



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

**Sistemas integrables y superintegrables en bajas dimensiones:**

**El potencial Morse**

*Autor:*

*Jorge Reyes Guerrero*

*Tutor/es:*

*M. A del Olmo*

*J. Negro*

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Primeros conceptos</b>	<b>7</b>
2.1. Álgebra de Lie . . . . .	7
2.2. Formulación hamiltoniana y cuántica de la mecánica . . . . .	10
<b>3. Sistemas integrables y superintegrables</b>	<b>13</b>
3.1. Introducción . . . . .	13
3.2. Primeras nociones . . . . .	13
3.3. Obtención de sistemas maximalmente superintegrables . . . . .	14
3.4. De $su(1,1)$ al potencial de Morse . . . . .	20
<b>4. El potencial Morse: tratamiento cuántico</b>	<b>22</b>
4.1. Factorización de un Hamiltoniano . . . . .	22
4.2. Factorización del potencial de Morse . . . . .	25
4.3. Jerarquía de Hamiltonianos y operadores . . . . .	27
4.3.1. Las dos factorizaciones de los Hamiltonianos $H_n$ . . . . .	27
4.3.2. La jerarquía $H_n$ y los operadores intercambio . . . . .	28
4.4. Estados fundamentales de los Hamiltonianos $H_n$ . . . . .	29
4.5. Sectores . . . . .	31
4.6. Álgebra . . . . .	35
<b>5. Morse Potential, tratamiento clásico</b>	<b>37</b>
5.1. Marco teórico . . . . .	38
5.2. Particularización a potencial Morse . . . . .	40
5.3. Constantes del movimiento y trayectorias . . . . .	42
<b>6. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Appendices</b>	<b>46</b>
<b>A. Primeros conceptos y definiciones</b>	<b>46</b>
A.1. Concepto de grupo . . . . .	46
A.2. Espacios y variedades . . . . .	47
A.3. Corchete de Lie . . . . .	49
<b>B. Producto <math>J^{-1}K'(J^{-1})^T</math></b>	<b>51</b>
<b>C. Desarrollo en serie de potencias de exponencial de matrices, (3.20)</b>	<b>53</b>
<b>D. Expresión matricial del potencial como producto <math>(A^\dagger K A)</math></b>	<b>54</b>
<b>E. Obtención explícita del potencial: caso clásico de (5.14)</b>	<b>54</b>
<b>7. Bibliografía</b>	<b>57</b>

# Agradecimientos

En primer lugar, mencionar a mis tutores del TFG, Mariano del Olmo y Javier Negro. Agradecerles todas sus aportaciones tanto en el proceso de elaboración de este estudio, donde sus innumerables contribuciones y su infinita paciencia han guiado mi esfuerzo para confeccionar el documento presentado, como en lo referente a su papel como docentes, mostrando la máxima competencia al compartir sus conocimientos, mediante apreciaciones y discusiones, que llevaré siempre conmigo.

De igual manera, me gustaría hacer partícipe de cada pequeño logro obtenido y por conseguir, a la Universidad de Valladolid como colectivo, desde el resto de docentes que me han permitido formarme y completar esta carrera, pasando por todos aquellos trabajadores inadvertidos que con su esfuerzo han contribuido en construir y conservar esta institución, hasta las amistades forjadas estos cuatro años, haciendo únicos cada uno de ellos, por lo que siempre les estaré agradecido.

Por último, compartir mi orgullo con mi familia y amigos, los cuales me han dedicado su tiempo y han configurado la persona que soy ahora mismo. En especial, agradecer a mis padres y hermanos los valores e intereses transmitidos, pues en particular me han contagiado su curiosidad que me ha llevado a cursar Física, y en última instancia, confeccionar este estudio.

# Abstract

The aim of the study we are about to conduct is to go in depth in the properties of integrable low dimensional systems by the construction, factorization, and resolution of the Morse 1-dimensional one. In this way, we will begin with a review of the basics that justify and define this analysis. Here, we will discuss about the Algebra, the Lie groups, and other mathematical notions closely linked with the symmetries that characterize this systems. We will remember also, the standart elements typical of the hamiltonian mechanic, from the classic point of view as well as the quantum one, which we will work with in our following factorization. Then, we will delve into this integrable systems, showing his properties, relating them with the superintegrable ones and suggesting a general method to build them. After this introductory parragraph, we will fix this notions to our Morse potential offer. In the next sections, we will use the Hamiltonian built to split it with a classical and quantum factorization, considering the interchange operators, the obtaining and plotting of eigenstates, and the determination of the symmetry relations and their group behavior. Finally, we will conclude our study with a few considetations about the whole proces, the techniques applied, etc.

# Resumen

El estudio que se va a llevar a cabo tiene como objetivo indagar en las propiedades y técnicas de análisis aplicables a sistemas integrables en bajas dimensiones por medio de la construcción, factorización y resolución de un potencial de Morse 1-dimensional. Para ello, comenzaremos haciendo un repaso de la fundamentación que justifica y enmarca este análisis, donde hablaremos acerca de grupos y álgebras de Lie y otras nociones matemáticas íntimamente relacionadas con las simetrías que caracterizan estos sistemas. Recordaremos, de igual manera, los elementos estándar en la formulación hamiltoniana tanto de sistemas clásicos como cuánticos, estructurando las bases de nuestra posterior particularización. Seguidamente, ahondaremos en estos sistemas integrables, exponiendo sus propiedades particulares, relacionándolos con los superintegrables y proponiendo un método general de construcción para ellos. Tras esta etapa introductoria, procedemos a concretar todas estas nociones para nuestro sistema en estudio: el potencial Morse. A continuación, usaremos la forma hamiltoniana obtenida para diseccionarla desde un esquema clásico y cuántico, deteniéndonos en la factorización del hamiltoniano, construcción de operadores intercambio, obtención de los estados propios y su representación gráfica, y, por último, la obtención del grupo dinámico de simetrías que determinan los operadores mencionados. En la siguiente etapa estudiaremos el sistema clásico correspondiente utilizando unas técnicas similares al caso cuántico, aunque ahora trataremos con funciones en vez de operadores y obtendremos las constantes de movimiento y las trayectorias del sistema. Finalmente, concluiremos el estudio mediante una serie de consideraciones acerca de estos sistemas así como del método de estudio empleado.

# 1. Introducción

Este trabajo se enmarca en el análisis de los sistemas integrables y superintegrables, ambos de gran interés y aplicación en Física tanto históricamente, por ejemplo en el problema de Kepler, el oscilador armónico y el potencial de Coulomb o más modernamente el átomo de Hidrógeno o modelizando el potencial de una molécula de hidrógeno  $H_2$ . Al margen de su capacidad práctica para representar configuraciones naturales, también suponen una contribución al campo de la Física teórica asentando bases y principios en el formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano, cuyas implicaciones se extienden de manera generalizada sobre todos los campos de la Física, tanto clásicos como cuánticos.

La propiedad particular de estos sistemas integrables y superintegrables es admitir una solución exacta para las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica de las partículas que lo integran. Esta característica no es general, sistemas como el péndulo doble o el problema de tres cuerpos son sensibles a las condiciones iniciales, mostrándose incluso, para ciertas configuraciones, como sistemas físicamente caóticos, por lo que no poseen una resolución analítica. Estos, al igual que ocurre en la mayoría de planteamientos reales, precisan aproximaciones. Por su parte los sistemas que poseen una resolución exacta exponen ventajas tales como la versatilidad de los métodos de resolución propuestos, los cuales presentarán un mayor grado de adaptación a variaciones en la forma de los potenciales etc. Concretamente encontramos la posibilidad de factorizar el Hamiltoniano, método estándar para brindar una solución analítica y que expondremos separadamente para el caso cuántico y clásico en los capítulos 4 y 5 respectivamente.

Por otra parte, los sistemas integrales y superintegrables deben su condición a las simetrías continuas que presentan y a la relación constatada por medio del Teorema de Noether entre estas y la conservación de magnitudes. Dicho teorema puede ser considerado como uno de los fundamentales en nuestro paradigma de comprensión del entorno por medio de la Física, pues en esencia conecta la estructura algebraica o geométrica de un sistema con su comportamiento. La dinámica de estas configuraciones integrables y superintegrables, de acuerdo a esta relación, partirán de la abstracción de sus ligaduras individuales a una estructura colectiva, determinada por las simetrías que presente. Dichas simetrías, tal y como comentaremos en el primer capítulo, podrán determinar un grupo de Lie. La exigencia de que este sea de Lie responde a la necesidad de considerar simetrías continuas, precisado este adjetivo por el Teorema de Noether. En este sentido ahondaremos en qué entendemos por un grupo de Lie y cómo podemos equiparlo con una aplicación bilineal, corchete de Lie, para construir un álgebra de Lie.

Concretamente, serán estos elementos del grupo de Lie aquellos que asociaremos a operadores de simetrías pues al actuar sobre el sistema lo dejarán invariante. La cantidad de estos, y por ende de magnitudes que se conservan, distinguirá con qué tipo de sistema estamos tratando tal como se relata en el capítulo 3. Los sistemas hamiltonianos integrables, vendrán caracterizados por presentar  $N$  constantes del movimiento, siendo  $N$  el número de grados de libertad que posee dicho sistema, y asegurarán la posibilidad de resolver analíticamente el sistema, o lo que es equivalente, determinar las trayectorias, en el caso clásico, o espectros de energías, en el

caso cuántico. Por su parte los sistemas hamiltonianos superintegrables, requieren más de  $N$  constantes del movimiento y aseguran una resolución algebraica. Si estos expresan el máximo número de simetrías, y por tanto constantes del movimiento, posibles para ese sistema, hablaremos de maximalmente integrables, mostrando  $2n - 1$  constantes del movimiento.

La necesidad de presentar dichas constantes del movimiento, las cuales son las verdaderamente cruciales en la determinación de la dinámica de un sistema, por medio de simetrías se debe a la fácil escalabilidad e identificación que tienen estas por medio del álgebra de Lie correspondiente. Por el contrario, las magnitudes que se conservan no serán en general triviales o conocidas, si bien hay excepciones como la partícula libre en la cual, como es bien sabido, la energía y el momento son constantes del movimiento. Como ejemplo opuesto podemos considerar el problema de Kepler con la conservación de la energía pero también del vector de Laplace-Runge-Lenz. A pesar de ello, sí adoptaremos como premisa la conservación de la energía, en la medida que esta viene dada por invariancias en las traslaciones temporales, y asociada a esta la existencia de un Hamiltoniano, configurado como constante del movimiento.

Gracias a la caracterización por grupos de simetrías surgirán propuestas de construcción de este tipo de sistemas tales como la expuesta en el capítulo heredando el desarrollo de reducción de Marsden-Weinstein. En nuestro caso, trabajaremos sobre cómo emplearlo en la obtención de un potencial Morse 1-dimensional, el cual, a pesar de su sencillez, presenta utilidad práctica por ejemplo en la modelización del enlace químico de ciertas moléculas dipolares tales como el  $H_2$ . Dicho estudio, así como el posterior análisis que llevaremos a cabo por medio de la factorización, se estructura como la aplicación de metodologías estándar para los sistemas integrables y superintegrables a nuestro caso particular. El interés de trabajar en bajas dimensiones radica en dos consideraciones, la sencillez y la extendibilidad. Sencillez pues, además de que en bajas dimensiones los sistemas integrables y superintegrables están perfectamente definidos, el tratamiento de las variables se ve reducido a un número limitado de grados de libertad, en nuestro caso uno únicamente. Por otra parte, las diferencias en el desarrollo al realizar el análisis en sistemas de mayor dimensión son simplemente formales, lo que permite comprender dichos sistemas y dinámicas a partir del propuesto. En este sentido, cuando brindemos un método de construcción de este tipo de sistemas, lo cual tendrá lugar en el capítulo 3.3, pretendemos exponerlo con la mayor generalidad posible dentro de la particularización unidimensional.

Por último señalar algunos de estos ejemplos de otros potenciales superintegrables y de gran relevancia y aplicación tanto en la física como en otros campos son Pöschl-Teller o Calogero-Morse. Estos como se comentaba podrán ser construidos y factorizando siguiendo las pautas expuestas en nuestro desarrollo<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Puede constatarse esta relación formal en la construcción de estos sistemas en [2], y en [6] para la factorización clásica.

## 2. Primeros conceptos

Vamos a comenzar este estudio haciendo un repaso de la terminología esencial que usaremos en siguientes capítulos. Dividiremos esta en dos bloques, donde el primero corresponderá a conceptos propios del grado en Física, los cuales si bien serán familiares al lector, han sido incluidos persiguiendo la completitud del documento. Este se recogerá en el apéndice A. El segundo bloque por su parte, concreta términos más específicos acerca de los grupos de Lie y las MASAs, protagonistas en el desarrollo que nos ocupa, y constituye el primer capítulo de nuestra discursión.

### 2.1. Álgebra de Lie

En esta sección, tras plantear las nociones base recogidas en el anexo, vamos a exponer los objetos que propiamente intervendrán de forma directa en nuestro planteamiento. Comenzaremos, por el álgebra de Lie

**Definición 1. Álgebra de Lie** Sea  $\mathbf{V}$  un espacio vectorial que consideraremos para nuestros propósitos de dimensión finita  $N$ . Definimos el álgebra de Lie finito-dimensional  $\mathfrak{g}$ , como el espacio vectorial  $\mathbf{V}$  equipado con el corchete de Lie como aplicación  $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ . Entenderemos por tanto la dimensión del álgebra de Lie como la dimensión del espacio vectorial subyacente.

Ahora bien, dado que nuestro objetivo es trabajar con el corchete de Lie, ya sea en su forma como corchete de Poisson o como conmutador, por medio de su representación sobre un espacio vectorial, nuestro interés se enfoca en escalar dicha representación al propio álgebra de Lie. El concepto que mejor recoge esta idea es el denominado álgebra de Lie matricial.

**Definición 2. Álgebra de Lie matricial** Sea  $G$  un grupo de Lie matricial y denotemos por la exponencial de una matriz  $X$ ,  $e^t X$ , a su desarrollo en serie de potencias dado por:

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} . \quad (2.1)$$

Entonces podemos definir el álgebra de Lie de  $G$ , denotada por  $\mathfrak{g}$ , como el conjunto de todas las matrices  $X$  tales que  $e^{tX}$  está en  $G$  para cualquier número real  $t$ .

La característica notable de las álgebras de Lie, y por la cual participan como pieza fundamental en nuestro estudio, será la posibilidad de recoger transformaciones de los parámetros infinitesimales, representadas por matrices del grupo matricial de Lie “muy próximas” a la identidad. A estas transformaciones infinitesimales les asociaremos generadores infinitesimales, elementos básicos en la teoría de grupos de Lie.

#### Generadores infinitesimales

Consideremos una colección de variables  $x_i$  como funciones  $f_i$  de ciertos parámetros  $\alpha_r$ ,

$$x_i = f_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_r) .$$

Introduciendo ahora una alteración en estos parámetros,  $\delta\alpha$ , esta se verá reflejada en una variación de  $x_i$ , la cual si es infinitesimal podremos desarrollar en serie de potencias en torno a la transformación identidad,  $I$ , que dejaría invariante  $x_i$ ,

$$\delta x_i = \sum_s \Lambda_{is}(x) \delta\alpha_s + \mathcal{O}(\delta\alpha)^2, \quad \Lambda_{is}(x) = \left. \frac{\partial f_i(x, \alpha)}{\partial \alpha_s} \right|_I,$$

donde podemos despreciar los términos de orden dos o superiores. Si ahora estudiamos la acción del grupo de Lie en funciones  $\phi(x)$  y recogemos la transformación introducida por medio de campos vectoriales  $X_s$ , podremos identificar estos con los generadores infinitesimales del grupo:

$$X_s = \sum_i \Lambda_{is}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2.2)$$

Estos generadores infinitesimales, como veremos más adelante, serán útiles para definir transformación finitas como repetida aplicación de las infinitesimales.

Por otra parte, es interesante tener en cuenta que, una vez propuesta una base de elementos del espacio vectorial asociado a este álgebra, se podrá definir unívocamente el resultado de evaluar el corchete de Lie para cada pareja de ellos. Esta posible descripción, a la cual comúnmente se refiere bajo el nombre de reglas de conmutación, se especifica con un carácter un poco más formal en la siguiente proposición.

**Proposición 1.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie finito-dimensional, y sea  $X_1, \dots, X_n$  una base de  $\mathfrak{g}$  (como espacio vectorial). Entonces, para cada  $i, j$ ,  $[X_i, X_j]$  se puede definir de manera única como:*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k. \quad (2.3)$$

donde  $c_{ijk}$  son las denominadas constantes de estructura de  $\mathfrak{g}$  expresadas en la base elegida.

**Demostración 1.** La justificación de este es directa tras observar el espacio imagen de la aplicación del corchete de Lie. Esta, por construcción, según la definición [13], devuelve un elemento en el mismo espacio vectorial del que toma las entradas. Es por ello que, fijada una base en el espacio de partida, sabemos que cualquier elemento perteneciente al espacio vectorial se podrá descomponer como combinación lineal de los elementos de la base y dichos coeficientes serán únicos, como resultado del Álgebra Lineal.

Concretando, consideremos una realización del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  sobre un espacio vectorial  $\mathbf{V}$ , donde fijada una base de vectores podremos identificar las matrices como operadores, y para la cual la aplicación corchete de Lie viene definida como el conmutador usual de operadores,

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X).$$

Entonces dada una elección de la base dual,  $X_1, \dots, X_n$ , se tiene aplicando el criterio de sumación de Einstein <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} [X_\mu, X_\nu] &= \Lambda_{i\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Lambda_{j\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \Lambda_{i\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Lambda_{j\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \left( \Lambda_{i\mu}(x) \frac{\partial \Lambda_{j\nu}}{\partial x_j} - \Lambda_{i\nu}(x) \frac{\partial \Lambda_{j\mu}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= c_{\mu\nu}^r X_r \quad r \in 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

de donde podemos obtener la forma concreta de dichas constantes para un tipo particular de aplicación bilineal.

Algunos de los grupos de Lie matriciales más frecuentes, por el álgebra asociado que presentan, son  $SO(n)$ , grupo ortogonal especial cuyas matrices verifican ser ortogonales y presentar determinante unidad, y las  $SU(n)$ , grupo unitario especial caracterizadas por determinante unidad y ser unitarias. El primero esta asociado con las rotaciones en el espacio de dimensión  $n$  en geometría euclídea.  $SU(n)$  por su parte, y apareciendo en la forma  $SU(p,q)$  se relaciona con las rotaciones en una geometría hiperbólica, donde la notación hace referencia a la forma cuadrática que conserva el grupo, en concreto, definida una métrica  $G = \text{diag}(p, q)$ , siendo los primeros  $p$  coeficientes 1 y los  $q$  siguientes  $-1$ , la condición de pertenencia a  $U(p,q)$  viene dada por:

$$UGU^\dagger = G, \quad U \in U(p, q) \quad (2.4)$$

donde el superíndice  $\dagger$  denota conjugación hermítica. Por su parte, pertenecer a  $SU(p,q)$  significa pertenecer a  $U(p,q)$  y ser unitario. El caso que abordaremos en nuestro desarrollo es el dado por  $U \in SU(1, 1)$ . En esta situación los requisitos sobre  $U$  implicarían,

$$U = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}),$$

donde la barra superior denota complejo conjugado, la forma conservada es  $u\bar{u} - v\bar{v} = 1$  y la representación de dicha geometría, puntos, rectas, etc, suele darse por medio del llamado disco de Poincaré.

Relacionado con estas álgebras, y en general de cualquier álgebra de Lie, es importante considerar un elemento de especial interés a la hora de construir bases, el denominado elemento Casimir. La utilidad de este se debe a que conmuta con todos los elementos del álgebra<sup>3</sup>. Un ejemplo de su aplicación lo podemos encontrar a la hora de estudiar el grupo de rotaciones tridimensional por medio de operadores momento angular,  $L_x, L_y, L_z$ ; en mecánica cuántica. En este paradigma es usual a la hora de plantear una base, tomar uno de dichos operadores, en particular  $L_z$ , y el operador momento angular cuadrático, elemento Casimir de este álgebra.

<sup>2</sup>Este indica que debe extenderse la suma para todos los valores posibles de los índices repetidos en un producto.

<sup>3</sup>Propiedad que hereda de pertenecer al centro del recubridor universal del álgebra de Lie. A pesar de que otros elementos pueden también pertenecer a este centro, la condición de elemento Casimir en base a otras características, que no tienen lugar en este estudio, es única para cada recubridor universal.

Antes de finalizar este apartado sobre nociones del álgebra es importante recordar el concepto de subálgebra y hacer mención a los casos de particular interés. Derivado de un álgebra que lo contiene, esta subcolección de elementos será, por construcción, cerrada bajo las operaciones heredadas y álgebra con la ley de composición heredada. Como ejemplos a destacar encontramos el objeto de MASA, de sus siglas en inglés Maximal Abelian SubAlgebra, que protagonizará la presentación de un modelo de reducción para obtener sistemas integrables y superintegrables, y el Nilpotente, el cual concretará aun más la especificación del MASA para finalmente alcanzar la forma del potencial deseada.

### MASA

La MASA de un álgebra de Lie es una subálgebra abeliana, i.e, donde cualquier par de elementos pertenecientes a dicho grupo conmutan, que presenta la mayor dimensión posible.

### Nilpotente

En un sentido similar a la categorización de nilpotencia para matrices, en la cual una matriz adquiere el adjetivo de nilpotente si su serie de potencias se anula a partir de un exponente, un álgebra de Lie,  $\mathbb{L}$ , es nilpotente si  $L^n = 0$  para algún número natural  $n$ , donde

$$[L_i, L] = L^{i+1} . \quad (2.5)$$

Podemos entender esta operación como las sucesivas reordenaciones que genera la aplicación del álgebra sobre sí misma. Estas reordenaciones no conservarán la dimensión del álgebra inicial, pues el comportamiento esperado de un álgebra nilpotente en este caso es disminuir el número de elementos no nulos en cada iteración de forma que se alcance el álgebra cero, el cual solo contiene el elemento nulo, en un número finito de pasos.

Pasamos, ahora sí, al siguiente apartado de esta etapa introductoria, en el que se abordará las principales magnitudes que tendremos en cuenta a la hora de plantear una formulación hamiltoniana de la mecánica.

## 2.2. Formulación hamiltoniana y cuántica de la mecánica

Añadida a estas consideraciones por simetrías y grupos, un sistema físico podrá ser estudiado por medio del análisis de las fuerzas y energías que intervienen en este. Estos análisis nos llevan a la construcción de funciones escalares de gran relevancia en el campo, como son el Lagrangiano o Hamiltoniano, que permiten sintetizar las ecuaciones que determinan la evolución temporal del sistema. Dada su importancia y utilidad, recogemos a continuación los resultados principales que permiten hacer un seguimiento de este segundo enfoque, el cual, predominantemente en este documento, adoptaremos como desarrollo principal y el cual complementamos con la visión de simetrías expuesta.

Tomaremos como base previa la formulación lagrangiana limitándonos a extender sus resultados a la hamiltoniana. Consideremos pues un sistema de partículas y su Lagrangiano,  $L = T - V$ , siendo  $T$  la energía cinética y  $V$  la potencial de dicho

sistema, describiendo ambas en términos de sus coordenadas y velocidades generalizadas<sup>4</sup> y el tiempo,  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{t})$ . Siendo así, podemos asociar a cada velocidad generalizada un momento conjugado que denominaremos  $p_i$  y el cual vendrá dado por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} . \quad (2.6)$$

Consecuentemente, involucrando estos nuevos parámetros en la descripción del sistema, los cuales aparecen sustituyendo la presencia de las velocidades generalizadas, podemos plantear el Hamiltoniano del sistema,  $H$ , como  $H = T + V$ , donde ahora ambas energías reflejarán este cambio de variables,  $T = T(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{t})$ ,  $V = V(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{t})$ . Fijemos además la forma para la energía cinética,

$$T = \frac{1}{2} m g^{i,j} p_i p_j ,$$

donde se ha aplicado el criterio de sumación de Einstein sobre los índices, los cuales recorren todas las partículas del sistema y, “m”, “ $g^{\mu,\nu}$ ” denotan la masa de la partícula y la métrica del espacio usada respectivamente. Esta es la forma estándar que adopta la energía, homogénea de segundo grado respecto de los momentos. Además, en esta línea se puede llegar a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} . \quad (2.7)$$

Estas son una herramienta fundamental en el desarrollo hamiltoniano. Un resultado que es importante señalar aquí es el principio de correspondencia, el cual conecta las descripciones de elementos clásicas y cuánticas y será tomado como hipótesis de cuantización. La forma concreta que adopta para el caso de los momentos conjugados constituye la propia definición de operador momento en mecánica cuántica,

$$\mathbf{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} , \quad (2.8)$$

Otra conexión interesante es la que se da entre la formulación hamiltoniana y lagrangiana. Se puede entender el Hamiltoniano como la transformada de Legendre del Lagrangiano,

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) , \quad (2.9)$$

expresión a la que recurriremos para obtener una función a partir de la otra. Formulas más abstractas permiten definir el Hamiltoniano por sí mismo, configurándolo como una función escalar intrínseca del sistema, usando espacios simplécticos<sup>5</sup>. En base a estas ecuaciones del movimiento, surgen una serie de relaciones expresadas por medio del corchete de Lie. En concreto, dada una función  $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , que opera en el espacio de fases, podemos describir su evolución temporal como:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.10)$$

<sup>4</sup>Las velocidades generalizadas,  $\dot{q}_i$ , vendrán determinadas por la derivada total de las coordenadas generalizadas,  $q^i(t)$ , respecto del tiempo  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ .

<sup>5</sup>Puede verse apartado 1.5 de [5] para ello.

**Demostración 2.** Para probar esta igualdad basta desarrollar en cadena la derivada total de  $f$  respecto del tiempo, sustituir teniendo en cuenta las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, 2.7y finalmente agrupar los sumandos para construir el corchete de Poisson en virtud de su definición A.1, concretamente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} . \end{aligned}$$

Dentro de este esquema en el que se analiza la evolución temporal de los parámetros del sistema, es natural interesarnos por indentificar aquellas magnitudes que se mantengan constantes en el tiempo. En este sentido, denominamos constante del movimiento o integral del movimiento en un sistema a aquella función del espacio de fases y el tiempo,  $A = A(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ , o equivalentemente  $A = A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , cuya derivada total respecto del tiempo es nula,

$$\frac{d}{dt}A(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 ,$$

donde se ha aplicado otra vez el criterio de sumación en el índice repetido. Teniendo ahora en cuenta la igualdad 2.10 y la antisimetría del corchete de Lie se obtiene la siguiente proposición.

**Proposición 2. Constante del movimiento en sistemas hamiltonianos.** *Una función  $f(q,p)$  será constante del movimiento de un sistema hamiltoniano si el corchete de Poisson  $\{H, f\}$ , siendo  $H$  el hamiltoniano del sistema, es nulo. De igual manera en el caso cuántico, consideraremos que un observable  $A$ , sin dependencia explícita del tiempo, es constante del movimiento si conmuta con el hamiltoniano, i.e,  $[H, A] = 0$ .*

Esta nos permite abstraer el sistema por medio del álgebra presente, sintetizando las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Finalmente es necesario en este punto distinguir un tipo particular de coordenadas, las cíclicas, por las implicaciones que estas tendrán en el desarrollo posterior. En mecánica teórica, denominaremos coordenada cíclica o ignorable de un sistema hamiltoniano a aquella que no aparece explícitamente en el Hamiltoniano. El resultado principal que utilizaremos acerca de estos se recoge en la siguiente proposición.

**Proposición 3.** *Sea  $q_i$  una coordenada cíclica del sistema. Entonces su momento conjugado asociado  $p_i$  es constante del movimiento.*

Estamos ahora sí en condiciones de pasar al próximo capítulo donde introduciremos los sistemas ingegrables y superintegrables en Física, para posteriormente proponer y sintetizar uno de ellos, el potencial Morse, objeto principal de estudio en este documento.

## 3. Sistemas integrables y superintegrables

### 3.1. Introducción

En Física, campo que pretende modelizar las leyes naturales por medio de una descripción matemática, es habitual el uso de aproximaciones que permitan adaptar el problema a las herramientas y metodologías de las que disponemos. Si bien la aplicación de dichas aproximaciones se justifica por sí misma en base a la utilidad de sus resultados y predicciones, existen una serie de problemas que poseen la peculiaridad de ser resolubles de manera exacta, los llamados sistemas integrables. Si además de exacta dicha resolución es algebraica tendremos entonces los denominados sistemas superintegrables. Ambos sistemas, debido a su condición, se pueden caracterizar completamente de forma analítica lo cual supone una gran motivación para su estudio, destacando su relación tan estrecha con las simetrías del sistema. El objetivo de esta sección es por tanto definir qué restricciones se deben satisfacer para poder anticipar si un sistema será o no integrable o superintegrable, y transmitir su conexión con los elementos invariantes. Posteriormente se propondrá un método de construcción para este tipo de sistemas y finalizaremos concretando la obtención de un sistema integrable para nuestro caso particular, tipo Morse. Este dará pie al estudio que tendrá lugar en el próximo capítulo.

### 3.2. Primeras nociones

Comenzamos este apartado orientados en la búsqueda de sistemas que puedan ser resueltos analíticamente. La forma de garantizar esta propiedad puede darse en términos del Teorema de Liouville-Arnold pero, antes de proceder de esta manera, introduzcamos la idea sobre la que se estructura este.

Partimos de un sistema con un cierto número de grados de libertad. Entendemos por resolver el sistema a conocer la evolución temporal de todas estas variables a partir de una configuración inicial, lo cual se pretende conseguir gracias a una serie de ecuaciones o relaciones que deben verificar cada una de ellas. Se podrá también en general, asociar a cada una de estas relaciones la conservación de un cierto objeto en el tiempo<sup>6</sup>. En particular nuestro Hamiltoniano será una de estas formas invariantes, presente en cualquier tipo de sistema. Por lo tanto, considerando un número  $m$  de ecuaciones podremos encontrar  $m$  objetos invariantes. Para saber si son suficientes para fijar el sistema, determinarlo unívocamente, debemos tener en cuenta que cada una de estas ecuaciones, o equivalentemente constantes del movimiento, supone una ligadura adicional para el conjunto solo cuando estas restricciones sean independientes y compatibles. Independientes y compatibles son nociones vagas que exigen una descripción más formal para poder implicarlas en estas consideraciones. Es por ello por lo que definimos a continuación bajo qué criterio consideraremos un cierto conjunto de funciones, que serán la forma en que se presentarán las ligaduras o constantes del movimiento del sistema, como independientes.

---

<sup>5</sup>Los conceptos expuestos en esta sección son, en su mayoría, un sumario del capítulo II de [7], pero pueden también encontrarse en el capítulo II de [5] en lenguaje intrínseco.

<sup>6</sup>Dada una igualdad basta aislar todos los elementos que dependan del tiempo, el objeto resultante será en conjunto invariante.

**Definición 3. Funcionalmente independientes.** Sea  $\mathbb{F} = (f_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, f_N(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$  un conjunto de  $N$  funciones definidas y localmente analíticas en alguna región del espacio de fases  $2n$  dimensional. Diremos que  $\mathbb{F}$  es funcionamente independiente si la matriz  $N \times 2n$   $\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j}, \frac{\partial f_i}{\partial p_k}\right)$  tiene rango  $N$  en la región. El conjunto será funcionalmente dependiente si el rango es estrictamente menor que  $N$  en la región.

Por último deberemos asegurar que estas condiciones sean compatibles, lo cual denotaremos por estar en involución. De esta manera, parece lógico pensar que un sistema que presente  $n$  grados de libertad quedará totalmente especificado a partir de  $m = n$  ligaduras independientes y en involución. Este planteamiento es en esencia la definición de sistema integrable dada por el Teorema de Liouville-Arnold, y que se puede presentar equivalentemente como sigue.

**Definición 4. Sistema integrable.** Un sistema regido por un Hamiltoniano,  $H$ , es integrable si admite  $n$  constantes del movimiento  $\mathcal{P}_1 = H, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$  tales que:

I.  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$  están en involución

$$\{\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j\} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

II. Son funcionalmente independientes

Establecida esta descripción se hace patente la relación con las simetrías que se anticipaba pues podremos plantear una elección de coordenadas en las cuales a cada una de estas integrales del movimiento le corresponderá, en virtud de la proposición 3, una coordenada cíclica. Las transformaciones, variaciones, en estas coordenadas serán precisamente las simetrías del sistema.

Derivada de esta noción surge el concepto de sistema superintegrable. En estos la cantidad de restricciones,  $m$ , que deben satisfacer las coordenadas del sistema son superiores al propio número de coordenadas generalizadas,  $n$ . Esta característica es posible en la medida en la que estas  $m - n$  relaciones nuevas se traducen en poder fijar como constantes del movimiento, no solo los momentos conjugados si no también las posiciones de las partículas. De esta manera el límite teórico de estas ligaduras se establece en  $2n - 1$  funciones independientes,  $n$  de ellas en involución, restando solamente un parámetro libre. A estos sistemas los denominaremos maximalmente superintegrables y manifestarán el máximo número de simetrías posibles.

Comprendiendo de esta manera la conexión intrínseca que conecta los sistemas integrables y superintegrables con las simetrías que presenta, cobra sentido la propuesta de método de construcción que expondremos en el próximo apartado.

### 3.3. Obtención de sistemas maximalmente superintegrables

De la particular propiedad que caracteriza estos sistemas integrables y superintegrables, poseer una solución exacta, se deriva el interés de encontrar y, si es posible construir este tipo de sistemas. Como respuesta, entre otras, a esta búsqueda surge la reducción de Marsden-Weinstein, la cual estudia un Hamiltoniano libre<sup>7</sup> en un

<sup>7</sup>El concepto de libre lo asociamos a presentar un potencial nulo en las coordenadas iniciales. En la práctica no será completamente libre pues se estructura sobre una serie de restricciones sobre la topología del espacio vectorial.

espacio homogéneo N-dimensional configurado sobre un grupo de Lie y, por medio de una transformación de coordenadas asociadas a la elección de una subálgebra, asegura la integrabilidad o incluso superintegrabilidad de este. En el desarrollo que será llevado a cabo, vamos a centrarnos en la obtención de estas familias de sistemas por reducción a un MASA<sup>8</sup>, concepto que presentábamos en el punto 2.1.

Comenzamos describiendo la estructura del método. A grandes rasgos, este consiste en tomar un hamiltoniano libre<sup>9</sup> en un álgebra y con un grupo de Lie asociado, ambos determinados al identificar el Hamiltoniano en ese espacio vectorial con el elemento Casimir de un álgebra. Conocido este álgebra podremos considerar una de las posibles MASAs que presenta y su respectiva base de elementos. Estos serán los que den forma a los posteriores generadores infinitesimales, pues conmutan con el Hamiltoniano por ser este proporcional al elemento Casimir. Esta característica, hace que las variaciones infinitesimales generadas por los elementos del MASA sean simetrías del sistema<sup>10</sup>. Ligados a cada una de estas transformaciones tendremos una constante del movimiento, su momento conjugado en base a la proposición (3). Además el hecho de que los elementos del grupo de Lie pertenezcan al MASA también nos garantizará que estas integrales primeras sean funcionalmente independientes y que aparezcan en involución. Por todo ello, si el número de elementos que caracterizan una base de esta subálgebra es igual o superior a la dimensión del espacio de configuración, diremos que nuestro sistema será integrable o superintegrable respectivamente, por aplicación directa de la definición (4).

Establecidas estas líneas generales deberemos en cada caso particular especificar el Hamiltoniano, álgebra y MASA elegido, y a partir de estos maquetar un cambio de coordenadas que se ajuste al comportamiento deseado, es decir, manifestando las simetrías del sistema de acuerdo a la elección de subálgebra realizada. Veámoslo en detalle<sup>11</sup>.

Partimos de un sistema hamiltoniano libre definido sobre el espacio hermitico hiperbólico. Dicho sistema vendrá caracterizado por el Hamiltoniano que podemos expresar en términos de coordenadas complejas  $y^\mu \in \mathbb{C}$ ,

$$H = C \sum_{\mu, \nu}^n g^{\mu\bar{\nu}} p_\mu \bar{p}_\nu , \quad (3.1)$$

siendo C una constante real, la barra superior denota complejo conjugado,  $g^{\mu\bar{\nu}}$  la métrica expresada como un tensor contravariante de grado 2 y donde se ha usado el criterio de sumación de Einstein para n coordenadas generalizadas. Consideremos dentro de este espacio una pseudoesfera compleja en  $C^2$ , dada por la ecuación:

$$g_{\bar{\mu}\nu} \bar{y}^\mu y^\nu = 1, \quad \mu, \nu = 0, \dots, n-1 . \quad (3.2)$$

En nuestro caso, unidimensional, tomaremos n=1. Fijemos además la representación de la métrica por medio de la matriz  $K = \text{diag}(1, -1)$ ,

<sup>8</sup>Esta metodología viene descrita más extensamente en las referencias [2] y [1], literatura en la que se basa esta sección.

<sup>9</sup>Vamos a considerar el hamiltoniano pues tanto en la formulación hamiltoniana de la mecánica como en la cuántica esta magnitud se puede usar para determinar la evolución del resto de parámetros

<sup>10</sup>La relación expuesta es precisamente la noción que recoge el Teorema de Noether.

<sup>11</sup>El desarrollo que se va a llevar a cabo está referido al estudio realizado en [2] y [1],

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Dada esta configuración nuestro trabajo se va a resumir en confeccionar un sistema que venga caracterizado por presentar  $N$  constantes del movimiento para que, en virtud de la definición 4, pueda considerarse integrable o incluso superintegrable. Para ello, y dado que las constantes del movimiento vienen regidas por dicho Hamiltoniano en la medida de la proposición 2, nuestra búsqueda se centra en la obtención de un conjunto de operadores que conmuten entre ellos y con él, ya sea respecto del corchete de Poisson para la descripción clásica, como respecto del conmutador en la formulación cuántica. Es ante esta demanda donde cobra sentido el empleo de la subálgebra MASA de un sistema pues, por definición, sus elementos conmutarán dentro del subgrupo y además presentará el mayor tamaño posible.

En la medida en que nuestro objetivo para este punto es presentar un método genérico de construcción, no pretendemos concretar el MASA escogido, esto queda reservado para la siguiente sección. A pesar de ello sí que nos limitaremos a tratar el caso unidimensional, lo cual nos permite conocer, fijada una métrica, la forma del álgebra y la dimensión de las subálgebras MASA, facilitando significativamente su expresión por medio de generadores infinitesimales.

Comencemos por especificar nuestro Hamiltoniano dentro de los márgenes establecidos, resultado de aplicar (3.3) en (3.1), restringiéndonos a una dimensión compleja,  $n = 1$ ,

$$H = C (p_0\bar{p}_0 - p_1\bar{p}_1) . \quad (3.4)$$

En este punto y en lo relativo al comentario realizado, nuestro interés radica en escoger una subálgebra y en base a él determinar el cambio de coordenadas apropiado. Esta condición se concretará en la ignorabilidad de ciertas coordenadas nuevas. Orientados en este sentido, buscamos un cambio de coordenadas en el cual intervengan los elementos de la subálgebra introduciendo las transformaciones en el sistema por medio de los generadores infinitesimales que proponíamos previamente. Para ello consideremos los generadores  $X_1, X_2, X_3$  del álgebra  $\mathfrak{su}(1,1)$ , junto al generador  $Y_0$  de  $\mathfrak{u}(1)$  que por el tipo de métrica que conservan dejan invariante la variedad de la pseudoesfera. Dentro del álgebra  $\mathfrak{su}(1,1)$  podremos proponer un elemento  $Y_1$  como base de la MASA<sup>12</sup>, la cual ampliaremos a MASA de  $\mathfrak{u}(1,1)$  por medio del generador  $Y_0$ . En consecuencia podremos establecer un cambio de coordenadas que establezca como ignorables dos de estas, las cuales denominaremos “ $x$ ”, apareciendo el resto explícitamente en el Hamiltoniano, que llamaremos “ $s$ ”. Consideremos con estos propósitos el siguiente cambio de coordenadas:

$$y^\mu(x, s) = B(x)_\nu^\mu s^\nu, \quad B(x) = \exp(x^\mu Y_\mu), \quad (3.5)$$

siendo  $s_0, s_1$  un par de coordenadas reales tales que  $(s_0)^2 - (s_1)^2 = 1$ . En nuestro caso tanto  $Y_\mu$ , como  $B_\nu^\mu$  por consiguiente, se pueden expresar por medio de matrices  $2 \times 2$  a concretar para una elección de la subálgebra MASA y de la base de este. Además, exigiremos que su representación matricial se dé por medio de matrices definidas

---

<sup>12</sup>Es importante notar la reducción de los grados de libertad, de 3 a 1, que tiene lugar al restringirnos a un MASA de este álgebra.

imaginarias<sup>13</sup>, que reproducirán las transformaciones en  $x_0$  y  $x_1$  bajo repetida aplicación, de dichos generadores. A efecto de esclarecer los elementos que intervienen evaluémoslo para nuestro caso unidimensional:

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix} = \exp(x_0 Y_0) \exp(x_1 Y_1) \begin{pmatrix} s^0 \\ s^1 \end{pmatrix} .$$

En este contexto, las coordenadas  $x$  serán coordenadas cíclicas de nuestro sistema, lo cual se puede entender con las consideraciones de simetría expuestas o simplemente atendiendo al cambio de signo que tendrá lugar en la exponencial en 3.4 al conjugarse, compensando ambos exponentes. Estas coordenadas materializarán de esta manera una pareja de simetrías del Hamiltoniano bajo traslaciones en  $x_0$  ó  $x_1$ . Por otra parte, será preferible que todas ellas, tanto las  $\mathbf{x}$  como las  $\mathbf{s}$ , se definan como parámetros reales, pues así podremos distinguir más fácilmente la contribución compleja. Esta pretensión obliga a que, para realizar un cambio de coordenadas entre espacios de igual dimensión,  $n \rightarrow n$ , debamos desglosar las coordenadas complejas antiguas en coordenadas reales, pasando en nuestro caso unidimensional de 2 a 4 coordenadas. Dicho desdoblamiento se relaciona con el módulo y argumento de cada componente compleja<sup>14</sup>. Hay muchas formas de llevar a cabo esta operación, por nuestra parte se hará considerando la conjugación compleja de los parámetros antiguos, lo cual se resume como:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \bar{y}_0 \\ y_1 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} , \quad (3.6)$$

donde  $J$  es la representación por medio de una matriz cuadrada del Jacobiano de la transformación. Ahora bien, dado que nuestra intención es caracterizar la forma en que se transforman todos los los elementos que intervienen en (3.1) al cambiar a estas coordenadas nuevas, precisamos especificar la forma que adopta la métrica, tras desdoblar las coordenadas imaginarias, así como presentar el Jacobiano y su inversa pues estos recogen la forma en que se transforman los objetos bajo el cambio de coordenadas. Comencemos pues por la métrica. Esta venía dada por(3.3)para las coordenadas  $y_0, y_1$ , cuya forma cuadrática asociada al producto genérico de dos vectores resultaba:

$$g_{\mu,\nu} y^\nu (\bar{y}^\mu) = \bar{y}_0 y_0 - \bar{y}_1 y_1 . \quad (3.7)$$

Nuestra pretensión para la nueva métrica, adaptada al espacio 4-dimensional en el que participan ahora nuestros vectores<sup>15</sup>, es que esta replique dicha forma cuadrática.

<sup>13</sup>Esta representación no será posible de manera general y, para poder llevar a cabo este procedimiento de reducción, deberá exigirse que la subálgebra MASA admita una representación en términos de estas matrices imaginarias.

<sup>14</sup>Basta considerar cualquier representación de un número complejo como un punto en el plano real,  $\mathbb{R}^2$ .

<sup>15</sup>Cabe señalar que esta modificación de la métrica responde únicamente a la redimensión exigida por descomponer nuestras 2 coordenadas complejas en 4. Para que esta transformación reflejara además el cambio de coordenadas necesitaríamos evaluar el producto  $J^t K J$ . Por nuestra parte, recurriremos a una descripción equivalente determinando como cambian de coordenadas los elementos en lugar de la métrica.

Denominando  $K'$  a la nueva métrica imponemos que:

$$(y_0, y_1, \bar{y}_0, \bar{y}_1) K' \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} = \bar{y}_0 y_0 - \bar{y}_1 y_1 . \quad (3.8)$$

Esta expresión nos indica que elementos,  $k_{i,j}$  de la matriz serán nulos, cuales uno y cuales menos uno. Concretamente se tiene que  $k_{0,2} = k_{20} = 1$ ,  $k_{1,3} = k_{31} = -1$  y el resto nulos. De esta manera el objeto que conserva la métrica será, salvo una constante. la matriz  $K'$  con una estructura de cajas definida como:

$$CK' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.9)$$

Observemos como la constante, el factor  $\frac{1}{2}$ , compensa el duplicado de la forma cuadrática que efectua  $K'$ . Este duplicado por su parte, nos permite considerar una forma simétrica para  $K'$ , condición requerida en las métricas.

Continuamos con la determinación del Jacobiano. Para ello primero se construyen objetos que recojan la dependencia de las variables antiguas respecto de las nuevas,

$$\begin{aligned} B_\nu^\mu &= \frac{\partial y^\mu}{\partial s^\nu} = \exp(x^\mu Y_\nu) & \bar{B}_\nu^\mu &= \frac{\partial \bar{y}^\mu}{\partial s^\nu} \\ A_\nu^\mu &\equiv \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} = (Y_\nu)^\mu_\rho y^\rho & \bar{A}_\nu^\mu &\equiv \frac{\partial \bar{y}^\mu}{\partial x^\nu} , \end{aligned} \quad (3.10)$$

y en base a estas, finalmente establecer el Jacobiano como:

$$J \equiv \frac{\partial(y, \bar{y})}{\partial(x, s)} = \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{A} & \bar{B} \end{pmatrix} . \quad (3.11)$$

Como se adelantaba, la inversa de este Jacobiano también será un elemento primordial en este cambio de coordenadas, en la medida en que expresa la transformación a la que se verán sometidos los momentos conjugados, tal y como se comentaba en la proposición (5). Por consiguiente, debemos exigir que tanto la elección de coordenadas antiguas como nuevas sean canónicas. De esta manera, podemos recoger como se transforman los momentos conjugados como:

$$(p_y, \bar{p}_y) \frac{\partial}{\partial(y, \bar{y})} = \frac{\partial}{\partial(x, s)} J^{-1} = P J^{-1} = (p_x, p_s) J^{-1}, \quad (3.12)$$

donde el hecho de hacer actuar los momentos a la izquierda del Jacobiano inverso viene determinado por la condición covariante de los momentos conjugados, los cuales representamos en esta notación como “vectores fila”. Teniendo esto presente, debemos ahora especificar la expresión que adopta  $J^{-1}$ . Para ello, detengámonos en los constituyentes que participan en el Jacobiano (3.11), los cuales vienen dados por (3.10). Si bien aun no conocemos la elección concreta de elementos  $Y_\nu$ , si podemos anticipar que serán matrices puramente imaginarias. Esta característica en el caso de B supone la relación  $\bar{B} = B^{-1}$ , pues B está constituida como serie de potencias

de una matriz puramente imaginaria. Por su parte  $A$ , y considerando esta propiedad que acabamos de enunciar acerca de  $B$ , verificará,  $\bar{A} = -Y_m u B^{-1} s$ , agrupando ambas como:

$$\bar{B} = B^{-1}, \quad \overline{B^{-1}A} = -B^{-1}A. \quad (3.13)$$

De esta manera es fácil comprobar<sup>16</sup> que la forma que adquiere la inversa del Jacobiano será:

$$J^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^{-1} & \bar{A}^{-1} \\ B^{-1} & \bar{B}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Estamos, ahora sí, en condiciones de transformar idénticamente la expresión (3.1), la cual tras hacer intervenir la nueva métrica y expresando los momentos conjugados antiguos por medio de los nuevos, involucrando la inversa del Jacobiano, se estructura de la siguiente forma,

$$H = C(p_{x_0}, p_{x_1}, p_{s_0}, p_{s_1}) J^{-1} K' (J^{-1})^T \begin{pmatrix} p_{x_0} \\ p_{x_1} \\ p_{s_0} \\ p_{s_1} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

donde el subíndice T denota traspuesta y responde al hecho de actuar el Jacobiano inverso sobre los momentos conjugados expresados como “vector columna” en lugar de su forma natural covariante “vector fila”. Es importante notar que el producto de las tres matrices que aparecen en esta igualdad,  $J^{-1} K' (J^{-1})^T$ , es fácil de operar y simplificar gracias a su estructura por cajas, como evidenciamos en el desarrollo explícito en B. De este se obtiene como resultado:

$$H = \frac{1}{8} (p_{x_0}, p_{x_1}, p_{s_0}, p_{s_1}) \begin{pmatrix} A^{-1} K (A^\dagger)^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} K (B^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{x_0} \\ p_{x_1} \\ p_{s_0} \\ p_{s_1} \end{pmatrix} =$$

$$H = C \left( \frac{1}{2} p_{s_0} \bar{p}_{s_0} - p_{s_1} \bar{p}_{s_1} \right) + V(s), \quad V(s) = p_x^T (A^\dagger K A)^{-1} p_x. \quad (3.16)$$

Esta expresión supone la verificación de la ignorabilidad de las coordenadas  $x$  pues estas no aparecen en el término cínético pero tampoco en el potencial en base a la identidad (B.7). Dicha condición asegura, para nuestro caso unidimensional, la existencia de dos integrales del movimiento,  $p_{x_0}$  y  $p_{x_1}$ . Este hecho entra aparentemente en contradicción con lo comentado en el capítulo anterior, en el cual indicábamos que el número máximo de simetrías y por ende integrales del movimiento funcionalmente independientes era  $2n-1$ , siendo  $n$  los grados de libertad. La compatibilidad de ambas afirmaciones radica en el detalle de funcionalmente independientes. En nuestro caso las restricciones del espacio considerado, una esfera en el espacio Hermítico Hiperbólico, relacionarán las ligaduras haciéndolas dependientes entre sí<sup>17</sup>.

<sup>16</sup>Basta hacer el producto explícito de  $JJ^{-1}$  el cual, dada la estructura de cajas del Jacobiano, es trivial determinar.

<sup>17</sup>La relación concreta que estas guardan con el Hamiltoniano se recoge a lo largo del documento [2] para cada elección de la MASA concreta.

En un nuestro caso el máximo de magnitudes conservadas es una, el propio Hamiltoniano. A pesar de ello, este proceso asienta las bases sobre cómo presentar un sistema que exprese el mayor número posible de simetrías, pudiendo escalar el desarrollo para otros procesos. Por nuestra parte, continuaremos el estudio para un sistema unidimensional particularizándolo, como veremos en el siguiente capítulo, para una elección de una MASA particular.

### 3.4. De $\mathfrak{su}(1,1)$ al potencial de Morse

Tal y como se mencionaba en la sección anterior, iniciamos nuestro estudio con un álgebra unidimensional sobre el álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(1,1)$  y su respectivo grupo de Lie  $SU(1,1)$ . Una representación de este álgebra, en base al espacio vectorial asociado, puede darse por medio de la siguiente base de matrices  $2 \times 2$  complejas,

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Por otra parte, para este álgebra en particular, y en una dimensión, se disponen de tres elecciones de MASAs diferentes, Subálgebra Cartan Compacta, Subálgebra Cartan No compacta y la subálgebra nilpotente maximal Abelian. Si bien todas ellas se pueden desarrollar con la misma metodología<sup>18</sup>, en este documento nos limitaremos a estudiar la última, la cual, como veremos a continuación, restringe el potencial genérico al de Morse. Como base de dicha MASA en  $\mathfrak{su}(1,1)$  tomamos la matriz Nilpotente,

$$Y_1 = \begin{pmatrix} i & i \\ -i & -i \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Es importante destacar que las condiciones de simetría necesarias para configurar una subálgebra abeliana en  $\mathfrak{su}(1,1)$  limitan la libertad de sus elementos a un solo grado de libertad. Si ahora queremos obtener una MASA de  $\mathfrak{u}(1,1)$  debemos proponer otra matriz para complementar la base, tomamos la determinación de escogerla como,

$$Y_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Esta matriz a pesar de no ser Nilpotente, conmuta con  $Y_1$ , lo que nos permite completar la base el álgebra  $\mathfrak{u}(1,1)$ . Especificada esta base, pasamos a estudiar la forma explícita de nuestro Hamiltoniano. Esta viene de la particularización de las expresiones presentadas en el apartado previo. Comenzamos pues por el cálculo de las nuevas coordenadas, las cuales, atendiendo a la expresión [3.5], adoptarán la forma,

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix} = \exp \left[ x_0 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right] \exp \left[ x_1 \begin{pmatrix} i & i \\ -i & -i \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} s^0 \\ s^1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

---

<sup>18</sup>Para un desglose con mayor nivel de detalle consultar sección II de [2].

de donde operando las exponenciales de matrices como serie de potencias<sup>19</sup> se llega a:

$$\begin{aligned}
y^0 &= ((1 + ix_1)s_0 + ix_1s_1)e^{ix_0} \\
y^1 &= (-ix_1s_0 + (1 - ix_1)s_1)e^{ix_0} \\
\bar{y}^0 &= ((1 - ix_1)s_0 - ix_1s_1)e^{-ix_0} \\
\bar{y}^1 &= (ix_1s_0 + (1 + ix_1)s_1)e^{-ix_0} .
\end{aligned} \tag{3.21}$$

En esta expresión, tal y como se indicó que haríamos en el desarrollo general de la reducción por MASA, se han desdoblado las variables complejas en sus conjugados. De esta manera el cambio realizado se estructura equivalentemente al que se daría para  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , admitiendo la transformación, ahora sí, un Jacobiano. A partir de estos cambios podemos determinar A de [3.10],

$$A = \begin{pmatrix} i((1 + ix_1)s_0 + ix_1s_1)e^{ix_0} & (is_0 + is_1)e^{ix_0} \\ i(-ix_1s_0 + (1 - ix_1)s_1)e^{ix_0} & (-is_0 - is_1)e^{ix_0} \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

Estamos ahora sí en condiciones de evaluar 3.16. Para ello basta sustituir nuestra forma de A para nuestras coordenadas en la expresión del potencial. El cálculo de este queda reservado para el anexo (D).

En este punto, tomamos como resultado el obtenido de esta discusión, (D.3), para determinar la forma del potencial,

$$\begin{aligned}
V(s) &= p_x^T (A^\dagger K A)^{-1} p_x = (p_{x_0}, p_{x_1}) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(s_0 + s_1)^2} \\ \frac{1}{(s_0 + s_1)^2} & \frac{-1}{(s_0 + s_1)^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{x_0} \\ p_{x_1} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{-p_{x_1}^2}{(s_0 + s_1)^4} + 2 \frac{p_{x_0} p_{x_1}}{(s_0 + s_1)^2},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

donde el potencial solo depende de las coordenadas  $s$  tal como anticipábamos, pues las coordenadas  $x$ , que anticipábamos serían ignorables, efectivamente no aparecen en el Hamiltoniano. De acuerdo con los comentarios realizados, 3, sus momentos conjugados serán integrales del movimiento. Evidenciando este hecho podemos reescribir el Hamiltoniano sustituyendo su presencia por constantes,  $m_0 := p_{x_0}$ ,  $m_1 := p_{x_1}$

$$H = C[\frac{1}{2}(p_{s_0}^2 - p_{s_1}^2) + V(s)], \quad V(s) = \frac{2m_0m_1}{(s_0 + s_1)^2} - \frac{m_1^2}{(s_0 + s_1)^4}. \tag{3.24}$$

En esta expresión las constantes  $m_0$ ,  $m_1$ , vienen como mencionábamos, de los momentos asociados a  $x_0$  y  $x_1$  pero, puesto que concretarlas no modifica la matemática del problema estas serán especificadas en el siguiente capítulo para aligerar los cálculos. Comprobamos de esta manera que efectivamente las coordenadas  $\mathbf{x}$  son ignorables pues no aparecen en el Hamiltoniano, quedando este definido en función de la pareja de variables  $s_0$ ,  $s_1$ .

---

<sup>19</sup>Se ofrecen en el Anexo C los cálculos explícitos de dicho desarrollo. Además puede consultarse 2.2 de [9] para una explicación con mayor detenimiento de este tipo de operación así como de la relación de dichas potencias con los generadores uniparamétricos del álgebra de Lie.

Ahora bien, si tenemos en cuenta la restricción [3.2], la cual ahora adopta la forma,

$$s_0^2 - s_1^2 = 1 , \quad (3.25)$$

el número de parámetros libres se reduce en uno, quedando uno restante como ya se anticipó. Este, dada la naturaleza de la pseudoesfera hiperbólica, puede tomarse de forma que parametrize  $\mathbf{s}$  como,

$$s_0 = \cosh\phi, \quad s_1 = \sinh\phi .$$

Finalmente, se expone a continuación la estructura final del Hamiltoniano, resultado de todas estas apreciaciones y tomar  $C=1$ , la cual es considerada tipo Morse unidimensional y por tanto será la expresión que dará pie al estudio que se llevará a cabo en el próximo capítulo,

$$H(\phi) = \frac{1}{2}p_\phi^2 + m_1^2 e^{-4\phi} - 2m_0 m_1 e^{-2\phi} . \quad (3.26)$$

## 4. El potencial Morse: tratamiento cuántico

En esta sección vamos a abordar el estudio del potencial Morse 1-dimensional desde la formulación cuántica, donde las magnitudes observables se estructuran como operadores en un espacio de Hilbert de los estados, configurando los posibles resultados experimentales en base a los estados propios de estos. El análisis y resolución del Hamiltoniano nos permitirá determinar los espectros de presencia<sup>20</sup>, definiendo la evolución tanto posicional como temporal del sistema y definiendo una ecuación en autovalores, la Ec. de Schrödinger, para estados estacionarios. Bajo esta perspectiva, nuestro interés radicaré en descomponer nuestro Hamiltoniano como producto de dos operadores, los cuales y como veremos más adelante, identificaremos con los operadores intercambio, objetos que nos permitirán variar discretamente la forma del potencial y por ende estados asociados. Debido a las propiedades particulares que los caracterizan, emplearemos para variar el parámetro asociado al potencial, modificando la forma del sistema. Presentamos este desarrollo introduciendo unas nociones básicas que estructuran la factorización.

### 4.1. Factorización de un Hamiltoniano

En este punto, vamos a realizar una introducción teórica a la factorización que tendrá lugar en el próximo apartado. Para ello consideremos una familia de Hamiltonianos,  $H_n$ , los cuales se diferencian en el valor discreto que adopta un parámetro natural,  $n$ , contenido en el potencial de estos. Cada Hamiltoniano de este tipo poseerá múltiples estados propios que satisfagan la ecuación en autovalores:

$$H_n \phi_n^i = E_n^i \phi_n^i . \quad (4.1)$$

---

<sup>20</sup>A diferencia de un estudio clásico, el cual arroja como resultado trayectorias, la metodología cuántica trabaja con funciones de onda deslocalizadas cuyo cuadrado se relaciona con la probabilidad de presencia y que, salvo modelizaciones de potenciales infinitos, presentan un valor no nulo en cualquier punto del espacio.

En esta,  $\phi_n^i$  denota el estado propio  $i$ -excitado del Hamiltoniano enésimo. Por tanto, el subíndice discrimina el Hamiltoniano concreto dentro de su familia y el superíndice el estado propio dentro de todos los posibles. Para referirnos a la colección de estados propios asociados a un Hamiltoniano  $H_n$  simplemente omitiremos el superíndice,  $\phi_n$ .

En un sistema físico, tal como el de potencial de Morse, en el cual podemos identificar el autovalor con la energía asociada a cada estado propio, o función de estado, se distinguirán dos tipos de estados, los estados ligados, con  $E < 0$ , y los de scattering, con  $E > 0$ . Por nuestra parte nos interesaremos únicamente por los primeros, pues son aquellos que están cuánticamente confinados y discretizados, en relación a la perspectiva clásica dichos estados se corresponden con trayectorias cerradas.

Procedemos a continuación a definir una serie de operadores que, por medio de su acción, nos permitirán cambiar de estado y/o de Hamiltoniano, lo que en nuestra notación se traduce como variar los índices. Comenzamos por el operador escalera.

**Definición 5. Operador escalera** *Denominaremos operador escalera (o del inglés ladder) a aquellos operadores  $L^\pm$  cuya acción sobre un estado propio  $\psi_n^i$  de un Hamiltoniano  $H_n$  verifique:*

$$L^\pm \psi_n^i \propto \psi_n^{i\pm 1} . \quad (4.2)$$

Estos por tanto, mantendrán invariante el Hamiltoniano pero modificarán el nivel de energía de cada estado propio. De manera complementaria encontramos los operadores desplazamiento o shift.

**Definición 6. Operador desplazamiento** *Consideraremos como operador desplazamiento a aquel cuya acción sobre un estado propio  $\phi_n^i$  de  $H_n$  quede descrita como:*

$$S^\pm \psi_n^i \propto \psi_{n\pm 1}^i . \quad (4.3)$$

De esta manera podemos reproducir cualquier transformación en los índices por medio de la acción conjunta de ambas parejas de operadores. De hecho podemos plantear un último operador, el operador intercambio, que construido por combinación de los dos presentados y se configurará como el protagonista en la propuesta de factorización que ofrecemos.

**Definición 7. Operador intercambio** *Denominaremos operadores intercambio a la pareja de operadores  $M^\pm$  cuya acción sobre un estado propio  $\phi_n^i$  satisfaga:*

$$\begin{aligned} M_{n+1}^+ \psi_n^i &\propto \psi_{n+1}^{i+1} \\ M_n^- \psi_n^i &\propto \psi_{n-1}^{i-1} . \end{aligned} \quad (4.4)$$

El coeficiente de proporcionalidad quedará fijado al definir el modo en el que intervienen los operadores intercambio en la factorización como veremos a continuación. Conviene indicar también que en lo sucesivo, y por consonancia con lo estándar para los operadores escalera, denominaremos operador creación y aniquilación al operador  $M^+$  y  $M^-$  respectivamente. Por último, antes de finalizar la presentación de estos objetos, es importante destacar dos aspectos de estos operadores intercambio, que si bien desarrollaremos posteriormente, en particular en esta fase introductoria y en la sección 4.5 sobre casos concretos, anticipamos para fijar ideas:

- Su acción sobre un estado propio del Hamiltoniano deja invariante  $E$ , el autovalor asociado a dicho estado. Esto quiere decir que, si bajo la acción de  $M^\pm$  pasamos de  $\psi_n^i \rightarrow \psi_{n\pm 1}^{i\pm 1}$ , el autovalor asociado a cada uno de los estados será igual,  $E_n^i = E_{n\pm 1}^{i\pm 1}$ . De manera intuitiva se puede entender este hecho observando que al modificar el pozo de potencial la energía de cada nivel de excitación de este lo hará en consecuencia.
- Su acción sobre un Hamiltoniano no se puede distinguir a priori de la realizada por los operadores desplazamiento, lo cual es evidente pues el Hamiltoniano no viene representado por un autovalor concreto. Para diferenciarlos, deberemos describir su acción sobre estados.

Es la primera propiedad, generar con su acción familias de estados que compartan la misma energía, en la que radica nuestro interés. Antes de poder probar esta característica y dado que viene motivada por el tipo de factorización que emplearemos, vamos a introducir dicha factorización, la cual en su forma más general se expresa como:

$$H_n = M_n^+ M_n^- + \mu_n, \quad (4.5)$$

donde  $\mu_n$  es una constante que solo depende del parámetro natural “ $n$ ”. Dada esta estructura y la acción de los operadores intercambio sobre un estado propio del Hamiltoniano, podemos presentar una importante proposición, la cual da pie al análisis que realizaremos.

**Definición 8.** *Consideremos una sucesión de Hamiltonianos  $H_n$  factorizados según (4.5) por medio de operadores intercambio y tales que admite una segunda factorización de la forma:*

$$H_n = M_n^+ M_n^- + \mu_n = M_{n+1}^- M_{n+1}^+ + \mu_{n+1} \quad (4.6)$$

*Entonces los Hamiltonianos  $H_n$  forman lo que se denomina una jerarquía de factorizaciones.*

Presentada la estructura de nuestra factorización, podemos ahora determinar su acción no sobre un estado propio si no también sobre el Hamiltoniano, tal como narra la siguiente proposición.

**Proposición 4.** *Los Hamiltonianos  $H_n$  y  $H_{n-1}$  de la jerarquía (4.5) verifican*

$$H_n = M_n^+ M_n^- + \mu_n, \quad H_{n-1} = M_n^- M_n^+ + \mu_n \quad (4.7)$$

*Entonces los operadores  $M_n^\pm$  relacionan  $H_n$  y  $H_{n-1}$  de la forma*

$$\begin{aligned} M_n^- H_n &= H_{n-1} M_n^- \\ M_n^+ H_{n-1} &= H_n M_n^+ \end{aligned} \quad (4.8)$$

*y actúan como operadores de intercambio/desplazamiento entre estos dos Hamiltonianos.*

Probémoslo.

**Demostración 3.** Para probarlo basta evaluar ambas operaciones desarrollando el Hamiltoniano en operadores intercambio. A modo ilustrativo tomemos la primera igualdad:

$$M_n^- H_n = M_n^- M_n^+ M_n^- + \mu_n M_n^- = H_{n-1} M_n^- ,$$

en la cual han interviniendo, tanto al expandir como al reagrupar, las factorizaciones recogidas en (4.6).

Probemos que  $M_n^-$  lleva un estado propio  $\phi_n$  con valor propio  $E_n$  de  $H_n$ :

$$H_n \phi_n = E_n \phi_n$$

en otro

$$M_n^- \phi_n = \tilde{\phi}_n$$

tal que  $\tilde{\phi}_n$  es estado propio de  $H_{n-1}$  con el mismo valor propio  $E_{n-1} = E_n$ :

$$H_{n-1}(M_n^- \phi_n) = M_n^- H_n \phi_n = E_n (M_n^- \phi_n) \implies \{M_n^- \phi_n \propto \phi_{n-1}, \quad E_{n-1} = E_n\}$$

De la misma forma si  $\phi_{n-1}$  es función propia de  $H_{n-1}$

$$H_{n-1} \phi_{n-1} = E_{n-1} \phi_{n-1}$$

entonces  $M_n^+$  lo lleva en otro

$$M_n^+ \phi_{n-1} = \tilde{\phi}_{n-1}$$

tal que  $\tilde{\phi}_{n-1}$  es estado propio de  $H_n$  con el mismo valor propio  $E_n = E_{n-1}$ :

$$H_n(M_n^+ \phi_{n-1}) = E_{n-1} (M_n^+ \phi_{n-1}) \implies \{M_n^+ \phi_{n-1} \propto \phi_n, \quad E_n = E_{n-1}\}$$

En resumen, dados  $H_{n-1}$  y  $H_n$  los operadores de factorización  $M_n^\pm$  hacen el siguiente intercambio de funciones propias:

$$M^+ \phi_{n-1} \propto \phi_n, \quad M^- \phi_n \propto \phi_{n-1}$$

manteniendo la energía:  $E_n = E_{n-1}$ .

Sin extender más estas consideraciones generales, damos paso al siguiente apartado, el cual tiene como objetivo particularizar y emplear los objetos presentados en la elaboración de un análisis por factorización del Hamiltoniano tipo Morse.

## 4.2. Factorización del potencial de Morse

Comenzamos, como se ya se había anticipado, con la forma hamiltoniana de un potencial tipo Morse unidimensional dada por (3.26), que recuperamos a continuación,

$$H(\phi) = -\frac{1}{2} \hbar^2 \partial_\phi^2 + V(\phi) , \quad (4.9)$$

con

$$V(\phi) = m_1^2 e^{-4\phi} - 2m_0 m_1 e^{-2\phi} , \quad (4.10)$$

en la cual se ha tenido presente la relación entre el operador momento conjugado de una variable y la derivada parcial respecto de una variable actuando como operador dada por el principio de correspondencia, (2.8).

Podemos asignar valores a las constantes  $m_0$  y  $m_1$ , dado que no modifican la matemática del problema pero aligeran los cálculos significativamente. Concretamente modificando la variable  $\phi$  mediante una traslación  $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$  podemos cambiar arbitrariamente el valor de  $m_1$ : adoptaremos  $m_1 = \hbar \sqrt{2}$ . En cuanto a  $m_0$  cambiaremos su notación y lo expresamos de la forma  $m_0 = \hbar \sqrt{2}(s + \frac{1}{2})$ , con lo que el potencial se modifica a:

$$V(\phi) = 2\hbar^2 e^{-4\phi} - 4\hbar^2(s + \frac{1}{2}) e^{-2\phi} . \quad (4.11)$$

En aras de adoptar una forma con la que sea más fácil operar introducimos un cambio de variable  $2\phi \rightarrow x$ , donde este parámetro  $x$  no guarda relación con el expuesto en el capítulo anterior,

$$H(x) = -2\hbar^2 \partial_x^2 - 4\hbar^2 \left( s + \frac{1}{2} \right) e^{-x} + 2\hbar^2 e^{-2x} , \quad (4.12)$$

para finalmente aplicando un cambio de escala, por medio de un factor global  $\frac{1}{2\hbar^2}$  se llegue a la expresión habitual del Hamiltoniano de Morse,

$$H(x) = -\partial_x^2 + V(x), \quad V(x) = -2 \left( s + \frac{1}{2} \right) e^{-x} + e^{-2x} , \quad (4.13)$$

cuya acción sobre una función  $f(x)$  genérica será:

$$Hf(x) = -f''(x) + (e^{-2x} - (1 + 2s)e^{-x}) f(x) . \quad (4.14)$$

Buscamos ahora sí una factorización con la estructura propuesta en (4.5). De esta manera, estamos exigiendo que el producto de operadores  $M^\pm$  sea equivalente al Hamiltoniano salvo quizás una constante que hemos llamado  $\mu$ . Proponemos para ello un modelo genérico de factores que satisfagan dos condiciones, poder generar la dependencia funcional con  $x$  del hamiltoniano. Esta obliga a introducir un término proporcional a la parcial respecto de “ $x$ ” y al menos otros dos sumandos, uno constante y otro que aporte la dependencia con la exponencial. De esta forma al realizar el producto de ambos factores se generan coeficientes para  $e^{-x}$ ,  $e^{-2x}$  y una constante, los tres sumandos presentes en el hamiltoniano. La forma general que adoptan por tanto ambos será<sup>21</sup>:

$$M^\pm = \mp \partial_x + ae^{-x} + b \quad (4.15)$$

con “ $a$ ” y “ $b$ ” constantes reales a determinar y donde hemos impuesto que el coeficiente de la parcial sea de módulo unidad, real y de signos opuestos. Para obtener dichas constantes debemos desarrollar la acción del operador  $M^+$  sobre el  $M^-$  y

---

<sup>21</sup>El cambio de signo entre el operador y el coeficiente de la parcial permite que, como veremos más adelante, el estado fundamental con significado físico sea el que aniquila el operador  $M^-$ , lo cual es simplemente convenio. De igual manera el hecho de hacer operar  $M^+$  sobre el  $M^-$ , y no al revés, únicamente determinará el sentido en el que recorreremos la jerarquía de hamiltonianos que estableceremos en la próxima sección.

ajustar el valor de “a” y “b” para mostrar la dependencia funcional del Hamiltoniano. La acción conjunta, y en el orden indicado, de ambos operadores sobre una función  $f(x)$  resulta:

$$(a^2 e^{-2x} + a(1+2b)e^{-x} + b^2) f(x) - f''(x) \quad (4.16)$$

De esta manera, comparando coeficiente a coeficiente con (4.14) obtenemos  $a = \pm 1$  con  $b = -s - 1$  ó  $b = s$  para el valor positivo o negativo de “a” respectivamente. Por lo tanto, como es natural en este tipo de factorizaciones, encontramos dos posibles conjuntos de valores para los parámetros, lo que corresponde a dos posibles factorizaciones. Recogemos ambas a continuación,

$$M^\pm = \mp \partial_x - e^{-x} + s \quad (4.17)$$

$$P^\pm = \mp \partial_x + e^{-x} - (s+1) , \quad (4.18)$$

donde tomaremos como principal la primera debido la interpretación referente a dichos operadores que detallaremos al final del capítulo. Por último, buscamos una definición de  $\mu, \nu$  en su equivalente para  $P^\pm$ , que satisfaga [4.5]. Para ello, evaluamos la diferencia del Hamiltoniano y la acción conjunta de operadores,

$$\mu = H - M^+ M^- = -s^2 . \quad (4.19)$$

$$\nu = H - P^+ P^- = -(s+1)^2 \quad (4.20)$$

En este punto hemos obtenido dos factorizaciones por operadores del Hamiltoniano pero no se ha evidenciado aún que estos se correspondan con los operadores intercambio, previamente mencionados, ni fijado la relación que el Hamiltoniano debe guardar respecto al índice natural “n”. Ambos puntos serán abordados en el próximo apartado dando como resultado la generalización de los elementos propuestos a colecciones indexadas.

### 4.3. Jerarquía de Hamiltonianos y operadores

En esta sección, vamos a considerar una expresión más general de la factorización (4.13), la cual contempla el parámetro natural, “n”, que originará una jerarquía de hamiltonianos que incluyen al anterior como caso particular con  $n = 0$ . Como se anticipó, dichos hamiltonianos estarán conectados por parejas de operadores intercambio, que constituirán a su vez una generalización de los  $M^\pm$  o  $P^\pm$  propuestos.

#### 4.3.1. Las dos factorizaciones de los Hamiltonianos $H_n$

Comenzamos por extender la noción de Hamiltoniano mediante una formulación similar a la que presentabamos en la sección anterior,

$$H_n = M_n^+ M_n^- + \mu_n , \quad H_n = P_n^+ P_n^- + \nu_n , \quad (4.21)$$

donde cada elemento pertenece a una colección etiquetada por el índice “n”. Es por este motivo por el cual el término que involucre “n” en el Hamiltoniano presentará un coeficiente con dicha dependencia, configurando la expresión general de este como:

$$H_n = -\partial_x^2 - 2 \left( s + n + \frac{1}{2} \right) e^{-x} + e^{-2x} . \quad (4.22)$$

De igual manera a como ya se hizo, antes obtenemos en este caso:

$$\begin{aligned} M_n^\pm &= \mp \partial_x - e^{-x} + (s + n) \\ P_n^\pm &= \mp \partial_x + e^{-x} - (s + n + 1) . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Generalizando la definición de  $\mu$  y  $\nu$  en el mismo sentido que el Hamiltoniano y los operadores intercambio se llega a:

$$\begin{aligned} \mu_n &= -(n + s)^2 \\ \nu_n &= -(1 + n + s)^2 . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Es preciso destacar que, como se puede observar en todas las formulaciones propuestas para objetos que involucran el parámetro natural “n”, dicho parámetro aparece con la misma estructura funcional que “s”, i.e, los elementos en los que intervienen “n” y “s” se pueden describir mediante la suma  $s + n$ , prescindiendo de una de las dos constantes tras una reparametrización. Esta propiedad es particular del Hamiltoniano propuesto<sup>22</sup>, permitiendo identificar  $s$  con  $s + n$  y usar indistintamente las expresiones para el caso  $n = 0$  y  $n \neq 0$ <sup>23</sup>.

#### 4.3.2. La jerarquía $H_n$ y los operadores intercambio

Si nos fijamos en los dos tipos de operadores de la sección anterior observamos que

$$P_n^- = -M_{n+1}^+, \quad P_n^+ = -M_{n+1}^-, \quad \nu_n = \mu_{n+1} \quad (4.25)$$

Por lo tanto, con esta identificación las dos factorizaciones (4.21), se escriben

$$H_n = M_n^+ M_n^- + \mu_n = M_{n+1}^- M_{n+1}^+ + \mu_{n+1} \quad (4.26)$$

Lo que indica que los Hamiltonianos  $H_n$  constituyen una jerarquía ya que verifican la relación (4.6), mediante la realización (4.23)-(4.24) y la identificación (4.25).

Como hemos visto, la propuesta formal de la factorización en sintonía con la simetría del Hamiltoniano nos lleva a obtener dos posibles descomposiciones en términos de operadores. En este apartado vamos a profundizar en la relación que liga ambas parejas de operadores y que manifiesta la conexión entre los elementos de cada jerarquía. Por tanto, nuestro interés radica en encontrar una expresión que vincule dos objetos de diferente índice, involucrando por consiguiente los operadores intercambio. Aparece de esta manera la noción de socio supersimétrico que procedemos a presentar a continuación.

**Definición 9. Socio supersimétrico** Denominamos socio supersimétrico al objeto resultado de hacer actuar los operadores que determinan una factorización del

<sup>22</sup>Basta considerar otros Hamiltonianos, también de tipo Morse, tales como  $H = -\partial_x^2 + ((s + \frac{1}{2}) - e^{-x})^2$ .

<sup>23</sup>El desarrollo realizado, a pesar de poder omitirse si se considera desde un primer momento la expresión del Hamiltoniano como general, se ha detallado en aras de asegurar que “s” es el parámetro que mapea las colecciones de elementos, es decir, que efectivamente la variación de “s” se identifica con la variación que experimentan los objetos bajo la acción de los operadores intercambio.

Hamiltoniano en sentido opuesto, i.e, los Hamiltonianos  $H_n$  y  $H_{n-1}$  que verifican la relación (4.7) se denominan socios supersimétricos. Dada una factorización del Hamiltoniano según (4.5),

$$H_n = M_n^+ M_n^- + \mu_n, \quad (4.27)$$

podremos definir el socio supersimétrico como el operador  $H_{n-1}$  como

$$H_{n-1} = M_n^- M_n^+ + \mu_n \quad (4.28)$$

Por lo tanto, una jerarquía de Hamiltonianos  $H_n$  está constituida por una sucesión de pares de socios supersimétricos. Tendremos la siguiente sucesión de estados, partiendo de uno

$$H_n \psi_n = E_n \psi_n$$

obtenemos por aplicación de los operadores de intercambio:

$$\dots \psi_{n-2} \xleftarrow{M_{n-1}^-} \psi_{n-1} \xleftarrow{M_n^-} \psi_n \xrightarrow{M_{n+1}^+} \psi_{n+1} \xrightarrow{M_{n+2}^+} \psi_{n+2} \dots \quad (4.29)$$

Todas las funciones obtenidas de este modo por los operadores intercambio tendrán el mismo valor propio  $E_n$  que la función propia inicial  $\psi_n$ .

#### 4.4. Estados fundamentales de los Hamiltonianos $H_n$

Una vez presentada una colección de hamiltonianos ordenados por un parámetro natural “ $n$ ” y operadores intercambio que nos permiten recorrer dicho índice, uno puede tratar de hallar estados que determinen el inicio o fin de estas colecciones<sup>24</sup>, los llamados estados fundamentales. Estos estados, de gran utilidad en la mecánica cuántica<sup>25</sup>, debido a la exigencia de constituirse como estados límite de toda su familia, no podrán modificar el índice en uno de los dos sentidos y por tanto han de anularse bajo la acción de uno de los operadores intercambio. Podemos, por consiguiente, considerar dos tipos de estados fundamentales, los estados fundamentales aniquilados por el operador  $M_n^+$ ,  $\psi^+$ , y los aniquilados por el operador  $M_n^-$ ,  $\psi^-$ . Para hallar estos estados basta imponer,

$$\text{a) } M_n^- \psi_n^-(x) = 0 \quad \text{o} \quad \text{b) } M_n^+ \psi_n^+(x) = 0 \quad (4.30)$$

donde  $\psi_n^\pm(x)$  es la función aniquilada. Se puede comprobar que las funciones  $\psi_n^\pm(x)$  en estas condiciones vienen dadas por:

$$\psi_n^-(x) = e^{-e^{-x} - (n+s)x} \quad (4.31)$$

$$\psi_n^+(x) = e^{e^{-x} + (n+s)x} \quad (4.32)$$

<sup>24</sup>Como veremos a continuación realmente solo será posible encontrar uno de los dos pues las condiciones que deben satisfacer ambos estados para ser físicamente aceptables son incompatibles.

<sup>25</sup>En este marco de comprensión la existencia de estados fundamentales es inherente a la cuantización de la energía.

A pesar de que ambas soluciones son correctas desde un perfil matemático, debemos exigir que satisfagan una serie de condiciones para ser físicamente aceptables, estas condiciones son<sup>26</sup>:

- I. Ser finita en todo su dominio
  - II. Decaer cuando  $x$  tiende a  $\pm\infty$
  - III. Ser de cuadrado integrable
- (i) Se verifica de forma obvia para cualquier valor de  $x$ .
- (ii) Si tomamos los límites para  $\pm\infty$  se llega a

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow \infty & x \rightarrow -\infty \\ \psi_n^-(x) \rightarrow e^{-(n+s)(\infty)} & \psi_n^-(x) \rightarrow e^{-\infty} \\ \psi_n^+(x) \rightarrow e^{(n+s)(\infty)} & \psi_n^+(x) \rightarrow e^{+\infty} \end{array} \quad (4.33)$$

donde se puede observar que  $\psi_n^+(x)$  no puede ser físicamente aceptable dado que toma valores arbitrariamente grandes para uno de los límites. Por su parte,  $\psi_n^-(x)$  precisa que  $n+s$  sea positivo<sup>27</sup> que la función decaiga a medida que  $x$  crece indefinidamente.

(iii) Por último, vamos a comprobar si esta función estado,  $\psi_n^-(x)$ , la única de las dos susceptible de tener significado físico, verifica (iii). Para ello evaluamos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^-(x))^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-e^{-x}-(n+s)x} \right)^2 dx = \Gamma(n+s) - \Gamma(n+s, 1), \quad (4.34)$$

donde en esta última expresión, la primera y segunda función son la función Gamma y función Gamma incompleta<sup>28</sup> respectivamente. Más allá del valor numérico de esta diferencia, lo que nos interesa es que la integral converge lo cual implica que efectivamente  $\psi_n^-(x)$  es físicamente aceptable y por ello la tomaremos como función estado fundamental de cada sector.

Obsérvese que el Hamiltoniano inicial  $H_0$  tiene un parámetro  $s$  y  $n = 0$ ; los Hamiltonianos siguientes se obtienen con  $n = 1, 2, \dots$ . Para que  $\psi_0^-(x)$  en (4.34) sea de cuadrado integrable es necesario que  $s > 0$ . Puesto que podemos añadir los valores  $n = 1, 2, \dots$  esto significa que podemos partir de un valor

$$0 < s \leq 1$$

En lo sucesivo asumiremos que  $s$  en una jerarquía  $H_n$  toma uno de esos valores para todos los Hamiltonianos.

---

<sup>26</sup>Se puede demostrar que no se implican necesariamente. Ejemplos de distribuciones que verifiquen (3) pero no (1) es la delta de Dirac. Que verifiquen (3) pero no (2) funciones definidas con valor uno en regiones de progresivamente menor extensión y nulas fuera de ellas (existen también adaptaciones para hacerlas continuas o incluso  $C^\infty$ ). Un análisis de estas situaciones y otras se presentan y desarrollan detenidamente en [8].

<sup>27</sup>El caso  $n = -s$  queda excluido pues haría que la función fuese constante.

<sup>28</sup>Esta función,  $\Gamma(z, a)$  se define como  $\int_a^\infty t^{z-1} e^{-t} dx$ , la misma expresión que para  $\Gamma(z)$  pero alterando el límite inferior de la integral.

Ahora trataremos de calcular el valor de la energía del estado fundamental  $\psi_n^-(x)$ . Observemos que, debido a las dos factorizaciones de  $H_n$

$$H_n = M_n^+ M_n^- + \mu_n = M_{n+1}^- M_{n+1}^+ + \mu_{n+1} \quad (4.35)$$

Si aplicamos la primera factorización a  $\psi_n^-(x)$ ,

$$H_n \psi_n^-(x) = M_n^+ M_n^- \psi_n^-(x) + \mu_n \psi_n^-(x) \quad (4.36)$$

Debido a (4.30) a), obtenemos:

$$H_n \psi_n^-(x) = \mu_n \psi_n^-(x) = -(s+n)^2 \psi_n^-(x) \quad (4.37)$$

Es decir que el estado fundamental  $\psi_n^-(x)$  tiene energía fundamental:

$$\psi_n^-(x) = e^{-e^{-x} - (n+s)x}, \quad E_n^0 = -(s+n)^2 \quad (4.38)$$

De ahora en adelante utilizaremos la notación:

$$\psi_n^-(x) \equiv \psi_n^0(x)$$

ya que el subíndice indica el Hamiltoniano y el superíndice el nivel de dicho estado propio: el nivel fundamental.

## 4.5. Sectores

En este apartado vamos a detenernos un poco más en el concepto de sector que habíamos anticipado, estudiando los elementos que lo conforman, cómo nos desplazamos entre y dentro de ellos, para finalmente concretar algunos casos por medio de representaciones. Comenzamos recogiendo y definiendo los conceptos.

**Definición 10. Sector.** *Tomemos el estado fundamental  $\psi_n^0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , de uno de los Hamiltonianos  $H_n$ . Entonces, el conjunto de estados obtenidos mediante la aplicación de los operadores de intercambio  $M_k^\pm$  se denomina sector de estados de la jerarquía  $\{H_n\}$  basado en  $\psi_n^0$ .*

Veamos primero que el conjunto de estados del sector basado en  $\psi_n^0$ , son los estados  $\psi_{n+i}^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Partimos de la sucesión de estados (4.29), pero ahora teniendo en cuenta que comenzamos en  $\psi_n^0$ :

$$0 \xleftarrow{M_n^-} \psi_n^0 \xrightarrow{M_{n+1}^+} \psi_{n+1}^1 \xrightarrow{M_{n+2}^+} \psi_{n+2}^2 \cdots \xrightarrow{M_{n+i}^+} \psi_{n+i}^i \cdots \quad (4.39)$$

Podemos ver una serie de propiedades sencillas relacionadas con los sectores de funciones propias.

1. Los estados del sector basado en  $\psi_n^0$  se obtienen por aplicación de los operadores  $M_k^+$ . En particular el estado genérico  $\psi_{n+i}^i$  viene dado por

$$\psi_{n+i}^i = C_n^i M_{n+i}^+ \cdots M_{n+2}^+ M_{n+1}^+ \psi_n^0$$

en donde  $C_n^i$  es una constante de normalización que se puede calcular.

2. Todos los estados  $\psi_{n+i}^i$  de un sector tienen la misma energía con respecto a su Hamiltoniano correspondiente, y dicha energía es  $E_n^0$ , la energía del estado fundamental del sector

$$H_n \psi_n^0 = E_n^0 \psi_n^0, \quad H_{n+1} \psi_{n+1}^1 = E_n^0 \psi_{n+1}^1, \quad \dots, \quad H_{n+i} \psi_{n+i}^i = E_n^0 \psi_{n+i}^i$$

Es decir, teniendo en cuenta el valor obtenido en (4.38):

$$E_n^0 = E_{n+1}^1 = E_{n+2}^2 = \dots = E_{n+i}^i = \dots = -(n+s)^2$$

En efecto, esta propiedad es inmediata ya que los estados están relacionados mediante operadores de intercambio.

3. La energía de un estado propio  $\psi_p^k$ , siendo  $k \leq p$  de cualquier sector se calcula de la forma siguiente

$$E_p^k = E_{p-1}^{k-1} = E_{p-2}^{k-2} = \dots = E_{p-k}^0 = -(s+p-k)^2$$

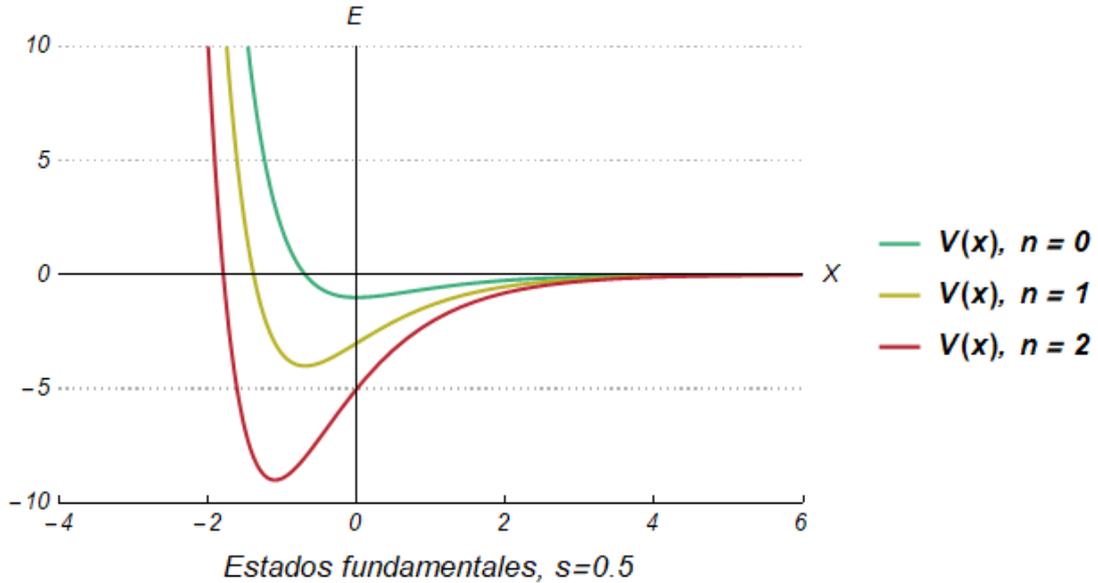


Figura 1: Potenciales asociados a  $H_0$ ,  $H_1$  y  $H_2$ .

Para fijar conceptos, procedemos, en lo que resta de capítulo, a comentar la apariencia que adoptan las expresiones expuestas así como los elementos que intervienen por medio de algunos ejemplos graficados.

Comencemos pues por la diferencia funcional que distingue los operadores escalera de los de intercambio. Para ello, podemos cotemplar tres eslabones consecutivos de la jerarquía de Hamiltonianos, los cuales vienen representados por tres pozos de potencial con el parámetro “s” común y “n” tomando valores sucesivos. A modo de ejemplo se han graficado en las figuras 2, 3, 4 los tres primeros, ie, los correspondientes a  $s = 0,5$  y  $n = 0, 1, 2$  respectivamente. Superpuestos a dichos potenciales se han considerado también todos los excitados ligados que se presentan para cada

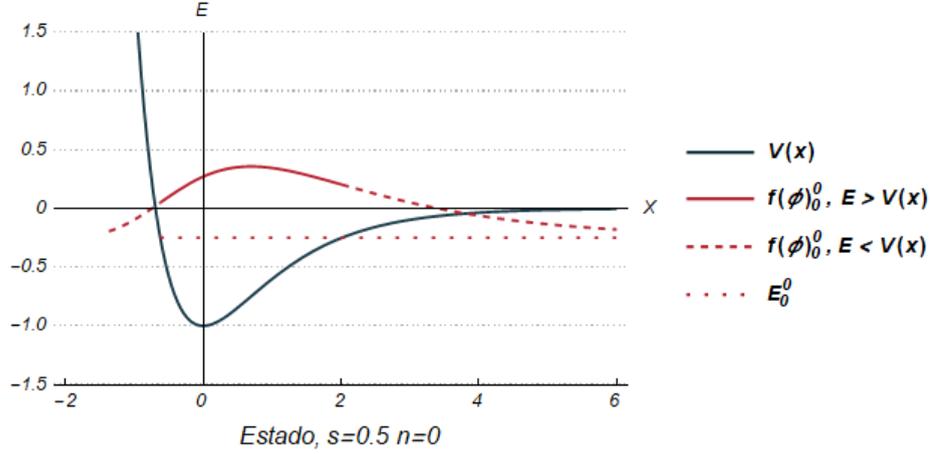


Figura 2: Potencial asociado a  $H_0$  y su estado fundamental  $\phi_0^0$ .

potencial, limitados superiormente por los estados de scattering<sup>29</sup>. Tal y como se puede apreciar, la cantidad de estados ligados estará limitada en cada caso al valor de  $n$  de dicho potencial. A la vista de los comentarios realizados podemos estructurar dichos estados en grupos atendiendo a dos criterios: aquellos que posean el mismo pozo de potencial o aquellos caracterizados por la misma energía.

- I. **Mismo pozo de potencial.** Esta es la discriminación que caracteriza las gráficas señaladas. Cada una de estas familias de funciones estarán compuestas por los estados excitados de uno fundamental donde, el paso de un elemento de esta a otro podrá llevarse a cabo mediante la acción de los operadores escalera. Este cambio acarreará la modificación del superíndice pero, dado que el potencial, y por ende el Hamiltoniano, se conserva invariante, el subíndice también permanecerá constante.
- II. **Mismo valor de la energía.** Este es el criterio escogido a la hora de representar dos estados con el mismo color en 5. En este caso las funciones poseerán la misma energía pero, puesto que dichos estados corresponden a diferentes formas del pozo de potencial, figura 1, se identificarán como correspondientes a niveles de energía distintos.

El "desplazamiento" de un elemento de la jerarquía a otro podrá expresarse por medio de la acción de los operadores intercambio, cambio que corresponde a la pronunciación del pozo de potencial y la excitación del estado considerado. En materia de índices, como ya se anticipó, el momimiento por medio de los operadores intercambio conlleva la variación tanto del subíndice como del superíndice pero de tal forma que la diferencia de ambos se conserva.

Podemos apreciar la distribución de funciones propias (estados) y valores propios (energías) en la siguiente tabla de la jerarquía de Hamiltonianos  $H_n$ .

<sup>29</sup>Estos vienen caracterizados por poseer más energía que la expresada por el potencial. De esta manera, las funciones estado de las partículas no se extinguen fuera del potencial, siendo en este sentido "libres" y perdiendo el, ya no estricto en cuántica, confinamiento que pudieran presentar.

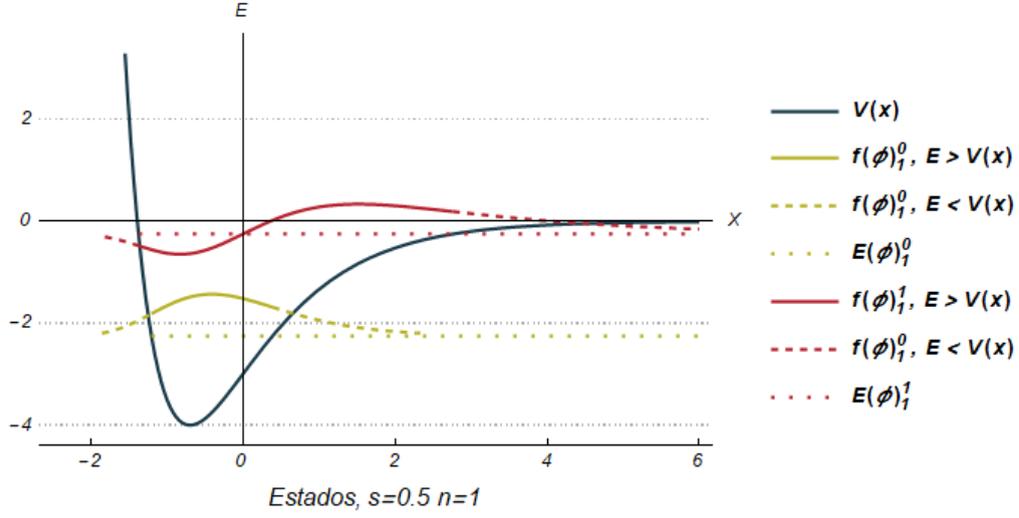


Figura 3: Potencial asociado a  $H_1$  y sus estados: fundamental  $\phi_1^0$  y primer excitado  $\phi_1^1$ .

$H_0$	$H_1$	$H_2$	$H_3 \dots$	$E$
$\psi_0^0 \xrightarrow{M_1^+}$	$\psi_1^1 \xrightarrow{M_2^+}$	$\psi_2^2 \xrightarrow{M_3^+}$	$\psi_3^3 \xrightarrow{M_i^+} \dots$	$E = E_0^0 = -s^2$
	$\psi_1^0 \xrightarrow{M_2^+}$	$\psi_2^1 \xrightarrow{M_3^+}$	$\psi_3^2 \xrightarrow{M_i^+} \dots$	$E = E_1^0 = -(s+1)^2$
		$\psi_2^0 \xrightarrow{M_3^+}$	$\psi_3^1 \xrightarrow{M_i^+} \dots$	$E = E_2^0 = -(s+2)^2$
			$\psi_3^0 \xrightarrow{M_i^+} \dots$	$E = E_3^0 = -(s+3)^2$

Es importante notar que, comparando otra vez los estados  $\psi_0^0$ ,  $\psi_1^0$  y  $\psi_2^0$  o los  $\psi_1^1$  y  $\psi_2^1$ , que aparecen en 5 son muy similares en forma pero estos solo comparten el nivel de excitación que les atribuimos, pues difieren en energía y forma del Hamiltoniano. Dichos estados se podrán obtener bajo la aplicación de los operadores desplazamiento sobre el anterior. Podemos visualizarlos en conjunto en [6] donde se ha representado el trío de estados fundamentales citado. Tal y como se observa en dicha figura, todos ellos verifican la forma Gaussiana que debe caracterizar las funciones estado fundamentales, es decir sin cortes con los ejes y un solo extremo relativo.

Desde una perspectiva general, la configuración de estas funciones seguirá unas pautas globales que podemos comentar en la gráfica 5. En ella es fácil constatar que las funciones-estado de estados ligados presentan un número de cortes con el eje horizontal igual al nivel de excitación correspondiente, siendo cero para el caso fundamental, como comentábamos, uno para el primer excitado, etc. De igual manera, la cantidad de extremos relativos en estos será el número de cortes con los ejes más uno, p.e 4 para el estado  $\psi_3^3$  por pertenecer al tercer nivel de excitación. Este resultado, que no procede demostrar aquí, es característico de la formulación

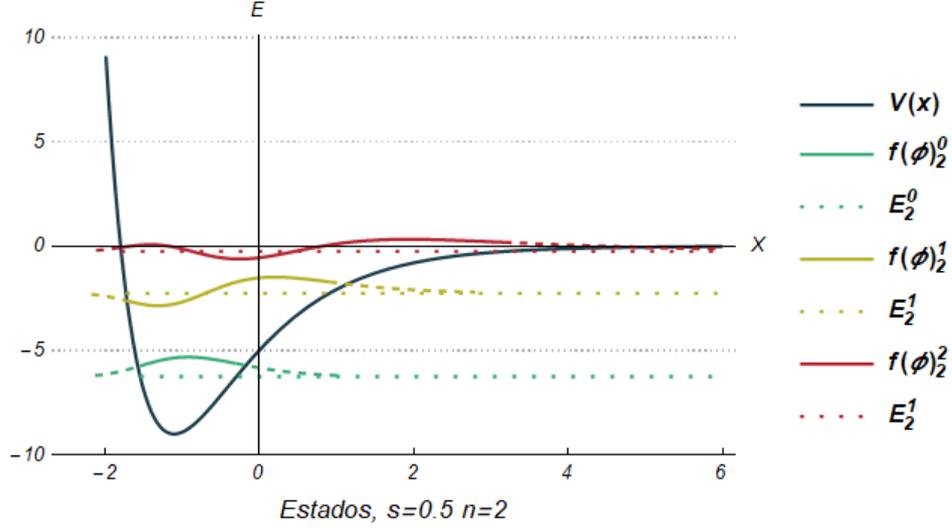


Figura 4: Potencial asociado a  $H_2$  y sus estados: fundamental  $\phi_2^0$ , primer excitado  $\phi_2^1$  y segundo excitado  $\phi_2^2$ .

cuántica para estados ligados y permite tanto proponer como refutar intuitivamente formas funcionales para los estados propios. Vistas esta serie de ejemplos, damos por finalizado este estudio cuántico.

## 4.6. Álgebra

En esta sección vamos a analizar el álgebra al que están asociados nuestros operadores<sup>30</sup>. Tal y como se puede ver en la proposición [1], si queremos que el álgebra que encierran sea un álgebra de Lie, debemos exigir que, para una cierta base, el conmutador de cada par de estos operadores pueda expresarse como combinación lineal de los elementos de dicha base. Dado que por el momento solo contamos con dos operadores,  $M_n^+$  y  $M_n^-$ , comenzamos por evaluar su conmutador y lo hacemos analizando su acción sobre un estado propio  $\psi_n$  de un Hamiltoniano  $H_n$  de la jerarquía con un valor propio  $E_n$ . De acuerdo con la segunda factorización de  $H_n$ :

$$M_{n+1}^- M_{n+1}^+ \psi_n = (H_n - \mu_{n+1}) \psi_n = (E_n + (s + n + 1)^2) \psi_n \quad (4.40)$$

De acuerdo con la segunda factorización de  $H_n$ :

$$M_n^+ M_n^- \psi_n = (H_n - \mu_n) \psi_n = (E_n + (s + n)^2) \psi_n \quad (4.41)$$

Si restamos las dos igualdades obtenemos el “conmutador”

$$\left( M_{n+1}^- M_{n+1}^+ - M_n^+ M_n^- \right) \psi_n = (\mu_n - \mu_{n+1}) \psi_n = 2((s + n) + 1/2) \psi_n \quad (4.42)$$

<sup>30</sup>Estos actuarán como elementos de la base del álgebra que tomemos, pues definen las transformaciones que podemos aplicar sobre las funciones estado. En términos de grupos de simetría definen precisamente las simetrías del grupo y en los grupos de Lie corresponden a los generadores infinitesimales.

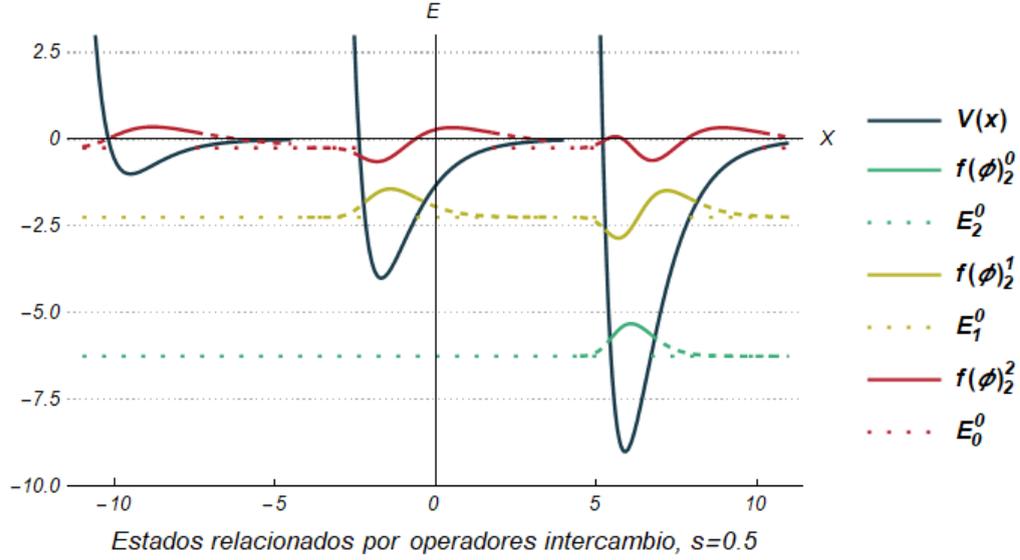


Figura 5: Estados relacionados por los operadores intercambio, con  $E=0,25$ .

De forma simbólica este “conmutador” lo escribimos así:

$$[M^-, M^+] = 2M_3 \quad (4.43)$$

en donde definimos la acción de  $M^3$  sobre cualquier función propia  $\psi_n$  de un Hamiltoniano de la jerarquía  $H_n$  de la forma:

$$M_3\psi_n := (s + n + 1/2)\psi_n$$

Es decir,  $M_3$  es un operador diagonal cuando actúa sobre funciones propias  $\psi_n$ . Además podemos escribir el conmutador de los operadores  $M^\pm$  y  $M_3$  cuando actúan sobre estas funciones:

$$[M_3, M^\pm] = \pm M^\pm \quad (4.44)$$

En efecto, por ejemplo, si  $M^+\psi_n = \alpha\psi_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} M_3M^+\psi_n - M^+M_3\psi_n &= M_3\alpha(\psi_{n+1}) - M_3(s + n + 1/2)\psi_n \\ &= \alpha(s + n + 1 + 1/2)\psi_{n+1} - \alpha(s + n + 1/2)\psi_{n+1} = \alpha\psi_{n+1} = M^+\psi_n \end{aligned}$$

En definitiva hemos visto:

- i) Los operadores  $M^\pm, M_3$ , cierran las reglas de conmutación

$$[M^-, M^+] = 2M_3 \quad [M_3, M^\pm] = \pm M^\pm \quad (4.45)$$

Se identifican con las de un álgebra de Lie  $su(1,1)$ . Por lo tanto hemos regresado al álgebra del que partimos.

- ii) Los operadores  $M^\pm, M_3$  dejan invariante cada sector de estados de la jerarquía  $H_n$ . Se puede decir por lo tanto que cada uno de estos sectores es una representación irreducible de  $su(1,1)$  que se caracteriza por un valor común de la energía.

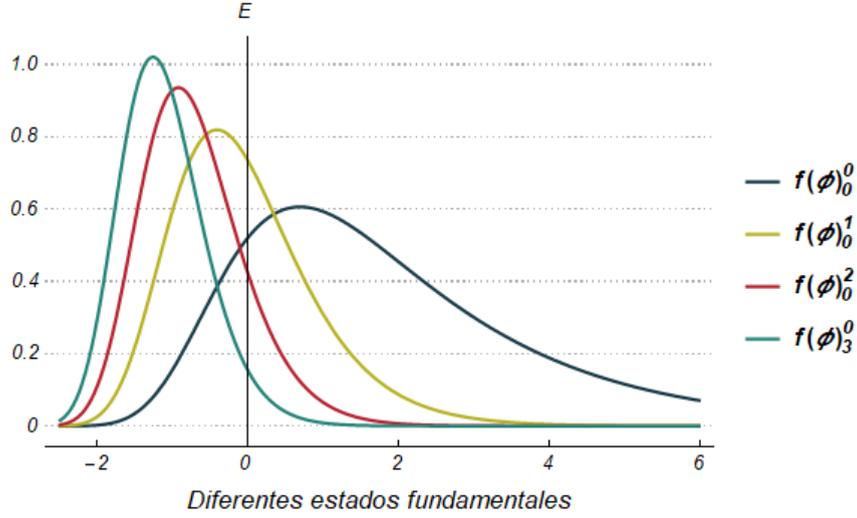


Figura 6: Estados fundamentales  $\phi_0^0, \phi_1^0, \phi_2^0$ ; asociados a los hamiltonianos  $H_0, H_1$  y  $H_2$ ; respectivamente.

- iii) Si tomamos el sector de estado fundamental  $\psi_n^0$ , la energía de todos los estados es:

$$E = E_n^0 = -(s + n)^2$$

Si calculamos el valor del operador Casimir del  $su(1, 1)$ , cuando actúa sobre  $\psi_n^0$  resulta ser

$$\mathcal{C}\psi_n^0 = (2M^+M^- - M_3(M_3 - 1))\psi_n^0 = (0 - (n+s+1/2)(n+s-1/2))\psi_n^0 = -(s+n)^2 + 1/4$$

En definitiva el valor del Casimir y el valor de la energía en cada sector difieren en  $1/4$ .

Concluimos la presentación de este elemento destacando esta relación, la cual verifica la conexión con el álgebra anticipada en la propuesta general del capítulo 3.3, y justifica llevar a cabo la obtención de estos sistemas integrables por medio de MASAs, pues en esencia los operadores que conmuten con el Casimir serán constantes del movimiento.

## 5. Morse Potential, tratamiento clásico

Persiguiendo la descomposición y resolución del Hamiltoniano, nuestro trabajo se orienta ahora, y en la medida de lo posible, en trasladar tanto la metodología como los objetos utilizados en el tratamiento cuántico para dar lugar a una factorización en el mismo sentido que se ha hecho. No obstante, no nos limitaremos a convertir directamente nuestros elementos ya calculados, lo cual exigiría en el caso general realizar previamente las consideraciones cuánticas sino que propondremos un método independiente aunque con un desarrollo en paralelo al visto. Utilizaremos para ello los resultados expuestos en [6], comentando los más relevantes para nuestro estudio en el siguiente apartado.

## 5.1. Marco teórico

Damos comienzo a este capítulo en la misma línea que en otras secciones mediante una introducción en la que presentaremos las nociones que estructuran el análisis que tendrá lugar a continuación. En el caso que nos ocupa, estas son referentes a la relación entre los elementos que configuran una factorización clásica de un Hamiltoniano, describiendo los posibles coeficientes que pueden intervenir en los factores, así como la relación global de estos con el Hamiltoniano por medio de las propiedades que emergen al utilizar el corchete de Poisson como aplicación entre ellos. Toda la formulación que va a ser llevada a cabo se hereda de la literatura [6], donde se realiza un estudio mucho más detallado y el cual admite una gran variedad de formas hamiltonianas. Por nuestra parte, nos limitaremos a reproducir algunos de los resultados más importantes<sup>31</sup>. Empecemos por plantear un Hamiltoniano general,

$$H = p^2 + V(x) , \quad (5.1)$$

y  $A^\pm$  dos funciones complejas conjugadas entre sí, todos ellos descritos como funciones suaves en términos de las coordenadas generalizadas,  $x$ , y momentos conjugados,  $p$ , en el espacio de fases. Consideremos la clase de factorización de  $H$ ,

$$H = A^+ A^- + \gamma(H) . \quad (5.2)$$

Esta expresión viene a ser la contrapartida clásica de [4.5] con la salvedad de que la constante puede ahora depender del propio Hamiltoniano. Las funciones  $A^\pm$  son de esta manera las equivalentes a los operadores intercambio y, exigiendo su linealidad respecto de los momentos conjugados  $p$ , adoptan la forma general,

$$A^\pm = \mp i f(x) p + \sqrt{H} g(x) + \varphi(x) + \phi(H) , \quad (5.3)$$

donde  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $\varphi(x)$  y  $\phi(H)$  son funciones cuya expresión particular dependerá del tipo de Hamiltoniano que deseemos conseguir. Construido así el espectro de posibles formas que puede adoptar es muy amplia, incluyendo como caso particular al potencial Morse que nos ocupa. Como último requisito para esta factorización precisamos que  $H$  y  $A^\pm$  formen un álgebra deformada dotada del corchete de Poisson como aplicación tal que:

$$\begin{aligned} \{H, A^\pm\} &= \pm i \alpha(H) A^\pm \\ \{A^+, A^-\} &= -i \beta(H) , \end{aligned} \quad (5.4)$$

con  $\alpha(H)$ ,  $\beta(H)$  funciones auxiliares a determinar para cada Hamiltoniano. La garantía de existencia de tales funciones  $A^\pm$  que satisfagan estas características proviene de la libertad de elección en las funciones que participan como sumandos de estas. De hecho, se puede determinar las restricciones que suponen estas relaciones en la configuración de  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $\varphi(x)$  y  $\phi(H)$ , así como del potencial  $V(x)$ . Para

---

<sup>31</sup>Concretamente se utilizarán las expresiones del capítulo II de [6], establecidas para un Hamiltoniano genérico, y los resultados de 5.1.2 del mismo documento, en los cuales se ha particularizado para un potencial tipo Morse.

ello sustituyamos en (5.2),  $p^2 = H - V(x)$ , por lo que tendremos  $A^\pm = A^\pm(x, H)$ , al considerar “x” y H variables independientes. Reescribiendo 5.2,

$$H = f^2(x)(H - V(x)) + \left( \sqrt{H}g(x) + \phi(H) + \varphi(x) \right)^2 + \gamma(H), \quad (5.5)$$

lo cual nos permite relacionar la forma particular de nuestro potencial con su expresión por medio de estas funciones genéricas. Por otra parte, el corchete de H con  $A^\pm$  es equivalente, en virtud de la proposición 2.10, a evaluar su diferencia entre la derivada total y parcial del tiempo,

$$\{H, A^\pm\} = \frac{dA^\pm}{dt} - \frac{\partial A^\pm}{\partial t} = \frac{\partial A^\pm}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A^\pm}{\partial H} \frac{dH}{dt}, \quad (5.6)$$

donde se ha tenido en cuenta que los operadores intercambio no dependen explícitamente del tiempo. Además, H es una constante del movimiento,  $\{H, H\} = 0$ , por lo que solo sobrevive el primer sumando de la última igualdad, el cual desarrollado adquiere la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \\ \left( \mp i \sqrt{H - V(x)} f'(x) \pm i \frac{1}{2\sqrt{H - V(x)}} V'(x) + \sqrt{H} g'(x) + \varphi'(x) \right) p, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde las primas denotan derivación respecto de su argumento y en la que hemos identificado la derivada total de x respecto de t con el momento conjugado,  $p = \frac{dx}{dt}$ , en virtud de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi (2.7) aplicadas a nuestro caso. Gracias a estas dos identidades, (5.5) y (5.7), estamos en condiciones de especificar el primer corchete de 5.4. Igualando entre sí los términos reales y los complejos por separado e identificando la derivada total de x respecto de t con el momento conjugado, obtenemos las siguientes dos relaciones,

$$\begin{aligned} \sqrt{H} g'(x) + \varphi'(x) &= \alpha(H) f(x) \\ - f'(x) (H - V(x)) + \frac{1}{2} f(x) V'(x) &= \alpha(H) \left( \sqrt{H} g(x) + \varphi(x) + \phi(H) \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ambas serán usadas en la próxima sección para, bajo una serie de consideraciones, especificar las funciones desconocidas para construir un potencial tipo Morse.

Por otra parte, podemos estudiar el comportamiento y evolución temporal de los operadores intercambio como objeto, sin entrar en las funciones que lo estructuran. Volviendo a las expresiones (5.4) y (5.6), de las cuales concluíamos,

$$\{A^\pm, H\} = \frac{d}{dt} A^\pm = \mp i \alpha(H) A^\pm, \quad (5.9)$$

se obtiene la forma de la derivada total de  $A^\pm$  respecto del tiempo. Tenemos por tanto las herramientas suficientes para evaluar la integral primera de estos operadores,

$$Q^\pm = A^\pm e^{\pm i \alpha(H) t}, \quad (5.10)$$

---

<sup>31</sup>Esta facilidad, como veremos en el último apartado de este capítulo, se traducirá en poder identificar el valor de ciertas constantes y funciones generales.

donde los parámetros  $Q^\pm$  serán por construcción constantes del movimiento. Probémoslo.

**Demostración 4.** Para comprobarlo basta evaluar la derivada total de dicho parámetro y verificar que es idénticamente nula,

$$\begin{aligned} \frac{dQ^\pm}{dt} &= \{Q, H\} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \{A, H\}e^{\pm i\alpha(H)t} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \\ &\mp i\alpha(H)A^\pm e^{\pm i\alpha(H)t} \pm i\alpha(H)A^\pm e^{\pm i\alpha(H)t} = 0, \end{aligned}$$

donde en esencia se ha usado (5.4) para determinar los corchetes  $\{H, A\}$  y (5.10) para la expresar la forma de los parámetros  $Q^\pm$ . Además se ha tenido en cuenta la regla de Leibniz's para el corchete  $\{Q, H\}$ , la se reduce a:

$$\{Q, H\} = \{A, H\}e^{\pm i\alpha(H)t} + \{e^{\pm i\alpha(H)t}, H\}A^\pm,$$

siendo el último corchete nulo puesto que dicha exponencial es una función de  $H$ .

Esta condición, como ya se ha mencionado a lo largo del documento, no solo es interesante en la medida en que refleja las simetrías del sistema, evidenciando así las relaciones con el álgebra de Lie, también es útil pues las simplificaciones que acarrearán nos permiten, en última instancia, resolver las trayectorias de manera analítica, tal y como se pretende evidenciar en el último apartado de este capítulo.

Indagando en la forma de estas integrales del movimiento podemos expresarlas, dado que contienen dependencia de  $H$ , en términos de los valores de sus energías,

$$q^\pm = ce^{\pm i\theta_0}, \quad (5.11)$$

siendo  $c$  y  $\theta_0$  constantes. La primera de ellas,  $c$ , se corresponde con el módulo de estos objetos, se puede relacionar con el Hamiltoniano gracias a su conexión con el producto de funciones intercambio, y por ende con la factorización de  $H$ ,

$$c^2(H) = Q^+Q^- = A^+e^{+i\alpha(H)t}A^-e^{-i\alpha(H)t} = E - \gamma(H). \quad (5.12)$$

donde  $E$  es el valor de la energía del Hamiltoniano. Por su parte  $\theta_0$  será una constante a determinar por las condiciones iniciales. Expuesta esta introducción teórica a la factorización clásica que va a ser llevada a cabo damos paso a la siguiente sección en la que particularizaremos los resultados.

## 5.2. Particularización a potencial Morse

Continuamos nuestro planteamiento concretando las formas generales que hemos expuesto en el punto anterior. Empezamos por describir nuestro Hamiltoniano en términos de los parámetros del espacio de fases, posiciones y momentos conjugados que denotaremos como  $x_i$  y  $p_i$  respectivamente. De esta manera, y puesto que estamos considerando un sistema unidimensional y en él solo participa una coordenada generalizada, podemos recuperar la forma [4.13] obtenida por el método de reducción por MASA.

$$\begin{aligned} H(x) &= p_x^2 + V(x) \\ V(x) &= -2 \left( s + \frac{1}{2} \right) e^{-x} + e^{-2x}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Este será común para ambas formulaciones pues, en lo referente a las factorizaciones, consideraremos la estructura hamiltoniana como el problema común a resolver. Ahora, como mencionábamos, uno podría calcular el equivalente clásico de los operadores intercambio sin más que adaptar el coeficiente de las derivadas parciales que presentan en su forma cuántica al esquema de momentos, por medio del principio de correspondencia. El problema es que, de esta forma, estaríamos replicando la factorización ya llevada a cabo, exigiendo su determinación previa. Además, en este caso particular, resulta interesante comparar el tratamiento del álgebra de Lie brindado por medio de conmutadores y el que ofrecen los corchetes de Poisson.

Por todo ello, tomamos la determinación de plantear una factorización independiente a la anterior, presentado una pareja de funciones  $A^+$ ,  $A^-$ , de manera que garanticen la mayor generalidad posible al Hamiltoniano. La apariencia de estas funciones será la anticipada por la expresión (5.3), por lo que nuestro papel ahora es determinar cada una de las funciones genéricas que las constituyen ( $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\phi(H)$ ) y los parámetros que determinan el álgebra ( $\alpha(H)$ ,  $\beta(H)$ ). Esto se puede conseguir, como anticipábamos, gracias a las identidades (5.8) podemos obtener dichos valores. Mostramos a continuación su forma así como la del potencial en base a estas, reservando el desarrollo de obtención al anexo (E):

$$\begin{aligned} H < 0, \quad \varphi(x) = 0, \quad \phi(H) = \frac{\delta_0}{\sqrt{-H}}, \\ \gamma(H) = \gamma_0 + H + \frac{\delta_0^2}{H}, \quad \alpha(H) = \alpha_0\sqrt{-H}, \\ g(x) = e^{\frac{\alpha_0}{2}x}, \quad f(x) = e^{\frac{\alpha_0}{2}x}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$V(x) = 2\delta_0 e^{-\frac{\alpha_0}{2}x} - \gamma_0 e^{-\alpha_0 x}, \quad (5.15)$$

siendo  $\alpha_0$ ,  $\gamma_0$  y  $\delta_0$  constantes aun por especificar. De hecho podemos identificar sus valores por comparación con nuestra expresión del potencial 5.13, resultando:

$$\alpha_0 = 2, \quad \gamma_0 = -1, \quad \delta_0 = -(s + 1/2). \quad (5.16)$$

De esta manera basta sustituir en (5.3) para finalmente construir nuestras funciones intercambio,

$$A^\pm = \mp i e^x p + \sqrt{-H} e^x - \frac{s + \frac{1}{2}}{\sqrt{-H}}. \quad (5.17)$$

Conocidas estas funciones podemos comprobar que se verifica la descomposición del Hamiltoniano (5.2) sin más que operar e introducir el valor de  $\gamma$  dado por (5.14) y el de  $\gamma_0$  que acabamos de exponer. Estas constantes también nos permiten dar una expresión para  $c$ , el módulo de nuestras integrales del movimiento según (5.12):

$$c(E) = \sqrt{E - \gamma(H)} = \sqrt{1 - \frac{(s + 1/2)^2}{E}}, \quad (5.18)$$

donde se ha tenido la precaución de sustituir la acción del Hamiltoniano por el valor de su energía asociada,  $E$ . Damos pie ahora sí al próximo apartado en el que analizaremos más detalladamente cómo estas integrales nos permiten obtener algebraicamente las trayectorias cerradas de una partícula, como es nuestro caso unidimensional.

### 5.3. Constantes del movimiento y trayectorias

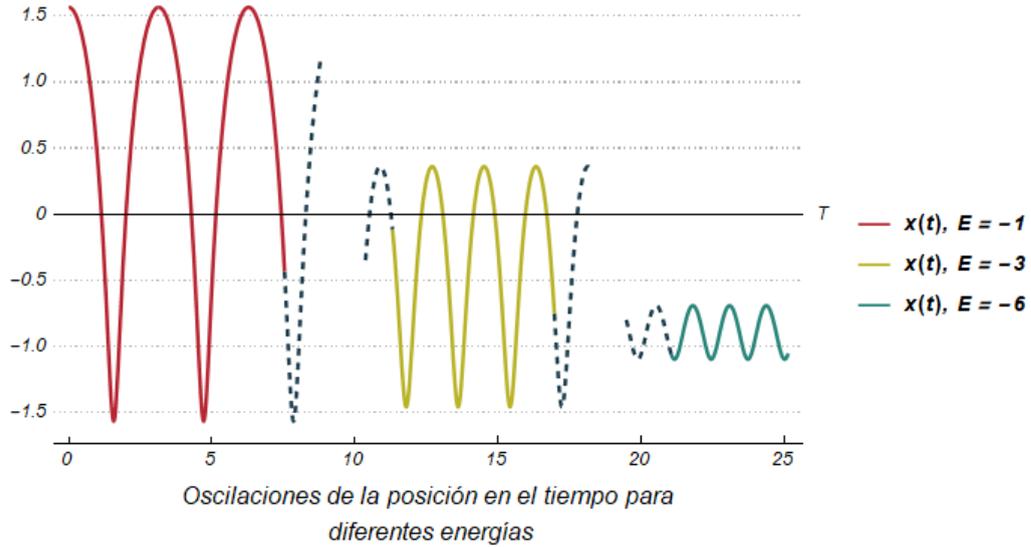


Figura 7: Oscilaciones de la variable  $x$  como función del tiempo para diferentes energías.

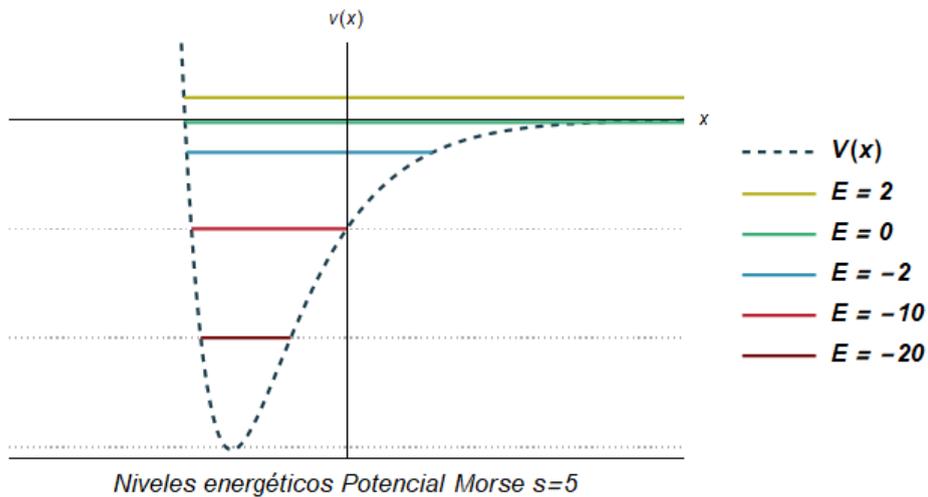


Figura 8: Diferentes niveles de energía para un mismo potencial,  $s=5$

Damos comienzo a esta sección en la que pretendemos concluir la aplicación de una factorización clásica en el desarrollo de un sistema Hamiltoniano tipo Morse, brindando una descripción detallada de la dinámica del sistema.

Tal y como se introducía en el anterior apartado, resulta interesante contemplar la pareja de integrales del movimiento  $Q^\pm$ . Conocido su módulo, el cual viene dado por (5.18), y la forma de los factores  $A^\pm$ , (5.17), si consideramos ahora la ecuación

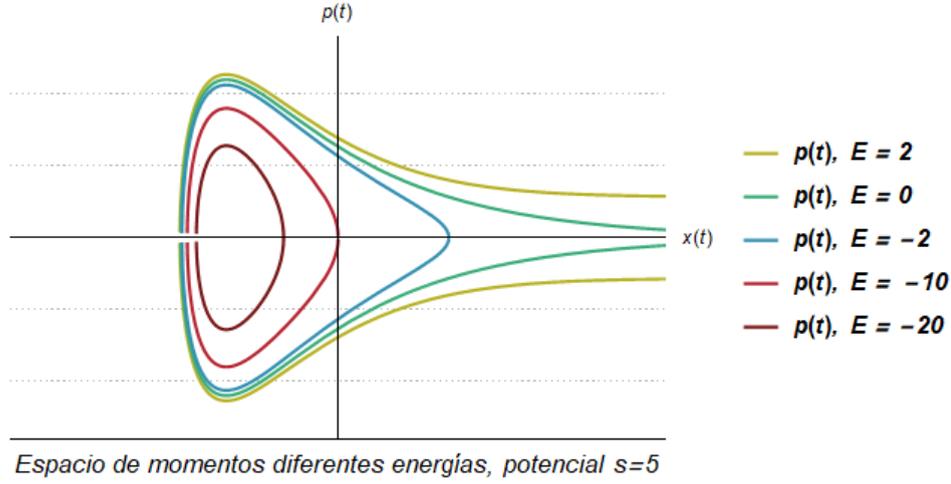


Figura 9: Espacio de momentos asociadas a partículas de diferente energía en un mismo potencial,  $s=5$ .

(5.10) se llega a:

$$\mp i e^x p + \sqrt{-E} e^x - \frac{s + \frac{1}{2}}{\sqrt{-E}} = \sqrt{\frac{1 - (s + 1/2)^2}{E}} e^{i(\theta_0 \mp 2\sqrt{-E}t)}, \quad (5.19)$$

donde recordamos  $E$  denotaba el autovalor de  $H$  y  $\theta_0$  una constante a imponer como condición inicial. Separando ahora esta última igualdad en la parte real e imaginaria obtenemos ecuaciones algebraicas para las posiciones,  $x$ , y los momentos,  $p$ , respectivamente,

$$x(t) = \log \left[ \frac{-(s + 1/2) - \sqrt{(s + \frac{1}{2})^2 + E} \cos(\theta_0 + 2\sqrt{-E}t)}{E} \right], \quad (5.20)$$

$$p(t) = -\frac{\sqrt{E^2 - (s + \frac{1}{2})^2 E} \sin(\theta_0 + 2\sqrt{-E}t)}{-(s + 1/2) - \sqrt{(s + \frac{1}{2})^2 - E} \cos(\theta_0 + 2\sqrt{-E}t)}. \quad (5.21)$$

Cabe señalar que para obtener trayectorias periódicas deberemos exigir en el caso general  $\delta_0 < 0$  y  $\gamma_0 < 0$  o lo que es equivalente para un rango de energías  $\delta_0^2/\gamma_0 < E < 0$ , condiciones que en nuestro caso suponen  $-(s + \frac{1}{2})^2 < E < 0$ .

De esta manera hemos alcanzado el objetivo inicial del capítulo, resolver analíticamente un Hamiltoniano tipo Morse. Vamos por tanto a completar este estudio comentando el comportamiento del sistema para algunas configuraciones de “ $s$ ” y “ $E$ ”.

Tomemos para este primer ejemplo un parámetro del potencial  $s = 2$ , simplemente para fijarlo, y representemos la evolución de  $x$  en el tiempo para diferentes valores de energía,  $-1$ ,  $-3$  y  $-6$ , tal y como se recoge en la figura 7.

Se puede percibir el carácter periódico de las oscilaciones, el cual da indefinidamente entre dos extremos. Este movimiento vendrá descrito por la ecuación 5.20,

observando que, para valores de la energía suficientemente pequeños, la raíz del numerador será compleja. Este es el caso excluido por las restricciones mencionadas y el cual se puede apreciar en la tendencia del sistema en las proximidades de  $(s + \frac{1}{2})^2 = 5,25$  unidades de energía. En la imagen podemos ver como efectivamente al aproximarnos a dicha cota el movimiento se extingue progresivamente, como esperaríamos intuitivamente. Además tal como se evidencia en la imagen 8, donde hemos recuperado la representación de un potencial Morse, el pozo de potencial es pronunciado, carácter exponencial, lo que se traduce en variaciones de la posición en zonas relativamente localizadas<sup>32</sup>.

Desde otra perspectiva podemos considerar el espacio de momentos expresado en función de la posición, como se expone en la figura 9. Esta representación por su parte, permite ilustrar el comportamiento para energías superiores al límite establecido,  $E = 0$ . Observando la imagen, podemos identificar estas con figuras “abiertas”, cuyos extremos no coinciden. Por otra parte se estructuran las formas cerradas, caracterizada por presentar dos uniones en el eje  $x$ . Estos puntos representan posiciones concretas de inflexión, donde el momento continua en sentido opuesto, periódicamente. Como caso singular se presentan los sistemas con energía nula,  $E = 0$ . Estos muestran una aproximación asintótica al eje “x”, lo cual denota una unión en el infinito, siendo el punto de transición de los otros dos.

Es interesante también considerar la similitud entre el esquema recogido y el que encontraríamos para un problema de Kepler. Este, como es sabido, viene caracterizado por un potencial inversamente proporcional a la distancia  $V(r) = \frac{1}{r}$ , asociado a la fuerza gravitatoria. La correspondiente representación del esquema de momentos realizada para este potencial exhibe la dinámica de un cuerpo en gravitación. En su equivalente, nuestros sistemas con  $E < 0$  corresponden a órbitas cerradas, en los cuales los objetos describen elipses pues el potencial es capaz de “confinar” el movimiento de este. Por su parte los sistemas con  $E > 0$  responden a objetos en orbitas hiperbólicas, los cuales poseen suficiente energía como para escapar del potencial sin caer a orbitas periódicas. Por último, las trayectorias parabólicas de Kepler, que en nuestro caso suponen  $E = 0$ , exponen un movimiento continuamente desacelerado al alejarse el cuerpo orbitante, disminuyendo su momento hasta el punto límite de detenerse en el infinito.

Finalizamos con esta comparación el desarrollo clásico y con este el cuerpo de este estudio dando paso a las conclusiones obtenidas a lo largo del proceso.

---

<sup>32</sup>Esta característica, reflejada en ciertos enlaces químicos que son gobernados por este tipo de potencial, determina el porque la longitud de dichas uniones presenta poca dispersión.

## 6. Conclusiones

Este trabajo se puede estructurar en tres partes en la medida en que persigue cubrir tres objetivos diferentes: retomar y ahondar en los conceptos propios del álgebra y formulación hamiltoniana, introducir y familiarizar al lector con las peculiaridades de los sistemas integrables y superintegrables, exponiendo cómo el empleo de herramientas matemáticas abstractas brindan la posibilidad de construir y modelar este tipo de sistemas y finalmente comprender por medio de un caso particular cómo las propiedades que hereda de su condición de superintegrabilidad se expresan en el proceso de determinación de las funciones de onda o trayectorias.

- I. El primero de ellos ha venido de la mano de la formación propia del grado en Física, por medio de asignaturas que van desde el álgebra impartido al inicio de nuestros estudios, hasta la mecánica teórica y cuántica o el estudio de grupos y simetrías. Vemos cómo este catálogo de conocimientos nos ha permitido afrontar cuestiones, que extralimitan los casos propios de la carrera, reivindicando el papel que esta tiene en el alumno como herramienta a futuro.
- II. Por su parte la segunda sección, permite recuperar la perspectiva más analítica de la física, aquella que no precisa adoptar aproximaciones al considerar sistemas que admiten soluciones exactas. Estos reflejan la conexión tan íntima que existe entre las simetrías y la conservación de magnitudes, relación que gobierna a cualquier escala como concebimos y modelamos la naturaleza.
  - a) También hemos estudiado cómo dichas magnitudes se estructuraban como ligaduras del sistema que restringían la libertad del sistema y de manera recíproca cómo esas restricciones determinaban la simetría que debía de presentar el espacio de configuración.
  - b) Apoyándonos en esta idea hemos estudiado los sistemas integrables y superintegrables, sistemas en los cuales las ligaduras nos permitían especificar analíticamente la dinámica del sistema, desarrollando a su vez un método de obtención para estos.
  - c) En esencia este se ha concretado en identificar las simetrías en el espacio de configuraciones de un sistema, de que manera relacionar estas con un álgebra conservado por un grupo de Lie y en última instancia, cómo obtener constantes del movimiento a partir de las transformaciones que describen estos elementos del grupo.
  - d) Además hemos particularizado todo este proceso para el caso de una pseudoesfera hiperbólica en el espacio complejo, verificando que esta es un espacio homogéneo de  $SU(1,1)$ . De esta manera, hemos comprobado cómo un estudio abstracto de las propiedades de un álgebra nos permite construir perfiles de potenciales y sistemas Hamiltonianos que modelan la experiencia práctica.
- III. En los siguientes apartados hemos afrontado la factorización desde una perspectiva tanto clásica como cuántica del potencial considerado que nos ha permitido por una parte, y en la línea del objetivo anterior, completar de principio

a fin un análisis específico, particular, constatando las capacidades y posibilidades reales adquiridas durante esta etapa de aprendizaje.

Por otra parte, persiguiendo una de las pretensiones más básicas de la Física, se mostraba la compatibilidad de ambas perspectivas. Cómo ambas visiones conviven y se puede recuperar expresiones equivalentes para ciertas condiciones es uno de los grandes logros que exponen estas dos formulaciones.

- a) En concreto para el caso cuántico, se han obtenido las familias de estados propios de los Hamiltonianos de forma analítica, evidenciando su integrabilidad.
- b) De igual manera, hemos presentado los operadores intercambio, los cuales manifestaban la conexión entre estos estados por medio de su acción, para finalmente mostrar cómo dichos operadores se relacionaban con el álgebra de partida, expuesto previamente.
- c) Así mismo, nos hemos familiarizado con los sectores, familias de estados con valor propio común, para finalmente describirlo como espacio homogéneo de  $su(1,1)$ .
- d) Por su parte en el estudio, se ha propuesto un método de factorización clásica que si bien no corresponde al usual, pues de forma estándar se realiza cuánticamente, presenta una perspectiva complementaria.
- e) En este proceso, se ha profundizado en la utilidad de las constantes del movimiento y cómo estas nos permiten resolver el sistema determinando trayectorias cerradas.

Por todo ello y resumiendo, podemos comprobar que cada sección de este estudio refleja aspectos que, en mayor o menor medida, están presentes tanto en la concepción del mundo que aporta la Física, como en la configuración mental con que nosotros la entendemos, siendo este el fin último del trabajo expuesto.

# Appendices

## A. Primeros conceptos y definiciones

### A.1. Concepto de grupo

La Física, en su empeño por recoger las particularidades de la naturaleza por medio de modelos que abstraigan sus propiedades, ha enfocado históricamente el análisis de esta en la búsqueda de patrones y elementos invariantes, ambos estrechamente ligadas con el concepto de simetría. El culmen de esta relación se expresa por medio del Teorema de Noether, el cual identifica dichas simetrías con la conservación de una magnitud. El interés de este resultado, además de la infinidad de aplicaciones que presenta, en mayor o menor medida, en todas las áreas de la Física, se debe a la capacidad de sintetizar la conexión entre la estructura formal de los objetos en

estudio con el comportamiento dinámico y cinético que deben presentar. Como contribución a esta visión, este artículo expone un caso concreto de su manifestación para el análisis de un sistema físico. En este sentido pretendemos, a continuación, plantear una serie de nociones previas a fin de entender las implicaciones de dicho teorema tanto en líneas como en última instancia para el caso que nos ocupa.

Iniciamos por tanto este apéndice abordando el concepto de simetría mencionado. Consideraremos simetría de un sistema a aquellas transformaciones sobre este cuyo efecto no lo cambien. Podemos pensar por ejemplo, en objetos de revolución, pongamos un cilindro, como un cuerpo con simetría bajo rotación sobre el eje. El objeto matemático para estudiar la simetría es el de grupo, cuya definición, aunque concisa, la enunciaremos a continuación por completitud de la memoria y por uniformar la notación.

**Definición 11. Grupo.** *Se entiende por grupo una estructura algebraica conformada por un conjunto de elementos,  $\mathbf{G}$ , y una operación,  $\circ$ , que denominaremos ley de composición interna, la cual es cerrada en  $\mathbf{G}$ ,  $\circ : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ , y satisface las siguientes propiedades:*

- I. *Es asociativa en  $\mathbf{G}$ .*
- II. *Posee un elemento neutro  $e \in \mathbf{G}$  tal que  $g \circ e = e \circ g = g$ ,  $\forall g \in \mathbf{G}$ .*
- III. *Para cada elemento de  $\mathbf{G}$  existe un elemento  $g' \in \mathbf{G}$  tal que  $g \circ g' = g' \circ g = e$ , considerando a este  $g'$  como el inverso de  $g$  en el grupo.*

A fin de trabajar con los grupos de una forma más familiar, estos se pueden expresar por matrices. Concretamente en álgebra abstracta, se denomina representación de un grupo  $\mathbf{G}$  al homomorfismo de grupos de  $\mathbf{G}$  en el grupo lineal general  $GL(n, \mathbb{C})$  de las matrices cuadradas, complejas e invertibles  $n \times n$ . Cuando consideremos un sistema, donde usualmente sus elementos, partículas, vienen descritas por sus posiciones y velocidades, podremos identificar cada configuración posible de valores para cada uno de los parámetros con un estado, vector del espacio. Además, las transformaciones entre estados podrán darse en términos de la aplicación de un elemento del grupo. En consecuencia surge la necesidad de especificar correctamente las transformaciones que pueden desencadenar estos grupos, contenido que presentamos en la sección 2.1, así como los espacios vectoriales y parámetros mencionados, las cuales abordaremos en el próximo apartado.

## A.2. Espacios y variedades

Como comentábamos, podremos referir la información de las partículas a una serie de coordenadas, las coordenadas generalizadas. Estas se definen en mecánica para un sistema físico como un conjunto de coordenadas en un cierto sistema de referencia tales que permiten describir unívocamente la situación de este a partir de una configuración dada. Entendiéndolas así, para un sistema dado se pueden proponer de una infinidad de formas, siendo unas más convenientes que otras en cada caso particular. Parece lógico en este sentido, distinguir las diferentes elecciones en

función del número de coordenadas necesarias para determinar el sistema. De esta manera contemplamos el término grado de libertad. En Física se entiende por grados de libertad al número mínimo de parámetros independientes necesarios para determinar simultáneamente la posición de cada partícula de este. La magnitud de esta cantidad corresponderá a los grados de libertad que presentan cada una de las partículas por separado menos las ligaduras, restricciones, que incorpora el conjunto de ellas. En este sentido los grados de libertad serán consideradas propiedades emergentes, es decir, que surgen de la estructura que gobierna el colectivo de las partículas pero no propiamente de cada partícula individual. Teniendo esto presente podremos considerar las coordenadas independientes, las cuales responden a la elección que involucre una menor cantidad de coordenadas generalizadas.

Continuamos nuestro desarrollo describiendo ahora el conjunto de espacios a los cuales vendrán referidas nuestras representaciones de grupos, en la medida en que aplicaremos esta estructura a sistemas de partículas con interpretación física. Partiendo de la base comenzamos por el concepto de variedad de configuración.

**Definición 12. *Espacio o variedad de configuración.*** *En mecánica clásica, se define el espacio de configuración de un sistema físico como el conjunto determinado por las coordenadas generalizadas de dicho sistema. En este espacio, los parámetros pueden satisfacer una serie de ligaduras matemáticas de tal forma que limiten las posibles configuraciones reales del sistema constituyendo estas últimas como conjunto la variedad de configuración.*

Por otra parte, es preciso destacar la incapacidad de este espacio para describir las velocidades de los elementos del sistema, lo cual es necesario para realizar un estudio de la dinámica de este. Surge entonces, de manera natural, la necesidad de expandir el espacio de configuración a lo que denominaremos espacio de fases el cual sí contempla la representación de estos parámetros. Este viene descrito formalmente como el fibrado cotangente de una variedad de configuración, donde el término fibrado cotangente hace alusión a la unión, con estructura de fibrado, de espacios que contienen todos los posibles momentos asociados a cada partícula y a cada posición de un sistema, lo cual equivale a un punto en el espacio de configuración. Estos espacios asociados se corresponderán con el espacio cotangente<sup>33</sup>, al espacio de configuración en el punto indicado. De esta forma, cada punto de este fibrado especificará un estado particular del sistema. Esta descripción no es la más precisa<sup>34</sup> pero nos permite hacernos una idea global. Damos por finalizado este punto concerniente a los espacios en los que se define nuestro sistema dando pie a la siguiente sección en la cual consideraremos una serie de aplicaciones con las que podremos equipar nuestras variedades para dar lugar a ciertas álgebras de Lie, por ejemplo.

---

<sup>33</sup>Se entiende por espacio cotangente el espacio dual del espacio tangente, el cual se puede demostrar contendrá a las velocidades por ser derivadas primeras. Por su parte,  $V^*$ , de un espacio vectorial  $V$  es el conjunto de todas las transformaciones lineales  $V \rightarrow \mathbf{R}$ .

<sup>34</sup>Descripciones más rigurosas pueden ser llevadas a cabo por medio de 1-formas, conceptos en los cuales no se pretende entrar en este artículo pero se pueden encontrar en el capítulo introductorio de [5].

### A.3. Corchete de Lie

En este punto, donde ya poseemos una idea global de cómo podemos representar los elementos que integran estos grupos y dónde viven estas representaciones, estamos en disposición de presentar algunas de las diferentes expresiones que pueden adoptar las operaciones que los ligan, es decir, las leyes de composición interna. Si bien estas pueden manifestarse de muy diversas formas, nosotros nos centraremos en abordar aquellas que nos permitan construir las álgebras que precisemos, acomodándose estas a la simetría de nuestro sistema. Por tanto, comenzamos por definir el corchete de Lie, concepto capital en el desarrollo que tendrá lugar, como iremos viendo más adelante.

**Definición 13. Corchete de Lie.** Sea  $\mathbf{V}$  un espacio vectorial. Se define el corchete de Lie,  $[ \ ]$ , como una aplicación bilineal antisimétrica  $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ , que satisface la identidad de Jacobi,

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0 \quad \forall u, v, w \in \mathbf{V} .$$

La importancia de esta aplicación radica en permitirnos trabajar simultáneamente en los dos paradigmas, clásico y cuántico, por medio de dos realizaciones diferenciadas del Corchete de Lie, el Corchete de Poisson y el conmutador respectivamente. Ahora sí vamos a proceder a detallar las dos aplicaciones mencionadas: Corchete de Poisson y conmutador.

**Definición 14. Corchete de Poisson.** Consideremos el espacio fásico de un sistema físico con un número de grados de libertad finito. Sean  $f$ ,  $g$  y  $h$  funciones suaves, o infinitamente diferenciables (es decir pertenecientes a  $\mathbb{C}^\infty$ ), que operan en dicho espacio fásico y el tiempo. Entonces, podemos definir el corchete de Poisson como la aplicación bilineal,  $\{ \}$ , en las funciones diferenciables satisfaciendo las siguientes propiedades:

- I. Anticonmutatividad,  $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- II. Regla de Leibniz,  $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$
- III. Identidad de Jacobi  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

para cualquier  $f$ ,  $g$ ,  $h$  <sup>35</sup>.

Una descripción más concreta del corchete de Poisson  $\{f, g\}$  de  $f$ ,  $g$  dos de las funciones mencionadas puede darse en términos de las coordenadas canónicas,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$  como:

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} , \quad (\text{A.1})$$

donde las coordenadas canónicas<sup>36</sup> son un tipo de coordenadas generalizadas que deben satisfacer las relaciones fundamentales de Poisson,

<sup>35</sup>Estas propiedades son consecuencia de la correspondencia entre el corchete de Poisson para funciones suaves y el corchete de Lie en campos vectoriales coexactos, aquellos en los que la acción de dicho campo vectorial sobre una función coincide con la derivada externa de la función.

<sup>36</sup>En general, se podrán considerar diferentes colecciones de coordenadas canónicas, definiendo inclusive transformaciones canónicas que lleven de una elección particular a otra.

$$\{q^i, q^j\} = 0 \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad \{q^i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (\text{A.2})$$

con  $i, j \in 1, 2, \dots, N$  donde  $N$  es el número de coordenadas generalizadas<sup>37</sup>. Podemos considerar un nuevo tipo de cambio de coordenadas, las denominadas transformaciones canónicas que preservan la característica canónica de sus coordenadas tras el cambio. Estas coordenadas y transformaciones poseen propiedades útiles en muchos aspectos pero nosotros nos centraremos en la referente a la transformación de sus momentos, la cual recogemos a modo de proposición como sigue:

**Proposición 5.** *Dado un sistema expresado por medio de coordenadas canónicas, los momentos conjugados vienen regidos por un comportamiento covariante<sup>38</sup>, es decir:*

$$p_x \propto \frac{\partial}{\partial x},$$

siendo  $p_x$  el momento canónico conjugado asociado a la coordenada canónica  $x$ . De igual manera, bajo una transformación canónica los momentos conjugados varían de forma covariante.,

$$x, p_x \rightarrow x', p'_x : x = Jx', p_x = J^{-1}p'_x,$$

donde el primado denota cambio de variable y  $J$  es el Jacobiano de la transformación.

Esta proposición supone una introducción a la forma que adoptará la relación de correspondencia clásica-cuántica para los momentos, tal y como enunciaremos en la próxima sección. Por su parte, puede ser probada atendiendo a la ligadura impuesta por la tercera igualdad en (A.2) para los sistemas de coordenadas canónicos. Relacionará las variaciones que experimentarán las coordenadas generalizadas y los momentos conjugados bajo un cambio de coordenadas. Por último si tenemos en cuenta que las coordenadas generalizadas son consideradas contravariantes por definición, se concluyen ambas ecuaciones para los momentos conjugados.

Por otra parte, el hecho de considerar el corchete de Poisson como una realización del corchete de Lie viene de constatar que ambas son aplicaciones bilineales, como se desprende de [A.1], y de comparar, tal y como comentábamos en el pie de página, las propiedades que deben satisfacer ambas, destacando que el primero de ellos debe verificar las del corchete de Lie y además la identidad de Jacobi. Esta aplicación como hemos visto opera con funciones y nos permitirá equipar nuestro álgebra en el tratamiento clásico de la mecánica. Por el contrario, en mecánica cuántica los objetos que participarán en esta descripción del álgebra serán los denominados operadores. Estos operadores, ya familiares para el lector, se definirán como una aplicación entre espacios vectoriales  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ , donde usualmente los elementos de estos espacios

---

<sup>37</sup>Se puede realizar una formulación más abstracta de las coordenadas canónicas por medio de formas simplécticas y 1-formas, de manera que no se dé esta recursividad, como la que se realiza en el apartado 1.3.1 de [5].

<sup>38</sup>Esta descripción es tomada en referencia a cómo se ven alterados los parámetros al redimensionar los ejes. Si los objetos se transforman de igual manera, proporcionalmente, a la variación que experimentan los ejes, los consideraremos covariantes. Si lo hacen inversamente proporcional los denominaremos contravariantes. Por consiguiente, el comportamiento de un elemento contravariante o covariante podrá expresarse bajo la aplicación del Jacobiano o de su inversa respectivamente.

corresponderán a funciones, construyendo de esta manera funciones que tomen a otras como argumentos. Partiendo de esta idea, proponemos la segunda aplicación a la que se hacía mención: el conmutador.

**Definición 15. Conmutador.** Sean  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}$  dos espacios de Hilbert, y  $A$  y  $B$  dos operadores que actúan como una aplicación  $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ . Se define en mecánica cuántica el conmutador como la aplicación entre operadores<sup>39</sup>,

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X) \quad (\text{A.3})$$

donde  $A(B)$  denota el operador  $A$  actuando sobre la acción de  $B$ .

Es evidente, dada esta definición, que el propio conmutador tendrá estructura de operador. Antes de dar paso al siguiente apartado, en el que introduciremos el álgebra de Lie y algunos de los elementos que aparecen en relación con él, vamos a cerrar este punto probando que el conmutador constituye efectivamente una realización del corchete de Lie.

**Demostración 5.** Basta comprobar que el conmutador verifica las propiedades del corchete de Lie. En concreto, es una aplicación bilineal atendiendo al pie de nota que se acaba de exponer, esta es alternativa pues se anula para dos entradas iguales,  $[X, X] = X(X) - X(X)$ . Además satisface la identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned} [[A, B], C]f + [[B, C], A]f + [[C, A], B]f &= [A(B) - B(A), C]f + \dots \\ &= A(B(C))(f) - B(A(C))(f) - C(A(B))(f) + C(B(A))(f) + \dots = 0, \end{aligned}$$

donde dichos operadores, campos vectoriales, actúan sobre funciones diferenciables  $f$ .

## B. Producto $J^{-1}K'(J^{-1})^T$

Primero se realizará el producto y posteriormente se indicarán las simplificaciones que llevan al resultado. Comenzamos diseccionando el producto,

$$J^{-1}K' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} A^{-1} & \bar{A}^{-1} \\ B^{-1} & \bar{B}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \bar{A}^{-1}K & A^{-1}K \\ \bar{B}^{-1}K & B^{-1}K \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Aplicamos ahora el último término del producto,

$$\begin{aligned} J^{-1}K'(J^{-1})^T &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} \bar{A}^{-1}K & A^{-1}K \\ \bar{B}^{-1}K & B^{-1}K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^{-1})^T & (B^{-1})^T \\ (\bar{A}^{-1})^T & (\bar{B}^{-1})^T \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{A}^{-1}K(A^{-1})^T + A^{-1}K(\bar{A}^{-1})^T & \bar{A}^{-1}K(B^{-1})^T + A^{-1}K(\bar{B}^{-1})^T \\ \bar{B}^{-1}K(A^{-1})^T + B^{-1}K(\bar{A}^{-1})^T & \bar{B}^{-1}K(\bar{B}^{-1})^T + B^{-1}K(\bar{B}^{-1})^T \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Ante esta expresión podemos proponer una serie de relaciones que reduzcan al mínimo el número de coeficientes que intervienen. Para ello primero nos detenemos en la

<sup>39</sup>Dicho conmutador se puede considerar una aplicación  $[ ] : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  pues los operadores involucrados vienen descritos por su acción entre espacios vectoriales.

estructura de las matrices  $B$ . Estas deben pertenecer al álgebra  $su(1,1)$  en la medida en que las matrices  $Y$ , que intervienen en su construcción, pertenecen al grupo de Lie  $SU(1,1)$ , tal como se evidencia en la proposición 2. Esta condición supone, por definición, la unitariedad de las matrices  $B$  respecto a la métrica  $K = \text{diag}(1, -1)$ ,

$$BKB^\dagger = K, \quad (\text{B.3})$$

donde el superíndice  $\dagger$  denota conjugación Hermítica. Además, la inversa de  $B$ ,  $B^{-1}$  también pertenecerá a dicho álgebra y por ende también satisface la relación expuesta.

También podemos considerar propiedades asociadas a las matrices  $A$ , las cuales, y de acuerdo a la definición (3.10)  $A = Y_\rho y^\rho = Y_\rho B(x)_\mu^\rho s^\mu$ , contendrán el producto de matrices  $Y B$ . Como notamos de su construcción, ambos elementos  $Y$  y  $B$  estarán definidas por medio de formas matriciales puramente complejas. Además estas matrices conmutarán, puesto que la segunda se obtiene como desarrollo en serie de las primeras y las matrices  $Y$  conmutan entre ellas por ser elementos de la MASA. En este sentido, parece lógico buscar construcciones cuya conjugación compleja guarde una relación de signo con la original. Consideremos con estos propósitos el producto  $A^{-1}K(B^\dagger)^{-1}$  descomponiendo  $A$  en sus integrantes como hemos indicado

$$A^{-1}K(B^\dagger)^{-1} = (Y_\rho B(x)_\mu^\rho s^\mu)^{-1}K(B^\dagger)^{-1} = (B(x)_\mu^\rho Y_\rho s^\mu)^{-1}K(B^\dagger)^{-1}, \quad (\text{B.4})$$

donde hemos aplicado precisamente que  $Y$  y  $B$  conmutan. Denominemos entonces  $Y_s$  a las matrices  $Y_\rho s^\rho$ , las cuales poseeran por columnas los vectores  $Y_\rho s$ . De esta forma, podemos reescribir el inverso de  $A^{-1}$  en esta expresión,

$$A^{-1}K(B^\dagger)^{-1} = (Y_s)^{-1}B(x)^{-1}K(B^\dagger)^{-1} = (Y_s)^{-1}(B^\dagger K B)^{-1} = (Y_s)^{-1}K, \quad (\text{B.5})$$

habiendo usado en la última igualdad la identidad (B.3) sobre la inversa de  $B$ . Si ahora consideramos la conjugación de este producto observamos que se traducirá en el cambio de signo de  $Y_s$ , por lo que podemos establecer:

$$A^{-1}K(B^\dagger)^{-1} + \overline{A^{-1}K(B^\dagger)^{-1}} = 0, \quad (\text{B.6})$$

En esencia esta propiedad se puede entender como la compensación de los factores  $B$  que aparecen a ambos lados de la métrica, dejando restante únicamente la contribución de  $Y$ . Dicha compensación se da también en el producto  $A^\dagger K A$ , el cual podemos expresar como:

$$A^\dagger K A = (Y_s)^\dagger K (Y_s), \quad (\text{B.7})$$

obteniendo el término de la derecha del igual mediante una simplificación equivalente a la vista. Además podemos notar que contrariamente al caso anterior, el segundo miembro de esta igualdad no se ve alterado bajo conjugación compleja, pues el signo cambia dos veces. De igual manera, el inverso de este producto,  $(A^\dagger K A)^{-1} = A^{-1}K^{-1}(A^\dagger)^{-1}$ , presentará también esta simetría. Teniendo en cuenta que  $K$  es una matriz involutiva,  $K = K^{-1}$ , introducimos finalmente nuestra última relación,

$$A^{-1}K(A^\dagger)^{-1} = \overline{A^{-1}K(A^\dagger)^{-1}}. \quad (\text{B.8})$$

En base a estas reescribamos (B.2),

$$\begin{aligned} J^{-1}K'(J^{-1})^T &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} \bar{A}^{-1}K(A^{-1})^T A^{-1}K(A^\dagger)^{-1} & \bar{A}^{-1}KB^\dagger + A^{-1}K(B^\dagger)^{-1} \\ \bar{B}^{-1}K(A^{-1})^T + B^{-1}K(A^\dagger)^{-1} & \bar{B}^{-1}K(B^\dagger)^{-1} + B^{-1}K(B^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2A^{-1}K(A^\dagger)^{-1} & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

donde, en esencia, hemos aplicado (B.8) y (B.3) para el primer y segundo elemento de la diagonal respectivamente, y (B.6) para el resto. Este resultado coincide, tras evaluar el producto en (3.15) con los vectores momento, con el propuesto en [1] ecuación (3.20).

## C. Desarrollo en serie de potencias de exponencial de matrices, (3.20)

Partiamos de la expresión,

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix} = \exp \left[ x_0 \begin{pmatrix} i & i \\ -i & -i \end{pmatrix} \right] \exp \left[ x_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} s^0 \\ s^1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

la cual involucra exponenciales donde aparecen matrices como exponente. Para trabajar con ellas, desarrollamos la exponencial en serie de potencias como si se tratara de exponentes numéricos, con la garantía de que esta serie convergerá, y de hecho lo hará a una matriz perteneciente al grupo matricial de Lie, para cualquier matriz real o compleja  $X$ , por pertenecer  $X$  al álgebra de Lie,

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}.$$

Para el caso que nos ocupa, estas adoptan una forma especialmente simple, pues la primera de ellas es nilpotente y por definición se anulará a partir una determinada potencia, y la segunda es diagonal lo cual determina que todas sus potencias y además se puedan expresar de acuerdo a:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}, \quad e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{d_n} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

En concreto:

$$\exp \left[ \begin{pmatrix} i & i \\ -i & -i \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & i \\ -i & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$\exp \left[ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right] s_1 = \begin{pmatrix} e^{is_1} & 0 \\ 0 & e^{is_1} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

donde se aprecia que la matriz nilpotente es de orden 3 (la identidad corresponde a la potencia 0). Podemos finalmente evaluar la suma de ambas contribuciones,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1+i)x_0 & ix_0 \\ -ix_0 & (1-i)x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{is_1} & 0 \\ 0 & e^{is_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^0 \\ s^1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((1+ix_1)s_0 + ix_1s_1)e^{ix_0} \\ (-ix_1s_0 + (1-ix_1)s_1)e^{ix_0} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

donde se ha recuperado el resultado esperado.

## D. Expresión matricial del potencial como producto ( $A^\dagger K A$ )

Partiendo de la expresión eqn: A nuevas variables podemos sustituir en 3.16. Vamos a comenzar realizando el producto de las tres matrices que intervienen en dicho potencial para posteriormente evaluar la inversa del resultado. Empezamos de izquierda a derecha

$$\begin{aligned} A^\dagger K &= \begin{pmatrix} -i((1-ix_1)s_0 - ix_1s_1)e^{-ix_0} & -i(ix_1s_0 + (1+ix_1)s_1)e^{-ix_0} \\ -(is_0 + is_1)e^{-ix_0} & (is_0 + is_1)e^{-ix_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -i((1-ix_1)s_0 - ix_1s_1)e^{-ix_0} & i(ix_1s_0 + (1+ix_1)s_1)e^{-ix_0} \\ -(is_0 + is_1)e^{-ix_0} & -(is_0 + is_1)e^{-ix_0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Completamos el producto multiplicando ahora por A,

$$\begin{aligned} A^\dagger K A &= A^\dagger K \begin{pmatrix} i((1+ix_1)s_0 + ix_1s_1)e^{ix_0} & (is_0 + is_1)e^{ix_0} \\ i(-ix_1s_0 + (1-ix_1)s_1)e^{ix_0} & (-is_0 - is_1)e^{ix_0} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} s_0^2 - s_1^2 & (s_0 + s_1)^2 \\ (s_0 + s_1)^2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Finalmente evaluamos la inversa de dicha matriz,

$$(A^\dagger K A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(s_0+s_1)^2} \\ \frac{1}{(s_0+s_1)^2} & -\frac{s_0^2-s_1^2}{(s_0+s_1)^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(s_0+s_1)^2} \\ \frac{1}{(s_0+s_1)^2} & \frac{-1}{(s_0+s_1)^4} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

donde en la última igualdad hemos impuesto la restricción de esfera hiperbólica,  $s_0^2 - s_1^2 = 1$ .

## E. Obtención explícita del potencial: caso clásico de (5.14)

Para el potencial que buscamos, tipo Morse, debemos asumir las siguientes premisas sobre las funciones a determinar:

$$H < 0 \Rightarrow \sqrt{H} \rightarrow \sqrt{-H}, \quad \phi(H) = \frac{\delta_0}{\sqrt{-H}}, \quad g(x) \neq 0, \quad \varphi(x) = 0. \quad (\text{E.1})$$

De esta manera podemos reescribir (5.8) obteniendo la relación entre  $f(x)$  y  $g(x)$ ,

$$f(x) = \frac{\sqrt{-H}}{\alpha(H)} g'(x) , \quad (\text{E.2})$$

donde  $\alpha(H)$  es la única variable que depende del Hamiltoniano y por ende la única que puede compensar la constante  $\sqrt{-H}$ . Siendo así podemos fijar la forma estructural de  $\alpha$  salvo quizás una constante  $\alpha_0$ ,

$$\alpha(H) = \alpha_0 \sqrt{-H} . \quad (\text{E.3})$$

Por su parte, la segunda expresión se configura como:

$$H = f^2(x) (H - V(x)) + \left( \sqrt{-H} g(x) + \frac{\delta_0}{\sqrt{-H}} \right)^2 + \gamma(H) . \quad (\text{E.4})$$

A la vista de los factores que intervienen podemos proponer una forma para  $\gamma$  como:

$$\gamma(H) \equiv \gamma_0 + \gamma_1 H + \gamma_{-1} \frac{1}{H} \quad (\text{E.5})$$

donde para que se igualen los términos con  $\frac{1}{H}$  en esta segunda ecuación se establece que:

$$\gamma_{-1} = \delta_0^2 . \quad (\text{E.6})$$

Repitiendo las consideraciones sobre la dependencia funcional pero esta vez con  $H$  se llega a:

$$1 = f^2(x) - g^2(x) + \gamma_1 , \quad (\text{E.7})$$

y sustituyendo de (E.2),

$$1 = \frac{4}{\alpha_0^2} (g'(x))^2 - g^2(x) + \gamma_1 . \quad (\text{E.8})$$

La solución de esta ecuación diferencial para  $g(x)$  puede darse en términos de dos constantes  $C_1$  y  $C_{-1}$  como sigue,

$$g(x) = C_1 e^{\frac{\alpha_0}{2} x} + C_{-1} e^{-\frac{\alpha_0}{2} x} , \quad (\text{E.9})$$

y trasladando este resultado a  $f(g)$  mediante (E.2) y (E.7)

$$f(x) = C_1 e^{\frac{\alpha_0}{2} x} - C_{-1} e^{-\frac{\alpha_0}{2} x} . \quad (\text{E.10})$$

De esta manera se puede concretar  $\gamma_1$  al desarrollar otra vez (E.7),

$$1 = 4C_1 C_{-1} + \gamma_1 , \quad (\text{E.11})$$

reflejando una forma final para  $\gamma$  como suma de todas estas contribuciones,

$$\gamma = \gamma_0 + (1 - 4C_1 C_{-1}) H + \frac{\delta_0^2}{H} . \quad (\text{E.12})$$

Conocidas estas funciones, salvo las constantes que se identificaran por comparación en un caso concreto, podemos obtener la forma final del potencial a partir de (5.5),

$$-f^2(x)V(x) + 2g(x)\delta_0 + \gamma_0 = 0 , \quad (\text{E.13})$$

resultando,

$$V(x) = \frac{2\delta_0 \left( C_1 e^{\frac{\alpha_0}{2}x} + C_{-1} e^{-\frac{\alpha_0}{2}x} \right) + \gamma_0}{\left( C_1 e^{\frac{\alpha_0}{2}x} - C_{-1} e^{-\frac{\alpha_0}{2}x} \right)} . \quad (\text{E.14})$$

Esta expresión incluye dentro de su generalidad al potencial Morse. En concreto tomando  $C_1 = 1$ ,  $C_{-1} = 0$  recuperamos la estructura formal de nuestro potencial (3.26),

$$V(x) = 2\delta_0 e^{-\frac{\alpha_0}{2}x} - \gamma_0 e^{-\alpha_0 x} . \quad (\text{E.15})$$

## 7. Bibliografía

### Referencias

- [1] M. A. del Olmo, M. A. Rodríguez and P. Winternitz, “Integrable systems based on  $SU(p,q)$  homogeneous manifolds”. *J. Phys. A: Math. and Theor.* **34** (1993) 5119-5139.
- [2] J. Calzada, M. del Olmo and M. Rodríguez, “Pseudo-orthogonal groups and integrable dynamical systems in two dimensions”. *J. Phys. A: Math. and Theor.* **40** (1999) 189-196.
- [3] M. Novaes “Some basics of  $su(1,1)$ ”. *Revista Brasileira de Ensino de Física.* 26 (2004) 351-357.
- [4] E. Rodríguez *Sistemas de raíces abstractas y álgebras de Lie*. Tesis doctoral. Universidad de Sonora. (2007) 63-79
- [5] Á.Romaniega. *Sistemas superintegrables en Mecánica Clásica y en Mecánica Cuántica*. Trabajo de fin de grado. Universidad de Valladolid (2017).
- [6] S.Kuru and J. Negro, “Factorizations of one dimensional classical systems”, *Ann. Pyisics.* **323** 2007 413-431.
- [7] W. Miller, Jr. Willard, S. Post, Sarah et Winternitz, Pavel “*Classical and Quantum Superintegrability with Applications*”, *J. Phys. A: Math. and Theor.* **46**, (2013) 413-431 423001.
- [8] François Gieres, “Mathematical surprises and Dirac’s formalism in quantum mechanics”, *Rep. Prog. Phys.* 63 (2000).
- [9] R.San José Rubio. *Aproximación a los grupos de Lie en Física a través de un hamiltoniano de tipo Poschl-Teller*. Trabajo fin de grado.
- [10] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanis*, Vol. 1. Wiley, New York 1991.
- [11] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics*, Vol. 1. World Scientific, Singapore, 1985.