. Sabemos que $x, y \in A_n \forall n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Como, por hipótesis, cada A_n es convexo, se cumplirá que $tx + (1 - t)y \in A_n \forall t \in [0, 1], \forall n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ y, por tanto, la intersección será convexa. \square

Mostraremos un último resultado teórico que se utilizará en las construcciones algorítmicas.

Proposición 3.2. *Sea S un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 . La envolvente convexa de S es un polígono convexo P que contiene a todos los puntos de S y cuyos vértices son puntos de S .*

Demostración. En primer lugar, se probará que $P \subset \text{conv}(S)$. Como $\text{conv}(S)$ es convexo y contiene a S , contendrá también a todos los segmentos que unen puntos de S . Entonces cualquier polígono formado por la unión de vértices de S pertenecerá a $\text{conv}(S)$, en particular $P \subset \text{conv}(S)$.

Por otro lado, como $\text{conv}(S)$ es el menor conjunto convexo que contiene a S debe cumplirse $P = \text{conv}(S)$ \square

3.1. Algoritmos

Continuaremos mostrando algunos algoritmos para el cálculo de la envolvente convexa de un conjunto de puntos. En concreto, para conocer la forma que tiene esta construcción, bastaría con conocer su frontera, lo que será el objetivo central de los métodos que se expondrán a continuación. Como es frecuente expresar la región correspondiente a la envolvente convexa definiendo únicamente su frontera, históricamente se ha denominado también a ese subconjunto como envolvente convexa, produciéndose así un abuso de notación. Hasta el final de esta memoria nos referiremos, por tanto, como envolvente convexa a la frontera de ese conjunto.

Intuitivamente, es fácil observar que los puntos extremos, es decir, los que poseen una mayor y menor coordenada en ambos ejes pertenecerán a la envolvente convexa del conjunto. Lo que no es tan claro es qué otros puntos los acompañarán. Veamos algunos métodos para determinarlos, pero primero introduzcamos algunos conceptos que utilizaremos posteriormente.

Definición 3.3. *Sea P un polígono convexo y x un punto de su frontera. Decimos que una recta R a la que pertenece x , es tangente a P si R no interseca con el interior de P , es decir, si P permanece a un lado de la recta.*

Definición 3.4. Sea E la envolvente convexa de un conjunto de puntos del plano S , y p un punto exterior a E . Decimos que una arista de E es visible para p si la recta que prolonga a la arista separa a p de E . En caso contrario, se dice que es invisible.

Observación 3.1. No definimos el caso en que la recta que prolonga a la arista pase por p porque a la hora de estudiar la visibilidad consideraremos conjuntos que no contengan tres puntos alineados.

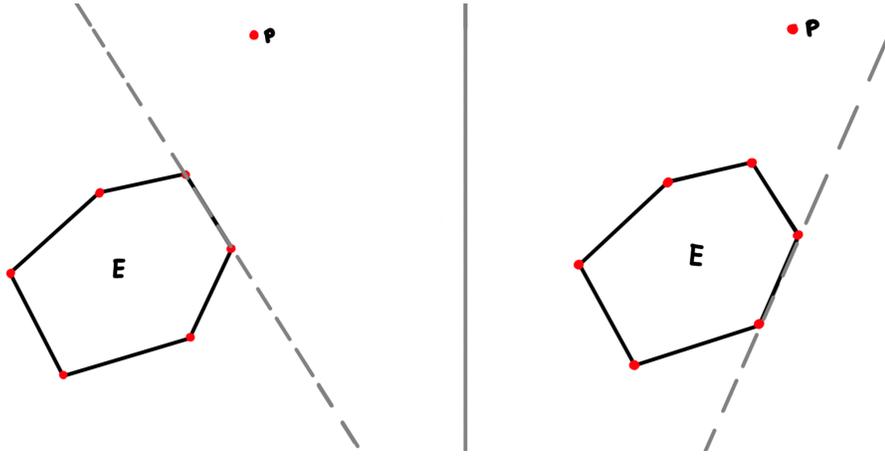


Figura 3.2: Ejemplo arista visible / arista no visible

Además, planteamos el siguiente resultado que formalizará la idea de que los puntos extremos pertenecerán a la envolvente convexa del conjunto.

Lema 3.1. Sea S un conjunto de n puntos de \mathbb{R}^2 y $\text{conv}(S)$ su envolvente convexa. Sea x el punto de S con un mayor valor en la coordenada de las abscisas, que suponemos único. Entonces x debe pertenecer a la envolvente convexa de S .

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $x = (x_1, x_2)$ no pertenece a $\text{conv}(S)$. Entonces deberá pertenecer a su interior (porque si fuera exterior, $\text{conv}(S)$ no cumpliría la definición). Existirá por ello una bola abierta, con radio $r > 0$ y centrada en x , contenida en $\text{conv}(S)$. Pero entonces, deberá existir un punto $y = (y_1, y_2)$, $y \in \text{conv}(S)$, cumpliendo $y_1 > x_1 + r$, llegando a absurdo. \square

Observación 3.2. En este caso el resultado solo se prueba para el punto que posee un mayor valor en el eje de las abscisas, sin embargo, aplicando un razonamiento similar, se obtiene que el punto con menor abscisa, el punto con mayor ordenada y el punto con menor ordenada también pertenecerán a la envolvente convexa.

3.1.1. Algoritmo incremental

La idea fundamental de este algoritmo es obtener la envolvente convexa de $k + 1$ puntos a partir de la de k puntos. Para ello tomamos un conjunto de puntos $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \in \mathbb{R}^2$ y lo ordenamos por el valor de dichos puntos en el eje de las abscisas. Podemos suponer que no existen dos o más puntos con el mismo valor en esa coordenada, ya que si eso ocurriese podríamos rotar el plano de forma que fuesen distintas porque el conjunto de puntos es finito (entonces el número de segmentos que unen todos esos puntos entre sí será también finito y podremos encontrar una rotación en \mathbb{R}^2 que no deje a ninguno de estos segmentos con pendiente vertical ya que el número de posibles pendientes es infinito).

Además, suponemos que no existen tres o más puntos alineados, porque si existiesen consideraríamos solo los puntos extremos y despreciaríamos los interiores. De esta forma, todos los puntos estarían contenidos en el segmento que une ambos puntos extremos y, por tanto, pertenecerían a la envolvente convexa o a su interior, sin necesidad de realizar ninguna operación adicional.

Comenzamos entonces construyendo la primera frontera, E_3 , que contendrá los tres primeros puntos del conjunto (Figura 3.3) de manera que el triángulo formado con su unión se construya en sentido antihorario.

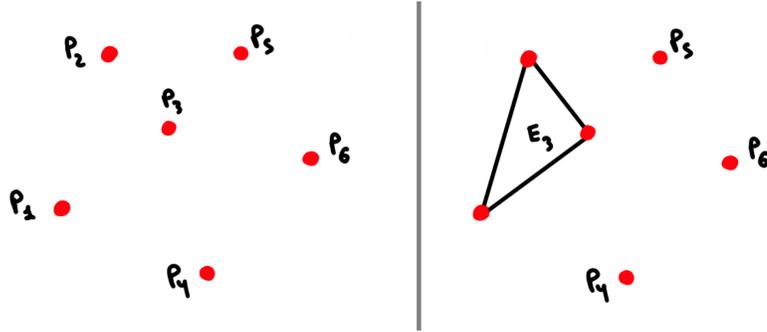


Figura 3.3: Ejemplo del paso 1 del algoritmo incremental

El proceso se repite iterativamente de la siguiente manera: partimos de la frontera de la envolvente convexa de los primeros k puntos, $E_k = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, ordenados de forma que la curva obtenida por su unión se construya en sentido antihorario. Construiremos E_{k+1} añadiendo el siguiente punto de la lista, p . Como el conjunto está ordenado según los valores de la primera coordenada, p será un extremo en esa dirección, y por tanto, pertenecerá a E_{k+1} por el lema anterior. Sin embargo, esta adición podría suponer que algunos de los puntos que pertenecían a la frontera del conjunto pasasen a su interior. El siguiente paso es, por tanto, añadir p en la posición correcta en E_{k+1} y eliminar los puntos de E_k que pasen ahora a pertenecer al interior del conjunto. La idea es encontrar los vértices que cumplen la siguiente propiedad: una de sus aristas es visible para p y la otra es invisible. Esto es equivalente a trazar todos los segmentos desde p hasta los vértices de E_k y seleccionar aquel que tiene mayor y menor pendiente con respecto al eje de las abscisas, que se corresponderán con las tangentes a E_k .

Una vez encontrados esos puntos de tangencia añadiríamos el punto p entre p_i y p_j , eliminando los puntos que se situasen en medio de los mismos porque pasarán a pertenecer al interior del conjunto. Se obtiene de esta forma que $E_{k+1} = \{p_1, \dots, p_i, p, p_j, \dots\}$ (ver Figura 3.4).

Observación 3.3. Para comprobar si una arista es visible o no visible tomaríamos las coordenadas del punto $p = (x_1, y_1)$ y las de un vértice cualquiera del polígono que no esté sobre la arista que queremos comprobar, $v_i = (x_2, y_2)$, y calcularíamos por otro lado, la función que define la recta que pasa por la arista, $f(x)$ (que nunca puede ser vertical porque suponemos que no existen dos puntos con el mismo valor de abscisa). La idea es entonces comprobar si $f(x_1) < y_1$, en cuyo caso p se encontrará por encima de la recta, o si $f(x_2) > y_1$, y se situará por debajo. El proceso se repite con v_i para determinar la visibilidad de la arista.

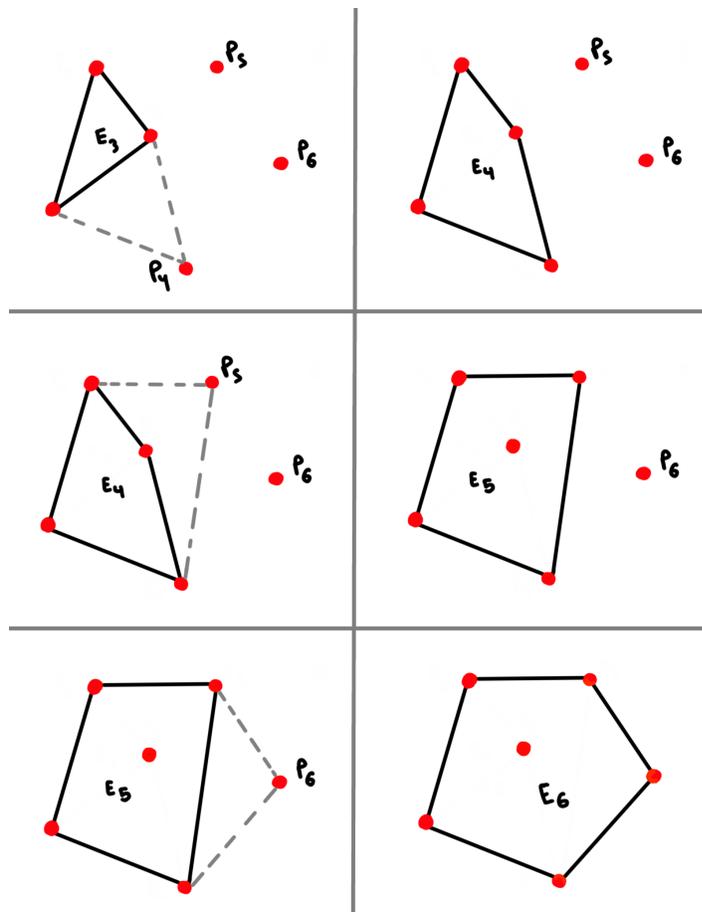


Figura 3.4: Ejemplo del paso iterativo del algoritmo incremental

Se obtiene de esta forma un polígono convexo por construcción, que contiene a S y cuyos vértices son puntos de S . Utilizando la Proposición 3.2 concluimos que es la envolvente convexa de S .

Calculemos ahora la complejidad del algoritmo. En primer lugar, debemos ordenar el conjunto S , lo cual tiene una complejidad de $O(n \log n)$ utilizando algoritmos como *Quicksort* [10]. A continuación, para cada punto p_k se comprueba cuáles de los bordes de la frontera de E_{k-1} son visibles. Es decir, se consideran $k - 1$ bordes. Esto supone:

$$3 + 4 + \dots + (n - 1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 3$$

operaciones. Por tanto, la complejidad es del orden $O(n^2)$.

Este algoritmo no es muy eficiente porque considera todos los puntos del conjunto en vez de considerar algunos más importantes que otros.

3.1.2. Algoritmo de Graham

La propuesta desarrollada por Ronald L. Graham en 1972 [3] mejora la complejidad de los algoritmos anteriores, rebajándola a $O(n \log n)$.

Para un conjunto de n puntos $S \in \mathbb{R}^2$, seleccionamos aquel que posee una coordenada menor en el eje de las ordenadas. En caso de que dos o más coincidan elegiremos aquel situado más a la derecha, y lo denominaremos p_1 . Etiquetaremos el resto de puntos como p_2, p_3, \dots ordenados de mayor a menor según el ángulo que forman con la horizontal (ver Figura 3.5).

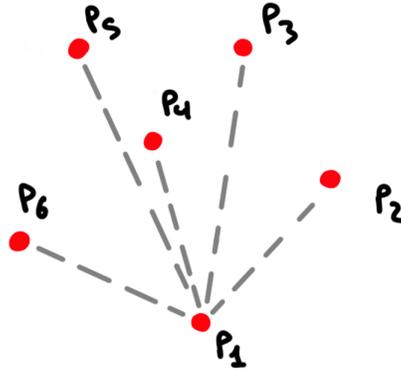


Figura 3.5: Ejemplo de la ordenación de puntos en algoritmo de Graham

La idea es tomar entonces p_1, p_2 y p_3 y comprobar si el vértice p_2 es convexo o reflejo (considerando el giro de p_1 a p_3 en sentido horario). En caso de que sea reflejo, el punto p_2 no pertenecerá a la envolvente convexa. Sin embargo, si el vértice es convexo, sí que lo hará y deberemos considerarlo en el conjunto de la envolvente. El proceso se repite iterativamente utilizando los dos últimos puntos que hayamos utilizado en el paso anterior y añadiendo el siguiente según el orden establecido. Cuando completamos el caso que incluye al punto inicial, p_1 , hemos finalizado con el proceso, obteniendo un polígono que une puntos de S con todos los

vértices convexos. Como además ese polígono contiene a S , se corresponde con la envolvente convexa que buscábamos (ver Figura 3.6).

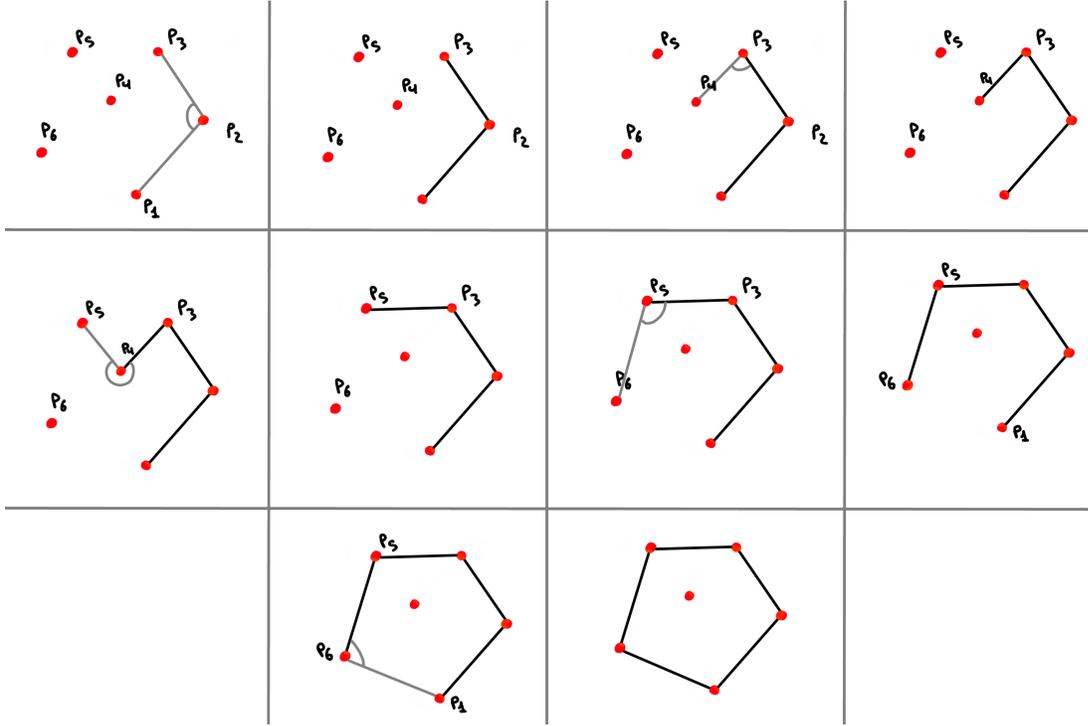


Figura 3.6: Ejemplo del proceso iterativo en el algoritmo de Graham

Como ya se mencionó, la complejidad de este método es $O(n \log n)$, que viene dominada por la complejidad requerida al ordenar un conjunto de puntos, ya que, por otro lado, la complejidad de determinar qué puntos pertenecen a la envolvente convexa es del orden $O(n)$.

Además, no podemos encontrar un algoritmo con una complejidad menor como probamos con el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sea S un conjunto de n puntos, $S \in \mathbb{R}^2$. La complejidad óptima requerida para calcular la envolvente convexa de S en orden (de forma que se pueda recorrer la curva) es $O(n \log n)$.*

Demostración. Probaremos el teorema presentando un caso en el que el mínimo de operaciones requeridas se corresponde al orden de complejidad que buscamos probar. Sea $S = x_1, x_2, \dots, x_n$ un conjunto no ordenado de puntos tomados sobre la parábola $y = x^2$ en su rama positiva, es decir, $x_i = (x, x^2), x \geq 0$. Como las parábolas son convexas, cada vértice de S será convexo y, por tanto, según el algoritmo de Graham, pertenecerá a la envolvente convexa. Obtenemos por tanto que S es la envolvente convexa de S sin realizar ninguna operación y solo faltaría ordenar

el conjunto para poder recorrer la curva. Como ya hemos visto esto supone una complejidad de $O(n \log n)$ que sería el mínimo de operaciones requerido para obtener el conjunto en el estado solicitado. \square

Mencionaremos finalmente que en 1985 Franco Preparata y Michael Shamos [5] probaron que esa era la mejor cota para encontrar la envolvente convexa aunque no se incluya la condición de orden de los puntos. La prueba del resultado no se incluye por su complejidad.

Capítulo 4

Triangulaciones

En este capítulo, realizaremos construcciones similares a las presentadas en la introducción, pero en este caso trabajaremos con conjuntos finitos de puntos S en lugar de con polígonos. Como se verá posteriormente, los resultados que se plantearán en esta sección tienen un gran conjunto de aplicaciones en diferentes sectores en la realidad actual, por lo que este problema ha ganado cada vez más importancia dentro de la geometría computacional.

Comenzaremos introduciendo algunos conceptos. A diferencia del caso de los polígonos, en este caso denominaremos arista a cualquier segmento que una dos puntos de S . Es decir, en este caso una arista denota independientemente a una arista o a una diagonal. La definición de triangulación también cambia ligeramente, aunque la idea sigue siendo la misma: descomponer el plano en triángulos uniendo los puntos del conjunto. Veamos cómo se define formalmente.

Definición 4.1. Sea $S \in \mathbb{R}^2$ conjunto finito. Una triangulación de S es una división de la envolvente convexa de S mediante un conjunto maximal de aristas que no se cruzan y que unen los puntos de S .

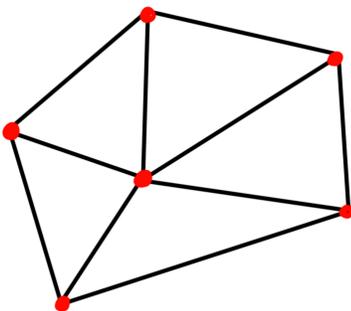


Figura 4.1: Ejemplo de triangulación sobre un conjunto de puntos

Intuitivamente los puntos del conjunto que pertenezcan a la envolvente convexa definida en el capítulo anterior deberían pertenecer a todas las triangulaciones del conjunto, puesto que determinan el “borde” de la región. Veamos esto de manera formal.

Proposición 4.1. *Las aristas que forman la envolvente convexa de un conjunto de n puntos S estarán en todas las triangulaciones de S .*

Demostración. Como ya se mencionó en el capítulo anterior, por envolvente convexa nos referimos a la frontera del menor conjunto convexo que contiene a los puntos de S . Sea a una arista de $\text{conv}(S)$. Veamos que no puede existir otra arista a' que se cruce con a . Si existiese tendríamos dos posibilidades:

- En primer lugar, que uno de los extremos de a' esté en el interior de a . Esto no puede ocurrir porque en dicha intersección debería existir un punto de S y a no sería una arista.
- La otra posibilidad es que exista un punto p de S que sea exterior a $\text{conv}(S)$ de forma que a' una p con otro punto q interior a la envolvente. Esto tampoco puede suceder puesto que en ese caso p no estaría contenida en el interior de la envolvente llegando a absurdo.

Por tanto, ninguna otra arista puede intersecar a a . Como además a une puntos de S , por definición deberá estar en cualquier triangulación de S , porque si no ese conjunto no sería maximal. \square

Es importante notar que, a diferencia del caso de los polígonos, la definición de triangulación no menciona en ningún momento que las divisiones del plano se hagan en triángulos. Sin embargo, esto se obtiene de la condición de maximalidad como veremos a continuación.

Proposición 4.2. *Los conjuntos obtenidos por una triangulación sobre un conjunto S de n puntos son triángulos.*

Demostración. Probaremos el resultado por reducción al absurdo. Supongamos que alguna de las regiones obtenidas por la triangulación no es un triángulo. Tendríamos por definición un polígono P de $n > 3$ vértices. Utilizando el Lema 2.1 concluiríamos que existe al menos una diagonal, que en este caso se denomina arista, que no se cruza con ninguna otra porque se construye en el interior de P . Por tanto, se obtiene que el conjunto de aristas que definía la triangulación no era maximal llegando a contradicción. \square

Continuaremos presentando más propiedades de las triangulaciones de conjuntos. De la definición, se puede intuir que existen distintas maneras de triangular una misma nube de puntos. Sin embargo, todas ellas poseerán el mismo número de triángulos como veremos a continuación. Presentaremos previamente la fórmula de Euler sobre polígonos.

Teorema 4.1 (Fórmula de Euler). *Sea P un grafo plano y conexo con V vértices, A aristas y C caras. Se cumple que $V - A + C = 2$.*

Observación 4.1. *Al hablar de caras nos referimos a las diferentes regiones conexas que se obtienen en el plano por las divisiones realizadas por la unión de aristas y vértices del grafo. Obtendremos por ello, un número finito de caras acotadas y una no acotada, que se corresponderá con la región exterior al grafo.*

Demostración. Probaremos el resultado por inducción sobre el número de aristas.

Si $A = 0$, entonces tendremos un único punto y $V = 1$. Además, tendremos una única cara y $C = 1$. Por tanto, $V - A + C = 1 - 0 + 1 = 2$.

Supongamos el resultado cierto para $A < n$ y veamos si se cumple para $A = n$. La idea es realizar una contracción sobre una arista a para poder utilizar la hipótesis de inducción. Pueden ocurrir dos cosas:

- Que a conecte dos vértices, en cuyo caso la contracción supondrá la reducción en una unidad del número de aristas y del número de vértices pero no del número de caras (porque el grafo es conexo). Se obtendría entonces $V_n - A_n + C_n = (V_{n-1} + 1) - (A_{n-1} + 1) + C_{n-1} = 2$
- Que a solo conecte con un vértice por ser una curva cerrada sobre sí misma. En este caso es importante notar que el teorema de la curva de Jordan afirma que a divide el plano en dos componentes conexas, una interior a la curva y otra exterior. Por tanto, en este caso la contracción supondrá la reducción en una unidad del número de aristas, pero también de una cara. Por otro lado, el número de vértices se mantiene constante. En este caso $V_n - A_n + C_n = V_{n-1} - (A_{n-1} + 1) + (C_{n-1} + 1) = 2$

□

Ahora ya podemos plantear el resultado mencionado.

Teorema 4.2. *Sea S un conjunto de n puntos, no todos alineados, de \mathbb{R}^2 con a puntos pertenecientes a la envolvente convexa y b en el interior de la misma. Cualquier triangulación del conjunto tendrá $2b + a - 2$ triángulos y $3b + 2a - 3$ aristas.*

Demostración. Como hemos mencionado utilizaremos la fórmula de Euler para probar el resultado puesto que una triangulación puede verse como un grafo plano y conexo.

Dada una triangulación de un conjunto de puntos S , denotemos por t el número de triángulos de la misma. Entonces tenemos:

- Caras: $C = t + 1$, una por cada triángulo y la exterior.
- Vértices: $V = a + b$.

- Aristas: $A = \frac{3t+a}{2}$, porque:
 - Por un lado, las caras interiores están delimitadas por tres aristas cada una. Entonces tenemos $3t$ aristas.
 - Por otro lado, la cara exterior se delimita por a aristas, las correspondientes a la envolvente convexa.
 - Pero además, como cada arista delimita dos caras simultáneamente, debemos dividir ese valor entre dos, obteniendo así el número total de aristas de la triangulación.

Entonces sustituyendo se obtiene

$$V - A + C = (a + b) - \left(\frac{3t + a}{2}\right) + (t + 1) = 2$$

Si despejamos t obtenemos que el número total de triángulos es

$$t = 2b + a - 2$$

Y sustituyendo en A concluimos

$$A = 3b + 2a - 3$$

□

Por otra parte, para conjuntos de puntos no podemos determinar el número exacto de las diferentes triangulaciones posibles porque depende de la distribución de los puntos. Sin embargo, en 2010, Micha Sharir y Adam Sheffer establecieron una cota superior [8] para este valor. Enunciaremos el resultado pero no lo probaremos por su complejidad.

Teorema 4.3. *Sea S un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 . No existen más de 30^n triangulaciones diferentes.*

4.1. Algoritmos

Continuaremos presentando algunos de los algoritmos más utilizados para la triangulación de nubes de puntos.

4.1.1. Algoritmo básico de división

Supondremos que no existen tres o más puntos alineados por simplicidad y trataremos al final este caso.

Sea S un conjunto de n puntos de \mathbb{R}^2 . El algoritmo comienza determinando la envolvente convexa de S por cualquiera de los métodos descritos en el Capítulo 3 para, en un segundo paso, triangular este conjunto como el caso de los polígonos tratado en el Capítulo 2. La idea

es utilizar el procedimiento descrito en el Teorema 2.1: como está garantizada la existencia de una diagonal, dividimos el polígono P por esa diagonal, generando dos polígonos de menor número de vértices, P_1 y P_2 . El proceso se repite iterativamente con cada uno de estos polígonos hasta obtener construcciones de solo tres vértices, momento en el que habremos completado la triangulación del polígono inicial.

Por otro lado, el resto de puntos interiores a la envolvente, estarán contenidos en el interior de alguno de los triángulos por haber supuesto que no existen tres o más puntos alineados. Por ello, se deben unir dichos puntos interiores a los tres vértices del triángulo que los contiene. De esta forma se obtiene una división de la envolvente convexa de S en triángulos, con aristas que no se cruzan entre sí y que unen los puntos de S . Se concluye así con el proceso de triangulación (ver Figura 4.2).

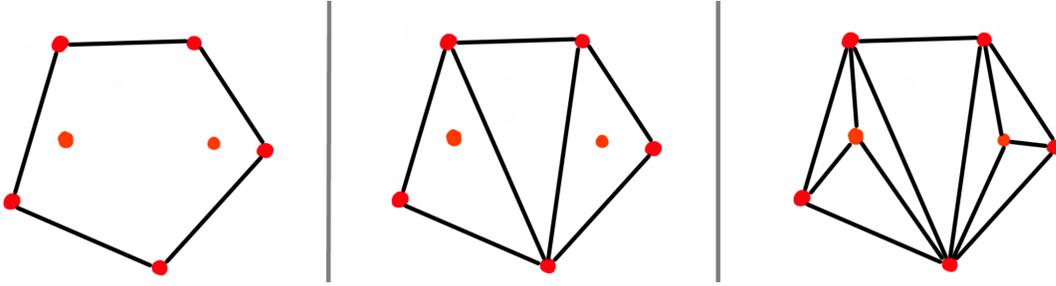


Figura 4.2: Ejemplo de triangulación con el algoritmo básico de división

Se tratará ahora el caso en el que existan tres o más puntos alineados. Se diferencian dos situaciones:

- En el caso de que los puntos alineados pertenezcan a la envolvente convexa no hay conflicto, puesto que la triangulación del polígono se realiza de manera regular como se vio en capítulos anteriores.
- Pero si alguno de los puntos alineados se sitúa en el interior de la envolvente debemos realizar un último paso en el caso de que pertenezcan a alguna de las aristas ya construidas. La idea es que dicha arista pertenecerá simultáneamente a dos triángulos, la solución es entonces unir ese vértice con el vértice opuesto en cada uno de los triángulos, de forma que se añadan dos aristas más.

Calculemos la complejidad de este algoritmo. Se divide en tres partes:

- En un primer paso, el cálculo de la envolvente convexa del conjunto. Como vimos en el Capítulo 3, podemos encontrar algoritmos con complejidad $O(n \log(n))$.
- Por otro lado, la triangulación de la envolvente convexa. Aunque el método utilizado en la explicación del algoritmo es el presentado en el Teorema 2.1, en la práctica podemos encontrar otros más eficientes (que no desarrollaremos en esta memoria puesto que nos centramos en nubes de puntos) con complejidad $O(n \log(n))$ [9].

- Finalmente, la construcción de triángulos utilizando los puntos interiores. Para ello se debe determinar a qué triángulo de los existentes pertenece el nuevo punto. Denotemos por n al número de puntos de S y por m al número de puntos de S que pertenecen a la envolvente convexa. En un primer paso tendremos $m - 2$ triángulos. Se debe determinar a cuál de ellos pertenece el nuevo punto y, posteriormente, realizar una serie de operaciones de complejidad constante para realizar las divisiones oportunas. Esto incrementará en una o dos unidades el número de triángulos del polígono (en función de si los puntos estaban alineados o no). En el siguiente paso deberemos realizar entonces como mucho m comprobaciones. Iterativamente:

$$\begin{aligned} (m - 2) + m + (m + 2) + \dots + (2n - m - 4) &= \sum_{i=1}^{n-m} m - 4 + 2i = \\ &= \frac{(n - m)((m - 2) + (2n - m - 4))}{2} = (n - 3)(n - m) \end{aligned}$$

La complejidad de este último paso será del orden de $O(n^2)$ y, por ello, la complejidad global del algoritmo será también $O(n^2)$.

Observación 4.2. Las operaciones requeridas para comprobar si un punto pertenece o no a un triángulo concreto son similares a las realizadas en la Observación 3.3, utilizando en este caso las tres rectas del triángulo, y comprobando si el punto se sitúa en el mismo lado de la recta que el vértice restante en todos los casos.

4.1.2. Algoritmo incremental

Utilizando la idea desarrollada en el algoritmo incremental para el cálculo de la envolvente convexa y modificando alguno de sus pasos se obtiene este algoritmo.

Sea $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 . Comenzamos ordenando los puntos según su primera coordenada y uniendo los tres primeros. Estos determinarán un triángulo (ver Figura 4.3) o un segmento con tres vértices en el caso en que estén alineados. Denominaremos a esta figura P_3 .

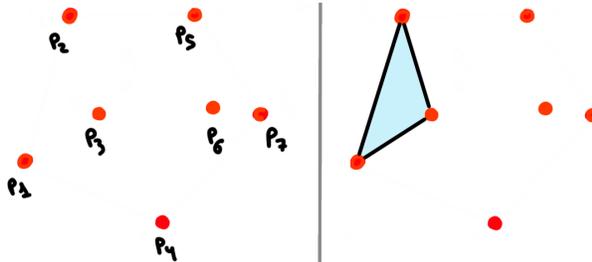


Figura 4.3: Ejemplo del caso base en el algoritmo incremental de triangulación

A continuación, se considera el siguiente punto según el orden establecido, s_4 , y se comprueban que aristas de P_3 son visibles para s_4 . Se une el nuevo punto con los vértices de las aristas visibles formando nuevos triángulos. El proceso se repite iterativamente hasta concluir con s_n .

Como los puntos se van añadiendo de izquierda a derecha y, además se tiene en cuenta la visibilidad de las aristas, se definen triángulos cuyas aristas no se cruzan y unen puntos de S . Definimos así una triangulación de S (ver Figura 4.4).

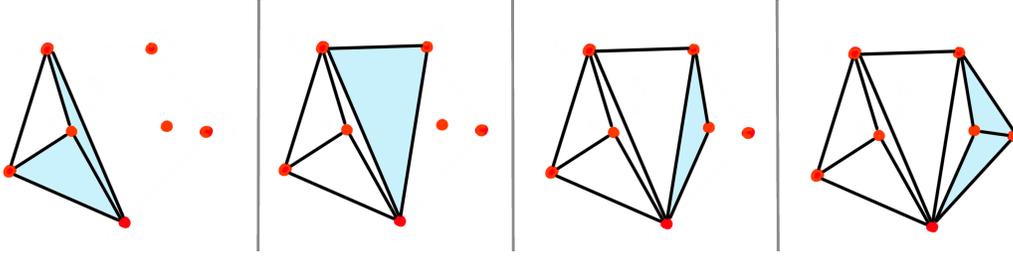


Figura 4.4: Ejemplo del caso recursivo en el algoritmo incremental de triangulación

En este caso, para calcular la complejidad del algoritmo se debe tener en cuenta que, por un lado, la complejidad necesaria para ordenar el conjunto de puntos es $O(n \log(n))$ (como se vio en el capítulo anterior) y, por otro lado, comprobar la visibilidad de las aristas tiene complejidad $O(n^2)$ (como se vio en el Algoritmo incremental para el cálculo de la envolvente convexa). Por tanto, la complejidad de este algoritmo es $O(n^2)$.

4.2. Grafo de rotaciones

Las diferentes triangulaciones que pueden realizarse sobre un mismo conjunto de puntos pueden guardar una cierta relación por ser muy similares. En ocasiones diferirán solo por la rotación de una arista. Estas relaciones pueden recogerse en un grafo, que denominaremos grafo de rotaciones. Introduzcamos primero el concepto de rotación.

Definición 4.2. Sea Q un cuadrilátero convexo en el plano dividido en dos triángulos por una diagonal d . Definimos como rotación de la diagonal de Q al intercambio de d por la otra diagonal del cuadrilátero.

Observación 4.3. Es claro que la rotación solo podrá realizarse en el caso de que el cuadrilátero sea convexo, puesto que en otro caso no existirá la otra diagonal.

Definición 4.3. Sea S un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 . Dos triangulaciones de S , que denominaremos T_1 y T_2 están relacionadas, $T_1 \mathcal{R} T_2$, si al rotar una de las diagonales de T_1 podemos obtener T_2 .

Observación 4.4. Como las diagonales están definidas sobre cuadriláteros, podemos realizar nuevamente la rotación de la diagonal sobre T_2 y obtendremos T_1 . De esta forma se obtiene también que $T_2 \mathcal{R} T_1$ y la relación es simétrica.

La idea es entonces construir un grafo en el que los nodos sean las diferentes triangulaciones T_1, T_2, \dots, T_k del conjunto de puntos S y en el que dos nodos estén unidos cuando sus triangulaciones estén relacionadas (ver Figura 4.5). Además, como la relación que define esas uniones es simétrica, obtenemos un grafo no dirigido.

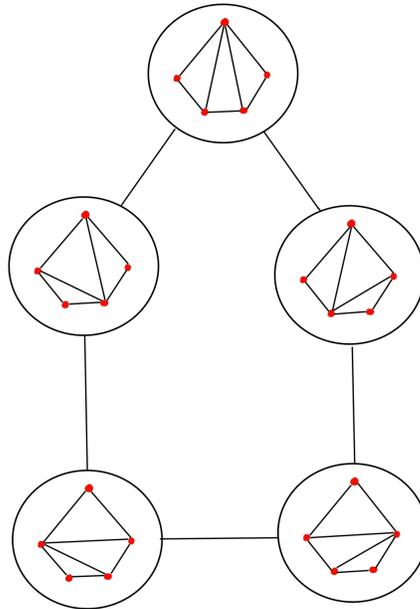


Figura 4.5: Ejemplo de un grafo de rotaciones

Este grafo posee varias propiedades interesantes como veremos a continuación. Entre ellas que es conexo, es decir, podemos obtener una triangulación T_2 a partir de otra T_1 realizando un número finito de rotaciones de sus diagonales.

Introduzcamos primero el concepto de estrella.

Definición 4.4. Sea S un conjunto de n puntos y T una triangulación de los mismos. Sea v un vértice de T . Denominamos estrella de v a la unión de todos los triángulos que tienen a v como vértice.

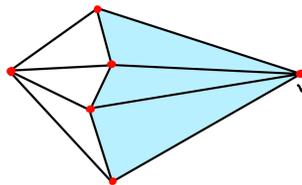


Figura 4.6: Ejemplo de estrella de un vértice v

Probaremos también un pequeño lema que utilizaremos en la prueba de la propiedad.

Lema 4.1. *Sea C un cuadrilátero con dos de sus vértices opuestos convexos y tal que la diagonal que los une está contenida en C . Entonces los otros vértices son también convexos y, por tanto, el cuadrilátero es convexo.*

Demostración. Probamos el resultado por reducción al absurdo. Denotemos por p_1 y p_3 los vértices opuestos convexos. Y sean p_2 y p_4 los otros. Supongamos que p_2 es un vértice cóncavo, es decir, su ángulo es mayor de π radianes. Entonces, como sus aristas unen este punto con p_1 y p_3 , llegaríamos a que la diagonal que une p_1 y p_3 sería exterior al polígono llegando a absurdo. Se razona de manera análoga con p_4 . \square

Ahora ya podemos probar el resultado mencionado.

Teorema 4.4. *Sea S un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 . El grafo de rotaciones de S es conexo.*

Demostración. Sea T una triangulación cualquiera de S y sea T' la triangulación obtenida con el algoritmo incremental explicado anteriormente. Probaremos el resultado demostrando que podemos obtener T' realizando algunos giros de aristas sobre T . La idea de esto es aprovechar el hecho de que el algoritmo incremental genera polígonos convexos en cada iteración por cómo se construyen los nuevos triángulos. Además, una vez probado ese resultado obtendremos que el grafo es conexo, porque dadas dos triangulaciones T_1 y T_2 podríamos encontrar un camino en el grafo que las uniese de la siguiente forma:

- Primero encontrando un camino c_1 de T_1 a T'
- Y posteriormente encontrando otro camino c_2 de T_2 a T' . Además, podemos obtener el camino inverso, c_2^{-1} , porque el grafo es no dirigido.

Entonces el camino buscado sería la unión de c_1 con c_2^{-1} .

Veamos entonces que podemos transformar T en T' . Realizaremos para ello un proceso de inducción sobre el número de puntos de S , denotado por n .

- En primer lugar, para $n = 3$, el conjunto posee una única triangulación, luego $T = T'$.
- Suponemos la propiedad cierta para un número de puntos inferior a n . Sea $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 ordenados según el valor de su primera coordenada. La idea es ver que la estrella de p_n en T puede transformarse en la de p_n en T' realizando una serie de giros de sus aristas. De esta forma, si consideramos el conjunto de puntos resultante a eliminar p_n , $S \setminus \{p_n\}$, podríamos aplicar la hipótesis de inducción y concluir el resultado.

Veamos entonces que podemos transformar la estrella de p_n en T en la de T' . Como ya hemos mencionado, el algoritmo incremental produce polígonos convexos en todas sus iteraciones. Por ello, la estrella de p_n en T' tendrá tres vértices convexos, p_n y los dos

adyacentes al mismo en la frontera del conjunto, a y b . El resto serán reflejo si consideramos el ángulo que presentan en el interior de la estrella. Esto es fácil de ver puesto que el polígono complementario a la estrella, el construido en la iteración $n - 1$ sin el punto p_n , debe ser convexo por lo ya mencionado.

La idea es entonces realizar una serie de giros de aristas en T para obtener la misma estructura: que solo los vértices exteriores de la estrella sean convexos. Es importante notar que los vértices p_n , a y b de T siempre serán convexos sea cual sea la triangulación, porque pertenecen a la envolvente convexa (p_n pertenece por ser extremo en el eje de las abscisas y a y b por ser adyacentes al mismo en la frontera de la triangulación). Sin embargo, debemos conseguir que el resto de vértices de la estrella de T sean reflejo. Para ello tomaremos los vértices convexos y rotaremos la arista que le une con p_n de la siguiente forma: sea v un vértice del interior de la estrella de T convexo. Entonces la arista que une v con p_n divide un cuadrilátero convexo por el lema anterior y, por ello, podemos rotarla obteniendo una nueva triangulación, ya que la nueva diagonal pertenecerá también al interior de dicho cuadrilátero. A pesar de que el movimiento es local, y no afecta a regiones externas al cuadrilátero, la rotación supondrá que v y el vértice de la estrella ya no estén unidos y, por ello, disminuirá el grado de p_n en una unidad. Repetimos el proceso eligiendo nuevamente vértices convexos hasta concluir. Está garantizada la finalización del proceso puesto que el grado de p_n disminuye en cada iteración y en ningún caso puede ser menor que dos.

Una vez obtenido en T que todos los vértices de la estrella de p_n son reflejo a excepción de p_n , a y b veamos que las estrellas son iguales. Es claro que, si consideramos el conjunto resultante de eliminar los triángulos de la estrella de p_n , denotándolo por C , podemos concluir que es convexo porque:

- Los vértices de C que se encontraban en el interior de la estrella eran reflejo hacia el interior de la estrella y, por tanto, serán convexos hacia el interior de ese conjunto.
- Por otro lado, los vértices que no pertenecían a la estrella pero que pertenecen a la frontera de la triangulación de C junto con a y b , pertenecen a la envolvente convexa y por tanto serán convexos.

Por ello podemos concluir que C será igual al polígono delimitado por la triangulación del algoritmo incremental en el paso $n - 1$. Al ser iguales estos conjuntos, podemos concluir que las estrellas también lo son, porque se definen de manera única uniendo el vértice p_n con los vértices de las aristas visibles, que serán las mismas en ambos casos.

□

El hecho de poder obtener una triangulación cualquiera a partir de otra mediante giros en sus aristas es una propiedad muy importante que servirá de base para otros algoritmos centrados en la triangulación de un conjunto de puntos como se verá posteriormente.

Continuaremos analizando algunas propiedades más del grafo de rotaciones como la longitud de su diámetro, la cual acotaremos utilizando el resultado anterior.

Corolario 4.1. *Sea S un conjunto de n puntos. El diámetro de su grafo de rotaciones es menor o igual que $(n-2)(n-3)$.*

Demostración. Probaremos por inducción sobre n que podemos realizar la transformación de una triangulación cualquiera, T_1 , a una obtenida con el algoritmo incremental, T' , en, como mucho, $\binom{n-2}{2}$ rotaciones. De esta manera, podríamos transformar igualmente una segunda triangulación T_2 en, T' en ese mismo número de rotaciones y, por tanto obtendríamos que podemos hacer la transformación e T_1 en T_2 en un número menor o igual a

$$2 \binom{n-2}{2} = 2 \cdot \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} = 2 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} = (n-2)(n-3)$$

rotaciones.

Comencemos entonces con el proceso de inducción.

- En primer lugar, para $n = 3$ tenemos que solo existe una triangulación posible, luego $T_1 = T' = T_2$ y se usan 0 rotaciones.
- Suponemos la propiedad cierta para un número de puntos menor que n . Razonando según el procedimiento descrito en la demostración del teorema anterior sobre cómo transformar una triangulación en otra, es fácil ver que, como mucho se deberían realizar $n-3$ rotaciones. Ese número se obtiene del hecho de que el vértice p_n tendrá como mucho grado $n-1$. Como además los vértices a y b no se consideran en las diferentes iteraciones, se obtendría que el grado de p_n solo podría reducirse hasta 2, completando un total de $n-3$ iteraciones. Por otro lado, aplicando la hipótesis de inducción se concluye que podemos transformar la triangulación de los puntos $S \setminus p_n$ de T a T' en $\binom{n-3}{2}$ rotaciones. Entonces, sumando ambos valores:

$$\binom{n-3}{2} + (n-3) = \frac{(n-3)(n-4)}{2} + \frac{(n-3)}{2} = \frac{(n-3)((n-4)+2)}{2} = \binom{n-2}{2}$$

□

Obtenemos así una cota superior para el diámetro del grafo. La siguiente cuestión a resolver es, dadas dos triangulaciones T_1 y T_2 , ¿cuál es la longitud del camino más corto entre ellas en el grafo de rotaciones? Podemos utilizar como cota el diámetro del grafo, pero normalmente esto no será suficiente. Aunque el problema sigue estudiándose, la mejor cota establecida hasta el momento fue hallada en 1996 [4] por Sabine Hanke, Thomas Ottman y Sven Schuierer. Plantearemos el resultado pero no lo probaremos por su complejidad.

Teorema 4.5. *Sea S un conjunto de n puntos tales que no existan tres o más alineados. Sean T_1 y T_2 triangulaciones de S . Sea T_{12} el resultado de superponer T_1 y T_2 en el plano. Entonces la longitud del camino más corto en el grafo de rotaciones entre ambas triangulaciones será menor o igual que el número de intersecciones entre aristas en T_{12} .*

4.3. Triangulaciones de Delaunay

Trabajaremos ahora en la búsqueda de cierto tipo de triangulaciones que son mejores que otras a la hora de realizar algunas operaciones. Un ejemplo de ello son los mapas de la Tierra en tres dimensiones, para los cuales son tremendamente útiles las triangulaciones de Delaunay que definiremos posteriormente. La idea es que, en muchas ocasiones este tipo de mapas se construyen utilizando un conjunto finito de puntos sobre el plano a los que se asigna un valor numérico, que se corresponde con la altura de ese punto en el terreno. Con esos puntos se intenta hacer una aproximación de la altura de las zonas cercanas a ellos. Para ello se triangula el conjunto de puntos y se “levantan” esos triángulos al situar sus vértices en el valor de la tercera coordenada que poseen. Se obtiene así una aproximación del terreno real (ver Figura 4.7).

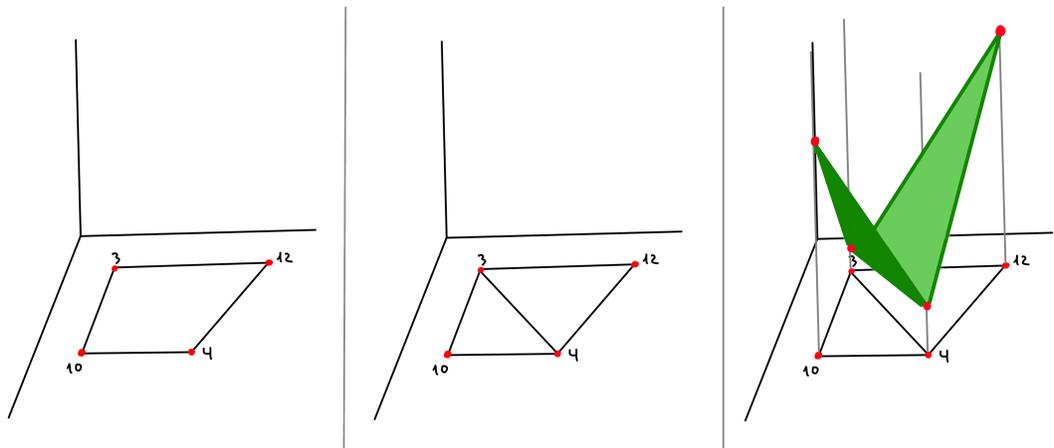


Figura 4.7: Ejemplo de la aproximación de una zona terrestre

Sin embargo, existe un problema, las diferentes triangulaciones posibles sobre el conjunto de puntos afectan en una medida importante sobre el valor asignado a los puntos que se aproximan como se puede ver en la Figura 4.8. La intuición nos indica que en esa zona existirá una montaña en la diagonal que une el punto 10 con el 12. Sin embargo, en función de la triangulación escogida obtendremos una montaña o un valle.

La experiencia afirma que, aunque no es posible saber cuál de las triangulaciones es más fiel a la realidad, aquellas que tienen menos ángulos con valores pequeños proporcionan, en general, mejores resultados. El objetivo es entonces encontrar las triangulaciones que maximizan el valor del ángulo más pequeño.

Compararemos entonces listas de ángulos ordenadas de menor a mayor. Como ya hemos probado anteriormente, todas las triangulaciones sobre un mismo conjunto de puntos tiene el mismo número de triángulos, denotemos ese valor por t . Entonces todas las triangulaciones tendrán también el mismo número de ángulos y, por tanto, las listas tendrán la misma longitud, que será $3t$. Sea S un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 y T_1 y T_2 dos triangulaciones distintas de S .

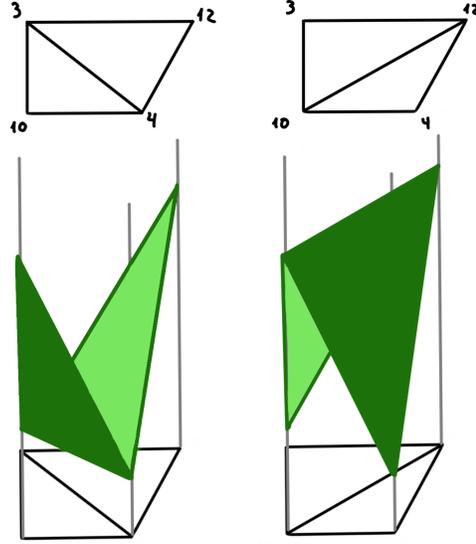


Figura 4.8: Ejemplo del problema de la triangulación escogida

Denotamos por $L_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3t})$ y $L_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{3t})$ a las listas de ángulos ordenados de menor a mayor de T_1 y T_2 respectivamente. Utilizaremos para compararlas el orden lexicográfico definido a continuación.

Definición 4.5. Sean $L_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3t})$ y $L_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{3t})$ listas con el mismo número de elementos. Decimos que L_2 es mayor que L_1 según el orden lexicográfico si existe un valor k , $1 \leq k \leq 3n$ que cumpla $\beta_k > \alpha_k$ y que $\alpha_i = \beta_i$ para todo $i < k$. Se denota $L_2 > L_1$.

Utilicemos este concepto para relacionar triangulaciones.

Definición 4.6. Sea S un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 y T_1 y T_2 dos triangulaciones distintas de S . Denotamos por $L_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3t})$ y $L_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{3t})$ a las listas de ángulos ordenados de menor a mayor de T_1 y T_2 respectivamente. Decimos que T_2 es más gruesa que T_1 si $L_2 > L_1$ según el orden lexicográfico. Se denota $T_2 > T_1$.

Definiremos un último concepto antes de comenzar a desarrollar el procedimiento que permite encontrar las mejores triangulaciones para el caso que tratamos.

Definición 4.7. Sea S un conjunto de puntos y T_1 una triangulación de S . Sea a una arista interior de T_1 y Q el cuadrilátero de T_1 resultante de la unión de los triángulos que comparten a como arista. Si Q es convexo, definiremos una nueva triangulación, T_2 , resultante de rotar la arista a en Q . Diremos que a es una arista legal si $T_1 \geq T_2$. En caso contrario se dirá que a es una arista ilegal. Por otro lado, consideraremos que las aristas exteriores son siempre legales.

Una vez introducidos estos conceptos básicos, definiremos el concepto de triangulación de Delaunay.

Definición 4.8. Sea S un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 . Definimos como triangulación de Delaunay de S a una triangulación que cumple que todas sus aristas son legales. Se denota por $Del(S)$.

El siguiente paso es ver si cualquier conjunto de puntos admite una triangulación de Delaunay. Haremos una prueba por construcción basada en un algoritmo.

Proposición 4.3. Sea S un conjunto de \mathbb{R}^2 que no contenga cuatro puntos cocirculares. S admite una triangulación de Delaunay.

Demostración. Sea T una triangulación cualquiera de S . Realizaremos la demostración transformando esta triangulación mediante rotaciones de aristas, moviéndonos por nodos adyacentes del grafo de rotaciones. La idea es tomar las aristas ilegales y rotarlas de forma que se obtenga una arista legal. Como ya se mencionó, el giro de aristas en un cuadrilátero es una transformación que solo afecta al propio cuadrilátero como puede verse en el grafo de rotaciones. Se repite el proceso con las demás aristas ilegales hasta concluir. Es importante notar que las listas de ángulos crecen de manera estricta en cada una de las iteraciones, es decir, nos movemos por el grafo sin repetir nodos. Como además el grafo tiene un número finito de nodos la finalización del proceso está garantizada y obtendremos una triangulación con todas las aristas legales. \square

Sin embargo, existe una forma más sencilla de comprobar si una arista es o no legal. Comencemos con un resultado que utilizaremos para probar el teorema de Tales.

Lema 4.2 (Teorema de Euclides). Sean P, Q y B tres puntos sobre una circunferencia y sea O el centro de la misma. Supongamos que B y O se sitúan al mismo lado de la cuerda PQ . Entonces el ángulo POQ es dos veces el ángulo PBQ .

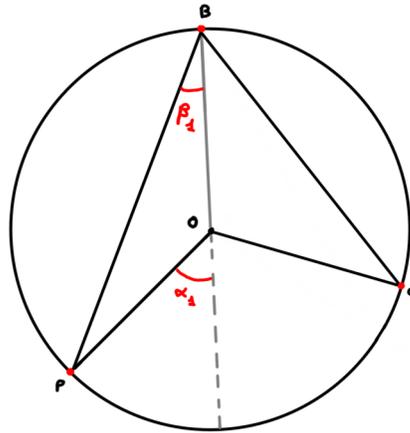


Figura 4.9: Apoyo gráfico de la demostración del Teorema de Euclides

Demostración. Notemos en primer lugar que los segmentos BO y PO son de la misma longitud por ser radios de la circunferencia. Por ello el triángulo PBO es isósceles y sus ángulos PBO y OPB son iguales. Denotemos por α_1 a la porción de ángulo POQ que queda en la semicircunferencia del lado del triángulo con el que estamos trabajando y por β_1 a la misma porción en el ángulo PBQ . Como la suma de los ángulos del triángulo tiene que ser π , debe cumplirse que $\alpha_1 = 2\beta_1$. Razonando de manera análoga con el triángulo QOB , que también será isósceles, se obtiene el resultado. □

De este resultado se concluye que, independientemente de donde se encuentre el punto B sobre la circunferencia, el ángulo que formará con los puntos P y Q será el mismo ya que el ángulo POQ no variará.

Presentaremos ahora una extensión de un teorema clásico que utilizaremos posteriormente.

Teorema 4.6 (Teorema de Tales). *Sean P, Q y B tres puntos sobre una circunferencia. Sea A un punto interior a la circunferencia y C un punto exterior. Supongamos que A, B y C se sitúan al mismo lado de la cuerda PQ . Entonces se cumplen las siguientes desigualdades entre ángulos:*

$$PAQ > PBQ > PCQ$$

Demostración. Denominamos O al centro de la circunferencia. Veamos primero que $PBQ > PCQ$. Como hemos mencionado anteriormente, el ángulo PBQ será el mismo aunque desplace- mos el punto B por la circunferencia. Por ello, supongamos que B es la intersección del segmento CP con la circunferencia y veamos que la propiedad se cumple en este caso.

Denotemos por α al ángulo PCQ y por β al ángulo PBQ . Como la suma de los ángulos de un triángulo debe ser π , obtenemos que $\beta = \alpha + BQC$ y de ahí se concluye la propiedad.

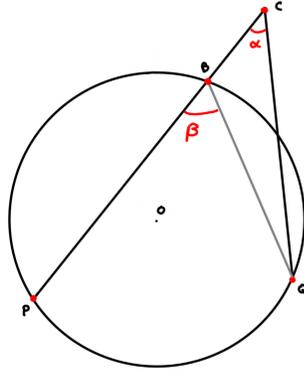


Figura 4.10: Apoyo gráfico de la demostración $PBQ > PCQ$ del Teorema de Tales

Por otro lado, veamos que $PAQ > PBQ$. En este caso, el punto B se tomará como intersección de la prolongación del segmento PA con la circunferencia. Denotamos por β al ángulo

PBQ y por γ al formado por PAQ . Como la suma de los ángulos de un triángulo debe ser π , se obtiene en este caso la siguiente ecuación $\gamma = \beta + AQB$, de la que se sigue la propiedad pedida.

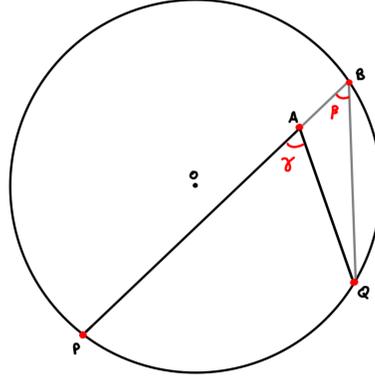


Figura 4.11: Apoyo gráfico de la demostración $PAQ > PBQ$ del Teorema de Tales

□

Presentaremos un pequeño lema.

Lema 4.3. *Sea T una triangulación de un conjunto de puntos S de forma que no existan 4 cocirculares. Sea a una arista interior de T . Denotemos por A y C los vértices que une y por B y D los otros dos que forman los dos triángulos a los que pertenece a . Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. D es interior a la circunferencia definida por A, B y C .
2. C es exterior a la circunferencia definida por A, B y D .
3. A es exterior a la circunferencia definida por B, C y D .
4. B es interior a la circunferencia definida por A, C y D .

Demostración. $1 \Leftrightarrow 2$.

- $1 \Rightarrow 2$. Por el teorema de Tales sabemos que $ADB > ACB$. Si definimos la circunferencia determinada por A, B y D , para mantener esa desigualdad de ángulos, utilizando nuevamente el teorema de Tales, deberá ocurrir que C sea exterior.
- $2 \Rightarrow 1$. Se razona de manera inversa. Por el teorema de Tales sabemos que $ADB > ACB$. Si definimos la circunferencia determinada por A, B y C , para mantener esa desigualdad de ángulos, utilizando el teorema de Tales, deberá ocurrir que D sea interior.

1 \Leftrightarrow 3. Se razona de manera análoga al caso anterior.

3 \Leftrightarrow 4. Se razona de manera similar. □

Veamos la nueva forma de ver si una arista es legal.

Teorema 4.7. *Sea T una triangulación de un conjunto de puntos S de forma que no existan 4 cocirculares. Sea a una arista interior de T . Denotemos por A y C los vértices que une y por B y D los otros dos que forman los dos triángulos a los que pertenece a . Entonces a es legal si el vértice D es exterior a la circunferencia que contiene a A, B y C e ilegal si es interior.*

Observación 4.5. *Como suponemos que no existen 4 puntos cocirculares en S , el punto D nunca podrá encontrarse sobre la circunferencia determinada por los otros tres puntos.*

Demostración. Probaremos el caso en el que D se sitúe en el interior de la circunferencia delimitada por A, B y C . El otro caso se prueba con un razonamiento similar.

Utilizaremos el teorema de Tales probado anteriormente para ver que, efectivamente, la arista a es ilegal bajo estas condiciones. Consideraremos para ello las dos triangulaciones posibles para el cuadrilátero $ABCD$. Denominemos a_1, a_2, a_3 y a_4 a los ángulos definidos por a y b_1, b_2, b_3 y b_4 a los definidos por la otra arista (ver Figura 4.12).

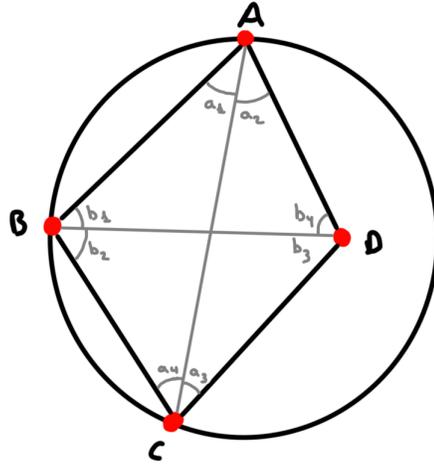


Figura 4.12: Representación de los ángulos definidos por las aristas en el Teorema 4.7

Además, como D está dentro de la circunferencia definida por A, B y C , sus ángulos más pequeños serán a_1, \dots, a_4 por el teorema de Tales. Veamos que existen ángulos definidos por el corte de la otra arista más pequeños.

En primer lugar, considerando la circunferencia que contiene los vértices A, B y D dejará al punto C fuera de la misma por el lema previo. Utilizando el teorema de Tales, se concluye que $b_1 > a_1$.

Por otro lado, como A es exterior a la circunferencia delimitada por B, C y D , concluimos que $b_2 > a_2$.

Finalmente, considerando la circunferencia delimitada por A, C y D , el vértice B queda en el interior. Entonces, utilizando el teorema de Tales, es fácil ver que $b_3 > a_3$ y que $b_4 > a_4$. Por tanto la arista definida por A y por C es ilegal. \square

Utilizando este resultado, podemos establecer una nueva forma de comprobar si una triangulación es o no de Delaunay.

Teorema 4.8. *Sea S un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 , de forma que no existan 4 o más puntos cocirculares. Una triangulación T de S es de Delaunay si y solo si dada una circunferencia cualquiera definida por los vértices de un triángulo de T , ningún punto del conjunto S es interior a la misma.*

Demostración. Si ningún punto de S es interior a cualquier circunferencia definida, utilizando el resultado anterior se obtiene que todas las aristas son legales y por tanto la triangulación es de Delaunay.

Probaremos el resultado recíproco por reducción al absurdo. Supongamos que la triangulación T es de Delaunay y que existen circunferencias de triángulos de T que contienen vértices en su interior. Escojamos aquella que minimice la distancia del punto interior P con una de las aristas del triángulo, cuyos vértices denotaremos por A y B . Denotaremos a esa distancia mínima por h . Como la triangulación es de Delaunay, el triángulo formado por A, B y P no puede existir por la proposición anterior (porque la arista AB no sería legal). Denominemos D al punto que forma el otro triángulo con A y B , que debe existir porque, por las condiciones establecidas la arista no puede ser exterior. Además, el punto D es exterior a la circunferencia porque T es de Delaunay. Se cumple entonces que P está en el interior de la circunferencia definida por A, B y D porque por el teorema de Tales debe ocurrir $ADB < APB$. Obtenemos entonces un absurdo porque hemos encontrado un triángulo que contiene en el interior de su circunferencia al punto P y cuya distancia con una de sus aristas es menor que h . \square

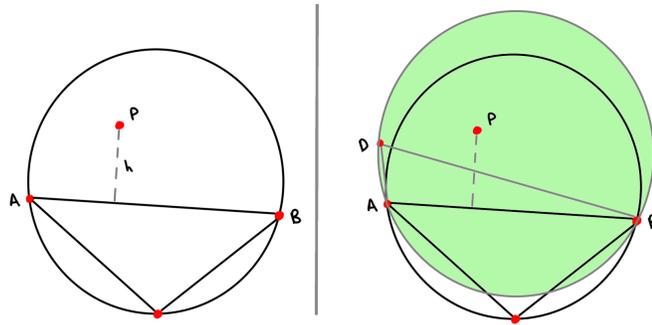


Figura 4.13: Apoyo visual de la demostración del Teorema 4.8

4.3.1. Algoritmo para construir la triangulación de Delaunay

Concluiremos la sección mostrando un algoritmo para calcular la triangulación de Delaunay de una nube de puntos.

Sea S un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 que no contenga cuatro puntos cocirculares. Supongamos que ya hemos construido la triangulación de Delaunay de los k primeros puntos p_1, p_2, \dots, p_k y calculemos la de los $k+1$ primeros a partir de ella. Supongamos que el punto p_{k+1} se encuentra dentro de la envolvente convexa de los k primeros puntos, trataremos posteriormente el caso contrario. Como vimos en el Teorema 4.8 que toda circunferencia que circunscriba un triángulo de Delaunay no puede contener ningún otro punto de S , calcularemos qué triángulos se ven afectados por la adición del punto p_{k+1} . Solo será necesario modificar estos triángulos puesto que los otros seguirán cumpliendo esa propiedad.

La idea es entonces considerar la unión de esos triángulos, que será un polígono P , y volverlos a triangular de forma que se satisfaga la condición necesaria y suficiente para que la triangulación sea de Delaunay. Para ello uniremos todos los vértices de P con p . Veamos que, efectivamente, esta triangulación es de Delaunay razonando que la construcción de otro tipo de triángulos no lo es (sabemos que $\text{Del}(S)$ debe existir porque no existen 4 puntos cocirculares). Supongamos que existe un triángulo t de la nueva triangulación de Delaunay que no tiene a p como vértice (por tanto, es diferente a los considerados en la triangulación de los k primeros puntos). Como es de Delaunay, la circunferencia que circunscribe sus vértices no contiene ningún otro punto de S , ni el borde ni en su interior. Pero, además, t sería un triángulo válido en la triangulación de Delaunay de los k primeros puntos por el Teorema 4.8. Llegamos a absurdo puesto que, como veremos en el Corolario 5.4, la triangulación de Delaunay es única y, entonces, t debería ser un triángulo de la triangulación de Delaunay de los k primeros puntos y contener en su interior a p .

En el caso de que el punto p_{k+1} sea exterior a la envolvente convexa de los k primeros puntos se unirá este nuevo vértice a los vértices de las aristas visibles de la triangulación de Delaunay de los k primeros puntos. Tras esto, se razonará de manera análoga al caso anterior, comprobando qué triángulos de la triangulación de Delaunay de k puntos se ven afectados por la adición de p_{k+1} y modificándolos de manera similar.

La complejidad de este algoritmo es $O(n^2)$, valor obtenido por un razonamiento similar a los anteriores considerando el número de comprobaciones a realizar y despreciando las uniones entre vértices por ser de orden menor.

Capítulo 5

Diagramas de Voronoi

En este último capítulo continuaremos trabajando con conjuntos de puntos finitos, S , en el plano. En concreto, para cada punto $p \in S$, se estudiará qué subconjuntos de \mathbb{R}^2 están más próximos a p que a ningún otro punto de S . Este concepto se denomina diagrama de Voronoi, del que se introducirán algunas propiedades y algoritmos para su cálculo. Además, como se verá al final de la sección, estas representaciones guardan una cierta relación de dualidad con las triangulaciones de Delaunay vistas anteriormente.

Comenzamos introduciendo este concepto.

Definición 5.1. Sea S un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 . Dado un punto cualquiera $p \in S$, definimos como región de Voronoi de p , $Vor(p)$, al conjunto de puntos del plano que están más próximos a p que a ningún otro punto de S , es decir,

$$Vor(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - p\| \leq \|x - q\| \forall q \in S, q \neq p\}$$

considerando la distancia euclídea entre dos puntos.

Observación 5.1. Existirán puntos del plano que no tendrán un único punto cumpliendo la condición anterior. Es decir, estarán igual de próximos a más de un punto de S . Estos puntos serán precisamente aquellos que formen la frontera entre las diferentes regiones de Voronoi.

Definición 5.2. Sea S un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 . Definimos como diagrama de Voronoi de S , $Vor(S)$, al conjunto de puntos del plano que pertenezcan a dos o más regiones de Voronoi distintas, es decir,

$$Vor(S) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists p, q \in S, p \neq q : x \in Vor(p), x \in Vor(q)\}$$

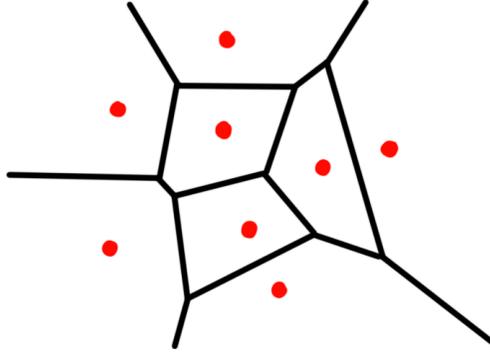


Figura 5.1: Ejemplo de diagrama de Voronoi sobre un conjunto de puntos

Además, haremos una última diferenciación.

Definición 5.3. Sea S un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 . Definimos como *aristas de Voronoi* al conjunto de puntos de $Vor(S)$ que pertenezcan a exactamente dos regiones de Voronoi distintas, es decir,

$$Aristas(S) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists p, q \in S, p \neq q : x \in Vor(p), x \in Vor(q), \forall r \in S, r \neq p, r \neq q, x \notin Vor(r)\}$$

Por otro lado, definimos como *vértices de Voronoi* al conjunto de puntos de $Vor(S)$ que pertenezcan al menos a tres regiones de Voronoi distintas, es decir,

$$Vertices(S) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists p, q, r \in S, p \neq q \neq r : x \in Vor(p), x \in Vor(q), x \in Vor(r)\}$$

Alternativamente, los vértices se podrían definir como las intersecciones de las adherencias de las aristas de Voronoi de S .

Es fácil ver con los resultados que presentaremos posteriormente que, si el conjunto S posee únicamente dos puntos, p y q , el diagrama de Voronoi será la mediatriz del segmento que une ambos puntos. De esta forma, se obtienen dos regiones de Voronoi, correspondientes a los dos semiplanos definidos por la recta, denotados por $H(p, q)$ y $H(q, p)$. La región de Voronoi de p será entonces el semiplano que contiene a dicho punto, es decir,

$$Vor(p) = H(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - p\| \leq \|x - q\|\}$$

La región de Voronoi de q se define de manera análoga.

Pero, ¿qué ocurre si S posee más de dos puntos? ¿Podemos definir también las regiones de Voronoi como semiplanos? Veámoslo con la siguiente proposición.

Proposición 5.1. Sea S un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 . Sea $p \in S$. La región de Voronoi de p , $Vor(p)$, es la intersección de todos los semiplanos $H(p, q)$, para todos los puntos $q \in S$ diferentes de p .

Demostración. El resultado es inmediato utilizando las definiciones introducidas, ya que los puntos $x \in Vor(p)$ deben cumplir la ecuación de la Definición 5.1. Esto es equivalente a exigir que $x \in H(p, q) \forall q \in S$, luego $x \in \bigcap_{q \in S, q \neq p} H(p, q)$. \square

Además, podemos deducir la convexidad de las regiones.

Corolario 5.1. *Las regiones de Voronoi son conjuntos convexos.*

Demostración. Por la proposición anterior, podemos describir una región de Voronoi como la intersección de semiplanos. Además, como un semiplano es convexo, por la Proposición 3.1 se obtiene que la región de Voronoi es convexa. \square

Analizaremos ahora qué ocurre con las regiones, y en concreto con los vértices, cuando tenemos tres o más puntos.

En primer lugar, si S posee tres puntos no alineados, p, q y r , el diagrama de Voronoi se compondrá de tres semirrectas que separarán los tres puntos en tres regiones diferentes. Además, el teorema de Euclides, garantiza que dichas semirrectas intersecarán en un mismo punto por ser las mediatrices de las aristas del triángulo formado por p, q y r . Y no solo eso, sino que dicho punto será el centro de la circunferencia que contiene a dichos puntos (por ello se denomina circuncentro del triángulo). En conclusión, tendremos un único vértice de Voronoi de grado 3.

Sin embargo, en el caso de que el conjunto S posea $n > 3$ puntos existen más posibilidades. Analicemos el caso $n = 4$ sin pérdida de generalidad. Puede ocurrir que:

- Los cuatro puntos sean cocirculares, en cuyo caso aplicando nuevamente el teorema de Euclides concluimos que los cuatro intersecan en un solo punto dividiendo el plano en cuatro regiones. Se obtiene un único vértice de Voronoi de grado 4.
- Que los cuatro puntos no sean cocirculares. En este caso no podemos aplicar Euclides y concluir que las aristas confluirán en un mismo punto. De hecho, no lo harán. Se obtendrán en este caso dos vértices de Voronoi de grado 3.

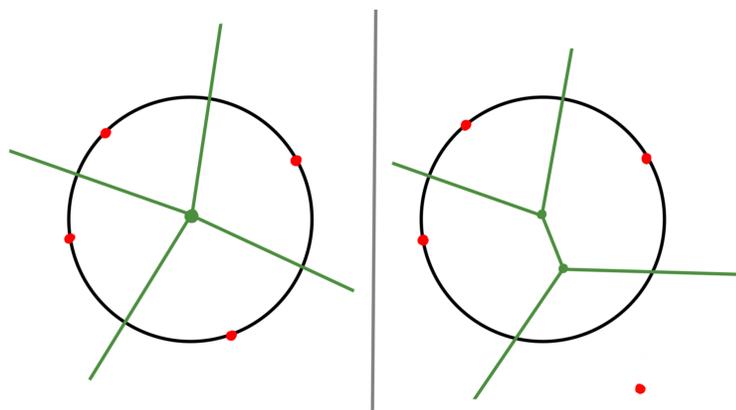


Figura 5.2: Ejemplo de construcción del diagrama de Voronoi con 4 puntos cocirculares frente a 4 puntos no cocirculares

A lo largo del capítulo consideraremos en la mayoría de ocasiones conjuntos de puntos que cumplan que no existan cuatro o más puntos cocirculares para tratar este caso más genérico.

Trataremos, a continuación, de caracterizar de otra forma los vértices de Voronoi para un conjunto de puntos.

Teorema 5.1. *Sea S un conjunto de n puntos de \mathbb{R}^2 y $Vor(S)$ su diagrama de Voronoi. Un punto p del plano es un vértice de Voronoi de $Vor(S)$ si y solo si podemos encontrar una circunferencia centrada en p que contenga tres o más puntos de S y tal que no exista ningún punto de S en su interior.*

Demostración. Supongamos que p es un vértice de Voronoi. Por definición, debe pertenecer simultáneamente a al menos tres regiones de Voronoi distintas, $Vor(q_1)$, $Vor(q_2)$ y $Vor(q_3)$. Esto quiere decir que p es equidistante a q_1 , q_2 y q_3 , es decir, $\|p - q_1\| = \|p - q_2\| = \|p - q_3\|$. Por ello, podemos definir una circunferencia centrada en p y con un radio $r > 0$ de forma que contenga a q_1 , q_2 y q_3 . Falta ver que ningún otro punto de S es interior a la circunferencia. Razonamos por reducción al absurdo. Si existiese un q_4 en el interior de la circunferencia, cumpliría

$$\|p - q_4\| < \|p - q_1\| = \|p - q_2\| = \|p - q_3\|$$

y, por tanto, el punto p no pertenecería a las regiones $Vor(q_1)$, $Vor(q_2)$ ni $Vor(q_3)$, sino que pertenecería a $Vor(q_4)$ llegando a contradicción.

Por otro lado, supongamos que podemos encontrar una circunferencia centrada en p que contenga al menos tres puntos de S , denotados por q_1 , q_2 y q_3 . Además, suponemos que no existen puntos de S en el interior de la misma. Por definición, p pertenecerá a las regiones de Voronoi de estos puntos y por ello será un vértice de Voronoi. \square

Realizaremos a continuación una caracterización similar para las aristas de Voronoi. Comencemos con el siguiente teorema.

Teorema 5.2. *Sea S un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 y sea $Vor(S)$ su diagrama de Voronoi. Sea a un subconjunto de las mediatrices que separan dos puntos cualquiera p y q . Entonces a es una arista de Voronoi de $Vor(S)$ si y solo si para cada punto x de a la circunferencia de centro x que pasa por p y por q no contiene ningún otro punto de S (ni sobre la circunferencia ni en su interior).*

Demostración. Razonemos la primera parte del resultado por reducción al absurdo. Supongamos que a es una arista de Voronoi y x un punto de la misma. Supongamos también que la circunferencia de centro x que pasa por p y q contiene otro punto de S que denotaremos por r . Independientemente de que r se encuentre sobre la circunferencia o en su interior, obtendremos que, por definición, x pertenecerá a $Vor(r)$ y, como ya pertenecía a $Vor(p)$ y $Vor(q)$ también por definición, concluiríamos que x es un vértice de Voronoi llegando a absurdo. Por tanto, la circunferencia no puede contener a ningún otro punto de S .

Supongamos ahora que la circunferencia centrada en un punto $x \in a$ que pasa por p y por q no contiene ningún otro punto de S . Entonces se cumple que $\|x - p\| = \|x - q\| \leq \|x - r\| \forall r \in S$ y,

por definición, concluimos que x pertenece al diagrama de Voronoi de S . Además, por el teorema 5.1, no puede ser un vértice y por tanto, pertenecerá a una arista. \square

Podemos encontrar diferentes tipos de aristas de Voronoi, que se clasificarían en:

- Segmentos determinados por dos vértices de Voronoi.
- Semirrectas con un único vértice de Voronoi.
- Rectas sin vértices de Voronoi.

Con el siguiente teorema podemos determinar en qué casos tendremos rectas sin vértices.

Teorema 5.3. *Sea S un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 y $Vor(S)$ su diagrama de Voronoi. $Vor(S)$ presentará aristas del tipo rectas sin vértices de Voronoi si y solo si todos los puntos de S son colineales.*

Observación 5.2. *Como se verá en la demostración del resultado, en el caso de que un diagrama presente alguna arista del tipo recta sin vértices, no podrá presentar aristas de otro tipo.*

Demostración. Supongamos que todos los puntos de S son colineales. En el caso de que la colinealidad sea vertical, los denotaremos por p_1, p_2, \dots, p_n en orden ascendente según su coordenada en el eje de las ordenadas. En caso contrario los ordenamos de forma ascendente según su coordenada en el eje de las abscisas. Tomamos los dos primeros puntos p_1 y p_2 . Veamos que la recta mediatriz entre p_1 y p_2 es la arista de Voronoi que separa ambos puntos. Sea x un punto de la recta. Determinamos la circunferencia centrada en x que pasa por p_1 y p_2 . En primer lugar, no puede existir ningún otro punto p_i en medio de p_1 y p_2 por cómo los hemos ordenado, luego como los puntos son colineales, no puede existir un punto distinto contenido en el interior de la circunferencia ni tampoco en su borde puesto que la intersección de una recta (la de los puntos de S) con una circunferencia es de, a lo sumo, dos puntos, que son p_1 y p_2 . El proceso se repite análogamente para los otros puntos de S , obteniendo siempre rectas de Voronoi sin vértices.

Probaremos la implicación contraria por contrarrecíproco. Supongamos que los puntos no son colineales y veamos que entonces se presentarán aristas diferentes al tipo rectas sin vértices de Voronoi. Denotemos por R a la recta que separa dos puntos p y q de S . Es decir, R pertenece simultáneamente a $Vor(p)$ y a $Vor(q)$. Sea $r \in S$ un punto no colineal con p y q y supongamos sin pérdida de generalidad que $r \in H(p, q)$. Por no ser colineal, la mediatriz entre p y r intersecará con R en un punto v que pasará a ser un vértice de Voronoi por pertenecer a $Vor(p)$, $Vor(q)$ y $Vor(r)$. Además, la intersección de la recta R con el semiplano $H(r, p)$ no será arista de Voronoi, por no pertenecer a $Vor(p)$ al estar más próxima a r . De esta forma tendremos una arista de Voronoi R con, al menos un vértice. \square

Utilizando este resultado podemos concluir algo mucho más interesante.

Corolario 5.2. *Sea S un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 y $Vor(S)$ su diagrama de Voronoi. $Vor(S)$ es no conexo si y solo si todos los puntos de S son colineales.*

Demostración. En primer lugar, si todos los puntos son colineales, las aristas serán del tipo rectas sin vértices de Voronoi, paralelas por tanto, y el diagrama será no conexo.

Por otro lado, si suponemos que $Vor(S)$ es no conexo, podremos escribirlo como unión disjunta. Deberá existir por tanto una región de Voronoi, $Vor(p)$, que separe ambos subconjuntos. Como además todas las regiones de Voronoi deben ser convexas por el Corolario 5.1, la frontera de $Vor(p)$ deberá estar formada por dos rectas paralelas y por el teorema anterior deberá cumplirse que todos los puntos de S sean colineales. \square

Observación 5.3. *Una vez planteados estos resultados, es importante notar que podemos tener tres tipos de diagramas de Voronoi:*

- *Diagramas con aristas del tipo rectas sin vértices.*
- *Diagramas con aristas del tipo semirectas con un vértice.*
- *Diagramas con aristas del tipo segmentos con dos vértices. En este caso, deberán presentarse también semirectas con un vértice puesto que \mathbb{R}^2 no es una región acotada y debemos clasificar en regiones todos los puntos del plano.*

Al igual que en el caso de las triangulaciones, podemos acotar también en este caso el número máximo de vértices y aristas como se prueba en el siguiente resultado.

Teorema 5.4. *Sea S un conjunto de $n \geq 3$ puntos y $Vor(S)$ su diagrama de Voronoi. Entonces $Vor(S)$ tiene, como mucho, $2n - 5$ vértices de Voronoi y $3n - 6$ aristas de Voronoi.*

Demostración. Denotaremos por v al número de vértices de $Vor(S)$ y por a a su número de aristas.

Diferenciaremos dos casos. En primer lugar, si los puntos son colineales y tenemos, por tanto, aristas del tipo rectas sin vértices es trivial observar que se cumple la afirmación, pues tendremos 0 vértices de Voronoi y $n - 1$ aristas, que es menor que $3n - 6$ para $n \geq 3$.

Si los puntos no son colineales realizaremos una prueba análoga a la del caso de las triangulaciones utilizando el Teorema 4.1. Para ello necesitamos un grafo conexo de \mathbb{R}^2 . La idea de la demostración es añadir un punto auxiliar X en una de las regiones que no están acotadas y unir todas esas semirectas con el punto X formando curvas y generando así un grafo. Sobre este grafo sí que podemos aplicar el teorema de Euler que afirma que se cumple la relación $V - A + C = 2$. En este caso:

- El grafo tiene un vértice más que $Vor(S)$, es decir, $V = v + 1$.
- El grafo tiene el mismo número de aristas que $Vor(S)$, luego $A = a$.

- En cuanto al número de caras C , el grafo poseerá una región de Voronoi por cada punto de S . En este caso no se considera la cara exterior porque en el diagrama hay regiones no acotadas que ya consideran esos puntos exteriores al grafo. Entonces $C = n$.

Sustituyendo se obtiene la siguiente ecuación

$$(v + 1) - a + n = 2$$

Además, podemos extraer otra relación utilizando la siguiente observación: cada vértice de Voronoi tendrá grado al menos 3 por definición, es decir, en cada vértice intersecan al menos 3 aristas. Por otro lado, cada arista conecta con dos vértices, entonces contando las aristas por el número de vértices existentes contaríamos dos veces cada arista. Tenemos entonces que $3(v + 1) \leq 2a$. Sustituyendo en la ecuación anterior se obtienen los resultados pedidos:

$$3(2 + a - n) \leq 2a \Rightarrow a \leq 3n - 6$$

$$3(v + 1) \leq 2(3n - 6) \Rightarrow v \leq 2n - 5$$

□

5.1. Algoritmos

En el inicio del capítulo se introdujo una primera idea sobre cómo construir este tipo de diagramas: como intersección de hiperplanos. Sin embargo, la alta complejidad computacional del mismo supone el uso de métodos distintos para su cálculo en la práctica. Describiremos algunos de ellos.

5.1.1. Algoritmo incremental

Utiliza una idea similar a la utilizada en los algoritmos incrementales presentados para construir la envolvente convexa o realizar triangulaciones. La idea es suponer que poseemos el diagrama de Voronoi para los primeros k puntos, denotados por p_1, p_2, \dots, p_k y construir a partir de este el diagrama de Voronoi de $k + 1$ puntos. Veamos cómo funciona.

Partimos del diagrama de Voronoi de los k primeros puntos. Añadiremos un nuevo punto denotado por p_{k+1} . Supondremos que este punto se añade en el interior de una región de Voronoi acotada y trataremos posteriormente el resto de casos. Supongamos sin pérdida de generalidad que dicha región se corresponde con la región de Voronoi del punto p_1 . Consideremos la mediatriz del segmento $p_1 p_{k+1}$, que intersecará con $Vor(p_1)$ en dos puntos por ser un conjunto convexo y acotado. Llamemos x_1 y x_2 a dichas intersecciones de manera que el triángulo formado por los puntos p_k, x_1 y x_2 se recorra en sentido antihorario. El segmento $x_1 x_2$ dividirá a $Vor(p_1)$ en dos regiones, una que seguirá perteneciendo a la región de Voronoi de p_1 y otra que pertenecerá a la de p_{k+1} . Continuamos con el punto x_2 , que ahora será un vértice de Voronoi por pertenecer a $Vor(p_1), Vor(p_{k+1})$ y también a la región adyacente a $Vor(p_1)$ por

esa arista, que denominaremos $Vor(p_2)$. Trazamos la mediatriz entre p_2 y p_{k+1} , que intersecará en dos puntos de la región, x_2 y otro denotado por x_3 . Nuevamente el segmento x_2x_3 divide la región en dos, una que pertenecerá a $Vor(p_{k+1})$ y otra que continuará en $Vor(p_2)$. El proceso se repite iterativamente hasta que un segmento interseque con x_1 , momento en el que tendremos la región de Voronoi de p_{k+1} delimitada. El último paso sería eliminar los restos del diagrama de Voronoi del caso anterior (el diagrama de los k puntos) del interior de $Vor(p_{k+1})$ (ver Figura 5.3).

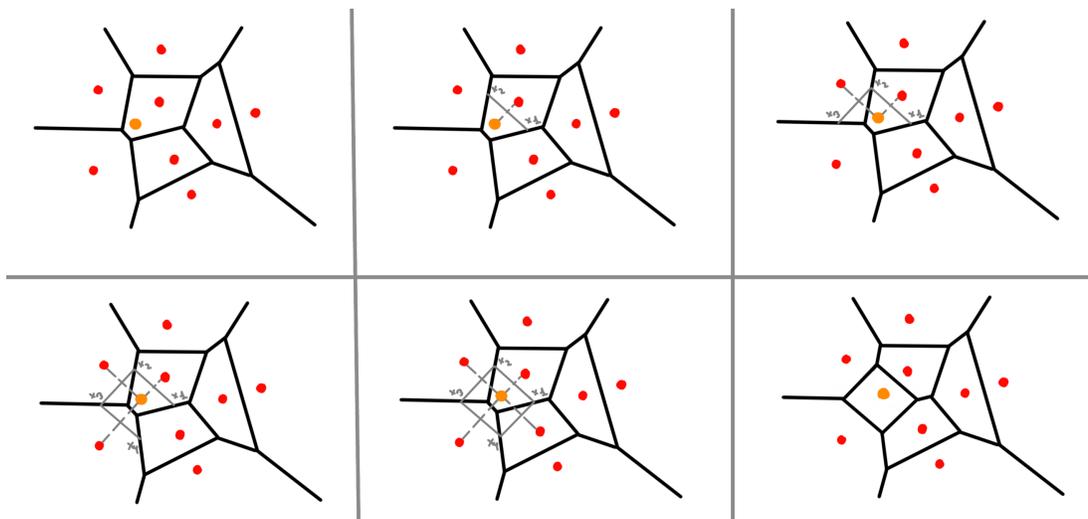


Figura 5.3: Ejemplo de construcción del diagrama de Voronoi con el algoritmo incremental

Trataremos finalmente los casos excluidos en las primeras líneas, que requieren solo alguna adaptación del proceso.

- En primer lugar, en el caso en el que el punto p_{k+1} esté situado sobre un vértice pertenecerá simultáneamente a, al menos, tres regiones. El proceso se realiza de manera similar eligiendo una de las regiones como región inicial para comenzar con el algoritmo.
- El caso en que el punto esté sobre una arista es similar, teniendo en cuenta que en este caso solo se puede escoger una de las dos regiones a las que pertenece.
- Finalmente, si el punto pertenece al interior de una región no acotada, el algoritmo se ejecuta de manera similar pero teniendo en cuenta que es posible que en alguna iteración las mediatrices no intersequen con dos puntos del diagrama de Voronoi de la región en que se encuentre sino solo con uno, generando una arista de tipo semirrecta con un vértice. En ese caso, habría que regresar al punto x_1 y continuar realizando el proceso con la región adyacente a $Vor(p_1)$ en ese punto, hasta repetir la citada anomalía. De esta forma podría obtenerse bien que $Vor(x_{k+1})$ es acotada, bien que es no acotada con dos semirrectas con un vértice.

Este algoritmo posee complejidad $O(n^2)$ por un razonamiento similar al utilizado en el algoritmo incremental para la triangulación. En primer lugar, comprobar a qué región de Voronoi pertenece un punto p tiene una complejidad $O(n^2)$ (caso análogo al del triángulo). Por otro lado, las operaciones requeridas para trazar la mediatriz y hallar las intersecciones son un número constante. Lo que no es constante es el número de veces que hay que realizar ese proceso, que dependerá del número de regiones adyacentes al punto. A medida que avanza el proceso iterativo aumentará el número de esas regiones y, en el peor de los casos, si el punto que se incluye recae siempre sobre la misma región, el número de regiones adyacentes aumentaría en una unidad por iteración, obteniéndose nuevamente una complejidad de $O(n^2)$. Por último, la eliminación de los restos del diagrama anterior, supone la misma complejidad, $O(n^2)$, razonando como en el paso anterior.

Algoritmo divide y vencerás

Veamos ahora un algoritmo de tipo “divide y vencerás”, que presenta complejidad $O(n \log n)$ [6]. La idea es dividir cada conjunto de puntos en dos subconjuntos más pequeños iterativamente, de forma que se construyan diagramas de Voronoi de dichos subconjuntos para, posteriormente, integrarse en uno solo. Es un algoritmo recursivo. Veámoslo más detalladamente.

Sea S un conjunto de n puntos en \mathbb{R}^2 . Podemos suponer que no existen dos puntos con la misma coordenada en el eje de las abscisas, porque en ese caso podríamos encontrar una rotación que sí cumpliera esta propiedad. Ordenamos el conjunto según su coordenada en dicho eje, denotando los puntos por p_1, p_2, \dots, p_n . El siguiente paso es dividir este conjunto en dos subconjuntos. Para ello se calcula el valor $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ y se definen dos nuevos conjuntos:

- $S_1 = \{p_1, \dots, p_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\}$
- $S_2 = \{p_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}, \dots, p_n\}$

Este proceso se repite iterativamente con cada subconjunto hasta obtener cardinales inferiores o iguales a 3.

El siguiente paso es calcular el diagrama de Voronoi de cada subconjunto de la siguiente forma:

- Cuando tenemos en el subconjunto dos puntos, p_1 y p_2 , el diagrama de Voronoi se corresponde con la mediatriz del segmento que une ambos puntos.
- En el caso en que el subconjunto tenga 3 puntos, p_1, p_2 y p_3 , el diagrama de Voronoi se calculará utilizando las mediatrices de los segmentos p_1p_2 , p_2p_3 y p_3p_1 , que intersecarán en un punto como vimos en un resultado anterior. Se obtienen así tres aristas del tipo semirrectas con un vértice.

Una vez planteado el caso base, desarrollaremos el caso recursivo: partiendo de dos subconjuntos S_i y S_j , de los que ya conocemos su diagrama de Voronoi, hallar el diagrama de $S_i \cup S_j$.

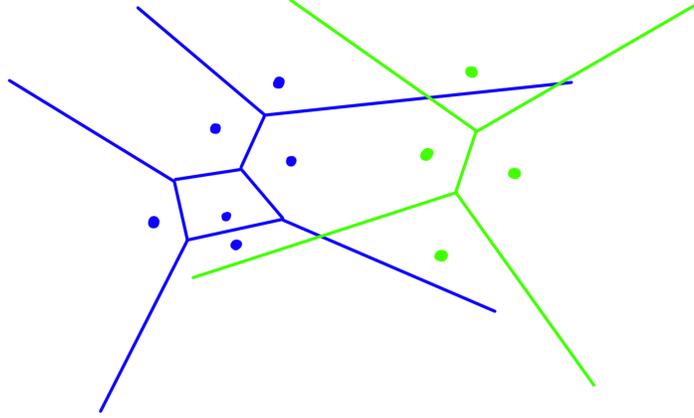


Figura 5.4: Ejemplo de diagramas S_i y S_j

Para ello debemos calcular una línea poligonal que forme parte de $Vor(S_i \cup S_j)$ y que integre ambos diagramas. Esto se hace de la siguiente manera. En primer lugar, se sitúa un punto auxiliar en medio de ambos conjuntos a una altura superior a sus puntos. Dicho punto pertenecerá a una región de Voronoi del primer subconjunto, denotada por $Vor(p)$, y a una región en el segundo subconjunto, denotada por $Vor(q)$. La idea es calcular la mediatriz del segmento pq , y extenderla hasta que interseque con el diagrama de Voronoi de uno de los subconjuntos.

- Si interseca con $Vor(S_1)$, actualizamos el valor de $Vor(p)$ al de la nueva región que está en contacto con dicha intersección, y por tanto, actualizamos también el valor de p . En el caso de que la intersección se produzca en una arista de Voronoi solo existe una región posible a la que actualizar, sin embargo, si la intersección se produce en un vértice se debería elegir entre dos posibles, en cuyo caso debe escogerse la que sea no acotada porque es en la que se debe “cerrar”.
- Si interseca con $Vor(S_2)$, actualizamos el valor de $Vor(q)$ y q de manera análoga.

El proceso se repite iterativamente calculando la mediatriz entre pq y actualizando la región correspondiente tras la intersección de la mediatriz con uno de los diagramas. Este paso se reitera hasta que p y q pertenezcan a regiones no acotadas, momento en el que la mediatriz no intersecará más veces con ninguno de los diagramas.

Observación 5.4. Esta condición de “salida” implica que al menos se realice una iteración antes de hacer la comprobación. Esto es necesario porque inicialmente, las regiones a las que pertenecerá el punto auxiliar serán también no acotadas.

Finalmente, se eliminan las líneas de $Vor(S_1)$ y de $Vor(S_2)$ situadas al otro lado de la línea calculada.

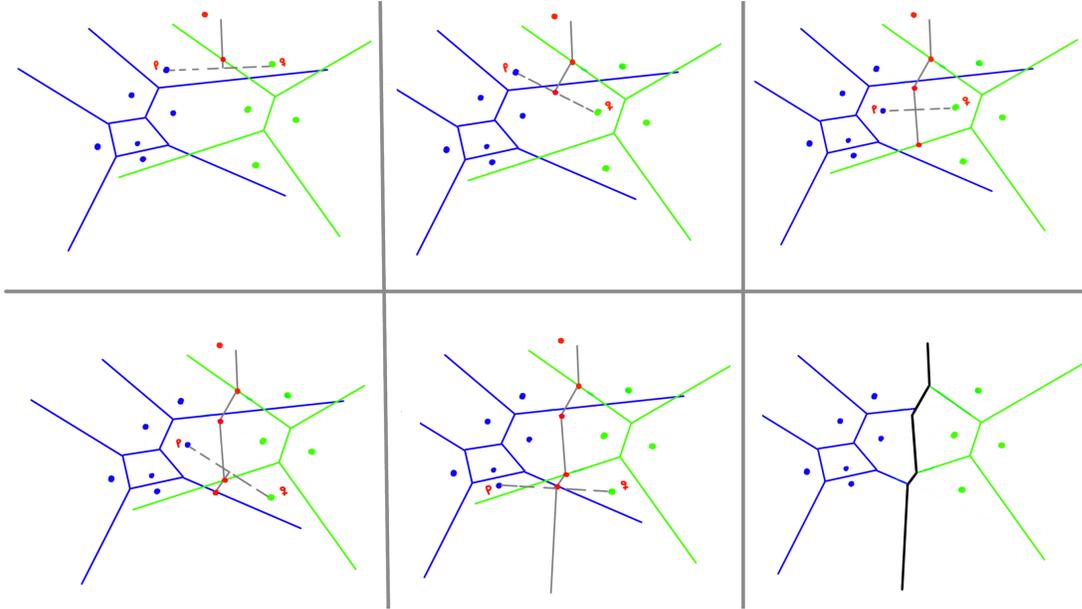


Figura 5.5: Ejemplo de construcción de un diagrama de Voronoi con el algoritmo divide y vencerás

Puede probarse que la complejidad que presenta este algoritmo es la óptima alcanzable utilizando un razonamiento similar al realizado en el caso de la envolvente convexa [7]. Sin embargo, este algoritmo presenta algunas dificultades a la hora de ser implementado.

5.2. Dualidad

Analizaremos en esta subsección el grafo dual de los diagramas de Voronoi para un conjunto de puntos S y, posteriormente, probaremos que se corresponde con la triangulación de Delaunay de S .

Definición 5.4. Sea S un conjunto de puntos y $Vor(S)$ su diagrama de Voronoi. Definimos como grafo dual de $Vor(S)$ a un grafo que posee como nodos los puntos de S y conecta aquellos nodos que comparten una arista de Voronoi.

Estos arcos del grafo serán curvas cualesquiera que unan los puntos del conjunto S , no deben seguir ningún tipo de regla. Sin embargo, en este caso añadiremos una condición más para que sean únicos.

Definición 5.5. Definimos como grafo dual geométrico de $Vor(S)$ al grafo dual de $Vor(S)$ que une los nodos mediante segmentos.

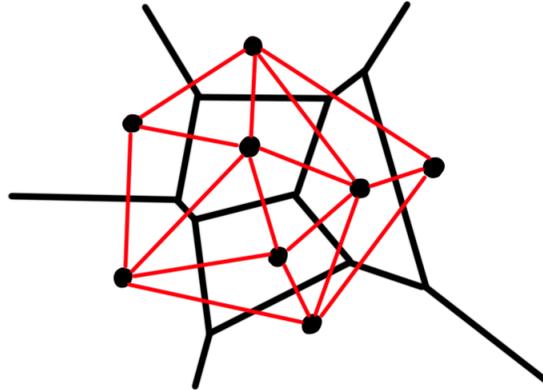


Figura 5.6: Ejemplo de grafo dual geométrico de un diagrama de Voronoi

Además, estudiaremos a continuación una propiedad interesante que poseen estos grafos: son planos. Pero primero presentemos un pequeño lema.

Lema 5.1. Sean A y B dos circunferencias. Sea a una cuerda sobre A y b una cuerda sobre B . Además, supongamos que a y b se cruzan entre sí en un punto diferente a sus extremos. Entonces al menos un extremo de una de las cuerdas está contenido en el interior de la otra circunferencia.

Demostración. Si una circunferencia está contenida en la otra el resultado es trivial.

Si no, rotamos el plano hasta que los centros de ambas circunferencias se encuentren sobre el eje de las abscisas. En primer lugar, es claro que para que las cuerdas se crucen en un punto diferente a sus extremos las circunferencias deben intersectar en dos puntos. Denominamos $A - B$ a la parte de la circunferencia A que no está contenida en el interior de B y $A \cap B$ a la parte que sí lo está. Análogamente, denotamos por $B - A$ a la parte de la circunferencia B que no está contenida en el interior de A y $A \cap B$ a la que sí. El último subconjunto lo denotamos igual que en el caso de la primera circunferencia puesto que es trivial que se corresponde con la misma región del plano.

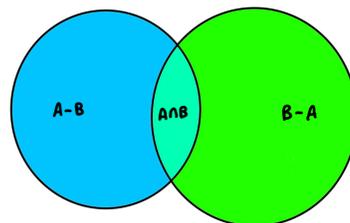


Figura 5.7: Circunferencias A y B

Denotemos por a_1 y a_2 a los extremos de la cuerda a eligiendo como a_1 al que tenga un valor menor en el eje de las abscisas en el caso de que tengan coordenadas diferentes. Denotamos por b_1 y b_2 a los extremos de b ordenándolos de la misma forma. Por otro lado, denotemos por L al segmento que une los puntos de intersección de las circunferencias.

Si a_1 y a_2 estuviesen contenidos ambos en $A - B$ y b_1 y b_2 en $B - A$, entonces se cumpliría la siguiente desigualdad en las coordenadas en el eje de las abscisas:

$$a_1 \leq a_2 \leq L \leq b_1 \leq b_2$$

y por tanto, las cuerdas no podrían cruzarse en un punto distinto a sus extremos al no poder compartir sus puntos interiores coordenada en el eje de las abscisas. Por tanto, alguno de los cuatro extremos debe no cumplir esa condición. Supongamos que es a_1 . Entonces a_1 pertenecería a $A \cap B$ y por tanto estaría contenido en el interior de B . El resto de casos se razonan de manera análoga. \square

Teorema 5.5. *El grafo dual geométrico de $Vor(S)$ es plano, es decir, sus arcos no se cruzan.*

Demostración. Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que dos de los arcos del grafo se cruzan. Denotemos sus extremos por p_1, p_2, p_3 y p_4 , siendo los arcos los segmentos p_1p_2 y p_3p_4 . Por el Teorema 5.2, existirá un punto x en la arista de Voronoi que separa las regiones p_1 y p_2 tal que la circunferencia C_x centrada en x y que pasa por p_1 y por p_2 no contiene ningún otro punto del conjunto S . Razonando igual, existirá un punto y en la arista de Voronoi que separa p_3 de p_4 tal que la circunferencia C_y centrada en y y que pasa por p_3 y p_4 no contiene ningún otro punto de S . Sin embargo, el lema anterior afirma que si esos segmentos (cuerdas) se cruzan, entonces al menos uno de los extremos debe estar contenido en la otra circunferencia llegando a un absurdo. \square

En un primer paso hasta probar la dualidad descrita, veamos que el grafo es una triangulación del conjunto de puntos.

Corolario 5.3. *Sea S un conjunto de n puntos de \mathbb{R}^2 que no contenga cuatro puntos cocirculares. Entonces el grafo dual geométrico de $Vor(S)$ es una triangulación de S , que se denomina triangulación dual.*

Demostración. Utilizando el teorema anterior sabemos que el dual es un grafo plano. Además, como no existen 4 puntos cocirculares tendremos vértices de Voronoi de grado 3 que dividirán el plano en tres regiones de Voronoi distintas, $Vor(p_1), Vor(p_2)$ y $Vor(p_3)$. De ahí se concluye que, en el grafo dual, existirá un arco uniendo p_1 y p_2 , otro uniendo p_2 y p_3 y otro uniendo p_3 y p_1 . Así se obtiene una división del plano en triángulos mediante aristas que no se cruzan y que unen los puntos de S . \square

La dualidad establecida asocia, por tanto, un vértice de Voronoi a un triángulo y una región de Voronoi a un vértice de la triangulación. Además, esta triangulación es de Delaunay como veremos a continuación.

Teorema 5.6. *Sea S un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 que no contenga cuatro puntos cocirculares. Sea $Vor(S)$ el diagrama de Voronoi de S . Entonces la triangulación dual de $Vor(S)$ se corresponde con la triangulación de Delaunay de S .*

Demostración. Por el Teorema 5.1 sabemos que dado un vértice de Voronoi v de $Vor(S)$, existe una circunferencia centrada en v que pasa por exactamente tres puntos de S , p_1, p_2 y p_3 y que ningún otro punto de S se encuentra en el interior de la misma. Precisamente la unión de esos puntos, $p_1p_2p_3$ formará un triángulo en el grafo dual de $Vor(S)$ porque esos puntos comparten aristas en común, las tres que salen de v . Luego la circunferencia definida circunscribirá a dicho triángulo. Entonces, el Teorema 4.8 garantiza que dicha triangulación será de Delaunay. \square

De este resultado, se puede concluir la unicidad de las triangulaciones de Delaunay.

Corolario 5.4. *Sea S un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 que no contenga cuatro puntos cocirculares. Entonces la triangulación de Delaunay de S es única.*

Demostración. Por cómo se construye el grafo dual de $Vor(S)$: estableciendo los puntos de S como nodos y uniendo con un segmento aquellos que comparten una arista de Voronoi, es claro que el grafo dual es único, puesto que solo existe un segmento que una dos puntos. Como además el diagrama de Voronoi es también único porque un punto siempre pertenecerá a la misma región por definición, independientemente de cómo se construya, se concluye que la triangulación de Delaunay de S es única. \square

Para finalizar, realizaremos una demostración más sencilla del Teorema 4.4 utilizando la dualidad descrita.

Corolario 5.5. *Sea S un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 de forma que no existan 4 cocirculares. El grafo de rotaciones de S es conexo.*

Demostración. Sean T_1 y T_2 triangulaciones de S . Podemos transformar T_1 en la triangulación de Delaunay, T' , mediante el algoritmo descrito en la Proposición 4.3. Podemos hacer lo mismo con T_2 . Como la triangulación de Delaunay es única por el corolario anterior, obtenemos por un lado un camino c_1 desde el nodo T_1 a T' y, por otro, un camino c_2 desde T_2 a T' . Entonces el camino buscado será $c_1c_2^{-1}$. \square

Bibliografía

- [1] DEVADOSS, SATYAN L. AND O’ROURKE, JOSEPH(2011). *Discrete and Computational Geometry*. Princeton.
- [2] GARCÍA ARENAS, FRANCISCO AND PUERTAS, MARÍA LUZ (1998). *El Teorema de la Curva de Jordan*. Divulgaciones Matemáticas.
- [3] GRAHAM, RONALD (1972). *An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set*. Information processing letters.
- [4] HANKE, SABINE AND OTTMANN, THOMAS AND SCHUIERER, SVEN(1996). *The Edge-Flipping Distance of Triangulations*. Journal of Universal Computer Science.
- [5] PREPARATA, FRANCO P. AND SHAMOS, MICHAEL IAN(1985). *Computational Geometry: An Introduction*. Springer-Verlag.
- [6] SHAMOS, MICHAEL IAN(1978). *Computational geometry*. Yale University.
- [7] SHAMOS, MICHAEL IAN AND HOEY, DAN(1975). *Closest-point problems*. Department of Computer Science, Yale University.
- [8] SHARIR, MICHA AND SHEFFER, ADAM(2010). *Counting Triangulations of Planar Point Sets*. The electronic journal of combinatorics.
- [9] TARJAN, ROBERT E. AND VAN WYK, CHRISTOPHER J.(1988). *An $O(n \log \log n)$ -Time Algorithm for Triangulating a Simple Polygon*. SIAM Journal on Computing.
- [10] WANG XIANG(2011). *Analysis of the Time Complexity of Quick Sort Algorithm*. International Conference on Information Management.