



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

**Física Cuántica a la Feynman: La Integral de Caminos**

*Autor: Jesús Sevilla Pérez*

*Tutor: Jose María Muñoz Castañeda*

# Índice general

<b>1. Introducción: la integral de caminos en mecánica cuántica</b>	<b>3</b>
1.1. Justificación y contexto . . . . .	3
1.2. Objetivos, plan de trabajo y metodología . . . . .	4
1.3. Construcción de la integral de caminos: el resolvente de la ecuación de Schrödinger . . . . .	5
1.4. De Dirac a Feynman: el nacimiento de la integral de caminos . . . . .	6
1.5. Los postulados de la formulación de Feynman . . . . .	7
1.6. Cuantización por integral de caminos: de vuelta a la ecuación de Schrödinger . . . . .	8
1.7. Relaciones de conmutación . . . . .	9
1.8. La partícula libre . . . . .	10
1.9. Teoría de perturbaciones en integral de caminos . . . . .	11
1.10. Reglas y diagramas de Feynman . . . . .	12
<b>2. La aproximación WKB en integral de caminos. El oscilador armónico.</b>	<b>14</b>
2.1. La aproximación WKB en mecánica cuántica . . . . .	14
2.2. La aproximación WKB en la teoría de Schrödinger . . . . .	15
2.3. El régimen semiclásico en integral de caminos . . . . .	16
2.4. El oscilador armónico . . . . .	20
<b>3. Integral de Caminos y Física Estadística</b>	<b>21</b>
3.1. Breve resumen de mecánica estadística cuántica . . . . .	21
3.2. La integral de caminos en mecánica estadística . . . . .	22
3.3. Rotación de Wick y continuación analítica. Fórmula de Feynman-Kac. . . . .	23
<b>4. Integral de Caminos en Teoría Cuántica de Campos</b>	<b>25</b>
4.1. Preludio matemático: integrales gaussianas . . . . .	25
4.1.1. Integral Gaussiana Generalizada . . . . .	25
4.1.2. Valores esperados y contracción de Wick . . . . .	26
4.2. Introducción. El propagador libre. . . . .	26
4.3. Teoría perturbativa. El modelo $\lambda\phi^4$ . . . . .	29
<b>5. Espín y fermiones en integral de caminos</b>	<b>31</b>
5.1. Variables no conmutativas. Álgebra de Grassmann. . . . .	31
5.2. Fermiones en teoría cuántica . . . . .	33
<b>6. Conclusiones</b>	<b>35</b>

# Capítulo 1

## Introducción: la integral de caminos en mecánica cuántica

### 1.1. Justificación y contexto

La integral de caminos surge como una formulación de la teoría cuántica alternativa a las que tradicionalmente se introducen a nivel de grado, comúnmente fundamentadas en la ecuación de Schrödinger o de Dirac, para mecánicas no relativistas y relativistas, respectivamente, y en la cuantización canónica para las teorías cuánticas de campos. Sin embargo, la formulación de la integral de caminos desarrollada inicialmente por Richard Feynman ha sido, prácticamente desde su nacimiento, un estándar en el estudio de la teoría cuántica, especialmente en teorías cuánticas de campos. Esto es debido, en primer lugar, a que conceptualmente ofrece una generalización del principio de mínima acción clásico de la que se obtiene una clara interpretación física de los procesos cuánticos y su naturaleza, que contribuye a un mayor entendimiento de los mismos. No quedándose ahí, a nivel de cálculo permite introducir de forma natural técnicas matemáticas tomadas del análisis funcional, así como del estudio de procesos estocásticos. Por ejemplo, los métodos basados en funcionales generatrices y funciones de Green son ampliamente utilizados en el estudio de las teorías gauge, pues permiten un más fácil tratamiento de las teorías no abelianas [24], como la cromodinámica cuántica, que el proporcionado por la cuantización canónica. La integral de caminos, originalmente una formulación de la mecánica cuántica, puede también extenderse a la física estadística o a la óptica, las cuales pueden formularse en los mismos términos. De hecho, tal y como se estudia en este trabajo, es posible crear un único formalismo que unifique a la física estadística y a la mecánica cuántica a través del análisis en variable compleja. Además de una gran variedad de aplicaciones en física como el estudio de instantones [8] o el cálculo de aproximaciones semiclásicas de procesos de scattering, su relación con los procesos estocásticos permite extender el uso de integrales de caminos a contextos no físicos como son, por ejemplo, los mercados financieros [22].

A pesar de su importancia y abanico de aplicaciones, el formalismo de la integral de caminos no suele ser cubierto en los planes de estudio a nivel de grado por falta de tiempo y créditos. Es aquí donde encuentra su justificación el presente trabajo: completar la formación del estudiante de física con el aprendizaje de un formalismo que permite profundizar en la comprensión y establecer conexiones entre importantes asignaturas del grado como son Mecánica Cuántica, Física Estadística, Mecánica Teórica, Simetrías, Campos y Partículas, u Óptica, así como los varios Métodos Matemáticos.

## 1.2. Objetivos, plan de trabajo y metodología

En este contexto, este trabajo pretende ofrecer una introducción al formalismo de la integral de caminos que resulte comprensible y sin que requiera más conocimientos previos que los aprendidos de matemáticas y física cuántica y clásica en un grado en física. Todo ello sin caer en la sobresimplificación y tratando de introducir con el debido rigor los distintos aspectos de la definición y primeras aplicaciones de una mecánica cuántica fundamentada en la integral de caminos.

Con este fin, el plan de trabajo partirá de una construcción de la integral de caminos rigurosa desde el formalismo de la mecánica cuántica no relativista, como expresión explícita del resolvente de la ecuación de Schrödinger, pues es la formulación de Schrödinger con la que el estudiante de física estará más familiarizado tras completar el grado. Obtenida así una primera noción del objeto a tratar a lo largo del trabajo, se continuará con una introducción histórica del mismo siguiendo el trabajo de Dirac y Feynman hasta proponer una formulación axiomática de la mecánica cuántica no relativista basada en la integral de caminos, desde cuya novedosa perspectiva se volverá sobre aspectos de la mecánica cuántica previamente estudiados en el grado, revisitando así la partícula libre, relaciones de conmutación, el régimen semiclásico y la aproximación WKB, el oscilador armónico y la teoría de perturbaciones. A continuación, se introduce otra de las aplicaciones más importantes y directas de la integral de caminos: su aplicación en la mecánica estadística cuántica, dentro del formalismo de la matriz densidad. El estudio de la integral de caminos en mecánica estadística es de particular interés y belleza, pues surge de la identificación puramente formal (matemática) que puede establecerse, utilizando la variable compleja como puente, entre la ecuación que gobierna la física de una colectividad canónica y la ecuación de Schrödinger. Esta identificación permite, no obstante, la traducción directa de resultados entre ambas teorías y la introducción de técnicas matemáticas y conceptos que se emplean de igual modo en teoría cuántica de campos: rotación de Wick, fórmula de Feynman-Kac y función de partición. Abordado esto, se procede a extender la integral de caminos a la teoría cuántica de campos, donde ésta encuentra su más relevante aplicación y donde se ha desarrollado mayoritariamente su metodología matemática. De especial importancia será la generalización de la teoría de perturbaciones y los diagramas de Feynman introducidos con anterioridad para la mecánica cuántica, pues se desarrollarán además en el marco de las funciones de Green, en el cual se trabajan normalmente las teorías cuánticas de campos (especialmente en cuestiones de mayor complejidad que procesos de orden cero). Finalmente se cerrará el trabajo con las conclusiones extraídas.

Metodológicamente se realizará el desarrollo correspondiente al primer bloque considerando, por simplicidad, mecánica cuántica no relativista y, en general, considerando partículas de espín 0 en una dimensión espacial (1D). La consideración de un mayor número de dimensiones espaciales no alteraría el procedimiento de los desarrollos a seguir pero podría oscurecer el significado físico de las nociones a estudiar. Asimilada la intuición física de la integral de caminos, y tras la introducción de varias aplicaciones, se pretende establecer conexiones entre lo recién aprendido con distintas materias con las que el alumno ya se encuentra familiarizado: física estadística, óptica, etc. Para finalmente extender lo aplicado para poder tratar teorías cuánticas de campos. Por su naturaleza y fácil implementación, el desarrollo de este último bloque será explícitamente relativista. Además, se introducirán también aquí el espín y el tratamiento de partículas fermiónicas, cuya inclusión es estrictamente necesaria en el contexto de las teorías cuánticas de campos.

### 1.3. Construcción de la integral de caminos: el resolvente de la ecuación de Schrödinger

Siguiendo el desarrollo de Schulman [27], resulta ilustrativo a ojos del lector familiarizado con la formulación convencional de la mecánica cuántica deducir, partiendo de la misma, la fórmula de la integral de caminos. Esta no sería otra cosa que el resolvente o núcleo de la ecuación de Schrödinger. Así, considerando una partícula sin espín no relativista, el problema se reduce a encontrar una expresión del mismo en representación de coordenadas. La ecuación de Schrödinger es, para un hamiltoniano  $H$ :

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.1)$$

El núcleo de la ecuación anterior se define como la función  $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$  satisfaciendo:

$$\psi(x_b, t_b) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_b, t_b; x_a, t_a) \psi(x_a, t_a) dx_a$$

donde  $\psi(x_b, t_b)$  es solución de la ecuación (1.1) y además:

$$K(x_b, t_a; x_a, t_a) = \delta(x_b - x_a)$$

Así pues, el objeto de interés es el elemento de matriz del operador de evolución temporal.

$$\psi(x_b, t_b) = \langle x_b | \psi; t_b \rangle = \langle x_b | \mathcal{U}(t_b, t_a) | \psi; t_a \rangle = \int dx_a \langle x_b | \mathcal{U}(t_b, t_a) | x_a \rangle \psi(x_a, t_a)$$

$K(x_b, t_b; x_a, t_a) := \langle x_b | \mathcal{U}(t_b, t_a) | x_a \rangle$  es el llamado propagador en mecánica cuántica y su significado físico es el de la amplitud de probabilidad de que una partícula se encuentre en un estado  $(x_b, t_b)$  partiendo de un estado  $(x_a, t_a)$ . Su expresión es conocida para un hamiltoniano independiente del tiempo [7]:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \langle x_b | \theta(t_b - t_a) e^{-iH(t_b - t_a)/\hbar} | x_a \rangle$$

Donde  $\theta(t)$  es la función de Heaviside. Hecho esto, el primer paso del desarrollo parte de considerar el teorema de Trotter. Este establece que, para dos operadores  $A$  y  $B$ , y  $N$  un número natural:

$$e^{A+B} = \lim_{N \rightarrow \infty} (e^{A/N} e^{B/N})^N$$

Definiendo  $\varepsilon = (t_b - t_a)/N$ , y suponiendo además que  $t_b > t_a$ , y que  $H$  toma la forma  $H = T + V$ , donde  $T$  representa la parte cinética y  $V$  la potencial:

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle x_b | \underbrace{e^{-i\varepsilon T/\hbar} e^{-i\varepsilon V/\hbar} \dots e^{-i\varepsilon T/\hbar} e^{-i\varepsilon V/\hbar}}_{N \text{ veces}} | x_a \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 dx_2 \dots dx_{N-1} \prod_{k=0}^{N-1} \langle x_{k+1} | e^{-i\varepsilon T/\hbar} e^{-i\varepsilon V/\hbar} | x_k \rangle \end{aligned}$$

Donde se han introducido  $N - 1$  relaciones de cierre entre cada pareja de exponenciales y se ha renombrado  $x_0 = x_a$ ,  $x_N = x_b$ .

Por otro lado, suponiendo un potencial dependiente únicamente de la posición como función de operadores, e insertando entre las exponenciales la relación de cierre en la base de momentos:

$$\begin{aligned} \langle x_{k+1} | e^{-i\varepsilon T/\hbar} e^{-i\varepsilon V/\hbar} | x_k \rangle &= \int dp \langle x_{k+1} | e^{-i\varepsilon p^2/2m\hbar} | p \rangle \langle p | x_k \rangle e^{-i\varepsilon V(x_k)/\hbar} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{-i\varepsilon p^2/2m\hbar + ip(x_{k+1} - x_k)/\hbar} e^{-i\varepsilon V(x_k)} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}} \exp \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_k) \right] \end{aligned}$$

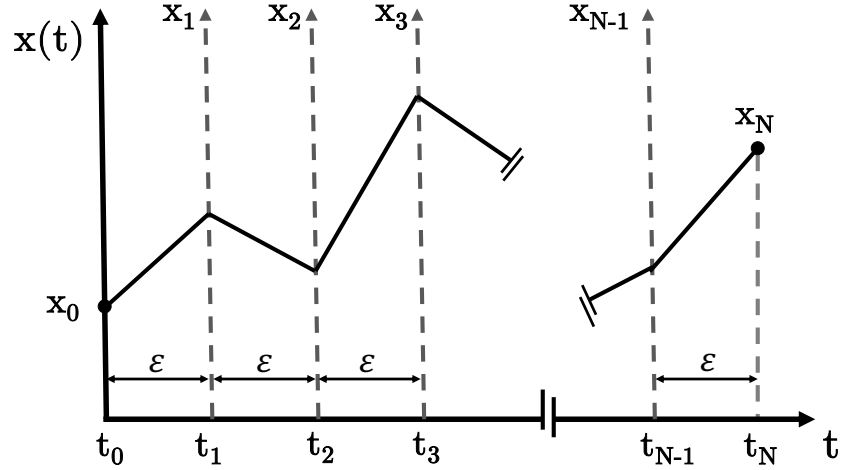


Figura 1.1: Representación gráfica de la interpretación de la integral de caminos como suma de todas las posibles trayectorias.

Sustituyendo en la expresión original:

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right)^{N/2} \exp \sum_{k=0}^N \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_k) \right] \quad (1.2)$$

El conjunto de puntos  $\{x_k\}$  se puede interpretar como las sucesivas posiciones de la partícula en su trayectoria desde  $x_0$  hasta  $x_N$ , siendo la integral sobre todos los  $x_k$  conceptualmente equivalente a integrar sobre todas las posibles trayectorias. La anterior interpretación se presenta gráficamente en la Figura 1.1. Por otro lado, dado que  $\varepsilon \rightarrow 0$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , sería esperable que el argumento de la exponencial (el cual toma la forma de una suma de Riemann) tendiera a la integral:

$$\sum_{k=0}^N \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon} \right)^2 - V(x_k) \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty dt \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \right) = \frac{i}{\hbar} \int dt L = \frac{i}{\hbar} S \quad (1.3)$$

Donde  $L$  es el lagrangiano de la partícula y  $S$  la acción. Finalmente, si se utiliza una notación menos restrictiva (1.2) se puede escribir:

$$K(b, a) = \int \mathcal{D}x(t) e^{iS[x(t)]/\hbar} \quad (1.4)$$

Para el caso particular anterior:

$$\int \mathcal{D}x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A(\varepsilon)} \int \frac{dx_1}{A(\varepsilon)} \frac{dx_2}{A(\varepsilon)} \cdots \frac{dx_{N-1}}{A(\varepsilon)} \quad (1.5)$$

Siendo  $A(\varepsilon) = (m/2\pi\hbar i \varepsilon)^{1/2}$  un factor de normalización. Ésta sería una primera construcción rigurosa de la integral de caminos de Feynman.

## 1.4. De Dirac a Feynman: el nacimiento de la integral de caminos

La integral de caminos así deducida no hace justicia a la importancia de sus aplicaciones y consecuencias en la reciente historia de la física. Incluso su descubrimiento se remonta a la búsqueda,

por parte de Dirac, de una conexión más profunda entre la formulación lagrangiana de la mecánica clásica y la entonces recién desarrollada mecánica cuántica. En su histórica publicación [18] (excelentemente analizada y contextualizada por N.D. Hari [36]), Dirac propone la existencia de una función compleja  $S(q_{t_1}, q_{t_2})$ , siendo  $q_{t_1}$  y  $q_{t_2}$  autovalores del operador posición en dos instantes diferentes  $t_1$  y  $t_2$ , tal que:

$$\langle q_{t_2} | q_{t_1} \rangle = e^{iS/\hbar}$$

Entonces, trabajando con la no conmutatividad de las variables en mecánica cuántica, llega a la conclusión que de existir tal función, ésta desempeñaría un papel análogo a la función principal de Hamilton en mecánica clásica como función generatriz de la evolución temporal. Es por ello que Dirac escribe [18]:

$$\begin{aligned} \langle q_{t_2} | q_{t_1} \rangle &\text{ corresponde a } \exp i \int_{t_1}^{t_2} L dt / \hbar \\ \langle q_{t+dt} | q_t \rangle &\text{ corresponde a } \exp i L dt / \hbar \end{aligned}$$

La ambigüedad de tal relación despertó la curiosidad de Feynman, quien reemplazó el *corresponde a* por un *es igual a* y consiguió derivar la ecuación de Schrodinger para una partícula en un potencial tras haber introducido previamente un necesario factor de convergencia  $A(dt)$ :

$$\langle q_{t+dt} | q_t \rangle = \frac{e^{iLdt/\hbar}}{A(dt)}$$

La recuperación de la ecuación de Schrödinger se estudiará en la Sección 1.6.

## 1.5. Los postulados de la formulación de Feynman

En el libro que Feynman escribió con Hibbs [23] desarrollan una formulación alternativa a la convencional de la mecánica cuántica no relativista. Comienzan para ello desarrollando el concepto de amplitud de probabilidad, con el que el lector especializado debería encontrarse suficientemente familiarizado. La amplitud de probabilidad es una cantidad compleja que se le asocia a un suceso de forma que la probabilidad de que dicho suceso ocurra sea el cuadrado de su módulo. Estas amplitudes se dotan de propiedad aditiva, de modo que cada una de las formas en que un suceso puede ocurrir tenga a su vez asociada una amplitud propia, siendo la suma de todas ellas la amplitud total de que el suceso ocurra. Es esta propiedad aditiva la que da pie a los frecuentes fenómenos de interferencia de la física cuántica.

Dicho esto, el postulado del que parten Feynman y Hibbs es el siguiente [23]: la amplitud de probabilidad de que un sistema que se encuentre en una posición  $x_a$  en un tiempo  $t_a$  evolucione a una posición  $x_b$  para un tiempo  $t_b > t_a$  es la suma de las amplitudes  $\phi[x(t)]$  de cada una de las trayectorias  $x(t)$  que conectan ambos puntos:

$$K(b, a) = \sum \phi[x(t)]$$

A su vez, la contribución de cada trayectoria tiene una fase proporcional a la acción a lo largo de la misma:

$$\phi[x(t)] = \frac{e^{iS[x(t)]/\hbar}}{A}$$

A lo largo del resto del capítulo se explorarán aspectos ya conocidos de la mecánica cuántica en la formulación tradicional desde este nuevo punto de vista.

## 1.6. Cuantización por integral de caminos: de vuelta a la ecuación de Schrödinger

Refiriendo a los trabajos originales [23, 29], se comprueba en este apartado cómo la formulación de Feynman permite regresar a la de Schrödinger. La integral de caminos se ha postulado como la amplitud de probabilidad de que una partícula vaya de un punto  $a$  a otro  $b$  posterior en el espacio-tiempo. Es por ello que está estrechamente relacionada con la función de onda  $\psi(x)$ , definida como la amplitud de probabilidad de que una partícula se encuentre en un punto  $x$  en un instante  $t$ , cumpliéndose por definición:

$$\psi(x_b, t_b) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_b, t_b; x_a, t_a) \psi(x_a, t_a) dx_a$$

De modo análogo a como se hizo en (1.3), para un instante  $t_b$  infinitesimalmente posterior a  $t_a$  ( $t_b = t_a + \varepsilon$ ), la acción es  $\varepsilon L$ . Reescribiendo  $x_k \equiv x_b$  y  $x_{k-1} \equiv x_a$ :

$$\psi(x_k, t + \varepsilon) = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon L \left( \frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon}, x^* \right) \right\} \psi(x_{k-1}, t) dx_{k-1} \quad (1.6)$$

Si bien tomar  $(x_k - x_{k-1})/\varepsilon$  como la velocidad resulta intuitivo, no es trivial la elección de la posición a evaluar en el lagrangiano, pues bien podrían tomarse:  $x^* = x_k$ ,  $(x_k + x_{k+1})/2$  ó  $x_{k-1}$ . Tal problema aparece al evaluar integrales de caminos por discretización del espacio-tiempo, y para su discusión se toma aquí un lagrangiano linealmente dependiente en la velocidad, como es el de una partícula libre en un campo electromagnético [17] (se consideran en este caso tres dimensiones espaciales):

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - qV(\mathbf{x}, t)$$

La ecuación (1.6) únicamente se cumple en el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Esto permite considerar como válidas aproximaciones de la integral tales que difieran en un orden de  $\varepsilon$  mayor que uno. Por otro lado, tal y como se demuestra mediante el uso de integrales gaussianas (véase [27]),  $x_k - x_{k-1}$  es de orden  $\sim \varepsilon^{1/2}$ . Esto implica que el producto  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$  llevará a términos del tipo  $(x_k - x_{k-1})A(x^*)$  que, para distintas elecciones de  $x^*$ , diferirán entre sí en un término de orden  $(x_k - x_{k-1})^2 \sim \varepsilon$  (expandiendo  $A(x^*)$  en potencias de  $x^*$ ), afectando así al resultado del límite. Tal y como indica Feynman [29], en este caso resulta suficiente utilizar la regla del trapecio:

$$S(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{2} \left\{ L \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\varepsilon}, \mathbf{x}_k \right) + L \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\varepsilon}, \mathbf{x}_{k-1} \right) \right\} = \varepsilon L \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\varepsilon}, \frac{\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{k-1}}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Tomando entonces  $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{k-1})/2$ , y renombrando  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_b$ , e  $\mathbf{y} \equiv \mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{x}_a$ .

$$\psi(\mathbf{x}, t + \varepsilon) = \int d^3y \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{3/2} \exp \left\{ \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon} \right)^2 - V(\mathbf{x}) \right] + \frac{ie}{\hbar c} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{A} \left( \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2} \right) \right\} \psi(\mathbf{y}, t)$$

El motivo por el que se ha evaluado el potencial electrostático en  $x$  sigue los mismos argumentos: siendo el término dentro de la exponencial proporcional a  $\varepsilon V$ , distintas elecciones diferirán en un factor de orden mayor que uno en  $\varepsilon$ .

De acuerdo a la aproximación de fase estacionaria, debido a la dependencia cuadrática  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$  en la exponencial imaginaria, la contribución a la integral será mucho menor en las regiones lejanas a  $\mathbf{x}$ , en las cuales la exponencial oscilará muy rápidamente cancelándose la contribución neta a la integral. Por ello, se realiza el cambio de variable  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ , para hacer una expansión en serie



de Taylor entorno a  $\boldsymbol{\xi} = 0$ , donde las oscilaciones serán más lentas y permitirán contribución a la integral:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t + \varepsilon) &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(\mathbf{x})\right\} \int d^3\xi \exp\left[\frac{im\xi^2}{2\varepsilon\hbar}\right] \\ &\times \exp\left\{-\frac{ie}{\hbar c}\left[\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \dots\right]\right\} \left\{\psi(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla\psi + \frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^3 \xi_m \xi_n \frac{\partial^2\psi}{\partial x_m \partial x_n} + \dots\right\} \end{aligned}$$

A continuación, las exponenciales pueden expandirse en potencias de  $\varepsilon$  reteniendo únicamente los términos hasta primer orden, teniendo en cuenta que  $\xi \sim \varepsilon^{1/2}$ . Los términos supervivientes contendrán integrales de tres tipos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx x e^{-ax^2} = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Realizando las integrales resultantes y teniendo en cuenta que:

$$\psi(\mathbf{x}, t + \varepsilon) - \psi(\mathbf{x}, t) = \varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

se obtiene, tras agrupar términos (todos los de orden cero se cancelan):

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{i\hbar e}{mc} (\mathbf{A} \cdot \nabla) \psi + \frac{i\hbar e}{2mc} \psi \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 \psi + V\psi = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 \psi + V\psi$$

Demostrándose así que la integral de caminos es el propagador de la ecuación de Schrödinger.

## 1.7. Relaciones de conmutación

La mecánica cuántica es una teoría de naturaleza probabilística en la que las magnitudes físicas medibles pueden encontrarse en estados de superposición. Es por ello que estas magnitudes, que podrían ser dependientes del tiempo o la posición, se estudian en términos de valores esperados o valores promedio. En el contexto de las integrales de caminos, se considera en particular valores esperados de magnitudes físicas medibles de una partícula entre dos estados de coordenadas definidas  $x_a$  y  $x_b$ . Para su tratamiento resulta de gran utilidad la introducción de funcionales, los cuales son aplicaciones que asocian funciones, como podría ser una trayectoria  $x(t)$  (posición como función del tiempo), con un número real o complejo. Un ejemplo ya introducido es la acción  $S[x(t)]$ .

Así, dado un funcional  $F[x(t)]$  y el papel de  $e^{iS/\hbar}$  como amplitud de probabilidad o peso a lo largo de cada trayectoria, se define el valor esperado de  $F$  en el contexto de las integrales de caminos como:

$$\langle F \rangle_S = \int \mathcal{D}x(t) F[x(t)] e^{iS[x(t)]/\hbar}$$

Aplicándose una traslación  $x(t) \rightarrow x(t) + \eta(t)$  la cantidad así definida no varía, dado que  $\mathcal{D}x(t) = \mathcal{D}[x(t) + \eta(t)]$ . Sin embargo, es posible expandir integrandos de modo que:

$$\begin{aligned} \langle F \rangle_S &= \int \mathcal{D}x(t) F[x(t) + \eta(t)] e^{(i/\hbar)S[x(t)+\eta(t)]} = \int \mathcal{D}x(t) F[x(t)] e^{(i/\hbar)S[x(t)]} \\ &+ \int \mathcal{D}x(t) \int \eta(s) ds \left[ \frac{\delta F}{\delta x(s)} + \frac{i}{\hbar} F[x(t)] \frac{\delta S}{\delta x(s)} \right] e^{(i/\hbar)S[x(t)]} + \dots \end{aligned}$$

El primer orden coincide para ambos lados de la igualdad, por lo que el resto de órdenes deben anularse, teniéndose las ecuaciones [23, 29]:

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta x(s)} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\delta S}{\delta x(s)} \right\rangle_S \iff \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_k} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle F \frac{\partial S}{\partial x_k} \right\rangle_S$$

Donde la segunda igualdad se ha escrito en términos del espacio discretizado, sobre el cual un funcional pasa a ser una función de las variables  $x_k$ .

Tomando  $F = x_k$ , para una partícula en un potencial dependiente de la posición (véase (1.3)):

$$\langle 1 \rangle_S = \frac{i}{\hbar} \left\langle m x_k \left[ \frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon} - \frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon} \right] + \varepsilon x_k V'(x_k) \right\rangle_S$$

Y despreciando los términos de orden  $\varepsilon$ :

$$\left\langle x_k m \frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon} - m \frac{x_{k+1} - x_k}{\varepsilon} x_k \right\rangle_S = \langle i\hbar \rangle \equiv \langle x_k p_k \rangle - \langle p_{k+1} x_k \rangle = i\hbar$$

Si se identifican los operadores posición y momento con las magnitudes de las partículas tomadas en el instante  $k$ -ésimo, se recuperan las relaciones de conmutación canónicas de la mecánica cuántica en su formulación tradicional, correspondiendo el orden de aplicación de los operadores con el orden cronológico.

## 1.8. La partícula libre

Se presenta a continuación un primer ejemplo del cálculo directo de la integral de caminos para la obtención de probabilidades, siendo el caso de la partícula libre el más sencillo. La acción para una partícula libre (en ausencia de potencial) viene dada por la integral de la energía cinética:

$$S_0[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (1.7)$$

Recurriendo a la construcción de la integral de caminos, ésta puede ser fácilmente evaluada como:

$$K_0(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int dx_1 \dots \int dx_{N-1} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar \varepsilon} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2 \right\} \quad (1.8)$$

La primera integral a realizar es en la variable  $x_1$ . Dado que es de tipo gaussiano se resuelve inmediatamente haciendo uso de (4.1) [23]:

$$\begin{aligned} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{2/2} \int dx_1 \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar \varepsilon} [(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2] \right\} &= \\ &= \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{2/2} \int dx_1 \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar \varepsilon} [x_2^2 + 2x_1^2 - 2(x_2 + x_0)x_1 + x_0^2] \right\} \\ &= \left( \frac{m}{2\pi i \hbar 2\varepsilon} \right)^{1/2} \exp \frac{im}{2\hbar 2\varepsilon} (x_2 - x_0)^2 \end{aligned}$$

Repetiendo de manera recursiva se encuentra que tras la integral en la  $(N - 1)$ -ésima variable se obtiene:

$$K_0(x_a, t_a; x_b, t_b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar N \varepsilon} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar N \varepsilon} (x_N - x_0)^2 \right\} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \right\} \quad (1.9)$$

Tras los cambios  $X = x_b - x_a$  y  $T = t_b - t_a$ , una fórmula útil resulta de escribir el núcleo de la partícula libre en términos de su transformada de Fourier con  $p$  y  $E/\hbar$  como variables conjugadas representando el momento y la energía de la partícula. La justificación de lo último se encuentra en la fórmula general:

$$\tilde{K}(p, E; p', E') = \int dx dt dx' dt' e^{-i(px-Et)/\hbar} K(x, t; x', t') e^{i(p'x'-E't')/\hbar}$$

A obtener a partir de la función de onda en el espacio de momentos y energía (la cual permite interpretar  $e^{ipx/\hbar}$  como la amplitud de que una partícula con momento  $p$  se encuentre en la posición  $x$ ):

$$\psi(x, t) = \int \frac{dp dE}{(2\pi\hbar)^2} e^{i(xp-Et)/\hbar} \tilde{\psi}(p, E)$$

Y la definición de la integral de caminos en el espacio de momentos y energía:

$$\tilde{\psi}(p, E) = \int dp' dE' \tilde{K}(p, E; p' E') \tilde{\psi}(p', E')$$

Así, para una partícula libre con momento definido:

$$\tilde{K}_0(p, E) = \int dT e^{-iET/\hbar} \int dX e^{ipX/\hbar} \sqrt{\frac{m}{2\pi i T}} \exp\left\{\frac{imX^2}{2T}\right\} \theta(T)$$

$\theta(T)$  es la función de Heaviside o función escalón, anteriormente introducida para hacer explícito que el resolvente es nulo por definición para  $t_b < t_a$ . La integral sobre la variable espacial es una gaussiana cuya solución es:

$$\tilde{K}_0(p, E) = \int dT \theta(T) e^{-i(-E+p^2/2m)T/\hbar} = \frac{1}{i - E + p^2/2m - i\varepsilon}$$

Donde se ha tenido en cuenta que la transformada de Fourier de la función escalón es:

$$F(k) = \mathcal{F}\{\theta(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{i} \frac{1}{k - i\varepsilon}$$

Finalmente:

$$K_0(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2 i} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{e^{ipX/\hbar - iET/\hbar}}{-E + p^2/2m - i\varepsilon}$$

## 1.9. Teoría de perturbaciones en integral de caminos

La teoría de perturbaciones parte de la expansion en serie:

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt V(x, t)\right\} = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt V(x, t) + \frac{i^2}{2!\hbar^2} \left[ \int_{t_a}^{t_b} dt V(x, t) \right]^2 - \dots$$

la cual permite a su vez expandir la integral de caminos:

$$K(b, a) = K_0(b, a) + K_1(b, a) + \dots$$

donde:

$$\begin{aligned} K_0 &= \int \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{m}{2} \dot{x}^2 \right\} \\ K_1 &= -\frac{i}{\hbar} \int \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt' \frac{m}{2} \dot{x}^2 \right\} \int_{t_a}^{t_b} dt V(x(t), t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$K_0$  es el kernel asociado a la partícula libre.

Una manipulación cuidadosa de los  $K_j$  revela el significado físico de cada término asociado a la expansión perturbativa. Partiendo de  $K_1$ , es posible intercambiar la integral en  $t$  con la integral sobre los posibles caminos  $x(t)$ .

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \int \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt' \frac{m}{2} \dot{x}^2 \right\} V(x(t), t)$$

Reescribiendo  $t_c = t$  por conveniencia, en el integrando  $V$  depende únicamente de la posición de la partícula en dicho instante  $x_c = x(t_c) = x(t)$ , por lo que para tiempos anteriores y posteriores la integral de caminos es la de una partícula libre. Extrayendo la integral sobre  $x_c$  se obtiene:

$$K_1(b, a) = -\frac{i}{\hbar} \int \int dx_c dt_c K_0(b, c) V(c) K_0(c, a)$$

Se puede interpretar entonces que la interacción de la partícula con el potencial  $V$  se produce a primer orden en teoría de perturbaciones a través de una única dispersión de la partícula libre, teniendo asociada una amplitud de dispersión por unidad de volumen y tiempo  $-iV/\hbar$ . De igual modo, de un análisis similar se observa que el término de segundo orden contribuye con dos dispersiones:

$$\begin{aligned} K_2(b, a) &= \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int dt_d \int dt_c \int dx_d \int dx_c K_0(b, d) V(d) K_0(d, c) V(c) K_0(c, a) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int dt_c \int dx_c K_1(b, c) V(c) K_0(c, a) \end{aligned}$$

En general, el  $n$ -ésimo término es de la forma:

$$K_n(b, a) = -\frac{i}{\hbar} \int dt_c \int dx_c K_{n-1}(b, c) V(c) K_0(c, a), \quad K(b, a) = \sum_n^{\infty} K_n(b, a)$$

Con esta interpretación la integral de caminos exacta es entonces la suma de todas las posibilidades: que la partícula no sea dispersada, que lo sea una vez, dos veces...

## 1.10. Reglas y diagramas de Feynman

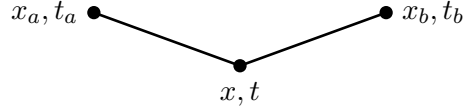
Basados en la interpretación física asociada a la teoría de perturbaciones, es posible asociar diagramas gráficos a cada uno de los términos junto con una serie de reglas que faciliten los cálculos a realizar, lo cual es de especial utilidad en teoría cuántica de campos. Estos son los diagramas y las reglas de Feynman, respectivamente, nombrados en honor a su inventor.

Partiendo de ahí, resulta intuitivo asociar al propagador  $K_0(x_b, t_b; x_a, t_a)$  una línea recta entre los puntos  $(x_a, t_a)$  y  $(x_b, t_b)$ :

$$x_a, t_a \bullet \text{---} \bullet x_b, t_b = K_0(x_a, t_a; x_b, t_b) \quad (1.10)$$

La ecuación (1.10) es la primera regla de Feynman en el espacio de coordenadas.

Adicionalmente, el propagador  $K_1$  implica que la partícula libre sea dispersada en un punto, por lo que se le asocia el siguiente diagrama:



Del mismo modo, el diagrama asociado a  $K_2$  tendrá 2 vértices y, en general, el diagrama asociado a  $K_n$  tendrá  $n$  vértices. Dado que cada punto de dispersión tiene una densidad de amplitud  $-iV/\hbar$  que debe ser integrada sobre todo el espacio tiempo, la segunda regla de Feynman en el espacio de coordenadas es:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ x, t \end{array} = \int dt \int dx \left[ -\frac{i}{\hbar} V(x, t) \right] \quad (1.11)$$

Reglas análogas, si bien no tan sencillas, son derivables también en el espacio de momentos. Si la transformada de Fourier del potencial es  $v(q, Q)$ :

$$V(x, t) = \int dq dQ \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (qx - Qt) \right\} v(q, Q)$$

Entonces, haciendo uso de (1.8), y teniendo en cuenta las integrales:

$$\int dx \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} (k - p - q)x \right\} = 2\pi\hbar \delta(k - p - q) \quad (1.12)$$

$$\int dt \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (F - E - Q)t \right\} = 2\pi\hbar \delta(F - E - Q) \quad (1.13)$$

La expresión de  $K_1(x_b, t_b; x_a, t_a)$  en términos de momento y energía es:

$$K_1(b, a) = \frac{i}{(2\pi\hbar)^4 \hbar} \int dp dE dq dQ \frac{\exp\left\{ \frac{i}{\hbar} ((p+q)x_b - (E+Q)t_b) \right\}}{-E + Q + (p+q^2)/2m - i\varepsilon} v(q, Q) \frac{\exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} (px_a - Et_a) \right\}}{-E + p^2/2m - i\varepsilon}$$

Las deltas de Dirac que resultan en las ecuaciones (1.12) y (1.13) hacen manifiesta la conservación de momento y energía: el momento y energía finales de la partícula tras la dispersión  $k$  y  $F$  son la suma de los valores incidentes  $p$  y  $E$  con los transmitidos por el potencial  $q$  y  $Q$ .

Los diagramas y reglas de Feynman correspondientes son entonces:

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ pE \end{array} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \frac{1}{-E + p^2/2m - i\varepsilon} = \tilde{K}_0(p, E)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ pE \end{array} = \int dE \int dp \left[ -\frac{i}{\hbar} v(p, E) \right] \quad (+ \text{ conservación del momento y la energía})$$

Posteriormente se introducirán de manera semejante las reglas y diagramas de Feynman en teoría cuántica de campos, donde resultan fundamentales.

## Capítulo 2

# La aproximación WKB en integral de caminos. El oscilador armónico.

### 2.1. La aproximación WKB en mecánica cuántica

Siguiendo en esta sección a Goldstein [17], se pretende dar una introducción al límite semiclásico de la mecánica cuántica.

En primer lugar, la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula en un potencial independiente del tiempo es:

$$\frac{1}{2m}|\nabla W|^2 + V = E \quad (2.1)$$

Donde  $W$  es la función característica de Hamilton, la cual se relaciona con la función principal de Hamilton  $S$  mediante:

$$S(x, p_a, t) = W(x, p_a) - Et \quad (2.2)$$

Si se consideran por tanto superficies de igual  $S$  en el espacio de fase, éstas coincidirán para un instante  $t$  con superficies de  $W - Et$  constante. Esto implica una propagación de las primeras, la cual viene dada por:

$$dS = dW - Edt = 0 \quad \implies \quad dW = Edt$$

Esto es, una superficie con un valor fijo  $S$  que coincida en un tiempo  $t$  con una de valor  $W$  se propagará un instante  $dt$  más tarde hacia una con valor  $W + dW$ , con  $dW = Edt$ . Además, el gradiente cuya dirección se corresponde con la de propagación es, por la teoría de Hamilton:

$$\nabla W = \mathbf{p}$$

Es decir, las superficies de  $S$  constante se propagan en la dirección en que lo hace la partícula, pero con una velocidad:

$$u = \frac{1}{|\nabla W|} \frac{dW}{dt} = \frac{E}{p}$$

Al lector familiarizado con el estudio de la óptica éste comportamiento fácilmente le recordará a la propagación de las superficies de igual fase de una onda (con vector de onda y frecuencia proporcionales a  $\mathbf{p}$  y  $E$ , respectivamente). De hecho, no podría ser de otra manera dado que la ecuación (2.1) es formalmente idéntica a la ecuación eikonal de la óptica geométrica:

$$(\nabla L)^2 = n^2$$

Correspondiéndose  $W$  con el camino óptico  $L$  y  $\sqrt{2m(E - V)}$  con el índice de refracción. Es esta igualdad formal la razón de que ambas teorías sean derivables de un principio de mínima acción (de Hamilton y de Fermat, respectivamente). Sin embargo, es un resultado conocido que la ecuación eikonal es una aproximación de la ecuación de onda en medios en los que el índice de refracción varía lentamente en distancias del orden de la longitud de onda, condición que permite ignorar los fenómenos ondulatorios y da paso a la óptica geométrica. Cabría entonces preguntarse si la ecuación de Hamilton-Jacobi es entonces una aproximación de otra ecuación de onda. Aunque todo lo aquí comentado ya era sabido por Hamilton en el siglo XIX, no fue hasta que Schrödinger publicó el desarrollo correspondiente en 1926 en su artículo *An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules* [1], conduciéndole a la ecuación que ahora lleva su nombre:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi$$

Tal y como hace Sakurai en [26], si partiendo de esta ecuación se reutiliza la letra  $S$  para nombrar a la fase de  $\psi$  como número complejo de modo que:

$$\psi = \psi_0(\mathbf{x}, t) e^{iS(\mathbf{x}, t)/\hbar} \quad (2.3)$$

Sustituyendo en la ecuación de Schrodinger se obtiene:

$$\psi_0 \left( \frac{1}{2m} |\nabla S|^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} \right) - i \left( \frac{1}{2m} \nabla \psi_0 \cdot \nabla S + \frac{1}{2m} \psi_0 \nabla^2 S + \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \right) \hbar - \frac{1}{2m} \nabla^2 \psi_0 \hbar^2 = 0$$

Tomando el orden cero en  $\hbar \rightarrow 0$ , se obtiene la conocida ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2m} |\nabla S|^2 + V = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.4)$$

Identificándose de nuevo  $S$  con la función principal de Hamilton. Dada su relación con la acción, no resulta sorprendente su aparición en fase de la función de onda (2.3) tras el estudio de la integral de caminos de Feynman.

## 2.2. La aproximación WKB en la teoría de Schrödinger

La ecuación de Schrodinger independiente del tiempo para un potencial  $V(x)$  puede escribirse, definiendo una nueva variable  $p(x)$ :

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{p^2(x)}{\hbar^2} \psi(x) = 0$$

Donde:

$$p(x) = \begin{cases} \sqrt{2m(E - V(x))} & E > V(x) \\ -i\sqrt{2m(V(x) - E)} & E < V(x) \end{cases}$$

Tal y como propone Griffiths en [33], propuesto el cambio de variable:

$$\psi(x) = e^{iW(x)/\hbar} \quad (2.5)$$

La anterior ecuación se reduce a otra en  $W(x)$ :

$$i\hbar \frac{d^2 W}{dx^2} - \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 + p^2(x) = 0 \quad (2.6)$$

Se pretende estudiar el límite clásico de la física cuántica, para lo cual se puede tratar de resolver (2.6) en series de potencias de  $\hbar$ . De este modo, la física clásica debería verse recuperada en el límite  $\hbar \rightarrow 0$ . Así:

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x)\hbar + W_2(x)\hbar^2 + \dots$$

Sustituyendo en la ecuación para  $W(x)$ , se obtiene una ecuación para cada orden:

$$\left(\frac{dW_0}{dx}\right)^2 = p^2, \quad i\frac{d^2W_0}{dx^2} = 2\frac{dW_0}{dx}\frac{dW_1}{dx}, \quad i\frac{d^2W_1}{dx^2} = 2\frac{dW_0}{dx}\frac{dW_2}{dx} + \left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2, \dots$$

La relación entre la ecuación de orden cero (régimen clásico) y la ecuación de Hamilton-Jacobi (2.4) es evidente. Ésta resulta también de considerar en (2.6) la aproximación:

$$\hbar \left| \frac{d^2W}{dx^2} \right| \ll \left| \frac{dW}{dx} \right|^2 \quad (2.7)$$

Cabe destacar que dada la forma de la ecuación (2.5), si  $V(x) = 0$  y la partícula tiene un momento definido, su función de onda correspondería a una onda plana con  $W(x) = px$ . Si se supone además un potencial que varíe lentamente en  $x$  en comparación con la longitud de onda de la partícula, cabe suponer que se cumplirá la anterior aproximación. Es la condición de validez del límite clásico. De hecho, la solución de orden cero es entonces:

$$\frac{dW_0(x)}{dx} = \pm p(x)$$

Por lo que la relación (2.7) se traduce en:

$$\left| \frac{dk(x)}{dx} \right| \ll |k^2(x)|$$

Donde  $k(x)$  se define como  $k = p/\hbar$ . En términos de la longitud de onda de de Broglie  $\lambda = 2\pi/k$  [26]:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m[E - V(x)]}} \ll \frac{4\pi[E - V(x)]}{|dV/dx|}$$

Con la solución de orden cero puede calcularse la de orden uno, y así sucesivamente. Esta es la aproximación WKB. La función de onda resultante a primer orden es [26]:

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \exp\left\{\pm i \int^x dx' k(x')\right\} \quad (2.8)$$

Cabe destacar que aplicación de evolución temporal a la anterior función de onda y las relaciones (2.2) y (2.3) permiten identificar la fase de (2.8) con la función característica de Hamilton.

### 2.3. El régimen semiclásico en integral de caminos

La conocida aproximación WKB en mecánica cuántica o, equivalentemente, la aproximación de límite semiclásico [26], se traduce en la integral de caminos a una aproximación de tipo fase estacionaria [9].

Heurísticamente cabría pensar que en la ecuación (1.4) la exponencial imaginaria oscilará suficientemente rápido en la mayor parte de las trayectorias dado que  $S \gg \hbar$ , proporcionando así una contribución nula a la integral, a excepción de aquellas trayectorias en las cuales la acción presente



un punto crítico. Ahora bien, para un sistema con acción  $S[x(t)]$  del cual se supone existe una trayectoria clásica, entonces el principio de mínima acción de Hamilton establece que  $S[x(t)]$  presenta un punto crítico en dicha trayectoria  $\bar{x}(t) \equiv x_{\text{clásica}}(t)$ . Así, se antoja conveniente introducir la variable  $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$  y realizar una expansión de  $S[x(t)]$  alrededor de  $\bar{x}(t)$ :

$$S[\bar{x}(t) + y(t)] = \int dt L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \int dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \bar{x}} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} \dot{y} \right] + \\ + \frac{1}{2!} \int dt \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \bar{x}^2} y^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\bar{x}} \partial \bar{x}} \dot{y} y + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\bar{x}}^2} \dot{y}^2 \right] + \dots \equiv \bar{S} + \delta \bar{S} + \frac{1}{2!} \delta^2 \bar{S} + \dots$$

El principio de Hamilton [17] no implica sino:  $\delta \bar{S} = 0$ , relación de la cual se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange. En trayectorias suficientemente cercanas a la clásica, la contribución mayoritaria a la integral de caminos será entonces la dada por el término de segundo orden en  $y$ :  $\delta^2 \bar{S}$ . Despreciando términos de orden superior, la integral a resolver es:

$$K(b, a) \approx e^{i\bar{S}/\hbar} \int \mathcal{D}y(t) e^{i\delta^2 \bar{S}/2\hbar} \quad (2.9)$$

Es importante destacar que, para lagrangianos con potenciales cuadráticos los términos de orden mayor que dos en la acción también son automáticamente nulos, volviéndose la aproximación WKB exacta y la ecuación (2.11) una igualdad. Un caso particular es el del oscilador armónico, cuya solución exacta se obtendrá en la siguiente sección mediante el uso del método a desarrollar. En general, la aproximación WKB es exacta para todo sistema cuya acción clásica sea de variación tercera funcional nula  $\delta^3 \bar{S}$ . Esto es, para acciones cuadráticas tanto en su dependencia con la posición como con la velocidad. Este punto es fundamental a la hora de extender el procedimiento al estudio de teorías cuánticas de campos, pues es la base de muchos cálculos dado que las mismas parten en el fondo de una generalización del oscilador armónico cuántico. Un ejemplo importante del uso de WKB en teoría cuántica de campos no perturbativa es el que hace Coleman en [10] para el cálculo de la corrección a la masa de un solitón al orden de un lazo.

Prosiguiendo con el desarrollo, para facilitar las próximas manipulaciones se renombran las funciones:

$$m = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\bar{x}}^2} \quad b(t) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\bar{x}} \partial \bar{x}} \quad k(t) = -\frac{\partial^2 L}{\partial \bar{x}^2}$$

Donde se asume  $m$  constante. Esto permite escribir:

$$\delta^2 \bar{S}/2! = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ \frac{m}{2} \dot{y}^2 + b(t) \dot{y} y - k(t) y^2 \right] = \int_{t_a}^{t_b} dt y \left[ -\frac{m}{2} \partial_t^2 - \frac{k(t) + \dot{b}(t)}{2} \right] y \equiv \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt y (-\partial_t^2 - \omega(t)) y \quad (2.10)$$

$$K(b, a) \approx e^{i\bar{S}/\hbar} \int \mathcal{D}y(t) e^{\frac{im}{2\hbar} \int dt y(t) (-\partial_t^2 - \omega(t)) y(t)} \quad (2.11)$$

La segunda igualdad en (2.10) se obtiene tras integrar por partes en los dos primeros sumandos del integrando inicial, recordando que  $y(t_a) = 0$ . Para mayor simplicidad se ha definido una nueva función  $\omega(t) = (k(t) + \dot{b}(t))/m$ . Se revela tras este resultado que la aproximación a segundo orden se puede escribir como una integral gaussiana, cuyo único inconveniente es que en lugar de contener una matriz simétrica definiendo una forma cuadrática, la exponencial contiene en su argumento un operador diferencial. Para una integral gaussiana cuyo argumento consta de una forma cuadrática definida por una matriz simétrica  $\mathbf{A}$  (el cálculo explícito se presentará más adelante en la sección

4.1.1 dedicada a integrales gaussianas):

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{\sum_{ij} \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(\mathbf{A})}} \quad (2.12)$$

Resultaría cuanto menos satisfactoria la posibilidad de resolver (2.11) en términos del determinante del operador diferencial  $-(\partial_t^2 + \omega(t))$ , definiendo el mismo como el producto de sus autovalores. Estos vendrían definidos por la ecuación y condiciones de contorno:

$$(-\partial_t^2 - \omega(t))y_n(t) = \lambda_n y_n(t), \quad y_n(t_a) = y_n(t_b) = 0$$

Para el caso de una partícula libre ( $\omega(t) = 0$ ), la solución es:

$$y_n(t) = \sin\left[\frac{n\pi(t-t_a)}{t_b-t_a}\right], \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(t_b-t_a)^2} \quad (2.13)$$

Por lo que:

$$\det -\partial_t^2 = \prod_n \frac{n^2\pi^2}{(t_b-t_a)^2} \quad (2.14)$$

Por otro lado, para una partícula libre la acción clásica viene dada por:

$$\bar{S} = \frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}$$

Definiendo formalmente una medida  $\hat{\mathcal{D}}x(t)$  sin normalizar:

$$\int \mathcal{D}x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A^N} \int \hat{\mathcal{D}}x(t) \implies \int \hat{\mathcal{D}}x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

Y resolviendo la integral gaussiana (2.11) de acuerdo a la fórmula (2.12) con el nuevo determinante definido:

$$K(b, a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A^N} \left( \det \frac{m}{2\pi i \hbar} (-\partial_t^2) \right)^{-1/2} e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}}$$

El determinante (2.14) es claramente divergente. Sin embargo, si el planteamiento seguido es correcto la constante de normalización  $A^N$  también infinita resuelve la indeterminación de modo que, comparando con el conocido resultado (1.9):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A^N} \left( \det \frac{m}{2\pi i \hbar} (-\partial_t^2) \right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}}$$

Tal y como desarrolla M. Blau en [35], a la hora de abordar casos con  $\omega(t) \neq 0$  uno debe ser cuidadoso con posibles problemas de convergencia, de modo que lo que en la práctica se hace es el cálculo de determinantes “normalizados” con respecto al de  $-\partial_t^2$ , de modo que la integral (2.11) tome la forma:

$$K(b, a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}} \left( \frac{\det -\partial_t^2}{\det -\partial_t^2 - \omega(t)} \right)^{1/2} e^{i\bar{S}/\hbar} \quad (2.15)$$

Un importante resultado desarrollado por I.M. Gel'fand y A.M. Yaglom [4] es la fórmula que lleva su nombre (fórmula de Gelfand-Yaglom):

$$\frac{\det -\partial_t^2 - \omega(t)^2}{\det -\partial_t^2} = \frac{F_\omega(t)}{t_b - t_a}$$

Siendo  $F_\omega(t)$  la solución a la ecuación del oscilador armónico dependiente del tiempo:

$$(\partial_t^2 + \omega(t)^2)F_\omega(t) = 0$$

Con condiciones iniciales:

$$F_\omega(t_a) = 0, \quad \dot{F}_\omega(t_b) = 1 \quad (2.16)$$

A este resultado puede llegarse de varias formas (presentes en la bibliografía [27, 35]). Una particularmente rápida y elegante, aunque ligeramente alejada del posible significado físico presente, es la dada por Coleman [8]. Ésta parte de que, dada una función  $F_{\omega,\lambda}$  definida por:

$$(-\partial_t^2 - \omega(t)^2)F_{\omega,\lambda} = \lambda F_{\omega,\lambda}$$

Y cumpliendo además las mismas condiciones iniciales que la anterior  $F_\omega(t) = F_{\omega,0}$  (2.16), entonces:

$$\frac{\det -\partial_t^2 - \omega(t)^2 - \lambda}{\det -\partial_t^2 - \lambda} = \frac{F_{\omega,\lambda}(t_b)}{F_{0,\lambda}(t_b)}$$

Para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ . En particular, para  $\lambda = 0$ . En efecto, el cociente de determinantes como función compleja de  $\lambda$  es una función meromorfa con ceros simples en cada valor propio de  $-\partial_t^2 - \omega(t)^2$ , y un polo simple en cada valor propio de  $-\partial_t^2$ . Asimismo, la función  $F_{\omega,\lambda}$  es autofunción de  $-\partial_t^2 - \omega(t)^2$  cuando  $\lambda$  toma sus valores propios. En ese caso, cumple las condiciones de Dirichlet y se anula para  $t = t_b$ . Además, ambas funciones tienden a 1 cuando  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , por lo que se concluye que deben ser las mismas.

Otro resultado aun más sorprendente resulta tras el estudio de la teoría del cálculo de variaciones, con la que es posible establecer la relación [16, 27]:

$$-\frac{m}{F_\omega(t)} = \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x_b \partial x_a}$$

Y escribir entonces el elegante resultado:

$$K(b, a) = \sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x_b \partial x_a}} e^{i\bar{S}/\hbar}$$

Éste fue primeramente demostrado por Morette-DeWitt [3]. Su forma generalizada a  $n$  dimensiones es:

$$K(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \sqrt{\det \left( \frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial \mathbf{x}_b \partial \mathbf{x}_a} \right)} e^{i\bar{S}/\hbar}$$

Holstein y Swift demostraron en [9] la equivalencia formal entre el método aquí presentado con la aproximación WKB mostrado en la sección anterior en el marco de la formulación de Schrödinger. Finalmente cabe destacar que, dada la estrecha relación formal antes comentada entre la mecánica cuántica y la óptica ondulatoria, es posible plantear una formulación de la última fundamentada igualmente en la integral de caminos, siendo ésta en este caso el resolvente de la ecuación de onda. En tal caso, la aproximación de fase estacionaria daría el paso a la óptica geométrica, la cual resulta una buena aproximación cuando la longitud de onda es grande en comparación a la variación del índice de refracción y el camino con mayor contribución será aquel que cumpla el principio de Fermat. Esto es, el que minimice el camino óptico. Tal formalismo ha sido desarrollado y aplicado por varios autores [6, 14, 30].

## 2.4. El oscilador armónico

El oscilador armónico es uno de los potenciales más importantes en física cuántica no sólo por ser de los pocos que presentan una solución analítica a la ecuación de Schrödinger, si no por su gran aplicación dado que todo sistema en régimen de pequeña perturbación entorno a puntos estables es localmente un oscilador armónico. Además, la cuantización de campos bosónicos como es el electromagnético se hace tras identificar sus ecuaciones con las de un oscilador armónico (forzado en presencia de fuentes). Existen varios métodos para su solución, siendo los más comunes la resolución directa de la ecuación diferencial (1.1) y el método algebraico que hace uso de los operadores de Bose [7, 26]. Sin embargo, la integral de caminos no se queda atrás, presentándose en esta sección una solución que hace uso de tal método.

El lagrangiano de una partícula en un oscilador armónico y la ecuación de movimiento que se deduce de él vienen dados por:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad \xrightarrow{\text{Euler-Lagrange}} \quad \ddot{x} - \omega^2\bar{x} = 0$$

Para facilitar cálculos posteriores es posible mover el origen de tiempos de modo que  $t_a \rightarrow 0$  y  $t_b \rightarrow T = t_b - t_a$ , debido a que el potencial es independiente del tiempo y sólo depende en las ecuaciones de la diferencia temporal con respecto al origen tomado. La solución de la ecuación anterior, para las condiciones iniciales tomadas, es:

$$\bar{x}(t) = x_a \cos(\omega t) + \frac{x_b - x_a \cos(\omega T)}{\sin(\omega T)} \sin(\omega t) \quad (2.17)$$

Por otra parte, la acción clásica es la integral del lagrangiano sobre  $\bar{x}$ :

$$\bar{S} = \frac{m}{2} \int dt (\dot{\bar{x}}^2 - \omega^2 \bar{x}^2) = \frac{m}{2} \left[ \dot{\bar{x}}\bar{x} \Big|_a^b - \int dt (\ddot{\bar{x}}\bar{x} - \omega^2 \bar{x}^2) \right] = \frac{m}{2} \dot{\bar{x}}\bar{x} \Big|_a^b \quad (2.18)$$

Derivando (2.17) y sustituyendo en (2.18), se obtiene la acción clásica para el oscilador armónico:

$$\bar{S} = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [(x_b^2 + x_a^2) \cos(\omega T) - 2x_b x_a]$$

Calculada la acción clásica, únicamente resta calcular el determinante  $\det -\partial_t^2 - \omega(t)^2$ . En este caso:

$$b(t) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\bar{x}} \partial \bar{x}} = 0 \quad k(t) = -\frac{\partial^2 L}{\partial \bar{x}^2} = m\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega(t) = \omega$$

Si  $\lambda_n$  es un autovalor de  $-\partial_t^2$ ,  $\lambda_n - \omega^2$  lo es de  $-\partial_t^2 - \omega^2$  con la misma función propia (2.13), resultando:

$$\frac{\det -\partial_t^2 - \omega^2}{\det -\partial_t^2} = \prod_n \left( \frac{n^2 \pi^2}{T^2} - \omega^2 \right) / \frac{n^2 \pi^2}{T^2} = \prod_n \left( 1 - \frac{T^2 \omega^2}{n^2 \pi^2} \right) = \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

Sustituyendo todo lo anterior en la ecuación (2.15):

$$K(b, a) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega T)}} \exp \left\{ \frac{i m \omega}{2 \hbar \sin(\omega T)} [(x_b^2 + x_a^2) \cos(\omega T) - 2x_b x_a] \right\} \quad (2.19)$$

Resulta ilustrativo comprobar que se llegaría al mismo resultado a partir de la derivada segunda de la acción clásica, dado que:

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial x_b \partial x_a} = -\frac{m\omega}{\sin(\omega T)}$$

## Capítulo 3

# Integral de Caminos y Física Estadística

En este capítulo se explora el uso de integrales de caminos en el contexto de la mecánica estadística. En particular, dentro del formalismo canónico, cuya ecuación de gobierno es formalmente equivalente a la ecuación de Schrödinger. Se estudiará además que esta equivalencia permite además hacer de la integral de caminos de Feynman un marco capaz de unificar mecánica cuántica y física estadística en un único formalismo, a través de la variable continua y el uso de continuaciones analíticas.

### 3.1. Breve resumen de mecánica estadística cuántica

La mecánica estadística cuántica se basa en el formalismo de la matriz densidad, desarrollado inicialmente por J. von Neumann. Ésta describe una colectividad de sistemas físicos, encontrándose cada fracción del mismo  $c_i$  (con  $\sum_i c_i = 1$ ) en un estado  $|\phi_i\rangle$  [7, 26]:

$$\rho = \sum_i c_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$$

En el espacio de coordenadas:

$$\rho(x, x') = \langle x' | \rho | x \rangle = \sum_i c_i \phi_i(x') \phi_i^*(x)$$

De este modo, siendo  $\{|u_i\rangle\}$  una base completa del espacio de Hilbert, el valor medio de un operador  $A$  que se observará, promediado cuántica y estadísticamente, será:

$$\langle A \rangle = \sum_i c_i \langle \phi_i | A | \phi_i \rangle = \sum_i c_i \sum_{jk} \langle \phi_i | u_j \rangle \langle u_j | A | u_k \rangle \langle u_k | \phi_i \rangle = \sum_{jk} \langle u_k | \rho | u_j \rangle \langle u_j | A | u_k \rangle = \text{Tr}(\rho A) \quad (3.1)$$

Además, los elementos de matriz de  $\rho$  son:

$$\rho_{nn} = \langle u_n | \rho | u_n \rangle = \sum_i c_i |\langle \phi_i | u_n \rangle|^2, \quad \rho_{nm} = \langle u_n | \rho | u_m \rangle = \sum_i c_i \langle u_n | \phi_i \rangle \langle \phi_i | u_m \rangle$$

Esto es, los elementos de matriz diagonales representan las poblaciones del sistema o probabilidades de ocupación de cada uno de los estados, mientras que los no diagonales representan las coherencias o correlaciones.

Tal y como se puede consultar en los textos de mecánica estadística [31, 32], una colectividad canónica está definida por el número de partículas  $N$ , volumen del sistema  $V$  y temperatura  $T$  (por contacto con un sistema mayor con el que intercambia energía ejerciendo de baño térmico). La probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado con energía  $E_n$  es proporcional a  $e^{-\beta E_n}$ , con  $\beta = 1/k_B T$  y  $k_B$  la constante de Boltzmann. La constante de proporcionalidad es el inverso de la función de partición  $Q_N(\beta) = \sum_n e^{-\beta E_n}$ , de modo que, si  $|\phi_i\rangle$  son los estados propios del hamiltoniano  $H$ :

$$\rho = \sum_n \frac{e^{-\beta E_n}}{Q_N(\beta)} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr}(e^{-\beta H})} \quad (3.2)$$

La ecuación (3.1) permite obtener magnitudes mecánicas. Sin embargo, para la obtención de magnitudes termodinámicas basta con conocer la función de partición, a través de las relaciones [15]:

$$U = -\frac{\partial \ln Q_N}{\partial \beta} \quad S = k \left( \ln Q_N - \beta \frac{\partial \ln Q_N}{\partial \beta} \right) \quad P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Q_N}{\partial V} \quad \mu = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Q_N}{\partial N}$$

Donde  $U$  es la energía interna,  $S$  la entropía,  $P$  la presión y  $\mu$  el potencial químico.

### 3.2. La integral de caminos en mecánica estadística

El operador de evolución temporal ofrece una expresión fundamental para el resolvente de la ecuación de Schrödinger. Para un hamiltoniano  $H$  independiente del tiempo con estados propios  $|\phi_n\rangle$ , y para un tiempo inicial  $t = 0$ :

$$K(x, t; x', 0) = \langle x | \mathcal{U}(t) | x' \rangle = \langle x | e^{-iHt} | x' \rangle = \sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(x') e^{-iE_n t / \hbar}, \quad t > 0 \quad (3.3)$$

El parecido con la matriz densidad en el formalismo de una colectividad canónica es evidente. De hecho, tomando el cambio de variable:  $t = -i\hbar\beta$ , se recupera la matriz densidad sin normalizar [23]:

$$K(x, x', \beta) = \sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(x') e^{-\beta E_n}$$

Esta nueva integral de caminos pasaría a ser el resolvente de la ecuación [32]:

$$HK(\beta) = -\frac{\partial K}{\partial \beta}$$

Tal y como lo hace el numerador de (3.2). A pesar de haber tomado un “tiempo imaginario”, el papel de  $i$  en los postulados de Feynman no desempeña otro que el de una constante, siendo por ello aun válidos los desarrollos matemáticos que los acompañan. En particular, su cálculo como suma de amplitudes sobre las posibles trayectorias. Sin embargo, el argumento de la exponencial que las pondera pasa a ser, renombrando la variable muda de integración  $it \rightarrow t = \beta\hbar$ ,  $idt \rightarrow dt$ :

$$\frac{i}{\hbar} S[x(t)] = -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} dt \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \right] = -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\beta\hbar} dt H \equiv -\frac{1}{\hbar} S_E[x(t)]$$

Donde se define la acción euclídea  $S_E$ . Resulta así la nueva integral de caminos:

$$K(x, x', \beta) = \int \mathcal{D}x(t) e^{-S_E[x(t)]/\hbar}$$

Con esto, tanto la matriz densidad como la función de partición canónica se pueden escribir en términos de integrales funcionales:

$$Q_N(\beta) = \int dx K(x, x, \beta) \quad \rho(x, x') = \frac{K(x, x', \beta)}{\int dx'' K(x'', x'', \beta)}$$

Aplicación directa de lo expuesto sería la obtención, por integrales de caminos, de la matriz densidad canónica para un oscilador armónico. Tomando en (2.19) el cambio de variable adecuado:

$$\rho(x, x') = \frac{1}{Q_N} \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sinh(\beta\hbar\omega)}} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar \sinh(\beta\hbar\omega)} [(x^2 + x'^2) \cosh(\beta\hbar\omega) - 2xx']\right\}$$

Y normalizando la expresión anterior (resulta una integral gaussiana):

$$Q_N(\beta) = \frac{1}{2} \sinh^{-1}(\beta\hbar\omega/2)$$

### 3.3. Rotación de Wick y continuación analítica. Fórmula de Feynman-Kac.

El cambio de variable empleado en la anterior sección para pasar de un tiempo real a uno imaginario es la llamada rotación de Wick. Tal y como comenta Polyakov en [11], este procedimiento puede generalizarse mediante el uso de continuaciones analíticas estudiadas en el contexto de la variable compleja para la solución de muchos problemas relativos al cálculo de la integral de caminos, por ejemplo, a través de la toma de contornos en el plano complejo para la variable temporal  $t$ . Es así como puede establecerse la equivalencia, estudiada en el apartado anterior, entre el sistema formado por una partícula cuántica y una colectividad canónica o, tal y como podría plantearse, entre una teoría cuántica de campos y una colectividad grancanónica o macrocanónica<sup>1</sup>.

La continuación analítica puede emplearse así, con mucho ingenio, para el estudio del espectro y los estados propios de un hamiltoniano. Una primera relación de interés para el estudio del espectro de un sistema cuántico surge de escribir la transformada de Laplace del propagador tal y como se expresa en la ecuación (3.3):

$$\tilde{K}(x, x', z) = \int_0^\infty dt e^{izt/\hbar} K(x, x', t) = \sum_n \int_0^\infty dt e^{-i(zt/\hbar + E_n)} \phi_n(x) \phi_n^*(x') = i\hbar \sum_n \frac{\phi_n(x) \phi_n^*(x')}{z - E_n}$$

Se observa que la función resultante presenta polos simples en las energías de los estados ligados, siendo los residuos las funciones de onda de los mismos. La rotación de Wick proporciona, de hecho, un método para el cálculo de la energía del estado fundamental de un espectro. Tomando el límite  $\beta \rightarrow \infty$  en la función de partición se obtiene [27]:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int dx K(x, x, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_n e^{-\beta E_n} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-\beta E_0}$$

Lo cual lleva a la ecuación de Feynman-Kac, que permite el cálculo de energías de estados fundamentales conociendo el comportamiento asintótico de la integral de caminos euclídea:

$$E_0 = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \log \int dx K(x, x, \beta)$$

---

<sup>1</sup>De hecho, un campo sin autointeracción puede ser definido con todo rigor como una colectividad grancanónica de partículas idénticas. Esta definición da paso de forma directa a la interpretación física que se deduce de la segunda cuantización.

En teoría de campos cuánticos, esta fórmula permite obtener la energía cuántica del vacío y la fuerza de Casimir haciendo cálculos de mecánica estadística. En particular, resulta de especial utilidad la regularización por funciones zeta generalizadas (véase el método de Bordag [21]).

Una relación que permite el estudio del resto del espectro se puede obtener, tal y como desarrolla Zinn-Justin en [19], a partir de la transformada de Laplace de la función de partición:

$$G(E) = \int_0^\infty d\beta e^{\beta E} Q_N(\beta) = \sum_l \int_0^\infty d\beta e^{\beta(E-E_l)} = \sum_l \frac{1}{E_l - E}$$

La cual puede ser extendida analíticamente a todo el plano complejo. Si a continuación se introduce:

$$L(E) = \int^E G(E') dE' = - \sum_{\ell=0} \ln(E_\ell - E)$$

Donde se toma la rama principal del logaritmo. Esto es, con su discontinuidad en el semieje real negativo. Entonces se calcula:

$$\Delta L(E_k) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} L(E_k + i\varepsilon) - L(E_k - i\varepsilon) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \sum_{\ell=0} [\ln(E_\ell - E_k + i\varepsilon) - \ln(E_\ell - E_k - i\varepsilon)]$$

Suponiendo  $E_0 < E_1 < E_2 < \dots$ , las singularidades con  $0 \leq l < k$  contribuirán con el salto del logaritmo  $2\pi i$ , mientras que la singularidad con  $l = k$  contribuirá con:

$$\ln(E_k - E + i\varepsilon) - \ln(E_k - E - i\varepsilon)|_{E=E_k} = \ln(i\varepsilon) - \ln(-i\varepsilon) = i\pi$$

Finalmente se obtiene la relación:

$$\Delta L(E_k) = k + \frac{1}{2} \tag{3.4}$$

En la aproximación semiclásica la evaluación explícita de  $\Delta L(E)$  se reduce a la famosa condición de cuantización de Bohr-Sommerfeld:

$$\int dq \sqrt{2m[E - V(q)]} = \hbar\pi \left( k + \frac{1}{2} \right)$$



## Capítulo 4

# Integral de Caminos en Teoría Cuántica de Campos

### 4.1. Preludio matemático: integrales gaussianas

Debido a su importancia en la teoría cuántica, muchos autores comienzan sus textos introduciendo la teoría relativa a las integrales gaussianas y sus generalizaciones. Un desarrollo muy cercano al aquí expuesto puede encontrarse en los textos de Zinn-Justin [19, 37].

#### 4.1.1. Integral Gaussiana Generalizada

La integral gaussiana en  $\mathbb{R}$  es de solución popularmente conocida y se puede resolver por varios métodos, a pesar de carecer el integrando de primitiva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2+Jx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{J^2/2a} \quad (4.1)$$

Por otro lado, dada una matriz real simétrica  $n \times n$   $\mathbf{A}$  y el vector  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^n$ , se define la siguiente integral gaussiana generalizada:

$$Z'(\mathbf{A}, \mathbf{J}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{\sum_{ij} \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \sum_i J_i x_i}$$

Donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{J}$  definen una forma cuadrática en el exponente. Las matrices simétricas son diagonalizables (con autovalores reales) y, en particular, existe una matriz ortogonal  $\mathbf{O}$  tal que  $\mathbf{O}\mathbf{D}\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{A}$ , donde  $\mathbf{D}$  es diagonal. Sustituyendo en la anterior integral y tomando el cambio de variable  $\mathbf{y} = \mathbf{O}^{-1}\mathbf{x}$ , dado que el determinante de una matriz ortogonal es de módulo unidad:

$$Z'(\mathbf{A}, \mathbf{J}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n y e^{\sum_{ij} \frac{1}{2} y_i D_{ij} y_j + \sum_{ij} J_i O_{ij} y_j} = \int_{\mathbb{R}^n} d^n y e^{\sum_i \frac{1}{2} D_{ii} y_i^2 + \sum_{ij} J_i O_{ij} y_j} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(\mathbf{A})}} e^{\frac{1}{2} \mathbf{J}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J}} \quad (4.2)$$

La última igualdad sigue como aplicación directa de (4.1) y de la identidad  $\mathbf{J}^T \mathbf{O}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{O} \mathbf{J} = \mathbf{J}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J}$ . Una variación de esta integral con exponencial imaginaria es:

$$Z(\mathbf{A}, \mathbf{J}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{\sum_{jk} \frac{i}{2} x_j A_{jk} x_k + \sum_j i J_j x_j} = \sqrt{\frac{(2\pi i)^n}{\det(\mathbf{A})}} e^{-\frac{i}{2} \mathbf{J}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{J}} \quad (4.3)$$

### 4.1.2. Valores esperados y contracción de Wick

Dada una distribución de probabilidad  $\Omega(\mathbf{x})$  con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , se define el valor esperado de una función  $f(\mathbf{x})$  como:

$$\langle f \rangle = \int d^n x \Omega(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})$$

Estando la distribución normalizada de modo que  $\langle 1 \rangle = 1$ .

Por otro lado, denominando  $Z(\mathbf{J})$  a la transformada de Fourier de  $\Omega(\mathbf{x})$ :

$$Z(\mathbf{J}) = \int d^n x \Omega(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{x} = J_1 x_1 + \dots + J_n x_n$$

Se observa que la expansión de  $Z$  en serie de potencias de  $J$  tiene por coeficientes valores esperados:

$$Z(\mathbf{J}) = \sum_m \frac{1}{m!} \sum_{k_1, \dots, k_m} J_{k_1} J_{k_2} \dots J_{k_m} \langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_m} \rangle$$

Esto es,  $Z(\mathbf{J})$  es la función generatriz de los valores esperados de las funciones monomiales. Dichos valores esperados son a su vez calculados a partir de  $Z(\mathbf{J})$  mediante la fórmula:

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle = \left[ \frac{\partial}{\partial J_{k_1}} \frac{\partial}{\partial J_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial J_{k_\ell}} Z(\mathbf{J}) \right] \Big|_{\mathbf{J}=0}$$

Para una distribución gaussiana normalizada  $\Omega(\mathbf{x}) = \sqrt{\det(\mathbf{A})/(2\pi i)^n} \exp\{\sum_{j,k} \frac{i}{2} x_j A_{jk} x_k\}$ , el anterior resultado se traduce en:

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_\ell} \rangle = \sqrt{\frac{(2\pi i)^n}{\det(\mathbf{A})}} \left[ \frac{\partial}{\partial J_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial J_{k_\ell}} Z(\mathbf{A}, \mathbf{J}) \right] \Big|_{\mathbf{J}=0} = \frac{\partial}{\partial J_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial J_{k_\ell}} \exp \left\{ \sum_{i,j} \frac{1}{2} J_i A_{ij}^{-1} J_j \right\} \Big|_{\mathbf{J}=0}$$

Cada vez que se deriva la exponencial se obtiene un factor  $J$  multiplicativo. Este factor debera ser derivado de nuevo para no anularse al evaluar finalmente  $J = 0$ . Por cálculo directo se obtiene el teorema de Wick:

$$\langle x_{k_1} \dots x_{k_\ell} \rangle = \sum_{\substack{\text{toda posible pareja} \\ P \text{ de } \{k_1 \dots k_\ell\}}} A_{k_{P_1} k_{P_2}}^{-1} \dots A_{k_{P_{\ell-1}} k_{P_\ell}}^{-1} = \sum_{\substack{\text{toda posible pareja} \\ P \text{ de } \{k_1 \dots k_\ell\}}} \langle x_{k_{P_1}} x_{k_{P_2}} \rangle \dots \langle x_{k_{P_{\ell-1}}} x_{k_{P_\ell}} \rangle \quad (4.4)$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \langle x_{k_1} x_{k_2} \rangle &= A_{k_1 k_2}^{-1} \\ \langle x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} x_{k_4} \rangle &= A_{k_1 k_2}^{-1} A_{k_3 k_4}^{-1} + A_{k_1 k_3}^{-1} A_{k_2 k_4}^{-1} + A_{k_1 k_4}^{-1} A_{k_3 k_2}^{-1} \end{aligned}$$

La generalización funcional de las integrales anteriores es inmediata y de enorme aplicación en teoría cuántica de campos.

## 4.2. Introducción. El propagador libre.

Las teorías cuánticas de campos empezaron a aparecer a partir de que Dirac consiguiera explicar la absorción y emisión de fotones en átomos utilizando una teoría en la que el campo electromagnético había sido cuantizado [2]. Tal cuantización permitía entender el campo electromagnético como un conjunto infinito de osciladores armónicos cuyas excitaciones eran entendidas como partículas, los

fotones. El éxito de esta teoría promovió la búsqueda de una descripción del resto de partículas elementales en términos de campos que permitieran igualmente su creación y aniquilación, lo cual permitiría además casar (heurísticamente al menos) el principio de incertidumbre de Heisenberg asociado a la energía  $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$  con la famosa ecuación de Enstein  $E = mc^2$  (donde hay energía hay masa).

Los campos se definen entonces como funciones escalares o tensoriales dependientes de la posición y el tiempo  $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{\nu_1, \dots, \nu_m}(x)$ , donde  $x = (\mathbf{x}, t)$ . Ejemplos de campos asociados a partículas ya eran considerados en mecánica cuántica no relativista como son las funciones de onda. De su cuantización resulta, de manera análoga a como le sucede al campo electromagnético, una teoría de muchas partículas.

La cuantización en cuestión puede llevarse a cabo igualmente a través de integrales de caminos. Siguiendo el desarrollo de Zee [25] y Veltman [5], se considera inicialmente el caso de una partícula libre relativista sin espín ni carga, el cual es solución de la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\partial^2 - m^2)\phi(x) \equiv (\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi(x) = 0$$

Donde, siguiendo el convenio de Einstein, la repetición de índices implica sumación sobre los mismos. Nótese que en este caso  $x$  no es una magnitud física medible, sino una etiqueta en el espacio-tiempo. Es por ello que el papel que ejercía anteriormente el lagrangiano  $L$  con el tiempo como parámetro lo ejerce ahora la densidad lagrangiana del campo  $\mathcal{L}(x)$ . La ecuación de Klein-Gordon se deduce, mediante de las ecuaciones de Euler-Lagrange, de la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_0(x) = -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \equiv -(\partial\phi)^2 - m^2 \phi^2$$

Lo cual conduce automáticamente a la integral de caminos (comunmente denotada por  $Z$  en teoría de campos):

$$Z = \langle F|I \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{i/\hbar \int dx \frac{1}{2} [-(\partial\phi)^2 - m^2 \phi^2]}$$

Como estados inicial  $|I\rangle$  y final  $|F\rangle$  se suelen tomar ambos el estado fundamental o de vacío  $|0\rangle$  en tiempos  $t_I \rightarrow -\infty$  y  $t_F \rightarrow \infty$ . Este es el estado en que el campo tiene la mínima energía, utilizada como referencia. Cabe destacar, tal y como muestra Ryder [13], que cualquier estado es proyectado sobre el vacío bajo evolución temporal tras aplicar una rotación de Wick (tomar el cambio de variable  $it = \tau$ ):

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-H\tau/\hbar} |\phi\rangle = \sum_n \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-E_n \tau/\hbar} |n\rangle \langle n|\phi\rangle = |0\rangle$$

Donde  $\{|n\rangle\}$  son los autoestados del hamiltoniano. El anterior resultado es debido a que  $|0\rangle$  es el estado de menor energía y por tanto, aquel cuyo coeficiente se ve menos amortiguado. Así pues, cambiando a tiempos imaginarios en el cálculo de  $Z$  siempre se obtendrá una amplitud de vacío a vacío. El mismo resultado se obtendría si, en su lugar, se añadiera un factor  $i\varepsilon\phi^2$  a la lagrangiana. Este término además permite asegurar la convergencia de la integral.

Las perturbaciones al vacío cuántico se realizan a través de un campo  $J(x)$  que puede actuar como fuente o como sumidero de partículas, y que se introduce en la lagrangiana como:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + J(x)\phi(x)$$

La integral de caminos se considera entonces un funcional de la fuente  $J$ :

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi e^{i/\hbar \int dx [-\frac{1}{2}((\partial\phi)^2 - m^2 \phi^2) + J\phi]} = \int \mathcal{D}\phi e^{i/\hbar \int dx [-\frac{1}{2}\phi(\partial^2 - m^2)\phi + J\phi]}$$

Donde la segunda igualdad se obtiene tras integrar por partes y considerar que los campos decaen suficientemente rápido como para anularse en el infinito. Análogamente a las integrales Gaussianas generalizadas (4.3), el resultado de la integral es:

$$Z(J) = Z(0)e^{-\frac{i}{2} \int dx \int dy J(x)D(x-y)J(y)} \quad (4.5)$$

Donde  $D(x-y)$  es el operador inverso del operador diferencial  $-(\partial^2 - m^2)$ , conocido como propagador libre. Si se incluye además el factor de convergencia  $i\varepsilon\phi^2$  a la lagrangiana,  $D$  debe cumplir:

$$-(\partial^2 - m^2 + i\varepsilon)D(x-y) = \delta(x-y)$$

Trabajando en el espacio de Fourier, se obtiene la siguiente expresión para  $D(x-y)$ :

$$D(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi\hbar)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

En la ecuación (4.5) se observa que las amplitudes asociadas al campo y la asociada a la fuente se encuentran desacopladas. Éste facilita tomar amplitudes de probabilidad normalizadas con respecto a  $Z(0)$ , esto es, que no suceda nada. Si además se expande dicha ecuación en potencias de  $J$ , es posible introducir (tal y como hace Veltman [5]) unas primeras reglas de Feynman, de manera análoga a como se introdujeron para la teoría perturbativa de la mecánica cuántica no relativista.

$$\begin{aligned} \frac{Z(J)}{Z(0)} &= 1 - \frac{i}{2} \int dx dy J(x)D(x-y)J(y) + \\ &+ \frac{i^2}{2^2 2!} \int dx_1 dx_2 \int dy_1 dy_2 J(x_2)D(x_2 - y_2)J(y_2)J(x_1)D(x_1 - y_1)J(y_1) + \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aunque el significado físico aparece tras la cuantización de los campos resulta más claro con la cuantización canónica, la notación aquí empleada sugiere interpretar  $J(x)D(x-y)J(y)$  como (proporcional a) la amplitud de que una partícula sea creada o producida por una corriente externa  $J$  en un punto del espacio tiempo  $x$  y se propague hasta otro punto  $y$  donde es aniquilada o absorbida por  $J(y)$ .

Por otro lado, en el espacio de momentos:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \int dx dy J(x)D(x-y)J(y) &= \frac{1}{2i(2\pi)^4} \int dx dy dk dq_x dq_y J(x) \frac{e^{ik(x-y)+iq_x x + iq_y y}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} J(y) \\ &= \frac{i^2(2\pi)^8}{2i(2\pi)^4} \int dq J(q)^* \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} J(q) \end{aligned}$$

La segunda igualdad sucede tras integrar sobre  $x$  e  $y$ , obteniéndose  $(2\pi)^4\delta(q_x + k)$  y  $(2\pi)^4\delta(q_y - k)$ , y posteriormente sobre  $q_x$  y  $q_y \equiv q$ . Se introducen entonces las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \text{-----} &= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \frac{1}{q^2 + m^2 + i\varepsilon} \\ &\quad q \\ \\ J \bullet \text{-----} &= (2\pi)^4 i J(p) \\ &\quad p \\ \\ \text{-----} \bullet J &= (2\pi)^4 i J(p)^* \\ &\quad p \end{aligned}$$

Se sobreentiende además la conservación del 4-momento, obtenida gracias a las funciones  $\delta$  de Dirac. El espacio de momentos resulta de mayor interes porque la gran mayoría de experimentos que se realizan en física de partículas son de *scattering*, por lo que partículas son incididas y detectadas con momentos definidos. Con las reglas anteriores, en el espacio de momentos:

$$\frac{Z(J)}{Z(0)} = 1 + J \bullet \text{---} \bullet J^* + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \dots$$

### 4.3. Teoría perturbativa. El modelo $\lambda\phi^4$ .

El modelo presentado en la sección anterior es completamente resoluble debido a la simplicidad de la integral de caminos a resolver (gaussiana). Sin embargo, resulta bastante limitado ya que no incluye interacción entre partículas. En términos del lagrangiano, esto se consigue añadiendo un término de interacción  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} + J\phi$$

La forma más sencilla de interacción que se puede introducir en una teoría es la autointeracción. Un modelo muy destacable en la teoría clásica por la cantidad de información que se puede obtener de él de forma analítica es el que incorpora un potencial  $U(\phi) = -\mathcal{L}_{\text{int}} = \lambda\phi^4/4!$ , resultando la integral de caminos:

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi e^{i/\hbar \int dx [-\frac{1}{2}\phi(\partial^2 - m^2)\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi]}$$

Una solución cerrada de la integral no es esta vez posible, siendo necesario recurrir a una expansión perturbativa. En primer lugar cabe expandir la anterior integral en  $J$ :

$$Z(J, \lambda) = Z(0, 0) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^s}{\hbar^s s!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_s J(x_1) J(x_2) \dots J(x_s) G^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_s) \quad (4.7)$$

Donde  $G^{(s)}$  son las funciones de Green de  $s$  puntos:

$$G^{(s)}(x_1, x_2, \dots, x_s) = \frac{1}{Z(0, 0)} \int \mathcal{D}\phi e^{i/\hbar \int dx [-\frac{1}{2}\phi(\partial^2 - m^2)\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4]} \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_s) = \langle 0 | \phi(x_1)\dots\phi(x_s) | 0 \rangle$$

Expandiendo a continuación en potencias de  $\lambda$ :

$$G^{(s)} = \frac{1}{Z(0, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^n \int dy_1 dy_2 \dots dy_n \int \mathcal{D}\phi e^{i/\hbar \int dx [-\frac{1}{2}\phi(\partial^2 - m^2)\phi]} \phi(x_1)\dots\phi(x_s)\phi(y_1)^4 \dots\phi(y_n)^4$$

Cada una de las integrales en  $\phi$  tiene también su análogo gaussiano, siendo su solución de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z(0, 0)} \int \mathcal{D}\phi e^{i/\hbar \int dx [-\frac{1}{2}\phi(\partial^2 - m^2)\phi]} \phi(x_i)\phi(x_j)\phi(x_k)\phi(x_l) = \\ = D(x_i - x_j)D(x_k - x_l) + D(x_i - x_k)D(x_j - x_l) + D(x_i - x_l)D(x_j - x_k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Esto es, se suman las posibles combinaciones de  $\{x_i, x_j, x_k, x_l\}$  en parejas sin repetición, comúnmente llamadas en este contexto permutaciones de Wick. Esta es la generalización funcional del teorema de Wick (4.4). Nótese que aplicando este resultado en (4.7) para  $\lambda = 0$  se recupera la ecuación (4.6). Manteniendo el significado de  $D(x - y)$  como propagador de una partícula libre, el ejemplo anterior (4.8) mostraría las posibles propagaciones que podrían darse entre cuatro puntos por dos partículas que no interactúan entre ellas.

Por otro lado, el término  $G^{(2)}$  con orden uno en lambda  $n = 1$  será:

$$G^{(2)}(n = 1) = -i\lambda \int dy (D(x_2 - x_1)D(y - y)^2 + D(x_2 - y)D(y - y)D(y - x_1)) \quad (4.9)$$

Esto es, se observa interacción, así como creación y destrucción de partículas. Nótese que el factor  $4!$  elimina las posibles repeticiones obtenidas en las permutaciones de Wick. A la anterior expresión se le puede asociar entonces los siguientes diagramas:

$$G^{(2)}(\lambda = 1) = \begin{array}{c} x_1 \text{-----} x_2 \\ \text{O} \quad \text{O} \\ \text{y} \end{array} + x_1 \text{-----} \begin{array}{c} \text{O} \\ \text{y} \end{array} \text{-----} x_2$$

Se observa entonces que a un término de (4.7) orden  $s$  en  $J$  y de orden  $n$  en  $\lambda$  le corresponden, debido a las permutaciones de Wick, todos los diagramas posibles con  $s$  vértices externos (partículas entrantes y salientes),  $n$  vértices internos (puntos de interacción) y  $(4n + s)/2$  líneas. Así, el término con  $s = 4$ ,  $n = 1$  asociado a la producción de dos partículas tras la colisión de dos incidentes será:

$$-i\lambda \int dy D(x_4 - y)D(x_3 - y)D(y - x_2)D(y - x_1) = \begin{array}{c} x_2 \text{-----} x_4 \\ \text{O} \\ x_1 \text{-----} x_3 \\ \text{y} \end{array} \quad (4.10)$$

En el espacio de momentos cada propagador toma la forma mostrada en (4.2):

$$D(x_j - y) = \int \frac{dy}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_j(x_j - y)}}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Integrando en la variable  $y$  para el anterior ejemplo se obtiene, de nuevo, la conservación del momento:

$$\int dy e^{i(k_4 + k_3 - k_2 - k_1)y} = (2\pi)^4 \delta(k_4 + k_3 - k_2 - k_1)$$

Finalmente, las reglas de Feynman en el espacio de momentos para el cálculo de amplitudes de probabilidad se resumen en las siguientes [25]:

1. Dibujar el diagrama del proceso.
2. Cada línea es etiquetada con un momento  $k_i$  y contribuye con una amplitud  $i/(k_i^2 - m^2 + i\epsilon)$ .
3. Cada vértice interno contribuye con  $-i\lambda$  y conservación del momento o, equivalentemente, con  $(2\pi)^4 \delta(\sum_{\text{out}} k - \sum_{\text{in}} k)$ .
4. Cada línea interna debe integrarse con peso  $\int dk/(2\pi)^4$ . Esto corresponde a la suma sobre todas las posibilidades.
5. Añadir un factor numérico dividiendo igual al número de simetrías que presenta el diagrama, correspondiendo a las repeticiones encontradas en las permutaciones de Wick.

Así, la amplitud correspondiente al proceso de *scattering* de dos partículas a primer orden (una sola interacción) es, de acuerdo a las reglas anteriores:

$$\mathcal{M} = -i\lambda \prod_{j=1}^4 \frac{1}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad k_1 + k_2 = k_3 + k_4$$

## Capítulo 5

# Espín y fermiones en integral de caminos

### 5.1. Variables no conmutativas. Álgebra de Grassmann.

Una introducción del tratamiento de fermiones en teorías cuánticas de campos, y en particular, en aquellas formuladas partiendo de la integral de caminos, se puede encontrar en muchos textos. En este caso se siguen principalmente la dada por Coleman en sus *lectures* [34], así como a Faddeev y Slavnov en [12].

A la hora de tratar partículas o sistemas bosónicos, las variables clásicas que los describen conmutan y sus operadores cuánticos asociados tienen impuestas reglas de conmutación. Tal y como se propone al partir de la cuantización canónica (véase [24]), estas reglas de conmutación pasan a imponerse sobre la anticonmutación para sistemas fermiónicos. Su tratamiento en integral de caminos requiere consecuentemente de la introducción de números no conmutativos como son las variables de Grassmann. Con este fin, se introducen las variables anticonmutativas:

$$\eta, \eta^*, \xi, \xi^*$$

Tales que, por definición:

$$\{\eta, \xi\} = \eta\xi + \xi\eta = 0, \quad \{\eta^*, \xi\} = \eta^*\xi + \xi\eta^* = 0, \dots$$

En particular, anticonmutan consigo mismas:

$$\eta^2 = \eta^{*2} = \xi^2 = \xi^{*2} = 0$$

Eso implica que cualquier posible expansión análoga a la de Taylor de una función de variables de Grassmann tendrá a lo sumo primeras potencias de las mismas. En particular, se define la exponencial como:

$$e^\eta = 1 + \eta + \frac{1}{2!}\eta^2 + \frac{1}{3!}\eta^3 + \dots = 1 + \eta$$

En general, para una función de dos variables  $f(\eta, \eta^*)$ :

$$f(\eta, \eta^*) = a + b\eta + c\eta^* + d\eta\eta^* \tag{5.1}$$

La integración con respecto a variables anticonmutativas debe construirse, para lo cual se imponen las propiedades de linealidad:

$$\begin{aligned}\int d\eta [\alpha F_1(\eta) + \beta F_2(\eta)] &= \alpha \int d\eta F_1(\eta) + \beta \int d\eta F_2(\eta) \\ \int d\eta d\eta^* [\alpha F_1(\eta, \eta^*) + \beta F_2(\eta, \eta^*)] &= \alpha \int d\eta d\eta^* F_1(\eta, \eta^*) + \beta \int d\eta d\eta^* F_2(\eta, \eta^*)\end{aligned}$$

Invariancia traslacional:

$$\int d\eta F(\eta) = \int d\eta F(\eta + \xi)$$

Y normalización:

$$\int d\eta d\eta^* e^{\eta^* \eta} = 1$$

Las anteriores propiedades permiten calcular la integral sobre cualquier función obteniéndose las integrales sobre cualquiera de los términos de (5.1). En primer lugar:

$$\int d\eta f(\eta) = \int d\eta (a + b\eta) = \int d\eta f(\eta + \xi) = \int d\eta (a + b\eta + b\xi) \xrightarrow{\text{Linealidad}} \int d\eta = 0$$

Utilizando la normalización:

$$1 = \int d\eta d\eta^* e^{\eta^* \eta} = \int d\eta d\eta^* (1 + \eta^* \eta) = \int d\eta d\eta^* = \eta^* \eta = \left[ \int d\eta \right] \left[ \int d\eta^* \eta^* \right]$$

Tomando el valor positivo para la integral se obtiene, finalmente:

$$\int d\eta = 1, \quad \int d\eta^* \eta^* = 1, \quad \int d\eta = 0, \quad \int d\eta^* = 0$$

Alternativamente, estas cuatro integrales podrían haberse impuesto como definición para construir la integración. Las dos últimas implican que la integral de una diferencial total es, en este caso, nula. Se observa además que la integración sobre variables de Grassmann es la misma operación que la diferenciación. En el contexto de la integral de caminos, resulta de mayor interés el cálculo de la integral gaussiana:

$$\int d\eta d\eta^* e^{a\eta^* \eta} = \int d\eta d\eta^* (1 + a\eta^* \eta) = a$$

Para  $a$  un número conmutativo. Contrastando con el resultado de su versión conmutativa, la variable  $a$  se encuentra en el numerador. De este modo, el análogo no conmutativo de la integral gaussiana en varias variables es:

$$\int d^n \eta d^n \eta^* e^{\sum_{ij} \eta_i^* A_{ij} \eta_j} = \det \mathbf{A}$$

Donde  $\mathbf{A}$  es una matriz compleja con determinante no nulo. El resultado así obtenido es el inverso del que aportaría la misma integral en términos de variables conmutativas  $z, z^*$ :

$$\int d^n z d^n z^* e^{\sum_{ij} z_i^* A_{ij} z_j} = \frac{(2\pi i)^n}{\det \mathbf{A}}$$

Donde el coeficiente  $(2\pi i)^n$  aparece por la diferente normalización de las integrales. Esta diferencia en los resultados introducirá en el cálculo perturbativo un factor  $(-1)^L$ , donde  $L$  es el número de



líneas fermiónicas cerradas (a introducir en la siguiente sección). Para el caso fermiónico, resultará útil el estudio de la integral gaussiana generalizada:

$$Z(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^*) = \int d^n \xi d^n \xi^* \exp \left\{ \sum_{i,j=1} A_{ij} \xi_i^* \xi_j + \sum_{i=1} (\eta_i^* \xi_i + \xi_i^* \eta_i) \right\} = \det \mathbf{A} \exp \left\{ - \sum_{i,j=1} \eta_i^* A_{ij}^{-1} \eta_j \right\}$$

Donde todas las variables son Grassmann y el cálculo es análogo al caso conmutativo. No obstante, los valores esperados son ahora de la forma:

$$\langle \xi_{i_1}^* \xi_{j_1} \xi_{i_2}^* \xi_{j_2} \cdots \xi_{i_n}^* \xi_{j_n} \rangle = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \int d^n \xi d^n \xi^* \xi_{i_1}^* \xi_{j_1} \cdots \xi_{i_n}^* \xi_{j_n} \exp \left( \sum_{i,j=1} \xi_i^* A_{ij} \xi_j \right)$$

O, equivalentemente:

$$\begin{aligned} \langle \xi_{i_1}^* \xi_{j_1} \xi_{i_2}^* \xi_{j_2} \cdots \xi_{i_n}^* \xi_{j_n} \rangle &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta_{j_1}^*} \frac{\partial}{\partial \eta_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \eta_{j_n}^*} \frac{\partial}{\partial \eta_{i_n}} Z(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^*) \right] \Big|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*=0} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta_{j_1}^*} \frac{\partial}{\partial \eta_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \eta_{j_n}^*} \frac{\partial}{\partial \eta_{i_n}} \exp \left[ - \sum_{i,j=1} \eta_j^* A_{ji}^{-1} \eta_i \right] \right\} \Big|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^*=0} \end{aligned}$$

Derivando se obtiene el teorema de Wick para álgebras de Grassmann:

$$\langle \xi_{i_1}^* \xi_{j_1} \cdots \xi_{i_n}^* \xi_{j_n} \rangle = \det A_{j_l i_k}^{-1} = \det \langle \xi_{i_k}^* \xi_{j_l} \rangle = \sum_{\substack{\text{permutaciones } P \\ \text{de } \{j_1, \dots, j_n\}}} \text{signo}(P) A_{j_{P_1} i_1}^{-1} A_{j_{P_2} i_2}^{-1} \cdots A_{j_{P_n} i_n}^{-1}$$

## 5.2. Fermiones en teoría cuántica

En la naturaleza se encuentra una conexión entre la estadística que cumple cada tipo de partículas y su espín, siendo todas las partículas de Fermi encontradas de espín semientero, mientras que las partículas cumpliendo estadística de Bose son de espín entero. Esto introduce la necesidad de utilizar campos vectoriales (eespínores) en las teorías de campos. Así, los campos relativistas asociados a partículas de espín 1/2 cumplen la ecuación de Dirac:

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) \equiv (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

Donde  $\gamma^\mu$  son las matrices gamma 4x4 cumpliendo  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0$ , y  $\psi(x)$  es un eespínor de Dirac. Esto es, un campo de cuatro componentes, correspondiendo a los eespines  $s_z = \pm 1/2$  de una partícula y su correspondiente antipartícula. La ecuación de Dirac se deduce de la densidad lagrangiana [24]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$$

Teniendo esto en cuenta, resulta automático proponer la integral de caminos asociada. En este caso habrá fuentes eespínores (Grassmann) tanto de partículas como de antipartículas  $\bar{\eta}, \eta$  [25]:

$$Z(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4x [\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]}$$

La metodología aplicada para el caso escalar es inmediatamente aplicable al caso fermiónico, repitiéndose los cálculos perturbativos tras expandir en funciones de Green (en este caso en series de

las fuentes  $\bar{\eta}$  y  $\eta$ ). Las funciones de Green de esta teoría se escribirán en términos del propagador de Dirac  $S(x)$ , verificando:

$$(i\not{\partial} - m)S(x) = \delta^{(4)}(x) \implies iS(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ipx}}{\not{p} - m + i\varepsilon} \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ipx}(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

A partir del cual se pueden escribir también diagramas de Feynman y reglas de cálculo asociadas. Asimismo, se pueden proponer teorías que involucren partículas bosónicas y fermiónicas interactuantes. Un ejemplo sería partir de la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}[(\partial\phi)^2 - \mu^2\phi^2] - \lambda\phi^4 + f\phi\bar{\psi}\psi$$

La cual involucra un campo fermiónico  $\psi$  con partículas de masa  $m$  en interacción con el anteriormente estudiado campo escalar de masa  $\mu$  y autointeracción  $\lambda\phi^4$ . Ambos interaccionarían, mediante el último término, con una constante de acoplamiento  $f$ . La integral de caminos sería:

$$Z(\eta, \bar{\eta}, J) = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\varphi e^{iA(\psi, \bar{\psi}, \varphi) + i \int d^4x (J\varphi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}$$

Y las funciones de Green se obtendrían expandiendo en potencias de  $J, \bar{\eta}$  y  $\eta$ . Para esta teoría, las reglas de Feynman que se obtendrían repitiendo el procedimiento seguido en la teoría  $\lambda\phi^4/4!$  son:

1. Convencionalmente se representa una línea fermiónica con una línea continua con una flecha en la dirección de avance si corresponde a una partícula, o en dirección contraria si corresponde a una antipartícula. Los bosones escalares en esta teoría se representarían con una línea discontinua. Todas ellas se etiquetan con su momento.
2. A cada línea fermiónica se le asocia el propagador:

$$\frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

3. A cada vértice correspondiente a la interacción entre partículas fermiónicas y escalares se le asocia  $if\delta(\sum_{\text{in}} p - \sum_{\text{out}} p)$  (conservación del momento)
4. Las líneas interiores se integran sobre todos los momentos posibles  $\int dp/(2\pi)^4$ .
5. Al igual que sucede en la electrodinámica cuántica tratada desde la cuantización canónica (y aunque la justificación de esta regla se escape del objetivo del presente trabajo), para obtener amplitudes de procesos se deben amputar las líneas externas para sustituirlas por los siguientes factores [24]:

- a) Para cada fermión inicial:  $u_r(\mathbf{p})$
- b) Para cada fermión final:  $\bar{u}_r(\mathbf{p})$
- c) Para cada antifermión inicial:  $\bar{v}_r(\mathbf{p})$
- d) Para cada antifermión final:  $v_r(\mathbf{p})$

Donde  $u(\mathbf{p})$  y  $v(\mathbf{p})$  son espinores de Dirac constantes satisfaciendo:

$$(\not{p} - mc)u_r(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + mc)v_r(\mathbf{p}) = 0, \quad r = 1, 2$$

Denotando  $r$  el estado de espín.

6. Debido al uso de variables Grassmann y la consecuente variación del teorema de Wick, se debe asociar un factor  $(-1)$  a cada línea fermiónica cerrada, y el índice del espín correspondiente debe estar contraído tomándose así la traza de cada línea fermiónica cerrada.

# Capítulo 6

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo de recopilación bibliográfica se ha realizado una introducción completa y autocontenida a la formulación de Feynman de la mecánica cuántica y de las teorías cuánticas de campos. Para ello ha sido necesaria tanto la discusión de aspectos conceptuales que permitieran el entendimiento y la familiarización con el formalismo, como la introducción de metodologías y técnicas con carácter más matemático para su aplicación y puesta en práctica.

El análisis conceptual no se ha restringido a la introducción axiomática de la integral de caminos y la descripción de sus propiedades, sino que se ha seleccionado cuidadosamente un conjunto de temas a tratar que maximicen la comprensión del formalismo asumidos conocidos los conocimientos impartidos en el grado de física. Por ello, se han revisitado cuestiones clave de la mecánica cuántica aportando una nueva perspectiva desde la formulación de la integral de caminos, y se ha invertido mucho esfuerzo en reobtener, por medio de la nueva formulación, resultados conocidos de diferentes áreas de la física estudiadas en el grado, con el fin de adquirir una más profunda comprensión de las mismas. Así, se ha puesto especial énfasis en el gran abanico de campos en el que la integral de caminos contribuye no solo como herramienta calculística, sino con aporte teórico y estableciendo valiosas conexiones entre los distintos formalismos en que se desarrolla. En este contexto, destaca la integral de caminos como generalización del principio de mínima acción de la mecánica clásica y su paralelismo en la relación entre óptica ondulatoria y geométrica, o la posibilidad estudiada de unificar la mecánica cuántica con la física estadística en un único marco formal dado por la integral de caminos y el uso de la continuación analítica tomada del análisis en variable compleja. Se ha visto además que la extensión a la teoría cuántica de campos es metodológicamente inmediata, si bien el significado físico fácilmente interpretable de la cuantización canónica se encuentra aquí más oscurecido.

Metodológicamente se han presentado además numerosas técnicas novedosas para la resolución de problemas: la discretización del espacio tiempo se ha utilizado para la construcción de la integral de caminos y para su cálculo explícito en el caso de la partícula libre, así como para la deducción de la ecuación de Schrödinger y otras propiedades; el análisis funcional se ha presentado en el tratamiento de la aproximación WKB generalizando el principio de fase estacionaria (donde además se ha introducido el cálculo de determinantes de operadores diferenciales), pero a lo largo del estudio de las teorías cuánticas de campos es donde se ha visto su máxima utilidad al permitir generalizar resultados propios del estudio de las integrales gaussianas: funciones de Green, valores esperados, teorema de Wick, etc. Incluyendo también variables no conmutativas o de Grassmann y una breve introducción a su álgebra y cálculo, se ha podido llegar a la deducción de reglas de Feynman para el cálculo de amplitudes de probabilidad mediante diagramas de Feynman de procesos en teoría perturbativa, los cuales son fundamentales en teoría cuántica de campos y física de partículas.

En cuanto a las limitaciones de la integral de caminos es preciso destacar que, si bien su formalismo

es especialmente potente en el estudio de problemas de *scattering*, resulta muy difícil su uso para el tratamiento de problemas con estados ligados. Igualmente, la formulación de Feynman tiene enormes dificultades para el estudio de sistemas cuánticos definidos en dominios con borde ya que, así como ciertas condiciones de contorno clásicas pueden ser implementadas, hay toda una colección de condiciones de contorno puramente cuánticas que no emergen de imponer condiciones sobre trayectorias clásicas en la integral de caminos, tal y como estudian M. Asorey, J. Clemente-Gallardo y J.M. Muñoz-Castañeda en [20, 28], y como se está estudiando en la investigación en curso asociada a la beca de colaboración del Ministerio de Educación y Formación Profesional de la que he sido beneficiario.

# Bibliografía

- <sup>1</sup>E. Schrödinger, “An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules”, [Phys. Rev. \*\*28\*\*, 1049-1070 \(1926\)](#).
- <sup>2</sup>P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the emission and absorption of radiation”, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character **114**, 243-265 (1927).
- <sup>3</sup>C. Morette, “On the Definition and Approximation of Feynman’s Path Integrals”, [Phys. Rev. \*\*81\*\*, 848-852 \(1951\)](#).
- <sup>4</sup>I. M. Gel’fand y A. M. Yaglom, “Integration in Functional Spaces and its Applications in Quantum Physics”, [Journal of Mathematical Physics \*\*1\*\*, 48-69 \(1960\)](#).
- <sup>5</sup>M. Veltman, *Path Integrals, Feynman Rules, Gauge Theories*, Lectures given at the International School of Elementary Particle Physics. Basko-Polje, sep. de 1974.
- <sup>6</sup>M. Eve, “The Use of Path Integrals in Guided Wave Theory”, [Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences \*\*347\*\*, 405-417 \(1976\)](#).
- <sup>7</sup>C. Cohen-Tannoudji, B. Claude Cohen-Tannoudji, P. Davies, B. Dui, D. Betts, B. Diu, F. Laloe, S. Hemley, N. Ostrowsky, D. Ostrowsky y col., *Quantum Mechanics, Volume 1*, A Wiley-interscience publication (Wiley, 1977).
- <sup>8</sup>S. Coleman, “The Uses of Instantons”, en *The Whys of Subnuclear Physics*, ed. por A. Zichichi (Springer US, Boston, MA, 1979), págs. 805-941.
- <sup>9</sup>B. R. Holstein y A. R. Swift, “Path integrals and the WKB approximation”, [American Journal of Physics \*\*50\*\*, 829-832 \(1982\)](#).
- <sup>10</sup>S. Coleman, *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures* (Cambridge University Press, 1985).
- <sup>11</sup>A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, 1.<sup>a</sup> ed., vol. 3 (Routledge, 1987).
- <sup>12</sup>A. A. Slavnov y L. Faddeev, “Introduction to quantum theory of gauge fields”, Moscow (1988).
- <sup>13</sup>L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2.<sup>a</sup> ed. (Cambridge University Press, 1996).
- <sup>14</sup>A. V. Gitin, “Using continuous Feynman integrals in the mathematical apparatus of geometrical and wave optics. A complex approach”, *Journal of Optical Technology* **64**, 729-735 (1997).
- <sup>15</sup>H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics* (American Association of Physics Teachers, 1998).
- <sup>16</sup>H. Kleinert y A. Chervyakov, “Functional determinants from Wronski Green function”, [Journal of Mathematical Physics \*\*40\*\*, 6044-6051 \(1999\)](#).
- <sup>17</sup>H. Goldstein, C. Poole y J. Safko, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, 2002).

- <sup>18</sup>P. A. M. Dirac, “The Lagrangian in Quantum Mechanics”, en *Feynman’s Thesis - A New Approach to Quantum Theory. Edited by BROWN LAURIE M. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd* (2005), págs. 111-119.
- <sup>19</sup>J. Zinn-Justin, C. de Physique Theorique Jean Zinn-Justin y O. U. Press, *Path Integrals in Quantum Mechanics*, Oxford graduate texts in mathematics (Oxford University Press, 2005).
- <sup>20</sup>M. Asorey, J. Clemente-Gallardo y J. M. Muñoz-Castañeda, “Boundary conditions: The path integral approach”, *Journal of Physics: Conference Series* **87**, 012004 (2007).
- <sup>21</sup>M. Bordag, G. Klimchitskaya, V. Mostepanenko, U. Mohideen y V. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect*, International Series of Monographs on Physics (OUP Oxford, 2009).
- <sup>22</sup>H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, EBL-Schweitzer (World Scientific, 2009).
- <sup>23</sup>R. Feynman, A. Hibbs y D. Styer, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Dover Books on Physics (Dover Publications, 2010).
- <sup>24</sup>F. Mandl y G. Shaw, *Quantum Field Theory*, A Wiley-Interscience publication (Wiley, 2010).
- <sup>25</sup>A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, second edition (Princeton University Press, 2010).
- <sup>26</sup>J. Sakurai y J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, 2011).
- <sup>27</sup>L. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, Dover Books on Physics (Dover Publications, 2012).
- <sup>28</sup>M. Asorey y J. Muñoz-Castañeda, “Attractive and repulsive Casimir vacuum energy with general boundary conditions”, *Nuclear Physics B* **874**, 852-876 (2013).
- <sup>29</sup>R. Feynman, “The Feynman Lectures on Physics Vol.II Chap.15: The Vector Potential”, (2013).
- <sup>30</sup>A. V. Gitin, “The Feynman path integral and its optical applications”, *Optik* **125**, 3249-3262 (2014).
- <sup>31</sup>R. K. Pathria, *Statistical mechanics* (Elsevier, 2016).
- <sup>32</sup>R. P. Feynman, *Statistical mechanics: a set of lectures* (CRC press, 2018).
- <sup>33</sup>D. J. Griffiths y D. F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*, 3.<sup>a</sup> ed. (Cambridge University Press, 2018).
- <sup>34</sup>D. Kaiser, D. Derbes, Y. Ting, B. Chen, R. Sohn, D. Griffiths y B. Hill, *Lectures Of Sidney Coleman On Quantum Field Theory: Foreword By David Kaiser* (World Scientific Publishing Company, 2018).
- <sup>35</sup>M. Blau, *Notes on (Semi-)Advanced Quantum Mechanics: The Path Integral Approach to Quantum Mechanics*, Albert Einstein Center for Fundamental Physics. Institut für Theoretische Physik. Universität Bern, Switzerland, dic. de 2020.
- <sup>36</sup>N. D. H. Dass, “Dirac and the Path Integral”, arXiv: History and Philosophy of Physics (2020).
- <sup>37</sup>J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena: Fifth Edition*, International series of monographs on physics (Oxford University Press, 2021).