



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

**Osciladores Caóticos**

*Autor: Víctor Rodríguez Gil*

*Tutores: José María Muñoz Muñoz , Oscar Alejos Ducal*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Estudio de los sistemas dinámicos</b>	<b>7</b>
1.1. Estabilidad de sistemas dinámicos . . . . .	7
1.1.1. Primeros conceptos y definiciones . . . . .	7
1.1.2. Estabilidad de las soluciones . . . . .	10
1.1.3. Método directo de Liapunov . . . . .	11
1.2. Sistemas lineales y linealización de sistemas no lineales . . . . .	12
1.2.1. Sistemas lineales . . . . .	12
1.2.2. Sistemas no lineales: Linealización . . . . .	14
1.3. Introducción a la Teoría de Bifurcaciones . . . . .	15
1.4. Rutas hacia el caos: Método de Shilnikov . . . . .	18
<b>2. Descripción del oscilador caótico de Chua</b>	<b>20</b>
2.1. Topología del circuito Chua . . . . .	20
2.2. Descripción matemática del circuito Chua . . . . .	22
2.3. Caos en el circuito Chua . . . . .	24
<b>3. Circuito Chua: resultados experimentales</b>	<b>26</b>
3.1. Construcción del circuito . . . . .	26
3.1.1. Elemento no lineal $N_R$ . . . . .	26
3.1.2. Circuito completo . . . . .	28
3.2. Estudio cualitativo del circuito al variar un parámetro . . . . .	30
3.2.1. Predicciones teóricas . . . . .	30
3.2.2. Resultados experimentales . . . . .	32
3.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales . . . . .	38
<b>Conclusiones</b>	<b>40</b>



# Introducción

Desde sus inicios, la humanidad siempre ha tratado de explicar el mundo que le rodea e intentar predecir fenómenos naturales complejos, en particular, aquellos que se repiten en el tiempo como pueden ser las estaciones, los eclipses, etc. Los procesos periódicos son algo común en la naturaleza, estos aparecen en todas las ramas de la ciencia, desde las más fundamentales como son la física, química o biología hasta la economía o sociología. Para entender, describir y predecir este tipo de procesos, las matemáticas son el método más efectivo y confiable que se conoce.

Uno de los fenómenos que más ha fascinado a los científicos durante miles de años, es la mecánica celeste. A mediados del siglo XVII, Isaac Newton descubrió la Ley de la Gravitación Universal, quedando así resuelto el problema de dos cuerpos atraídos mutuamente por la gravedad, sin embargo, el problema se complicaba notablemente cuando se tenían tres cuerpos. Muchas de las mentes más brillantes de los siglos posteriores se dedicaron a tratar de resolver este tipo de problemas.

A finales del siglo XIX, Henry Poincaré introduce con sus trabajos un nuevo punto de vista, la dinámica caótica, sin embargo, el auge de esta rama de la ciencia no se produjo hasta la segunda mitad del siglo XX. En la década de los 60, el matemático y meteorólogo Edward Norton Lorenz, estudiando un modelo simplificado de convección atmosférica descubrió un atractor extraño en el sistema dinámico regido por las ecuaciones del modelo. E.N Lorenz fue pionero en el desarrollo de la teoría del caos y fue quien introdujo el famoso concepto del Efecto Mariposa. A partir de entonces, la dinámica caótica fue cada vez más estudiada, en parte gracias a las nuevas tecnologías que permitían simular numéricamente el comportamiento de este tipo de sistemas que abundan en la naturaleza.

La teoría del caos es una rama de la física y de las matemáticas que estudia los fenómenos emergentes que se dan en algunos sistemas dinámicos no lineales. La principal característica de los sistemas caóticos es su sensibilidad a las condiciones iniciales, dadas dos condiciones iniciales arbitrariamente próximas entre sí, las trayectorias que se generan a partir de las mismas divergirán hasta que no exista ningún tipo de correlación entre ellas. En teoría, los sistemas caóticos son sistemas perfectamente deterministas, de modo que conocidas las condiciones iniciales su evolución podrá ser predicha con exactitud. Sin embargo, en la práctica es imposible determinar con total precisión el estado inicial del sistema, por pequeño que sea siempre existirá un cierto error que desencadena en la imposibilidad de predecir la evolución de los sistemas caóticos.

Debido a la complejidad de los sistemas no lineales estos han llegado a tener connotaciones negativas, los dispositivos y sistemas se diseñan en general para que trabajen en la zona lineal, donde es más fácil de estudiar su comportamiento. Sin embargo, la no linealidad y teoría del caos, además del interés de la propia teoría en sí misma, tienen aplicaciones importantes en multitud de campos como pueden ser la dinámica de poblaciones, neurociencia e ingeniería biomédica, turbulencia en fluidos, criptografía, electrónica, control de epidemias o análisis económico entre otros.

En este trabajo vamos a estudiar en qué consiste la teoría de sistemas dinámicos regidos por ecuaciones diferenciales, que modelan gran cantidad de fenómenos naturales. Veremos cómo es el comportamiento de las soluciones de estos sistemas y su estabilidad bajo pequeños cambios. En particular, nos centraremos en los sistemas dinámicos que pueden exhibir un comportamiento

caótico.

Es usual la creencia de que objetos como los atractores extraños son abstracciones teóricas que se observan en simulaciones pero que, difícilmente se encuentran en sistemas reales y que, de hacerlo, sería en sistemas muy grandes y complejos. El objetivo de la segunda parte del trabajo es precisamente mostrar cómo podemos construir un sistema físico sencillo que muestra caos: el circuito Chua, que es un oscilador caótico. Explicaremos teóricamente por qué este circuito es caótico y construiremos el circuito para comprobar experimentalmente que las predicciones teóricas y resultados numéricos concuerdan cualitativamente con el comportamiento real.

# Capítulo 1

## Estudio de los sistemas dinámicos

La teoría de sistemas dinámicos es un campo de estudio muy extenso y aún en desarrollo. En este primer capítulo pretendemos mostrar los principales resultados de la misma, haciendo especial hincapié en los que vamos a necesitar para el resto de trabajo.

Matemáticamente la evolución de los sistemas dinámicos se describe mediante ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias para sistemas continuos o discretos respectivamente. En este trabajo nos vamos a centrar principalmente en los sistemas dinámicos continuos, en los que modelamos fenómenos mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Una vez hemos diseñado el sistema, lo que pretendemos es extraer información útil acerca del proceso que modela. En la mayoría de los casos, debido a la complejidad matemática del sistema dinámico, se aborda el problema desde un enfoque geométrico más cualitativo, tratando de comprender el comportamiento global de las soluciones sin tener que hallar su expresión explícita. Es en esto último en lo que nos vamos a centrar en esta sección, vamos a proporcionar distintos métodos que nos permitan evaluar el comportamiento y estabilidad de las soluciones de un sistema dinámico sin tener que resolverlo.

### 1.1. Estabilidad de sistemas dinámicos

#### 1.1.1. Primeros conceptos y definiciones

Como ya hemos comentado, distinguimos entre sistemas dinámicos discretos y continuos. Los primeros se describen mediante ecuaciones en diferencias, y en ellos las variables toman valores en instantes de tiempo separados (aunque equidistantes). Para el caso de una sola variable, la expresión más genérica de este tipo de sistemas viene dada por:

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{1.1.1}$$

Donde la función  $f$  es conocida y el tiempo toma valores discretos:  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Necesitaremos también una condición inicial o semilla que de cuenta del estado del que parte el sistema. Estos sistemas son útiles en muchos campos y tienen la ventaja de que se pueden resolver numéricamente con relativa facilidad. Los sistemas dinámicos continuos presentan un comportamiento más complejo y son en los que nos vamos a centrar en este trabajo, los definiremos a continuación:

Un sistema dinámico continuo genérico se puede describir por un sistema  $n$ -dimensional de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{\vec{x}} = f(t, \vec{x}) \tag{1.1.2}$$

Con  $\vec{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$  y  $f : (\mathbb{R}^+ \times X) \rightarrow X$  de clase  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). En adelante, en lo que resta de trabajo emplearemos la notación  $\vec{x} = x$ . Las soluciones del sistema (1.1.2) serán funciones  $\phi(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  que dependerán de la condición inicial  $\phi(t_0) = x_0$  y que denotaremos por  $\phi(t, x^0)$ .

Para definir los conceptos básicos, vamos a restringirnos a sistemas independientes del tiempo, es decir, sistemas autónomos. Para estos sistemas, la ecuación (1.1.2) se reduce a:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1.3)$$

Con  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Nuevamente denominamos  $\phi(t, x^0)$  a la solución del sistema (1.1.3) con la condición inicial  $\phi(t_0, x^0) = x^0$ .

### Órbita:

Consideremos una solución del sistema (1.1.3). Se define la órbita o trayectoria de la solución como el conjunto de puntos  $\phi(t, x^0) \forall t$ .

### Punto de equilibrio:

Dado el sistema dinámico (1.1.3), los puntos de equilibrio del mismo,  $x_{q,j}$ , son aquellos caracterizados por  $f(x_{q,j}) = 0$ .

Para consolidar este concepto, vamos a considerar un ejemplo físico sencillo: el péndulo simple amortiguado. Es bien sabido que su ecuación de movimiento es la siguiente:

$$ml\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mg \sin \theta = 0 \quad (1.1.4)$$

Donde  $m$  es la masa,  $l$  la longitud del péndulo,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $b > 0$  el coeficiente de amortiguamiento y  $\theta$  el ángulo del péndulo respecto a la vertical. Introducimos las variables  $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$  obteniendo así el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{b}{ml} x_2 \end{pmatrix} \quad (1.1.5)$$

Resolviendo la ecuación  $f(x_{q,j}) = 0$  obtenemos que los puntos  $(0, 0)$  y  $(0, \pi)$  son los puntos de equilibrio del sistema. Para este caso, intuitivamente vemos que el primero será estable (y de hecho, atractivo) mientras que el segundo inestable, más adelante veremos cómo podemos determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio para un caso general.

### Soluciones periódicas:

Diremos que la solución  $\phi(t, x^0)$  del sistema (1.1.3) es periódica si  $\exists T > 0$  tal que  $\phi(t+T, x^0) = \phi(t, x^0) \forall t$ . Las órbitas de una solución periódica forman curvas cerradas en el espacio de fases. En este tipo de soluciones es de especial interés analizar el espectro en el dominio de la frecuencia.

### Conjuntos límite:

Se dice que un punto  $p \in X$  es un punto límite  $\omega$  de la solución  $\phi(t, x^0)$  del sistema (1.1.3) si  $\phi(t_i, x^0) \rightarrow p$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ . Si en cambio,  $\phi(t, x^0) \rightarrow p$  a medida que  $t \rightarrow -\infty$ , entonces  $p$  es un punto límite  $\alpha$  de  $\phi(t, x^0)$ .

El conjunto límite  $\omega$  (resp.  $\alpha$ ) de (1.1.3) es el conjunto de todos los puntos límite  $\omega$  (resp.  $\alpha$ ) del sistema.

Si el conjunto límite es tal que forma un ciclo, diremos que se trata de un ciclo límite, que puede ser estable o inestable: en el caso de que todas las trayectorias vecinas se acerquen al ciclo límite a medida que  $t \rightarrow \infty$ , el ciclo será estable, en cambio, si las trayectorias vecinas se alejan del mismo, será inestable.

### Órbitas homoclínicas y heteroclínicas:

Una órbita para la cual sus conjuntos límite  $\alpha$  y  $\omega$  son el mismo punto de equilibrio, es llamada órbita homoclínica.

Una órbita para la cual el conjunto límite  $\alpha$  es un punto de equilibrio, y el conjunto límite  $\omega$  es



otro punto de equilibrio distinto es llamada órbita heteroclínica.

Se define un ciclo heteroclínico como aquel formado por la unión de dos o más órbitas heteroclínicas formando un ciclo cerrado.

### Conjuntos invariantes, atractivos y caóticos:

Un conjunto invariante del sistema dinámico (1.1.3) es un subconjunto  $\Lambda \in X$  tal que la condición  $x_0 \in \Lambda$  implica  $\phi(t, x_0) \subset \Lambda \forall t$ .

Si dado conjunto cerrado e invariante  $\Lambda \in X$  existe una vecindad  $U$  del mismo verificando:  
 $-\forall t \geq 0$  se tiene que  $\phi(t, U) \subset U$

$-\bigcap_{t>0} \phi(t, U) = \Lambda$

Entonces diremos que se trata de un conjunto atractivo del sistema (1.1.3).

La cuenca de atracción de dicho conjunto atractivo viene dada por:  $\bigcup_{t \geq 0} \phi(t, U)$

Dado el sistema dinámico (1.1.3), diremos que el conjunto  $A \in X$  es caótico si cumple las siguientes condiciones [13]:

-El sistema dinámico en  $A$  tiene sensibilidad a las condiciones iniciales. Es decir, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\forall x \in A$  y para toda vecindad  $U \subset A$  de  $x$ , existe  $y \in U$  y  $t > 0$  tal que  $|\phi(t, x) - \phi(t, y)| > \epsilon$ .

-El sistema dinámico es topológicamente transitivo en  $A$ : dados dos conjuntos cualesquiera  $U, V \subset A$ ,  $\exists t$  tal que  $\phi(t, U) \cap V \neq \emptyset$ .

De la condición de sensibilidad a las condiciones iniciales se deduce la impredecibilidad del caos. La segunda condición implica que no podemos descomponer un conjunto caótico de un sistema dinámico en dos conjuntos independientes, puesto que en algún tiempo  $t$  se terminarán mezclando, de donde deducimos por tanto la indescomponibilidad de los conjuntos caóticos.

Algunos autores como R.L Devaney añaden la condición de que el sistema dinámico debe tener una órbita densa [3], pero no la vamos a considerar aquí. Cabe decir que existen otras definiciones de caos como pueden ser el caos de Li-Yorke o el caos distribucional, pero la definición de estos requiere de unos preliminares matemáticos en los que no vamos a entrar en este trabajo.

Dado un conjunto atractivo, diremos que es un atractor si además es topológicamente transitivo, y diremos que es un atractor extraño si es atractivo y caótico.

Geoméricamente, los atractores extraños son objetos con estructura fractal: su estructura se repite a sí misma a escalas cada vez más pequeñas.

### Mapeos de Poincaré

Consideremos el sistema dinámico autónomo (1.1.3) y una solución del mismo,  $\psi(t)$ , con la condición inicial  $\psi(0) = \psi_0$ . Consideremos también una hipersuperficie del sistema,  $L$ , tal que contiene el punto  $\psi_0$  y es transversal a  $f(x)$  (es decir, para cualquier punto  $x$  de  $L$  se cumple que  $f(x)n(x) \neq 0$  donde  $n(x)$  es el vector unitario normal a la hipersuperficie en el punto  $x$ ). Asumimos que la trayectoria de  $\psi$  vuelve a cortar (transversalmente) a la hipersuperficie en un instante posterior  $\tau_0$ . De este modo, la solución  $\psi_0$  tendrá una vecindad  $U \subset L$  tal que las soluciones  $\phi(t, x_0)$  con  $x_0 \in U$  corten de nuevo (transversalmente) a  $L$  en un instante  $\tau(x_0)$  próximo a  $\tau_0$ , tal y como se muestra en la Figura (1.1).

Definimos el mapeo de Poincaré como aquel que asocia los puntos de la vecindad de  $\psi_0$ :  $x_0 \in U$ , con los puntos en los que sus soluciones vuelven a cortar a la hipersuperficie  $L$  (en  $t = \tau(x_0)$ ):  $P : U \rightarrow L$  con  $P(x_0) = \phi(\tau(x_0), x_0)$ .

Podemos interpretar el mapeo de Poincaré como un sistema dinámico discreto de una di-

mención menor que el sistema de ecuaciones diferenciales original que además conserva muchas de las características de dicho sistema original [7].

Esto resulta de gran utilidad para el análisis de las propiedades del sistema original de una manera más sencilla, en particular en las proximidades de una órbita periódica:

Dado el mapeo de Poincaré  $P$ , si una órbita pasa por el punto  $x_0 \in U$  que verifica que  $P^k(x_0) = x_0$  (con  $P^i(x_0) \in U, i = 1, 2, \dots, k$ ) entonces la órbita será periódica y cortará  $k$  veces a la superficie  $L$  antes de cerrarse.

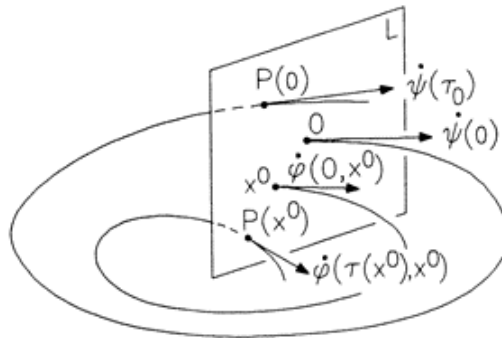


Figura 1.1: Mapeo de Poincaré [Imagen tomada de [4], Figura 5.2.1]

Para ver un ejemplo físico de este tipo de mapeos consideremos la trayectoria que describe la Luna vista desde un sistema en reposo con el sistema solar. Como hipersuperficie  $L$  tomamos el plano perpendicular a la órbita de la Tierra que contiene la posición del Sol, y la posición que ocupa la Tierra cuando está en el perihelio. El conjunto de posiciones de la Luna cuando atraviesa dicho plano vendrá dado por  $P^k(x_0)$ , con  $x_0$  el primer punto de corte de la trayectoria de la Luna con  $L$ .

### 1.1.2. Estabilidad de las soluciones

Consideremos en sistema dinámico genérico (1.1.2). Asumidas las condiciones necesarias para la existencia y unicidad de las soluciones del sistema [4], lo que nos interesa es dada una solución, estudiar su estabilidad.

Vamos a emplear la siguiente notación: Sea  $\psi(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  una solución de (1.1.2) satisfaciendo la condición inicial  $\psi(t_0) = \psi^0$  y sea  $\phi(t, x^0)$  la solución de (1.1.2) que satisface la condición inicial  $\phi(t_0, x^0) = x^0$ .

#### Estabilidad en el sentido de Liapunov:

La solución  $\psi(t)$  es estable en el sentido de Liapunov si  $\forall \epsilon > 0$  y  $\forall t_0 \geq 0$ ,  $\exists \delta(\epsilon, t_0) > 0$  tal que para cualquier  $|x^0 - \psi^0| < \delta(\epsilon, t_0)$  se cumple que  $|\phi(t, x^0) - \psi(t)| < \epsilon$ .

Es decir, siempre podemos encontrar soluciones con condiciones iniciales tales que su evolución temporal no se aleje de nuestra solución  $\psi(t)$  más allá de un valor  $\epsilon$  que podemos escoger arbitrariamente pequeño.

Se dice que la solución  $\psi(t)$  es inestable si no es estable en el sentido de Liapunov.

#### Estabilidad uniforme:

Diremos que  $\psi(t)$  es uniformemente estable si es estable en el sentido de Liapunov y además el delta de la definición anterior no depende del instante inicial:  $\delta \neq \delta(t_0)$

**Solución atractiva:**

La solución  $\psi(t)$  es atractiva si  $\forall t_0 \geq 0, \exists \eta(t_0) > 0$  tal que si  $|x^0 - \psi^0| < \eta(t_0)$  entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} |\phi(t_0, x^0) - \psi(t)| = 0$

Es decir, para cualquier instante inicial, existe un conjunto de soluciones con condiciones iniciales tales que su evolución temporal tiende a la solución  $\psi(t)$  cuando el tiempo tiende a infinito.

A este conjunto de condiciones iniciales se le denomina cuenca de atracción:

$$A(t_0) = \{x^0 \in X / \lim_{x \rightarrow \infty} |\phi(t_0, x^0) - \psi(t)| = 0\} \quad (1.1.6)$$

Si la cuenca de atracción no depende del instante inicial  $t_0$ , se dice que la solución  $\psi(t)$  es uniformemente atractiva.

**Estabilidad asintótica y uniformemente asintótica:**

Si la solución  $\psi(t)$  es estable en el sentido de Liapunov y además es atractiva diremos que la solución es asintóticamente estable.

Diremos que  $\psi(t)$  es uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente estable en el sentido de Liapunov y uniformemente atractiva.

**Solución globalmente atractiva:**

Dada una solución atractiva  $\psi(t)$ , diremos que es globalmente atractiva si la cuenca de atracción (1.1.6) de la misma es:  $A(t_0) = X$ . Es decir, si cualquier condición inicial evoluciona de modo que para tiempos tendiendo a infinito, tienda a la solución  $\psi(t)$ .

**1.1.3. Método directo de Liapunov**

Hasta ahora hemos definido cómo se caracterizan los distintos tipos de estabilidad de las soluciones de un sistema dinámico, sin embargo, en la práctica es complicado encontrar métodos matemáticos que nos permitan clasificar las soluciones según su estabilidad de manera sencilla. El objetivo de esta sección es precisamente mostrar un método que nos permita estudiar rigurosamente la estabilidad de las soluciones del sistema. En concreto, el método que aquí exponemos sirve para conocer la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema dinámico, lo cual es de suma utilidad.

Los teoremas que presentamos a continuación nos proporcionan condiciones suficientes para determinar la estabilidad, aunque estas condiciones no son necesarias [6]. En concreto estudiaremos la estabilidad del punto de equilibrio  $x_q = 0$  de (1.1.2), esto no supone pérdida de generalidad puesto que si el equilibrio estuviera en otro punto  $x_q \neq 0$  mediante una translación podríamos llevar este equilibrio al origen.

Antes de exponer los teoremas, aclaramos que denotaremos por  $h \in \mathcal{H}$  a las funciones  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que sean continuas, estrictamente crecientes y que verifiquen que  $h(0) = 0$ .

**Teorema 1.1.** (Primer teorema de Liapunov)

Sea el sistema dinámico (1.1.2), con  $x = 0$  punto de equilibrio. Si existe una función  $V: (\mathbb{R}^+ \times U) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  con  $U \subset X \subset \mathbb{R}^n$  abierto, conexo y con  $0 \in U$ , y existe también  $h \in \mathcal{H}$  tal que para los puntos  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times U$  se cumple que:

-  $V(t, 0) = 0$  y  $V(t, x) \geq h(|x|)$

-  $\dot{V} \leq 0 \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times U$ , donde  $\dot{V}$  es la derivada de  $V$  respecto al sistema (1.1.2) y se define como:

$$\dot{V} \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (1.1.7)$$

Entonces, el punto de equilibrio  $x = 0$  es estable en el sentido de Liapunov.

Si además de las condiciones anteriores, existe  $h_2 \in \mathcal{H}$  tal que  $V(t, x) \leq h_2(|x|)$ , entonces  $x = 0$  es uniformemente estable.

**Teorema 1.2.** (Segundo Teorema de Liapunov)

Sea el sistema dinámico (1.1.2), con  $x = 0$  punto de equilibrio. Si existe una función  $V : (\mathbb{R}^+ \times U) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  con  $U \subset X \subset \mathbb{R}^n$  abierto, conexo y con  $0 \in U$ , y existen las funciones  $h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{H}$  tales que:

- $h_1(|x|) \leq V(t, x) \leq h_2(|x|)$
- $\dot{V} \leq -h_3(|x|)$

Entonces el origen es uniformemente asintóticamente estable.

**Teorema 1.3.** (Tercer teorema de Liapunov)

Sea el sistema dinámico (1.1.2), con  $x = 0$  punto de equilibrio. Si existe una función  $V : (\mathbb{R}^+ \times U) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  con  $U \subset X \subset \mathbb{R}^n$  abierto, conexo y con  $0 \in U$ , y existen las funciones  $h_2, h_3 \in \mathcal{H}$  tales que:

- $|V(t, x)| \leq h_2(|x|)$
- $\dot{V}(t, x) \leq -h_3(|x|)$
- Existe  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  tal que en toda vecindad del origen,  $B(0, \delta)$ , existe  $x \in B(0, \delta)$  tal que  $V(t_0, x) < 0$ .

Entonces, el origen es inestable.

El método de Liapunov nos proporciona una manera rigurosa y sistemática de estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio y tiene la ventaja de que no requiere conocer las soluciones del sistema (1.1.2) para poder ser aplicado. Sin embargo, posee una limitación importante, y es que para poder ser aplicado es necesario construir las funciones auxiliares  $V(t, x)$ , para lo cual no hay procedimientos generales y suele ser complicado.

## 1.2. Sistemas lineales y linealización de sistemas no lineales

Hemos visto que el estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos no es sencillo, incluso para el caso más simple, que es el estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio, el método de Liapunov tiene complicaciones para llevarse a la práctica debido a la dificultad para encontrar la función  $V$ .

Por este motivo, vamos a centrar nuestro estudio en el tipo de sistemas dinámicos de menor complejidad: los sistemas lineales. Una vez hayamos analizado estos sistemas, trataremos de ver si podemos exportar los resultados a sistemas más complejos mediante la linealización de los mismos y bajo qué condiciones podemos hacerlo.

### 1.2.1. Sistemas lineales

Consideremos el siguiente sistema dinámico lineal (que es un caso particular de (1.1.2)).

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \tag{1.2.1}$$

Con  $x, b \in \mathbb{R}^n$  y  $A$  una matriz  $n \times n$ .

Para este tipo de sistemas se satisface el siguiente teorema:

**Teorema 1.4.**

Si una solución de (1.2.1) es estable en el sentido de Liapunov (resp. asintóticamente estable) entonces todas las soluciones del mismo son estables (resp. asintóticamente estables). Diremos

entonces que el sistema es estable en el sentido de Liapunov (resp. asintóticamente estable).

Remarcamos que el teorema anterior es válido únicamente para sistemas lineales, (1.2.1), para sistemas no lineales puede ocurrir que una solución sea estable y otra no.

En lo que queda de sección vamos a estudiar el caso más sencillo dentro de los sistemas lineales: un sistema lineal con coeficientes constantes.

$$\dot{x} = Ax \quad (1.2.2)$$

Con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $A$  una matriz  $n \times n$  de coeficientes constantes. Dada la condición inicial  $x(0) = x_0$ , podemos obtener fácilmente la solución de (1.2.2):

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (1.2.3)$$

Donde  $e^{At} = Pe^{tD}P^{-1}$  siendo  $D$  la forma diagonal de  $A$  y  $P$  la matriz de cambio de base cuyas columnas son los vectores propios de  $A$ . Si  $A$  no fuera diagonalizable pero admitiera forma de Jordan, podríamos hallar la exponencial de forma similar con la forma de Jordan,  $J$ , de  $A$ .

La matriz  $e^{At}$  es un mapeo desde  $\mathbb{R}^n$  hasta  $\mathbb{R}^n$ ,  $e^{At}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que contiene información global del conjunto de soluciones de (1.2.2). En este mapeo tenemos ciertas soluciones que juegan un papel especial: aquellas que permanecen en los subespacios generados por los vectores propios de  $e^{At}$ . Antes de clasificar estos subespacios, vamos a ver cómo son las soluciones de (1.2.2).

Supongamos que  $A$  es diagonalizable y, por simplicidad, supongamos también que sus autovalores están no degenerados, entonces en la base de vectores propios de  $A$   $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  las soluciones de (1.2.2) son:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix} \quad (1.2.4)$$

Es decir, podemos escribir la solución como (recordemos que empleamos la notación  $\vec{\xi}_i = \xi_i$ ):

$$x = \sum_{i=1}^n x_{0,i} e^{t\lambda_i} \xi_i \quad (1.2.5)$$

Veamos ahora el caso de  $A$  diagonalizable con autovalores degenerados. Supongamos  $p < n$  autovalores diferentes, cada uno de ellos con degeneración  $g_i$ , la solución vendrá dada por:

$$x = \sum_{i=1}^p e^{t\lambda_i} \left( \sum_{j=1}^{g_i} x_{0,i,j} \xi_{i,j} \right) \quad (1.2.6)$$

De las fórmulas (1.2.5) y (1.2.6), podemos ver que cada componente de la solución de (1.2.2) con la condición inicial  $x(0) = x_0$  va multiplicada por un factor  $e^{t\lambda_i}$ . De modo que si el autovalor tiene parte real negativa, la componente correspondiente tendrá un decaimiento exponencial en el tiempo, mientras que si tiene parte real positiva, presentará un crecimiento exponencial. Con estos resultados podemos saber cómo será la estabilidad del sistema en función de los autovalores de la matriz  $A$  tal y como se muestra en el siguiente teorema.

**Teorema 1.5.** (Estabilidad de sistemas lineales con coeficientes constantes)

- El sistema lineal con coeficientes constantes, (1.2.2), es estable en el sentido de Liapunov si y solo si los autovalores de la matriz de coeficientes,  $A$ , no tienen partes reales positivas y si hay autovalores con parte real nula, su multiplicidad es 1. El sistema será asintóticamente estable si y solo si todos los autovalores de  $A$  son negativos [4].
- Si el sistema lineal con coeficientes constantes, (1.2.2), tiene al menos un autovalor con parte real positiva o al menos un autovalor con parte real nula y multiplicidad mayor que uno, entonces el sistema es inestable [4].

Estamos ya en condiciones de clasificar los subespacios que mencionábamos anteriormente generados por los vectores propios del mapeo  $e^{At}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (Suponemos que la matriz  $A$  es diagonalizable).

- Subespacio estable,  $E^s$ : Es el subespacio generado por los vectores propios de  $A$  asociados a autovalores con parte real negativa.
- Subespacio inestable,  $E^u$ : Es el subespacio generado por los vectores propios de  $A$  asociados a los autovalores con parte real positiva.
- Subespacio central: Es el subespacio generado por los vectores propios de  $A$  asociados a los autovalores con parte real nula.

### 1.2.2. Sistemas no lineales: Linealización

Excepto unas pocas excepciones, los procesos y fenómenos que se estudian en las distintas ramas de la ciencia son de naturaleza no lineal. El comportamiento de estos sistemas es mucho más rico e interesante que el de los sistemas lineales, sin embargo también aumenta su dificultad de análisis.

En la sección anterior hemos visto que la estabilidad de los sistemas lineales con coeficientes constantes es fácil de analizar, únicamente debemos evaluar el signo de la parte real de los autovalores de la matriz de coeficientes. Pretendemos extender nuestro estudio a sistemas con mayor complejidad basándonos en los resultados anteriores mediante la linealización.

En esta sección vamos a centrarnos sistemas dinámicos no lineales pero que sean autónomos:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2.7}$$

Con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) y la condición inicial  $x(0) = x_0$

Para analizar el comportamiento dinámico de un sistema dinámico en las vecindades de un punto de equilibrio  $x_q$ , hacemos en (1.2.7) el siguiente cambio de variable:  $x = y + x_q$ :

$$\dot{y} + \dot{x}_q = f(y + x_q) \tag{1.2.8}$$

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor de  $f(y + x_q)$  en torno a  $x_q$  llegamos fácilmente a:

$$\dot{y} + \dot{x}_q \approx f(x_q) + J_f|_{x_q} y \tag{1.2.9}$$

Donde  $J_f|_{x_q}$  es el jacobiano de la función  $f(x)$  evaluado en  $x = x_q$ . Notemos que como  $x_q$  satisface (1.2.7), el segundo sumando del primer miembro se cancela con el primer sumando del segundo miembro, obteniendo finalmente:

$$\dot{y} = J_f|_{x_q} y \tag{1.2.10}$$

Vemos que (1.2.10) es un sistema lineal. Con este procedimiento hemos linealizado el sistema no lineal (1.2.7). Queremos ver, qué podemos decir de las soluciones del sistema no lineal (1.2.7)

basándonos en nuestro conocimiento del sistema (1.2.10), que por ser lineal sabemos resolver. Para ello vamos a hacer uso del Teorema de Hartman-Grobman. Antes de ver las consecuencias de este teorema es necesario definir qué es un punto de equilibrio hiperbólico:

**Definición:** Punto de equilibrio hiperbólico

Dado un punto de equilibrio del sistema dinámico  $\dot{x} = f(x)$  (caracterizado por  $f(x_q) = 0$ ), diremos que es de tipo hiperbólico si el jacobiano de  $f(x)$  evaluado en dicho punto,  $J_f|_{x_q}$ , no tiene autovalores con parte real nula.

El Teorema de Hartman-Grobman [7] nos garantiza que en las vecindades de un punto de equilibrio hiperbólico, el comportamiento de un sistema dinámico es cualitativamente el mismo que el comportamiento de su sistema linealizado.

Por tanto, siempre y cuando trabajemos en torno a un punto de equilibrio hiperbólico, para analizar un sistema no lineal basta con estudiar su linealización, que es mucho más simple. En cambio, si algún autovalor del jacobiano de la función evaluado en el punto de equilibrio tiene parte real nula, no podremos estudiar su estabilidad mediante linealización.

### 1.3. Introducción a la Teoría de Bifurcaciones

Hemos visto cómo mediante ecuaciones diferenciales podemos modelar muchos fenómenos naturales de interés. Dentro de estos modelos, es frecuente querer conocer cómo cambia el comportamiento dinámico al variar ligeramente el valor de ciertos parámetros, este tipo de problemas se estudian dentro de la teoría de bifurcaciones. Esta teoría es muy extensa y compleja, de hecho algunas partes de la misma aún no están completamente desarrolladas; en esta sección tan solo mostramos unas nociones elementales de la misma.

Antes de comenzar, definiremos cualitativamente en qué consiste la estabilidad estructural de un sistema dinámico, debido a su relevancia en el estudio de las bifurcaciones. A grandes rasgos, un sistema dinámico es estructuralmente estable o robusto si conserva sus propiedades cualitativas bajo pequeñas perturbaciones en las funciones implicadas en su definición. Una condición necesaria aunque no suficiente para la estabilidad estructural de un sistema dinámico es que todos sus puntos de equilibrio deben ser hiperbólicos [13].

Para estudiar problemas de bifurcaciones trabajaremos con una familia de sistemas dinámicos dependiente del parámetro  $\mu$ . Por simplicidad, consideraremos sistemas autónomos.

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{1.3.1}$$

Con  $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^k$  y  $f : (\mathbb{R}^k \times X) \rightarrow X$  de clase  $C^1$ .

Antes de continuar, conviene recordar el teorema de la función implícita.

**Teorema 1.6.** (Teorema de la función implícita)

Sea  $A \subset \mathbb{R}^{d+n}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) y  $(a, b)$  un punto de  $A$  tal que  $f(a, b) = 0$ . Si además el determinante jacobiano de la función  $f$  es distinto de cero, entonces: Existen  $U \subset \mathbb{R}^d$  y  $V \subset \mathbb{R}^n$  con  $a \in U$ ,  $b \in V$ , tales que para cada  $x \in U$ , existe un único  $\phi(x) \in V$  cumpliendo  $f(x, \phi(x)) = 0$ ; además  $\phi : U \rightarrow V$  es una función de clase  $C^k$  en  $U$ .

Volvemos a nuestro sistema (1.3.1). Sabemos que los puntos de equilibrio estarán caracterizados por  $f(x_q, \mu) = 0$ , por el teorema de la función implícita, tenemos que, si el determinante jacobiano de  $f$  es no nulo, podremos despejar:  $x_q = f(\mu)$ . Es decir, siempre que  $J_f|_{(x_q, \mu)} \neq 0$ , los

puntos de equilibrio serán funciones del parámetro  $\mu$ , en adelante llamaremos a estas funciones ramas de equilibrio. En cambio, en los puntos tales que el determinante jacobiano es cero, cosa que ocurre si  $J_f|_{(x_q, \mu)}$  tiene un autovalor  $\lambda = 0$ , no podremos aplicar el teorema de la función implícita, estos puntos se denominan puntos de bifurcación y en ellos se puede tener más de una rama de equilibrio.

**Definición:** Puntos de bifurcación

Dada la familia de sistemas dinámicos (1.3.1), diremos que el punto  $(x_q, \mu_0)$  es un punto de bifurcación, si el jacobiano de  $f(x, \mu)$  evaluado en dicho punto,  $J_f|_{(x_q, \mu_0)}$ , tiene un autovalor con parte real nula. Al valor  $\mu_0$  del parámetro, lo denominamos valor de bifurcación

Vemos de este modo que las bifurcaciones ocurren para aquellos valores del parámetro  $\mu$  tales que hay puntos de equilibrio no hiperbólicos, de modo que para dichos valores el sistema dinámico no es estructuralmente estable.

Tras haber visto las generalidades y condiciones necesarias para que se produzcan bifurcaciones, vamos a exponer a continuación los principales tipos y mostraremos ejemplos. El objetivo es conseguir dar una idea intuitiva de la naturaleza de las mismas sin necesidad de entrar en detalle en sus desarrollos matemáticos. Destacamos los siguientes tipos de bifurcaciones:

### -Bifurcación tipo saddlenode

Se asocia con la aparición y desaparición de puntos de equilibrio conforme cambia el parámetro  $\mu$ . A continuación mostramos un ejemplo de este tipo de bifurcación.

Consideremos la siguiente familia de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (1.3.2)$$

Con  $x, \mu \in \mathbb{R}$ . Los puntos de equilibrio se obtienen resolviendo:  $f(x, \mu) = \mu - x^2 = 0$ . Distinguiamos tres casos:

- Si  $\mu < 0$ , no hay puntos de equilibrio posibles
- Si  $\mu > 0$ , tenemos dos puntos de equilibrio:  $x_q = \pm\sqrt{\mu}$
- Si  $\mu=0$ , tenemos un punto de equilibrio:  $x_q = 0$

Por otro lado, el jacobiano de nuestra función es:  $-2x$  (Además por trabajar en dimensión 1, coincide con su determinante y con su autovalor). Vemos que si  $x = 0$  es un punto de equilibrio, será de tipo no hiperbólico puesto que el jacobiano evaluado en dicho tiene como autovalor el cero. En cambio, los puntos de equilibrio no nulos serán hiperbólicos, además serán estables si son positivos o inestables si son negativos.

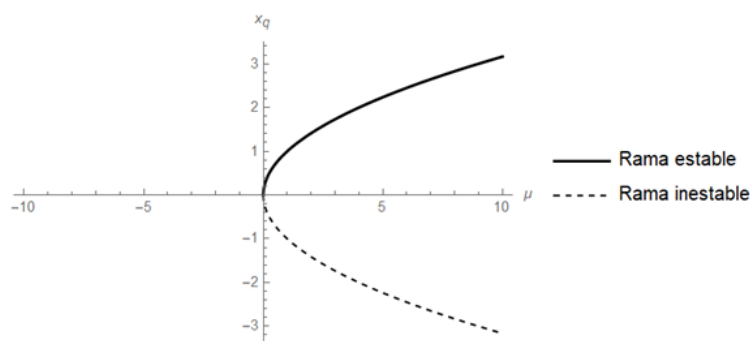


Figura 1.2: Diagrama de bifurcación.



Concluimos de esta manera que  $\mu_0 = 0$ , es el valor de bifurcación del sistema, pues para dicho valor tenemos el punto de equilibrio  $x_q = 0$ . En la Figura (1.2) podemos ver el diagrama de bifurcación del ejemplo que acabamos de describir. Vemos cómo al pasar por el valor de bifurcación,  $\mu_0$  se crean dos ramas de equilibrio.

#### **-Bifurcación de Pitchfork**

Se caracteriza por la transición de un punto de equilibrio a tres (o viceversa). Distinguimos dos tipos:

- Supercrítica: se crean dos puntos de equilibrio estables a partir de un punto estable que se convierte en inestable.
- Subcrítica: tenemos dos puntos de equilibrio inestables y uno estable que se convierte en inestable a la vez que los otros dos inestables desaparecen.

#### **-Bifurcación de Andronov-Hopf**

Hemos visto que las bifurcaciones ocurren cuando el punto de equilibrio no es hiperbólico, la bifurcación de Andronov-Hopf ocurre en el caso particular de que el jacobiano posea un par de autovalores imaginarios puros. Concretamente ocurre cuando la variación del parámetro de bifurcación provoca que dos autovalores complejos conjugados crucen desde el lado izquierdo del plano complejo hacia el lado derecho.

La principal característica de este tipo de bifurcación es que tras la misma, se origina un ciclo límite [5]. La bifurcación de Andronov-Hopf se dice que es supercrítica si dicho límite es estable, o subcrítica si es inestable.

#### **-Bifurcación de duplicación de periodo**

Dado un sistema con una trayectoria periódica, la bifurcación de duplicación de periodo ocurre para el valor del parámetro de bifurcación que hace que surja una nueva trayectoria periódica con el doble de periodo que la original. Esta nueva trayectoria, tardará el doble de tiempo en completar una oscilación, lo cual se traduce en que, para un espacio de fases de dimensión 2, si la primera trayectoria daba una vuelta, la segunda dará dos vueltas antes de cerrarse.

Si seguimos variando el parámetro, puede ocurrir que se sigan produciendo más bifurcaciones de duplicación de periodo sobre las dos trayectorias anteriores, originándose cuatro trayectorias. Si las duplicaciones continúan produciéndose indefinidamente, decimos que se produce una cascada de duplicación de periodo, que es un proceso a través del cual se puede desarrollar caos [5]. Por ejemplo, en hidrodinámica, las cascadas de duplicación de periodo son una de las posibles rutas hacia la turbulencia.

#### **Ecuación logística**

Para comprender mejor las bifurcaciones de duplicación de periodo vamos a estudiar someramente la ecuación logística. Esta ecuación modela multitud de sistemas de interés y, a pesar de su aparente simplicidad, presenta características sorprendentes, entre ellas las bifurcaciones de duplicación de periodo. La ecuación logística queda descrita por el siguiente sistema dinámico discreto dependiente del parámetro  $r$ :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \tag{1.3.3}$$

Con  $r > 0$  y  $x \in [0, 1]$

Dado un valor del parámetro  $r$  y una condición inicial o semilla  $x_0$ , vamos a estudiar hacia qué valor tiende  $x_n$ . Llamaremos valor de equilibrio de  $x_n$  al valor que alcanza a medida que  $n \rightarrow \infty$  y lo denotaremos por  $(x_n)_q$ .

Para  $r < 1$  se observa que  $(x_n)_q = 0$ , mientras que para  $r \in (1, 3)$  se tiene que  $(x_n)_q = \frac{r-1}{r}$  [1]. Además esto ocurre para cualquier valor de la semilla de manera que estos puntos (0 y  $\frac{r-1}{r}$ ) son atractores cuya cuenca de atracción es el conjunto de todos los posibles  $x_0$  (es decir,  $[0,1]$ ) para los rangos de  $r$  (0,1) y (1,3) respectivamente.

Lo interesante ocurre a partir de  $r = 3$ : para este valor del parámetro,  $(x_n)_q$  no converge hacia un único valor si no que oscila periódicamente entre dos valores a medida que aumenta  $n$  [1], ocurre una bifurcación de duplicación de periodo. Si seguimos aumentando  $r$  (concretamente hasta el valor  $r \approx 3,44$ ), cada uno de los dos valores de  $(x_n)_q$  anteriores se divide en otros dos, este proceso continúa con las bifurcaciones apareciendo cada vez más rápido, resultando finalmente en una cascada de duplicación de periodo que conduce a un comportamiento caótico.

Cabe destacar que, dentro del comportamiento caótico, existen rangos de  $r$  para los cuales se recupera un comportamiento periódico (es decir,  $(x_n)_q$  oscila entre una serie de valores concretos), a estas regiones se las conoce como ventanas periódicas.

Todos estos resultados los podemos ver gráficamente en el diagrama de bifurcación que mostramos en la Figura (1.3), en él se representan los valores de  $(x_n)_q$  para cada valor del parámetro de bifurcación  $r$ .

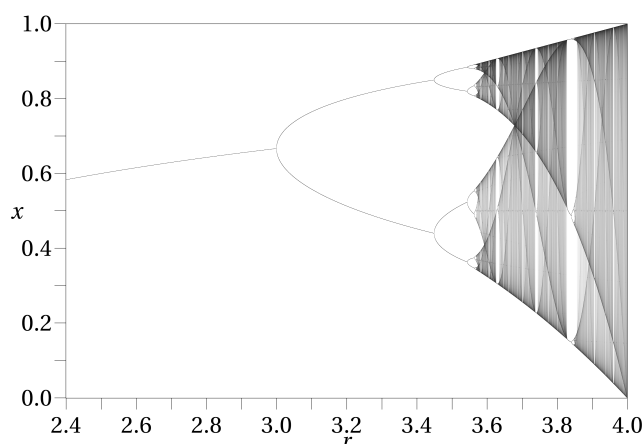


Figura 1.3: Diagrama de bifurcación de la ecuación logística. [ *Wikimedia Commons* ]

La ecuación logística y su diagrama de bifurcación característico son de gran importancia y aparecen en multitud de fenómenos como pueden ser la dinámica de poblaciones, la convección térmica en fluidos, reacciones químicas, etc. Mencionamos también que el diagrama de bifurcación que acabamos de ver guarda una estrecha relación con el conjunto fractal de Mandelbrot.

## 1.4. Rutas hacia el caos: Método de Shilnikov

Ya hemos hablado de las principales características de los sistemas dinámicos caóticos así como algunos de los mecanismos mediante los cuales se puede alcanzar este comportamiento. Lo que pretendemos ahora es encontrar un método que nos permita argumentar rigurosamente si un sistema dinámico dado puede exhibir caos.

La primera condición que debe satisfacer un sistema dinámico para poder presentar un comportamiento caótico, es que su espacio de fases debe tener dimensión mayor que dos [4]. Este

resultado es consecuencia del Teorema de Poincaré-Bendixon [13], no vamos a profundizar en este teorema puesto que, para nuestros propósitos, únicamente nos interesa la consecuencia del mismo que acabamos de mencionar.

### Método de Shilnikov

El Método de Shilnikov, nos proporciona una serie de condiciones que nos garantizan la existencia de caos. Una exposición completa del método está fuera de los objetivos de este trabajo dada su complejidad y extensión; únicamente exponemos los principales resultados.

En primer lugar, debemos definir qué es un punto de equilibrio tipo foco-silla.

**Definición:** Punto de equilibrio foco-silla.

Sea un sistema dinámico autónomo de dimensión 3. Diremos que un punto de equilibrio del mismo,  $x_q$ , es de tipo foco-silla si los autovalores del jacobiano del sistema evaluado en dicho punto,  $J_f|_{x_q}$ , son de la forma:

$\gamma, \sigma \pm j\omega$  satisfaciendo  $\sigma\gamma < 0$ ,  $\omega \neq 0$  y  $\gamma, \sigma, \omega \in \mathbb{R}$ .

De la definición anterior vemos que, como  $\sigma\gamma < 0$ , tendremos siempre un subespacio estable (formado por los estados propios asociados a los autovalores con parte real negativa) y otro inestable (formado por los autovalores con parte real positiva).

**Teorema 1.7:** (Método de Shilnikov homoclínico)

Consideremos el siguiente sistema dinámico autónomo de dimensión 3:

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in X \subset \mathbb{R}^3 \text{ y } f \in C^k (k \geq 1) \quad (1.4.1)$$

Sea  $x_q$  un punto de equilibrio foco-silla de (1.4.1) satisfaciendo la condición (desigualdad de Shilnikov):  $|\gamma| > |\sigma| > 0$  y sea  $\mathcal{H}$  una órbita homoclínica del sistema basada en  $x_q$ , entonces tanto el sistema (1.4.1) como cualquier perturbación del mismo suficientemente pequeña, exhiben un comportamiento caótico conocido como caos de herradura o caos homoclínico.

Este resultado es también válido para sistemas lineales por partes si se cumple que el punto de equilibrio,  $x_q$ , está en el interior de una de las particiones y la órbita homoclínica está apartada de cualquier otro punto de equilibrio y no es tangente a ninguna de las fronteras entre las particiones [12].

Notemos que este caos presenta estabilidad estructural, pues si el sistema lo presenta, también lo presentarán pequeñas perturbaciones del mismo.

En la práctica, la parte más difícil de aplicar del Método de Shilnikov es el establecimiento formal de la existencia de la órbita homoclínica.

Nota 1: la existencia de este tipo de caos, se debe a la presencia de herraduras de Smale [13]. La herradura de Smale se trata de un mapeo que consiste en un estrechamiento y un pliegue (que recuerda a la forma de una herradura, de ahí su nombre). No vamos a entrar en el estudio de este mapeo, mencionamos únicamente que posee un conjunto invariante que juega un importante papel en la presencia de caos en un sistema dinámico.

Nota 2: Existe un teorema similar al que acabamos de ver válido para ciclos heteroclínicos en lugar de órbitas homoclínicas [12].

# Capítulo 2

## Descripción del oscilador caótico de Chua

Hemos visto en la sección anterior ciertas condiciones bajo las cuales un sistema dinámico puede exhibir un comportamiento caótico. Ahora nuestro objetivo es encontrar un sistema físico que cumpla dichas condiciones.

En particular, nos vamos a centrar en diseñar un circuito electrónico físicamente realizable que pueda presentar caos. Veremos que el circuito de Chua, inventado por el ingeniero eléctrico e informático estadounidense Leon Ong Chua en 1983, es uno de los circuitos electrónicos más simples que satisface estas condiciones.

### 2.1. Topología del circuito Chua

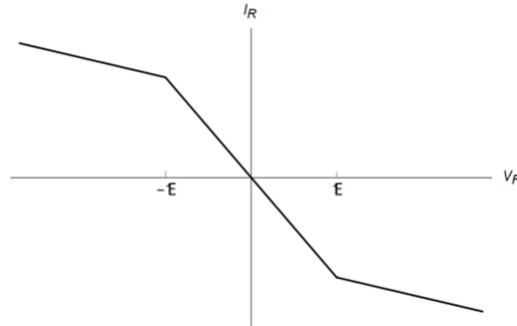
En esta sección vamos a estudiar las características que ha de tener el circuito para poder presentar un comportamiento caótico. En primer lugar, para estudiar nuestro circuito como un sistema dinámico del tipo (1.1.2) necesitamos que sus variables evolucionen en base a un sistema de ecuaciones diferenciales, en particular nos centraremos en un sistema autónomo. Para que la descripción de nuestro circuito quede determinada por un sistema de ecuaciones diferenciales, es necesario que este contenga elementos de almacenamiento de energía como condensadores y autoinducciones. Si únicamente contuviera elementos resistivos, las ecuaciones que describirían el circuito serían algebraicas.

En cuanto al número de variables de nuestro circuito, buscaremos el mínimo de ellas compatible con el caos. Ya hemos visto que, de acuerdo con el Teorema de Poincaré-Bendixon, para que un sistema dinámico pueda presentar caos, la dimensión del mismo debe ser mayor que dos [13]. Por tanto, buscaremos que nuestro circuito quede descrito por tres variables de estado. El número de variables de estado de un circuito viene dado por el número de elementos de almacenamiento de energía del mismo, de modo que nuestro circuito deberá contener al menos tres autoinducciones y/o condensadores para poder producir caos [9].

Por último, el circuito deberá contener al menos un elemento no lineal, que en adelante llamaremos  $N_R$ . Este elemento no lineal, lo debemos escoger para que el sistema contenga puntos de equilibrio de tipo foco-silla y que satisfagan la desigualdad de Shilnikov para que, de acuerdo con el Método de Shilnikov, su comportamiento pueda ser caótico. Para que el elemento no lineal,  $N_R$ , presente las características anteriores, la dependencia de la intensidad con el voltaje en  $N_R$  debe ser de la siguiente forma [2]:

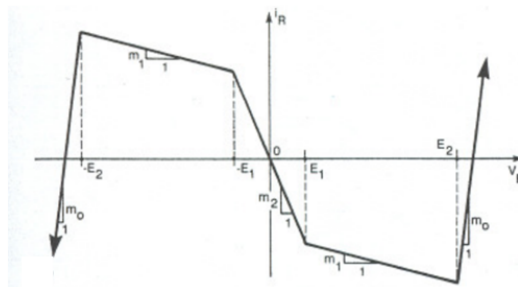
$$I_R = f(V_R) = \begin{cases} G_B V_R + (G_B - G_A)E & \text{si } V_R < -E \\ G_A V_R & \text{si } -E \leq V_R \leq E \\ G_B V_R - (G_B - G_A)E & \text{si } V_R > E \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Con  $G_A, G_B < 0$ . Vemos que la característica  $V - I$  de  $N_R$  es lineal a trozos, distinguimos así tres regiones lineales de pendiente negativa, que estudiaremos separadamente. En la Figura (2.1) se muestra la característica (2.1.1) representada gráficamente.

Figura 2.1: Característica  $V$ - $I$  del elemento no lineal  $N_R$ 

Observamos que, como la característica  $V$ - $I$  está en el segundo y cuarto cuadrante, un aumento de voltaje produce una disminución de la intensidad. Esto es lo contrario a lo que ocurre en una resistencia ordinaria en la que a mayor diferencia de potencial entre sus extremos, mayor es la corriente que circula por la misma. Como la tensión y la intensidad tienen signos contrarios, la corriente circulará desde el terminal negativo hacia el positivo, es decir,  $N_R$  está suministrando energía al circuito, se trata de un elemento activo.

Sin embargo, es necesario explicar que para que dicho elemento sea físicamente realizable, debe ser eventualmente pasivo, dado que si no lo hiciera, tendría la capacidad de producir potencia infinita. De este modo, para valores de voltaje y corriente grandes, su característica  $V$ - $I$  permanecerá exclusivamente en el primer y tercer cuadrante [8]. Por tanto, la característica mostrada en la Figura (2.1), no deja de ser una aproximación ideal a la que tendríamos que añadir para dos valores de  $V$  (uno positivo y otro negativo y que podemos escoger suficientemente grandes) otros dos segmentos que se dirijan hacia el primer y tercer cuadrante y que permanezcan en ellos, como se muestra en la Figura (2.2).

Figura 2.2: Característica real de  $N_R$  [Imagen tomada de [2], Figura 1]

Siendo conscientes de esta aclaración, en adelante consideraremos que la característica de  $N_R$  es simplemente la de la Figura (2.1), puesto que trabajaremos únicamente en rangos de voltaje que estén en la región de dicha figura. Cuando trabajemos con el circuito real veremos que esta permanencia en el primer y tercer cuadrante ocurre cuando el amplificador operacional que forma parte del elemento no lineal,  $N_R$ , alcanza la saturación.

Estamos ya en condiciones de mostrar cual es el circuito con el que vamos a trabajar en adelante [2]: se trata del conocido circuito de Chua, que mostramos en la Figura (2.3). Cabe

destacar que en el circuito real la autoinducción presentará una cierta resistencia, de modo que en el análisis que vamos a realizar debemos añadir al circuito de la Figura (2.3) una resistencia,  $R_L$ , en serie con la autoinducción para así dar cuenta de este efecto.

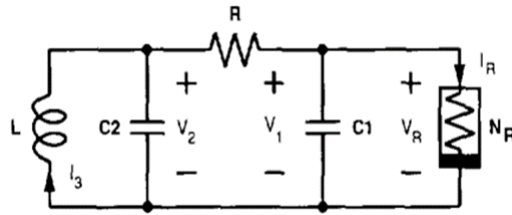


Figura 2.3: Circuito Chua [Imagen tomada de [8], Figura 1]

## 2.2. Descripción matemática del circuito Chua

Como el circuito tiene tres variables de estado (pues tenemos tres elementos de almacenamiento de energía) el circuito será de tercer orden y lo podremos describir con un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden. Las variables de estado que vamos a utilizar son:

- Intensidad que circula por la autoinducción:  $I_3$
- Diferencia de potencial entre las armaduras del condensador  $C_1$ :  $V_1$
- Diferencia de potencial entre las armaduras del condensador  $C_2$ :  $V_2$

Aplicando la teoría de circuitos al circuito de la Figura (2.3) es sencillo hallar las ecuaciones que describen el circuito en función de las variables  $I_3, V_1, V_2$ :

$$\begin{cases} V_2 + V_3 = 0 \rightarrow V_2 + L \frac{dI_3}{dt} + I_3 R_L = 0 \\ I_3 = I_2 + \frac{V_2 - V_1}{R} \rightarrow I_3 = C_2 \frac{dV_2}{dt} + G(V_2 - V_1) \\ \frac{V_2 - V_1}{R} = I_1 + I_R \rightarrow G(V_2 - V_1) = C_1 \frac{dV_1}{dt} + I_R \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Nota: las magnitudes con subíndice 1, 2 y 3 hacen referencia al condensador 1, condensador 2 y autoinducción  $L$  respectivamente. Para la intensidad que circula por la resistencia, usamos la Ley de Ohm:  $\frac{V_2 - V_1}{R} = (V_2 - V_1)G$ , donde  $G = \frac{1}{R}$  es la conductancia de la resistencia. Por último, las magnitudes con subíndice R hacen referencia al elemento no lineal  $N_R$ , recordemos que la expresión de  $I_R$  viene dada por (2.1.1). De la Figura (2.3) podemos ver que  $V_1 = V_R$

Podemos reescribir la ecuación (2.2.1) de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{dI_3}{dt} = -\frac{1}{L}V_2 - \frac{I_3 R_L}{L} \\ \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{1}{C_2}G(V_2 - V_1) \\ \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{C_1}G(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}I_R \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Como  $I_R$  está definida a trozos (ecuación (2.1.1)), en función de la región en que estemos, el sistema (2.2.2) tendrá una forma u otra. Vamos a estudiar por separado cada región.

### -Región $|V_1| \leq E$

Teniendo en cuenta el valor de  $I_R$  en esta región dado por (2.1.1), podemos escribir (2.2.2) de

la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_3 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{G}{C_2} \\ 0 & \frac{G}{C_1} & -\frac{G'_A}{C_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 \\ V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

Donde  $G'_A = G + G_A$

Observamos que se trata de un sistema lineal de coeficientes constantes. Para hallar los puntos de equilibrio igualamos (2.2.3) a cero y resolvemos. Obtenemos que el punto  $P_0 = (I_3 = 0, V_2 = 0, V_1 = 0)$  es un punto de equilibrio en esta región. Para estudiar la estabilidad, debemos hallar los autovalores de la matriz de coeficientes de (2.2.3), los cuales se obtienen igualando a cero el polinomio característico de la matriz:

$$\lambda^3 + \left( \frac{G}{C_2} + \frac{G'_A}{C_1} + \frac{R_L}{L} \right) \lambda^2 + \left( \frac{1}{LC_2} + \frac{GG_A}{C_1C_2} + \frac{R_L}{L} \left( \frac{G}{C_2} + \frac{G'_A}{C_1} \right) \right) \lambda + \frac{R_L GG_A + G'_A}{LC_1C_2} = 0 \quad (2.2.4)$$

**-Regiones  $|V_1| > E$**

En este caso, el sistema (2.2.2) se puede escribir de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_3 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{G}{C_2} \\ 0 & \frac{G}{C_1} & -\frac{G'_B}{C_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 \\ V_2 \\ V_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{K}{C_1} \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

Donde  $G'_B = G + G_B$  y  $K$  viene dado por:

$$K = \begin{cases} (G_B - G_A)E & \text{si } V_1 < -E \\ -(G_B - G_A)E & \text{si } V_1 > E \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Vemos que el sistema es lineal, solo que ahora tenemos un término independiente. Los puntos de equilibrio se obtienen igualando el sistema a cero y resolviendo. Los resultados obtenidos son  $P_+$  para  $V_1 > E$  y  $P_-$  para  $V_1 < -E$ .

$$P_+ = \begin{pmatrix} -\frac{G(G_B - G_A)E}{G'_B} \\ 0 \\ \frac{(G_B - G_A)E}{G'_B} \end{pmatrix}, \quad P_- = \begin{pmatrix} \frac{G(G_B - G_A)E}{G'_B} \\ 0 \\ -\frac{(G_B - G_A)E}{G'_B} \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

Notemos que para que estos puntos de equilibrio se encuentren en la región a la que pertenecen, se ha de verificar que su componente en  $V_1$  sea mayor en módulo que  $E$ :

$$\frac{(G_B - G_A)E}{G + G_B} > E \quad (2.2.8)$$

Esta inecuación se resuelve fácilmente, llegando a que los valores de  $G$  que satisfacen (2.2.8) son aquellos tales que:  $-G_B < G < -G_A$  (Recordemos que  $G_A, G_B < 0$  y que  $G = 1/R > 0$ , de modo que la condición anterior tiene sentido). En caso de que no se cumpla la condición anterior, los puntos  $P_+$  y  $P_-$  serán puntos de equilibrio virtuales.

La estabilidad de los puntos de equilibrio estará condicionada por los autovalores del jacobiano del sistema, que es justamente la matriz de coeficientes constantes (sin el término independiente). Vemos así que la estabilidad de  $P_+$  y  $P_-$  queda determinada por la misma condición.

$$\lambda^3 + \left( \frac{G}{C_2} + \frac{G'_B}{C_1} + \frac{R_L}{L} \right) \lambda^2 + \left( \frac{1}{LC_2} + \frac{GG_B}{C_1C_2} + \frac{R_L}{L} \left( \frac{G}{C_2} + \frac{G'_B}{C_1} \right) \right) \lambda + \frac{R_L GG_B + G'_B}{LC_1C_2} = 0 \quad (2.2.9)$$

Cabe destacar que existe una forma más gráfica de encontrar los puntos de equilibrio del sistema usando la línea de carga del mismo [10]. La línea de carga representa la respuesta de la parte lineal del circuito conectada al elemento no lineal. En nuestro caso, como la única fuente del circuito es la del propio elemento no lineal, y tenemos una única resistencia de conductancia  $G$ , la línea de carga será simplemente:  $I = -GV$ . Los puntos de equilibrio se pueden obtener como la intersección de la línea de carga con la característica  $V-I$  del elemento no lineal.

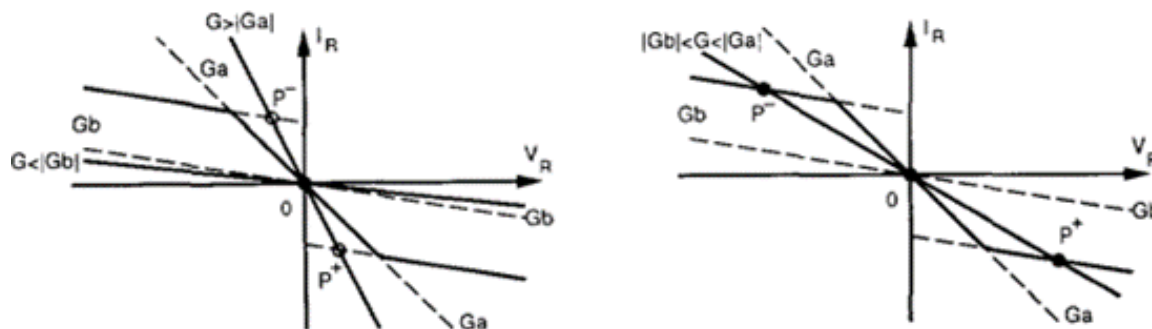


Figura 2.4: Puntos de equilibrio [Imagen tomada de [10], Figura 9]

Podemos comprobar gráficamente lo que ya predijimos con la ecuación (2.2.8): si no se cumple:  $-G_B < G < G_A$ , los puntos de equilibrio serán virtuales, y tendremos que prolongar las rectas de las regiones  $|V_1| > E$  para que corten a la línea de carga.

### 2.3. Caos en el circuito Chua

Vamos a examinar si el circuito Chua puede exhibir caos basándonos en el Método de Shilnikov. Lo haremos de una manera un tanto cualitativa a modo de introducción para el siguiente capítulo, en el que lo estudiaremos en base a datos experimentales y simulaciones para valores determinados de los parámetros del circuito.

La solución de las ecuaciones (2.2.4) y (2.2.9) en términos de sus variables son muy largas y carece de sentido exponerlas aquí. Lo que haremos (en el siguiente capítulo) es dar sus resultados conocidos los valores concretos de los parámetros del circuito. De acuerdo con el Método de Shilnikov, para tener caos necesitamos que los puntos de equilibrio sean de tipo foco-silla. Veamos si los autovalores dados por (2.2.4) y (2.2.9) pueden ser tales que los puntos de equilibrio sean de tipo foco-silla.

Es bien sabido que dada una ecuación cúbica genérica:  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , su discriminante viene dado por:  $\Delta = 18abcd - 4b^3d - 4c^3a + b^2c^2 - 27a^2d^2$ . Si  $\Delta < 0$  entonces la ecuación tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas.

El resultado anterior nos asegura que pueden existir valores de las variables de (2.2.4) y (2.2.9) tales que los puntos de equilibrio son de tipo foco-silla (notemos que a mayores se debe satisfacer que  $\gamma\sigma < 0$ ). Nos quedaría por ver que los autovalores además satisfacen la desigualdad de Shilnikov, esto lo haremos en el siguiente capítulo.

Por último, vamos a hacer un estudio cualitativo acerca de cómo son las trayectorias próximas a un punto de equilibrio de tipo foco-silla. Todo lo que exponemos a continuación es aplicable para un sistema lineal, en caso de tener un sistema no lineal, podremos aplicar estos resulta-



dos después de linealizarlo de acuerdo con lo que vimos en el apartado 1.2.2 del capítulo anterior.

En el apartado 1.2.1. vimos que el subespacio generado por los vectores propios asociados a autovalores con parte real negativa de la matriz del sistema era el subespacio estable  $E^s$  mientras que los vectores propios asociados a autovalores con parte real positiva generaban el subespacio inestable  $E^u$ . Como para un punto foco-silla las partes reales de los autovalores deben verificar que  $\sigma\gamma < 0$  sabemos que tendremos autovalores con parte real positiva y negativa, y ninguno con parte real nula. De este modo, el sistema tendrá siempre un subespacio estable y otro inestable. El subespacio generado por los autovalores complejos conjugados será de dimensión 2 y lo llamaremos  $E_\sigma$ , mientras que el generado por el autovalor real tendrá dimensión 1 y lo denotaremos como  $E_\gamma$ .

Recordando que podemos escribir las soluciones según la ecuación (1.2.5) obtenemos:

$$x(t) = x_{0,\gamma}e^{\gamma t}\xi_\gamma + x_{0,\sigma_+}e^{(\sigma+i\omega)t}\xi_{\sigma_+} + x_{0,\sigma_-}e^{(\sigma-i\omega)t}\xi_{\sigma_-} \quad (2.3.1)$$

Usando la fórmula de Euler y llamando  $\xi_{\sigma_R}, \xi_{\sigma_{Im}}$  a la parte real e imaginaria de  $\xi_{\sigma_+}, \xi_{\sigma_-}$ , podemos encontrar unas constantes  $\delta, x_{0,\sigma}$  (que serán función de  $x_{0,\sigma_+}$  y  $x_{0,\sigma_-}$ ) tales que la ecuación (2.3.1) se puede escribir como:

$$x(t) = x_{0,\gamma}e^{\gamma t}\xi_\gamma + x_{0,\sigma}e^{\sigma t} [\cos(\omega t + \sigma)\xi_{\sigma_R} - \sin(\omega t + \sigma)\xi_{\sigma_{Im}}] \quad (2.3.2)$$

Viendo la expresión (2.3.2) de las soluciones, es fácil hacerse una idea cualitativa de cual es su comportamiento en función de los signos de las partes reales de los autovalores:

- Si  $\gamma > 0$  (resp.  $\gamma < 0$ ), la componente de la trayectoria asociada con  $E_\gamma$  crecerá (resp. decrecerá) exponencialmente, es decir, se alejará (resp. acercará) exponencialmente del punto de equilibrio.
- Para el subespacio  $E_\sigma$  la proyección de la trayectoria sobre el subespacio  $E_\sigma$  (de dimensión 2), dará vueltas alrededor del punto de equilibrio con un radio que crece o decrece exponencialmente según si  $\sigma$  es mayor o menor que cero respectivamente.

Tendremos por tanto dos opciones:

- Si  $\gamma > 0$  y  $\sigma < 0$ , las trayectorias próximas al punto de equilibrio serán hélices que se alejan exponencialmente del punto, con eje  $E_\gamma$  y un radio que disminuye exponencialmente.
- Si  $\gamma < 0$  y  $\sigma > 0$ , las trayectorias próximas al punto de equilibrio serán hélices con eje  $E_\gamma$  y un radio que aumenta exponencialmente a medida que su componente  $E_\gamma$  se acerca exponencialmente al punto de equilibrio.

Hemos visto que las ecuaciones diferenciales que modelan el circuito Chua son tales que pueden presentar puntos de equilibrio de tipo foco-silla y hemos examinado el comportamiento cualitativo de las soluciones alrededor de estos puntos. Este comportamiento será clave en la aparición del caos en el circuito. Como en el circuito Chua tenemos tres regiones cada una con un punto de equilibrio, podrá ocurrir que una trayectoria que esté inicialmente próxima a un punto de equilibrio, acabe viéndose atraída por otro punto de equilibrio de otra región, describiendo así un comportamiento mucho más complejo. Uno de los fenómenos que aparece con frecuencia en el sistema Chua es la bifurcación de duplicación de periodo, de hecho aparecen cascadas de duplicación de periodo que nos conducen al comportamiento caótico. Dado que en el circuito Chua las variables elegidas oscilan en el tiempo, y además el comportamiento es caótico, decimos que el circuito Chua es un oscilador caótico. Todo esto lo estudiaremos detenidamente en el siguiente capítulo en base a resultados experimentales del oscilador de Chua real.

# Capítulo 3

## Circuito Chua: resultados experimentales

Para explicar los fenómenos naturales la Física elabora teorías cuyas predicciones deben estar en acuerdo con la experimentación; en el Capítulo 2 hemos visto un modelo de un sistema físico compatible con el caos, lo que vamos a exponer en este capítulo es la implementación práctica de dicho modelo en el laboratorio.

Dado que el sistema con el que vamos a trabajar es caótico, el análisis que vamos a realizar es acerca del comportamiento cualitativo de las soluciones, pues el comportamiento exacto es impredecible en la práctica. Estudiaremos si el modelo teórico es capaz de explicar cualitativamente la evolución del sistema y en caso de que aparezcan discrepancias, analizaremos el porqué de las mismas. Por último estudiaremos una de las características fundamentales del caos: la sensibilidad a las condiciones iniciales.

De esta manera pretendemos mostrar una visión lo más completa posible del fenómeno de las oscilaciones caóticas en el circuito de Chua.

### 3.1. Construcción del circuito

#### 3.1.1. Elemento no lineal $N_R$

Pretendemos construir un elemento que posea una característica  $V-I$  de acuerdo con (2.1.1) para ello necesitaremos hacer uso de un amplificador operacional. Un amplificador operacional es un circuito integrado cuya estructura interna es compleja, para nuestros propósitos es suficiente con su circuito equivalente [14], que mostramos junto con su simbología usual en la Figura (3.1).

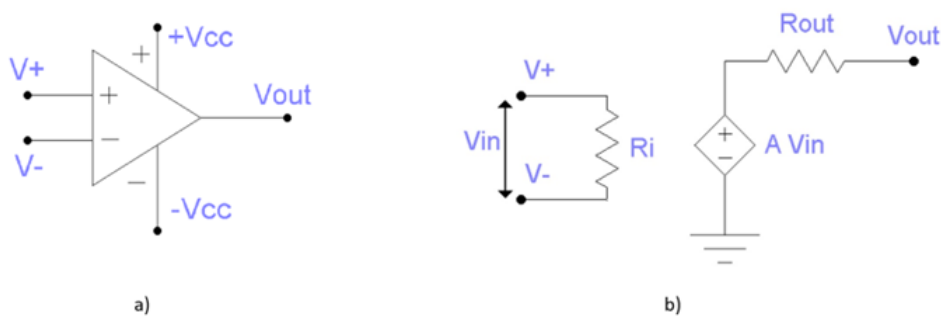


Figura 3.1: Amplificador operacional. a) Símbolo b) Circuito equivalente

El amplificador debe tener las siguientes características [14]: la resistencia de entrada,  $R_i$  ha de ser muy elevada y la de salida,  $R_{out}$  muy baja, en el caso ideal consideraremos  $R_i \rightarrow \infty$ ,  $R_{out} \rightarrow 0$ . La tensión de salida viene dada por  $V_{out} = A_v(V_+ - V_-)$ , donde  $A_v$  es la ganancia del amplificador que tiene un valor muy elevado.

En la Figura (3.1) vemos también que el amplificador operacional está alimentado por dos fuentes de continua, en adelante para simplificar los circuitos omitiremos la presencia de estas fuentes.

Para que el amplificador no esté saturado se debe cumplir que  $-V_{cc} < V_{out} < V_{cc}$ . Dado que la ganancia  $A_v$  es muy grande y  $V_{out} = A_v(V_+ - V_-)$  debe estar comprendido entre los valores anteriores, se debe tener una diferencia de tensión entre los terminales de entrada muy pequeña:  $V_+ \approx V_-$

Los amplificadores operacionales tienen múltiples aplicaciones, la mayoría de ellas se obtienen al realimentar el circuito conectando su salida a la entrada, lo que se conoce como configuración de lazo cerrado. De esta manera se consigue que la relación entre el voltaje de entrada y salida dependa únicamente de la red de realimentación que utilicemos en cada caso. Para este trabajo nos interesa el circuito que se muestra en la Figura (3.2) debido a que posee una característica  $V - I$  en el segundo y cuarto cuadrante, esta configuración actúa como una fuente de voltaje dependiente de corriente y es conocida como resistencia negativa por motivos que veremos a continuación.

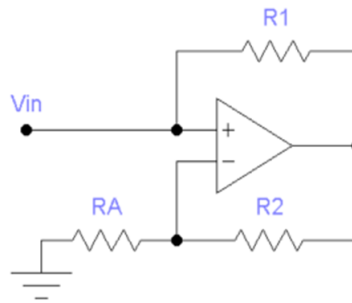


Figura 3.2: Resistencia negativa

Veamos cuál es la relación entre la intensidad y el voltaje de entrada,  $V_{in}$ , para ello usaremos las aproximaciones y resultados que hemos explicado anteriormente: la resistencia entre los terminales de entrada es infinita de manera que entre ellos no circula corriente; y los voltajes de entrada son aproximadamente iguales  $V_+ = V_- = V_{in}$ .

Por la resistencia  $R_A$  circulará una corriente de valor  $I_A = \frac{V_{in}}{R_A}$ , esta corriente no puede provenir del terminal  $V_-$  puesto que hemos dicho que no circula corriente por él, por tanto, toda la corriente procede de la salida de  $R_2$ . De esta manera, podemos hallar  $V_{out}$  resolviendo la rama de abajo:

$$V_{out} = I_A(R_A + R_2) = \frac{V_{in}}{R_A}(R_A + R_2) \quad (3.1.1)$$

En la última igualdad hemos sustituido  $I_A$  por su valor. Finalmente, podemos hallar la corriente que circula por la resistencia  $R_1$ , esta intensidad es la de entrada y la denotaremos por  $I_{in}$ .

$$I_{in} = \frac{V_{in} - V_{out}}{R_1} = \frac{V_{in} - \frac{V_{in}}{R_A}(R_A + R_2)}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1 R_A} V_{in} \quad (3.1.2)$$

Vemos de esta manera, que el circuito actúa como una resistencia negativa de valor  $-\frac{R_1 R_A}{R_2}$ , en el caso en que  $R_1 = R_2$ , que es con el que vamos a trabajar, la resistencia es  $R = -R_A$ .

Lo que está ocurriendo es lo siguiente: realmente el voltaje de salida es mayor que el de entrada, de modo que la corriente no circula hacia el terminal de salida como hemos supuesto, sino que sale del mismo y fluye hacia la fuente  $V_{in}$ . Hemos construido un dispositivo que actúa como una fuente de voltaje,  $V_{out}$ , que es mayor que el voltaje de entrada,  $V_{in}$ , de modo que la corriente circulará hacia el terminal de entrada. Es por este motivo por el que se le denomina

resistencia negativa: la corriente fluye hacia el terminal positivo, suministrando energía al circuito, lo contrario que una resistencia ordinaria. Es importante señalar que el efecto de resistencia negativa será posible siempre que estemos fuera de la saturación, es decir,  $-V_{cc} < V_{out} < V_{cc}$ .

Ya tenemos la región central de la característica  $V-I$  de  $N_R$ , a continuación vamos a ver cómo obtener las otras dos regiones. Para conseguir dejar la región central inalterada, y añadir las otras dos regiones, vamos conectar en paralelo con la resistencia no lineal dos diodos en la configuración que se muestra en la Figura (3.3). Este circuito es conocido como diodo de Chua.

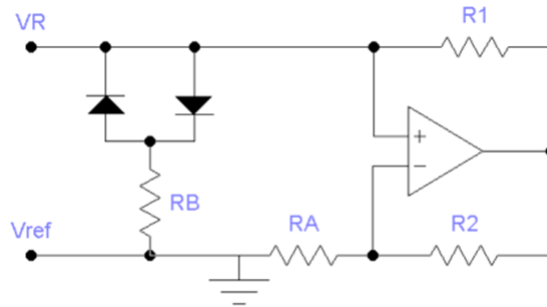


Figura 3.3: Diodo Chua

Los dos diodos son iguales y tienen una tensión umbral  $V_D$ . A la resistencia que está en serie con los diodos la llamaremos  $R_B$ . Para  $|V| < V_D$  ninguno de los diodos conducirá, de manera que tendremos únicamente la resistencia no lineal. En cambio, si  $|V| > V_D$  uno de los dos diodos conducirá, por lo que tendremos la resistencia no lineal en paralelo con  $R_B$ , la resistencia total será por tanto  $R_T = -\frac{R_B R_A}{R_B - R_A}$

De esta manera, hemos conseguido lo que queríamos:

- Para  $|V| < V_D$ :

$$V_R = -R_A I_R \rightarrow I_R = G_A V_R \quad \text{con} \quad G_A = -\frac{1}{R_A} \quad (3.1.3)$$

- Para  $|V| > V_D$ :

$$V_R = -\frac{R_B R_A}{R_B - R_A} I_R \rightarrow I_R = G_B V_R \quad \text{con} \quad G_B = \left( \frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right) \quad (3.1.4)$$

Notemos que para que  $G_B$  sea negativa, es necesario que se verifique  $R_B > R_A$ . Recordemos también que hemos escogido  $R_1 = R_2$ .

### 3.1.2. Circuito completo

Acabamos de ver cómo podemos construir el elemento no lineal  $N_R$  para que satisfaga los requerimientos de la ecuación (2.1.1). Para tener el circuito completo, simplemente deberemos montar el circuito mostrado en la Figura (2.3) sustituyendo  $N_R$  por el circuito de la Figura (3.3).

A mayores añadimos al circuito un segundo amplificador operacional que sirve para situar el voltaje de referencia en  $2,5V$ . Los resultados serían similares sin este cambio, pero de esta manera trabajaremos con mayor simetría puesto que el voltaje variará entre  $-2.5$  y  $2.5V$  respecto a la referencia, en lugar de  $0$  a  $5V$ . Para conseguir esto sin tener que utilizar dos fuentes de voltaje (la de alimentación del amplificador operacional y la del voltaje de referencia), utilizaremos un segundo amplificador operacional y un divisor de tensión tal y como se puede ver en la Figura

(3.4), de esta manera, con una única fuente de voltaje de  $5V$  hemos conseguido tanto situar el voltaje de referencia en  $2,5V$  como construir el elemento  $N_R$ .

Es importante aclarar que tenemos dos sistemas de referencia: en el primero, el voltaje variará entre  $0$  y  $5V$  y el valor del voltaje de referencia es  $V_{ref} = 2,5V$ , mientras que en el segundo,  $V$  variará entre  $-2,5$  y  $2,5V$  y  $V_{ref} = 0V$ . De aquí en adelante trabajaremos en el segundo sistema de referencia, es decir, mediremos todos los voltajes respecto a  $V_{ref}$ .

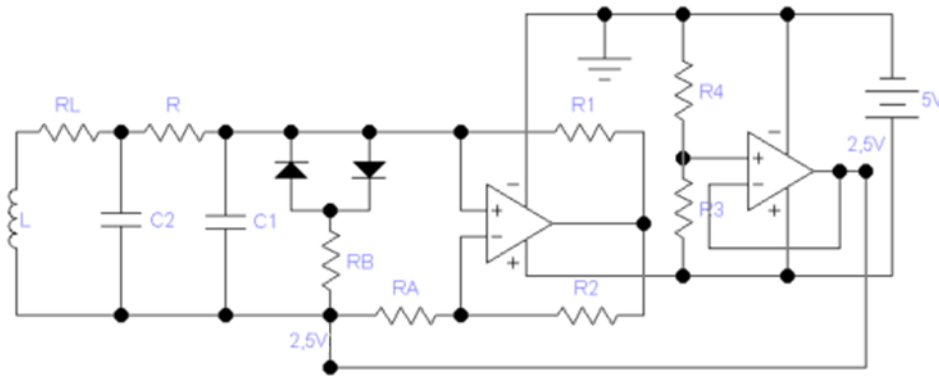


Figura 3.4: Circuito completo

Observamos que el circuito posee multitud de parámetros que podemos modificar, en la práctica vamos a fijar todos ellos excepto uno, que suele ser una de las resistencias  $R, R_A, R_B$ . Estas resistencias son las que actuarán como parámetros de bifurcación y las variaremos con un potenciómetro si queremos hacer barridos grandes viendo cómo cambia el comportamiento del circuito, o con cajas de resistencias si queremos dar un valor concreto y específico a dicha resistencia.

Variar el valor de la resistencia  $R$  cambia la pendiente de la recta de carga del circuito, mientras que variar las resistencias  $R_A, R_B$  cambiará las pendientes de la característica  $V-I$  de  $N_R$  de acuerdo con (3.1.3) y (3.1.4). Estos cambios afectan directamente al valor de los puntos de equilibrio del sistema y sus autovalores (ecuaciones (2.2.4) y (2.2.9)), por lo que sus modificaciones afectarán notablemente al comportamiento de las soluciones del sistema.

A continuación mostramos los valores concretos de cada elemento del circuito:

- $L = 8,625\text{mH}$ ,  $R_L = 3,5\Omega$
- $C_1 = 4,7\text{nF}$
- $C_2 = 68\text{nF}$
- $R_1 = R_2 = 270\Omega$
- $R_3 = R_4 = 1\text{k}\Omega$
- Fuente de tensión de  $5V$
- Diodos: Modelo 1N6263
- Amplificadores operacionales: Modelo MCP6292 (Figura (3.5 a)).

En la Figura (3.5 b) se muestra la característica de los diodos utilizados, vemos que a temperatura ambiente podemos considerar que el diodo conduce a partir de un voltaje  $0,3V$ , de modo que  $V_D = 0,3V$ . En la Figura (3.6) se muestra el circuito de la Figura (3.4) montado experimentalmente y con el que se han tomado los datos que analizaremos en la siguiente sección.

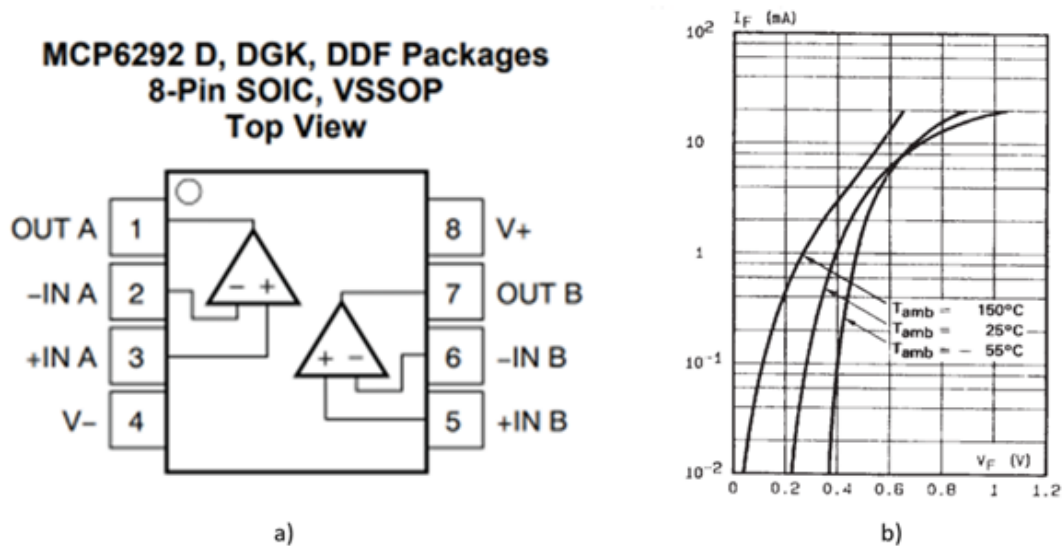


Figura 3.5: a) Amplificador operacional MCP6292 [Texas Instruments MCP6292 Datasheet]  
b) Característica del diodo 1N6263 [STMicroelectronics 1N6263 Datasheet]

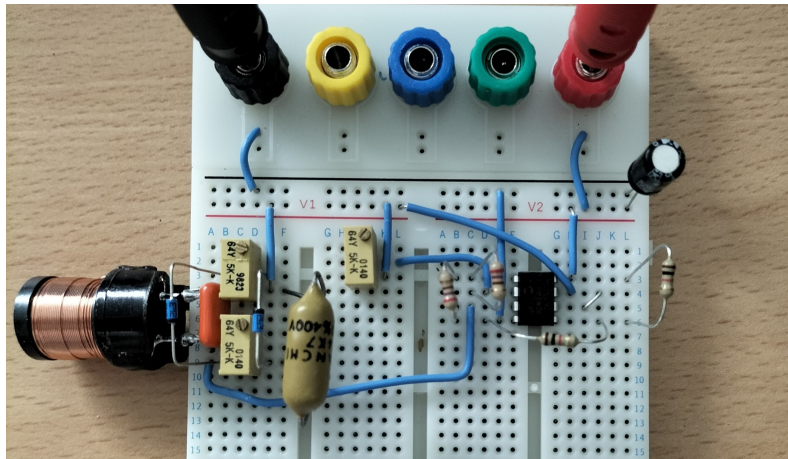


Figura 3.6: Circuito experimental

## 3.2. Estudio cualitativo del circuito al variar un parámetro

En esta sección vamos a mostrar cómo evoluciona el circuito de Chua en función de la variación de ciertos parámetros, para ello, mediremos con un osciloscopio los voltajes  $V_1$  y  $V_2$  de modo que podremos observar la proyección de las trayectorias sobre el plano  $V_1 - V_2$ , y estudiar su comportamiento.

En concreto, vamos a fijar las resistencias  $R$  y  $R_B$  y estudiar cómo cambia la evolución del circuito al variar la resistencia  $R_A$ . Sabemos que al modificar este parámetro, estamos cambiando las pendientes de la característica  $V - I$  del elemento no lineal  $N_R$ , dejando inalterada la recta de carga. Esta modificación dará lugar a fuertes cambios en la dinámica del circuito.

### 3.2.1. Predicciones teóricas

Vamos a tomar  $R = 2000\Omega$  y  $R_B = 1945\Omega$ , para ver en qué rango podemos variar  $R_A$  vamos a ver para qué valores de dicha resistencia los puntos de equilibrio  $P_{\pm}$  están fuera de la zona de saturación del amplificador ( $|V_1(P_{\pm})| < 2,5V$ ) y no son virtuales ( $|V_1(P_{\pm})| > V_D = 0,3V$ ).

De acuerdo con (2.2.7), el valor de  $V_1$  de los puntos de equilibrio viene dado por:

$$V_1(P_{\pm}) = \pm \frac{(G_B - G_A)V_D}{G + G_B} \tag{3.2.1}$$

Para conocer la dependencia de  $V_1(P_+)$  con  $R_A$  hemos representado con el programa Mathematica la fórmula anterior en función de  $R_A$ , podemos ver el resultado en la Figura (3.7). La gráfica de  $V_1(P_-)$  sería la misma pero cambiada de signo. De esta manera vemos que si  $R_A < 1050\Omega$  estaremos en la saturación, y si  $R_A > 2000\Omega$  los puntos de equilibrio  $P_{\pm}$  serían virtuales, y por tanto el único punto de equilibrio sería  $P_0$ .

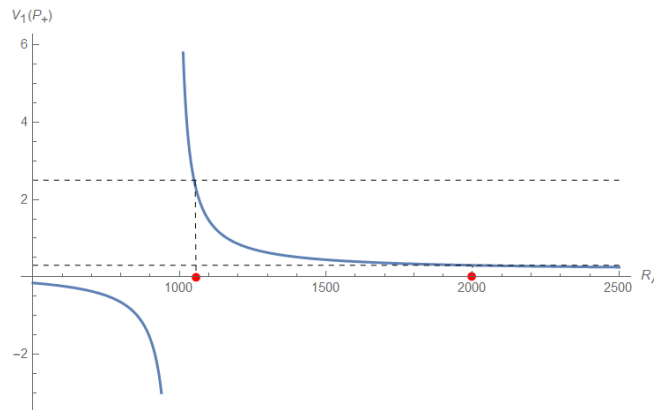


Figura 3.7: Valores del voltaje  $V_1$  del punto de equilibrio  $P_+$  en función de  $R_A$

Veamos ahora cómo son los autovalores asociados a los puntos de equilibrio,  $P_{\pm}$  y  $P_0$ , en esta región, para ello debemos resolver las ecuaciones (2.2.4) y (2.2.9) que vimos en el capítulo anterior. Nuevamente para resolver estas ecuaciones hacemos uso del programa Mathematica; en la región de  $R_A$  que vamos a estudiar se obtiene que tanto para  $P_{\pm}$  como para  $P_0$  tendremos un autovalor real y dos complejos conjugados.

Las expresiones analíticas de estos autovalores son realmente extensas por lo que para visualizarlas de una mejor manera, con el mismo programa las hemos evaluado para los valores de los parámetros que hemos utilizado y las hemos representado en función de  $R_A$ . En la Figura (3.8) mostramos esta dependencia, la notación es la que hemos empleado en los capítulos anteriores: llamamos  $\gamma$  al autovalor real y  $\sigma$  a la parte real de los autovalores complejos conjugados. Los puntos de corte con el eje de abcisas se han marcado con líneas rojas discontinuas.

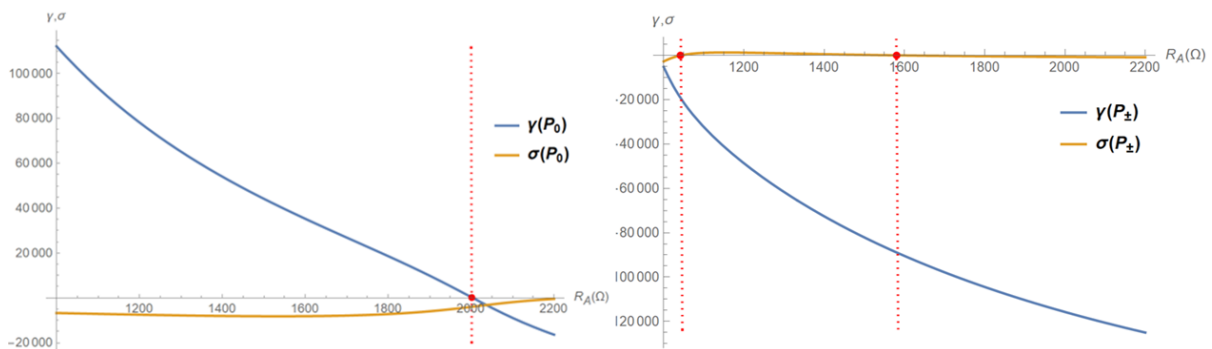


Figura 3.8: Parte real de los autovalores asociados a  $P_0$  y  $P_{\pm}$  en función de  $R_A$ .

En la región que estamos estudiando observamos que:

- Para  $P_0$ , el autovalor real pasa por cero cuando  $R_A$  se acerca a un valor de  $2000\Omega$  mientras que la parte real de los autovalores complejos conjugados es siempre negativa.
- Para los puntos  $P_{\pm}$ , el autovalor real es siempre negativo, mientras que la parte real de los complejos conjugados pasa dos veces por cero: en  $R_A = 1043,7\Omega$  y  $R_A = 1580,4\Omega$ , entre estos dos valores, es positiva y alcanza su valor máximo en torno a  $1150\Omega$ , para el resto de valores será negativa.

De esta manera, haciendo uso del Teorema 1.5, podemos conocer la estabilidad de los puntos de equilibrio en función del valor de  $R_A$ . Recordemos que para que el punto de equilibrio sea estable, no podemos tener ningún autovalor con parte real positiva. En la Tabla (3.1) mostramos la estabilidad de cada punto de equilibrio en cada rango de valores de  $R_A$ .

$R_A(\Omega)$	1017-1044	1044-1580	1580-2000	2000-2260
$P_0$	Inestable	Inestable	Inestable	Estable
$P_{\pm}$	Estable	Inestable	Estable	Virtual

Tabla 3.1: Estabilidad en función de  $R_A$

Otro aspecto relevante de la Figura (3.8) es que en ambos casos el autovalor real es de bastante mayor magnitud que la parte real de los conjugados. De acuerdo con el Método de Shilnikov, una condición necesaria para que se produzca caos es que los puntos de equilibrio sean de tipo foco-silla y además se satisfaga la desigualdad de Shilnikov. En las zonas de inestabilidad (Tabla (3.1)) se cumplen las dos condiciones:  $\gamma\sigma < 0$  y  $|\gamma| > |\sigma| > 0$ . Por tanto, en dichas zonas es posible que aparezca el fenómeno del caos.

### 3.2.2. Resultados experimentales

Vamos a mostrar las medidas obtenidas ir disminuyendo  $R_A$  desde un valor de  $2200\Omega$  hasta que se alcanza la saturación. En este rango de valores aparece una gran diversidad de comportamientos del circuito que relacionaremos con los resultados teóricos anteriores. Todas las gráficas que se muestran en esta sección son experimentales, las hemos obtenido con un osciloscopio DSOX2002A conectado a un ordenador para poder volcar los datos al mismo, en cada gráfica el número de parejas de datos recogidas es de aproximadamente 20000. Recordemos que todos los voltajes están medidos respecto al voltaje de referencia  $V_{ref}$ .

Inicialmente, para  $R_A = 2200\Omega$  se observa en la pantalla del osciloscopio un único punto con  $V_1 = 0V$ ,  $V_2 = 0V$ , que permanece constante a medida que disminuimos  $R_A$  hasta  $2000\Omega$ . A partir de dicho valor, el punto se mueve hacia la izquierda o derecha (dado que estamos estudiando un sistema caótico, a pesar de tener las mismas condiciones iniciales no podemos predecir hacia qué lado se va a dirigir) y continúa alejándose ligeramente al seguir disminuyendo  $R_A$ .

Lo que está ocurriendo es lo siguiente: De acuerdo con la Tabla (3.1), inicialmente estamos en una región tal que el punto de equilibrio  $P_0$  (para el que  $V_1 = 0$ ) es el único punto de equilibrio del sistema (pues los puntos  $P_{\pm}$  son virtuales) y además es estable, por tanto, el sistema permanecerá en dicho punto. Al disminuir  $R_A$  hasta  $2000\Omega$  este punto se convierte en inestable mientras que los puntos  $P_{\pm}$  dejan de ser virtuales y además son estables: ocurre una bifurcación de Pitchfork supercrítica. Este es el motivo de que el punto que observamos en la pantalla se comience a mover, como  $P_0$  es inestable, se dirigirá o bien hacia  $P_+$  (se desplaza hacia la derecha) o hacia  $P_-$  (se desplaza hacia la izquierda). En adelante, nos centraremos únicamente en la oscilación en torno a  $P_+$ , la oscilación en torno a  $P_-$  se describiría de la misma manera debido a la simetría de nuestro circuito.



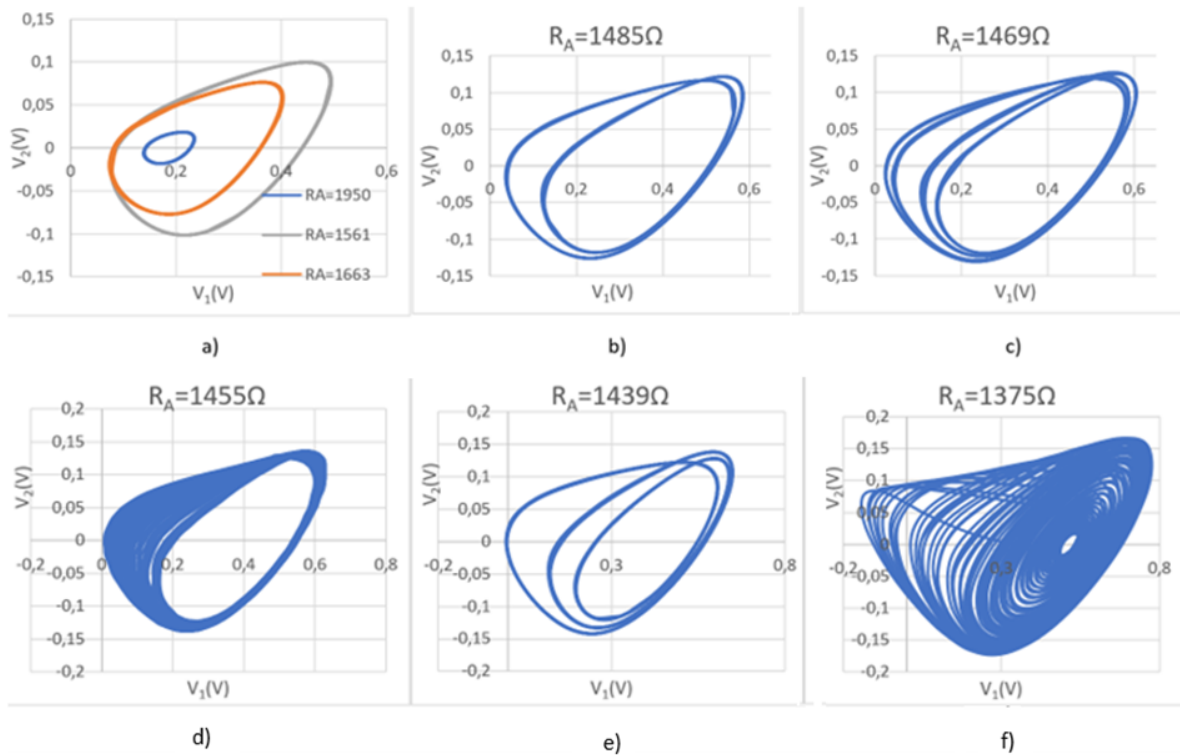


Figura 3.9: Gráficas experimentales  $V_1 - V_2$  para distintos valores del parámetro  $R_A$ : Inicialmente se observan ciclos límites estables, después aparecen bifurcaciones de duplicación de periodo, y finalmente se tiene una dinámica caótica.

Si seguimos disminuyendo aún más  $R_A$ , en lugar de un punto fijo, comenzaremos a ver oscilaciones que aumentan en amplitud y continúan moviéndose hacia la derecha a medida que seguimos disminuyendo  $R_A$ .

El motivo de que esto ocurra es el siguiente: al disminuir  $R_A$  estamos aumentando la ganancia del amplificador operacional, inicialmente esta ganancia es inferior a las pérdidas que tiene el circuito, por lo que este no oscilará y simplemente permanecerá en un punto de equilibrio. Pero al disminuir  $R_A$  llegaremos a un punto en que la ganancia es superior a las pérdidas y observaremos oscilaciones, estas oscilaciones irán aumentando en amplitud a medida que sigamos aumentando la ganancia (es decir, a medida que disminuyamos  $R_A$ ).

El hecho de que las oscilaciones se vayan desplazando hacia la derecha se debe a que el punto de equilibrio  $P_+$  se va moviendo hacia valores mayores de  $V_1$  (Figura (3.7)). Aunque las oscilaciones se desplacen y presenten cambios de amplitud, la frecuencia de oscilación es la misma en todas ellas (Figura (3.10 a)), por otro lado, el desfase dependerá de las condiciones iniciales. En la Figura (3.9 a) podemos ver dichas oscilaciones, sin embargo, en dicha figura estamos viendo un comportamiento prohibido teóricamente: el sistema oscila en torno a un punto que está por debajo de la tensión umbral de los diodos  $V_D$ .

Este hecho refleja una característica del circuito real que no hemos tenido en cuenta en nuestro modelo matemático: la característica  $V - I$  de los diodos es exponencial, por lo que en el circuito real, la característica de  $N_R$  no será exactamente la que veíamos en el capítulo anterior en la Figura (2.1). No tendremos un cambio de pendientes abrupto, sino que se producirá una transición más suave debido a la característica exponencial de los diodos. Esto da lugar a que la línea de carga pueda cortar a la característica de  $N_R$  en zonas que, con el modelo de la Figura

(2.1) estaban prohibidas. Para el resto de regiones, el modelo matemático del cambio abrupto de pendientes nos dará los resultados correctos, las únicas discrepancias ocurren en esta región y cuando se alcanza la saturación del amplificador operacional, donde tendremos que usar la característica de la Figura (2.2).

Las oscilaciones continuarán desplazándose hacia la derecha y aumentando en amplitud hasta que  $R_A$  disminuya por debajo de  $1580\Omega$ , en este punto,  $P_+$  deja de ser estable de modo que el ciclo límite que teníamos se volverá inestable. A partir de este valor de  $R_A$  y hasta que llegue a  $1044\Omega$ , todos los puntos de equilibrio del sistema son inestables, veremos que esto dará lugar a interesantes fenómenos, entre ellos, el caos.

Para  $R_A = 1485\Omega$  (Figura (3.9 b)) se produce una bifurcación de duplicación de periodo: la oscilación original se desdobra en otra oscilación con el doble de periodo que la original, y por tanto, con la mitad de frecuencia. De este modo la función resultante será la suma de la función periódica original de frecuencia  $\nu$  más la de frecuencia  $\frac{\nu}{2}$ , que da como resultado una función periódica de frecuencia  $\frac{\nu}{2}$  que presentará dos picos de distinta amplitud en cada oscilación, que es precisamente lo que obtenemos experimentalmente (Figura (3.10 b)).

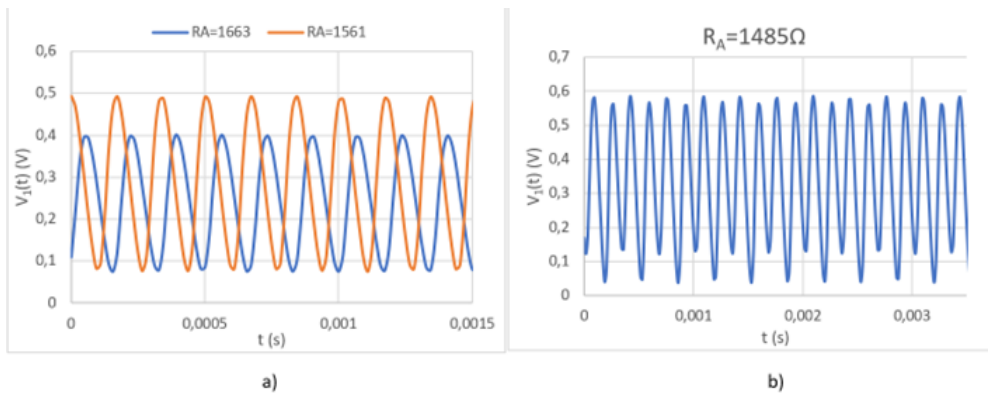


Figura 3.10: Gráfica experimental de  $V_1(t)$  para a)  $R_A = 1663\Omega, 1561\Omega$ , b)  $R_A = 1485\Omega$

Si seguimos disminuyendo el valor de  $R_A$ , vemos que (Figura (3.9 c)) cada una de las dos frecuencias en que se había desdoblado el ciclo límite original, se vuelven a desdoblar en otros dos, de manera que la función resultante estará compuesta por cuatro frecuencias, este proceso continúa hasta producirse una cascada de duplicación de periodo que da lugar a un comportamiento caótico del sistema en torno al punto de equilibrio  $P_+$  (Figura (3.9 d)). El sistema presenta un atractor extraño, conocido como Atractor de Rössler [11]. Debido a la simetría del sistema, sabemos que existirá otro atractor en torno al punto  $P_-$ , veremos que la coexistencia de estos dos atractores da lugar a otro fenómeno conocido como Atractor de Doble Espiral de Chua.

Aunque hayamos entrado en una región caótica, si seguimos disminuyendo el parámetro  $R_A$  podemos encontrar valores tales que el comportamiento caótico cesa para dar lugar a una ventana periódica en la que el circuito oscila periódicamente, al igual que en el diagrama de bifurcación de la ecuación logística que vimos en el Capítulo 1. Esto ocurre para  $R_A = 1439\Omega$  (Figura (3.9 e)), en cuanto modificamos ligeramente  $R_A$  el comportamiento vuelve a ser caótico.

En la Figura (3.11) mostramos cómo son las oscilaciones  $V_1(t)$  cuando el comportamiento es caótico, en concreto vemos el caso de  $R_A = 1375\Omega$ , que corresponde a la Figura (3.9 f). A diferencia de lo que teníamos en la Figura (3.10), las oscilaciones de  $V_1(t)$  no siguen ningún tipo de periodicidad, en su espectro de frecuencias no tendremos picos definidos en ciertas frecuencias,

sino que tendremos un espectro ruidoso.

Como corresponde a una región caótica, estas oscilaciones cambian radicalmente al modificar las condiciones iniciales, de hecho, incluso con las mismas condiciones iniciales experimentales el comportamiento es diferente. Esto se debe a que aunque iniciemos el circuito con los mismos parámetros iniciales, no podemos precisarlos con suficiente exactitud debido a, entre otras cosas, el inherente ruido eléctrico de los componentes del circuito. Esta ligera diferencia de las condiciones iniciales (que no podemos controlar) da lugar a evoluciones muy diferentes del sistema en cada caso.

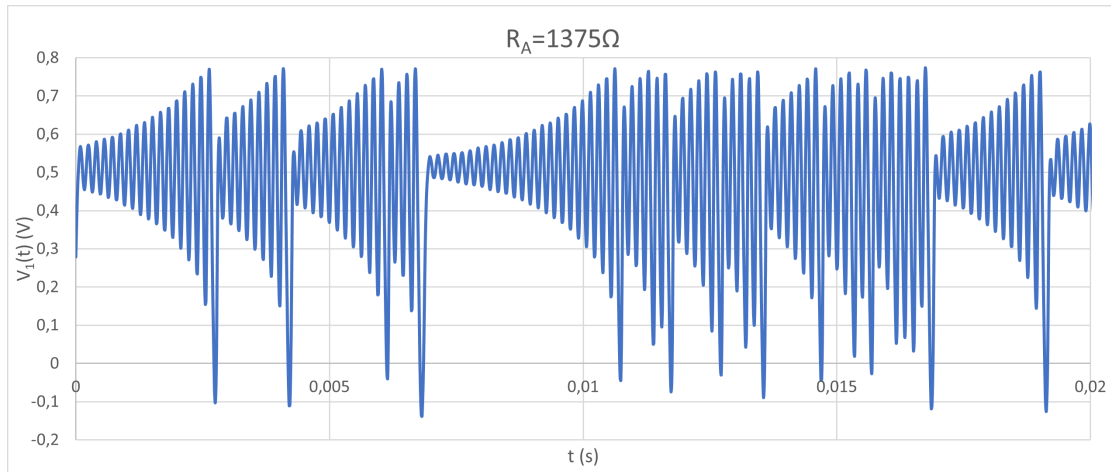


Figura 3.11: Gráfica experimental de  $V_1(t)$  para  $R_A = 1375\Omega$

Es importante destacar que en la Figura (3.9 f) la amplitud de oscilación de  $V_1$  es suficientemente grande como para penetrar por completo en la zona de  $P_0$ .

Tanto los puntos  $P_{\pm}$  como el punto  $P_0$  son inestables en esta región de valores de  $R_A$ . Para entender la diferencia de comportamiento de las trayectorias en las proximidades de estos puntos de equilibrio hacemos uso de la ecuación (2.3.2) que vimos en el capítulo anterior. En la región en la que estamos,  $\gamma(P_0) \gg 0$  por lo que las trayectorias próximas a  $P_0$  se alejarán exponencialmente del mismo. Por otro lado,  $\gamma(P_{\pm}) \ll 0$  y  $\sigma(P_{\pm}) > 0$  por lo que las trayectorias próximas a  $P_{\pm}$  se acercarán hacia los puntos de equilibrio describiendo hélices cuyo radio va aumentando. Por tanto, aunque ambos puntos de equilibrio son inestables, en  $P_0$  las trayectorias se alejan inmediatamente del punto de equilibrio mientras que en  $P_{\pm}$  las trayectorias se alejarán dando vueltas de radio creciente.

Cuando las trayectorias pasan por las proximidades del punto de equilibrio  $P_0$ , que es inestable, estas se tienden a alejar del mismo y, debido a la simetría de los puntos  $P_{\pm}$ , podrán dirigirse tanto hacia  $P_+$  como hacia  $P_-$ . Esto es lo que ocurre en el circuito cuando bajamos la resistencia  $R_A$  por debajo de  $1370\Omega$  aproximadamente. La amplitud de oscilación de  $V_1$  es suficientemente grande como para acercarse a  $P_0$  y que desvíe su trayectoria hacia  $P_-$ . De esta manera se consigue que las trayectorias no oscilen en torno a un punto de equilibrio concreto sino que se muevan en torno a los tres puntos de equilibrio. Cuando estén cerca de  $P_{\pm}$ , hemos visto que se alejarán de los mismos oscilando alrededor de ellos con amplitud creciente, pero cuando la oscilación tenga amplitud suficiente como para acercarse al punto de equilibrio inestable  $P_0$ , este o bien devuelve la trayectoria al punto de equilibrio del que procede, o bien lo envía al otro.

Este mecanismo conforma el famoso Atractor de Doble Espiral de Chua, que se trata de un

atractor extraño y se muestra en la Figura (3.12 a). En general las trayectorias serán caóticas aunque es posible encontrar trayectorias que oscilen periódicamente en torno a los dos puntos de equilibrio, es decir, ventanas periódicas, tal y como se puede ver en la Figura (3.12 b). Notemos nuevamente que cuanto menor sea el valor de  $R_A$  mayor será la amplitud de oscilación puesto que la ganancia del sistema aumenta y los puntos  $P_{\pm}$  se alejan cada vez más del punto  $P_0$ , esto se traduce en que el atractor va aumentando de tamaño conforme  $R_A$  disminuye.

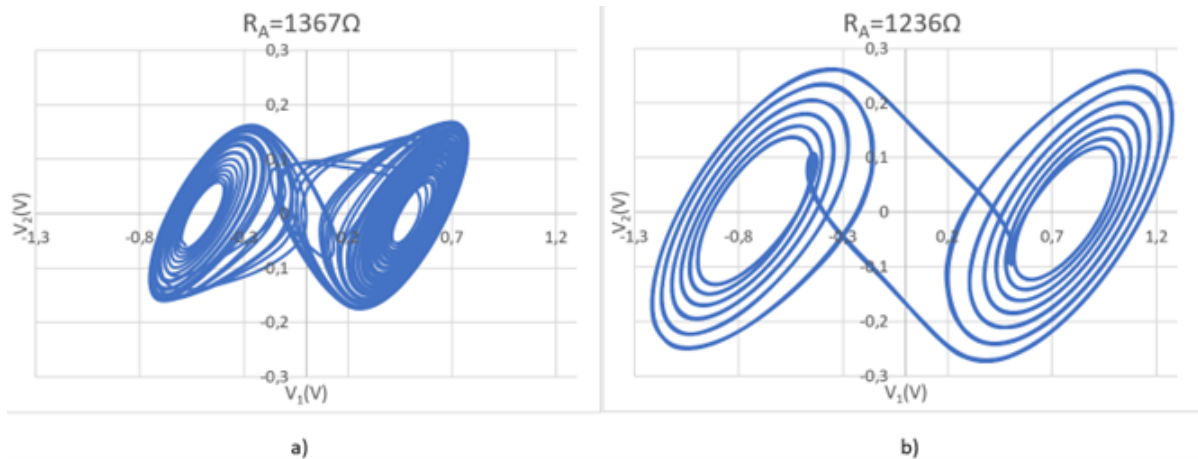


Figura 3.12: Atractor de Doble Espiral Chua

En las Figuras (3.13) y (3.14) se muestran las gráficas  $V_1(t)$  correspondientes a los valores de  $R_A$  de la Figura (3.12), es decir, en la región del Atractor de Chua. Se observa cómo  $V_1$  oscila un tiempo en torno a un punto  $P_{\pm}$  y después "salta" al otro para comenzar a oscilar en torno a él. Tanto las oscilaciones como los saltos parecen aleatorios en (3.13) mientras que en (3.14) son periódicos y están perfectamente definidos. Sin embargo, debemos decir que la gráfica de (3.13) es perfectamente determinista, si conociéramos las condiciones iniciales con precisión exacta podríamos conocer cuándo se va a producir cada uno de los saltos y cuántas oscilaciones realizará en torno a cada punto antes de saltar. Lo que ocurre en la práctica es que no se pueden determinar con tanta exactitud las condiciones iniciales, por lo que la evolución será prácticamente aleatoria e irrepetible, lo que es de gran interés en campos como la criptografía.

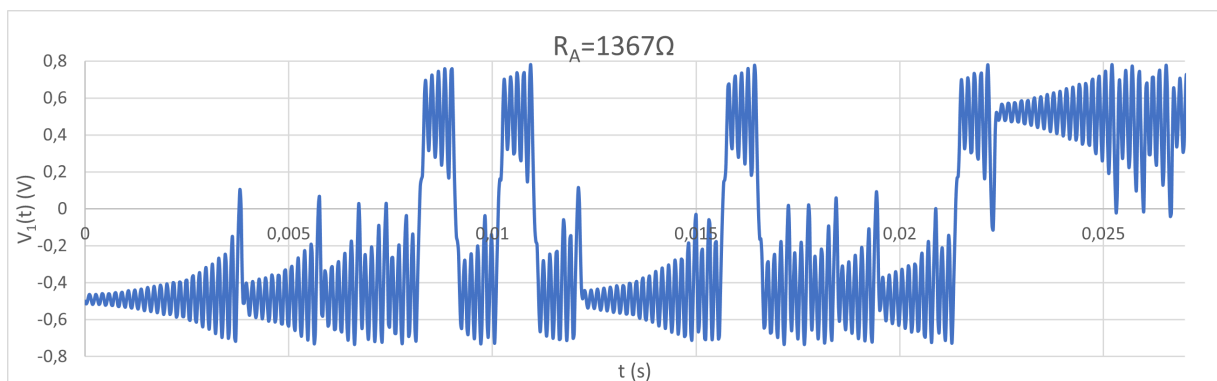


Figura 3.13: Oscilación caótica en el Atractor de Doble Espiral de Chua

Por último, si seguimos disminuyendo aún más  $R_A$ , el Atractor de Doble Espiral Chua desaparece y volvemos a tener oscilaciones en torno a un único punto de equilibrio  $P_{\pm}$ . En concreto esto ocurre cuando  $R_A$  alcanza un valor de unos  $1130 - 1140\Omega$ . Las oscilaciones primero son

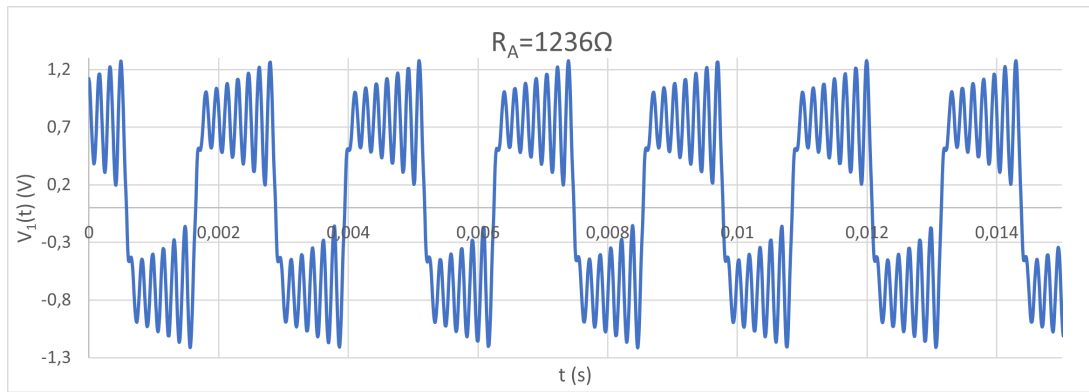


Figura 3.14: Ventana periódica en el Atractor de Doble Espiral de Chua

caóticas y después, al seguir disminuyendo  $R_A$  pasamos por oscilaciones de cuatro periodos, después de dos y finalmente se llega a un ciclo límite estable.

La explicación de este comportamiento se debe al gran aumento del módulo de  $V_1(P_{\pm})$  para estos valores de  $R_A$  (Figura 3.7). Este aumento hace que las oscilaciones se alejen del punto  $P_0$  cada vez más, es cierto que la ganancia también aumenta al disminuir  $R_A$  pero lo hace en menor medida. El resultado final es que las oscilaciones se alejan de  $P_0$  y no tienen amplitud suficiente como para ir de un punto de equilibrio a otro, por lo que oscilarán únicamente en torno a un punto de equilibrio  $P_{\pm}$ . Pero, de acuerdo con la Tabla (3.1), hasta que no llegemos a  $R_A = 1044$ , los puntos  $P_{\pm}$  no son estables, lo que explica que dichas oscilaciones sean caóticas y que aparezcan bifurcaciones de duplicación de periodo. Cuando  $R_A$  esté por debajo del valor anterior, recuperaremos el ciclo límite estable (veremos que en la práctica se alcanza la saturación total antes de que  $R_A$  llegue a dicho valor).

En este rango de valores comienza a observarse la saturación del amplificador operacional. La amplitud de las oscilaciones de  $V_1$  es ya suficientemente grande como para que el amplificador operacional se sature, cuando esto ocurre la oscilación se para y  $V_1$  se mantiene constante en el voltaje de saturación hasta que vuelve a bajar por debajo de dicho voltaje y la oscilación continúa. En la Figura (3.15) vemos este comportamiento y observamos que se produce para un voltaje de unos  $2V$ , que es algo menor que el esperado, pues estamos alimentando al amplificador operacional entre  $-2,5$  y  $2,5V$  (recordemos que estamos trabajando en el sistema de referencia en el que  $V_{ref} = 0V$ ). Esto se debe a que estamos trabajando con un amplificador operacional real y no ideal, el voltaje de saturación será algo menor que el de la fuente; además, tal y como se ve en la Figura (3.4), el voltaje  $V_1$  no es exactamente el de salida del amplificador, tenemos una caída de tensión en  $R_1$ .

El hecho de que la saturación se alcance a un voltaje menor que el ideal, justifica que la podamos observar en zonas en las que el punto de equilibrio no es estable, como ocurre en la Figura (3.15) donde vemos duplicación de periodo saturada. De acuerdo con la Figura (3.7) y la Tabla (3.1), si la saturación se alcanzase en  $2,5V$ , solo la observaríamos cuando el punto de equilibrio  $P_{\pm}$  fuera estable, sin embargo, al alcanzarse en  $2V$ , ya aparece para valores de  $R_A$  en los que  $P_{\pm}$  es aún inestable.

Al disminuir  $R_A$  las oscilaciones están cada vez más saturadas hasta que para  $R_A = 1088\Omega$  la saturación es total: en la pantalla del osciloscopio observaremos un único punto fijo en  $V_1 \approx 2V, V_2 \approx 0V$ .

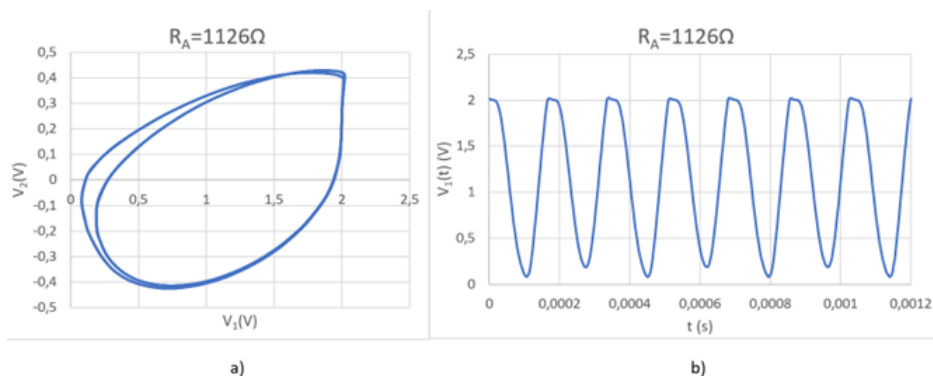


Figura 3.15: Saturación del amplificador operacional

Hemos visto que en esta región de valores de  $R_A$  ocurren multitud de fenómenos complejos que podemos explicar cualitativamente con los modelos teóricos del capítulo anterior. Los resultados concuerdan bastante bien, encontrando como únicas discrepancias las debidas a la saturación del amplificador y a la característica exponencial de los diodos, que no hemos tenido en cuenta en nuestro modelo.

Por último mencionamos que otra manera de analizar el comportamiento cualitativo de este circuito es conectando al mismo una salida de audio de modo que podamos escuchar la señal del circuito. El oído es sensible al cambio de frecuencia de la oscilación y nos permite discernir muy bien entre ciclos límites estables, duplicaciones de periodo y regiones caóticas. Hemos podido comprobar cómo en un ciclo límite estable, la señal de salida se oía con una frecuencia nítida, y al producirse las bifurcaciones de duplicación de periodo se podía escuchar como a la frecuencia inicial se le superponía otra más grave, cuando llegábamos a una zona caótica se dejaban de escuchar frecuencias concretas para pasar a un ruido que únicamente cesaba al atravesar ventanas periódicas entre el caos.

### 3.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales

Una de las principales características de la dinámica caótica es la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Aunque las ecuaciones que rigen un sistema caótico sean deterministas, en la práctica la evolución es impredecible debido a que no existen métodos para fijar las condiciones iniciales con la precisión suficiente.

Esto es lo que vamos a mostrar en esta sección, vamos a arrancar el circuito en una región caótica con aparentemente las mismas condiciones iniciales y veremos que al poco tiempo la evolución del sistema en un caso y otro no tiene nada que ver. La evolución es similar en las primeras oscilaciones pero enseguida se van distanciando hasta que se produce una pérdida total de la correlación entre ellas.

Para conseguir iniciar el circuito en idénticas condiciones iniciales (las que se pueden precisar en la práctica), utilizaremos un transistor que actuará a modo de interruptor, en concreto usaremos el modelo 2N7000, que es un transistor MOSFET.

Ahora vamos a trabajar en el sistema de referencia en que  $V_{ref} = 2,5V$ . Conectaremos la fuente (S) a un voltaje de  $0V$ , el drenador (D) al voltaje  $V_1$  y la puerta (G) del transistor a un generador de funciones GW Instek GFG-8219A. El generador producirá una onda cuadrada desde  $0V$  hasta un voltaje mayor que la tensión umbral  $V_T$  del transistor que denotaremos por

$V'$ . Notemos que la tensión entre la puerta y la fuente,  $V_{GS}$ , es precisamente la tensión de la onda producida por el generador (pues la fuente está a  $0V$ ).

Para que el transistor funcione como un interruptor, debe alternar entre región de corte y de saturación, para actuar como un interruptor abierto y cerrado respectivamente. El régimen de corte ocurrirá cuando la señal cuadrada se encuentre en un valle ( $V_{GS} = 0 < V_T$ ), el régimen de saturación se alcanzará cuando la señal cuadrada esté en una meseta ( $V_{GS} = V' > V_T$ ).

Cuando el transistor actúa como un interruptor abierto el circuito evoluciona según lo visto en la sección anterior, como si el transistor no estuviera. En cambio, cuando el transistor actúa como un interruptor cerrado el circuito ya no es el mismo, estamos imponiendo un valor a  $V_1$  de manera que el circuito ya no evoluciona sino que se fijan unos valores: condiciones iniciales. Por tanto, cuando  $V_{GS} = V'$  estamos fijando unas condiciones iniciales determinadas, y cuando  $V_{GS} = 0$  dejamos evolucionar libremente al circuito desde las condiciones iniciales impuestas anteriormente.

A medida que la señal cuadrada vaya completando ciclos, veremos en el osciloscopio tantos arranques distintos como ciclos haya completado la señal. Como todos los arranques parten de las mismas condiciones iniciales, si comparamos la evolución del sistema a partir de distintos arranques podremos observar la pérdida de correlación que sufren dichas evoluciones, es decir, la sensibilidad a las condiciones iniciales que posee el circuito (puesto que aunque digamos que las oscilaciones parten del mismo conjunto de condiciones iniciales, realmente tendremos una incertidumbre, por pequeña que sea (ruido eléctrico de los componentes del circuito), que hará que la evolución del sistema sea completamente diferente).

Cabe decir que experimentalmente al introducir el transistor en el circuito las regiones en las que se produce el caos cambian. Para obtener las gráficas que vemos en la Figura (3.16) hemos modificado ligeramente los valores de las resistencias respecto a los valores de la sección anterior para obtener la región caótica del Atractor de Doble Espiral de Chua. En esta región ya hemos visto (Figura (3.13)) que las oscilaciones son caóticas, ahora vamos a ver cómo cambia su evolución al iniciar el circuito con los mismos parámetros y condiciones iniciales.

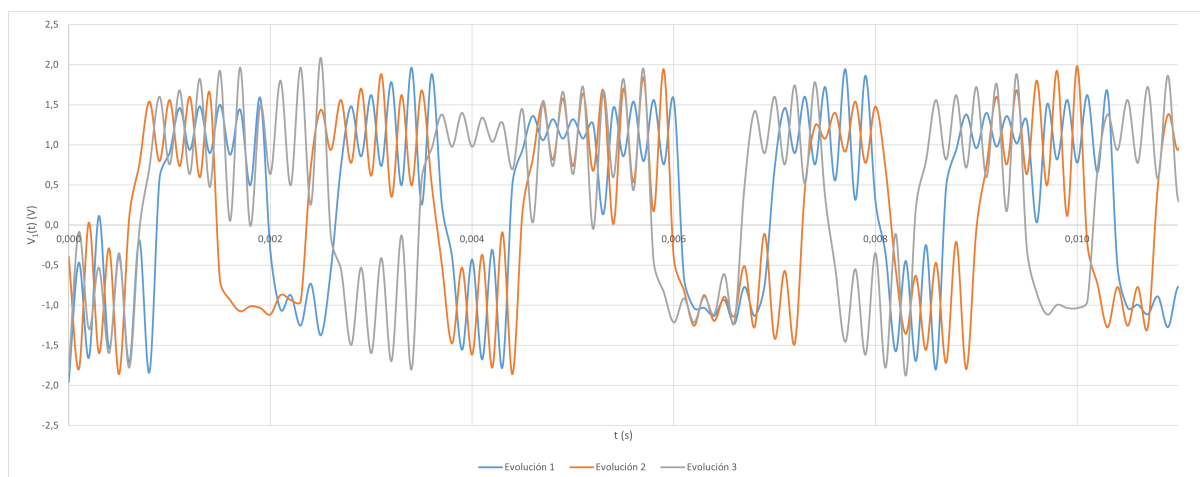


Figura 3.16: Pérdida de correlación debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales

Vemos claramente cómo tras un breve periodo de tiempo las oscilaciones pierden totalmente su correlación, evolucionan independientemente. Esto ocurre debido a que en esta región el sistema es caótico y por tanto tiene gran sensibilidad a las condiciones iniciales: nunca podremos fijar

con exacta precisión las condiciones iniciales y por tanto, nunca podremos predecir el comportamiento del sistema. Aunque hayamos fijado unas condiciones iniciales y parámetros concretos, la evolución del sistema es muy diferente en cada caso, es impredecible. Una interesante aplicación de esta característica del circuito es la generación de números aleatorios.

Las gráficas de la Figura (3.16) corresponden a las oscilaciones de  $V_1(t)$  en el Atractor de Doble Espiral de Chua, pero si en cambio estuviéramos en una región no caótica del sistema (como un ciclo límite estable (Figura (3.9 a))), la evolución sí que sería la misma bajo las mismas (aunque no idénticas) condiciones iniciales.

Volvemos a destacar que a pesar de estos resultados, el sistema es determinista. Si simulamos el circuito suponiendo ideales todos los elementos (para que no tengan ruido que pueda modificar ligeramente las condiciones iniciales), podremos precisar al programa las condiciones iniciales con la precisión que queramos y por tanto las evoluciones resultantes serán idénticas en todos los casos. En cambio, si utilizamos un simulador más realista que introduzca un cierto parámetro de ruido en los elementos del circuito, la evolución dejará de ser idéntica, que es lo que ocurre en la realidad.



# Conclusiones

La dinámica caótica es un extenso campo de estudio cuyo análisis es complejo por varios motivos: computacionalmente las ecuaciones no lineales son difíciles de resolver y por lo general es necesario recurrir a métodos numéricos, por otro lado, su análisis experimental es complicado debido a la impredecibilidad de estos sistemas. Por ello se suelen estudiar desde un punto de vista más geométrico que nos permite obtener información global cualitativa del comportamiento del sistema sin necesidad de hallar las soluciones exactas.

El fenómeno del caos es una propiedad emergente consecuencia de la no linealidad de los sistemas, a partir de ecuaciones no lineales sencillas se pueden producir comportamientos realmente complejos e impredecibles. A pesar de la dificultad de su análisis, es necesario un estudio de estos sistemas debido a que la gran mayoría de procesos reales son de naturaleza no lineal.

En este trabajo hemos mostrado las principales características y mecanismos matemáticos que llevan a un sistema dinámico a evolucionar caóticamente. En particular, hemos estudiado las oscilaciones caóticas en el circuito de Chua, abordando el problema desde tres puntos de vista diferentes: teoría, simulación y experimentación. De este modo se pretende aportar una visión lo más completa posible del fenómeno del caos aplicado concretamente a las oscilaciones del circuito de Chua.

Hemos construido un modelo matemático que da cuenta del sistema físico del circuito de Chua. Aplicando la Teoría de Sistemas Dinámicos del Capítulo 1 a este modelo, y construyendo experimentalmente el circuito real, hemos podido analizar el sistema, obteniendo resultados cualitativos similares por ambos caminos.

A pesar de ello, hemos visto que el modelo presenta una serie de limitaciones: no hemos tenido en cuenta la saturación del circuito (en un circuito real no podemos tener ganancia infinita) ni la característica exponencial de los diodos (que hemos supuesto lineal). En el circuito real observamos ciertos comportamientos inexplicables en el modelo debido a estas limitaciones, sin embargo, en las regiones en las que las limitaciones son despreciables, que son la mayoría, el acuerdo cualitativo es muy bueno.

Finalmente hemos comprobado experimentalmente una de las principales características del caos, que es la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Esta condición da origen a que su evolución de un sistema caótico sea totalmente impredecible y se pueda considerar aleatoria, lo cual tiene multitud de aplicaciones en campos como la generación de números aleatorios y la criptografía.

# Bibliografía

- [1] DI BERNARDO, M.; BUDD, C.J.; CHAMPNEYS, A.R.; and KOWALCZYK, P. (2008). *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. London: Springer.
- [2] CHUA, L.O. (1992). The Genesis of Chua's Circuit. *AEÜ*, 46, 250-257.
- [3] DEVANEY, R.M. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (2nd ed.). New York: Springer
- [4] FARKAS, M. (1994). *Periodic Motions*. New York: Springer
- [5] GLENDINNING, P. (1994). *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [6] GORDILLO, F. (2009). Estabilidad de sistemas no lineales basada en la teoría de Liapunov. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 6, 5-16.
- [7] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P.m(1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer.
- [8] KENNEDY, M.P. (2013). "Genealogy of Chua's Circuit" en *Chaos, Cnn, Memristors And Beyond: A Festschrift For Leon Chua*, A. Adamatzky and G. Chen. Singapore: World Scientific Publishing.
- [9] KENNEDY, M.P. (1993). Three Steps to Chaos-Part I: Evolution. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 40, 640-656.
- [10] KENNEDY, M.P. (1993). Three Steps to Chaos-Part II: A Chua's Circuit Primer. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 40, 657-674.
- [11] MATSUMOTO, T.; CHUA, L.O. and KOMURO, M. (1987). Birth and Death of the Double Scroll. *Physica D*, 24, 97-124.
- [12] SILVA, C.P. (1993). Shil'nikov's Theorem-A Tutorial. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 40, 675-682.
- [13] WIGGINS, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (2nd ed.). New York: Springer.
- [14] YAWALE, S. and YAWALE, S. (2021). *Operational Amplifier: Theory and Experiments*. Singapore: Springer Singapore.